

или границы раздела. Типичные значения прочности армированных пластиков при основных способах нагружения приведены в таблице 9.1 (см. также главу 5).

Таблица 9.1. Типичные значения прочности однонаправленных композитов на основе полимерной матрицы ($\nu_f = 0,5$, прочность приведена в МПа).

Материал	Продольное растяжение	Продольное сжатие	Поперечное растяжение	Поперечное сжатие	Сдвиг
Стекло-полиэфир	650–950	600–900	20–25	90–120	45–60
Углерод-эпоксид	850–1500	700–1200	35–40	130–190	60–75
Арамид-эпоксид	110–1250	240–290	20–30	110–140	40–60

Прочность материала в главных осях (т.е. параллельно и поперек волокну) может рассматриваться как параметр, определяющий, разрушился ли слой. Если рассматривается один из слоев в многослойном ламинате, нужно определить напряжения в его главных осях и сравнить их с прочностью материала.

9.2. Прочность слоя

Прочность может быть определена с помощью критериев разрушения, которые обычно делятся на три класса. Первый составляют простые критерии предельного состояния; второй – критерии, которые учитывают взаимодействие различных компонент напряжения при сложном нагруженном состоянии; третий – гибридные критерии, которые объединяют предельные критерии и критерии многоосного нагруженного состояния. Здесь мы обсудим лишь критерии первых двух классов.

9.2.1. Критерии предельного состояния

(а) Критерий максимального напряжения

Критерий максимального напряжения состоит из пяти подкритериев, соответствующих пределам прочности при основных способах нагружения. Этот критерий гласит, что материал разрушается, если хотя бы одна из компонент напряжения в главных осях материала превышает соответствующее значение предела прочности. Математически он выполняется, если удовлетворено хотя бы одно неравенство

$$\sigma_1 \geq \bar{\sigma}_T, \text{ или } \sigma_1 \leq \bar{\sigma}_C, \text{ или } \sigma_2 \geq \bar{\sigma}_{T2}, \text{ или } \sigma_2 \leq \bar{\sigma}_{C2}, \text{ или } \tau_{12} \geq \bar{\tau}_{12} \quad (9.1)$$

ГЛАВА 9

ПРОЧНОСТЬ КОМПОЗИТОВ

9.1. Введение

В главе 7 была определена связь «напряжение–деформация» для однонаправленного слоя и многослойного ламината. Полученные уравнения можно использовать для определения напряжений в отдельных слоях при нагружении ламината. Сравнивая эти напряжения с пределом прочности слоя, можно определить, потерял ли он несущую способность.

Существует несколько определений потери несущей способности материала. Это определение очевидно, если материал хрупкий и разрушается путем разделения на две части. Однако для волокнистых композитов возможны более сложные случаи, и потерей несущей способности мы будем называть неспособность детали выполнять функции, для которых она была разработана.

При таком определении потеря несущей способности может означать не только разрушение материала, но и потерю устойчивости ламината при сжатии, чрезмерное удлинение (определяемое в основном жесткостью, а не пределом прочности) или даже растрескивание матрицы. Например, сосуд с жидкостью при растрескивании матрицы окажется неспособен выполнять свои функции из-за вытекания жидкости через трещины в его стенках.

Как и для изотропных материалов (глава 6), разрушение композита будет описываться некоторым критерием. Для композитов существует несколько таких критериев, причем ни один из них не является универсальным. Прежде чем перейти к рассмотрению ламинатов, рассмотрим отдельный слой.

Представим слой в виде параллельно уложенных непрерывных волокон, имеющих идеальную адгезионную связь с матрицей. В главе 8 отмечалось, что имеется пять основных механизмов разрушения слоя. Слой может разрушиться под действием продольного или поперечного растяжения/сжатия, а также сдвига. Каждый из этих механизмов разрушения может явиться следствием разрушения волокон, матрицы

(Сжимающие напряжения имеют отрицательный знак, и материал разрушится, если $\sigma_2 = -200$ МПа, а $\sigma_{2T} = -150$ МПа).

(b) Критерий максимальной деформации

Критерий максимальной деформации просто заменяет напряжения на деформацию в описанных выше пяти неравенствах. Согласно этому критерию, композит разрушится, если хотя бы одна из компонент деформации в главных осях превышает критическое значение

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{1T}, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{1C}, \varepsilon_2 \geq \varepsilon_{2T}, \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{2C}, \text{ или } \gamma_{12} \geq \gamma_{12T}. \quad (9.2)$$

Для анализа этих неравенств необходимо определить напряжения в главных осях при приложении нагрузки под углом θ к волокнам, как показано на рис. 9.1. Для этого используем уравнения 7.6. Подставляя $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, получаем

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta, \quad \sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta, \quad \tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta. \quad (9.3)$$

Теперь можно использовать неравенства 9.1 для определения напряжения σ_x , при котором произойдет разрушение. Используя уравнения 9.3, определяем, что имеются три возможных механизма разрушения при следующих напряжениях

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{1T}}{\cos^2 \theta} \quad \text{— разрушение волокон,}$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{2T}}{\sin^2 \theta} \quad \text{— поперечное разрушение,}$$

$$\sigma_x = -\frac{\tau_{12T}}{\sin \theta \cos \theta} \quad \text{— сдвиговое разрушение.}$$

Очевидно, в процессе нагружения композит разрушится при достижении минимального из трех критических значений разрушающего напряжения.

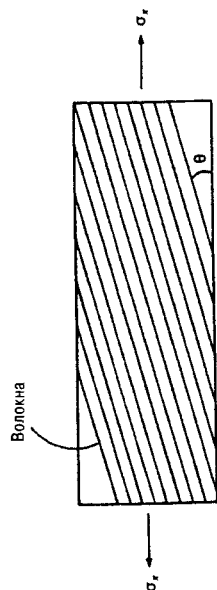


Рис. 9.1. Одноосное растяжение однонаправленного композита под углом θ к оси волокон.

Зависимость величины разрушающего напряжения σ_x от угла θ приведена на рисунке 9.2. Каждый механизм разрушения представлен отдельной кривой. Разрушение волокон наиболее вероятно, когда угол θ мал. Поперечное разрушение, обусловленное разрывом матрицы или границы раздела, вероятно при больших значениях угла θ , и сдвиговые разрушение вероятно при промежуточных значениях угла θ .

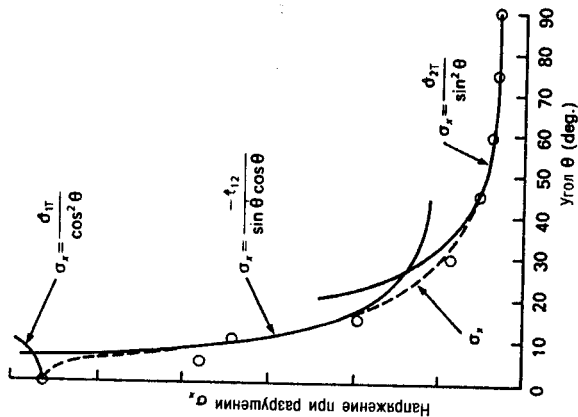


Рисунок 9.2. Зависимость разрушающего напряжения σ_x от угла θ . Сплошные линии — критерий максимального напряжения; пунктирная линия — критерий Цая-Хилла.

Пример 9.1.

Однонаправленный композит растягивается под углом 5° к оси волокон. Определить напряжение, при котором материал разрушается согласно (a) — критерию максимального напряжения, (b) — критерию максимальной деформации. Свойства композита:

$$E_{11} = 76,0, \quad E_{22} = 5,5, \quad G_{12} = 2,35 \text{ ГПа}; \quad \mu_{12} = 0,33;$$

$$\hat{\sigma}_{1T} = 1250, \quad \hat{\sigma}_{2T} = 30, \quad \hat{\tau}_{12} = 50,$$

$$\hat{\sigma}_{1C} = 1000, \quad \hat{\sigma}_{2C} = 100 \text{ МПа}$$

(a) Вычислим напряжения в главных осях материала, используя уравнение (9.3):

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta, \quad \sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta, \quad \tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta,$$

где $\theta = 5^\circ$.

При этих условиях критерий разрушения записывается в виде

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta \geq \hat{\sigma}_{1T}, \quad \sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta \geq \hat{\sigma}_{1C},$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta \geq \hat{\tau}_{12}.$$

Рассматривая эти неравенства, получаем три величины, минимальная из которых определяет механизм разрушения. Подставляя $\theta = 5^\circ$, получаем

$$\sigma_x = 1250 / \cos^2 5^\circ = 1260 \text{ МПа},$$

$$\sigma_x = 30 / \sin^2 5^\circ = 3949 \text{ МПа},$$

$$\sigma_x = 50 / \sin 5^\circ \cos 5^\circ = 575 \text{ МПа}.$$

Следовательно, материал разрушится при напряжении 575 МПа вследствие сдвига.

(б) Определим нормальные деформации в главных осях, используя уравнение 7.1

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\mu_{21}}{E_{22}} \\ -\frac{\mu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

или, используя результаты части (а)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{11}} - \mu_{21} \frac{\sigma_2}{E_{22}} = \left(\frac{\cos^2 \theta}{E_{11}} - \mu_{21} \frac{\sin^2 \theta}{E_{22}} \right) \sigma_x$$

и

$$\varepsilon_2 = -\mu_{12} \frac{\sigma_1}{E_{11}} + \frac{\sigma_2}{E_{22}} = \left(-\mu_{12} \frac{\cos^2 \theta}{E_{11}} + \frac{\sin^2 \theta}{E_{22}} \right) \sigma_x$$

Сдвиговое напряжение получаем в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{11}} - \mu_{21} \frac{\sigma_2}{E_{22}} = \left(\frac{\cos^2 \theta}{E_{11}} - \mu_{21} \frac{\sin^2 \theta}{E_{22}} \right) \sigma_x$$

Теперь определим критические деформации композита предполагая, что он деформируется линейноупруго

$$\varepsilon_{1T} = 1250 / (76 \times 10^3) = 0,0164,$$

$$\hat{\varepsilon}_{1T} = 30 / (5,5 \times 10^3) = 0,0055,$$

$$\hat{\gamma}_{1T} = 50 / (2,35 \times 10^3) = 0,0218,$$

$$\hat{\varepsilon}_{1C} = -1000 / (76 \times 10^3) = -0,0132,$$

$$\hat{\varepsilon}_{2C} = -100 / (5,5 \times 10^3) = -0,0182.$$

Очевидно, минимальная из этих величин соответствует сдвиговому разрушению. Вычисляем значения разрушающего напряжения σ_x . Для ε_1 получаем

$$\sigma_x = \frac{\hat{\varepsilon}_{1T}}{\frac{\cos^2 \theta}{E_{11}} - \mu_{21} \frac{\sin^2 \theta}{E_{22}}} = 1259 \text{ МПа}$$

Аналогично для ε_2 имеем

$$\sigma_x = \frac{\hat{\varepsilon}_{2C}}{-\mu_{12} \frac{\cos^2 \theta}{E_{11}} + \frac{\sin^2 \theta}{E_{22}}} = 6210 \text{ МПа}$$

Таким образом, минимальное разрушающее напряжение равно 575 МПа, определяемое критерием максимального растягивающего напряжения.

Эти критерии довольно просты, но хорошее согласие с экспериментом наблюдается, если угол θ близок к 0° или 90° . Это обусловлено тем, что при промежуточных значениях углов значительны обе компоненты напряжения σ_1 и σ_2 . Эти напряжения складываются, что может привести к снижению разрушающего напряжения, не учитываемому критерием максимального напряжения.

Заметим также, что критерий максимального напряжения и максимальной деформации могут не совпадать в случае нелинейной связи напряжения и деформации. Это имеет место для сдвигового нагружения и, следовательно, предположение о линейности, сделанное в примере 9.1, может не выполняться. В таких случаях критерий максимальной деформации лучше согласуется с экспериментом, чем критерий максимального напряжения.

9.2.2. Критерий Цая-Хилла

Существуют несколько критериев, учитывающих совместное влияние различных компонент напряжения при сложном напряженном состо-

янии. Зачастую они хорошо согласуются с экспериментом лишь при одной комбинации волокон и матрицы и при определенном способе нагружения (например, труба под внутренним давлением). Из всего класса таких критериев мы рассмотрим лишь критерий Цая-Хилла, который наиболее известен и хорошо описывает экспериментальные данные в достаточно широкой области.

Критерий Цая-Хилла является обобщением критерия Хилла, описывающего разрушение анизотропных материалов, который, в свою очередь, связан с критерием фон Мизеса для изотропных материалов (глава 6). В наиболее общем виде критерий Цая-Хилла имеет вид

$$\left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\bar{\sigma}_1^2} + \left(\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\bar{\tau}_{12}}\right)^2 \geq 1. \quad (9.4)$$

Второй член мал по сравнению с другими, и поэтому им обычно пренебрегают, а критерий разрушения записывают в виде

$$\left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\bar{\tau}_{12}}\right)^2 \geq 1. \quad (9.4a)$$

Параметры, описывающие пределы прочности в уравнениях 9.4 и 9.4a выбирают так, чтобы они соответствовали способу нагружения. Так, если материал растягивается и σ_1 — растягивающее напряжение, $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_{1T}$. Аналогично, если σ_2 — сжимающее напряжение, $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_{1C}$.

Следует отметить, что при использовании критерия Цая-Хилла необходимо рассматривать только одно неравенство, в то время как в критерии предельного напряжения необходимо рассматривать пять неравенств. Таким образом, в этом случае необходимо рассматривать только одну величину предела прочности. Другая особенность этого критерия состоит в том, что в отличие от критерия предельного напряжения, он не определяет механизм разрушения. Как будет показано ниже, это может иметь значение при рассмотрении разрушения многослойных ламинатов. Напротив, для однонаправленного композита при нагружении вдоль одной из его главных осей критерии максимального напряжения и критерий Цая-Хилла предсказывают одинаковое разрушающее напряжение.

Как и выше, для иллюстрации работы критерия рассмотрим однонаправленный слой, к которому приложено растягивающее напряжение σ_x под углом θ к оси волокон (рис. 9.1). Подставляя уравнение 9.3 в уравнение 9.4, критерий Цая-Хилла приобретает вид

$$\left(\frac{\sigma_x \cos^2 \theta}{\bar{\sigma}_1}\right)^2 - \frac{\sigma_x \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\bar{\sigma}_1^2} + \left(\frac{\sigma_x \sin^2 \theta}{\bar{\sigma}_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x \sin \theta \cos \theta}{\bar{\tau}_{12}}\right)^2 = 1. \quad (9.5)$$

Зависимость рассчитанного по уравнению (9.5) критического напряжения от угла θ приведена на рисунке 9.2 пунктирной кривой. Обратим внимание, что в этом случае имеется единая непрерывная кривая, а не три отдельных кривых, как в случае критерия предельного напряжения.

Пример 9.2.

Решим поставленную в примере 9.1 задачу, используя критерий Цая-Хилла. Для этого подставим в уравнение 9.5 соответствующие значения прочности композита

$$\left(\frac{\sigma_x \cos^2 \theta}{1250}\right)^2 - \frac{\sigma_x^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{1250^2} + \left(\frac{\sigma_x \sin^2 \theta}{30}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x \sin \theta \cos \theta}{50}\right)^2 = 1$$

Подставляя $\theta = 5^\circ$, получаем

$$\sigma_x = 520 \text{ МПа.}$$

Заметим, что это значение несколько ниже значения $\sigma_x = 575$ МПа, полученного на основании критерия максимального напряжения, что объясняется учетом совместного влияния различных компонент напряжения при двухосном напряженном состоянии. Анализ относительного вклада различных слагаемых в уравнении (9.5) показывает, что доминирующим является последнее слагаемое, учитывающее вклад сдвигового напряжения. Это показывает, что разрушение обусловлено в основном сдвиговым напряжением в согласии с критерием максимального напряжения.

Пример 9.3.

Определите, разрушится ли слой, нагруженный как описано в примере 7.5, если он удовлетворяет (а) критерию максимального напряжения, (б) критерию Цая-Хилла. Значения прочности композита при одноосном нагружении равны

$$\hat{\sigma}_{1T} = 2100, \hat{\sigma}_{1C} = 1800, \hat{\sigma}_{2T} = 35, \hat{\sigma}_{2C} = 210, \hat{\tau}_{12} = 90 \text{ МПа.}$$

Находя напряжения и деформации в главных осях, как показано в предыдущих примерах, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -3,25, \sigma_2 = 1,75, \tau_{12} = -5,75 \text{ МПа,} \\ \epsilon_1 &= -27,36 \times 10^{-6}, \epsilon_2 = 202,38 \times 10^{-6}, \gamma_{12} = -809,86 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

(а) Сначала необходимо найти деформации при разрушении, соответствующие данным одноосным напряжениям. Предполагая, что мате-

риал является линейноупругим, а значения модулей упругости, такие же как в примере 7.5, получаем

$$\hat{\varepsilon}_c = -1800/138 \times 10^3 = -0,0130 = 13000 \times 10^{-6},$$

$$\hat{\varepsilon}_T = 35/8,96 \times 10^3 = 0,0039 = 3900 \times 10^{-6},$$

$$\hat{\gamma}_{12} = 90/7,1 \times 10^3 = 0,0127 = 12700 \times 10^{-6}.$$

Определяя отношение критических деформаций к вычисленным значениям деформации, получаем

$$\hat{\varepsilon}_c/\varepsilon_1 = 1300/27,39 = 475,15,$$

$$\hat{\varepsilon}_T/\varepsilon_2 = 3900/202,38 = 19,27,$$

$$\hat{\gamma}_{12}/\gamma_{12} = 12700/809,86 = 15,68.$$

Таким образом, разрушение не должно произойти, а к критической величине ближе всего сдвиговая деформация.

(b) Подставим вычисленные напряжения и соответствующие значения предела прочности в левую часть критерий Цая-Хилла (уравнение 9.4):

$$\left(\frac{-3,25}{-1800} \right)^2 - \frac{(-3,25 \times 1,75)}{(-1800)^2} + \left(\frac{1,75}{35} \right)^2 + \left(\frac{-5,75}{90} \right)^2 = 0,00658.$$

Таким образом, левая часть неравенства значительно меньше единицы и, следовательно, материал разрушиться не должен.

Мы показали, как критерии разрушения позволяют предсказать, произойдет или не произойдет разрушение материала при некотором наборе напряжений. Большой интерес представляет также вычисление разрушающих напряжений. Используя критерий предельного напряжения, это можно сделать определением минимального отношения предела деформации к вычисленной величине деформации.

В примере 9.3а это отношение равно 15,68 (для сдвиговой деформации). Другими словами, для того, чтобы материал разрушился, деформацию нужно увеличить в 15,68 раз. Используя критерий Цая-Хана для этой цели немного сложнее. Предположим, мы имеем набор напряжений σ_1 , σ_2 и τ_{12} (и соответственный набор напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy}), которые определяют коэффициент R :

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}} \right)^2 = \frac{1}{R^2}.$$

Коэффициент R характеризует запас прочности системы при заданной системе приложенных напряжений.

Используем в качестве иллюстрации пример 9.3. В части (b) этого примера была вычислена левая часть уравнения (9.6) как 0,00658

$$\frac{1}{R^2} = 0,00658$$

$$\text{и } R = 12,33.$$

Таким образом, для разрушения слоя приложенные напряжения должны быть увеличены в 12,33 раз.

9.3. Прочность ламината

9.3.1. Инициация разрушения

Рассмотрим поперечно-армированный слой ($0/90^\circ$), к которому в направлении продольного слоя (0°) приложена постепенно увеличивающаяся нагрузка. При относительно невысоких нагрузках в слое 90° появляются трещины, ориентированные поперек направлению приложенной силы. Количество этих трещин постепенно увеличивается до тех пор, пока не достигается предельная концентрация. В результате растрескивания слой 90° практически полностью теряет свою жесткость, что проявляется в изменении наклона диаграммы растяжения напряжение-деформация ламината (рис. 9.3). Инициация поперечного растрескивания слоя является начальной стадией разрушения.

Подобное поведение наблюдается и в ламинатах со схемой укладки $(\pm\theta)$, в которых появляются трещины вдоль волокон. Растрескивание вызывается сдвиговыми напряжениями при малых значениях θ и поперечными напряжениями при больших θ .

Растрескивание ламината можно предсказать, дополнив классическую теорию упругости ламинатов критерием разрушения. Выбор критерия при этом имеет большое значение и, как было отмечено, многие из них применимы только к определенной ситуации (способу нагружения и геометрии).

Начнем с учредительных уравнений пластины (уравнение 7.20):

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Решение уравнения 9.7 определяет деформацию в центральной плоскости ламината (ε^o) и ее кривизну (κ), если известны приложенные силы (N) и их моменты (M).

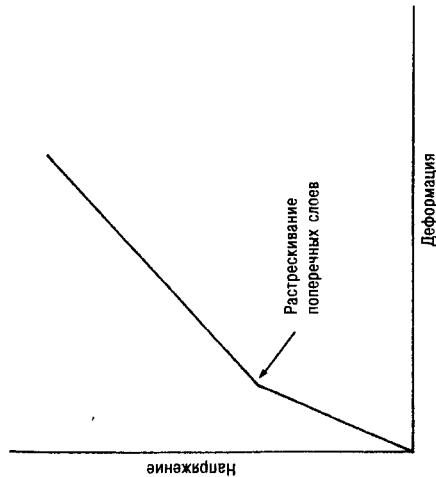


Рис. 9.3. Изменение наклона кривой напряжение-деформация при рас-
трешивании поперечного слоя в композите со схемой укладки (0/90°)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^1 & B^1 \\ B^1 & D^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}, \quad (9.8)$$

где

$$\begin{aligned} A^1 &= A^* + B^* [D^*]^{-1} [B^*]^{-1}, \\ B^1 &= B^* - [D^*]^{-1}, \\ D^1 &= [D^*]^{-1}, \\ A^* &= A^{-1}, \\ B^* &= A^{-1} B, \\ D^* &= D - B A^{-1} B. \end{aligned}$$

Деформация пластины найдена в координатах $x-y$ (см. рис. 7.7).

Следовательно, деформации слоев могут быть найдены путем преобразования уравнения 7.7:

$$\bar{\varepsilon}_{12} = T \bar{\varepsilon}_{xy}. \quad (9.9)$$

Наконец, напряжения в слоях получаем из матрицы жесткости (9.10)

$$\sigma_{12} = Q \varepsilon_{12}. \quad (9.10)$$

Рассматривая напряжение в слоях совместно с некоторым критерием разрушения, можно анализировать их растрешивание и разрушение.

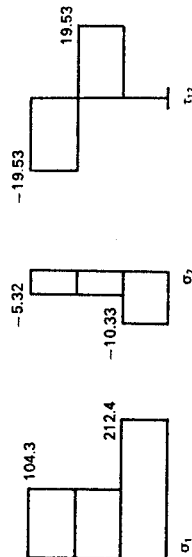
Пример 9.4.

6-слойный ламинат (общей толщиной 0,75 мм) со схемой укладки ($\pm 30/0^\circ$), формируются из однонаправленных слоев углепластика, описанных

в примерах 9.3 и 7.5. Определить осевое напряжение, которое может привести к растрешиванию слоев согласно критерию максимального напряжения.

Используя приведенные в примере 7.5 упругие характеристики слоя ($E_{11} = 138,0$ ГПа, $E_{22} = 8,96$ ГПа, $G_{12} = 7,1$ ГПа; $\mu_{12} = 0,30$), мы можем определить матрицу A ($B = 0$, поскольку ламинат симметричный; матрицу D можно не рассматривать, потому что нагружение «в плоскости»). С помощью определяющих уравнений (9.7) мы можем вычислить деформации, после чего, используя преобразование (9.9) и связь напряжение-деформация (уравнение 9.10), получаем напряжения в главных осях слоев.

Предположим, что к ламинату приложена сила $N_x = 10^5$ Н/м параллельно слою 0° . Возникающие деформации равны $\varepsilon_x^0 = 0,1561\%$, $\varepsilon_y^0 = 0,1615\%$, $\gamma_{xy}^0 = 0$. Напряжения в слоях иллюстрируются приведенным ниже рисунком (величины в МПа).



Теперь можно сравнить эти напряжения с соответствующими значениями прочности примера 9.3

$$\hat{\sigma}_{1T} = 2100, \hat{\sigma}_{2C} = 210, \hat{\tau}_{12} = 90 \text{ МПа.}$$

Соответствующие коэффициенты запаса прочности равны:

$$\begin{aligned} \text{продольное растяжение (слой } 0^\circ), \quad R &= 2100/212,4 = 9,89; \\ \text{поперечное сжатие (слой } 0^\circ), \quad R &= 210/10,33 = 20,33; \\ \text{сдвиг (слои } \pm 30^\circ), \quad R &= 90/19,53 = 4,61. \end{aligned}$$

Таким образом, растрешивание слоев $\pm 30^\circ$ начнется под действием сдвиговых напряжений, если увеличить прикладываемую нагрузку в 4,61 раз.

9.3.2. Катастрофическое разрушение

Заключительная стадия процесса разрушения ламината со схемой укладки слоев ($\pm \theta$) часто совпадает или лишь немного выше напряжения начала растрешивания. Напротив, при других схемах укладки катастрофическое разрушение происходит при немного более высоком напряжении.

Очевидно, растрескивание приводит к снижению жесткости слоя в поперечном направлении. Однако, если поврежденный слой не отслоился от остальной части ламината, он будет вносить некоторый вклад в его жесткость. Величина этого вклада зависит от степени растрескивания, типа волокон и матрицы, а также характера прикладываемой нагрузки.

Для исследования процесса разрушения обычно используют метод последовательных приближений, определяя напряжения при помощи подхода, описанного в параграфе 9.3.1. При этом постепенно увеличивают нагрузку или деформацию до тех пор, пока не начинается разрушение волокон, которое считается конечным этапом процесса разрушения. Вычисления проводятся в следующей последовательности.

1. Выбирают некоторые заведомо низкие нагрузки, не приводящие к растрескиванию ламината.
2. Определяют деформацию и кривизну пластины и, как следствие, напряжение и деформацию всех слоев (в главных осях).
3. Анализируют при помощи некоторого критерия разрушения поведение слоев.
4. Если ни один слой не растрескался, увеличивают нагрузку, сохраняя их относительные величины, чтобы началось растрескивание одного из слоев.
5. Уменьшают жесткость поврежденного слоя и повторно определяют матрицы A , B и D .
6. Повторяют операции 2 и 3.
7. Повторяют операции 4, 5 и 6.
8. Повторяют шаг 7 до тех пор, пока не произойдет катастрофическое разрушение материала, т.е. разрыв волокон в одном из слоев.

Заметим, что результаты вычислений зависят от критерия разрушения. Как мы видели, критерии предельного напряжения и деформации определяют *механизм* разрушения. Таким образом, перед шагом 5 известно, какие жесткости нужно уменьшать, если используется критерий предельного напряжения или деформации. Если используется критерий Цая-Хилла, механизм разрушения определяется из относительных величин слагаемых в уравнении 9.4.

В случае растрескивания слоя необходимо выбрать коэффициент, описывающий степень снижения его жесткости. Заметим, что в настоящее время отсутствуют единый подход к выбору такого коэффициента. Предположим, что некоторый слой растрескивается под действием поперечного растяжения. В этом случае можно считать жесткость слоя E_{22} и коэффициент η_{21} равными нулю. Однако даже после растрескивания слой

может сохранить часть своей жесткости, которая снижается, скажем, на 50 или 90%. Некоторые исследователи считают, что первая величина хорошо описывает поведение углепластика, а вторая — стеклопластика. Самый простой (и довольно неточный) подход состоит в том, что поврежденный слой считается полностью разрушенным, а при вычислениях A , B и D матриц соответствующие места являются пустыми.

9.4. Дополнительные факторы

9.4.1. Влияние температуры и влаги

Некоторые высокопрочные волокна, и особенно углеродные и кевлар, имеют малый или даже отрицательный коэффициент теплового расширения. Как следствие, охлаждение материала после отверждения матрицы приводит к сжатию волокон и растяжению матрицы в направлении укладки волокон.

Очевидно, что при комнатной температуре слои окажутся напряженными, потому что поперечное сокращение слоя ограничено слоями, имеющими другую ориентацию волокон. Эти напряжения, называемые *остаточными*, могут составлять существенную долю от поперечной прочности матрицы. Поэтому остаточные напряжения должны учитываться при определении поведения ламината под нагрузкой.

К появлению аналогичных напряжений приводит поглощение влаги полимерной матрицей. Эти напряжения следует учитывать аналогично остаточным напряжениям, однако подробное рассмотрение этого вопроса выходит за границы данной книги.

9.4.2. Краевые напряжения

Классическая теория пластин рассматривает лишь пластины неограниченного размера и пренебрегает краевыми эффектами. Однако ламинаты имеют края, обусловленные не только конечностью их ширины, но и отверстиями. Вблизи краев пластины для напряжений «в плоскости» (σ_x , σ_y , σ_{xy}) не удовлетворяются условия равновесия, и необходимо рассматривать распределение напряжений по толщине. Для расчета нормальных (σ_x) и сдвиговых (τ_{xz} , τ_{yz}) напряжений по толщине пластины (рис. 9.4) развита специальная теория и используются компьютерные расчеты методом конечных элементов. Эти напряжения могут быть достаточно высокими и превышать относительно низкую межслойную прочность ламината. Величина и характер этих напряжений (растяжение или сжатие) определяются схемой укладки слоев. Следовательно, выбором схемы укладки можно уменьшить их величину и уменьшить вероятность расслоения вблизи краев ламината.

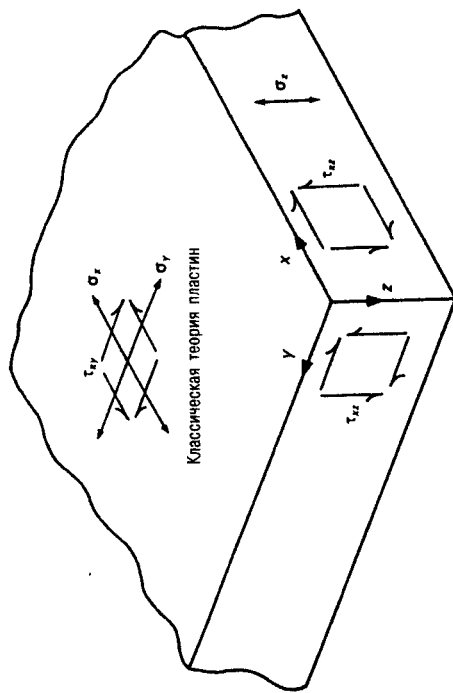


Рис. 9.4. Напряжения вблизи свободного края ламината: σ_x , τ_{xz} , τ_{yz} (не рассматриваемые классической теорией) по толщине (z) пластины.

Проиллюстрируем эту ситуацию на примере поперечно-армированного композита, растягиваемого вдоль слоя 0° . При схеме укладки $(0/90^\circ)$, нормальные напряжения у краев, параллельных оси растяжения, являются растягивающими, а при схеме $(90/0^\circ)$, эти напряжения являются сжимающими. Очевидно, эта схема укладки является более предпочтительной.

ГЛАВА 10

КОМПОЗИТЫ, АРМИРОВАННЫЕ КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ

10.1. Введение

В предыдущих главах обсуждались механические свойства композитов, армированных непрерывными волокнами. Однако в последнее время все шире распространяются композиты, армированные короткими волокнами. Их свойства сильно отличаются от свойств материалов с непрерывными волокнами. В этой главе рассматриваются модели, описывающие механическое поведение коротковолокнистых композитов. В основном будут рассматриваться материалы на основе полимерных матриц. Это связано с тем, что об армированных пластиках, в отличие от композитов с металлическими и керамическими матрицами, имеется больше информации.

10.2. Преимущества коротковолокнистых композитов

В главе 2 отмечалось, что непрерывные волокна, как правило, дороже других наполнителей. Кроме того, процессы получения композитов, армированных непрерывными волокнами, гораздо более медленные. Ручная выкладка, намотка, автоклавное и вакуумное формование применяются для получения небольших партий относительно дорогостоящих изделий из высокопрочных композитов на основе термореактивных матриц и непрерывных волокон. Эти методы не предназначены для получения больших партий изделий. Весьма производительным процессом является палтрузия, но она может применяться лишь для изготовления стержней постоянного профиля. Во многих случаях получение максимальной прочности или жесткости изделия не является главным требованием. Для производства больших партий изделий сложной формы желательно использование прессования, штамповки или инъекционных методов.

Применение этих методов возможно при использовании коротких волокон. Некоторые технологические методы не позволяют использовать непрерывные волокна по технологическим причинам, а при других процессах происходит интенсивное сдвиговое деформирование

нужно исследовать более основательно. Сейчас, однако, кажется, что усталостное нагружение не приводит к росту последуарных трещин.

12.5. Эпоксидные и термoplastические матрицы

В настоящее время матрицы в высокопрочных армированных пластиках, как правило, являются эпоксидными. Однако термoplastы по сравнению с эпоксидами имеют ряд преимуществ. Например, они имеют более высокую вязкость разрушения и имеют меньшее время формирования. Недостатком термoplastов является относительно низкая стойкость к влиянию окружающей среды. Имеются и исключения. Например, частичнокристаллический ПЭЭК не чувствителен к воздействию растворителей и имеет высокую температуру плавления (глава 5).

При низкоэнергетическом ударе по углепластику с матрицей ПЭЭК появляется небольшая вмятина с типичными признаками сжимающего разрушения и микроразрушения по полосам сдвига. Изучение места повреждения при помощи дефектоскопа показывает, что композиты на основе матрицы ПЭЭК расслаиваются гораздо меньше, чем композиты с эпоксидными матрицами. Однако, в случае ПЭЭК наблюдается наибольшее расслоение продольных слоев (0°), отсутствующее в случае эпоксидных матриц. Видимо, под действием поперечного растяжения происходит адгезионное отслоение матрицы ПЭЭК от волокон, а сдвиговые трещины в этой матрице растут менее интенсивно, чем в эпоксидной. В углепластиках на основе эпоксидной матрицы область расслоения весьма протяжена, в то время как в случае матрицы ПЭЭК расслоения образуются лишь непосредственно вблизи точки удара. Из-за ограниченности области повреждения остаточная прочность углепластика на основе матрицы ПЭЭК при растяжении и сжатии значительно выше, чем в случае эпоксидной матрицы.

Литература

Специальная

- Adams, D. F. (1985) *Composites*, 16, 268-278.
 Cantwell, W. J. (1985) *Ph.D. Thesis*, Imperial College, University of London.
 Kawata, K. (1981) *Proc. Japan-USA Conf. on Composite Materials*, Tokyo.
 Wardle, M. (1982) *Proc. ICCM-IV*, Oct. 1982, Japan Soc. Composite Materials.
 Wong, W. C. (1990) *M.Sc. Dissertation*, Centre for Composite Materials, Imperial College, London.

Задачи

- 12.1. Обсудите различные методы ударных испытаний. Опишите типичное поведение образца и его повреждение.

ГЛАВА 13

ВЛИЯНИЕ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ И УСТАЛОСТЬ

13.1. Введение

Особенности разрушения композиционных материалов при *циклическом (усталостном)* нагружении обсуждались в параграфах 3.4.2, 4.4.2 и 5.4.2. Усталостная трещина зарождается и медленно растет до тех пор, пока ее длина не достигнет критического размера, при котором происходит быстрое разрушение. Предел прочности при усталостных испытаниях ниже, чем при статических испытаниях с постоянной скоростью.

Усталостное разрушение армированных пластиков существенно отличается от поведения гомогенных металлов или полимеров. Это связано с многообразием механизмов разрушения композитов (разрушение волокон, матрицы и границы раздела). Усталостное поведение зависит от типа волокон и матрицы, их прочности, а также структуры композита.

13.2. Методы испытания

Рассмотрим особенности усталостных испытаний композиционных материалов. Главное требование при испытании состоит в том, чтобы механизм разрушения образца совпал с механизмом разрушения детали в реальных условиях. Использование образцов с сужением обычно исключает разрушение в захватах испытательной машины при статической нагрузке, но не при усталостных испытаниях, когда образцы в виде параллельных стержней часто имеют наибольшее время жизни несмотря на разрушение в захватах.

Сужение образцов обычно производят по ширине, а толщину оставляют неизменной, поскольку уменьшение толщины искажает схему укладки ламината. Исключением являются однонаправленные материалы. Заметим, что при усталостных испытаниях однонаправленных композитов утолщение часто отслаивается от рабочей части образца вследствие постепенного роста продольных трещин.

Если цикл нагружения включает сжатие, проводить испытания довольно сложно в связи с необходимостью исключить потерю устойчивости образца. Как и при статическом сжатии, этого добиваются ис-

пользованием коротких образцов или специальных поддерживающих направляющих. Недостатком коротких стержней постоянного сечения является влияние захватов на распределение напряжения в рабочей части образца. Уменьшение ширины образца еще более усиливает влияние захватов. Типичные размеры образцов равны примерно 10 мм по ширине и длине и минимум 1,5 мм по толщине.

Если цикл нагружения не включает сжатие и не нужны направляющие, предотвращающие потерю устойчивости образца, желательно использовать длинные образцы. В настоящее время отсутствует стандарт на форму поддерживающих направляющих, и исследовательские лаборатории используют свои собственные устройства. Направляющие проектируются таким образом, чтобы с одной стороны не поддерживаемая рабочая часть образца была достаточно длинной и не был подвержен какой-либо механизм разрушения, и не происходила потеря устойчивости образца с другой. Кроме того, необходимо снизить трение между образцом и направляющими, для чего обычно используют тефлоновую пленку.

Очень удобно проводить усталостные испытания на изгиб, поскольку не требуются направляющие и можно использовать малоомное оборудование. В этом случае необходимо снизить трение в нагружающих роликах, и, возможно, предусмотреть наличие возвращающих роликов.

Усталостные сдвиговые испытания проводят нечасто. Обычно для этого используют метод короткобалочного изгиба, причем испытательная установка при этом имеет не только нагружающие, но и возвращающие ролики. Другие способы определения усталостных сдвиговых свойств также являются модификацией статических методов. Например, используют растяжение ламинатов со схемой укладки $\pm 45^\circ$ или так называемый рельсовый сдвиг. В последнем случае несколько изменяют образцы, поскольку время их жизни при усталостных испытаниях зависит от качества поверхности свободных краев.

13.3. Однонаправленные композиты

Область применения однонаправленных композитов весьма ограничена из-за их низкой прочности в направлении, перпендикулярном оси волокон. Примерами их использования являются вертолетные лопасти и пружины подвески. Тем не менее, усталостные характеристики однонаправленного материала должны быть известны, например, для расчета свойств многослойных ламинатов. Типичные зависимости прочности при растяжении однонаправленных композитов от логарифма количества циклов нагружения (S-N кривые) приведены на рис. 13.1. При увеличении количества циклов наиболее сильно сни-

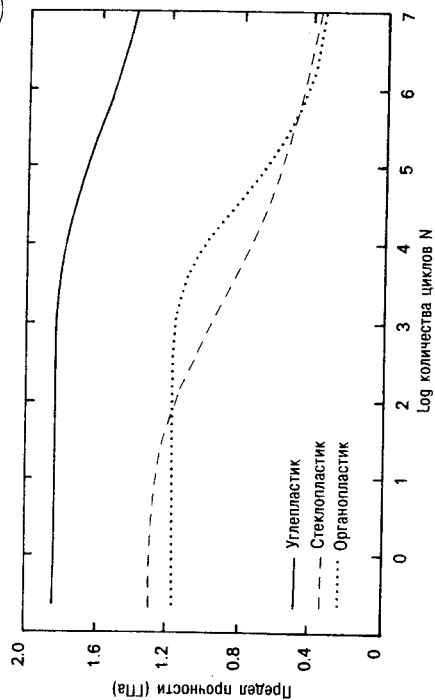


Рис. 13.1. S-N диаграммы для однонаправленных композитов с эпоксидной матрицей (Curtis, 1987).

жается прочность стеклопластика, а наименее сильно — углеродистого, имеющего прекрасные усталостные свойства.

Поскольку в однонаправленных композитах практически всю нагрузку несут волокна, казалось бы, при усталостном растяжении поведение материала должно зависеть исключительно от волокон. Однако в реальности усталостная стойкость композита определяется свойствами матрицы, в особенности ее удлинением при разрушении. Как следствие, зависимость разрушающей деформации композита от количества циклов нагружения является более информативной, чем зависимость прочности. Волокна имеют разброс прочности, причем наименее прочные волокна разрываются при относительно невысоких нагрузках. Вблизи точек разрыва деформация матрицы высока, и это ведет к росту усталостных трещин.

Микротрещины могут появляться также в областях разориентации волокон, мест повышенной концентрации матрицы или вблизи пор. Их рост приводит к постепенному ослаблению волокон, в результате чего они перестают нести нагрузку, а соседние волокна оказываются перегруженными и разрушаются. Непосредственно перед катастрофическим разрушением композита матрица обычно сильно расщеплена, вследствие чего большинство однонаправленных материалов после разрушения напоминают шетку. Скорость процесса разрушения матрицы зависит от амплитуды деформации. В случае очень жестких волокон деформация относительно низка, усталостное разрушение мат-

ришы происходит медленно, и прочность композита снижается не столь резко, как в случае менее жестких волокон. Влияние жесткости волокон на форму S-N кривой иллюстрируется рисунком 13.1. Жесткость волокон возрастает в ряду стеклянные — арамидные — углеродные волокна. Таким образом, естественно ожидать, что органоэластик должен иметь промежуточные усталостные характеристики по сравнению со стекло- и углепластиком. Однако усталостное поведение органоэластика осложнено расщеплением арамидных волокон. В результате этого S-N кривая на рис. 13.1 при высоких сроках службы более крутая, чем ожидалось.

В последнее время проводились интенсивные работы, направленные на разработку высокопрочных углеродных волокон. В результате, сейчас широко производятся углеродные волокна с разрушающей деформацией 1,8%, а волокна с деформативностью более 2% производятся на лабораторном уровне и вскоре появятся в продаже. Рис. 13.2 показывает, что увеличение прочности углеродных волокон приводит лишь к незначительному улучшению усталостных свойств композита. Это объясняется тем, что усталостное поведение композита определяется не прочностью волокон, а свойствами матрицы и границей раздела.

Одновременно с волокнами, продолжалась разработка полимерных матриц с более высокими характеристиками. Основная цель работы состояла в увеличении вязкости разрушения матриц при сохранении их теплостойкости, особенно во влажных условиях. Разработка таких полимеров позволила поднять статическую прочность композита, од-

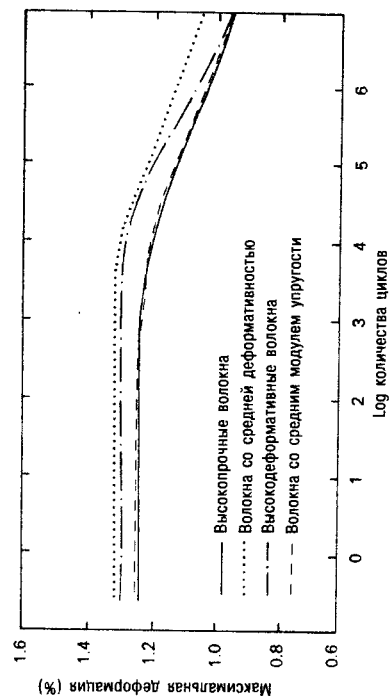


Рис. 13.2. S-N кривые, иллюстрирующие влияние свойств волокон на усталостную прочность однонаправленного углепластика (Curtis, 1986).

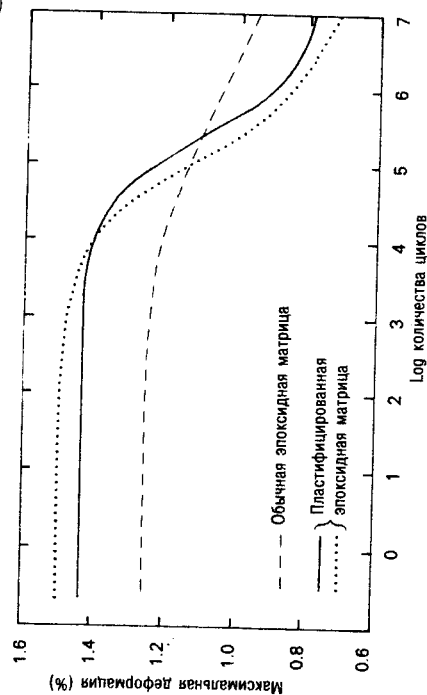


Рис. 13.3. Влияние свойств матрицы на усталостные характеристики однонаправленного углепластика на основе эпоксидной матрицы (Curtis, 1986).

нако усталостные свойства при очень больших количествах циклов нагружения снизились, что проявляется в резком снижении S-N кривых на рис. 13.3. Невысокие усталостные свойства композитов последнего поколения могут быть обусловлены не только пониженными усталостными свойствами пластифицированных матриц, но и спецификой процессов разрушения. Таким образом, одним из основных направлений разработки композитов следующего поколения может быть улучшение их усталостных свойств.

13.4. Многослойные ламинаты

При увеличении доли слоев, ориентированных под углом к оси растяжения, статическая прочность ламината уменьшается вследствие снижения доли продольных волокон. Одновременно увеличивается наклон S-N кривой (рис. 13.4), поскольку слои, ориентированные под углом к оси нагружения, легко растрескиваются.

Наименьшее удлинение растрескивания имеют поперечные слои (90°). Нагрузки они практически не несут, и поэтому на статические осевые характеристики их растрескивание почти не влияет. Это относится и к слоям, ориентированным под углом $\pm 45^\circ$ к оси нагружения. Однако в случае усталостного нагружения внутрислойные трещины инициируют постепенное расслоение композита, ведущее к потере его целостности. Как следствие, возрастает проникновение агрессивных сред и резко снижается прочность при сжатии. Кроме того, трещины

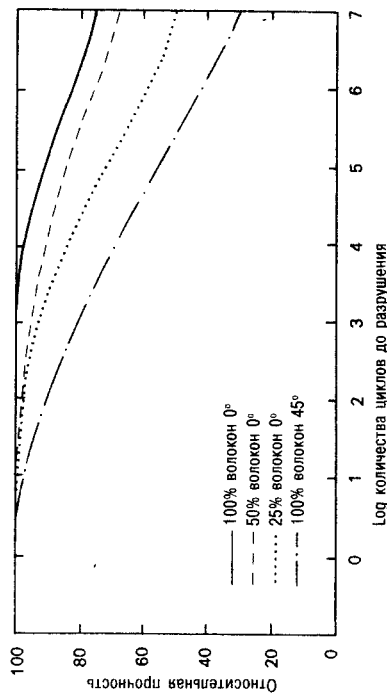


Рисунок 13.4. S-N кривые (0/±45°) углепластика при различной доле продольных (0°) волокон. Усталостные характеристики композита снижаются при уменьшении доли продольных волокон (Curtis, 1987).

инициируют постепенное разрушение волокон в продольных слоях, что приводит к некоторому снижению прочности. Тем не менее, усталостное разрушение ламината при циклическом растяжении все же определяется продольными слоями, и прочность при увеличении количества циклов снижается весьма умеренно, хотя и сильнее, чем в однонаправленном материале.

13.5. Влияние частоты

При усталостных испытаниях армированных пластиков частота нагружения должна быть не слишком высокой, чтобы не происходил разогрев материала. Основным источником тепла является полимерная матрица, имеющая гистерезис кривой нагружения, а в случае арамидных волокон и сами волокна. Ламинаты с высокой долей продольных волокон имеют небольшое удлинение и незначительный гистерезис кривой растяжения, и поэтому их можно испытывать с частотой до 10 Гц. В ламинатах с малой долей продольных волокон тепла выделяется больше, и частота нагружения не должна быть выше 5 Гц.

Дефекты и трещины являются дополнительными источниками тепловыделения. В идеале, температуру образца при усталостных испытаниях нужно контролировать, чтобы исключить разогрев. Это обычно делают путем использования дорогостоящего термографического оборудования, хотя температуру можно контролировать также при помощи термопар, датчиков температуры или термочувствительных покры-

тий, особенно если область разогрева известна, как при наличии концентраторов напряжения.

Если разогрев образца незначителен, влиянием частоты на свойства однонаправленных композитов можно пренебречь. Исключением является стеклопластик, чувствительный к изменению скорости нагружения (рис. 12.5). Прочность этого композита изменяется более чем на 100 МПа при десятикратном изменении скорости. Причина этого не совсем ясна, но полагают, что она обусловлена влиянием влаги на свойства стекловолокон, а не их ползучестью. Было показано, что скоростные эффекты зависят от окружающей среды. Если матрица ведет себя неупруго, свойства композита при нагружении под углом к оси волокон также зависят от скорости нагружения.

Усталостные испытания рекомендуется выполнять при постоянной скорости нагружения. При небольшой амплитуде нагружения испытания можно проводить при относительно высоких частотах, а при значительной амплитуде частоту снижают.

13.6. Влияние свободных краев и концентраторов напряжения

При усталостных испытаниях краевые напряжения могут быть серьезной проблемой. Обычно их пытаются снизить, чтобы избежать краевого расслоения образцов. На краях ламината имеются как сдвиговые, так и нормальные напряжения, обусловленные различием свойств соседних слоев (параграф 9.4.2). Величина этих напряжений зависит от температуры, поскольку слои имеют различные коэффициенты теплового расширения, и влажности композита. Опасность краевого расслоения, значительная и при статических испытаниях, при циклическом нагружении возрастает еще больше.

Концентраторы напряжения (трещины, отверстия и т.д.) влияют на усталостную прочность композита менее сильно, чем на статическую. В зависимости от схемы укладки при наличии концентратора напряжения снижение статической прочности может достигать 50%. При усталостном нагружении вблизи концентратора напряжения появляются локальные трещины, ослабляющие его влияние. Иногда появление этих трещин приводит даже к увеличению остаточной прочности композита после нескольких циклов нагружения. Дальнейшее увеличение количества циклов нагружения ведет к снижению прочности. При больших сроках службы усталостная прочность в расчете на неразрезанное сечение приближается к прочности материала без концентратора напряжения, как показано на рис. 13.5. Отверстие снижает статическую прочность, однако после большого количества циклов

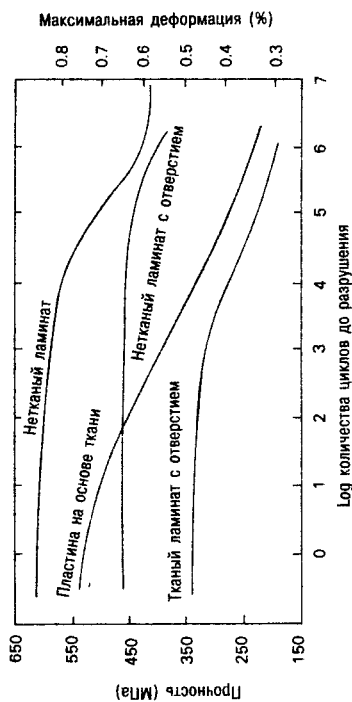


Рис. 13.5. Влияние отверстия на усталостную прочность тканого композита и ламината со схемой укладки (0/90°) (Curtis, Moore, 1985).

нагружения прочности образцов с отверстием и без него становятся близкими.

13.7. Сжатие

Самым большим недостатком композиционных материалов с полимерной матрицей является их поведение при сжатии. Информации об усталостных свойствах армированных пластиков при сжатии весьма ограничена. Видимо, это связано с трудностью испытания, обусловленной необходимостью избежать потери устойчивости образца, и с анизотропией этих материалов.

Наихудшие условия эксплуатации композиционных материалов состоят в периодическом изменении нагрузки от растяжения к сжатию и т.д. При растяжении слои, ориентированные под углом к оси нагружения, растрескиваются при относительно невысоких деформациях, что инициирует постепенное расслоение композита. Если усталостный цикл не включает сжатие, это не слишком опасно, так как продольные слои продолжают нести нагрузку. В условиях сжатия, однако, расслоение приводит к потере устойчивости слоя. Таким образом, время жизни материала в условиях периодического растяжения—сжатия намного короче, чем при сжатии—разгрузке или растяжении—разгрузке.

13.8. Композиционные материалы на основе ткани

Технология производства армированных пластиков из ткани проще, чем из однонаправленных слоев. Тканые композиты имеют более вы-

сокие ударные характеристики и остаточную прочность после удара. Недостатками таких композитов являются пониженные жесткость и прочность. Это обусловлено искривлением волокон в ткани и более низкой их долей по сравнению с однонаправленными слоями. Типичная объемная доля волокон в однонаправленном материале равна 0,6—0,65, в то время как в тканых композитах она составляет лишь 0,5—0,55. При усталостных испытаниях прочность тканого композита может снижаться даже более резко (рис. 13.5), чем нетканых материалов. Это объясняется касанием поперечных волокон в ткани, инициирующим усталостное разрушение матрицы. В худшем случае, предельная деформация углеродистика после миллиона циклов растяжения-сжатия снижается до 0,3 %. Таким образом, хотя композиты на основе тканей имеют технологические преимущества, их механические свойства, особенно в условиях усталостной нагрузки, ниже, чем у нетканых материалов.

13.9. Гибридные композиты

Как отмечалось в предыдущих главах, гибридные композиты содержат два типа волокон (например, стеклянные и углеродные). Волокна смешивают в пределах одного слоя или чередуют слои. Главные цели при создании гибридов состоят в увеличении вязкости разрушения или жесткости материала. Полимерные волокна придают композиту повышенную вязкость разрушения, и их смешение с углеродными или стеклянными волокнами позволяет создать ударопрочный материал, лишенный недостатков, характерных для органоластиков (например, низкой прочности при сжатии). Кроме того, некоторые детали типа вертолетных лопастей желательно делать из материала, имеющего строго определенную жесткость, что может быть достигнуто путем смешения стеклянных и углеродных волокон.

Механические характеристики гибридных композитов определяются волокнами с более низкой деформативностью. Если содержание этих волокон мало, их разрыв не ведет к катастрофическому разрушению материала. Обычно, однако, разрушение низкодеформативных волокон сразу же инициирует разрушение всего композита. В условиях усталостного нагружения, как показано выше, поведение композитов на основе различных волокон отличается довольно сильно. Так как усталостное поведение зависит прежде всего от удлинения, свойства гибридных композитов определяются менее деформативными волокнами. Это связано с тем, что эти волокна обычно жестче и несут основную часть нагрузки. Менее жесткие волокна недогружены и при усталостном нагружении практически не повреждаются.

13.10. Влагопоглощение

Композиты иногда эксплуатируются в условиях повышенной влажности и температуры. Относительные влажность может измениться из 0 до 100 %. Диапазон изменения температуры лежит в пределах от -40 до +70°C, хотя в военных самолетах температура вблизи двигателя может достигать 130°C и даже более. Поэтому необходимо знать влияние температуры на свойства композиционных материалов.

Как отмечалось в главе 5, большинство полимерных матриц поглощает атмосферную влагу. Отметим, что органические волокна также способны поглощать воду. Эпоксидные смолы поглощают от 1 до 10 вес. % влаги, и композит с 60 об. % волокон может содержать от 0,3 до 3 % воды. Обычно содержание воды в композитах равно от 1 до 2 весовых %.

Поглощение влаги лимитируется процессом диффузии, которая в тонких пластинах является одномерным процессом, описываемым вторым законом Фика

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

где c — концентрация воды, t — время, D — коэффициент диффузии и x — расстояние от поверхности. Для плоской пластины, поглощающей воду через обе поверхности, ее масса возрастает пропорционально квадратному корню из времени

$$\frac{M}{M_m} = (4/h) (Dt/\pi)^{1/2},$$

где M — масса набранной воды за время t , M_m — ее максимальное содержание и h — толщина пластины. Скорость поглощения постепенно уменьшается, и содержание влаги приближается к максимуму. Обычно существует максимальная температура и максимальная влажность, выше которых закон Фика перестает выполняться. Некоторые материалы не описываются им и в нормальных условиях. Для описания влагопоглощения таких материалов были развиты специальные модели.

Поглощение воды приводит к набуханию материала, которое образно и общно не приводит к снижению свойств при комнатной температуре. Однако вода пластифицирует полимерные матрицы, и при повышенных температурах свойства снижаются, особенно при приближении к температуре стеклования матрицы. Снижение температуры стеклования эпоксидной смолы под действием влаги иллюстрируется рисунком 5.19.

При растяжении температура и влага практически не влияют на свойства продольных слоев, несущих основную нагрузку в мультислоистых ламинатах. В то же время, они существенно влияют на прочность при растяжении ламината со схемой укладки $\pm 45^\circ$ и прочность однонаправленного материала при сжатии. Например, при температуре 130°C и влажности 1,5% предел прочности при растяжении углепластика со схемой укладки $\pm 45^\circ$ на 40% ниже соответствующих характеристик сухого материала при комнатной температуре, а деформация при разрыве возрастает примерно вдвое.

13.11. Влияние ультрафиолета и кислот

Композиты часто подвергаются воздействию ультрафиолетового света, растворителей, паров, кислот и щелочей. Определяющую роль в защите композита от этих воздействий играет матрица. Эпоксидные смолы к ним менее чувствительны, чем полиэфирные. Однако еще более высокую стойкость имеет практически нечувствительный к влиянию среды термопластичный ПЭЭК.

Эпоксидные и полиэфирные смолы поглощают органические растворители более интенсивно, чем воду. Особенно сильно свойства стеклопластика с полиэфирной матрицей снижаются при совместном действии кислоты и растягивающей нагрузки. Это явление, называемое коррозией под нагрузкой, обусловлено растрескиванием стеклянных волокон под действием кислоты.

13.12. Влияние среды

Усталостные испытания делятся от нескольких дней до нескольких недель, и поэтому образец в процессе испытаний может изменить свою влажность. При комнатной температуре, как правило, влажность не изменяется. Однако, если испытания проводятся при повышенной температуре, необходимо принять меры для сохранения влажности образца. Один из способов решения этой проблемы состоит в проведении испытаний в камере с контролируемыми температурой и влажностью. К сожалению, этот метод чрезвычайно дорогостоящ. Еще один способ состоит в испытании образца в полимерном мешке, в котором при помощи раствора соли поддерживается необходимая влажность.

Влияние окружающей среды на усталостные свойства композита зависит от чувствительности ламината к свойствам матрицы. Так, многослойные углепластики весьма нечувствительны к влаге при комнатной температуре. Если же свойства композита чувствительны к характеристикам матрицы, усталостные свойства зависят от влажности,

причем снижение свойств тем сильнее, чем меньше доля продольных волокон. Данных об усталостных свойствах материалов при повышенных температурах явно недостаточно, но даже имеющиеся данные позволяют сделать вывод, что прочность при циклической нагрузке во влажных условиях снижается довольно заметно.

Литература

Общая

- Curtis, P. T. (1985) *CRAIG test methods for the measurements of the engineering properties of fibre reinforced plastics*, RAE TR85099. RAE, Farnborough (now DRA Aerospace).
 Harris, B. (1977) Fatigue and accumulation of damage in reinforced plastics, *Composites*, 8(4) pp. 214.
 Jamison, R. D., Schulte, K., Reifsnider, K. L. and Stinchcomb, W. W. (1983) *Characterisation and analysis of damage mechanisms in the fatigue of graphite-epoxy laminates*, ASTM STP836.
 Talreja, R. (1981) Fatigue of composite materials: damage mechanisms and fatigue life diagrams, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A378, 461.

Специальная

- Curtis, P. T. and Moore, B. B. (1985) *A comparison of the fatigue performance of woven and non-woven CFRP laminates*, RAE TR85059. RAE, Farnborough (now DRA Aerospace).
 Curtis, P. T. (1986) *An investigation of the mechanical properties of improved carbon fibre composite materials*, RAE TR86021. RAE, Farnborough.
 Curtis, P. T. (1987) *A review of the fatigue of composite materials*, RAE TR87031, RAE, Farnborough.

Задачи

- 13.1. Опишите механизмы усталостного повреждения однонаправленных и мультислойных армированных пластиков. Обсудите влияние волокон, матрицы и границы раздела на механические свойства материала и механизм повреждения.
 13.2. Опишите влияние воды и других жидкостей на полимерные матрицы. Как влияют процессы повреждения на усталостные свойства армированных пластиков при повышенной температуре, при повышенной влажности, а также в условиях их совместного действия?

ГЛАВА 14

СОЕДИНЕНИЕ ДЕТАЛЕЙ

14.1. Введение

В идеале у создаваемых конструкций не должно быть соединения отдельных деталей. Так делают, например, сосулы внутреннего давления (методом намотки). Однако обычно конструкции приходится собирать из отдельных деталей. Это может быть связано с ограничениями размеров по технологическим причинам, необходимостью разбирать конструкции при транспортировке, осмотре и ремонте. Существует два основных способа соединения деталей — *механическое* и *склеивание*. Большой опыт накоплен по созданию соединений деталей из композитов с полимерными матрицами. Так можно соединять и композиты с металлическими матрицами, однако для материалов с керамическими матрицами этот опыт использовать нельзя. В данной главе будут рассмотрены лишь методы соединения композитов с полимерными матрицами.

Принимая решение о способе соединения, нужно обращать внимание на условия эксплуатации изделия. Если требуется разбирать конструкцию, использовать склеивание нельзя. То же относится и к случаям, когда невозможно использовать оборудование для склеивания. Напротив, механический способ не используется для соединения тонких пластин, поскольку при сверлении появляются дефекты, из-за которых может начаться разрушение материала.

Перечислим основные преимущества и недостатки каждого из двух типов соединения деталей:

(а) Механическое соединение

Преимущества:

1. Не требуется поверхностная обработка.
2. При разборке детали не повреждаются.
3. Удобно проводить осмотр конструкции.

Недостатки:

1. Отверстия являются концентраторами напряжения.

2. Приходится увеличивать вес конструкции.

(b) Склеивание

Преимущества:

1. Концентрация напряжения незначительна.
2. Конструкция имеет меньший вес.

Недостатки:

1. Невозможна разборка без повреждения детали.
2. Окружающая среда может приводить к катастрофическому снижению прочности склейки.
3. Необходимо обрабатывать склеиваемые поверхности.
4. Затруднен контроль качества склейки.

Композиты часто соединяют внахлест, как показано на рисунке 14.1а. Такой способ соединения особенно удобен для плоских пластин и труб, которые можно соединять как склеиванием, так и механически (рисунки 14.1б). Другие способы соединения, вроде фланцевого, здесь не рассматриваются.

14.2. Механическое соединение

Прочность механического соединения зависит от свойств соединяемых материалов, типа соединительного элемента (винта, заклепки или болта), его длины, величины стягивающей силы, диаметра отверстия и податливости соединяющего элемента. На прочность соединения композиционных материалов сильно влияет стягивающая сила, направленная по толщине соединяемых деталей. Распределение напряжений вблизи соединения вследствие поперечного сжатия является трехмерным, что затрудняет использование аналитических решений и чрезвычайно усложняет расчеты методом конечных элементов.

14.2.1. Механизмы разрушения

Существуют четыре механизма разрушения соединения, схематически изображенные на рис. 14.2. Во всех случаях предел прочности соединения рассчитывают исходя из величины разрушающей силы P (рис. 14.1с) и площади поверхности разрушения композита.

Прочность при разрыве (рис. 14.2а) рассчитывают на площадь пластины за вычетом площади отверстия:

$$\sigma_t = \frac{P_t}{(w-d)t}, \quad (14.1)$$

14.2. Механическое соединение 357

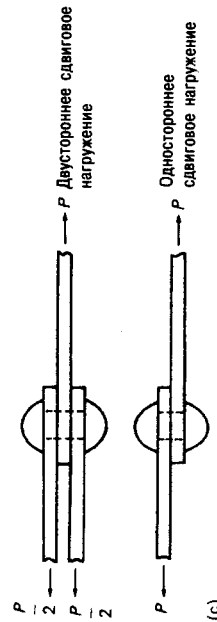
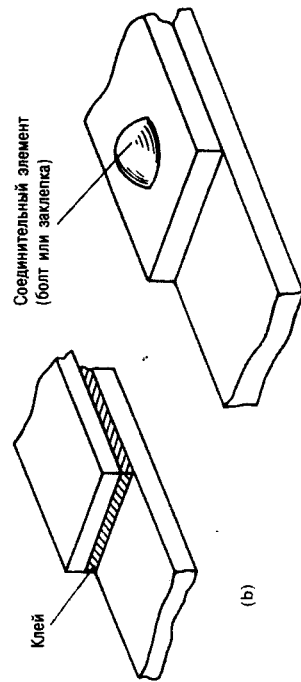
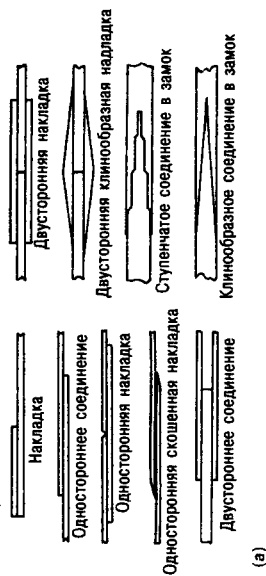


Рис. 14.1. Способы соединения (Hart-Smith, 1987а); (b) склеивание и механическое соединение; (c) способы передачи нагрузки; сдвиг по одной и двум плоскостям.

где t — толщина пластины, P_t — сила при разрыве, w и d — ширина пластины и диаметр отверстия (рис. 14.2), σ_t — предел прочности со-

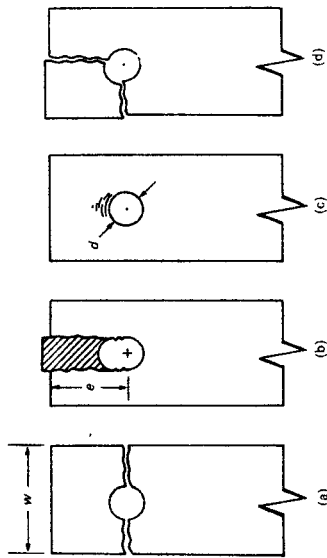


Рис. 14.2. Механизмы разрушения пластины с отверстием при механическом соединении: (а) разрыв; (б) сдвиг; (в) смятие; (д) скол.

единения. Чем меньше ширина, тем более вероятно разрушение путем разрыва пластины.

Прочность при сдвиговом разрушении рассчитывают (рис. 14.2б) из уравнения

$$\hat{\sigma}_s = \frac{P_s}{2et} \quad (14.2)$$

где P_s — сила при разрушении. Чем меньше величина e (рис. 14.2б), тем более вероятно сдвиговое разрушение ламината. Обычно при склеивании длину нахлеста (склейки) e берут равной $4d$.

Прочность при смятии рассчитывают на площадь отверстия (рис. 14.2с):

$$\hat{\sigma}_b = \frac{P_b}{td} \quad (14.3)$$

Прочность при смятии обычно равна или несколько выше прочности композита при сжатии.

При сколе разрушение является комбинированным, и одна часть образца разрушается путем разрыва, а вторая — изгиба (рис. 14.2д). Описать при помощи простой формулы такое разрушение не удается. В этом случае прочность композита принято рассчитывать на сечение отверстия аналогично прочности при смятии $\hat{\sigma}_b$.

Прочность соединения максимальна, если отношение d/t не слишком мало и не слишком высоко. При малых отношениях d/t (большая толщина пластины) происходит разрушение заклепки, а при больших значениях d/t (малая толщина) разрушается пластина. В обоих случа-

ях прочность соединения невысока. Максимальную прочность соединение имеет при отношениях d/t в интервале от 1 до 3.

Прочность соединения зависит от степени анизотропии материала и ориентации волокон вблизи отверстия. В композитах с низкой сдвиговой прочностью разрыв не наблюдается даже при очень малой ширине образцов ($w < 2d$) и большой длине нахлеста ($e > 10d$). Примером являются однонаправленные композиты, которые всегда разрушаются по сдвиговому механизму (рис. 14.2б). Ламинаты с большой долей слоев $\pm 45^\circ$ имеют высокую прочность при смятии и низкую концентрацию напряжения вблизи отверстия. Как следствие, они относительно нечувствительны к длине нахлеста e .

Прочность при смятии определяется прочностью композита при сжатии и стеснением поперечной деформации, которую обеспечивает болт. Без этого стеснения композит расслаивается вблизи отверстия при очень низких продольных нагрузках. Слои волокон $\pm 45^\circ$ и 90° обеспечивают эффективную поддержку несущих основную нагрузку продольных волокон, и поэтому многослойные ламинаты имеют высокую прочность при смятии. Прочность при смятии квазиизотропных стеклопластиков на основе рубленых матов и полиэфирной матрицы выше, чем тканых композитов. Это относится и к другим квазиизотропным ламинатам, прочность которых может вдвое превосходить прочность ламинатов, этим свойством не обладающих.

14.2.2. Соединительные элементы

Для соединения армированных пластинок пригодны почти все соединительные элементы, используемые для других материалов. Исключение составляют шурупы, которые часто срывают резьбу, а также самозаклинивающиеся болты, принцип крепления которых основан на создании поперечного растяжения, приводящего к расслоению композита. Если требуется регулярно разбирать конструкцию, используют вставки или что-то подобное.

Заклепки успешно используют для соединения ламинатов толщиной до 3 мм, причем они могут быть как сплошными, так и полыми. При этом необходимо стараться не повредить ламинат при сверлении отверстия и при расклепывании. Заклепки и болты с потайной головкой не могут использоваться для соединения тонких пластин. Для снижения опасности продавливания головки заклепки угол конуса должен быть увеличен до 120° (вместо стандартных 90°).

Наиболее эффективное механическое соединение обеспечивают болты, позволяющие создать контролируемое поперечное сжатие пластины, предотвращающее ее расслоение. Завинчивание болта даже при

помощи рук позволяет значительно поднять прочность соединения. Значительная доля несущей способности соединения сохраняется, даже если гайка ослабляется в процессе службы. Для оптимальной прочности соединения углепластика доля слоев $\pm 45^\circ$ должна быть равна приблизительно 55%, а для стеклопластика несколько выше. Болты и заклепки, предназначенные специально для соединения композитов, теперь производятся различными компаниями.

14.2.3. Прочность при смятии

Если соблюдены геометрические условия, исключаящие сдвиг или разрыв, соединение разрушается путем смятия. Приведенные на рис. 14.3–14.5 максимальные значения прочности относятся к одиночному соединению, нагруженному на сдвиг по двум плоскостям, как показано на рис. 14.1с. В случае одностороннего соединения или неполного соответствия диаметра болта и отверстия снижение прочности может превышать 10%, причем стеклопластики и углепластики в этом случае ведут себя примерно одинаково. Анализ уравнений 14.1 и 14.2 показывает, что при небольшой ширине соединяемых деталей и значитель-

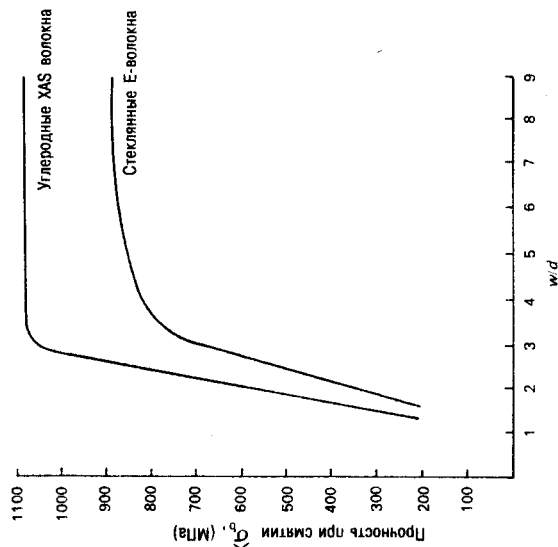


Рис. 14.3. Зависимость прочности соединения углепластика и стеклопластика на основе эпоксидной матрицы от отношения w/d . Плато на кривой соответствует смятию, а возрастающая область — разрыву.

ной длине нахлеста соединение должно разрушаться путем отрыва, а в случае значительной ширины и малой длины нахлеста весьма вероятен сдвиг. При больших значениях w и e преобладает смятие. Исключение представляют собой композиты на основе рубленых матов, которые обычно (при содержании волокон примерно 20 об.%) разрушаются путем разрыва. Переход от сдвига или разрыва к смятию является явным в углепластике и весьма размытым в армированных рублеными стекляными волокнами полиэфирах. Поведение стеклопластика на основе непрерывных волокон является промежуточным.

Прочность одиночного болтового соединения стеклопластика, углепластика, армированного короткими стекляными волокнами полиэфира и тканого гибридного стекло-углепластика, характеризуется рис. 14.3–14.5. Содержание волокон в углепластике и стеклопластике равно 60 об.%, и поэтому свойства этих материалов можно сравнивать. Доля волокон в гибридном материале и коротковолокнистом композите значительно ниже. Пересчет прочности на равное содержание волокон показывает, что прочность стеклопластиков на основе непрерывных и рубленых волокон близки. Прочность при смятии композитов, армированных рублеными волокнами и матами, превосходит свойства тканых ламинатов.

14.2.4. Сравнение металлов и композитов

Для металлов удельная прочность при смятии определяется как отношение прочности при смятии к плотности материала. Типичные значения удельной прочности композитов при смятии (при объемной доле волокон 60 %) можно вычислить исходя из уровня «плато» на рис. 14.3–14.5. Результаты расчетов приведены в таблице 14.1. Отметим, что удельная прочность при смятии композитов выше, чем металлов.

Таблица 14.1. Удельная прочность при смятии для одиночного отверстия

	Плотность (тонн/м³)	$\hat{\sigma}_b$ (МПа)	Удельная прочность (тонн/м³)/(МПа)
Сталь S96	7,85	973	124
Алюминиевый сплав L72	2,70	432	160
Углепластик*	1,54	1070	695
Стеклопластик*	2,10	900	428
Стеклопластик* (ткань)	2,10	682	324

* $v_f=0,6$

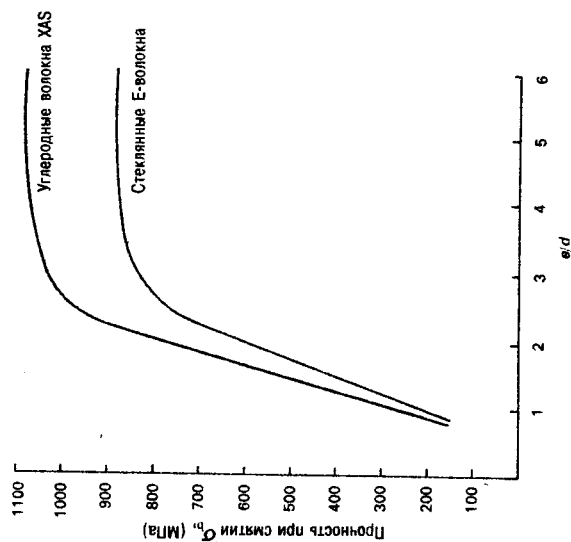


Рис. 14.4. Зависимость прочности соединения от отношения e/d . Плато соответствует смятию, а возрастающая область — сдвиговому разрушению.

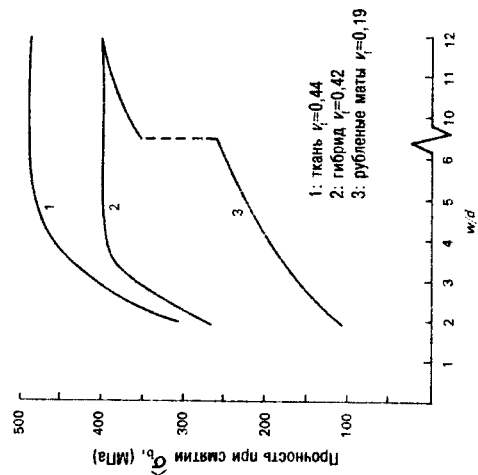


Рис. 14.5. Зависимость прочности соединения от отношения w/d для стеклопластиков с полиэфирной матрицей.

14.2.5. Влияние количества отверстий

Если ряд соединительных элементов находится на одной линии, перпендикулярной оси растяжения, а расстояние между ними велико, прочность соединения можно вычислить как для одиночного элемента. Взаимным влиянием соединительных элементов можно пренебречь, если расстояние между ними не менее $4d$ для углепластика и стеклопластика и $6d$ для армированного короткими волокнами и рублеными матами стеклопластика.

Если отверстия находятся на линии, параллельной оси растяжения, нагрузка воспринимается лишь сравнительно небольшой областью вокруг каждого отверстия. Как следствие, такой способ соединения менее эффективен, чем описанный выше. На рис. 14.6 приведена зависимость эффективности соединения (определяемая делением прочности соединения на прочность ламината без отверстия) от отношения d/w . Максимум на кривой соответствует наиболее эффективному способу соединения при помощи одного ряда отверстий.

Данные рис. 14.6 показывают, что использование нескольких рядов соединительных элементов не позволяет значительно повысить прочность конструкции. Например, прочность соединения при двух рядах соединительных элементов лишь на 10% выше максимальной прочности при одном ряде. Существенное увеличение эффективности соеди-

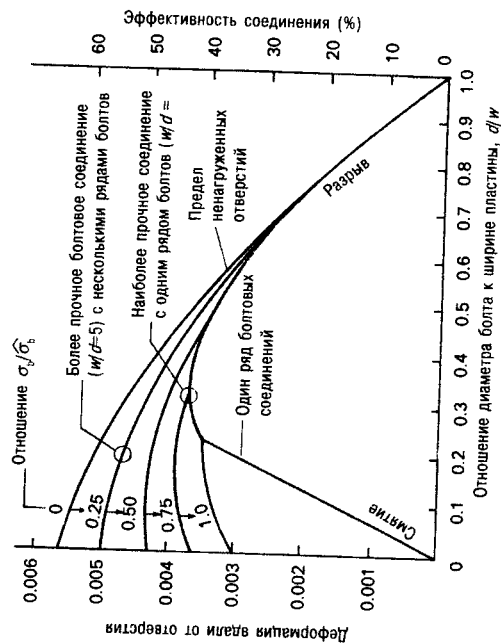


Рис. 14.6. Влияние конструкции на структурную эффективность болтового соединения (Hart-Smith, 1987a).

нения может быть достигнуто путем использования сложных конфигураций соединения, а для ламинатов переменной толщины и путем использования болтов различного диаметра.

14.2.6. Анализ полей напряжений

В отличие из клеевых соединений, теоретический анализ болтовых соединений до недавнего времени практически не проводился. Эту задачу можно решать двумя способами: аналитическими методами теории упругости и компьютерным расчетом методом конечных элементов. При решении необходимо учитывать трение между болтом и отверстием, длину их контакта, наличие поперечных напряжений, а при сдвиге и нелинейное поведение материала.

Полный анализ всех перечисленных факторов аналитически невозможен. Однако задачу можно решать приближенно предполагая, что распределение напряжений является двумерным. Результаты расчетов качественно согласуются с экспериментальными данными, хотя их различие может быть довольно значительным. Улучшение согласия расчетов и эксперимента в будущем будет определяться прогрессом в развитии критериев разрушения и использованием трехмерного анализа распределения напряжений.

14.3. Клеевые соединения

Если клеевое соединение двух деталей создают одновременно с отверждением матрицы, процесс называют *соотверждением*. Адгезивом в этом случае является матричный полимер. Хотя в настоящем разделе такие соединения не рассматриваются, замечания о механизмах разрушения, как правило, справедливы и для соединений, полученных методом соотверждения.

14.3.1. Механизмы разрушения

Существует несколько механизмов разрушения клеевых соединений, причем разрушаться может как адгезив, так и склеиваемые материалы. В свою очередь, разрушение композита может быть межслоевым, поперечным или нормальным как показано схематически на рис. 14.7. В первых двух случаях разрушается матрица или граница раздела, а в последнем случае разрушаются также и волокна. Кроме того, может разрушиться граница адгезива и композита. Такое разрушение имеет пониженную прочность, и поэтому его необходимо избегать путем должной обработки склеиваемых поверхностей.

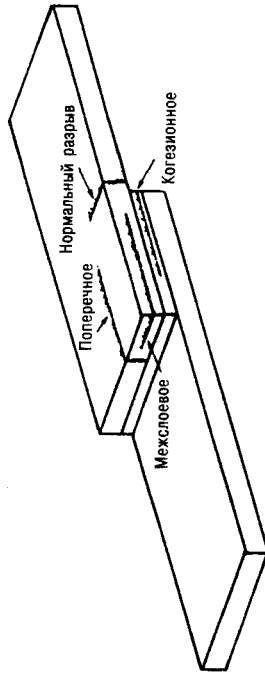


Рис. 14.7. Механизмы разрушения клеевых соединений.

14.3.2. Обработка склеиваемых поверхностей

Эпоксидные и полиэфирные смолы имеют полярные группы и склонны к образованию прочной адгезионной связи. Они не окисляются и не корродируют во влажных условиях. Для образования качественной склейки с поверхности композита необходимо удалить грязь, масла и остатки веществ, которые наносят на форму перед отверждением матрицы. Обычно это делают двумя методами: с помощью липкой ленты, которую затем удаляют, или абразивной обработкой склеиваемых поверхностей и последующей протиркой растворителем.

Липкую ткань (лакрон или аналогичную ей) удаляют с поверхности деталей лишь перед склеиванием. Для получения высококачественной склейки необходимо, чтобы ткань после удаления не оставяла на поверхности своих компонентов. Поэтому она не должна включать составляющие, облегчающие удаление, или композит нужно дополнительно очищать от них. Более эффективным оказался второй метод очистки поверхности, состоящий в абразивной обработке и протирании растворителем. В качестве абразива используют смесь частиц песка с окисью алюминия или стандартные абразивные пасты.

14.3.3. Анализ распределения напряжений

Особенностью армированных пластиков являются высокая степень анизотропии и низкие сдвиговые и поперечные характеристики (перпендикулярно плоскости пластины). Сильное влияние на прочность соединения оказывает поперечная прочность композита, особенно если она нужна. Влияют также остаточные тепловые напряжения, появляющиеся при охлаждении после отверждения матрицы. При расчетах прочности применяют как линейный, так и нелинейный анализ. Хотя линейный анализ весьма неточен, он чрезвычайно полезен для выявле-

ния роли различных факторов на прочность соединения. Расчеты показали, что прочность соединения максимальна, если выполнены следующие условия:

- склеиваемые детали идентичны, а если это невозможно, равны их жесткости при изгибе;
- продольная жесткость склеиваемых ламинатов высока, насколько возможно;
- велика длина склейки;
- адгезив имеет низкий модуль упругости;
- склеиваемые пластины квазиомоготенны, а волокна во внешних слоях ориентированы вдоль оси нагружения.

Нелинейный анализ клеевых соединений показал, что основным параметром, определяющим прочность соединения, является предельная деформация адгезива при сдвиге. Менее прочный, но пластичный адгезив позволяет создать более прочное соединение.

При теоретическом анализе обычно предполагают, что адгезив деформируется упругопластично как показано на рис. 14.8а. Вблизи краев соединения напряжение в адгезиве постоянно и равно пределу его текучести. Если склейка достаточно длинная, вдали от краев напряжение снижается (рис. 14.8б), причем длина зоны пластического деформирования ($l - s/2$) зависит только от свойств адгезива и не зависит от длины склейки l .

Трещина в клеевом соединении начинает распространяться при достижении предельной сдвиговой деформации адгезива. При увеличении длины склейки прочность соединения вначале возрастает, а затем достигает максимума, поскольку средняя часть склейки перестает передавать сдвиговые усилия, и на эпюре распределения сдвигового напряжения появляется провал, как показано на рис. 14.8б. Для углепластика оптимальная длина склейки равна $30t_a$ (рис. 14.8б). При увеличении толщины склеиваемых пластин возрастают трансверсальные напряжения, которые могут приводить к их разрушению.

Прочность односторонней склейки, в отличие от двусторонней, от свойств адгезива практически не зависит. В этом случае при растяжении композит расслаивается, и прочность соединения определяется его свойствами и длиной склейки. При односторонней склейке трансверсальные напряжения примерно на порядок выше, чем при двусторонней. Трансверсальные напряжения могут быть снижены путем увеличения длины склейки, и ее оптимальная длина равна примерно $80t_a$.

При *клинообразном* соединении идентичных материалов сдвиговые напряжения (рис. 14.1) постоянны, и прочность максимальна, если

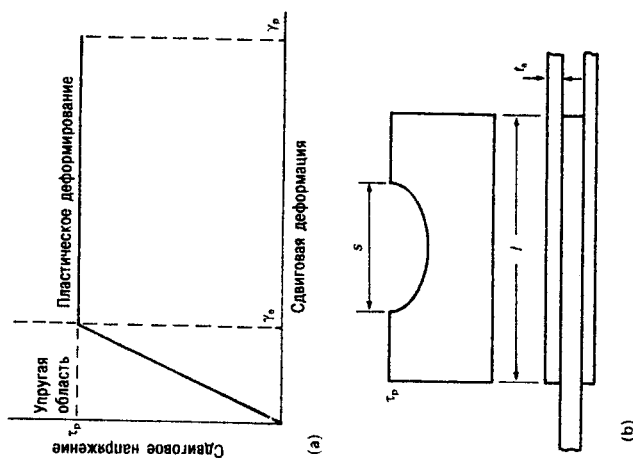


Рис. 14.8. Кривая напряжение-деформация упругопластического материала (а); (б) распределение сдвигового напряжения по длине склейки для двойного клеевого соединения (Hart-Smith, 1987b).

используется хрупкий высокопрочный адгезив. Прочность соединения увеличивается с длиной склейки. Чем больше величина передаваемой силы, тем меньше должен быть угол клина. При различной жесткости склеиваемых материалов основная передача силы происходит в зоне пластической деформации адгезива вблизи конца менее жесткого материала.

При *ступенчатой* форме соединения зоны пластического течения адгезива появляются только вблизи первых ступеней. Как и при двусторонней склейке, увеличение длины ступеней вначале ведет к возрастанию прочности, а затем она достигает максимума, поскольку центральная область ступеней перестает передавать нагрузку, как показано на рис. 14.8б. Дальнейшее увеличение величины передаваемой нагрузки может быть достигнуто лишь путем увеличения количества ступеней и уменьшением их толщины. При склеивании различающихся материалов анализ ступенчатого и клинообразного соединения должен учитывать различие их жесткости и коэффициентов теплового расширения.

14.3.4. Результаты испытаний

Экспериментальные данные о прочности клеевых соединений ком-
зитов ограничены и, например, для стеклопластика на основе поли-
эфирной матрицы они просто отсутствуют. Прочность соединения при
одно- и двусторонней склейке может достигать 80 или даже 90% проч-
ности ламината.

Хорошее согласие теоретических расчетов и эксперимента может
быть достигнуто лишь при учете нелинейного поведения и пластично-
сти адгезива. Для односторонней склейки нужно учитывать и изгиб
пластины. Пренебрежение этими факторами может привести к дву-
кратному расхождению с экспериментальными данными.

После 10⁶ циклов нагружения прочность соединения может сни-
зиться до 30% от исходного статического значения. Несмотря на более
высокую величину сдвиговых напряжений, при циклическом нагру-
жении соединение замком ведет себя лучше других типов соединения,
поскольку ниже концентрация напряжений.

14.3.5. Свойства адгезива

Для аналитических методов необходимо определить связь напряжения
и деформации адгезива. Для этого используют два основных метода
испытания — *фанерный сдвиг* и *кручение тонкой цилиндрической склейки*
(рис. 14.9). Достоинствами первого метода являются простота изго-
товления и испытания образцов, а недостатком — непостоянство сдви-
гового напряжения по длине склейки. Метод кручения тонкой цилин-
дрической склейки более сложен в исполнении, но лучше моделирует
чистый сдвиг.

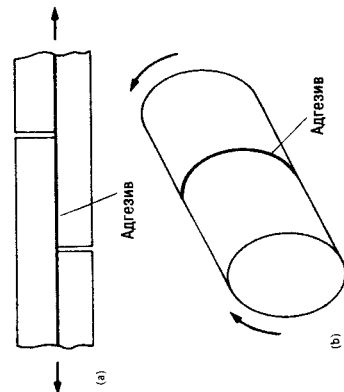


Рис. 14.9. Методы сдвиговых испытаний адгезива: (а) фанерный сдвиг; (б) кручение тонкой цилиндрической склейки (Adams, Wake, 1984).

Типичные значения модуля упругости и прочности при сдвиге эпок-
сидной смолы равны приблизительно 1 ГПа и 50 МПа соответственно.
Разрушающая сдвиговая деформация пластичного адгезива γ_p рав-
на приблизительно 200%, а $\gamma_c = 10\%$ (определена на рис. 14.8а).

14.3.6. Общие соображения при проектировании

Эффективность одностороннего клеевого соединения ограничена транс-
версальной прочностью склеиваемого композита. Кроме того, она за-
висит от толщины склеиваемых пластин. Если предотвратить изгиб
композита, прочность склейки возрастает до прочности двусторонней
склейки. Величина изгиба может быть снижена путем увеличения тол-
щины пластин в местах склейки, как показано на рис. 14.10.

Для соединения несущих большую нагрузку толстых пластин необхо-
димо использовать клинообразное или ступенчатое замковое соединение.
Делать такие соединения довольно сложно. Особенно трудно обеспечить
постоянную толщину адгезива в клинообразном соединении. При ступен-
чатом соединении качественную склейку получить проще. В обоих случа-
ях желательно использовать пластичный адгезив, т.к. при этом меньше
скажутся производственные дефекты. Недавно разработанные пласти-
фицированные акриловые адгезивы имеют лучшие характеристики в слу-
чаях, когда существенна роль трансверсальных напряжений. Преимуш-
ство пластичных адгезивов по сравнению с хрупкими состоит в более
высокой статической прочности и усталостной стойкости.

Подготовка поверхности металла влияет на долговечность соедине-
ния с композитами. На долговечность соединений композитов небла-
гоприятно влияет влага, причем снижение прочности (адгезива и мат-
рицы) может достигать 50% и даже больше.

Чтобы обеспечить надежность соединения, желательно использовать
адгезив, сдвиговая прочность которого приблизительно на 50% выше,
чем у композита. При расчетах соединения следует снизить результаты
лабораторных испытаний адгезива на 20% для учета неполного контакта
склеиваемых поверхностей. При проектировании соединений крупных
конструкций нужно осторожно использовать результаты испытаний ма-

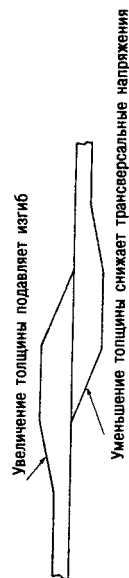


Рис. 14.10. Профилирование пластин для увеличения прочности кле-
евого соединения при односторонней склейке (Hart-Smith, 1987b).

лых лабораторных образцов, поскольку увеличение размеров может привести не только к увеличению концентрации напряжения, но даже и к изменению механизма разрушения. Как следствие, прочность соединения может быть значительно ниже прочности лабораторных образцов.

Еще одна проблема связана с выделением поглощенной воды на склеиваемой поверхности композита, и, как следствие, появлением пор и снижением прочности склейки. Для предотвращения этого перед склеиванием композит необходимо высушить, однако при ремонтных работах это не всегда возможно. Кроме того, в процессе эксплуатации композиты могут поглощать техническое масло, и при ремонте может возникнуть необходимость их удаления из композита.

14.4. Ремонт

14.4.1. Введение

Приводимые ниже рекомендации основаны на опыте ремонта авиационной техники, однако они носят довольно общий характер и могут применяться в других областях техники. Часто ремонт связан с заменой соединения и поэтому возможность его восстановления должна предусматриваться уже на стадии проектирования конструкции.

Как уже отмечалось, в композитах появляются дефекты в результате постепенного накопления микрповреждений, воздействия окружающей среды или случайных ударов. Прежде всего, необходимо установить размер и нахождение дефекта. Обычно для этого применяют ультразвуковые и рентгеновские методы.

Цель ремонта состоит в восстановлении структурной целостности поврежденной конструкции. Способ ремонта зависит из типа детали и предъявляемых к ней требований. Кроме того, он зависит от внешних условий. Например, в ангарх возможен капитальный ремонт, а в полевых условиях возможности намного более ограничены.

14.4.2. Методы ремонта

Методы создания клеевых соединений могут использоваться как для косметического, так и для капитального ремонта. *Косметический ремонт* применяется для устранения повреждений, которые не являются критическими для работы конструкции. При таких работах часто возникает необходимость восстановления ровной поверхности детали. Для этого на поврежденное место наносится ремонтный состав и выравнивается по контуру детали. Инжекционное заполнение используется для устранения не слишком значительных расслоений. Для этого сверлят несколько отверстий, в одно из которых под давлением вводят разогре-

тую смолу, имеющую пониженную вязкость, до тех пор, пока она не начнет вытекать из других отверстий. К восстанавливаемой области иногда прикладывают давление, чтобы закрыть образовавшиеся трещины. Для устранения серьезных повреждений на деталь накладывают заплату двух типов, а именно, заполняющие и внешние (рис. 14.11).

После оценки степени повреждения ламината возникает вопрос об удалении из него влаги для улучшения качества склейки. Предварительное высушивание материала (в течение как минимум 48 часов при 76–93°C), медленный нагрев, невысокая температура отверждения и выбор нечувствительного к действию влаги адгезива могут полностью решить эту проблему. При повышенных температурах эксплуатации адгезивы, отверждаемые при 120°C, более чувствительны к влажности композита, чем отверждаемые при 175°C. После высушивания содержание воды в ламинате не должно превышать 0,5%. Для ламината, состоящего из 16 или более слоев, на это может уйти более 24 часов.

(а) Внешние накладки

Этот метод состоит в приклеивании куска композиционного материала на внешнюю поверхность ремонтируемой детали. Поверхность детали обычно не выравнивают. Эта методика требует меньшей подготовительной работы, чем инъекционное заполнение. Особенно широко этот метод используют при ограниченном доступе к ремонтируемой детали.

Область вокруг повреждения несет дополнительную нагрузку, что необходимо учитывать при принятии решения о способе ремонта. Отметим, что адгезив на границе с ремонтируемой деталью несет повышенные сдвиговые напряжения. Чтобы снизить сдвиговые напряжения, производят ступенчатое изменение диаметра слоев наклеиваемой заплата. Низкая трансверсальная прочность ламината налагает ограничение на толщину, при которой возможна починка данным методом. Как следствие, им можно чинить лишь относительно тонкие ламинаты. Вероятность отслаивания накладки может быть снижена путем

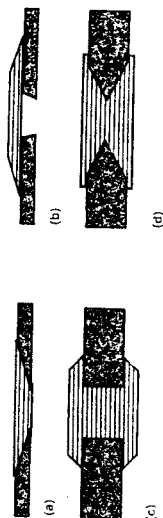


Рис. 14.11. Способы ремонта; (а) восстановление тонкой панели; (б) внешняя заплата; (с) вставка для ремонта толстолистовых пластин; (д) двойной клин для ремонта толстолистовых пластин (Robson, 1992).

дополнительного крепления при помощи болтов или заклепок, расположенных на расстоянии не менее 25 мм от отверстия.

(b) Ремонт заплыва

Этот метод применяют, если после ремонта поверхность детали должна оставаться гладкой. Обычно ремонтируемой детали придают клинообразную форму, обеспечивающую наиболее прочное соединение с вставкой. Этот метод используют для ремонта несущих большую нагрузку деталей, когда необходимо снизить концентрацию напряжения вблизи места повреждения. Например, для починки толстых пластин, так как внешняя заплата привела бы к появлению трансверсальных напряжений и расслоению материала.

Процедура придания ремонтируемой области клинообразной формы должна проводиться очень осторожно, чтобы композит не расслоился и был выдержан требуемый угол клина. Ориентация слоев вставки должна соответствовать схеме укладки поврежденного материала. Вставка может приклеиваться при помощи специального адгезива или матричной смолы. Соединение может иметь форму одиночного или двойного скоса (рис. 14.11). При двойном скосе меньше его длина и, кроме того, стачивается меньший объем пластины. Типичный угол скоса равен 1:20. В качестве внешнего слоя рекомендуется использовать не однонаправленный материал, а ткань или слой $\pm 45^\circ$, что снижает опасность поверхностного повреждения.

14.4.3. Починка при помощи болтового соединения

Для крепления вставки может использоваться болтовое соединение. Болтовое соединение используют для ремонта толстых ламинатов, когда клеевые соединения отслаиваются из-за высоких сдвиговых напряжений. Этот метод крепления используют, если не представляется возможным сделать клин на поврежденной пластине.

При помощи болтов вставка может крепиться как на одной, так и на двух поверхностях пластины (рис. 14.12a). Если требуется использовать болты с потайными головками, толщина вставки должна позволять спрятать головки болта. Если нежелательно резкое изменение толщины детали, заплата может иметь скошенные края.

При еще одном способе болтового соединения в поврежденное место делается вставка, и болты крепятся, как показано на рис. 14.12. Проблемы такого ремонта возникают при ограниченном доступе к обратной стороне пластины, а также при монтировании крупных накладок с большим количеством болтов.

Использование болтов имеет некоторые особенности. Сверление отверстий может быть весьма трудоемким процессом, причем при этом

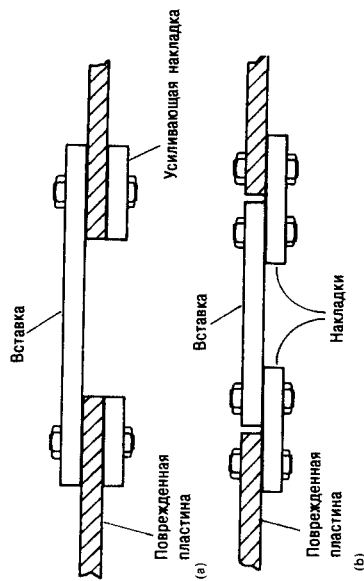


Рис. 14.12. Ремонт при помощи болтового соединения: (a) внешняя накладка; (b) вставка.

может повреждаться ремонтируемая деталь. Болтовой ремонт нельзя использовать для починки сотовых конструкций и при низкой прочности при смятии ламинатов с некоторыми схемами укладки слоев.

Литература

Специальная

Adams, R. D. and Wake, W. C. (1984) *Structural Adhesive Joints in Engineering*, Elsevier Applied Science.

Hart-Smith, L. J. (1987a) Design and empirical analysis of bolted or riveted joints, in *Joining Fibre-Reinforced Plastics*, (ed. F. L. Matthews), Elsevier Applied Science.

Hart-Smith, L. J. (1987b) Design of adhesively bonded joints, in *Joining Fibre-Reinforced Plastics*, (ed. F. L. Matthews), Elsevier Applied Science.

Robson, J. E. (1992) *Ph.D. Thesis*, Imperial College, University of London.

Задачи

14.1. Опишите преимущества и недостатки механического соединения ламинатов. Опишите механизмы разрушения механического соединения. Как механизм разрушения и прочность соединения зависят от типа соединения, схемы укладки слоев и геометрии соединения?

14.2. Опишите прочность клевого соединения при односторонней и двусторонней склейке, ступенчатой и клинообразной склейке, обратив внимание на распределение напряжения в соединении. Опишите влияние механических характеристик адгезива и ламината на прочность соединения. Обратите внимание на факторы, которые могут уменьшать или увеличивать прочность соединения.

Miller, R. K. and McIntire, P. (eds) (1987) *Nondestructive Testing Handbook, Vol. 5, Acoustic Emission Testing*. American Society for Nondestructive Testing.

Mix, P. E. (1987) *Introduction to Nondestructive Testing*. Wiley.

Специальная

Berthelot, J. M. and Bolland, J. (1983) *1st. Int. Symp. on AE from Reinforced Composites*, Soc. Plastics Industry, California, USA.

Birchton, D. (1975) *Non-destructive Testing*. Engineering Design Guides, Oxford University Press.

Bryant, L. E. and McIntire, P. (eds). (1985) *Nondestructive Testing Handbook, Vol. 3, Radiography and Radiation Testing*. American Society for Nondestructive Testing.

CARP (Committee on AE from Reinforced Plastics) (1982) *Recommended Practice for AE Testing of GRP Tanks/Pressure Vessels*. Soc. Plastics Industry.

Cawley, P. (1987) *NOT Int.*, 20, 209. Cawley, P. and Adams, R. D. (1987) The non-destructive testing of honeycomb structures by the coin-tap test, in *Proc. ICCM, ECCM London, 1987*. (eds F. L. Matthews, N. C. R. Buskell, J. M. Hodgkinson and J. Morton), Vol. 1, Elsevier, p. 1, p. 415.

Cawley, P., Woolfrey, A. M. and Adams, R. D. (1985) *Composites*, 16, 23. Fowler, T. J. and Gray, E. (1979) Development of an acoustic emission test for FRP equipment, *ASCE Convention and Exposition*, Boston, USA.

Gortman, M. R. and Rytting, T. H. (1983) *1st. Int. Symp. on AE from Reinforced Composites*, Soc. Plastics Industry, California, USA.

Williams, J. H. and Doll, B. (1980) *Materials Evaluation*, 38, 33.

Williams, R. S. and Reifsnider, K. L. (1974) *J. Comp. Mat.*, 8, 340.

Задачи

- 15.1. Имеется ультразвуковое оборудование, способное работать при частотах 1 и 10 МГц. Определите длину волны при этих частотах, если скорость звука в композите равна 4 км/с. Какую частоту следует выбрать, если требуется: (а) детектировать мелкие дефекты и (б) ламинат имеет большую толщину.
- 15.2. Пластина толщиной 3 см из композиционного материала с массовым коэффициентом поглощения 2,5 кг/м² исследуется с мощностью рентгена с энергией 0,05 МэВ. В композите имеется сферическая пора диаметром 1 см, содержащая воздух. Вычислите отношение интенсивности рентгена, прошедшего через дефектную и бездефектные области композита. Плотность воздуха и композита равны 1,3 и 1800 кг м⁻³ соответственно; массовые коэффициенты поглощения кислорода и азота равны 2,11 и 1,94 кг м⁻³; воздух состоит из 76вес.% N₂ и 24вес.% O₂.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А.1. Матрицы и детерминанты

Иногда бывает удобно представлять числовую информацию в виде двумерной таблицы. В математике такие таблицы, если они удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, называют матрицами. Обычно матрицы обозначают квадратными скобками:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Матрица, состоящая из m рядов и n колонок, называется матрицей размерности $(m \times n)$. Таким образом, приведенная выше матрица имеет размерность (2×3) . Квадратные матрицы имеют равное количество рядов и колонок, т.е. $m = n$. Матрицу, состоящую из одного ряда или колонки, называют вектором.

Пример

Матрица $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ имеет размерность (1×3) . Такие матрицы называют также вектор-строками. Вектор-столбцами называют матрицы вида

$$\begin{bmatrix} -1,2 \\ -2,5 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

Матрица $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, очевидно, является квадратной (2×2) .

Для экономии объема при письме вектор-столбцов принято использовать фигурные скобки. Например, приведенный выше вектор-столбец записывают в виде $\{-1,2 \quad -2,5 \quad 0,8\}$.

А.2. Детерминанты

Квадратные матрицы характеризуются некоторым числом, называемым детерминантом. При неравном количестве строк и столбцов детерминант не определен.

А.2.1. Вычисление детерминанта матрицы 2×2

Простейшая квадратная матрица (2×2) имеет вид $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ее детерминант,

обозначаемый прямыми скобками $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, определяется как разность произведения диагоналей $ad - bc$. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 11 \times 2 = -3.$$

Чтобы вычислять детерминант матриц большего порядка, введем понятие *дополнительного минора* или просто *минора*.

А.2.2. Вычисление минора

Пример

Найдем минор элемента 6 первого ряда второго столбца матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

(а) Удаляем ряд и колонку данного элемента, в результате чего получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(б) Вычисляем детерминант этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 2.$$

(с) Полученное число является минором данного элемента, если выбранному элементу соответствует знак + на следующей диаграмме

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

В противном случае нужно поменять знак полученного числа. Таким образом, для элемента «6» нужно поменять знак, и минор элемента «6» равен -2.

В общем случае, знак элемента в i -том ряду и j -том столбце матрицы (A_{ij}) определяется как $(-1)^{i+j}$.

А.2.3. Вычисление детерминанта матриц (3x3)

Пример

$$\text{Вычислить } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 11 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

(1) Берется любой ряд (или столбец) матрицы.

Для примера возьмем первый столбец.

(2) вычисляются миноры для каждого элемента в выбранном ряду (столбце).

Минор элемента «1» равен

А.3. Свойства матриц 401

$$+ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -29.$$

Минор элемента «2» равен

$$- \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -21.$$

Минор элемента «11» равен

$$+ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 19.$$

(3) Каждый элемент выбранного ряда (или столбца) умножают на соответствующий ему минор и полученные числа складывают. В результате получают величину детерминанта.

$$(1 \times -29) + (2 \times -21) + (11 \times 19) = -29 - 42 + 209 = 138.$$

А.2.4. Правило Сарруса

Это правило позволяет быстро вычислить детерминант матрицы 3-его порядка. Возьмем матрицу

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Перепишем ее элементы и повторим первые два столбца

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & \end{array}$$

Детерминант равен сумме произведений чисел, лежащих на пунктирных линиях минус сумма произведений, лежащих на сплошных линиях.

А.3. Свойства матриц

А.3.1. Равенство матриц

Две матрицы А и В считаются равными, если они имеют одинаковый порядок и все их соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j .

А.3.2. Сложение матриц

Если матрицы А и В имеют одинаковое количество рядов и столбцов, их можно складывать ($C = A + B$) путем сложения соответствующих элементов $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех значений i и j .

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 11 \times 2 = -3.$$

Чтобы вычислять детерминант матриц большого порядка, введем понятие *полнотельного минора* или просто *минора*.

А.2.2. Вычисление минора

Пример

Найдем минор элемента 6 первого ряда второго столбца матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

(а) Удалим ряд и колонку данного элемента, в результате чего получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(б) Вычисляем детерминант этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 2.$$

(с) Полученное число является минором данного элемента, если выбранному элементу соответствует знак + на следующей диаграмме

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

В противном случае нужно поменять знак полученного числа. Таким образом, для элемента «6» нужно поменять знак, и минор элемента «6» равен -2.

В общем случае, знак элемента в i -том ряду и j -том столбце матрицы (A_j) определяется как $(-1)^{i+j}$.

А.2.3. Вычисление детерминанта матриц (3x3)

Пример

$$\text{Вычислить } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 11 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

(1) Берется любой ряд (или столбец) матрицы.

Для примера возьмем первый столбец.

(2) Вычисляются миноры для каждого элемента в выбранном ряду (столбце).

Минор элемента «1» равен

$$+ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -29.$$

Минор элемента «2» равен

$$- \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -21.$$

Минор элемента «11» равен

$$+ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 19.$$

(3) Каждый элемент выбранного ряда (или столбца) умножают на соответствующий ему минор и полученные числа складывают. В результате получают величину детерминанта.

$$(1 \times -29) + (2 \times -21) + (11 \times 19) = -29 - 42 + 209 = 138.$$

А.2.4. Правило Сарруса

Это правило позволяет быстро вычислить детерминант матрицы 3-его порядка. Возьмем матрицу

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Перепишем ее элементы и повторим первые два столбца

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & & \end{array}$$

Детерминант равен сумме произведений чисел, лежащих на пунктирных линиях минус сумма произведений, лежащих на сплошных линиях.

А.3. Свойства матриц

А.3.1. Равенство матриц

Две матрицы А и В считаются равными, если они имеют одинаковый порядок и все их соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j .

А.3.2. Сложение матриц

Если матрицы А и В имеют одинаковое количество рядов и столбцов, их можно складывать ($C = A + B$) путем сложения соответствующих элементов $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех значений i и j .

Пример

$$\text{Если } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 9 & -2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \text{ то}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+4 & 1+0 & 4+(-3) \\ 0+(-1) & 9+8 & -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -1 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Аналогично, } A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

A.3.3. Умножение матрицы на число

Умножение матрицы A на число (скалярное) k производится путем умножения всех ее элементов на соответствующее число k , и $B = kA$, если $b_{ij} = ka_{ij}$.

Пример

$$2 \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 10 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

A.3.4. Умножение матриц

Произведение матриц A и B определено, лишь если количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B . Если A — матрица размерности $(m \times n)$, а B — матрица размерности $(n \times q)$, размерность матрицы $C = AB$ (не путать с BA) равна $(m \times q)$. Чтобы найти элемент c_{ij} матрицы C , необходимо каждый элемент i -той строки матрицы A умножить на соответствующий элемент j -того столбца матрицы B и все полученные произведения сложить

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Примеры

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix} = [3 \times 6 + 1 \times 7 + 2 \times -2] = 21$$

$$(b) \text{ Пусть } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 11 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \text{ тогда}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \times 6 + 1 \times 7 + 2 \times -2 & 3 \times -1 + 1 \times 11 + 2 \times 8 \\ 4 \times 6 + 0 \times 7 + 5 \times -2 & 4 \times -1 + 0 \times 11 + 5 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 24 \\ 14 & 36 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 \times 3 + (-1) \times 4 & 6 \times 1 + (-1) \times 0 & 6 \times 2 + (-1) \times 5 \\ 7 \times 3 + 11 \times 4 & 7 \times 1 + 11 \times 0 & 7 \times 2 + 11 \times 5 \\ -2 \times 3 + 8 \times 4 & -2 \times 1 + 8 \times 0 & -2 \times 2 + 8 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 7 \\ 65 & 7 & 69 \\ 26 & -2 & 36 \end{bmatrix}$$

Примечание

- (a) В общем случае произведение матриц некоммукативно и $AB \neq BA$.
 (b) Выполняется дистрибутивный закон умножения: $A(B+C) = AB + AC$.
 (c) Главной диагональю квадратной матрицы называют диагональ, идущую от верхнего левого угла к правому нижнему углу матрицы. Матрица, все элементы которой на главной диагонали равны 1, а остальные элементы равны 0, называется единичной матрицей. Ее принято обозначать символом I . Напротив, единичная матрица размерности (3×3) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножение матрицы на единичную оставляет исходную матрицу без изменения, то есть $IA = A$ и $AI = A$.

A.3.5. Матричная форма записи системы уравнений

$$\text{По правилам умножения матриц имеем } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4y+3z \\ 2x+y-3z \\ 6x-5y+2z \end{bmatrix}.$$

Поэтому система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 3 \\ 2x + y - 3z &= -5 \\ 6x - 5y + 2z &= 17, \end{aligned}$$

$$\text{может быть записана в виде } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

В общем случае система линейных уравнений может быть записана в виде $Ax = b$, где A — квадратная матрица, а x и b — вектор-столбцы.

A.3.6a. Транспонирование матриц

Транспонирование матрицы A состоит в замене ее строк на столбцы. Например, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 12 & 9 \end{bmatrix}, \text{ то транспонированная матрица } A' \text{ имеет вид } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 12 \\ 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Если $A' = A$, то говорят, что матрица A симметрична, а если $A' = -A$, то говорят, что она антисимметрична.

A.3.6b. Нахождение присоединенной матрицы

Эта операция, называемая также нахождением взаимной или союзной матрицы, обозначается символом $\text{adj}(A)$ и состоит в замене всех элементов квадратной матрицы на дополнителные миноры и последующем транспонировании полученной матрицы.

Пример

Вычислим $\text{adj}(A)$, если $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Сначала определим миноры элементов. Например, минор элемента -1 равен $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 5$. Таким образом, получаем матрицу

$\begin{bmatrix} 5 & 14 & -4 \\ -15 & -21 & 12 \\ 14 & 14 & -7 \end{bmatrix}$. Транспонируя ее, получаем присоединенную матрицу $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 14 \\ 14 & -21 & 14 \\ -4 & 12 & -7 \end{bmatrix}$.

Присоединенную матрицу можно найти и другим способом. А именно, сначала транспонировать исходную матрицу, а затем вычислить миноры.

Отметим, что эта операция возможна только для квадратных матриц

А.3.6с. Обратная матрица

Эта операция над матрицами наиболее важна. Обратную матрицу принято обозначать A^{-1} . Эта операция производится делением $\text{adj}(A)$ на детерминант A . Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}.$$

Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует. В этом случае говорят, что матрица A сингулярна.

Пример

Найдем матрицу, обратную $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. В предыдущем примере была определена присоединенная матрица $\text{adj}(A)$. Вычисляя детерминант, получаем $|A| = 21$.

$$\text{Тогда } A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{21} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 5 & -15 & 14 \\ 14 & -21 & 14 \\ -4 & 12 & -7 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица обладает очень важным свойством. А именно, умножение матрицы на обратную ей дает единичную матрицу $AA^{-1} = I$.

$$\text{Возвращаясь к пункту А.3.5, имеем } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & -5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, операция обращения позволила нам решить систему линейных уравнений и найти неизвестные x , y и z .

Предметный указатель

- Автолавное формование 181
Адгезионная прочность 76
Акрилы 173
Анизотропия 28
Аппреты 73
Армированные пластики 29
Армирующая фаза 19
Асбест 38
Балка 202
Ближний порядок 49
Блочный материал 23
Бронзовый путь 112
Бутадиеновый каучук 178
Вакуумное формование 181
Влажная намотка 185
Волновой фактор 398
Волокна 19
Волокна карбида кремния 64
Волокна целлюлозы 21
Волочение 88
Вулканизация 178
Высокомолекулярные углеродные волокна 60
Высокопрочные углеродные волокна 60
Вязкость разрушения 33
Гибридные композиты 160
Гибриды 19
Гидростатическое сжатие 122
Главные оси 215
Гомогенность 28
Горячее прессование 122
Дальний порядок 123
Двухосиармированные композиты 19
Двухосиальная балка 304
Деформативность 35
Диаграмма эффективности 32
Диффузионное формование 86
Диффузионная сварка 117
Жесткоцепные полимеры 45
Закон Гука 206
Импелланс 377
Инженерная деформация 205
Искривление фронта трещины 318
Испытание по Изоду 312
Кальцинирование 131
Камера быстрого смешения 183
Квазиизотропный ламинат 237
Кварцевые волокна 49
Кислородный индекс 195
Клинообразное соединение 366
Комплексная нить 50
Композиты 13
Компьютерная томография 385
Короткобалочный сдвиг 80
Кортикальная костная ткань 22
Коэффициент Пуассона 206
Коэффициент теплового расширения 97
Коэффициент Феллисити 394
Критерий Гриффитса 307
Критерий критического главного напряжения 214
Критерий Цая—Хилла 259
Критическая длина волокна 78
Критическая скорость высвобождения упругой энергии 302
Критический коэффициент интенсивности напряжения 33
Кроцидолит 39
Ламинаты 19
Литийалюмосиликат 144
Литье с пропиткой 89
Матрица 16
Межслоевой сдвиг 80
Мембрана 202
Металлокомпозиты 84
Метастабильное состояние 140
Метод ускоренной инъекции матрицы 183
Метод in situ 93
Механический импелланс 390
Механическое соединение 355
Микроструктура 28
Модификаторы 125
Модуль ползучести 195
Момент силы 201
Монофиламенты 65
Наполнитель 19
Натуральный каучук 177
Нейлон 173
Нематический жидкий кристалл 45
Нитрилутиленовый каучук 178
Новалаки 171
Нормальная деформация 205
Неэффективная длина волокна 78
Обжит 122
Оболочка 202

399-404 - *managers*
 344-346 - *general*
 207-208 - *general and*
 180-191
 174-175
 168-171
 { *managers*

40-45
 30-33
 24-27
 18-19
 { *abuse*

Dear Mr. [unclear]
[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]
[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]
[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]
[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

Yours truly
[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

[unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear] [unclear]

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$

$$\frac{1}{2} = 9$$