§ 4. Механическая форма уравнения энергии (уравнение Бернулли)

Выше мы подробно рассмотрели уравнение теплосодержания. Оно связывало температуру газа со скоростью движения с учетом энергетических воздействий (подвода тепла, технической работы и изменением потенциальной энергии). Такие факторы, как давление и плотность газа, в уравнение теплосодержания не входили.

Можно получить иную (механическую) форму уравнения энергии, куда, наоборот, не входит температура газа, а скорость движения связана с давлением и плотностью. В дифференциальной форме уравнение энергии (5) может быть записано в виде

$$dQ - d(pv) - dL - dL_{\text{тр}} = dU + d\frac{w^2}{2} + g\,dz. \tag{49}$$

Согласно первому закону термодинамики тепло, подводимое к газу, может расходоваться только на повышение внутренней энергии и работу расширения (деформации), т. е.

$$dQ = dU + p\,dv. \tag{50}$$

Вычитая из уравнения (49) равенство (50), получим

$$-dL - dL_{\text{тр}} = d\frac{w^2}{2} + g\,dz + d(pv) - p\,dv. \tag{51}$$

Подставляя в (51) выражение удельного объема ($v = 1/\rho$), получаем

$$-dL = d\frac{w^2}{2} + g\,dz + \frac{dp}{\rho} + dL_{\text{тр}}. \tag{52}$$

Это есть механическая форма уравнения энергии, или, что то же, *уравнение живых сил* для единичной струйки.

После интегрирования будем иметь

$$-L = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + L_{\text{тр}}. \tag{53}$$

Выведенное уравнение носит название *обобщенного уравнения Бернулли*. Оно выражает скорость движения в функции давления и плотности газа с учетом производимой газом технической работы (L), изменения потенциальной энергии $g(z_2 - z_1)$ и работы сил трения ($L_{\text{тр}}$). В газовой динамике часто пользуются упрощенной формой уравнения Бернулли, соответствующей режиму, когда отсутствует техническая работа ($L = 0$), нет гидравлических потерь ($L_{\text{тр}} = 0$) и запас потенциальной энергии не изменяется ($z_2 = z_1$). Для этого режима уравнение Бернулли запишется в следующей форме:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0. \tag{54}$$

Уравнение Бернулли иногда используется в несколько ином виде. Для этого интеграл разбивается на две части:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \int_1^0 \frac{dp}{\rho} + \int_0^2 \frac{dp}{\rho} = \int_0^2 \frac{dp}{\rho} - \int_0^1 \frac{dp}{\rho}. \tag{55}$$

Тогда из (54) следует

$$\frac{w_1^2}{2} + \int_0^1 \frac{dp}{\rho} = \frac{w_2^2}{2} + \int_0^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{w^2}{2} + \int_0^p \frac{dp}{\rho} = \text{const}. \tag{56}$$

В этом случае вычисление интегралов ведется каждый раз от абсолютного вакуума до давления, соответствующего заданной скорости потока. Постоянную этого уравнения можно получить, исходя из того, что при расширении газа до абсолютного вакуума достигается максимальная скорость потока.

Поэтому уравнению Бернулли можно придать следующий вид:

$$\frac{w^2}{2} + \int_0^p \frac{dp}{\rho} = \frac{w_{\max}^2}{2}. \tag{57}$$

В тех случаях, когда плотность газа на участке *1—2* элементарной струйки остается практически постоянной, интеграл в уравнении Бернулли равен

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho},$$

и уравнение Бернулли выглядит особенно просто:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0,$$

или

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2}. \tag{58}$$

В такой форме оно применяется в гидравлике идеальной несжимаемой жидкости. Иногда уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости записывается так:

$$p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} = p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2}. \tag{59}$$