



И. Ш. ФЕЙМАН  
ДИНАМИКА  
АВИАЦИОННЫХ  
ДВИГАТЕЛЕЙ





Книга И. Ш. Неймана „Динамика авиационных двигателей“ представляет собой первую часть утвержденного ГУУЗ'ом НКАП учебника для авиационных втузов (вторая часть посвящена конструкции и расчету на прочность авиационных двигателей). Книга излагает кинематику и динамику кривошипно-шатунных и распределительных механизмов, вопросы уравнивания авиационных двигателей и теорию крутильных колебаний.

Помимо своего основного назначения книга И. Ш. Неймана может служить пособием для инженеров авиационной промышленности при проектировании авиационных моторов.

## ОТ АВТОРА

В настоящее время знание вопросов динамики авиационного мотора и умение свободно в них разбираться является необходимым для конструктора этих моторов. От правильного динамического расчета мотора зависит правильность определения сил, действующих на отдельные элементы конструкции мотора, а следовательно, и надежность расчета этих элементов и прочность. Особенно ярко последнее обстоятельство подчеркивается явлениями поломок коленчатых валов от крутильных колебаний; без правильной оценки этого явления нельзя создать надежную конструкцию авиационного мотора.

Динамика авиационного мотора обнимает комплекс вопросов, тесно между собой связанных и имеющих первостепенное значение для авиационного моторостроения. Между тем в наших авиационных втузах, как и в стране, до сих пор не имеется специального курса „Динамика авиационного мотора“<sup>1</sup>, отдельные вопросы этой дисциплины рассматриваются в других курсах, а некоторые читаются в виде специальных курсов например „Крутильные колебания валов“), причем в совершенно недостаточном объеме для современного уровня развития этих вопросов.

В настоящей книге мы стремились дать динамику авиационного мотора в форме самостоятельной технической дисциплины. Вопросы динамики мы разбили на следующие пять групп:

- I. Кинематика кривошипно-шатунных механизмов.
- II. Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме.
- III. Крутильные колебания систем коленчатых валов авиационных моторов.
- IV. Уравнивание сил инерции.
- V. Кинематика и динамика распределительных механизмов.

Среди этих групп значительное развитие получила группа III, заключающая в себе вопросы крутильных колебаний систем коленчатых валов. Это объясняется большим практическим значением этого вопроса для авиационного моторостроения, с одной стороны, и тем влиянием, которое оказывает это явление на все вопросы динамики мотора, с другой.

Мы сочли необходимым включить в содержание книги описание и теорию основных приборов, без которых в настоящее время невозможно исследование вопросов динамики мотора.

Разбираемые в книге вопросы иллюстрированы рядом примеров, взятых из практики руководимой нами расчетно-исследовательской группы ЦИАМ.

Недостаточность предоставленного для книги листажа заставила изложить материал довольно сжато, однако не в ущерб строгости и ясности доказательств излагаемых положений.

Последняя часть книги „Кинематика и динамика распределительных механизмов“ написана под нашей редакцией кандидатом технических наук инж. Е. К. Смольяниновым.

<sup>1</sup> Исключением в этом отношении, насколько нам известно, является до последнего времени Ленинградский институт инженеров гражданского воздушного флота.

в ко-  
леба-

Дина-  
мическая

Дина-  
мическая

криво-  
шипн.

угол  $\alpha$

пожиге-  
враще-  
нию оси

ертвого

ия;

и т. д.



BX-219  
12/5-80

**ПО КООРДИНАЦИИ**

ЖИБИБЛИОТЕЧНОМУ АГЕНТСТВУ

(является основанием для открытия абонемента и получения литературы)

4084 12/5/80 378  
12 Дата № заказа Шифр инв. №  
Выд. изд.

Библиотека ИКИ  
название библиотеки-заказчика

327002 Николай ФСП  
Сколько ходов? Адрес

Автор Нейман И.Ш.  
Название Динамика авиационных двигателей, Оборониз, 1940  
(книги или журнала)

Место и год изд. Том. Вып./ч №

Автор и название статьи

стр. от до желателен ли микрофильм да нет

Место печати ШИФРЫ Подпись (разборчиво)  
XII-73291

Глава I

КИНЕМАТИКА НОРМАЛЬНОГО КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

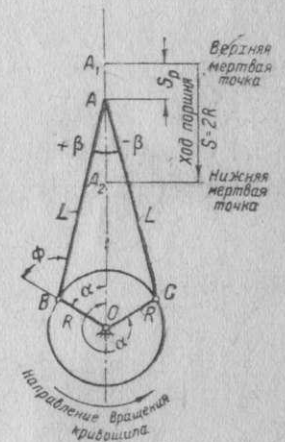
§ 1. Основные понятия и обозначения

Нормальным кривошипно-шатунным механизмом называется такой, в котором ось цилиндра пересекает ось коленчатого вала. Схема этого механизма дана на фиг. 1. Координация всех кинематических и динамических процессов в кривошипно-шатунном механизме ведется по углу поворота кривошипа  $\alpha$ . Угол  $\alpha$  отсчитывается от некоторого начального положения кривошипа; за последнее в дальнейшем принимаем то положение кривошипа, при котором он совпадает с осью цилиндра, как это показано на фиг. 1.

Обычно считают, что угловая скорость вращения кривошипа  $\omega$  постоянна и угол  $\alpha$  изменяется пропорционально времени. Однако при рассмотрении некоторых специальных вопросов динамики двигателя, как, например, крутильных колебаний коленчатого вала, приходится учитывать, что угловая скорость  $\omega$  является величиной переменной. В последующем изложении, если не будет специальных оговорок, скорость  $\omega$  принимается величиной постоянной.

Введем следующие обозначения:

- $R$  — радиус кривошипа;
- $L$  — длина шатуна;
- $\lambda$  — отношение длины радиуса кривошипа к длине шатуна;
- $\alpha$  — угол поворота кривошипа от его начального положения; угол  $\alpha$  меняется от 0 до 360°;
- $\beta$  — угол отклонения оси шатуна от оси цилиндра; угол  $\beta$  положителен, когда шатун отклонен от оси цилиндра в направлении вращения вала мотора; при положении шатуна по другую сторону оси цилиндра угол  $\beta$  отрицателен;
- $S_p$  — расстояние оси поршневого пальца от ее верхнего мертвого положения;
- $v_p$  — скорость поршня;
- $j_p$  — ускорение поршня;
- $\omega$  — угловая скорость вращения кривошипа;
- $n$  — число оборотов вала мотора в минуту;
- $t$  — время поворота кривошипа от его начального положения;
- $(v_p)_{cp}$  — средняя скорость поршня;
- $\Phi$  — угол отклонения оси шатуна от плоскости кривошипа;
- $\omega_L$  — угловая скорость вращения шатуна;
- $\theta_L$  — угловое ускорение шатуна.



Фиг. 1. Нормальный кривошипно-шатунный механизм.



## § 2. Угловые перемещение, скорость и ускорение шатуна

Угловая скорость вращения кривошипа будет

$$\omega = \frac{\pi}{30} n = \text{const.} \quad (1)$$

Угол поворота кривошипа от начального положения будет

$$\alpha = \omega t. \quad (2)$$

Из фиг. 1 мы имеем

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{R}{L} = \lambda. \quad (3)$$

или

$$\sin \beta = \lambda \sin \alpha. \quad (4)$$

Тогда угловое перемещение шатуна равно

$$\beta = \arcsin(\lambda \sin \alpha). \quad (5)$$

Максимальные углы отклонения шатуна от оси цилиндра получаются при

$$\alpha = 90^\circ \text{ и } \alpha = 270^\circ$$

и определяются из уравнения

$$\sin(\beta_{\max}) = \pm \lambda. \quad (6)$$

Угловая скорость шатуна будет

$$\omega_L = \frac{d\beta}{dt} = \lambda \omega \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (7)$$

Максимальные значения  $\omega_L$  получаются при

$$\alpha = 0 \text{ и } \alpha = 180^\circ$$

и будут равны

$$(\omega_L)_{\max} = \pm \lambda \omega. \quad (8)$$

Нулевые значения угловой скорости шатуна

$$\omega_L = 0$$

будут при

$$\alpha = 90^\circ \text{ и } \alpha = 270^\circ,$$

т. е. в моменты максимальных отклонений шатуна в ту или другую сторону от оси цилиндра.

Угловое ускорение шатуна будет

$$\begin{aligned} \Theta_L &= \frac{d\omega_L}{dt} = \frac{d^2\beta}{dt^2} = \lambda \omega \frac{d}{dt} \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) = \lambda \omega \frac{-\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta + \sin \beta \frac{d\beta}{dt} \cos \alpha}{\cos^2 \beta} = \\ &= \frac{\lambda \omega}{\cos^2 \beta} \left( -\omega \sin \alpha \cos \beta + \lambda \omega \sin \beta \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) = \lambda \omega^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta} (-\cos^2 \beta + \lambda^2 \cos^2 \alpha) = \\ &= \lambda \omega^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta} (-1 + \lambda^2 \sin^2 \alpha + \lambda^2 - \lambda^2 \sin^2 \alpha) = -\lambda (1 - \lambda^2) \omega^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Максимальные значения  $\Theta_L$  получаются при

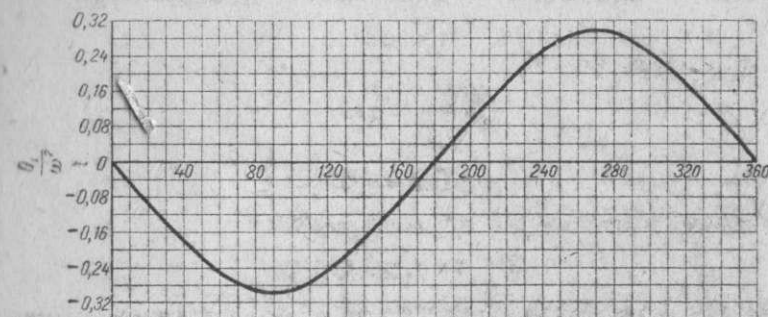
$$\alpha = 90^\circ \text{ и } \alpha = 270^\circ,$$

т. е. в моменты максимальных отклонений шатуна от оси цилиндра. При указанных значениях угла  $\alpha$  функция  $\sin \alpha$  принимает по абсолютной величине свое максимальное значение 1, а  $\cos \beta$  — свое минимальное значение

$\sqrt{1 - \lambda^2}$ ; следовательно, дробь  $\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta}$  принимает свое максимальное значение, а  $\Theta_L$  — свое максимальное значение  $(\Theta_L)_{\max}$ .

Имеем

$$(\Theta_L)_{\max} = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \omega^2. \quad (10)$$



Фиг. 2. Протекание функции  $\frac{\Theta_L}{\omega^2}$  для  $\lambda = \frac{1}{3.5}$

Значения  $\Theta_L = 0$  получаются при

$$\alpha = 0^\circ \text{ и } \alpha = 180^\circ,$$

т. е. в моменты совпадения оси шатуна с осью цилиндра.

На фиг. 2 дан закон протекания по углу поворота кривошипа  $\alpha$  функции  $\frac{\Theta_L}{\omega^2}$  для  $\lambda = \frac{1}{3.5}$ .

## § 3. Относительная угловая скорость вращения шатуна вокруг шатунной шейки коленчатого вала

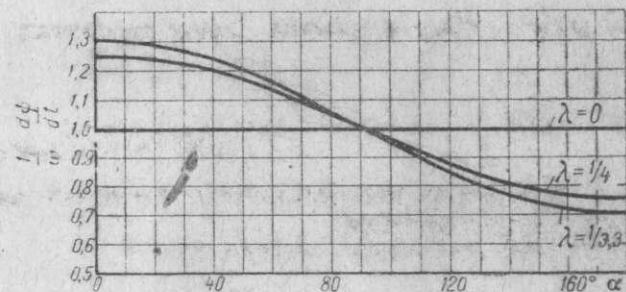
Согласно фиг. 1 имеем

$$\Phi = \alpha + \beta. \quad (11)$$

Отсюда, дифференцируя это уравнение по  $t$ , получим для относительной угловой скорости вращения шатуна вокруг шатунной шейки коленчатого вала выражение

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega \left( 1 + \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right). \quad (12) \quad \text{Фиг. 3. Протекание функции } \frac{1}{\omega} \frac{d\Phi}{dt} \text{ для } \lambda = \frac{1}{3.3}, \lambda = \frac{1}{4.0} \text{ и } \lambda = 0.$$

На фиг. 3 даны кривые  $\frac{1}{\omega} \frac{d\Phi}{dt}$  как функции угла поворота  $\alpha$  для  $\lambda = \frac{1}{3.3}$ ,  $\lambda = \frac{1}{4}$  и  $\lambda = 0$ .



## § 4. Расстояние поршня от верхнего мертвого положения

Из фиг. 1 имеем

$$S_p = (R + L) - (R \cos \alpha + L \cos \beta), \quad (13)$$

но

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}, \quad (14)$$

следовательно,

$$S_p = (R + L) - R \left( \cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \right). \quad (15)$$



Разлагая выражение  $\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \alpha}$  в ряд по биному Ньютона, будем иметь

$$\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \alpha} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{2 \cdot 4} \lambda^4 \sin^4 \alpha - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \lambda^6 \sin^6 \alpha - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \lambda^8 \sin^8 \alpha - \dots \quad (16)$$

Так как при  $n$  четном имеет место соотношение

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^{n-1} i^n} \left[ \cos n \alpha - (n)_1 \cos (n-2) \alpha + (n)_2 \cos (n-4) \alpha - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n)_{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha + (-1)^{\frac{n}{2}} (n)_{\frac{n}{2}} \cos 0 \right] + (-1)^{\frac{n}{2}} (n)_{\frac{n}{2}} \left( \frac{1}{2^n i^n} \right), \quad (17)$$

где

$$(n)_p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}, \quad (18)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha), \\ \sin^4 \alpha &= \frac{1}{8} (\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3), \\ \sin^6 \alpha &= -\frac{1}{32} (\cos 6\alpha - 6 \cos 4\alpha + 15 \cos 2\alpha - 10), \\ \sin^8 \alpha &= \frac{1}{128} (\cos 8\alpha - 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha - 56 \cos 2\alpha + 35), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \alpha} &= 1 - \left( \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{3}{64} \lambda^4 + \frac{5}{256} \lambda^6 + \frac{175}{128^2} \lambda^8 + \dots \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{16} \lambda^4 + \frac{15}{512} \lambda^6 + \frac{35}{2048} \lambda^8 + \dots \right) \cos 2\alpha - \\ &- \left( \frac{1}{64} \lambda^4 + \frac{3}{256} \lambda^6 + \frac{35}{4096} \lambda^8 + \dots \right) \cos 4\alpha + \\ &+ \left( \frac{1}{512} \lambda^6 + \frac{5}{2048} \lambda^8 + \dots \right) \cos 6\alpha - \\ &- \left( \frac{5}{128^2} \lambda^8 + \dots \right) \cos 8\alpha + \dots \quad (20) \end{aligned}$$

Обозначив

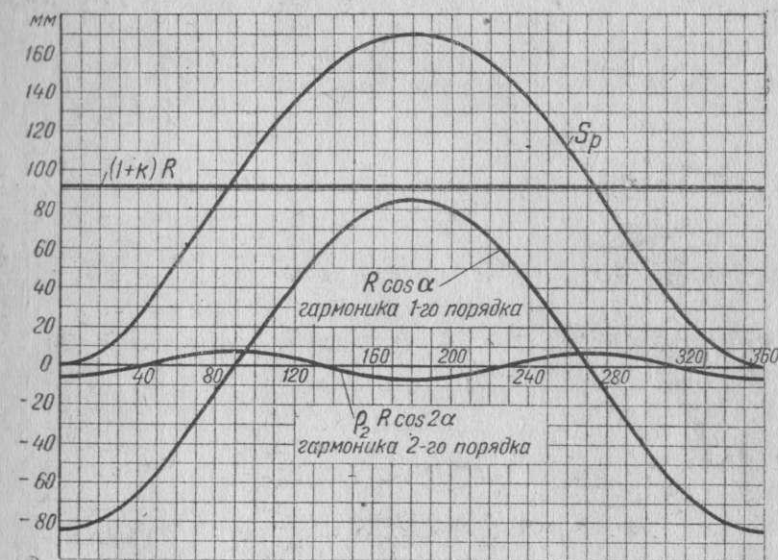
$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{3}{64} \lambda^4 + \frac{5}{256} \lambda^6 + \frac{175}{128^2} \lambda^8 + \dots, \\ p_2 &= \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{16} \lambda^4 + \frac{15}{512} \lambda^6 + \frac{35}{2048} \lambda^8 + \dots, \\ p_4 &= \frac{1}{64} \lambda^4 + \frac{3}{256} \lambda^6 + \frac{35}{4096} \lambda^8 + \dots, \\ p_6 &= \frac{1}{512} \lambda^6 + \frac{5}{2048} \lambda^8 + \dots, \\ p_8 &= \frac{5}{128^2} \lambda^8 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

будем иметь

$$\frac{1}{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\lambda} - k + p_2 \cos 2\alpha - p_4 \cos 4\alpha + p_6 \cos 6\alpha - p_8 \cos 8\alpha + \dots \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S_p &= (R+L) - R \left( \cos \alpha + \frac{1}{\lambda} - k + p_2 \cos 2\alpha - p_4 \cos 4\alpha + \right. \\ &+ p_6 \cos 6\alpha - p_8 \cos 8\alpha + \dots \left. \right) = R(1+k) - R(\cos \alpha + \\ &+ p_2 \cos 2\alpha - p_4 \cos 4\alpha + p_6 \cos 6\alpha - p_8 \cos 8\alpha + \dots). \quad (23) \end{aligned}$$

В табл. 1 приведены числовые значения коэффициентов  $k, p_2, p_4, p_6$  и  $p_8$  для различных  $\lambda$ , вычисленные в предположении, что разложение по биному Ньютона выражения  $\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \alpha}$  [равенство (16)] ограничено членом, содержащим  $\sin^8 \alpha$ .



Фиг. 4. Кривая пути поршня по углу поворота кривошипа и гармоники, ее составляющие, для  $R = 8,5$  см и  $\lambda = \frac{1}{3,4}$ .

Как видно из табл. 1, амплитуды гармоник функции  $S_p$  [равенство (23)] быстро уменьшаются с увеличением порядка гармоник. Так, например, для  $\lambda = \frac{1}{3,4}$  амплитуда гармоники 4-го порядка составляет только 0,042% амплитуды гармоники 1-го порядка. Поэтому с достаточной для практики точностью расстояние поршня от верхнего мертвого положения  $S_p$  определяется из уравнения

$$S_p = R \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{4} \right) - \left( \cos \alpha + \frac{\lambda}{4} \cos 2\alpha \right) \right]. \quad (24)$$

На фиг. 4 даны кривая пути поршня по углу поворота кривошипа и гармоники этой кривой согласно ряду Фурье (равенство (23)) для иллюстрации их влияния на величину пути. Кривые построены для

$$R = 8,5 \text{ см и } \lambda = \frac{1}{3,4}.$$

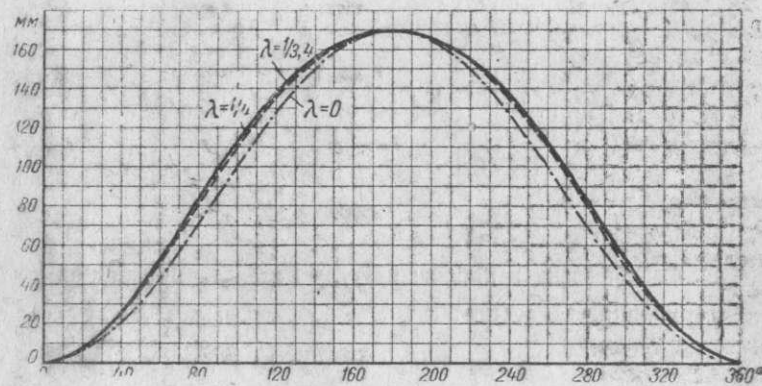
Выражение (23) для  $S_p$  в виде ряда Фурье потребуется нам ниже для получения в форме ряда Фурье ускорения поршня. Как увидим дальше, такая форма выражения для ускорения поршня играет важную роль в вопросах динамики двигателя.



Таблица 1

Значения коэффициентов  $k$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_4$ ,  $\rho_6$  и  $\rho_8$  для различных  $\lambda$ 

$\lambda$	$k$	$\rho_2$	$\rho_4$	$\rho_6$	$\rho_8$
$\frac{1}{3,4}$	0,0747	0,0753	0,000424	0,00000501	0,0000000582
$\frac{1}{3,5}$	725	729	388	417	475
$\frac{1}{3,6}$	704	708	355	352	366
$\frac{1}{3,7}$	686	689	326	307	322
$\frac{1}{3,8}$	667	670	301	267	267
$\frac{1}{3,9}$	649	652	277	234	222
$\frac{1}{4,0}$	632	635	256	205	186

Фиг. 5. Кривые пути поршня по углу поворота кривошипа для  $\lambda = \frac{1}{3,4}$ ,  $\lambda = \frac{1}{4,0}$  и  $\lambda = 0$  при  $R = 8,5$  см.На фиг. 5 даны для сравнения кривые  $S_p$  для

$$\lambda = \frac{1}{3,4}, \quad \lambda = \frac{1}{4,0} \quad \text{и} \quad \lambda = 0.$$

## § 5. Скорость поршня

Скорость поршня  $v_p$  будет

$$v_p = \frac{dS_p}{dt} = \omega \frac{dS_p}{d\alpha} \quad (25)$$

Подставляя в это равенство значение  $S_p$  из уравнения (13), получим точное выражение для  $v_p$  в виде

$$v_p = \omega \left( R \sin \alpha + L \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha} \right) = \omega \left( R \sin \alpha + L \sin \beta \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) = R\omega \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2 \cos \beta} \sin 2\alpha \right),$$

$$v_p = R\omega \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2 \cos \beta} \sin 2\alpha \right). \quad (26)$$

Другое точное выражение для скорости поршня получим преобразованием соотношения (26). Имеем

$$\begin{aligned} v_p &= R\omega \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2 \cos \beta} \sin 2\alpha \right) = \\ &= R\omega \left( \sin \alpha + \frac{1}{\cos \beta} \lambda \sin \alpha \cos \alpha \right) = \\ &= \frac{R\omega}{\cos \beta} (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) = \\ &= R\omega \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя в равенство (25) выражение для  $S_p$  из равенства (23), будем иметь выражение для  $v_p$  в виде ряда Фурье

$$v_p = \frac{dS_p}{dt} = R\omega (\sin \alpha + 2\rho_2 \sin 2\alpha - 4\rho_4 \sin 4\alpha + 6\rho_6 \sin 6\alpha - 8\rho_8 \sin 8\alpha + \dots). \quad (28)$$

В табл. 2 приведены числовые значения коэффициентов  $2\rho_2$ ,  $4\rho_4$ ,  $6\rho_6$  и  $8\rho_8$  для различных  $\lambda$ .На фиг. 6 даны для примера кривая скорости поршня по углу поворота кривошипа  $\alpha$  и гармоники этой кривой согласно ряду Фурье [равенство (28)] для выявления их влияния на величину скорости.

С достаточной для практики точностью скорость поршня определится из равенства

$$v_p = R\omega \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha \right). \quad (29)$$

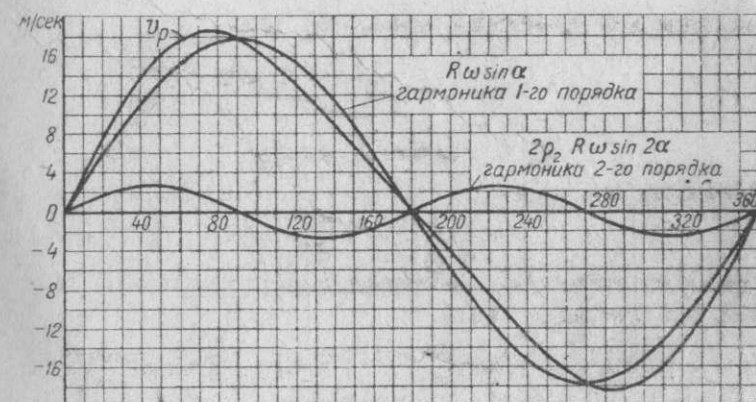
Фиг. 6. Кривая скорости поршня по углу поворота кривошипа и гармоники, ее составляющие, для  $R = 8,5$  см,  $\lambda = \frac{1}{3,4}$  и  $n = 2000$  об/мин.

Таблица 2

Значения коэффициентов  $2\rho_2$ ,  $4\rho_4$ ,  $6\rho_6$  и  $8\rho_8$  для различных  $\lambda$ 

$\lambda$	$2\rho_2$	$4\rho_4$	$6\rho_6$	$8\rho_8$
$\frac{1}{3,4}$	0,1506	0,00170	0,0000301	0,000000466
$\frac{1}{3,5}$	1458	155	250	380
$\frac{1}{3,6}$	1416	142	211	293
$\frac{1}{3,7}$	1378	130	184	258
$\frac{1}{3,8}$	1340	120	160	214
$\frac{1}{3,9}$	1304	111	140	178
$\frac{1}{4,0}$	1270	102	123	149



Средняя скорость поршня определяется из уравнения

$$(v_p)_{cp} = \frac{2Rn}{30} = \frac{2}{\pi} R\omega. \quad (30)$$

Отсюда скорость поршня может быть выражена в виде

$$v_p = \frac{\pi}{2} \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha \right) (v_p)_{cp}. \quad (31)$$

Значение угла  $\alpha$ , при котором скорость поршня имеет максимальное значение, найдется из уравнения

$$\frac{dv_p}{d\alpha} = 0.$$

Это значение угла  $\alpha$  с практически достаточной точностью определится, если для  $v_p$  взять приближенное выражение (29). Имеем

$$\frac{dv_p}{d\alpha} = R\omega (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha) = 0$$

или

$$\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha = 0,$$

$$\cos \alpha + \lambda (2 \cos^2 \alpha - 1) = 0,$$

$$\cos^2 \alpha + \frac{1}{2\lambda} \cos \alpha - \frac{1}{2} = 0,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{1}{4\lambda} (\sqrt{1 + 8\lambda^2} - 1). \quad (32)$$

Знак перед корнем берется положительным потому, что в противном случае, при обычных для двигателей численных значений  $\lambda$ ,  $\cos \alpha$  получился бы по абсолютной величине больше 1.

В табл. 3 даны для различных  $\lambda$  те углы  $\alpha = \alpha_1$ , при которых скорость поршня максимальна, а также приведены соответствующие значения отношения

$$\frac{(v_p)_{max}}{(v_p)_{cp}} = \frac{\pi}{2} \left( \sin \alpha_1 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha_1 \right). \quad (33)$$

Таблица 3

Значения  $\alpha_1$  и  $\frac{(v_p)_{max}}{(v_p)_{cp}}$  для различных  $\lambda$

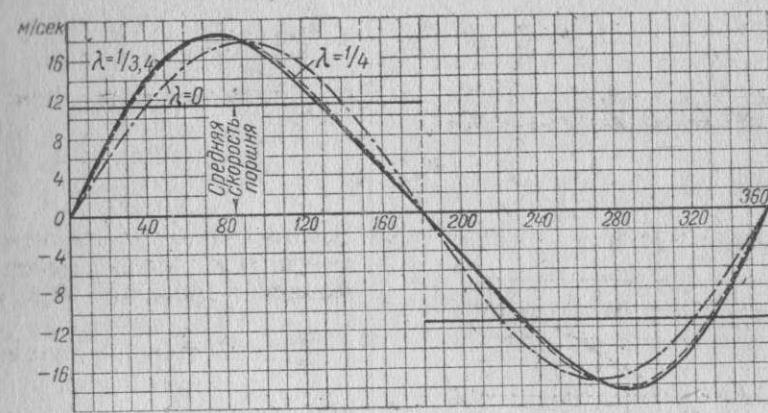
$\lambda$	$\frac{1}{3,4}$	$\frac{1}{3,5}$	$\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{3,7}$	$\frac{1}{3,8}$	$\frac{1}{3,9}$	$\frac{1}{4,0}$
$\alpha_1$	75° 10'	75° 33'	75° 50'	76° 09'	76° 26'	76° 46'	77°
$\frac{(v_p)_{max}}{(v_p)_{cp}}$	1,631	1,629	1,626	1,624	1,622	1,620	1,617

На фиг. 7 даны соответствующие графики этих величин как функции  $\lambda$ . Скорость поршня будет равна нулю в мертвых точках поршня. Соответствующие значения  $\alpha$  будут

$$\alpha = 0^\circ \text{ и } \alpha = 180^\circ.$$

На фиг. 8 даны для сравнения кривые скоростей поршня для

$$\lambda = \frac{1}{3,4}, \lambda = \frac{1}{4,0} \text{ и } \lambda = 0.$$



Фиг. 8. Кривые скоростей поршня для  $\lambda = \frac{1}{3,4}$ ,  $\lambda = \frac{1}{4,0}$  и  $\lambda = 0$ .

## § 6. Ускорение поршня

Ускорение поршня  $j_p$  будет

$$j_p = \frac{dv_p}{dt} = \omega \frac{dv_p}{d\alpha}. \quad (34)$$

Подставляя в это равенство выражение для  $v_p$  из равенства (27)

$$v_p = R\omega \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta},$$

получим точное выражение для  $j_p$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} j_p &= R\omega^2 \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta) \left( 1 + \frac{d\beta}{d\alpha} \right) \cos \beta + \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha} \sin(\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta} \right] = \\ &= R\omega^2 \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha}}{\cos^2 \beta} \right] = \\ &= R\omega^2 \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \beta} \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right] = R\omega^2 \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \beta} \right]. \\ j_p &= R\omega^2 \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \beta} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Выражение для  $j_p$  как функции угла  $\alpha$  в виде ряда Фурье получим, подставляя в равенство (34) выражение для  $v_p$  из равенства (28):

$$v_p = R\omega (\sin \alpha + 2\rho_2 \sin 2\alpha - 4\rho_4 \sin 4\alpha + 6\rho_6 \sin 6\alpha - 8\rho_8 \sin 8\alpha + \dots).$$

Имеем

$$\begin{aligned} j_p &= R\omega^2 (\cos \alpha + 4\rho_2 \cos 2\alpha - 16\rho_4 \cos 4\alpha + \\ &+ 36\rho_6 \cos 6\alpha - 64\rho_8 \cos 8\alpha + \dots). \end{aligned} \quad (36)$$

В табл. 4 даны числовые значения коэффициентов  $4\rho_2$ ,  $16\rho_4$ ,  $36\rho_6$  и  $64\rho_8$  для разных  $\lambda$ .



Таблица 4

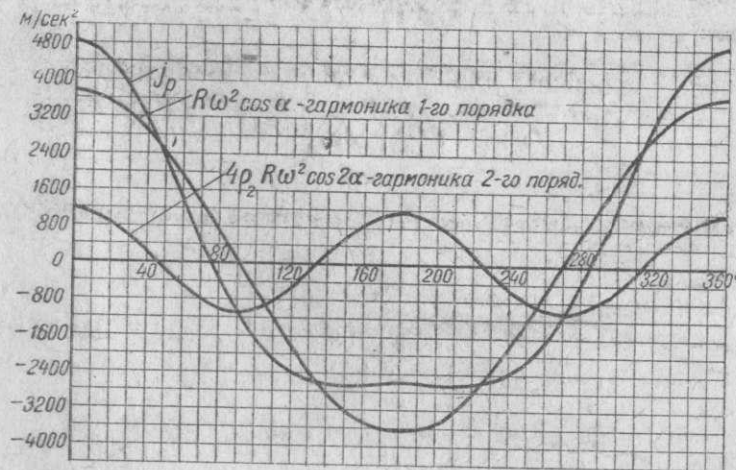
Значения коэффициентов  $4\rho_2$ ,  $16\rho_4$ ,  $36\rho_6$  и  $64\rho_8$  для различных  $\lambda$ 

$\lambda$	$4\rho_2$	$16\rho_4$	$36\rho_6$	$64\rho_8$
$\frac{1}{3,4}$	0,3012	0,00678	0,000180	0,00000372
$\frac{1}{3,5}$	2916	621	150	304
$\frac{1}{3,6}$	2832	568	127	234
$\frac{1}{3,7}$	2756	522	110	206
$\frac{1}{3,8}$	2680	482	0,0000961	171
$\frac{1}{3,9}$	2608	443	842	142
$\frac{1}{4,0}$	2540	410	738	119

Как видно из этой таблицы, амплитуды гармоник быстро убывают с возрастанием порядка гармоник. Так, например, для  $\lambda = \frac{1}{3,4}$  амплитуда гармоники 4-го порядка составляет 0,68%, а амплитуда гармоники 6-го порядка — только 0,018% от амплитуды гармоники 1-го порядка. Поэтому с достаточной для практики точностью ускорение поршня получим, ограничиваясь в ряде (36) гармоникой 2-го порядка и отбрасывая в коэффициенте  $\rho_2$  члены, содержащие  $\lambda$  в степени выше первой, т. е.

$$j_p = R\omega^2(\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha). \quad (37)$$

На фиг. 9 даны в виде примера кривая ускорения поршня по углу поворота кривошипа и гармоники этой кривой согласно ряду Фурье [равенство (36)] для иллюстрации их влияния на величину ускорения. Кривые построены для  $R = 8,5$  см,  $\lambda = \frac{1}{3,4}$  и  $n = 2000$  об/мин.



Фиг. 9. Кривая ускорения поршня по углу поворота кривошипа и гармоники, ее составляющие, для  $R = 8,5$  см,  $\lambda = \frac{1}{3,4}$  и  $n = 2000$  об/мин.

Значения угла  $\alpha$ , при которых ускорение поршня максимально, найдутся из уравнения

$$\frac{dj_p}{d\alpha} = 0.$$

С практической достаточной точностью эти значения найдутся, если из уравнения (37) взять выражение (37). Имеем

$$-\sin \alpha - 2\lambda \sin 2\alpha = 0$$

$$\sin \alpha + 4\lambda \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha (1 + 4\lambda \cos \alpha) = 0,$$

$$\sin \alpha_1 = 0 \text{ и } \cos \alpha_2 = -\frac{1}{4\lambda}. \quad (38)$$

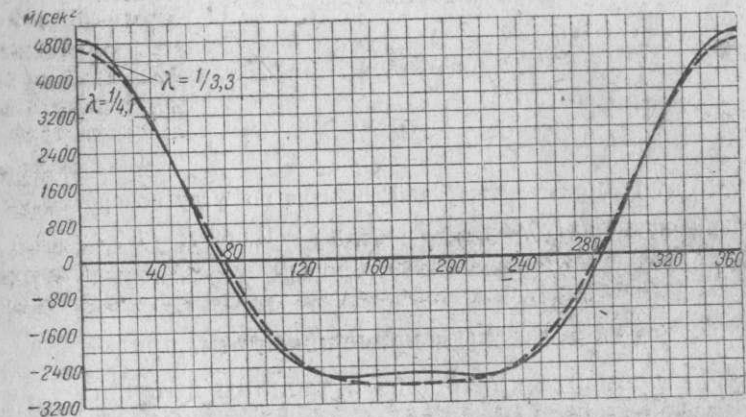
Второе уравнение имеет смысл для значений  $\lambda \geq \frac{1}{4}$ .

Из уравнения  $\sin \alpha_1 = 0$  определяются для угла  $\alpha$  значения

$$\alpha_1 = 0^\circ \text{ и } \alpha_1 = 180^\circ.$$

Первое соответствует максимальному положительному значению  $j_p$  в верхней мертвой точке поршня:

$$(j_p)_{\max} = (1 + \lambda) R \omega^2. \quad (39)$$



Фиг. 10. Кривые ускорений поршня по углу поворота кривошипа для  $\lambda = \frac{1}{3,4}$  и  $\lambda = \frac{1}{4,1}$  при  $R = 8,5$  см и  $n = 2000$  об/мин.

Второе соответствует максимальному отрицательному значению  $j_p$  в нижней мертвой точке поршня

$$(j_p)_{\min} = -(1 - \lambda) R \omega^2. \quad (40)$$

Второе максимальное отрицательное значение  $j_p$  будет иметь место в моторах с  $\lambda \geq \frac{1}{4}$  при  $\alpha = \alpha_2$  и будет равно

$$\begin{aligned} (j_p)_{\min} &= R \omega^2 [\cos \alpha + \lambda (2 \cos^2 \alpha - 1)] = \\ &= R \omega^2 \left[ -\frac{1}{4\lambda} + \lambda \left( 2 \frac{1}{16\lambda^2} - 1 \right) \right] = -\left( \lambda + \frac{1}{8\lambda} \right) R \omega^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Угол поворота кривошипа  $\alpha$ , при котором ускорение поршня равно нулю, определяется из уравнения

$$\cos \alpha_1 + \lambda \cos 2\alpha_1 = 0.$$

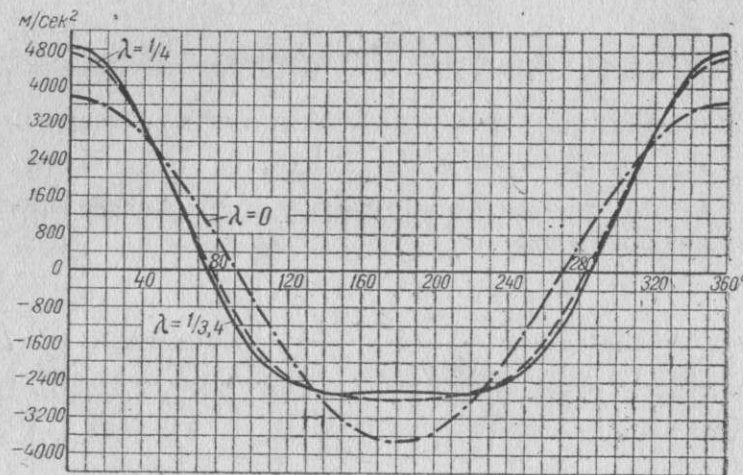
Соответствующие углы  $\alpha_1$  для разных  $\lambda$  даны в табл. 3.

На фиг. 10 даны кривые ускорений поршня по углу поворота кривошипа  $\alpha$  для моторов с  $\lambda = \frac{1}{3,3}$  и  $\lambda = \frac{1}{4,1}$  при  $R = 8,5$  см и  $n = 2000$  об/мин.



Диаграмма для  $\lambda = \frac{1}{3,3}$  соответствует условию  $\lambda > \frac{1}{4}$  и имеет два отрицательных максимума; диаграмма для  $\lambda = \frac{1}{4,1}$  соответствует условию  $\lambda < \frac{1}{4}$  и имеет один отрицательный максимум.

На фиг. 11 даны для сравнения кривые ускорений поршня для  $\lambda = \frac{1}{3,4}$ ,  $\lambda = \frac{1}{4,0}$  и  $\lambda = 0$  при  $R = 8,5$  см и  $n = 2000$  об/мин.



Фиг. 11. Кривые ускорений поршня по углу поворота кривошипа для  $\lambda = \frac{1}{3,4}$ ,  $\lambda = \frac{1}{4,0}$  и  $\lambda = 0$  при  $R = 8,5$  см и  $n = 2000$  об/мин.

Для быстрых подсчетов даны в конце книги (см. приложение I) в зависимости от угла поворота кривошипа  $\alpha$  таблицы величин  $\frac{\omega L}{\omega}$ ,  $\frac{\theta L}{\omega^2}$ ,  $\frac{S_p}{R}$ ,  $\frac{v_p}{R\omega}$ ,  $\frac{j_p}{R\omega^2}$ , подсчитанных по соответствующим точным формулам. Таблицы даны для различных значений  $\lambda$ : от  $\lambda = \frac{1}{3,1}$  до  $\lambda = \frac{1}{4,3}$ .

## § 7. Определение основных размеров нормального кривошипно-шатунного механизма

Нормальный кривошипно-шатунный механизм определяется геометрически двумя параметрами: длиной радиуса кривошипа  $R$  и длиной шатуна  $L$ .

Длина радиуса кривошипа  $R$  равна в рассматриваемом механизме половине хода поршня и определяется выбранной величиной этого хода. Ход поршня, в свою очередь, выбирается в зависимости от рабочего теплового процесса в двигателе, заданной мощности одного цилиндра, заданного числа оборотов в минуту коленчатого вала мотора и конструктивных соображений (отношения диаметра поршня к его ходу). Определение хода поршня, как выходящее за рамки настоящей работы, мы рассматривать не будем.

Длина шатуна  $L$  определяется из следующих соображений. С одной стороны, длину шатуна  $L$  желательно выбрать возможно большей из соображений получения возможно меньшего давления поршня на боковую стенку цилиндра и возможно меньших инерционных сил поршня 2-го и высших порядков (получением возможно меньшего значения величины  $\lambda = \frac{R}{L}$ ).

С другой стороны, длину шатуна  $L$  желательно выбрать возможно меньшей из соображений получения меньших габаритных размеров мотора.

Эти противоположные требования привели к установлению для авиационных моторов некоторых практических средних значений величины  $\lambda = \frac{R}{L}$ . Выбор последней величины при определенном  $R$  дает длину шатуна  $L$ , так как

$$L = \frac{R}{\lambda}. \quad (42)$$

В табл. 5 даны величины  $R$ ,  $L$ ,  $\frac{L}{R}$  и  $\lambda$  ряда современных авиационных моторов.

Для большинства V-образных авиационных моторов величина  $\lambda$  лежит в пределах  $\frac{1}{3,2} - \frac{1}{3,4}$  (0,312 — 0,294).

Для большинства W-образных и звездообразных авиационных моторов величина  $\lambda$  лежит в пределах  $\frac{1}{3,7} - \frac{1}{3,9}$  (0,270 — 0,256).

Таблица 5

Значения величин  $R$ ,  $L$ ,  $\frac{L}{R}$  и  $\lambda$  современных авиационных моторов

Тип мотора	Наименование мотора	$R$ мм	$L$ мм	$\frac{L}{R}$	$\lambda = \frac{R}{L}$
V-образный, 12-цилиндровый	Hispano-Suiza 12 Ybrs . . . . .	85	275	3,24	0,309
	Curtiss „Super-Conqueror“ . . . . .	79,4	254	3,2	0,3125
	Curtiss-1800 . . . . .	76,2	247,7	3,24	0,309
	Lorraine „Pétrel“ . . . . .	72,5	245,1	3,38	0,295
	Renault 12 R-01 . . . . .	70	265	3,78	0,264
	Rolls-Royce „Kestrel“ III s . . . . .	69,9	233,7	3,34	0,300
W-образный, 18-цилиндровый	Isotta-Fraschini „Asso“ 750 . . . . .	85	325	3,82	0,262
Звездообразный, 9-цилиндровый	Wright „Cyclone“ SgR 1820 . . . . .	87,4	349,3	4,00	0,25
	Bristol „Mercury“ IV s2 . . . . .	82,5	310	3,76	0,266
Двойная звезда, 14-цилиндровая	Gnome-Rhône „Mistral“ K-14 Rsd . . . . .	82,5	303	3,67	0,272
	Armstrong „Tiger“ . . . . .	75,8	295,3	3,89	0,256

## Глава II

### КИНЕМАТИКА ДЕЗАКСИАЛЬНОГО КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

#### § 1. Основные понятия и обозначения

Дезаксиальным кривошипным механизмом называется такой кривошипный механизм, у которого ось цилиндра не пересекает оси коленчатого вала, а смещена относительно нее на некоторую величину  $a$ , называемую дезаксажем (фиг. 12). Цель такого смещения заключается в стремлении уменьшить боковое давление поршня на стенку цилиндра. Кроме того, дезаксиальный механизм дает несколько больший ход поршня, что или увеличивает литраж двигателя, или для заданного хода поршня позволяет брать меньший радиус кривошипа  $R$ .

Сохраняя обозначения, принятые в предыдущей главе, обозначим дополнительно:

БИБЛИОТЕКА  
Киевского Авто-  
института



$S_L$  — расстояние точки  $A$  шатуна (фиг. 12) от проекции точки  $O$  на ось цилиндра;  
 $S_{0L}$  — то же расстояние в момент нахождения точки  $A$  в верхней мертвой точке;  
 $\alpha_1$  — угол поворота кривошипа, соответствующий верхнему мертвому положению точки  $A$ ;  
 $\alpha_2$  — то же для нижнего мертвого положения точки  $A$ ;

$$k = \frac{a}{R}. \quad (1)$$

Теоретически  $k$  может быть  $\geq 0$ , причем  $k > 0$  в случае, если ось цилиндра смещена в направлении вращения двигателя; по абсолютной величине  $k$  берут обычно в пределах от 0 до 1.

## § 2. Угловые перемещение, скорость и ускорение шатуна

Угловое перемещение шатуна — угол  $\beta$  — определяется (фиг. 12) уравнением

$$L \sin \beta = R \sin \alpha - a,$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{R}{L} \sin \alpha - \frac{a}{L}$$

или

$$\sin \beta = \lambda (\sin \alpha - k). \quad (2)$$

Фиг. 12. Дезаксиальный кривошипно-шатунный механизм.

Из последнего уравнения видно, что углы поворота кривошипа  $\alpha$ , при которых ось шатуна совпадает с осью цилиндра ( $\beta = 0$ ), определяются из уравнения

$$\sin \alpha = k. \quad (3)$$

Углы поворота кривошипа  $\alpha$ , при которых угол  $\beta$  имеет максимальные по величине значения, определяются из уравнения

$$\sin \alpha = \pm 1,$$

т. е. будут при

$$\alpha = 90^\circ \text{ и } \alpha = 270^\circ.$$

Максимальные углы отклонения оси шатуна от оси цилиндра ( $\beta)_{\max}$  (в ту и другую стороны относительно последней) будут различны и определяются из уравнения

$$\sin(\beta)_{\max} = \pm \lambda - \lambda k. \quad (4)$$

Угловая скорость шатуна найдется из уравнения

$$\omega_L = \frac{d\beta}{dt} = \lambda \omega \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (5)$$

Угловое ускорение шатуна будет

$$\begin{aligned} \Theta_L &= \frac{d^2 \beta}{dt^2} = \lambda \omega \frac{-\omega \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha}}{\cos^2 \beta} = \\ &= -\lambda \omega^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \lambda^2 \omega^2 \frac{\cos \alpha \sin \beta \cos \alpha}{\cos^2 \beta \cos \beta} = \\ &= -\lambda \omega^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta} \left( \cos^2 \beta - \lambda \frac{\cos^2 \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\lambda \omega^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta} \left[ 1 - \lambda^2 (\sin \alpha - k)^2 - \lambda^2 (1 - \sin^2 \alpha) \left( 1 - \frac{k}{\sin \alpha} \right) \right] = \\ &= -\lambda \omega^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta} \left[ (1 - \lambda^2) - \lambda^2 k \left( k - \sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \right]. \\ \Theta_L &= -\lambda \omega^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta} \left[ (1 - \lambda^2) - \lambda^2 k \left( k - \sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Первый член выражения в квадратных скобках соответствует угловому ускорению шатуна нормального кривошипно-шатунного механизма, а второй член в этих скобках дает влияние дезаксажа.

Так как, при обычных для моторов значениях величин  $\lambda$  и  $k$ , функция [уравнение (6)]

$$\varphi(\alpha) = (1 - \lambda^2 - \lambda^2 k^2) \sin \alpha + \lambda^2 k \sin^2 \alpha + \lambda^2 k$$

имеет максимальные по величине значения при углах  $\alpha = 90^\circ$  и  $\alpha = 270^\circ$ , а стоящая в знаменателе выражения для  $\Theta_L$  функция  $\cos^3 \beta$  имеет при этих значениях угла  $\alpha$  минимальное по величине значение, то максимальные по величине значения углового ускорения шатуна  $\Theta_L$  будут иметь место при углах  $\alpha = 90^\circ$  и  $\alpha = 270^\circ$ .

Эти значения будут следующие: при  $\alpha = 90^\circ$

$$(\Theta_L)_{\max} = -\frac{\lambda \omega^2}{\sqrt{1 - \lambda^2(1 - k)^2}} \quad (7)$$

и при  $\alpha = 270^\circ$

$$(\Theta_L)_{\max} = \frac{\lambda \omega^2}{\sqrt{1 - \lambda^2(1 + k)^2}}. \quad (8)$$

## § 3. Расстояние поршня от верхнего мертвого положения. Ход поршня

Расстояние поршня от верхней мертвой точки определяется (фиг. 12) из уравнения

$$S_p = S_{0L} - S_L = S_{0L} - (R \cos \alpha + L \cos \beta), \quad (9)$$

где

$$S_{0L} = \sqrt{(L + R)^2 - a^2} = R \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)^2 - k^2}. \quad (10)$$

Ход поршня в дезаксиальном механизме будет

$$S = S_{0L} - (S_L)_{\min} = R \left[ \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)^2 - k^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)^2 - k^2} \right]. \quad (11)$$

Ход поршня  $S > 2R$ , причем эта разница может достигать до 7% (при  $\lambda = \frac{1}{3,0}$  и  $k = 1$ ).

Значения углов  $\alpha$ , при которых поршень находится в верхней и нижней мертвых точках, определяются непосредственно из фиг. 12.

Для верхней мертвой точки имеем

$$\sin \alpha_1 = \frac{a}{L + R} = \frac{\lambda k}{1 + \lambda}. \quad (12)$$

Для нижней мертвой точки имеем

$$\sin \alpha_2 = -\frac{a}{L - R} = -\frac{\lambda k}{1 - \lambda}. \quad (13)$$

## § 4. Скорость и ускорение поршня

Точное выражение для скорости поршня  $v_p$  получится дифференцированием по  $t$  выражения (9). Получаем

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{dS_p}{dt} = R \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} + L \sin \beta \frac{d\beta}{dt} = R \omega \left[ \sin \alpha + \frac{1}{\lambda} \sin \beta \cdot \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right] = R \omega \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \\ v_p &= R \omega \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (14) \end{aligned}$$



Приближенное выражение для скорости поршня  $v_p$  в форме функции только угла  $\alpha$  получим, исходя из точного выражения (14). Имеем

$$v_p = R\omega \left( \sin \alpha + \sin \beta \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right).$$

Так как согласно выражению (2) имеем

$$\sin \beta = \lambda (\sin \alpha - k),$$

то

$$v_p = R\omega \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \frac{\sin 2\alpha}{\cos \beta} - \lambda k \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right). \quad (15)$$

Полагая в знаменателях членов этого выражения  $\cos \beta = 1$ , получим с достаточной практически точностью искомое выражение для  $v_p$ :

$$v_p = R\omega (\sin \alpha - \lambda k \cos \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha). \quad (16)$$

Точное выражение для ускорения поршня получим дифференцированием по  $t$  точного выражения (14) для скорости поршня. Совершенно аналогично выводу равенства (35) главы I получим

$$j_p = R\omega^2 \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \lambda \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \right]. \quad (17)$$

Приближенное выражение для ускорения поршня в форме функции только угла  $\alpha$  получим дифференцированием по  $t$  приближенного выражения (16) для скорости поршня. С достаточной для практики точностью имеем

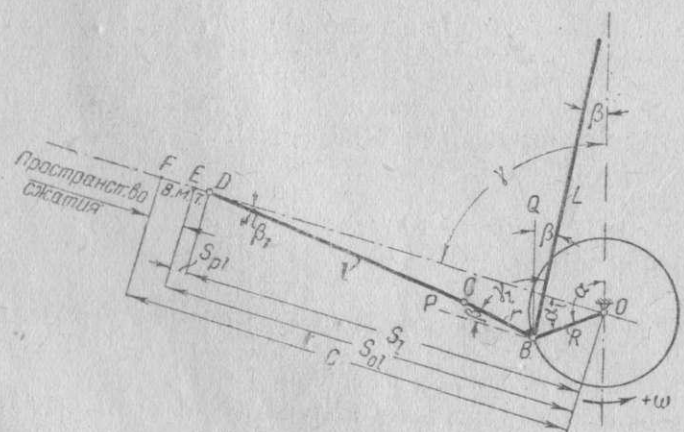
$$j_p = R\omega^2 (\cos \alpha + \lambda k \sin \alpha + \lambda \cos 2\alpha). \quad (18)$$

### Глава III

## КИНЕМАТИКА КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА С ПРИЦЕПНЫМ ШАТУНОМ. СЛУЧАЙ, КОГДА $\gamma_1 = \gamma$

### § 1. Основные понятия и обозначения

В авиационных двигателях в случаях передачи работы нескольких цилиндров на одну шейку коленчатого вала обычно находят применение кривошипно-шатунные механизмы с прицепными шатунами. В таких механизмах один из шатунов, называемый главным, соединяется непосредственно с шатунной шейкой коленчатого вала, а шатуны прочих цилиндров, называемые прицепными, присоединяются шарнирно при помощи пальцев к большой головке главного шатуна. Цилиндр, в котором работает поршень, связанный с главным шатуном, называется главным цилиндром, а цилиндры, в которых работают поршни, связанные с прицепными шатунами, — боковыми цилиндрами. Схема кривошипно-шатунного механизма с одним прицепным шату-



Фиг. 13. Кривошипный механизм с прицепным шатуном.

ном шатуном, называется главным цилиндром, а цилиндры, в которых работают поршни, связанные с прицепными шатунами, — боковыми цилиндрами. Схема кривошипно-шатунного механизма с одним прицепным шату-

ном дана на фиг. 13. В практике современного авиационного моторостроения механизмы этого рода применяются для звездообразных моторов и в подавляющем большинстве случаев для многорядных моторов.

Примем следующие обозначения (фиг. 13):

$R$  — радиус кривошипа коленчатого вала;

$L$  — длина главного шатуна;

$\alpha$  — угол поворота кривошипа от оси главного цилиндра;

$\beta$  — угол отклонения оси главного шатуна от оси главного цилиндра;

$r$  — расстояние от оси цапфы кривошипа до оси пальца прицепного шатуна;

$l$  — длина прицепного шатуна;

$\alpha_1$  — угол поворота кривошипа от оси рассматриваемого бокового цилиндра;

$\beta_1$  — угол отклонения оси прицепного шатуна от оси соответствующего цилиндра; угол  $\beta_1$  принимается положительным при отклонении оси прицепного шатуна относительно оси соответствующего бокового цилиндра в сторону вращения вала мотора; при расположении оси прицепного шатуна по другую сторону оси бокового цилиндра угол  $\beta_1$  принимается отрицательным;

$i$  — число цилиндров звезды;

$\gamma$  — угол между осями бокового и главного цилиндров звезды;

$\gamma_1$  — угол, образуемый осью главного шатуна с плоскостью, проведенной через ось подшипника главного шатуна и ось пальца прицепного шатуна;

$\gamma_0$  — угол между осями двух соседних цилиндров;

$S$  — расстояние оси пальца поршня главного цилиндра (для данного  $\alpha$ ) от оси коленчатого вала;

$S_0$  — расстояние оси пальца поршня главного цилиндра от оси коленчатого вала в момент нахождения поршня в верхней мертвой точке;

$S_p$  — расстояние оси пальца поршня главного цилиндра от его верхнего мертвого положения в момент, соответствующий  $\alpha$ ;

$S_1$  — расстояние от оси коленчатого вала до оси пальца поршня бокового цилиндра для данного  $\alpha_1$ ;

$S_{01}$  — расстояние от оси коленчатого вала до оси пальца поршня бокового цилиндра в момент нахождения поршня в верхней мертвой точке;

$S_{p1}$  — расстояние оси пальца поршня бокового цилиндра от его верхнего мертвого положения в момент, соответствующий  $\alpha_1$ ;

$v_p$  — скорость поршня главного цилиндра для данного  $\alpha$ ;

$j_p$  — ускорение поршня главного цилиндра для данного  $\alpha$ ;

$v_{p1}$  — скорость поршня бокового цилиндра для данного  $\alpha_1$ ;

$j_{p1}$  — ускорение поршня бокового цилиндра для данного  $\alpha_1$ ;

$\omega$  — угловая скорость вращения вала;

$\varepsilon$  — степень сжатия мотора;

$V_e$  — объем мертвого пространства главного цилиндра;

$V_{e1}$  — объем мертвого пространства бокового цилиндра;

$D$  — диаметр цилиндра;

$C$  — приведенное расстояние от оси коленчатого вала до дна цилиндра;

$\omega_1$  — угловая скорость прицепного шатуна;

$\theta_1$  — угловое ускорение прицепного шатуна.

### § 2. Угловые перемещение, скорость и ускорение прицепного шатуна

Из фиг. 13 имеем

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma \quad (1)$$

и

$$L \sin \beta_1 = R \sin \alpha_1 - r \sin \beta. \quad (2)$$

Преобразуем последнее выражение. Согласно фиг. 14 имеем

$$\frac{L}{r} = \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin \gamma} \quad \text{и} \quad \frac{r}{L} = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma}. \quad (3)$$



Поэтому

$$\begin{aligned} l \sin \beta_l &= R \sin \alpha_l - r \sin \beta = R \sin \alpha_l - \lambda r \sin \alpha = \\ &= \lambda L \left[ \frac{L}{\lambda} \sin \alpha_l - \frac{r}{L} \sin \alpha \right] = \lambda L \left[ \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin \gamma} \sin \alpha_l - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} \sin(\alpha_l + \gamma) \right] = \frac{\lambda L}{\sin \gamma} [\sin \gamma \cos \delta \sin \alpha_l + \\ &\quad + \cos \gamma \sin \delta \sin \alpha_l - \sin \alpha_l \cos \gamma \sin \delta - \cos \alpha_l \sin \gamma \sin \delta] = \\ &= \lambda L \sin(\alpha_l - \delta). \end{aligned}$$

Отсюда, обозначая

$$\lambda \frac{L}{l} = \lambda_l, \quad (4)$$

будем иметь

$$\sin \beta_l = \lambda_l \sin(\alpha_l - \delta) \quad (5)$$

и

$$\beta_l = \arcsin [\lambda_l \sin(\alpha_l - \delta)]. \quad (5')$$

Из уравнения (5') видно, что углы поворота кривошипа  $\alpha_l$ , при которых ось прицепного шатуна совпадает с осью его цилиндра ( $\beta_l = 0$ ), будут

$$\alpha_{l1} = \delta \quad \text{и} \quad \alpha_{l2} = \delta + 180^\circ.$$

Углы поворота кривошипа  $\alpha_l$ , при которых угол  $\beta_l$  имеет максимальные по величине значения, определяются из уравнения

$$\sin(\alpha_l - \delta) = \pm 1,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{l1} - \delta &= 90^\circ, \quad \alpha_{l1} = 90^\circ + \delta \\ \alpha_{l2} - \delta &= 270^\circ, \quad \alpha_{l2} = 180^\circ + \alpha_{l1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и

Фиг. 14. К определению кинематических параметров кривошипного механизма с прицепным шатуном.

Таким образом моментами максимального отклонения оси прицепного шатуна от оси его цилиндра будут моменты прохождения оси цапфы кривошипа через диаметрально плоскость описываемого ею цилиндра, наклоненную к оси соответствующего бокового цилиндра под углом  $(90 + \delta)^\circ$ . Максимальные углы отклонения оси прицепного шатуна от оси цилиндра  $(\beta_l)_{\max}$  (в ту и другую стороны относительно последней) будут, как видно из уравнения (5), по своей величине равны друг другу и определяются из уравнения

$$\sin(\beta_l)_{\max} = \pm \lambda_l. \quad (7)$$

Угловая скорость шатуна определится дифференцированием по  $t$  уравнения (5') и будет равна

$$\omega_l = \frac{d\beta_l}{dt} = \lambda_l \omega \frac{\cos(\alpha_l - \delta)}{\cos \beta_l}. \quad (8)$$

Сравнивая выражение (8) с выражением (7) главы I для угловой скорости  $\omega_l$  главного шатуна и выражение (5) для  $\sin \beta_l$  с выражением (4) главы I для  $\sin \beta$ , мы приходим к заключению, что выражения для этих параметров совпадают, если  $\alpha$  заменить на  $(\alpha_l - \delta)$  и  $\lambda$  — на  $\lambda_l$ . Поэтому угловое ускорение  $\Theta_l$  прицепного шатуна можно написать сразу, не прибегая к дифференцированию по  $t$  уравнения (8), а пользуясь выражением (9) главы I для углового ускорения  $\Theta_L$  нормального шатуна. Имеем

$$\Theta_l = \frac{d\omega_l}{dt} = \frac{d^2\beta_l}{dt^2} = -\lambda_l(1 - \lambda_l) \frac{\sin(\alpha_l - \delta)}{\cos^3 \beta_l}. \quad (9)$$

Максимальное по величине значения  $\Theta_l$  будут при углах

$$\alpha_l = 90^\circ + \delta \quad \text{и} \quad \alpha_l = 270^\circ + \delta,$$

так как при этих значениях угла  $\alpha_l$  функция  $\sin(\alpha_l - \delta)$  принимает максимальное по абсолютной величине значение, равное 1, а функция  $\cos \beta_l$  принимает свое минимальное значение. Этим углом  $\alpha_l$ , как показано выше, соответствуют максимальные отклонения прицепного шатуна от оси его цилиндра (в ту и другую стороны).

Максимальные значения  $\Theta_l$  будут

$$(\Theta_l)_{\max} = \mp \frac{\lambda_l}{\sqrt{1 - \lambda_l^2}} \omega^2. \quad (10)$$

### § 3. Расстояние поршня в боковом цилиндре от верхнего мертвого положения

Из фиг. 13 имеем

$$S_l = R \cos \alpha_l + r \cos \beta + l \cos \beta_l. \quad (11)$$

Расстояние поршня бокового цилиндра от верхней мертвой точки  $S_{pl}$  определяется из уравнения

$$S_{pl} = S_{ol} - S_l = S_{ol} - (R \cos \alpha_l + r \cos \beta + l \cos \beta_l). \quad (12)$$

Выражение для  $S_{pl}$  в виде функции угла  $\alpha_l$  получим, пользуясь следующими соотношениями:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\alpha_l + \gamma)} \quad (13)$$

и

$$\cos \beta_l = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_l} = \sqrt{1 - \lambda_l^2 \sin^2(\alpha_l - \delta)}. \quad (14)$$

Разлагая выражение (13) в ряд по биному Ньютона согласно равенству (16) главы I и делая дальнейшие преобразования согласно равенствам (17), (18), (19) и (20) § 4 главы I, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\alpha_l + \gamma)} &= \frac{1}{\lambda} - k + \rho_2 \cos 2(\alpha_l + \gamma) - \\ &- \rho_4 \cos 4(\alpha_l + \gamma) + \rho_6 \cos 6(\alpha_l + \gamma) - \rho_8 \cos 8(\alpha_l + \gamma) + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где, напомним, коэффициенты  $k$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_4$ ,  $\rho_6$  и  $\rho_8$  имеют согласно равенствам главы I значения

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{1}{4} \lambda + \frac{3}{64} \lambda^3 + \frac{2}{256} \lambda^5 + \frac{175}{128^2} \lambda^7 + \dots, \\ \rho_2 &= \frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{16} \lambda^3 + \frac{15}{512} \lambda^5 + \frac{35}{2048} \lambda^7 + \dots, \\ \rho_4 &= \frac{1}{64} \lambda^3 + \frac{3}{256} \lambda^5 + \frac{35}{4096} \lambda^7 + \dots, \\ \rho_6 &= \frac{1}{512} \lambda^5 + \frac{5}{2048} \lambda^7 + \dots, \\ \rho_8 &= \frac{5}{128^2} \lambda^7 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Аналогично для  $\frac{1}{\lambda_l} \sqrt{1 - \lambda_l^2 \sin^2(\alpha_l - \delta)}$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_l} \sqrt{1 - \lambda_l^2 \sin^2(\alpha_l - \delta)} &= \frac{1}{\lambda_l} - k_l + \rho_{l2} \cos 2(\alpha_l - \delta) - \\ &- \rho_{l4} \cos 4(\alpha_l - \delta) + \rho_{l6} \cos 6(\alpha_l - \delta) - \rho_{l8} \cos 8(\alpha_l - \delta) + \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $k_l$ ,  $\rho_{l2}$ ,  $\rho_{l4}$ ,  $\rho_{l6}$  и  $\rho_{l8}$  определяются формулами (16) с заменой  $\lambda$  на  $\lambda_l$ . На основании равенств (15) и (17) получаем для  $S_{pl}$  выражение

$$\begin{aligned} S_{pl} &= [S_{ol} - r(1 - \lambda.k) - l(1 - \lambda_l.k_l)] - \\ &- R \left\{ \cos \alpha_l + \frac{r}{L} [\rho_2 \cos 2(\alpha_l + \gamma) - \rho_4 \cos 4(\alpha_l + \gamma) + \dots] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{l} [\rho_{l2} \cos 2(\alpha_l - \delta) - \rho_{l4} \cos 4(\alpha_l - \delta) + \dots] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$



Ограничиваясь в ряде (18) гармониками второго порядка и отбрасывая в коэффициентах  $k$ ,  $k_1$ ,  $p_2$  и  $p_{12}$  члены, содержащие  $\lambda$  и  $\lambda_1$  в степени выше первой, получим приближенное выражение для пути поршня  $S_{pl}$

$$S_{pl} = [S_{ol} - (r + l) + 0,25(\lambda^2 r + \lambda_1^2 l)] - R \left[ \cos \alpha_1 + 0,25 \lambda \frac{r}{L} \cos 2(\alpha_1 + \gamma) + 0,25 \lambda_1 \frac{l}{L} \cos 2(\alpha_1 - \delta) \right]. \quad (19)$$

Преобразуем выражение (19) для  $S_{pl}$  в форму, которая потребуется в дальнейшем для определения основных размеров рассматриваемого механизма. Имеем

$$\begin{aligned} 0,25 \lambda \frac{r}{L} \cos 2(\alpha_1 + \gamma) + 0,25 \lambda_1 \frac{l}{L} \cos 2(\alpha_1 - \delta) &= \\ &= 0,25 \lambda \frac{r}{L} \left[ \cos 2\alpha_1 \cos 2\gamma - \sin 2\alpha_1 \sin 2\gamma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l^2}{rl} \cos 2\alpha_1 \cos 2\delta + \frac{l^2}{rl} \sin 2\alpha_1 \sin 2\delta \right] = \\ &= 0,25 \lambda \frac{r}{L} \left[ \left( \frac{l^2}{rl} \cos 2\delta + \cos 2\gamma \right) \cos 2\alpha_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{l^2}{rl} \sin 2\delta - \sin 2\gamma \right) \sin 2\alpha_1 \right]. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} \frac{l^2}{rl} \cos 2\delta + \cos 2\gamma &= A, \\ \frac{l^2}{rl} \sin 2\delta - \sin 2\gamma &= B, \\ \frac{B}{A} &= \operatorname{tg} \Theta, \quad \lambda \frac{r}{L} \frac{A}{\cos \Theta} = F, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

будем иметь

$$S_{pl} = [S_{ol} - (r + l) + 0,25(\lambda^2 r + \lambda_1^2 l)] - R [\cos \alpha_1 + 0,25 F \cos (2\alpha_1 - \Theta)]. \quad (21)$$

По своему строению эта формула аналогична формуле для  $S_p$  нормального кривошипного механизма. В этой формуле при данных размерах кривошипного механизма все коэффициенты являются величинами постоянными, определяемыми на основании вышеприведенных соотношений. Определение величины  $S_{ol}$  — расстояния от оси коленчатого вала до оси пальца поршня бокового цилиндра в момент нахождения поршня в верхней мертвой точке — дается ниже.

При рассмотрении вопросов уравнивания сил инерции движущихся масс кривошипно-шатунного механизма двигателя, многие авторы пользуются выражением для ускорения поршня, не содержащим параметров  $\alpha_1$ ,  $L$  и  $\delta$ . В связи с этим дадим для  $S_{pl}$  соответствующую форму, которая позволит в дальнейшем получить нужное выражение для ускорения поршня.

Возьмем выражение для  $S_{pl}$  в форме (12)

$$S_{pl} = S_{ol} - (R \cos \alpha_1 + r \cos \beta + l \cos \beta_1),$$

где

$$\alpha_1 = \alpha - \gamma.$$

Согласно равенству (22) главы I имеем

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= (1 - \lambda k) + \lambda p_2 \cos 2\alpha - \lambda p_4 \cos 4\alpha + \lambda p_6 \cos 6\alpha - \lambda p_8 \cos 8\alpha + \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

причем коэффициенты  $k$ ,  $p_2$ ,  $p_4$ , ... определяются рядами (21) главы I.

Аналогичное выражение для  $\cos \beta_1$  получится следующим образом. Согласно равенству (2)

$$\sin \beta_1 = \frac{R}{l} \sin \alpha_1 - \frac{r}{l} \sin \beta \quad (23)$$

имеем

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \frac{R}{l} \sin (\alpha - \gamma) - \frac{r}{l} \lambda \sin \alpha = \\ &= \frac{R}{l} \cos \gamma \sin \alpha - \frac{R}{l} \sin \gamma \cos \alpha - \lambda \frac{r}{l} \sin \alpha = \\ &= \left( \frac{R}{l} \cos \gamma - \lambda \frac{r}{l} \right) \sin \alpha - \frac{R}{l} \sin \gamma \cos \alpha. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} -\frac{R}{l} \sin \gamma &= a, \\ \frac{R}{l} \cos \gamma - \lambda \frac{r}{l} &= b, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

будем иметь

$$\sin \beta_1 = a \cos \alpha + b \sin \alpha. \quad (25)$$

Для получения искомого выражения для  $\cos \beta_1$  разложим  $\cos \beta_1$  в ряд по степеням  $\sin \beta_1$ . Получим

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta_1} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta_1 - \frac{1}{8} \sin^4 \beta_1 - \\ &\quad - \frac{1}{16} \sin^6 \beta_1 - \dots \end{aligned} \quad (26')$$

Ограничимся в этом выражении для  $\cos \beta_1$  первыми тремя членами ряда, т. е. примем

$$\cos \beta_1 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta_1 - \frac{1}{8} \sin^4 \beta_1. \quad (26)$$

Равенство (26) дает достаточно точное значение для  $\cos \beta_1$ . Так, например, при  $\beta_1 = 20^\circ$  ошибка будет порядка 0,01%; при меньших углах  $\beta_1$  ошибка будет меньше, равняясь 0 при  $\beta_1 = 0^\circ$ .

Пользуясь для  $\sin \beta_1$  выражением (25), найдем выражения для  $\sin^2 \beta_1$  и  $\sin^4 \beta_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta_1 &= a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + 2ab \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 \cos 2\alpha + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^2 \cos 2\alpha + ab \sin 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2) + \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \cos 2\alpha + ab \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (a^2 + b^2) &= c_1, \\ \frac{1}{2} (a^2 - b^2) &= a_1, \\ ab &= b_1, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

и

получим

$$\sin^2 \beta_1 = a_1 \cos 2\alpha + b_1 \sin 2\alpha + c_1. \quad (28)$$

Также найдем

$$\begin{aligned} \sin^4 \beta_1 &= a_1^2 \cos^2 2\alpha + b_1^2 \sin^2 2\alpha + c_1^2 + 2a_1 b_1 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \\ &\quad + 2a_1 c_1 \cos 2\alpha + 2b_1 c_1 \sin 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2 + 2c_1^2) + 2a_1 c_1 \cos 2\alpha + 2b_1 c_1 \sin 2\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{2} (a_1^2 - b_1^2) \cos 4\alpha + a_1 b_1 \sin 4\alpha. \end{aligned} \quad (29)$$



Принимая во внимание равенства (28) и (29), получим согласно (26)

$$\begin{aligned} \cos \beta_l &= 1 - \frac{1}{2}(a_1 \cos 2\alpha + b_1 \sin 2\alpha + c_1) - \\ &- \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + 2c_1^2) + 2a_1 c_1 \cos 2\alpha + 2b_1 c_1 \sin 2\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2) \cos 4\alpha + a_1 b_1 \sin 4\alpha \right] = \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{16}(a_1^2 + b_1^2 + 2c_1^2) \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2}c_1 \right) a_1 \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2}c_1 \right) b_1 \sin 2\alpha - \\ &- \frac{1}{16}(a_1^2 - b_1^2) \cos 4\alpha - \frac{1}{8} a_1 b_1 \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{16}(a_1^2 + b_1^2 + 2c_1^2) &= p_0, \\ -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2}c_1 \right) a_1 &= p_2, \\ \frac{1}{16}(a_1^2 - b_1^2) &= p_4, \\ -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2}c_1 \right) b_1 &= q_2, \\ \frac{1}{8} a_1 b_1 &= q_4, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

и

получим

$$\begin{aligned} \cos \beta_l &= p_0 - p_2 \cos 2\alpha - p_4 \cos 4\alpha - \\ &- q_2 \sin 2\alpha - q_4 \sin 4\alpha. \end{aligned} \quad (31)$$

Для указанной выше цели надо иметь коэффициенты  $p_2$ ,  $p_4$ ,  $q_2$  и  $q_4$  в развернутом виде. Принимая во внимание соотношения (30), (27) и (24), получим следующие выражения для этих коэффициентов (преобразования опускаем):

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= -\frac{1}{4} \lambda^2 \frac{r^2}{l^2} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{4} \lambda^2 \frac{r^2}{l^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda \frac{Rr}{l^2} \left[ 1 + \frac{3}{8} \frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{r^2}{l^2} \right] \cos \gamma - \\ &- \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2} + \frac{3}{4} \lambda^2 \frac{r^2}{l^2} \right] \cos 2\gamma + \frac{1}{32} \lambda \frac{R^3 r}{l^4} \cos 3\gamma, \\ p_4 &= \frac{1}{64} \lambda^4 \frac{r^4}{l^4} - \frac{1}{16} \lambda^3 \frac{Rr^3}{l^4} \cos \gamma + \frac{3}{32} \lambda^2 \frac{R^2 r^2}{l^4} \cos 2\gamma - \\ &- \frac{1}{16} \lambda \frac{R^3 r}{l^4} \cos 3\gamma + \frac{1}{64} \frac{R^4}{l^4} \cos 4\gamma, \\ q_2 &= \frac{1}{2} \lambda \frac{Rr}{l^2} \left[ 1 + \frac{3}{8} \frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{4} \lambda^2 \frac{r^2}{l^2} \right] \sin \gamma - \\ &- \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2} + \frac{3}{4} \lambda^2 \frac{r^2}{l^2} \right] \sin 2\gamma + \frac{1}{32} \lambda \frac{R^3 r}{l^4} \sin 3\gamma, \\ q_4 &= -\frac{1}{16} \lambda^3 \frac{Rr^3}{l^4} \sin \gamma + \frac{3}{32} \lambda^2 \frac{R^2 r^2}{l^4} \sin 2\gamma - \\ &- \frac{1}{16} \lambda \frac{R^3 r}{l^4} \sin 3\gamma + \frac{1}{64} \frac{R^4}{l^4} \sin 4\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

и

Принимая во внимание соотношения (22) и (31) и отбрасывая гармониками выше 4-го, будем иметь

$$\begin{aligned} S_{pl} &= S_{ol} - (R \cos \alpha_l + r \cos \beta + l \cos \beta_l) = \\ &= S_{ol} - [R \cos (\alpha - \gamma) + r(1 - \lambda k) + \lambda p_2 r \cos 2\alpha - \lambda p_4 r \cos 4\alpha + \\ &+ p_0 l - p_2 l \cos 2\alpha - p_4 l \cos 4\alpha - q_2 l \sin 2\alpha - q_4 l \sin 4\alpha] \\ S_{pl} &= [S_{ol} - r(1 - \lambda k) - p_0 l] - [R \cos \gamma \cos \alpha + R \sin \gamma \sin \alpha + \\ &+ (\lambda p_2 r - p_2 l) \cos 2\alpha - q_2 l \sin 2\alpha - (\lambda p_4 r + p_4 l) \cos 4\alpha - q_4 l \sin 4\alpha]. \end{aligned}$$

поставив

$$\left. \begin{aligned} S_{ol} - (1 - \lambda k) - p_0 l &= A_0, \\ \cos \gamma &= A_1, \quad \sin \gamma = B_1, \quad p_2 \frac{r}{L} - p_2 \frac{l}{R} = A_2, \\ -q_2 \frac{l}{R} &= B_2, \quad -p_4 \frac{r}{L} - p_4 \frac{l}{R} = A_4 \quad \text{и} \quad -q_4 \frac{l}{R} = B_4, \end{aligned} \right\} \quad (33a)$$

получим окончательно

$$\begin{aligned} S_{pl} &= A_0 - R(A_1 \cos \alpha + A_2 \cos 2\alpha + A_4 \cos 4\alpha + \\ &+ B_1 \sin \alpha + B_2 \sin 2\alpha + B_4 \sin 4\alpha). \end{aligned} \quad (33)$$

Напомним, что входящие в равенства (33a) величины  $k$ ,  $p_2$  и  $p_4$  определяются рядами (21) главы I, а величины  $p_0$ ,  $p_2$ ,  $p_4$ ,  $q_2$  и  $q_4$  равенствами (32). При подсчетах можно принимать

$$k = \frac{1}{4} \lambda, \quad p_2 = \frac{1}{4} \lambda, \quad \text{и} \quad p_4 = \frac{1}{64} \lambda^3.$$

#### § 4. Скорость поршня бокового цилиндра

Скорость поршня бокового цилиндра определяется из уравнения

$$v_{pl} = \frac{dS_{pl}}{dt} = \omega \frac{dS_{pl}}{d\alpha_l}. \quad (34)$$

Точное выражение для скорости  $v_{pl}$  получим подставляя в уравнение величину  $S_{pl}$  из равенства (12)

$$v_{pl} = R\omega \sin \alpha_l + r\omega_L \sin \beta + l\omega_l \sin \beta_l. \quad (35)$$

Подставляя вместо  $\omega_L$  и  $\omega_l$  их выражения из равенств (7) главы I и (8) первой главы, получим

$$\begin{aligned} R\omega \left[ \sin \alpha_l + \frac{r}{R} \lambda \sin (\alpha_l + \gamma) \lambda \frac{\cos (\alpha_l + \gamma)}{\cos \beta} + \frac{l}{R} \lambda_l \sin (\alpha_l - \delta) \lambda_l \frac{\cos (\alpha_l - \delta)}{\cos \beta_l} \right] \\ v_{pl} = R\omega \left[ \sin \alpha_l + 0,5 \lambda \frac{r}{L} \frac{\sin 2(\alpha_l + \gamma)}{\cos \beta} + 0,5 \lambda_l \frac{l}{L} \frac{\sin 2(\alpha_l - \delta)}{\cos \beta_l} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Выражение для скорости  $v_{pl}$  в виде функции угла  $\alpha_l$  получим, подставляя в уравнение (34) значение  $S_{pl}$  из равенства (18):

$$\begin{aligned} v_{pl} &= R\omega \left\{ \sin \alpha_l + \frac{r}{L} [2p_2 \sin 2(\alpha_l + \gamma) - 4p_4 \sin 4(\alpha_l + \gamma) + \dots] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{L} [2p_{l2} \sin 2(\alpha_l - \delta) - 4p_{l4} \sin 4(\alpha_l - \delta) + \dots] \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Приближенное выражение для скорости  $v_{pl}$  в виде функции угла  $\alpha_l$  получим, подставляя в уравнение (34) значение  $S_{pl}$  из равенства (19)

$$v_{pl} = R\omega \left[ \sin \alpha_l + 0,5 \lambda \frac{r}{L} \sin 2(\alpha_l + \gamma) + 0,5 \lambda_l \frac{l}{L} \sin 2(\alpha_l - \delta) \right]. \quad (38)$$

Заметим, что это выражение можно получить непосредственно из точного выражения (36) для  $v_{pl}$ , полагая  $\cos \beta$  и  $\cos \beta_l$  стоящие в знаменателях членов правой части этого равенства, равными единице.

В преобразованном виде выражение (38) получим, подставляя в уравнение (34) значение  $S_{pl}$  из равенства (21)

$$v_{pl} = R \omega [\sin \alpha_l + 0,5 F \sin (2 \alpha_l - \Theta)]. \quad (39)$$

Наконец, выражение для скорости  $v_{pl}$  в форме, не содержащей параметров  $\alpha_l$ ,  $L$  и  $\delta$ , получим, подставляя в уравнение (34) значение  $S_{pl}$  из равенства (33)

$$v_{pl} = R \omega (A_1 \sin \alpha + 2 A_2 \sin 2 \alpha + 4 A_4 \sin 4 \alpha - B_1 \cos \alpha - 2 B_2 \cos 2 \alpha - 4 B_4 \cos 4 \alpha), \quad (40)$$

где коэффициенты  $A_1, A_2, A_4, B_1, B_2$  и  $B_4$  определяются согласно равенствам (33а).

### § 5. Ускорение поршня бокового цилиндра

Ускорение поршня определяется из уравнения

$$j_{pl} = \frac{dv_{pl}}{dt} = \omega \frac{dv_{pl}}{d\alpha_l}. \quad (41)$$

Точное выражение для  $j_{pl}$  получим, подставляя в уравнение (41) значение  $v_{pl}$  из равенства (36)

$$j_{pl} = R \omega \left\{ \omega \cos \alpha_l + 0,5 \lambda \frac{r}{L} \left[ 2 \frac{\cos 2(\alpha_l + \gamma)}{\cos \beta} \omega + \frac{\sin \beta \sin 2(\alpha_l + \gamma)}{\cos^2 \beta} \frac{d\beta}{dt} \right] + 0,5 \lambda_l \frac{J}{L} \left[ 2 \frac{\cos 2(\alpha_l - \delta)}{\cos \beta_l} \omega + \frac{\sin \beta_l \sin 2(\alpha_l - \delta)}{\cos^2 \beta_l} \frac{d\beta_l}{dt} \right] \right\}$$

или

$$j_{pl} = R \omega^2 \left\{ \cos \alpha_l + \lambda \frac{r}{L} \left[ \frac{\cos 2(\alpha_l + \gamma)}{\cos \beta} + \frac{\lambda^2 \sin^2 2(\alpha_l + \gamma)}{\cos^3 \beta} \right] + \lambda_l \frac{J}{L} \left[ \frac{\cos 2(\alpha_l - \delta)}{\cos \beta_l} + \frac{\lambda_l^2 \sin^2 2(\alpha_l - \delta)}{\cos^3 \beta_l} \right] \right\}. \quad (42)$$

Выражение для ускорения  $j_{pl}$  в виде функции угла  $\alpha_l$  получим, подставляя в уравнение (41) значение  $v_{pl}$  из равенства (37)

$$j_{pl} = R \omega^2 \left\{ \cos \alpha_l + \frac{r}{L} [4 \rho_2 \cos 2(\alpha_l + \gamma) - 16 \rho_4 \cos 4(\alpha_l + \gamma) + \dots] + \frac{J}{L} [4 \rho_{l2} \cos 2(\alpha_l - \delta) - 16 \rho_{l4} \cos 4(\alpha_l - \delta) + \dots] \right\}. \quad (43)$$

Приближенное выражение для ускорения  $j_{pl}$  в виде функции угла  $\alpha_l$  получим, подставляя в уравнение (41) значение  $v_{pl}$  из равенства (38)

$$j_{pl} = R \omega^2 \left[ \cos \alpha_l + \lambda \frac{r}{L} \cos 2(\alpha_l + \gamma) + \lambda_l \frac{J}{L} \cos 2(\alpha_l - \delta) \right]. \quad (44)$$

Заметим, что последнее выражение для ускорения поршня  $j_{pl}$  получается из точного выражения (42), если в последнем отбросить члены, содержащие  $\lambda^2$  и  $\lambda_l^2$ , и положить в знаменателях величины  $\cos \beta$  и  $\cos \beta_l$  равными единице.

В преобразованном виде выражение (44) получим, подставляя в уравнение (41) значение  $v_{pl}$  из равенства (39):

$$j_{pl} = R \omega^2 [\cos \alpha_l + F \cos (2 \alpha_l - \Theta)]. \quad (45)$$

Это выражение аналогично по строению выражению для ускорения поршня в нормальном кривошипном механизме.

Выражение для ускорения поршня  $j_{pl}$ , не содержащее параметров  $\alpha_l$ ,  $L$  и  $\delta$ , получим, подставляя в уравнение (41) значение  $v_{pl}$  из равенства (40):

$$j_{pl} = R \omega^2 (A_1 \cos \alpha + 4 A_2 \cos 2 \alpha + 16 A_4 \cos 4 \alpha + B_1 \sin \alpha + 4 B_2 \sin 2 \alpha + 16 B_4 \sin 4 \alpha), \quad (46)$$

причем коэффициенты  $A_1, A_2, A_4, B_1, B_2$  и  $B_4$  определяются согласно равенствам (33а).

Заметим, что в случае, когда  $\gamma_l = \gamma$ , ряд Фурье для ускорения поршня  $j_{pl}$  не имеет гармоник нечетного порядка, за исключением первого.

### § 6. Определение основных размеров кривошипно-шатунного механизма

В случае  $\gamma_l = \gamma$  при выбранных радиусе кривошипа  $R$  и длине главного шатуна  $L$  в кривошипно-шатунном механизме с прицепным шатуном является возможным варьировать двумя кинематическими параметрами: длиной прицепного шатуна  $l$  и расстоянием от оси цапфы кривошипа до оси пальца прицепного шатуна  $r$ . В V-образных и W-образных моторах эти параметры выбирают следующим образом:  $r$  выбирают наименьшим допустимым конструкцией главного шатуна; при выбранном  $r$  величина  $l$  определяется из того условия, чтобы степень сжатия  $\epsilon$  в боковом цилиндре была одинакова со степенью сжатия в главном цилиндре при одинаковых цилиндрах главным и боковым. Аналитически это условие выражается соотношением

$$\frac{C - (S_l)_{\min}}{C - S_{ol}} = \epsilon, \quad (47)$$

где  $C$  — приведенное расстояние от оси коленчатого вала до дна цилиндра; определение  $C$  дано ниже;

$(S_l)_{\min}$  — расстояние от оси коленчатого вала до оси пальца поршня бокового цилиндра в момент нахождения поршня в нижней мертвой точке;

$S_{ol}$  — то же расстояние в момент нахождения поршня бокового цилиндра в верхней мертвой точке.

Необходимость получения одинаковой степени сжатия во всех цилиндрах мотора при условии одинаковой длины всех прицепных шатунов приводит к неизбежному подбору различных величин  $r$  для шатунов различных цилиндров. Определение длины прицепного шатуна  $l$  и размеров  $r$  ведется в порядке, указанном ниже.

1. Определяют  $r = (r)_{\min}$  из конструктивных возможностей;  $r$  желательно всегда иметь возможно малым, чтобы получить возможно большее приближение кинематики прицепного шатуна к кинематике шатуна нормального кривошипного механизма и возможно меньший вес главного шатуна.

2. Для  $r_{\min}$  определяют длины прицепных шатунов мотора из условия, чтобы степень сжатия  $\epsilon$  была одинакова во всех цилиндрах. Аналитически это условие для каждого бокового цилиндра будет выражаться уравнением (47).

3. За длину прицепных шатунов принимают наименьший размер из числа подсчитанных по п. 2.

4. По выбранной длине прицепных шатунов определяют  $r$  прицепных шатунов, пользуясь тем же условием (47).

Быстро и практически достаточно точно определяются  $l$  при данном  $r$ ,  $r$  при данном  $l$  и те углы  $\alpha_l$ , при которых поршни боковых цилиндров находятся в мертвых точках, по нижеприведенным уравнениям, выведенным на основании того положения, что углы  $\alpha_l$ , соответствующие мертвым точкам, отличаются от 0 и 180° на малые по величине острые углы.

Определим сначала угол  $\alpha_l = \alpha_{ll}$ , при котором поршень бокового цилиндра находится в верхней мертвой точке. Этот угол найдем из уравнения

$$v_{pl} = 0. \quad (48)$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $v_{pl}$  из равенства (39) и ввиду малости угла  $\alpha_{ll}$  принимая  $\sin \alpha_{ll} = 0,5 \sin 2 \alpha_{ll}$ , будем иметь

$$\sin 2 \alpha_{ll} + F \sin (2 \alpha_{ll} - \Theta) = 0$$



или

$$\sin 2\alpha_{11} + F \cos \theta \sin 2\alpha_{11} - F \sin \theta \cos 2\alpha_{11} = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (20), получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{11} = \frac{F \sin \theta}{F \cos \theta + 1} = \frac{B}{A + \frac{L}{\lambda r}}. \quad (49)$$

Угол  $\alpha_1 = \alpha_{11}$ , при котором поршень бокового цилиндра находится в нижней мертвой точке, определится аналогичным образом. Как сказано выше, этот угол мало отличается от  $180^\circ$ ; поэтому с достаточной точностью можно положить

$$\sin \alpha_{12} = \sin (180^\circ - \alpha_{12}) = 0,5 \sin (360^\circ - 2\alpha_{12}) = -0,5 \sin 2\alpha_{12},$$

и уравнение (48), справедливое также и для определения нижней мертвой точки, примет вид

$$-\sin 2\alpha_{12} + F \sin (2\alpha_{12} - \theta) = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{12} = \frac{F \sin \theta}{F \cos \theta - 1} = \frac{B}{A - \frac{L}{\lambda r}}. \quad (50)$$

Зная углы  $\alpha_{11}$  и  $\alpha_{12}$ , легко определить ход поршня в боковом цилиндре  $S_{01} - (S_l)_{\min}$ , пользуясь для определения  $S_{01}$  и  $(S_l)_{\min}$  точным выражением для  $S_l$  [равенство (11)]. Ход поршня в боковом цилиндре рассматриваемого механизма отличается от хода поршня в главном цилиндре: первый на незначительную величину больше второго.

Обратимся теперь к определению длины прицепного шатуна  $l$ , полагая, что  $r$  выбрано на основании вышеприведенных конструктивных соображений.

Так как согласно сказанному выше параметры кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном выбираются из соображения получения одинаковых степеней сжатия в боковом и главном цилиндрах, то искомая длина прицепного шатуна  $l$  определится из уравнения (47).

Входящая в уравнение (47) величина  $C$  — приведенное расстояние от оси коленчатого вала до дна цилиндра — определяется из равенства

$$C = R + L + \frac{v_c}{0,25 \pi D^2} = R + L + \frac{2R \cdot 0,25 \pi D^2}{(\varepsilon - 1) \cdot 0,25 \pi D^2} = L + \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} R. \quad (51)$$

Имея в виду это выражение для  $C$ , уравнению (47) можно дать следующий вид:

$$C - (S_l)_{\min} = \varepsilon C - \varepsilon S_{01}$$

или

$$\varepsilon S_{01} - (S_l)_{\min} = (\varepsilon - 1) C = (\varepsilon - 1) L + (\varepsilon + 1) R.$$

Окончательно получаем

$$\varepsilon S_{01} - (S_l)_{\min} = (\varepsilon - 1) L + (\varepsilon + 1) R. \quad (52)$$

Так как угол  $\alpha_{11}$ , определяемый согласно уравнению (49), является малым по величине острым углом, а угол  $\alpha_{12}$ , определяемый согласно уравнению (50), мало отличается от  $180^\circ$ , то при определении величин  $S_{01}$  и  $(S_l)_{\min}$ , входящих в уравнение (52), можно с достаточной практической точностью принять

$$\alpha_{11} = 0^\circ \text{ и } \alpha_{12} = 180^\circ.$$

Согласно уравнению (11) имеем

$$S_l = R \cos \alpha_l + r \cos \beta + l \cos \beta_l,$$

а поэтому

$$S_{01} = R \cos \alpha_{11} + r \cos \beta_1 + l \cos \beta_{11}, \quad (53)$$

где углы  $\beta_1$  и  $\beta_{11}$  есть углы  $\beta$  и  $\beta_l$ , соответствующие углу  $\alpha_l = \alpha_{11}$ , при котором поршень бокового цилиндра находится в верхней мертвой точке. Принимая  $\alpha_{11} = 0$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_1 &= \lambda \sin \gamma, \\ \sin \beta_{11} &= \frac{r}{l} \sin \beta_1 = \lambda \frac{r}{l} \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

и

$$(S_l)_{\min} = R \cos \alpha_{12} + r \cos \beta_2 + l \cos \beta_{12}, \quad (55)$$

где углы  $\beta_2$  и  $\beta_{12}$  есть углы  $\beta$  и  $\beta_l$ , соответствующие углу  $\alpha_l = \alpha_{12}$ , при котором поршень бокового цилиндра находится в нижней мертвой точке. Принимая  $\alpha_{12} = 180^\circ$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_2 &= -\lambda \sin \gamma \\ \sin \beta_{12} &= -\lambda \frac{r}{l} \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Из равенств (54) и (56) вытекает, что

$$\cos \beta_1 = \cos \beta_2 \text{ и } \cos \beta_{11} = \cos \beta_{12}. \quad (57)$$

Подставляя в уравнение (52) выражение для  $S_{01}$  из равенства (53) и выражение для  $(S_l)_{\min}$  из равенства (55) и принимая во внимание равенства (57), получим

$$l \cos \beta_{11} + r \cos \beta_1 = L. \quad (58)$$

Преобразуем это уравнение. Имеем

$$l \cos \beta_{11} = L - r \cos \beta_1,$$

$$l^2 \left[ 1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \beta_1 \right] = L^2 - 2 L r \cos \beta_1 + r^2 \cos^2 \beta_1,$$

$$l^2 = L^2 - 2 L r \cos \beta_1 + r^2. \quad (59)$$

Последнее уравнение показывает, что  $l$  является стороной треугольника, заданного сторонами  $L$  и  $r$  и углом между ними  $\beta_1$ , лежащей против угла  $\beta_1$ . Угол  $\beta_1$  определяется из уравнения (54)

$$\sin \beta_1 = \lambda \sin \gamma.$$

Величина  $l$  определяется по правилам решения косоугольного треугольника, заданного двумя сторонами и углом между ними. Ввиду необходимости получения величины  $l$  с относительно большой точностью (два десятичных знака), рекомендуется  $l$  определять по формуле

$$l = \frac{L - r}{\cos \varphi}, \quad (60)$$

где  $\varphi$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \sqrt{L r} \sin \frac{\beta_1}{2}}{L - r}. \quad (61)$$

В случае звездообразного мотора, как указывалось выше, приходится по найденной минимальной длине прицепного шатуна определять величины  $r$  для прицепных шатунов разных цилиндров. Определение  $r$  по заданному  $l$  производится по тому же уравнению (59). В этом случае опять можно рассматривать  $r$  как сторону треугольника, заданного сторонами  $L$  и  $l$  и углом  $\beta_1$  между сторонами  $L$  и  $r$ . Поэтому  $r$  находится по уравнению

$$r = l \frac{\sin (\beta_1 + \mu)}{\sin \beta_1} = L \cos \beta_1 + l \cos \mu, \quad (62)$$



где  $\mu$  представляет собой величину, определяемую из уравнения

$$\frac{\sin \mu}{\sin \beta_1} = \frac{L}{l}$$

или

$$\sin \mu = \frac{R}{l} \sin \gamma, \quad (63)$$

причем угол  $\mu$  — тупой угол.

В тех случаях, когда желают определить  $l$  или  $r$  с большей точностью, приходится принимать во внимание, что  $\alpha_{11} \neq 0^\circ$  и  $\alpha_{12} \neq 180^\circ$ . Значения последних величин определяются при этом соответственно из уравнений (49) и (50). Имея это в виду, получим искомое уравнение для определения  $l$  при заданном  $r$ , вводя в уравнение (52) величины  $S_{01}$  из равенства (53) и  $(S_l)_{\min}$  из равенства (55):

$$\varepsilon [R \cos \alpha_{11} + r \cos \beta_1 + l \cos \beta_{11}] - [R \cos \alpha_{12} + r \cos \beta_2 + l \cos \beta_{12}] = (\varepsilon - 1)L + (\varepsilon + 1)R. \quad (64)$$

Отсюда

$$l = \frac{(\varepsilon - 1)L + (\varepsilon + 1)R - (\varepsilon \cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12})R - (\varepsilon \cos \beta_1 - \cos \beta_2)r}{\varepsilon \cos \beta_{11} - \cos \beta_{12}}. \quad (65)$$

Для определения величины  $r$  по заданному  $l$  служит то же уравнение (64), из которого получаем

$$r = \frac{(\varepsilon - 1)L + (\varepsilon + 1)R - (\varepsilon \cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12})R - (\varepsilon \cos \beta_{11} - \cos \beta_{12})l}{\varepsilon \cos \beta_1 - \cos \beta_2}. \quad (66)$$

Напомним, что в уравнениях (64), (65) и (66) углы  $\beta_1$  и  $\beta_{12}$  являются углами  $\beta$  и  $\beta_1$ , соответствующими углу  $\alpha_1 = \alpha_{11}$ , определяемому по уравнению (49); углы  $\beta_2$  и  $\beta_{12}$  соответствуют углу  $\alpha_1 = \alpha_{12}$ , определяемому по уравнению (50). Углы  $\beta$  и  $\beta_1$  определяются из уравнений

$$\sin \beta = \lambda \sin \alpha$$

и

$$\sin \beta_1 = \lambda_1 \sin (\alpha_1 - \delta),$$

где

$$\lambda_1 = \lambda \frac{L}{l} \text{ и } \sin \delta = \frac{r}{L} \sin \gamma.$$

При определении  $l$  по уравнению (65) необходимо знать величины углов  $\alpha_{11}$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_{12}$ . Для определения же этих углов надо знать величину  $L$ . Поэтому определение величины  $l$  по уравнению (65) ведется методом подбора. Задаются значением  $l$ , подсчитанным по формуле (60). По этому значению  $l$  определяют вышеуказанные шесть углов и по ним определяют по формуле (65) более точное значение  $l$ . Обыкновенно бывает достаточно одного подсчета.

Сказанное имеет силу и в отношении определения  $r$  по заданному  $l$  согласно уравнению (66). В этом случае предварительный подсчет  $r$  производится по формуле (62).

В табл. 6 дана для примера сводка кинематических параметров кривошипно-шатунного механизма 9-цилиндрового звездообразного мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

Степень сжатия этого мотора  $\varepsilon = 6,4$ .

Основные данные кривошипно-шатунного механизма главного цилиндра следующие:  $R = 87,35 \text{ мм}$ ;  $L = 349,25 \text{ мм}$ ;  $\lambda = 0,25$ ;  $\beta_{\max} = 14^\circ 29'$ .

В таблице приведены данные для цилиндров № 2, 3, 4 и 5 мотора, причем нумерация цилиндров принята в направлении вращения коленчатого вала мотора, начиная с главного цилиндра. Для кинематических параметров кривошипно-шатунных механизмов боковых цилиндров имеют

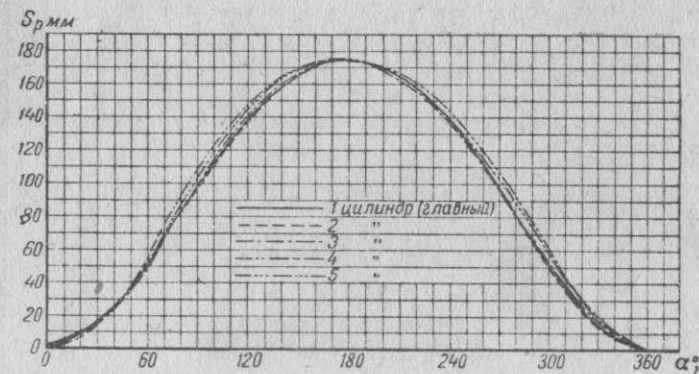
место следующие зависимости

$$\gamma_1 = \gamma = (k - 1) 40^\circ; \quad (67)$$

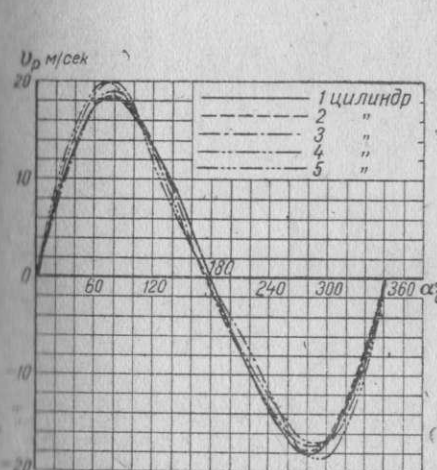
$l$  — одинакова для всех прицепных шатунов двигателя;

$r$  — попарно одинаковы для каждой пары цилиндров, расположенных симметрично относительно главного;

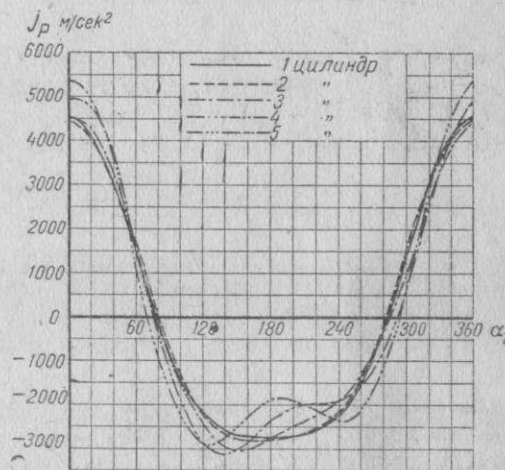
$L$ ,  $\lambda_1$ ,  $(\beta_1)_{\max}$ ,  $A$ ,  $F$ ,  $S_{01}$ ,  $(S_l)_{\min}$ ,  $S_{01} - (S_l)_{\min}$  — попарно связаны аналогично  $r$ ;



Фиг. 15. Кривые путей поршней различных цилиндров мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



Фиг. 16. Кривые скоростей поршней различных цилиндров мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



Фиг. 17. Кривые ускорений поршней различных цилиндров мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

$\delta$  — попарно одинаковы по величине, но противоположны по знаку, для каждой пары цилиндров, расположенных симметрично относительно главного;

$B$ ,  $\theta$ ,  $\alpha_{11}$  — попарно связаны аналогично  $\delta$ .

В формуле (67) буква  $k$  обозначает порядковый номер цилиндра.

На фиг. 15, 16 и 17 даны для примера кривые протекания по углу, пути, скоростей и ускорений поршней в различных цилиндрах этого мотора.

Выше, при определении длины  $l$  прицепных шатунов звездообразного мотора, указывалось, что, задавшись  $r = r_{\min}$  из конструктивных соображений, необходимо из условия постоянства степени сжатия  $\varepsilon$  во всех цилиндрах найти из всех прицепных шатунов мотора самый короткий, длина которого и принимается за искомую длину  $l$  прицепных шатунов. Как показывает формула (59), при заданном  $r$  наименьшая величина  $l$  будет у шатуна



Таблица 6

Кинематические параметры кривошипно-шатунного механизма мотора Curtiss-Wright „Cyclone“

Параметр	Формула для подсчета	Цилиндр № 2	Цилиндр № 3	Цилиндр № 4	Цилиндр № 5
$\gamma_l = \gamma$	Дан	40°	80°	120°	160°
$l$	Дан	280,57	280,57	280,57	280,57
$r$	62	69,87	71,47	70,80	69,01
$\delta$	—	8°38'10"	11°48'10"	9°03'30"	3°15'40"
$L$	—	299,1	344,1	389,45	414,91
$\lambda_l$	4	0,2665	0,3066	0,347	0,3697
$(\beta_l)_{\max}$	7	15°27'	17°51'	20°18'	21°42'
$A$	20	4,531	4,471	6,757	9,600
$B$	20	0,370	2,023	3,240	1,653
$\theta$	20	4°40'10"	24°20'20"	25°37'10"	9°46'10"
$F$	20	0,2275	0,2512	0,3799	0,4814
$\alpha_{l1}$	49	0°26'	2°24'	3°29'	1°35'
$\alpha_{l2}$	50	179°19'	176°11'	172°59'	175°35'
$r$	По 1-му пересчету	69,80	71,28	70,42	68,90
$S_{ol}$	53	436,59	436,55	436,47	436,56
$(S_l)_{\min}$	55	261,88	261,61	261,11	261,67
$S_{ol} - (S_l)_{\min}$	—	174,71	174,94	175,36	174,89
$C$	51	468,92	468,92	468,92	468,92
$\varepsilon = \frac{C - (S_l)_{\min}}{C - S_{ol}}$	—	6,4	6,4	6,4	6,4
$r$	По 2-му пересчету	69,81	71,29	70,43	68,91

того цилиндра двигателя, для которого  $\beta_l$  будет наименьшим. В звездообразных моторах это будут шатуны двух цилиндров, наиболее удаленных от главного.

Из той же формулы (59) видно, что максимальное значение  $r$  будет соответствовать тому боковому цилиндру, для которого  $\beta_l$  будет максимальным. В звездообразных моторах это будут два цилиндра, оси которых наиболее близко расположены к плоскости, проходящей через ось коленчатого вала и нормальной к оси главного цилиндра.

Заметим, что при выводе формулы (59) нами был сделан ряд допущений, упрощающих выводы. Как показывает ряд более точных пересчетов, это приводит к неодинаковости степени сжатия  $\varepsilon$  в цилиндрах мотора. Однако эта разность в степенях сжатия значительно меньше производственных допусков на степень сжатия ( $\pm 0,05$  единиц) и поэтому практически вполне допустима.

## Глава IV

КИНЕМАТИКА КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА С ПРИЦЕПНЫМ ШАТУНОМ. СЛУЧАЙ, КОГДА  $\gamma_l \neq \gamma$ 

## § 1. Угловые перемещение, скорость и ускорение прицепного шатуна

В данной главе сохраним обозначения, принятые в предыдущей главе; помимо этого обозначим

$$\gamma_l - \gamma = \psi. \quad (1)$$

Для рассматриваемого случая, согласно фиг. 13, имеем

$$l \sin \beta_l = R \sin \alpha_l - r \sin (\beta - \psi)$$

или

$$\sin \beta_l = \frac{R}{l} \sin \alpha_l - \frac{r}{l} \sin (\beta - \psi). \quad (2)$$

Дифференцируя это выражение по  $t$ , получим точное выражение для  $\omega_l$  — угловой скорости прицепного шатуна:

$$\omega_l \cos \beta_l = \omega \frac{R}{l} \cos \alpha_l - \omega_l \frac{r}{l} \cos (\beta - \psi) \quad (3')$$

или

$$\omega_l = \frac{\omega}{\cos \beta_l} \left[ \frac{R}{l} \cos \alpha_l - \left( \frac{\omega_l}{\omega} \right) \frac{r}{l} \cos (\beta - \psi) \right], \quad (3)$$

где  $\omega_l$  — угловая скорость главного шатуна.

Дифференцируя по  $t$  выражение (3'), получим точное выражение для  $\Theta_l$  — углового ускорения прицепного шатуна.

Имеем

$$\Theta_l \cos \beta_l - \omega_l^2 \sin \beta_l = -\omega^2 \frac{R}{l} \sin \alpha_l - \frac{r}{l} [\Theta_l \cos (\beta - \psi) - \omega_l^2 \sin (\beta - \psi)]$$

или

$$\Theta_l = -\frac{\omega^2}{\cos \beta_l} \left[ \frac{R}{l} \sin \alpha_l - \left( \frac{\omega_l}{\omega} \right)^2 \frac{r}{l} \sin (\beta - \psi) + \left( \frac{\Theta_l}{\omega^2} \right) \frac{r}{l} \cos (\beta - \psi) - \left( \frac{\omega_l}{\omega} \right)^2 \sin \beta_l \right], \quad (4)$$

где  $\Theta_l$  — угловое ускорение главного шатуна. Для сокращения счетной работы величины  $\frac{\omega_l}{\omega}$ ,  $\left( \frac{\omega_l}{\omega} \right)^2$  и  $\frac{\Theta_l}{\omega^2}$  подсчитаны для разных  $\lambda$  и  $\alpha$  и даны в таблицах, приведенных в приложении I.

Полагая в формулах (3) и (4)  $\psi = 0$ , получим выражения для угловой скорости и ускорения прицепного шатуна для случая, когда  $\gamma_l = \gamma$ , в несколько другом виде, чем в главе III.

## § 2. Расстояние поршня бокового цилиндра от верхнего мертвого положения

Для рассматриваемого случая, согласно фиг. 13, имеем

$$S_l = R \cos \alpha_l + r \cos (\beta - \psi) + l \cos \beta_l. \quad (5)$$

Расстояние поршня бокового цилиндра от верхней мертвой точки  $S_{pl}$  определяется из уравнения

$$S_{pl} = S_{ol} - S_l = S_{ol} - [R \cos \alpha_l + r \cos (\beta - \psi) + l \cos \beta_l]. \quad (6)$$

При решении некоторых вопросов динамики двигателя (уравновешивание сил инерции поступательно двигающихся в цилиндрах двигателя масс; определение крутящих моментов, возбуждающих крутильные колебания системы коленчатого вала двигателя) необходимо иметь для силы инерции поступательно двигающейся в цилиндре массы выражение в форме тригонометрического полинома по углу поворота коленчатого вала  $\alpha$ ; поэтому необходимо иметь соответствующее выражение для ускорения поршня. Имея это в виду, найдем для  $S_{pl}$  выражение в форме тригонометрического полинома по углу  $\alpha$ , из которого в дальнейшем получим нужное выражение и для ускорения поршня.

Согласно уравнению (6) имеем

$$\begin{aligned} S_{pl} &= S_{ol} - [R \cos \alpha_l + r \cos (\beta - \psi) + l \cos \beta_l] = \\ &= S_{ol} - [R \cos \gamma \cos \alpha + R \sin \gamma \sin \alpha + r \cos \psi \cos \beta + \\ &+ r \sin \psi \sin \alpha + l \cos \beta_l] = S_{ol} - R \left[ \cos \gamma \cos \alpha + \left( \sin \gamma + \frac{r}{R} \sin \psi \right) \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{R} \cos \psi \cos \beta + \frac{l}{R} \cos \beta_l \right]. \end{aligned} \quad (7)$$



Согласно равенству (22) главы I имеем

$$\cos \beta = (1 - \lambda k) + \lambda \rho_2 \cos 2\alpha - \lambda \rho_4 \cos 4\alpha + \dots, \quad (8)$$

причем коэффициенты  $k$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_4$  определяются рядами (21) главы I.

Аналогичное выражение для  $\cos \beta_l$  получится следующим образом. Согласно равенству (2) можем написать

$$\begin{aligned} \sin \beta_l &= \frac{R}{l} \sin \alpha_l - \frac{r}{l} \sin (\beta - \psi) = \\ &= \frac{R}{l} \cos \gamma \sin \alpha - \frac{R}{l} \sin \gamma \cos \alpha - \frac{r}{l} \cos \psi \sin \alpha + \frac{r}{l} \sin \psi \cos \beta = \\ &= -\frac{R}{l} \sin \gamma \cos \alpha + \left( \frac{R}{l} \cos \gamma - \lambda \frac{r}{l} \cos \psi \right) \sin \alpha + \frac{r}{l} \sin \psi \cos \beta \end{aligned}$$

или

$$\sin \beta_l = -\frac{R}{l} \sin \gamma \cos \alpha + \frac{R}{l} \left( \cos \gamma - \frac{r}{l} \cos \psi \right) \sin \alpha + \frac{r}{l} \sin \psi \cos \beta. \quad (9)$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} -\frac{R}{l} \sin \gamma &= a, \\ \frac{R}{l} \left( \cos \gamma - \frac{r}{l} \cos \psi \right) &= b, \\ \frac{r}{l} \sin \psi &= c, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и

будем иметь

$$\sin \beta_l = a \cos \alpha + b \sin \alpha + c \cos \beta. \quad (11)$$

Искомое выражение для  $\cos \beta_l$  получим, разлагая в ряд  $\cos \beta_l$  по степеням  $\sin \beta_l$

$$\cos \beta_l = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_l} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta_l - \frac{1}{8} \sin^4 \beta_l - \dots$$

Ограничиваясь в этом ряде первыми двумя членами, что практически достаточно точно для последующих выводов, так как угол  $\beta_l$  относительно невелик, получим приближенное выражение для  $\cos \beta_l$  в виде

$$\cos \beta_l \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta_l. \quad (12)$$

Пользуясь для  $\sin \beta_l$  выражением (11), найдем выражение для  $\sin^2 \beta_l$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta_l &= a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \beta + 2ab \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ 2(a \cos \alpha + b \sin \alpha) c \cos \beta = \\ &= \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 \cos 2\alpha + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^2 \cos 2\alpha + c^2 - c^2 \lambda^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) + \\ &+ ab \sin 2\alpha + 2c(a \cos \alpha + b \sin \alpha) (1 - \lambda k + \lambda \rho_2 \cos 2\alpha - \lambda \rho_4 \cos 4\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + 2c^2 - \lambda^2 c^2) + \frac{1}{2} (a^2 - b^2 + \lambda^2 c^2) \cos 2\alpha + ab \sin 2\alpha + \\ &+ [2ac(1 - \lambda k) + \lambda \rho_2 ac] \cos \alpha + [2bc(1 - \lambda k) - \lambda \rho_2 bc] \sin \alpha + \\ &+ [\lambda \rho_2 ac - \lambda \rho_4 ac] \cos 3\alpha + [\lambda \rho_2 bc + \lambda \rho_4 bc] \sin 3\alpha. \end{aligned}$$

Ограничиваясь в выражении для  $\sin^2 \beta_l$  гармониками первых двух порядков, будем иметь

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta_l &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2) + (1 - \frac{\lambda^2}{2}) c^2 + 2(1 - \lambda k + \frac{\lambda}{2} \rho_2) ac \cos \alpha + \\ &+ 2(1 - \lambda k - \frac{\lambda}{2} \rho_2) bc \sin \alpha + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} (a^2 - b^2) + \frac{\lambda^2}{2} c^2 \right] \cos 2\alpha + ab \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя найденное выражение для  $\sin^2 \beta_l$  в равенство (12), получим

$$\begin{aligned} \cos \beta_l &= \left[ 1 - \frac{1}{4} (a^2 + b^2) - \frac{1}{2} (1 - \frac{\lambda^2}{2}) c^2 \right] - \\ &- [1 - \lambda k + \frac{1}{2} \lambda \rho_2] ac \cos \alpha - [1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2] bc \sin \alpha - \\ &- \frac{1}{4} [a^2 - b^2 + \lambda^2 c^2] \cos 2\alpha - \frac{1}{2} ab \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{1}{4} (a^2 + b^2) - \frac{1}{2} (1 - \frac{\lambda^2}{2}) c^2 &= p_0, \\ (1 - \lambda k + \frac{1}{2} \lambda \rho_2) ac &= p_1, \\ \frac{1}{4} (a^2 - b^2 + \lambda^2 c^2) &= p_2, \\ (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) bc &= q_1, \\ \frac{1}{2} ab &= q_2, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и

будем иметь

$$\begin{aligned} \cos \beta_l &= p_0 - p_1 \cos \alpha - p_2 \cos 2\alpha - \\ &- q_1 \sin \alpha - q_2 \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Принимая во внимание это выражение для  $\cos \beta_l$  и ограничиваясь в выражении (8) для  $\cos \beta$  гармоникой второго порядка, получим для  $S_{pl}$  следующее выражение [см. равенство (7)]

$$\begin{aligned} S_{pl} &= S_{ol} - R [\cos \gamma \cos \alpha + (\sin \gamma + \frac{r}{l} \sin \psi) \sin \alpha + \\ &+ \frac{r}{R} \cos \psi (1 - \lambda k + \lambda \rho_2 \cos 2\alpha) + \\ &+ \frac{l}{R} (p_0 - p_1 \cos \alpha - p_2 \cos 2\alpha - q_1 \sin \alpha - q_2 \sin 2\alpha)] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S_{pl} &= [S_{ol} - (1 - \lambda k) r \cos \psi - l p_0] - R [(\cos \gamma - \frac{l}{R} p_1) \cos \alpha + \\ &+ (\rho_2 \frac{r}{L} \cos \psi - \frac{l}{R} p_2) \cos 2\alpha + (\sin \gamma + \frac{r}{L} \sin \psi - \frac{l}{R} q_1) \sin \alpha - \\ &- \frac{l}{R} q_2 \sin 2\alpha]. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} S_{ol} - (1 - \lambda k) r \cos \psi - l p_0 &= A_0, \\ \cos \gamma - \frac{l}{R} p_1 &= A_1, \\ \rho_2 \frac{r}{L} \cos \psi - \frac{l}{R} p_2 &= A_2, \\ \sin \gamma + \frac{r}{L} \sin \psi - \frac{l}{R} q_1 &= B_1, \\ -\frac{l}{R} q_2 &= B_2, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$



будем окончательно иметь

$$S_{pl} = A_0 - R(A_1 \cos \alpha + A_2 \cos 2\alpha + B_1 \sin \alpha + B_2 \sin 2\alpha). \quad (19)$$

При исследовании вопросов уравнивания сил инерции поступательно движущихся в цилиндрах мотора масс требуется иметь коэффициенты  $A_1, A_2, B_1$  и  $B_2$  в развернутом виде. Принимая во внимание соотношения (18), (15) и (10), получим следующие выражения для этих коэффициентов (преобразования опускаем):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \cos \gamma + (1 - \lambda k + \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r}{L} \sin \psi \sin \gamma, \\ A_2 &= \rho_2 \frac{r}{L} \cos \psi + \frac{1}{4} \lambda \frac{r^2}{L^2} \cos 2\psi - \frac{1}{2} \lambda \frac{r}{L} \cos \psi \cos \gamma + \frac{1}{4} \frac{R}{L} \cos 2\gamma, \\ B_1 &= \frac{r}{L} \sin \psi + \frac{1}{2} (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r^2}{L^2} \sin 2\psi - \\ &\quad - (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r}{L} \sin \psi \cos \gamma + \sin \gamma \\ \text{и} \\ B_2 &= -\frac{1}{2} \lambda \frac{r}{L} \cos \psi \sin \gamma + \frac{1}{4} \frac{R}{L} \sin 2\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Дадим для  $S_{pl}$  другое выражение, более удобное для некоторых дальнейших исследований. Так как

$$\alpha = \alpha_l + \gamma,$$

то, согласно равенству (19), будем иметь

$$\begin{aligned} S_{pl} &= A_0 - R[A_1 \cos(\alpha_l + \gamma) + A_2 \cos 2(\alpha_l + \gamma) + \\ &\quad + B_1 \sin(\alpha_l + \gamma) + B_2 \sin 2(\alpha_l + \gamma)] = \\ &= A_0 - R[A_1 \cos \gamma \cos \alpha_l - A_1 \sin \gamma \sin \alpha_l + \\ &\quad + B_1 \sin \gamma \cos \alpha_l + B_1 \cos \gamma \sin \alpha_l + \\ &\quad + A_2 \cos 2\gamma \cos 2\alpha_l - A_2 \sin 2\gamma \sin 2\alpha_l + \\ &\quad + B_2 \sin 2\gamma \cos 2\alpha_l + B_2 \cos 2\gamma \sin 2\alpha_l] = \\ &= A_0 - R[(A_1 \cos \gamma + B_1 \sin \gamma) \cos \alpha_l - (-B_1 \cos \gamma + \\ &\quad + A_1 \sin \gamma) \sin \alpha_l + (A_2 \cos 2\gamma + B_2 \sin 2\gamma) \cos 2\alpha_l + \\ &\quad + (B_2 \cos 2\gamma - A_2 \sin 2\gamma) \sin 2\alpha_l]. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cos \gamma + B_1 \sin \gamma &= C, \\ A_1 \sin \gamma - B_1 \cos \gamma &= D, \\ A_2 \cos 2\gamma + B_2 \sin 2\gamma &= A, \\ B_2 \cos 2\gamma - A_2 \sin 2\gamma &= B, \\ \operatorname{tg} \Phi &= \frac{D}{C}, \quad \frac{C}{\cos \Phi} = E \\ \text{и} \\ \operatorname{tg} \Theta &= \frac{B}{A}, \quad \frac{4A}{\cos \Theta} = F, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

получим

$$\begin{aligned} S_{pl} &= A_0 - R[C \cos \alpha_l - D \sin \alpha_l + A \cos 2\alpha_l + B \sin 2\alpha_l] = \\ &= A_0 - R[C(\cos \alpha_l - \frac{D}{C} \sin \alpha_l) + A(\cos 2\alpha_l + \frac{B}{A} \sin 2\alpha_l)] = \\ &= A_0 - R[\frac{C}{\cos \Phi} (\cos \alpha_l \cos \Phi - \sin \alpha_l \sin \Phi) + \\ &\quad + \frac{A}{\cos \Theta} (\cos 2\alpha_l \cos \Theta + \sin 2\alpha_l \sin \Theta)] \end{aligned}$$

или

$$S_{pl} = A_0 - R[E \cos(\alpha_l + \Phi) + 0,25 F \cos(2\alpha_l - \Theta)]. \quad (22)$$

Выражения для коэффициентов  $C, D, A$  и  $B$  [см. равенства (21)] в развернутом виде будут (преобразования опускаем)

$$\left. \begin{aligned} C &= 1 + [1 + (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r}{L} \cos \psi] \frac{r}{L} \sin \psi \sin \gamma, \\ D &= (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r}{L} \sin \psi - [1 + (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r}{L} \cos \psi] \frac{r}{L} \sin \psi \cos \gamma, \\ A &= \frac{1}{4} \frac{R}{L} - \frac{1}{2} \lambda \frac{r}{L} \cos \psi \cos \gamma + (\rho_2 \cos \psi + \frac{1}{4} \lambda \frac{r}{L} \cos 2\psi) \frac{r}{L} \cos 2\gamma \\ \text{и} \\ B &= \frac{1}{2} \lambda \frac{r}{L} \cos \psi \sin \gamma - (\rho_2 \cos \psi + \frac{1}{4} \lambda \frac{r}{L} \cos 2\psi) \frac{r}{L} \sin 2\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

При подсчетах этих коэффициентов можно принимать

$$k = \frac{1}{4} \lambda \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{1}{4} \lambda.$$

### § 3. Скорость и ускорение поршня бокового цилиндра

Скорость поршня бокового цилиндра определяется из уравнения

$$v_{pl} = \frac{dS_{pl}}{dt} = \omega \frac{dS_{pl}}{d\alpha_l} = \omega \frac{dS_{pl}}{d\alpha}. \quad (24)$$

Точное выражение для скорости поршня  $v_{pl}$  получим, дифференцируя по  $t$  выражение (6) для  $S_{pl}$ :

$$v_{pl} = R\omega [\sin \alpha_l + \frac{\omega L}{\omega} \frac{r}{R} \sin(\beta - \psi) + \frac{\omega L}{\omega} \frac{l}{R} \sin \beta_l]. \quad (25)$$

Приближенное выражение для  $v_{pl}$  в форме тригонометрического полинома по аргументу  $\alpha$  получим, дифференцируя по  $t$  выражение (19) для  $S_{pl}$ :

$$v_{pl} = R\omega (A_1 \sin \alpha + 2A_2 \sin 2\alpha - B_1 \cos \alpha - 2B_2 \cos 2\alpha). \quad (26)$$

В преобразованном виде выражение (26) для  $v_{pl}$  получим, дифференцируя по  $t$  выражение (22) для  $S_{pl}$ .

$$v_{pl} = R\omega [E \sin(\alpha_l + \Phi) + 0,5 F \sin(2\alpha_l - \Theta)]. \quad (27)$$

Точное выражение для ускорения поршня бокового цилиндра получим, дифференцируя по  $t$  точное выражение (25) для скорости поршня  $v_{pl}$ .

$$\begin{aligned} j_{pl} &= R\omega^2 \left[ \cos \alpha_l + \left( \frac{\omega L}{\omega} \right)^2 \frac{r}{R} \cos(\beta - \psi) + \left( \frac{\omega L}{\omega} \right)^2 \frac{l}{R} \cos \beta_l + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\Theta L}{\omega^2} \right) \frac{r}{R} \sin(\beta - \psi) + \left( \frac{\Theta L}{\omega^2} \right) \frac{l}{R} \sin \beta_l \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя в это выражение найденное выше выражение для  $\Theta_l$  [равенство (4)], получим

$$\begin{aligned} j_{pl} &= \frac{R\omega^2}{\cos \beta_l} \{ [\cos \alpha_l \cos \beta_l - \sin \alpha_l \sin \beta_l] + \\ &\quad + \left( \frac{\omega L}{\omega} \right)^2 \frac{r}{R} [\cos(\beta - \psi) \cos \beta_l + \sin(\beta - \psi) \sin \beta_l] + \\ &\quad + \left( \frac{\omega L}{\omega} \right)^2 \frac{l}{R} [\cos^2 \beta_l + \sin^2 \beta_l] + \\ &\quad + \left( \frac{\Theta L}{\omega^2} \right) \frac{r}{R} [\sin(\beta - \psi) \cos \beta_l - \cos(\beta - \psi) \sin \beta_l] \} \end{aligned}$$

или

$$j_{pl} = \frac{R\omega^2}{\cos \beta_l} [\cos(\alpha_l + \beta_l) + \left(\frac{\omega L}{\omega}\right)^2 \frac{r}{R} \cos(\beta - \psi - \beta_l) + \left(\frac{\theta L}{\omega^2}\right) \frac{r}{R} \sin(\beta - \psi - \beta_l) + \left(\frac{\omega_l}{\omega}\right)^2 \frac{l}{R}] \quad (29)$$

Приближенное выражение для ускорения поршня в форме тригонометрического полинома по аргументу  $\alpha$  найдем, дифференцируя по  $t$  выражение (26) для скорости поршня  $v_{pl}$

$$j_{pl} = R\omega^2(A_1 \cos^2 \alpha + 4A_2 \cos 2\alpha + B_1 \sin \alpha + 4B_2 \sin 2\alpha). \quad (30)$$

В преобразованном виде выражение (30) для ускорения поршня  $j_{pl}$  получим, дифференцируя по  $t$  выражение (27) для скорости  $v_{pl}$

$$j_{pl} = R\omega^2[E \cos(\alpha_l + \Phi) + F \cos(2\alpha_l - \Theta)]. \quad (31)$$

Входящие в выражения для  $v_{pl}$  и  $j_{pl}$  [равенства (25) и (29)] величины  $\left(\frac{\omega L}{\omega}\right)$ ,  $\left(\frac{\omega L}{\omega}\right)^2$  и  $\left(\frac{\theta L}{\omega^2}\right)$  даны в конце книги в таблицах (приложение I). Величина  $\left(\frac{\omega_l}{\omega}\right)$  определяется согласно равенству (3). Угол  $\beta_l$  определяется из уравнения (2). Угол  $\beta$  определяется из уравнения

$$\sin \beta = \lambda \sin \alpha = \lambda \sin(\alpha_l + \gamma).$$

Полагая в уравнениях (25) и (29) угол  $\psi = 0$ , получим точные выражения для  $v_{pl}$  и  $j_{pl}$  для случая, когда  $\gamma_l = \gamma$ , в несколько иной форме, чем дано в предыдущей главе.

Заметим, что полные выражения для  $v_{pl}$  и  $j_{pl}$  в форме тригонометрических полиномов по аргументу  $\alpha$  содержат в случае  $\gamma_l \neq \gamma$  гармоники всех как четных, так и нечетных порядков. Выше [равенства (26) и (30)] нами были найдены выражения для  $v_{pl}$  и  $j_{pl}$  в форме тригонометрических полиномов, ограничиваясь гармониками двух первых порядков. Для практических целей это является достаточным. Получение в выражениях для  $v_{pl}$  и  $j_{pl}$  коэффициентов Фурье более высоких порядков аналитическим путем является чрезвычайно громоздким.

В случае необходимости иметь эти коэффициенты, например, в случае желая выяснить влияние соответствующих гармоник на уравновешенность двигателя, мы рекомендуем получать эти коэффициенты в каждом конкретном случае, строя диаграмму ускорений поршня по углу поворота кривошипа по точной формуле (29) и разлагая затем эту кривую на гармоники каким-либо из известных аналитических или механических способов.

#### § 4. Определение основных размеров кривошипно-шатунного механизма

В рассматриваемом кривошипно-шатунном механизме при выбранных радиусе кривошипа  $R$ , длине главного шатуна  $L$  и угле между осями цилиндров  $\gamma$  является возможным варьировать тремя кинематическими параметрами  $r$ ,  $l$  и  $\psi$ . Эти параметры выбираются следующим образом. При проектировании главного шатуна расстояние  $r$  от оси цапфы кривошипа до оси пальца прицепного шатуна берут по конструктивным соображениям наименьшим из возможных. Остающиеся две величины — длина прицепного шатуна  $l$  и угол  $\psi = \gamma_l - \gamma$  — дают возможность при их выборе удовлетворить двум каким-либо условиям. Одним из этих условий обыкновенно является требование получения в боковом цилиндре той же степени сжатия  $\varepsilon$ , что и в главном цилиндре, конечно, при одинаковых размерностях обоих цилиндров. Вторым условием, выполненным в большинстве существующих конструкций, является требование, сводящееся к тому, чтобы длина прицепного шатуна  $l$  была равна

$$l = L - r. \quad (32)$$

Некоторые авторы, например профессор Г. Г. Баранов, предлагают определять  $l$  и  $\psi$  из условий, чтобы расстояния оси пальца поршня бокового цилиндра от оси коленчатого вала в моменты нахождения поршня в верхнем и нижнем мертвых положениях были одинаковы с этими расстояниями поршневого пальца в главном цилиндре. Эти условия дают одинаковость степени сжатия и одинаковость хода поршня в обоих цилиндрах.

При определении величин  $l$  и  $\psi$  по первому способу получается увеличение хода поршня в боковом цилиндре на 3—4% по сравнению с ходом поршня в главном цилиндре, а следовательно, получается и соответствующее увеличение мощности в боковом цилиндре. Угол поворота кривошипа, при котором поршень бокового цилиндра находится в верхней мертвой точке, равен при этом способе примерно 1,0—1,5°. При выборе величин  $l$  и  $\psi$  по способу профессора Г. Г. Баранова увеличения мощности в боковом цилиндре не получается, но зато получается несколько больший угол поворота кривошипа, при котором поршень бокового цилиндра достигает верхней мертвой точки, и несколько более близкий к 180° угол поворота кривошипа, при котором поршень бокового цилиндра приходит в нижнюю мертвую точку.

В силу сказанного мы считаем более целесообразным при определении величин  $l$  и  $\psi$  применять первый способ, к изложению которого и переходим, отсылая интересующихся способом профессора Г. Г. Баранова к его работе „Определение основных размеров кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном“, опубликованной в № 5 журнала „Техника воздушного флота“ за 1933 г.

Угол  $\alpha = \alpha_{l1}$ , при котором поршень бокового цилиндра находится в верхней мертвой точке, найдется из уравнения

$$v_{pl} = 0. \quad (33)$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $v_{pl}$  из равенства (27) и принимая в виду малости угла  $(\alpha_{l1} + \Phi)$  величину

$$\sin(\alpha_{l1} + \Phi) = 0,5 \sin 2(\alpha_{l1} + \Phi),$$

будем иметь

$$E \sin 2(\alpha_{l1} + \Phi) + F \sin(2\alpha_{l1} - \Theta) = 0$$

или

$$E \cos 2\Phi \sin 2\alpha_{l1} + E \sin 2\Phi \cos 2\alpha_{l1} + F \cos \Theta \sin 2\alpha_{l1} - F \sin \Theta \cos 2\alpha_{l1} = 0.$$

Далее

$$(E \cos 2\Phi + F \cos \Theta) \sin 2\alpha_{l1} = (F \sin \Theta - E \sin 2\Phi) \cos 2\alpha_{l1}$$

и

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{l1} = \frac{F \sin \Theta - E \sin 2\Phi}{F \cos \Theta + E \cos 2\Phi}, \quad (34)$$

причем величины  $F$ ,  $E$ ,  $\Theta$  и  $\Phi$  определяются согласно равенствам (21).

Угол  $\alpha = \alpha_{l2}$ , при котором поршень бокового цилиндра находится в нижней мертвой точке, определяется аналогичным образом. Так как угол  $(\alpha_{l2} + \Phi)$  близок к 180°, то

$$\sin(\alpha_{l2} + \Phi) = -0,5 \sin 2(\alpha_{l2} + \Phi)$$

и уравнение (33), справедливое также и для нижней мертвой точки, примет вид

$$-E \sin 2(\alpha_{l2} + \Phi) + F \sin(2\alpha_{l2} - \Theta) = 0$$

или

$$-E \cos 2\Phi \sin 2\alpha_{l2} - E \sin 2\Phi \cos 2\alpha_{l2} + F \cos \Theta \sin 2\alpha_{l2} - F \sin \Theta \cos 2\alpha_{l2} = 0.$$

Далее

$$(F \cos \Theta - E \cos 2\Phi) \sin 2\alpha_{l2} = (F \sin \Theta + E \sin 2\Phi) \cos 2\alpha_{l2}$$



и

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{F \sin \theta + E \sin 2\Phi}{F \cos \theta - E \cos 2\Phi} \quad (35)$$

Согласно основному условию длина прицепного шатуна  $l$  определяется из равенства (32)

$$l = L - r.$$

Для определения величины угла  $\psi$  остается второе основное условие — равенство степеней сжатия  $\varepsilon$  в боковом и главном цилиндрах. Согласно равенства (52) предыдущей главы, это условие выражается уравнением

$$\varepsilon S_{01} - (S_l)_{\min} = (\varepsilon - 1)L + (\varepsilon + 1)R. \quad (36)$$

Принимая во внимание равенство (5), будем иметь

$$S_{01} = R \cos \alpha_{11} + r \cos (\beta_1 - \psi) + l \cos \beta_{11} \quad (37)$$

и

$$(S_l)_{\min} = R \cos \alpha_{12} + r \cos (\beta_2 - \psi) + l \cos \beta_{12}. \quad (38)$$

где угол  $\alpha_{11}$  определяется согласно равенству (34);

углы  $\beta_1$  и  $\beta_{11}$  есть углы  $\beta$  и  $\beta_1$ , соответствующие углу  $\alpha_{11}$ , и определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_1 &= \lambda \sin (\gamma + \alpha_{11}) \\ \sin \beta_{11} &= \frac{R}{l} \sin \alpha_{11} - \frac{r}{l} \sin (\beta_1 - \psi); \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

и

угол  $\alpha_{12}$  определяется согласно равенству (35);

углы  $\beta_2$  и  $\beta_{12}$  есть углы  $\beta$  и  $\beta_2$ , соответствующие углу  $\alpha_{12}$ , и определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_2 &= \lambda \sin (\gamma + \alpha_{12}) \\ \sin \beta_{12} &= \frac{R}{l} \sin \alpha_{12} - \frac{r}{l} \sin (\beta_2 - \psi). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

и

Подставляя значения  $S_{01}$  и  $(S_l)_{\min}$  из уравнений (37) и (38) в уравнение (36), получим

$$[\varepsilon \cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12}] R + [\varepsilon \cos (\beta_1 - \psi) - \cos (\beta_2 - \psi)] r + [\varepsilon \cos \beta_{11} - \cos \beta_{12}] l = (\varepsilon - 1)L + (\varepsilon + 1)R. \quad (36')$$

Имея в виду, что

$$\begin{aligned} \varepsilon \cos (\beta_1 - \psi) - \cos (\beta_2 - \psi) &= \varepsilon \cos \beta_1 \cos \psi + \\ &+ \varepsilon \sin \beta_1 \sin \psi - \cos \beta_2 \cos \psi - \sin \beta_2 \sin \psi = \\ &= (\varepsilon \cos \beta_1 - \cos \beta_2) \cos \psi + (\varepsilon \sin \beta_1 - \sin \beta_2) \sin \psi = \\ &= \frac{\varepsilon \sin \beta_1 - \sin \beta_2}{\cos \eta} \sin (\psi + \eta), \end{aligned}$$

где угол  $\eta$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\varepsilon \cos \beta_1 - \cos \beta_2}{\varepsilon \sin \beta_1 - \sin \beta_2}, \quad (41)$$

будем иметь

$$\sin (\psi + \eta) = \frac{\cos \eta}{\varepsilon \sin \beta_1 - \sin \beta_2} \left[ (\varepsilon - 1) \frac{L}{r} + (\varepsilon + 1) \frac{R}{r} - (\varepsilon \cos \beta_{11} - \cos \beta_{12}) \frac{l}{r} - (\varepsilon \cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12}) \frac{R}{r} \right]. \quad (42)$$

Определить величину угла  $\psi$  непосредственно из уравнения (42) нельзя, так как входящие в это уравнение величины  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$  и  $\eta$

являются функциями этого угла. Поэтому угол  $\psi$  определяют сначала приближенно, полагая в уравнении (42)

$$\alpha_{11} = 0^\circ, \quad \alpha_{12} = 180^\circ, \quad \beta_{11} = 0^\circ, \quad \beta_{12} = 0^\circ.$$

Принимая во внимание эти значения углов и пользуясь равенством (32)

$$l = L - r,$$

получим

$$\begin{aligned} \sin (\psi + \eta) &= \frac{1}{\varepsilon + 1} \frac{\cos \eta}{\sin \beta_1} \left[ (\varepsilon - 1) \frac{L}{r} + (\varepsilon + 1) \frac{R}{r} - (\varepsilon - 1) \frac{l}{r} - (\varepsilon + 1) \frac{R}{r} \right] = \\ &= \frac{\cos \eta}{\sin \beta_1} \frac{1}{\varepsilon + 1} (\varepsilon - 1) \frac{L - l}{r} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\cos \eta}{\sin \beta_1} \end{aligned}$$

или

$$\sin (\psi + \eta) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\cos \eta}{\sin \beta_1}, \quad (43)$$

где угол  $\eta$  определяется согласно равенству (41) из уравнения

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1}. \quad (44)$$

При наличии последнего соотношения уравнение (43) принимает вид

$$\sin \psi \cos \eta + \cos \psi \sin \eta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{\cos \eta}{\sin \beta_1}$$

или

$$\sin \beta_1 \sin \psi + \sin \beta_1 \operatorname{tg} \eta \cos \psi = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1},$$

откуда получаем

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \sin \beta_1 \sin \psi + \cos \beta_1 \cos \psi = 1. \quad (45)$$

Решим это уравнение. Обозначив

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = k, \quad (46)$$

будем иметь

$$\cos \beta_1 \cos \psi = 1 - k \sin \beta_1 \sin \psi,$$

$$(1 - \sin^2 \beta_1)(1 - \sin^2 \psi) = (1 - k \sin \beta_1 \sin \psi)^2,$$

$$1 - \sin^2 \beta_1 - \sin^2 \psi + \sin^2 \psi \sin^2 \beta_1 = 1 - 2k \sin \beta_1 \sin \psi + k^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \psi,$$

$$(\cos^2 \beta_1 + k^2 \sin^2 \beta_1) \sin^2 \psi - 2k \sin \beta_1 \sin \psi + \sin^2 \beta_1 = 0,$$

$$\frac{\sin \psi}{\sin \beta_1} = \frac{2k - \sqrt{4k^2 - 4(\cos^2 \beta_1 + k^2 \sin^2 \beta_1)}}{2(\cos^2 \beta_1 + k^2 \sin^2 \beta_1)},$$

но так как

$$4k^2 - 4(\cos^2 \beta_1 + k^2 \sin^2 \beta_1) = 4(k^2 - 1) \cos^2 \beta_1$$

или

$$\cos^2 \beta_1 + k^2 \sin^2 \beta_1 = k^2 - (k^2 - 1) \cos^2 \beta_1,$$

то

$$\sin \psi = \sin \beta_1 \frac{k - \sqrt{k^2 - 1} \cos \beta_1}{k^2 - (k^2 - 1) \cos^2 \beta_1} = \frac{\sin \beta_1}{k + \sqrt{k^2 - 1} \cos \beta_1}$$

или, принимая во внимание равенство (46), получим окончательно

$$\sin \psi = \frac{(\varepsilon - 1) \sin \beta_1}{(\varepsilon + 1) + 2 \sqrt{\varepsilon} \cos \beta_1}. \quad (47)$$

В этом последнем выражении угол  $\beta_1$  определяется из уравнения

$$\sin \beta_1 = \lambda \sin \gamma, \quad (48)$$

где, напомним, угол  $\gamma$  есть угол между осями бокового и главного цилиндров.

В табл. 7 даны значения угла  $\psi$  для разных  $\lambda$  и  $\epsilon$  для V-образных моторов с углом  $\gamma = 60^\circ$ .

На фиг. 18 зависимость угла  $\psi$  от  $\lambda$  и  $\epsilon$  представлена графически.

Таблица 7

Значения угла  $\psi$  для разных  $\lambda$  и  $\epsilon$  для V-образных моторов с углом  $\gamma = 60^\circ$

$\lambda$	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1
5,0	5° 50'	5° 40'	5° 30'	5° 21'	5° 12'	5° 03'	4° 54'	4° 47'	4° 41'
5,5	6° 08'	5° 58'	5° 48'	5° 38'	5° 28'	5° 19'	5° 11'	5° 03'	4° 55'
6,0	6° 25'	6° 14'	6° 03'	5° 52'	5° 43'	5° 33'	5° 24'	5° 16'	5° 09'
6,5	6° 41'	6° 28'	6° 17'	6° 06'	5° 56'	5° 46'	5° 37'	5° 29'	5° 21'
7,0	6° 54'	6° 42'	6° 30'	6° 18'	6° 08'	5° 58'	5° 49'	5° 40'	5° 32'

Определив приближенно угол  $\psi$ , определяют его более точно из уравнения (42), подставляя в последнее значения величин углов  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$  и  $\eta$ , подсчитанные по приближенному значению угла  $\psi$ . Для получения искомого значения угла  $\psi$  обыкновенно бывает достаточно одного просчета по уравнению (42).

В V-образных моторах цилиндры с прицепными шатунами располагаются относительно цилиндров с главными шатунами обычно в направлении вращения коленчатого вала мотора; однако встречаются моторы и с обратным взаимным расположением прицепного и главного шатунов. Выбор взаимного расположения шатунов должен производиться с учетом следующих требований динамики мотора:

1. Силы давления поршней на стенки в главном и в боковом цилиндрах должны быть наименьшими из возможных.

2. Диаграмма суммарной тангенциальной силы, действующей на шатунную шейку коленчатого вала, должна иметь наилучшее протекание в отношении вынужденных крутильных колебаний системы коленчатого вала; под наилучшим протеканием в этом смысле понимается такое, при котором амплитуды гармоник сил, вызывающих резонансные крутильные колебания вала, получаются наименьшими по величине.

На фиг. 19 даны для примера кривые путей, скоростей и ускорений поршней главного и бокового цилиндров мотора Curtiss-1800. В целях получения большей наглядности кривые для поршня главного цилиндра построены по углу поворота кривошипа  $\alpha$ , а кривые для поршня бокового цилиндра — по углу  $\alpha_1$ .

Основные кинематические параметры этого мотора следующие:

$$\epsilon = 6; R = 76,2 \text{ мм}; L = 247,65 \text{ мм}; \lambda = \frac{1}{3,25} = 0,3078;$$

$$r = 69,85 \text{ мм}; l = 177,8 \text{ мм}; \gamma = 60^\circ; \gamma_1 = 65^\circ 45'; \psi = 5^\circ 45'.$$

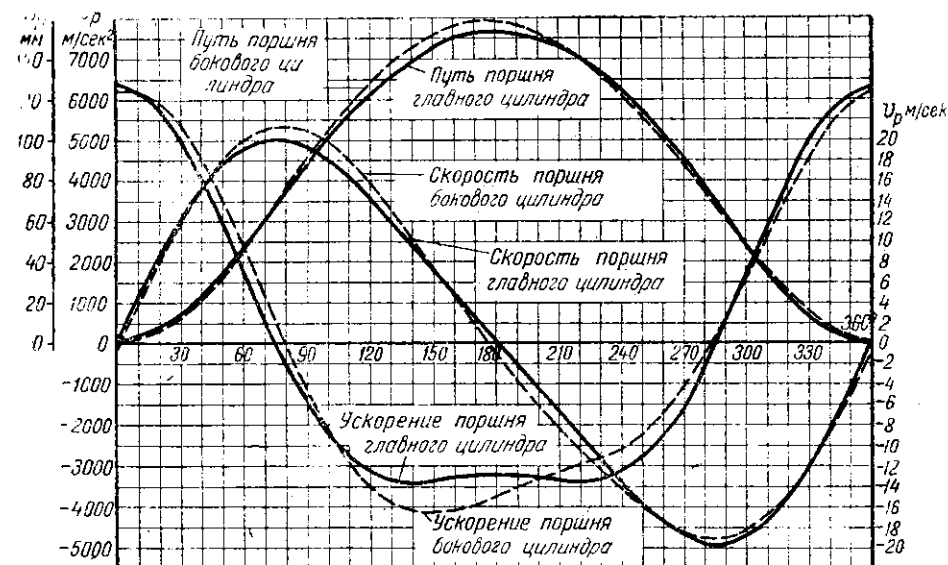
Как видим, в этом моторе условие  $l = L - r$  имеет место.

Угол  $\psi$ , определенный вышеизложенным методом, равен  $\psi = 6^\circ 26'$ .

Это значение угла  $\psi$  отличается от значения  $5^\circ 45'$ , имеющего место в выполненной конструкции. Чтобы выяснить, какое из этих значений более точное соблюдение условия равенства степеней сжатия в боковом и главном цилиндрах, были тщательно (методом подбора) подсчитаны для этих значений угла  $\psi$  углы  $\alpha_{11}$  и  $\alpha_{12}$ ; по найденным значениям этих углов были определены соответствующие степени сжатия в главном цилиндре.

Оказалось, что при  $\psi = 5^\circ 45'$  величина  $\epsilon = 5,956$ , а при  $\psi = 6^\circ 26'$  величина  $\epsilon = 6,004$ .

Таким образом значение  $\psi = 6^\circ 26'$  дает более близкое к  $\epsilon = 6$  значение; однако и значение  $\psi = 5^\circ 45'$  тоже дает практически хорошие результаты.



Фиг. 19. Кривые путей, скоростей и ускорений поршней главного и бокового цилиндров мотора Curtiss-1800.

Вспомогательные кинематические параметры этого мотора при угле  $\psi = 6^\circ 26'$  следующие:  $A = 0,06208$ ;  $B = 0,02607$ ;  $C = 1,0341$ ;  $D = 0,0197$ ;  $\Phi = 1^\circ 05'$ ;  $\Theta = 22^\circ 47'$ ;  $E = 1,0343$ ;  $F = 0,2693$ ;  $\alpha_{11} = 1^\circ 26'$ ;  $\beta_{11} = 3^\circ$ ;  $\alpha_{12} = 174^\circ 30'$ ;  $\beta_{12} = 10^\circ 27'$ ;  $S_{01} - (S_l)_{\min} = 158,44 \text{ мм}$ .

Увеличение хода поршня в боковом цилиндре по сравнению с таковым в главном равно 3,95%.

В заключение остановимся еще на одном типе кривошипно-шатунного механизма рассматриваемого типа. Среди существующих моторов имеются такие, у которых при одинаковости степеней сжатия в боковом и главном цилиндрах условие  $l = L - r$  не соблюдается, а угол  $\psi$  берется большим, чем определяемый этим условием. При выбранном угле  $\psi$  длина  $l$  прицепного шатуна определяется из уравнения (36'):

$$l = \frac{(\epsilon - 1)L + (\epsilon + 1)R - [\epsilon \cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12}]R - [\epsilon \cos (\beta_1 - \psi) - \cos (\beta_2 - \psi)]r}{\epsilon \cos \beta_{11} - \cos \beta_{12}}. \quad (49)$$

Так как входящие в правую часть этого уравнения величины  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  сами являются сложными функциями  $l$ , то определить  $l$  непосредственно из уравнения (49) не представляется возможным. Поэтому  $l$  определяется из этого уравнения методом подбора. Исходное, при-



ближенное значение для  $l$  получим, полагая в уравнении (49)  $\alpha_{11} = 0$ ,  $\alpha_{12} = 180^\circ$ ;  $\beta_{11} = 0^\circ$  и  $\beta_{12} = 0^\circ$ . При этих значениях будем иметь

$$l = L \frac{\varepsilon \cos(\beta_1 - \psi) - \cos(\beta_2 - \psi)}{\varepsilon - 1} r.$$

Так как при  $\alpha_{11} = 0$  и  $\alpha_{12} = 180^\circ$  имеем  $\beta_2 = -\beta_1$ , то

$$l = L \left[ \cos \psi \cos \beta_1 + \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \sin \psi \sin \beta_1 \right] r$$

или

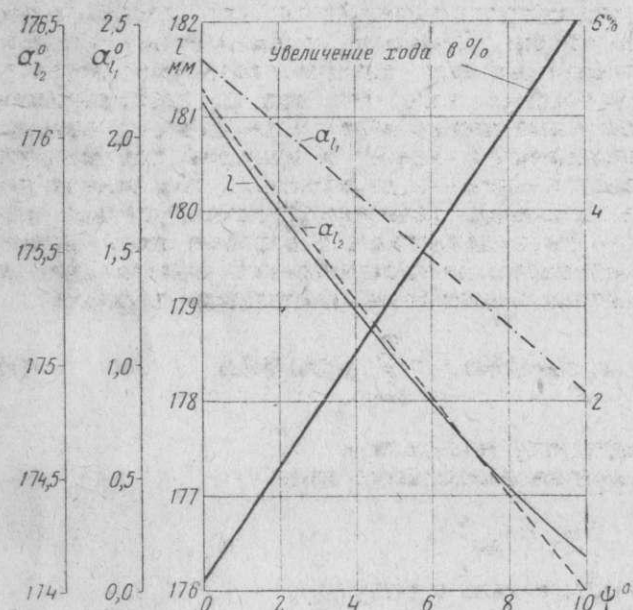
$$l = L \frac{\cos \beta_1}{\sin \mu} \sin(\psi + \mu) r, \quad (50)$$

где угол  $\mu$  определяется из уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \operatorname{tg} \beta_1. \quad (51)$$

Определив величину  $l$  по уравнению (50), находим более точное значение  $l$  по уравнению (49), подставляя в правую его часть величины  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , определенные по  $l$ , найденному из уравнения (50). Для получения искомого значения  $l$  обыкновенно достаточно одного пересчета по уравнению (49).

На фиг. 20 показано влияние угла  $\psi$  на кинематические параметры двигателя на частном примере мотора Curtiss-1800. Исследованию были подвергнуты величины:  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $l$  и ход поршня в боковом цилиндре. Как видно из кривых фиг. 20, ход поршня в боковом цилиндре при угле  $\psi = 0$  почти равен ходу поршня в главном цилиндре; с увеличением угла  $\psi$  ход поршня в боковом цилиндре увеличивается по закону, очень близкому к прямой, и при  $\psi = 10^\circ$  этот ход на 6,09% больше хода



Фиг. 20. Влияние угла  $\psi$  на кинематические параметры двигателя Curtiss-1800.

поршня в главном цилиндре. Таким образом при увеличении угла  $\psi$  до  $10^\circ$  является возможным увеличить мощность бокового цилиндра на 6,09% по сравнению с мощностью главного цилиндра. В существующих авиационных моторах угол  $\psi$  не делают  $> 10^\circ$ ; угол  $\psi = 10^\circ$  был осуществлен в моторе BMW-VIa.

Угол  $\alpha_{11}$  с увеличением угла  $\psi$  непрерывно уменьшается, достигая при  $\psi = 10^\circ$  величины  $\alpha_{11} = 53'15''$ .

Угол  $\alpha_{12}$  с увеличением угла  $\psi$  тоже непрерывно уменьшается, достигая при  $\psi = 10^\circ$  величины  $\alpha_{12} = 173^\circ 59'15''$ .

Угол поворота кривошипа, соответствующий ходу поршня в боковом цилиндре от верхнего мертвого положения до нижнего, будет при  $\psi = 0^\circ$  равен  $\alpha_{12} - \alpha_{11} = 176^\circ 11'40'' - 2^\circ 20' = 173^\circ 51'40''$  и при  $\psi = 10^\circ$  равен  $\alpha_{12} - \alpha_{11} = 173^\circ 59'15'' - 53'15'' = 173^\circ 6'$ .

Таким образом этот угол мало изменяется в зависимости от угла  $\psi$ .

Длина прицепного шатуна  $l$ , равная  $l = 181,17 \text{ мм}$  при  $\psi = 0$ , с увеличением угла  $\psi$  непрерывно уменьшается, достигая при  $\psi = 10^\circ$  величины  $l = 176,37 \text{ мм}$ .

## КИНЕМАТИКА КРИВОШИПНО-ШАТУННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА МОТОРА

В предыдущих главах мы рассмотрели кинематику кривошипно-шатунных механизмов разного типа, предполагая угловую скорость вращения коленчатого вала мотора  $\omega$  постоянной за цикл. Мы видели, что независимо от рабочего процесса в двигателе, т. е. независимо от того, является ли этот процесс четырехтактным или двухтактным, циклом таких кинематических величин, как угловые перемещение, скорость и ускорение шатуна, путь, скорость и ускорение поршня является один оборот коленчатого вала мотора.

В действительности угловая скорость вращения коленчатого вала мотора  $\omega$  не является постоянной, а периодически меняется по времени. Периодом для  $\omega$  будет период рабочего процесса в двигателе, т. е. для четырехтактного процесса — два оборота коленчатого вала мотора, а для двухтактного процесса — один оборот. Причиной переменности  $\omega$  являются крутильные колебания коленчатого вала, которые возникают вследствие упругости последнего и вследствие того, что при работе двигателя силы, действующие на кривошипные шейки вала, периодически изменяются, причем периодом их изменения и является как раз два оборота вала в четырехтактных моторах и один — в двухтактных. Как всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, угловая скорость коленчатого вала может быть представлена в форме ряда Фурье. Соответственно с этим угол поворота рассматриваемого колена вала от некоторого начального положения может быть представлен в форме

$$\alpha = \omega_c t + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos(k\theta t) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(k\theta t), \quad (1)$$

где

$t$  — время, соответствующее углу поворота  $\alpha$ ,

$\omega_c$  — средняя скорость вращения коленчатого вала

$$\omega_c = \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad (2)$$

$n$  — число оборотов коленчатого вала в минуту,

$k$  — порядок гармоники

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

$x_k$  и  $y_k$  — амплитуды фазовых слагающих гармоники  $k$ -го порядка,

$\theta$  — круговая частота гармонического момента первого порядка.

Для четырехтактных двигателей

$$\theta = \frac{\omega_c}{2}. \quad (3)$$

Для двухтактных двигателей

$$\theta = \omega_c. \quad (4)$$

Выражение (1) может быть представлено в несколько иной форме. Именно

$$\alpha = \omega_c t + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \sin(k\theta t + \gamma_k), \quad (5)$$

где  $\Phi_k$  — амплитуда гармоники  $k$ -го порядка

$$\Phi_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}, \quad (6)$$

а угол  $\gamma_k$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma_k = \frac{x_k}{y_k}. \quad (7)$$

В силу указанного выше явления крутильных колебаний коленчатого вала, входящее в правую часть равенства (5) выражение  $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \sin(k\theta t + \gamma_k)$  является неодинаковым для различных кривошипов коленчатого вала мотора, так как для последних величины  $\Phi_k$  и  $\gamma_k$  различны. Поэтому законы угловых перемещений отдельных кривошипов одного и того же коленчатого вала мотора будут различны.

Кривошипно-шатунный механизм любого рассмотренного нами в предыдущих главах типа является системой с одной степенью свободы. Поэтому путь, пройденный поршнем от его верхнего мертвого положения, будет функцией угла поворота кривошипа  $\alpha$

$$S_p = f(\alpha). \quad (8)$$

Угол поворота кривошипа  $\alpha$  от его начального положения будет определяться в рассматриваемом случае уравнением (5):

$$\alpha = \omega_c t + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \sin(k\theta t + \gamma_k).$$

Скорость  $v_p$  и ускорение  $j_p$  поршня будут:

$$v_p = \frac{dS_p}{dt} = \frac{df}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \quad (9)$$

и

$$j_p = \frac{dv_p}{dt} = \frac{d^2f}{d\alpha^2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{df}{d\alpha} \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (10)$$

Так как величины  $\frac{df}{d\alpha}$  и  $\frac{d^2f}{d\alpha^2}$  не зависят от закона изменения угла  $\alpha$  времени, а являются функциями только величины угла  $\alpha$ , типа кривошипно-шатунного механизма и параметров, определяющих последний, то в выражениях (9) и (10) можно дать следующий вид. Полагая

$$\alpha = \omega_c t,$$

получим

$$v_{p1} = \omega_c \frac{df}{d\alpha} \quad \text{и} \quad j_{p1} = \omega_c^2 \frac{d^2f}{d\alpha^2}, \quad (11)$$

где  $v_{p1}$  и  $j_{p1}$  являются соответственно скоростью и ускорением поршня рассматриваемого кривошипно-шатунного механизма при постоянной угловой скорости  $\omega_c$  вращения коленчатого вала мотора. Определение этих величин изложено в предыдущих главах. Определяя из выражений (11) величины  $\frac{df}{d\alpha}$  и  $\frac{d^2f}{d\alpha^2}$  и подставляя найденные их значения в равенства (9) и (10), получим искомые выражения для  $v_p$  и  $j_p$ :

$$v_p = \frac{v_{p1}}{\omega_c} \frac{d\alpha}{dt} \quad (12)$$

и

$$j_p = \frac{j_{p1}}{\omega_c^2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{v_{p1}}{\omega_c} \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (13)$$

Рассмотрим в качестве примера определение ускорения поршня нормального кривошипно-шатунного механизма при условии, что угол  $\alpha$  изменяется по закону

$$\alpha = \omega_c t + \Phi_k \sin\left(\frac{k}{2} \omega_c t + \alpha_0\right). \quad (14)$$

Этот закон имеет место при резко выраженном резонансе крутильных колебаний коленчатого вала мотора, вызванном гармоникой возбуждаю-

щего к-го порядка к двум оборотам мотора (предполагается четырехтактный двигатель). Дифференцируя уравнение (14) по  $t$ , получим:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_c + \frac{k}{2} \omega_c \Phi_k \cos\left(\frac{k}{2} \omega_c t + \alpha_0\right) \quad (15')$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\left(\frac{k}{2} \omega_c\right)^2 \Phi_k \sin\left(\frac{k}{2} \omega_c t + \alpha_0\right). \quad (16')$$

Так как амплитуда  $\Phi_k$  в практически встречающихся случаях является очень малой (порядка 1—2°), то согласно равенству (14) с достаточной для практических целей точностью можно в правых частях равенств (15') и (16') принять

$$\omega_c t = \alpha,$$

в результате чего для  $\frac{d\alpha}{dt}$  и  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$  получатся следующие выражения:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_c \left[1 + \frac{k}{2} \Phi_k \cos\left(\frac{k}{2} \alpha + \alpha_0\right)\right] \quad (15)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\left(\frac{k}{2} \omega_c\right)^2 \Phi_k \sin\left(\frac{k}{2} \alpha + \alpha_0\right). \quad (16)$$

Согласно формулам (29) и (37) главы I с достаточной точностью можно принять

$$v_{p1} = R \omega_c \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha\right) \quad (17)$$

$$j_{p1} = R \omega_c^2 (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha). \quad (18)$$

Принимая во внимание равенства (15), (16), (17) и (18), получим на основании равенства (13) искомое выражение для ускорения поршня:

$$\begin{aligned} j_p &= R (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha) \omega_c^2 \left[1 + \frac{k}{2} \Phi_k \cos\left(\frac{k}{2} \alpha + \alpha_0\right)\right]^2 - \\ &\quad - R \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha\right) \left(\frac{k}{2} \omega_c\right)^2 \Phi_k \sin\left(\frac{k}{2} \alpha + \alpha_0\right) = \\ &= R \omega_c^2 \left\{(\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha) \left[1 + \frac{k}{2} \Phi_k \cos\left(\frac{k}{2} \alpha + \alpha_0\right)\right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha\right) \frac{k^2}{4} \Phi_k \sin\left(\frac{k}{2} \alpha + \alpha_0\right)\right\} = \\ &= R \omega_c^2 \left\{(\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha) \left[1 + \frac{k^2}{8} \Phi_k^2 + k \Phi_k \cos\left(\frac{k}{2} \alpha + \alpha_0\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k^2}{8} \Phi_k^2 \cos(k\alpha + \alpha_0)\right] - \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha\right) \frac{k^2}{4} \Phi_k \sin\left(\frac{k}{2} \alpha + \alpha_0\right)\right\} \\ j &= R \omega_c^2 \left\{\left(1 + \frac{k^2}{8} \Phi_k^2\right) \cos \alpha + \lambda \left(1 + \frac{k^2}{8} \Phi_k^2\right) \cos 2\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{2} \left(1 + \frac{k}{4}\right) \Phi_k \cos\left[\left(\frac{k}{2} + 1\right) \alpha + \alpha_0\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k}{4}\right) \Phi_k \cos\left[\left(\frac{k}{2} - 1\right) \alpha + \alpha_0\right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \frac{k}{2} \left(1 + \frac{k}{8}\right) \Phi_k \cos\left[\left(\frac{k}{2} + 2\right) \alpha + \alpha_0\right] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k}{8}\right) \Phi_k \cos\left[\left(\frac{k}{2} - 2\right) \alpha + \alpha_0\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{16} \Phi_k^2 \cos[(k+1)\alpha + 2\alpha_0] + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{k^2}{16} \Phi_k^2 \cos [(k-1)\alpha + 2\alpha_0] + \\
& + \lambda \frac{k^2}{16} \Phi_k^2 \cos [(k+2)\alpha + 2\alpha_0] + \\
& + \lambda \frac{k^2}{16} \Phi_k^2 \cos [(k-2)\alpha + 2\alpha_0] \}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Полученное выражение для  $J_p$  показывает, что в четырехтактном двигателе переменная угловая скорость вращения коленчатого вала мотора, изменяющаяся по закону (15'), влияет на ускорение поршня следующим образом:

1. Периодом для ускорения поршня становится не один оборот коленчатого вала мотора, как это имеет место при  $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const}$ , а два оборота.

2. В выражении для ускорения поршня появляются в случае нормального кривошипно-шатунного механизма нечетные гармоники высших порядков, что не имеет места при  $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const}$ .

3. Среди тех гармоник, которые появились в выражении для ускорения поршня вследствие переменности угловой скорости вращения вала мотора, имеются такие, амплитуды которых по величине того же порядка, что и амплитуда гармоники 2-го порядка для случая, когда  $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const}$ .

В последнем легко убедиться, обратившись к реальным цифрам. Один из исследованных экспериментально авиационных моторов выявил крутильный резонанс коленчатого вала при 1230 об/мин. последнего. Резонирующей гармоникой оказалась гармоника 9-го порядка. Амплитуда гармоники 9-го порядка колебания последнего, шестого кривошипа коленчатого вала оказалась равной

$$\Phi_9 = 0,0141 \text{ радиана.}$$

Согласно равенству (19), амплитуда гармоники  $(9+2) = 11$  порядка ускорения поршня  $J_p$  равна

$$R\omega_c^2 \frac{k}{2} \left(1 + \frac{k}{4}\right) \Phi_k = \frac{9}{2} \left(1 + \frac{9}{4}\right) \cdot 0,0141 \cdot R\omega_c^2 = 0,206 R\omega_c^2.$$

В случае постоянной угловой скорости вращения вала  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_c$ , амплитуда гармоники 4-го порядка (гармоника 2-го порядка к обороту вала мотора) будет равна

$$\lambda R\omega_c^2 = 0,279 R\omega_c^2.$$

Напомним, что при  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_c$  амплитуда гармоники 11-го порядка ускорения поршня нормального кривошипно-шатунного механизма равна 0.

В большинстве практически встречающихся случаев закон изменения  $\alpha$  не является таким простым, как данный уравнением (14). Практически достаточно точно он может быть выражен во всех случаях уравнением

$$\alpha = \omega_c t + \sum_{k=1}^{k=15} \Phi_k \sin \left( \frac{k}{2} \omega_c t + \gamma_k \right). \quad (20)$$

В табл. 8 даны для примера величины  $\Phi_k$  и  $\gamma_k$  первых 15 гармоник для шестого кривошипа коленчатого вала вышеупомянутого мотора при резонансном числе оборотов последнего  $n = 1230$  в минуту.

Таблица 8

Величины  $\Phi_k$  и  $\gamma_k$  первых 15 гармоник для шестого кривошипа коленчатого вала одного авиационного мотора

$10^4 \cdot \Phi_k$	$\gamma_k$	$k$	$10^4 \cdot \Phi_k$	$\gamma_k$
679,7	341° 21'	9	14112	91° 32'
4,8	153° 14'	10	588,5	1° 39'
4736,6	228° 26'	11	97,1	200° 54'
27,6	341° 46'	12	2683,6	113° 51'
1945,8	149° 02'	13	16,1	33° 19'
0,0	—	14	96,2	231° 17'
1760,9	165° 14'	15	1,6	314° 50'
367,2	115° 01'			

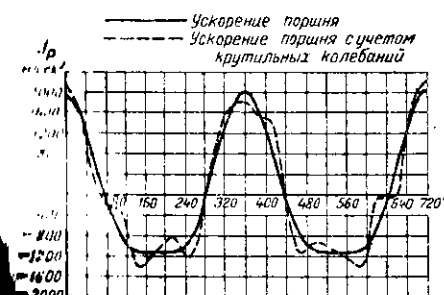
Подставляя в правую часть равенства (20) выражение

$$\alpha = \sum_{k=1}^{k=15} \Phi_k \sin \left( \frac{k}{2} \omega_c t + \gamma_k \right) = \sum_{k=1}^{k=15} \Phi_k \sin \left( \frac{k}{2} \alpha + \gamma_k \right) \quad (21)$$

получается сумма первых 15 гармоник крутильных колебаний рассматриваемого колена вала.

На фиг. 21 даны экспериментальная и расчетная (по 15 гармоникам) торсионная кривошипно-шатунного механизма при  $n = 1230$  об/мин. Пунктирная линия представляет расчетную торсионную кривошипно-шатунного механизма, полученную по равенству (21) и совпадающую с экспериментальной кривой. В нем указаны определенные значения  $\Phi_k$  и  $\gamma_k$  (подробно о построении теоретической торсионной кривошипно-шатунного механизма будет сказано в III части книги).

Фиг. 21. Экспериментальная и расчетная торсионные кривошипно-шатунного механизма.



Фиг. 22. Кривые ускорений поршня правого цилиндра шестого кривошипа с постоянной и периодически меняющейся скоростью вращения коленчатого вала мотора.

На фиг. 22 дана кривая ускорений поршня правого цилиндра шестого кривошипа, соответствующая торсионной кривошипно-шатунного механизма фиг. 21. На этой же фигуре сплошной линией дана кривая ускорений того же поршня без учета крутильных колебаний, считая  $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const}$ . Как видно из сравнения обеих кривых, крутильные колебания вносят значительные изменения в протекание кривой ускорений поршня, соответствующей  $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const}$ .

Аналогично тому как это было сделано для определения скорости и ускорения поршня при  $\frac{d\alpha}{dt} \neq \text{const}$ , можно определить угловые скорости  $\omega_i$  и ускорения  $\epsilon_i$  шатуна при переменной угловой скорости вращения коленчатого вала мотора.

Имеем:

$$\omega_l = \frac{\omega_{l1}}{\omega_c} \frac{d\alpha}{dt} \quad (22)$$

и

$$\theta_l = \frac{\theta_{l1}}{\omega_c^2} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{\omega_{l1}}{\omega_c} \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (23)$$

где  $\omega_{l1}$  и  $\theta_{l1}$  — угловые скорость и ускорение шатуна при  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_c = \text{const}$ .  
Формулы (22) и (23) верны для любого кривошипно-шатунного механизма.

При обычных кинематических расчетах величины  $\omega_l$ ,  $\theta_l$ ,  $v_p$  и  $j_p$  определяются без учета крутильных колебаний коленчатого вала мотора, принимая  $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const} = \omega$ .

Выводы настоящей главы находят себе применение при исследовании влияния крутильных колебаний коленчатого вала на уравновешенность сил инерции движущихся масс кривошипно-шатунного механизма.

## ЧАСТЬ II

### СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В КРИВОШИПНО-ШАТУННОМ МЕХАНИЗМЕ

В любом кривошипно-шатунном механизме действуют два типа сил: силы от рабочих газов в цилиндрах двигателя и силы от инерции движущихся масс кривошипно-шатунного механизма.

Силы от рабочих газов определяются на основании индикаторной диаграммы двигателя. Последняя получается из теплового расчета двигателя. При дальнейших выводах мы будем считать ее заданной. Имея индикаторную диаграмму, представляющую закон изменения давления газов на поршень в зависимости от пути поршня и зная для данного кривошипно-шатунного механизма закон изменения пути поршня по углу поворота кривошипа  $\alpha$ , легко найти давление газов на поршень, соответствующее любому углу поворота кривошипа  $\alpha$ . Эта задача решается элементарно просто и останавливаться на ней мы не будем.

Что касается сил от инерции движущихся масс кривошипно-шатунного механизма, то их можно разбить по характеру движения отдельных элементов этого механизма на три вида:

1. Силы инерции качательно движущихся масс — шатунов.
2. Силы инерции поступательно движущихся масс — поршней с принадлежащими к ним деталями.
3. Силы инерции вращательно движущихся масс — кривошипа.

Определение сил, действующих в кривошипно-шатунном механизме, начнем с сил инерции.

## Глава I

### СИЛЫ ОТ ИНЕРЦИИ ДВИГАЮЩИХСЯ МАСС КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

#### § 1. Силы инерции шатуна

Шатун любого кривошипно-шатунного механизма совершает плоское движение, перпендикулярное оси коленчатого вала мотора. Принимая шатун симметричным относительно его средней плоскости, которая является плоскостью его движения, мы можем применить к такому шатуну известную теорему о плоском движении тела, которая для рассматриваемого случая может быть сформулирована так:

Силы инерции тела, имеющего плоскость симметрии и совершающего плоское движение параллельно этой плоскости, приводятся к силе инерции массы тела, сосредоточенной в его центре тяжести и двигающейся по закону движения этого центра тяжести, и к паре сил, действующей в плоскости симметрии тела, с моментом, равным по величине произведению момента инерции тела, относительно оси, проходящей через его центр тяжести и перпендикулярной плоскости его симметрии, на угловое ускорение тела.



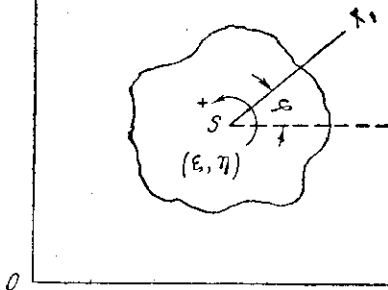
Если  $xOy$  (фиг. 23) — неподвижная система координат, лежащая в плоскости, с которой совпадает плоскость симметрии тела и параллельно которой тело движется, и если мы обозначим через:

$M$  — массу тела;

$I_S$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр тяжести — точку  $S$  — и перпендикулярной плоскости  $xOy$ ;

$\xi, \eta$  — координаты центра тяжести  $S$  тела;

$\varphi$  — угол поворота тела, определяемый углом между осью  $Sx_1$ , принадлежащей системе движущегося тела, и координатной осью  $Ox$ , то, согласно указанной выше теореме, силы инерции этого тела приведутся:



Фиг. 23. К определению сил инерции тела, совершающего плоское движение.

1) к силе инерции массы  $M$ , сосредоточенной в точке  $S$  и двигающейся по закону движения этой точки; слагающие этой силы в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  будут:

$$P_{ix} = -M \frac{d^2 \xi}{dt^2} \quad (1)$$

и

$$P_{iy} = -M \frac{d^2 \eta}{dt^2}; \quad (2)$$

2) к паре сил инерции с моментом

$$\Pi_j = I_S \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (3)$$

причем положительным направлением вращения тела будет направление вращения против часовой стрелки, и положительные значения пар  $\Pi_j$  будут действовать в этом же направлении.

Из теоремы о плоском движении тела вытекает непосредственно следующее положение:

В отношении внешнего действия силы инерции тела, имеющего плоскость симметрии и совершающего плоское движение, параллельное этой плоскости, эквивалентны силам инерции любого другого тела, имеющего плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью симметрии первого тела, если удовлетворяются следующие условия:

- 1) массы обоих тел одинаковы;
- 2) центры тяжести обоих тел движутся по одному закону;
- 3) моменты инерции обоих тел относительно их осей, проходящих через их центры тяжести и перпендикулярных их плоскостям симметрии, равны;
- 4) законы угловых перемещений обоих тел одинаковы.

Это положение приводит ко второму положению:

В отношении внешнего действия сил инерции тела, имеющего плоскость симметрии и совершающего движение в этой плоскости, тело может быть заменено произвольным числом  $k$  сосредоточенных масс  $m_i$  (произвольных по величине), жестко связанных между собой и расположенных в плоскости симметрии тела, если:

- 1) сумма масс  $m_i$  равна массе  $M$  данного тела

$$\sum_{i=1}^{i=k} m_i = M; \quad (4)$$

- 2) центр тяжести масс  $m_i$  совпадает с центром тяжести массы  $M$  данного тела и движется по закону движения этого центра тяжести;

- 3) если к этой системе сосредоточенных масс приложить фиктивную пару сил, действующую в плоскости их расположения и равную

$$\Pi'_j = \left( \sum_{i=1}^{i=k} m_i \varphi_i^2 - I_S \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (5)$$

расстояние  $i$ -й массы от центра тяжести системы масс  $m_i$ ;

указанный ранее момент инерции тела;

угловое ускорение тела.

Правильность этого положения доказывается непосредственным применением теоремы о плоском движении тела к системе этих масс  $m_i$ . При этом фиктивный момент  $\Pi'_j$ , складываясь с моментом пары сил инерции системы масс

$$\Pi_j'' = - \sum_{i=1}^{i=k} m_i \varphi_i^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (6)$$

дает в результате пару  $\Pi_j$ , равную

$$\Pi_j = \Pi_j' + \Pi_j'' = - I_S \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (7)$$

т. е. как раз пару сил инерции данного тела.

Перейдем к определению сил инерции нормального шатуна с центром тяжести, лежащим в плоскости, проходящей через оси поршневого пальца и цапфы кривошипа. На основании сказанного мы можем заменить шатун фиктивным шатуном, состоящим всего из двух масс. Одну из этих масс  $M_n$  мы сосредоточим на оси поршневого пальца, а другую  $M_k$  — на оси цапфы кривошипа. Для того чтобы такой фиктивный шатун имел результирующие силы инерции одинаковые с результирующими силами инерции данного шатуна, необходимо, чтобы сумма масс  $M_n$  и  $M_k$  равнялась массе  $M$  данного шатуна:

$$M_n + M_k = M, \quad (8)$$

и чтобы центр тяжести масс  $M_n$  и  $M_k$  совпадал с центром тяжести данного шатуна, т. е. чтобы удовлетворялись равенства

$$M_n = \frac{L_k}{L} M, \quad (9)$$

$$M_k = \frac{L_n}{L} M \quad (10)$$

$$L_n + L_k = L, \quad (11)$$

где  $L$  — длина шатуна,

$L_n$  — расстояние центра тяжести шатуна от оси поршневого пальца,

$L_k$  — расстояние центра тяжести шатуна от оси цапфы кривошипа.

Помимо указанного в целях достижения того, чтобы фиктивный шатун, состоящий из этих двух масс  $M_n$  и  $M_k$ , был в отношении внешнего действия сил инерции эквивалентен действительному шатуну, мы согласно приведенным выше положениям должны будем приложить к фиктивному шатуну еще и фиктивную пару сил, равную

$$\Pi_L = - I \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (12)$$

$$I = M L_n L_k - I_S; \quad (13)$$

$I$  — момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через его центр тяжести и нормальной к плоскости его движения;

угловое ускорение шатуна.

Как показывают расчеты, проведенные для ряда шатунов, пара  $\Pi_L$  [выражение (12)] является достаточно малой; поэтому при динамических расчетах ее обыкновенно во внимание не принимают. Таким образом с достаточной для практики точностью возможно в отношении внешнего действия заменить силы инерции данного шатуна силой инерции  $P_{L_n}$  массы

шатунa  $M_n$ , отнесенной к оси поршневого пальца, и силой инерции  $P_{Lk}$  массы шатуна  $M_k$ , отнесенной к оси цапфы кривошипа.

Силы  $P_{Ln}$  и  $P_{Lk}$  определяются из равенств

$$P_{Ln} = -M_n j_p \quad (14)$$

и

$$P_{Lk} = -M_k R \omega^2, \quad (15)$$

где  $j_p$  — ускорение поршня,

$R$  — радиус кривошипа,

$\omega$  — угловая скорость вращения коленчатого вала мотора.

Совершенно аналогично доказывается, что в случае прицепного шатуна с достаточной для практики точностью возможно в отношении внешнего действия заменить силы инерции прицепного шатуна силой инерции  $P_{Ln}$  массы прицепного шатуна  $M_{nl}$ , отнесенной к оси поршневого пальца, и силой инерции  $P_{Lk}$  массы прицепного шатуна  $M_{kl}$ , отнесенной к оси пальца прицепного шатуна, закрепленного на главном шатуне.

При этом имеют место соотношения

$$M_{nl} + M_{kl} = M_l, \quad (16)$$

$$M_{nl} = \frac{l_k}{l} M_l, \quad (17)$$

$$M_{kl} = \frac{l_n}{l} M_l, \quad (18)$$

$$l_n + l_k = l \quad (19)$$

и

$$P_{Ln} = -M_{nl} j_{pl}, \quad (20)$$

где  $M_l$  — масса прицепного шатуна,

$l$  — длина прицепного шатуна,

$l_n$  — расстояние центра тяжести прицепного шатуна от оси поршневого пальца,

$l_k$  — расстояние центра тяжести прицепного шатуна от оси его пальца, закрепленного на главном шатуне,

$j_{pl}$  — ускорение поршня в боковом цилиндре.

Заметим, что сила  $P_{Lk}$ , представляющая силу инерции массы  $M_{kl}$  отнесенной к оси пальца прицепного шатуна, закрепленного на главном шатуне, и движущейся по закону движения оси этого пальца, при динамических расчетах отдельно не рассматривается, а включается в состав сил инерции так называемого „приведенного главного шатуна“. Приведенным главным шатуном называется главный шатун мотора, масса которого увеличена массами  $M_{kl}$  прицепных шатунов, сосредоточенными на осях соответствующих пальцев этих шатунов, закрепленных на главном шатуне. Легко видеть, что именно с приведенным главным шатуном приходится иметь дело при определении внешнего действия сил инерции главного шатуна и сил инерции  $P_{Lk}$  масс  $M_{kl}$  прицепных шатунов, связанных с главным.

Так как приведенный главный шатун ничем не отличается от нормального шатуна, то, аналогично предыдущему, является возможным в отношении внешнего действия заменить силы инерции приведенного главного шатуна следующими двумя силами:

1. Силой инерции  $P'_{Lk}$  массы  $M'_k$  приведенного главного шатуна, отнесенной к оси цапфы кривошипа и движущейся по закону движения этой оси

$$P'_{Lk} = -M'_k R \omega^2. \quad (21)$$

Масса  $M'_k$  определяется следующим образом. В осях пальцев прицепных шатунов, закрепленных на главном шатуне, сосредотачиваются части  $M_{kl}$  масс соответствующих прицепных шатунов; находится центр

массы главного шатуна, масса которого увеличена этими массами  $M_{kl}$  прицепных шатунов; тогда

$$M'_k = M'_L \frac{L'_n}{L}, \quad (22)$$

$M'_L$  — есть сумма массы главного шатуна  $M_L$  и отнесенных к нему  $M_{kl}$  прицепных шатунов

$$M'_L = M_L + \sum M_{kl}, \quad (23)$$

$L'_n$  — расстояние центра тяжести приведенного главного шатуна от оси поршневого пальца.

2. Силой инерции  $P'_{Ln}$  массы  $M'_n$  приведенного главного шатуна, отнесенной к оси поршневого пальца главного шатуна и движущейся по закону движения этой оси

$$P'_{Ln} = -M'_n j_p, \quad (24)$$

$$M'_n = M'_L - M'_k. \quad (25)$$

В случае звездообразных моторов центр тяжести приведенного главного шатуна лежит в плоскости, проходящей через ось поршневого пальца и цапфы кривошипа.

В случае V-образных моторов с прицепным шатуном это условие не выполняется. Однако и в этом случае можно с достаточной для практики точностью заменить в отношении внешнего действия силы инерции приведенного главного шатуна силами инерции двух масс, принимая фиктивно, что центр тяжести приведенного главного шатуна находится на пересечении плоскости, проходящей через ось поршневого пальца и цапфы кривошипа, и перпендикуляра к этой плоскости, опущенного из действительного центра тяжести приведенного главного шатуна.

Рассматривать более детально силы инерции шатуна, центр тяжести которого не лежит на его осевой плоскости, мы здесь не будем, отсылая интересующихся к работе автора „Влияние на динамику двигателя несовпадения центра тяжести шатуна с его осью“, опубликованной в Сборнике № 1 Центрального научно-исследовательского института авиационного моторостроения им. П. И. Баранова, 1936 г.

## § 2. Определение центра тяжести и момента инерции шатуна

Определение веса шатуна  $G_n$ , отнесенного к поршню, и веса шатуна  $G_k$ , отнесенного к кривошипу, производится для существующих шатунов либо непосредственным взвешиванием на весах с разновесами, либо методом двух прокачиваний.

При первом способе поступают следующим образом:

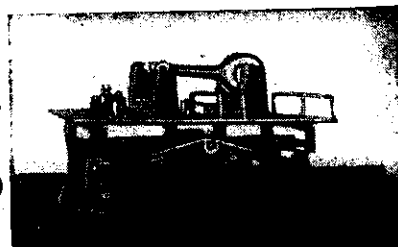
1) определяется полный вес шатуна  $G$ ; следовательно, имеется одно уравнение

$$G_n + G_k = G; \quad (26)$$

2) шатун опирается на две подставки, оповленные каждая на своей платформе, как показано на фиг. 24. Расстояние между вертикальными плоскостями, проходящими через точки опор шатуна, устанавливается равным длине шатуна  $L$ . Путем уравнивания весов определяется разность

$$G_k - G_n = \mathcal{J}, \quad (27)$$

дает второе уравнение.



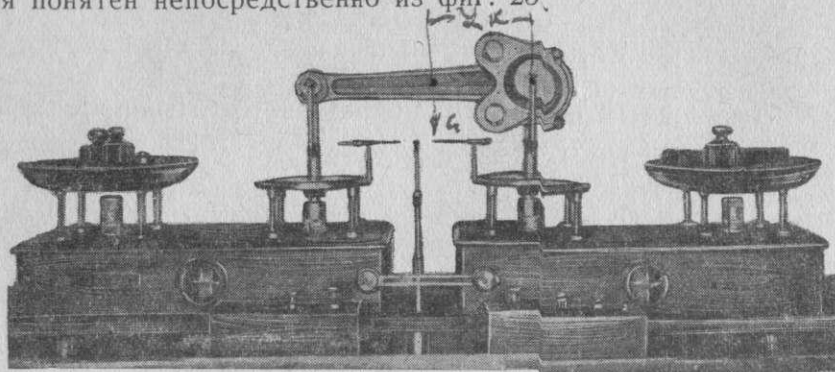
Фиг. 24. Определение разности веса шатуна посредством взвешивания.



Решая совместно уравнения (26) и (27), определяют  $G_k$  и  $G_n$

$$\left. \begin{aligned} G_k &= 0,5(G + Ж) \\ G_n &= G - G_k \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

На фиг. 25 показаны специальные весы фирмы Augusto Vivaldi в Милане для непосредственного определения величин  $G_n$  и  $G_k$ . Способ их действия понятен непосредственно из фиг. 25.



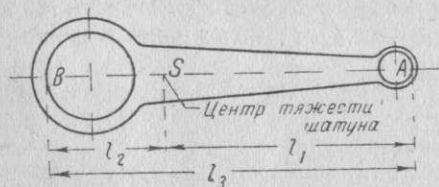
Фиг. 25. Весы для определения разности веса шатуна.

Определив  $G_k$  и  $G_n$ , расстояние центра тяжести шатуна  $L_k$  от оси цапфы кривошипа определяют из уравнения

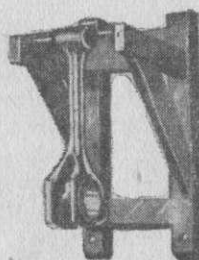
$$L_k = \frac{G_n}{G} L. \quad (29)$$

Расстояние центра тяжести шатуна от оси поршневого пальца будет

$$L_n = L - L_k. \quad (30)$$



Фиг. 26. К определению положения центра тяжести шатуна.



Фиг. 27. Кронштейн для прокачивания шатунов.

Определение весов  $G_k$  и  $G_n$  методом двух прокачиваний производится путем предварительного определения центра тяжести шатуна методом двух прокачиваний. Для этого подвешивают сначала шатун вертикально, опирая его на нож в точке А (фиг. 26 и 27) и заставляя его качаться с малой амплитудой, как физический маятник, определяют число его простых качаний (т. е. число прохождений через вертикальную линию) в минуту  $H_1$ ; затем подвешивают шатун вертикально, опирая его на нож в точке В, и определяют вновь число его простых качаний в минуту  $H_2$ . Если обозначим через:

$H$  — число простых качаний шатуна в минуту,

$l$  — расстояние между центром тяжести шатуна и осью вращения в см,

$I_x$  — момент инерции шатуна относительно оси вращения в  $кг^1 \cdot см^1 \cdot сек^2$ ,

$g = 981 см^1 \cdot сек^{-2}$  — ускорение силы тяжести, то, согласно известному закону качания с малой амплитудой физического маятника, будем иметь

$$I_x = \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 \frac{Gl}{H^2} = 364,76 \frac{Gl}{H^2}. \quad (31)$$

Обозначая, далее (фиг. 26)

$$\overline{AS} = l_1, \overline{BS} = l_2 \text{ и } \overline{AS} + \overline{BS} = \overline{AB} = l_3 = l_1 + l_2, \quad (32)$$

будем иметь

$$I_1 = \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 \frac{Gl_1}{H_1^2} \text{ и } I_2 = \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 \frac{Gl_2}{H_2^2}. \quad (33)$$

Так как

$$I_1 = I_s + \frac{G}{g} l_1^2 \text{ и } I_2 = I_s + \frac{G}{g} l_2^2, \quad (34)$$

то

$$I_1 - I_2 = \frac{G}{g} (l_1^2 - l_2^2) = \frac{G}{g} l_3 (l_1 - l_2)$$

или

$$\left(\frac{60}{\pi}\right)^2 \left(\frac{l_1}{H_1^2} - \frac{l_2}{H_2^2}\right) = \frac{1}{g} l_3 (l_1 - l_2).$$

Подставляя в последнее уравнение вместо  $l_2$  его значение

$$l_2 = l_3 - l_1$$

и решая его относительно  $l_1$ , получим

$$l_1 = \frac{l_3}{1 + \frac{\left(\frac{60}{\pi}\right)^2 g \frac{1}{H_1^2}}{l_3 - \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 g \frac{1}{H_2^2}}} = \frac{l_3}{1 + \frac{357826}{l_3 - \frac{357826}{H_2^2}}}. \quad (35)$$

Определив  $l_1$ , легко определить по размерам шатуна величины  $L_n$  и  $L_k$ , а следовательно, и  $G_n$  и  $G_k$ .

Момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через его центр тяжести и перпендикулярной плоскости его симметрии, определяется из равенства (34).

$$I_s = I_1 - \frac{G}{g} l_1^2 = \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 \frac{Gl_1}{H_1^2} - \frac{G}{g} l_1^2. \quad (36)$$

Определение центра тяжести и момента инерции проектируемого шатуна производится обычными методами прикладной механики.

### § 3 Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме от сил инерции поступательно двигающихся масс в главном цилиндре

Принимая во внимание сказанное в § 1 относительно сил инерции шатуна, является возможным при определении сил инерции включить часть  $M_n$  массы шатуна в массу комплекта поршня  $M_p$  и определять силу инерции суммарной поступательно двигающейся массы  $\mathcal{M}_n$ , равной

$$\mathcal{M}_n = M_n + M_p. \quad (37)$$

Сила инерции этой поступательно двигающейся массы  $\mathcal{M}_n$  будет равна

$$P_j = -\mathcal{M}_n \cdot j_p, \quad (38)$$

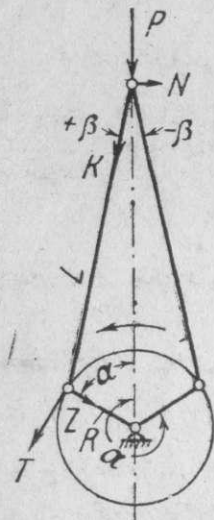
где  $j_p$  — ускорение поршня.

Сила  $P_j$  направлена по оси цилиндра и приложена к оси поршневого пальца. В отдельных элементах кривошипно-шатунного механизма она



создает действующие силы, к определению которых мы теперь и перейдем. Обозначим через:

$N_j$  — силу, действующую нормально на стенку цилиндра от силы  $P_j$ ;  
 $K_j$  — силу, действующую по оси шатуна от силы  $P_j$ ;  
 $T_j$  — тангенциальное усилие на ось цапфы кривошипа от силы  $P_j$  и  
 $Z_j$  — нормальное усилие на ось цапфы кривошипа от силы  $P_j$ .



+  $P$  — ↓  
 -  $P$  — ↑  
 +  $N$  — →  
 -  $N$  — ←  
 +  $K$  — шатун сжимается  
 -  $K$  — " — растягивается  
 +  $T$  — сила направлена по направлению вращения мотора  
 -  $T$  — сила направлена по направлению обратному вращению мотора  
 +  $Z$  — сила направлена к оси вала  
 -  $Z$  — " — " — от " — "

Фиг. 28. Знаки сил, действующих в нормальном кривошипном механизме.

Принимая знаки сил, действующих в кривошипном механизме, в зависимости от их направления согласно фиг. 28, получим, как видно из фиг. 29, следующие соотношения для сил:

$$N_j = P_j \operatorname{tg} \beta, \quad (39)$$

$$K_j = \frac{P_j}{\cos \beta}, \quad (40)$$

$$T_j = P_j \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (41)$$

$$Z_j = P_j \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (42)$$

Рассмотрим, какое действие оказывает сила  $P_j$  на крутящий момент двигателя на валу а) и б) на подмоторную раму. Обращаясь к фиг. 29, приложим в точке  $O$  две противоположно направленные силы, параллельные и равные по величине силе  $T_j$ . Перенесем затем в точку  $O$  силу  $Z_j$ . Нетрудно видеть, что, складывая приложенные в точке  $O$  силы  $T_j$  и  $Z_j$ , мы получим силу  $K_j$ , а раскладывая последнюю по оси цилиндра и нормально к оси цилиндра, получим соответственно силу  $P_j$  и силу  $-N_j$ . Таким образом действие силы  $P_j$  приводится к:

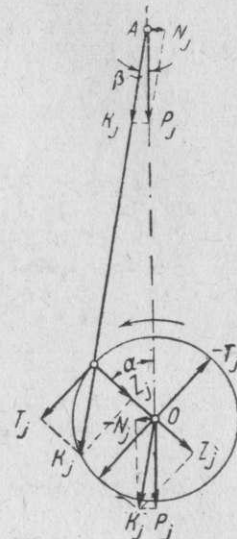
1) силе

$$P_j = -\mathfrak{M}_n j_p,$$

направленной по оси цилиндра и передающейся на подмоторную раму;

2) паре сил  $(T_j, -T_j)$  с плечом  $R$  и моментом

$$M_{vj} = T_j R = P_j R \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}, \quad (43)$$



Фиг. 29. К определению сил, действующих в нормальном кривошипном механизме от инерции поступательно движущихся масс.

который входит в общий крутящий момент двигателя на коленчатом валу; 3) паре сил  $(N_j, -N_j)$  с плечом  $(L \cos \beta + R \cos \alpha)$  и моментом  $M_{\phi j}$ , передающимся на подмоторную раму

$$M_{\phi j} = -N_j (L \cos \beta + R \cos \alpha) = -P_j \operatorname{tg} \beta R \left( \frac{\cos \beta}{\lambda} + \cos \alpha \right) = -P_j R \frac{1}{\cos \beta} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = -P_j R \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = -M_{vj}$$

или

$$M_{\phi j} = -M_{vj}. \quad (44)$$

Таким образом момент  $M_{\phi j}$  равен по величине и обратен по направлению моменту  $M_{vj}$ .

Величина ускорения  $j_p$ , входящего в выражение (38) для  $P_j$ , определяется при  $\omega = \text{const}$  по соответствующим формулам § 6, главы I, части I. Для случая  $\omega \neq \text{const}$  величина  $j_p$  определяется по формуле (13), главы V, части I.

#### § 4. Выражения для $P_j$ , $T_j$ , $M_{vj}$ и $M_{\phi j}$ в форме рядов Фурье для случая нормального кривошипно-шатунного механизма при $\omega = \text{const}$

Подставляя в равенство (38) выражение для  $j_p$  из равенства (36) главы I, части I

$$j_p = R \omega^2 (\cos \alpha + 4 \rho_2 \cos 2\alpha - 16 \rho_4 \cos 4\alpha + 36 \rho_6 \cos 6\alpha - \dots),$$

получим выражение для силы  $P_j$  в форме ряда Фурье по аргументу  $\alpha$

$$P_j = -\mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos \alpha - 4 \rho_2 \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 2\alpha + 16 \rho_4 \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 4\alpha - 36 \rho_6 \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 6\alpha + \dots = \sum_{k=1,2,4,6} A_{jk} \cos k\alpha. \quad (45)$$

Принято называть

$A_{j1} \cos \alpha = -\mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos \alpha$  — силой инерции первого порядка,

$A_{j2} \cos 2\alpha = -4 \rho_2 \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 2\alpha$  — силой инерции второго порядка,

$A_{j4} \cos 4\alpha = -16 \rho_4 \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 4\alpha$  — силой инерции четвертого порядка,

$A_{j6} \cos 6\alpha = -36 \rho_6 \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 6\alpha$  — силой инерции шестого порядка и т. д.

Ограничиваясь силами инерции первого и второго порядков, получим следующее приближенное выражение для силы  $P_j$

$$P_j = -\mathfrak{M}_n R \omega^2 (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha) = A_{j1} \cos \alpha + A_{j2} \cos 2\alpha. \quad (46)$$

Приближенное выражение для тангенциальной силы  $T_j$  от инерции массы  $\mathfrak{M}_n$  получим, пользуясь уравнением работ

$$P_j v_p = T_j R \omega. \quad (47)$$

Отсюда

$$T_j = \frac{1}{R \omega} P_j v_p = -\frac{\mathfrak{M}_n}{R \omega} j_p v_p = -\frac{\mathfrak{M}_n}{R \omega} v_p \frac{dv_p}{dt} = \frac{\mathfrak{M}_n}{R} v_p \frac{dv_p}{d\alpha} = -\frac{\mathfrak{M}_n}{2R} \frac{d}{d\alpha} (v_p^2)$$

или

$$T_j = -\frac{\mathfrak{M}_n}{2R} \frac{d}{d\alpha} (v_p^2). \quad (48)$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $v_p$  из равенства (29) главы I, части I

$$v_p = R \omega \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha \right),$$



получим искомое приближенное выражение для силы  $T_j$

$$T_j = -\frac{1}{2} M_n R \omega^2 \frac{d}{d\alpha} \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha \right)^2 =$$

$$= -M_n R \omega^2 \left( \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha \right) (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha)$$

или

$$T_j = \frac{\lambda}{4} M_n R \omega^2 \sin \alpha - \frac{1}{2} M_n R \omega^2 \sin 2\alpha - \frac{3}{4} \lambda M_n R \omega^2 \sin 3\alpha -$$

$$- \frac{\lambda^2}{4} M_n R \omega^2 \sin 4\alpha = \sum_{k=1}^{k=4} B_{\tau k} \sin k\alpha. \quad (49)$$

Возможно показать, что ряд Фурье для силы  $T_j$  имеет вид

$$T_j = M_n R \omega^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin k\alpha = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_{\tau k} \sin k\alpha, \quad (50)$$

причем коэффициенты  $B_k$  для нечетных гармоник определяются по формуле

$$B_k = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{k}{2} [(k-1) \rho_{k-1} + (k+1) \rho_{k+1}], \quad (51)$$

а для четных — по формуле

$$B_k = -\frac{1}{2} \left( \frac{k}{2} \right)^3 \rho_{\frac{k}{2}}^2 + \frac{k}{2} \sum_{l=1, 2, 3, \dots} (-1)^{m+l} 2m \cdot 2l \rho_{2m} \rho_{2l} -$$

$$- \frac{k}{2} \sum_{l=1, 2, 3, \dots} (-1)^{m+l} 2m \cdot 2l \rho_{2m} \rho_{2l}, \quad (52)$$

Входящие в выражения (51) и (52) величины  $\rho$  определяются по формуле

$$\rho_m = \lambda^{m-1} \sum_{k=0, 1, 2, 3, \dots} \left[ \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k - 1}}{2^{\frac{m}{2} + 2k - 1}} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{m}{2} + k} (m + 2k)_k \lambda^{2k} \right], \quad (53)$$

причем  $\rho = 1$ ;  $\rho_3 = \rho_5 = \rho_7 = \dots = 0$ .

Величина  $(n)_p$  является коэффициентом бинома

$$(n)_p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p}.$$

Останавливаясь здесь на выводах соотношений (51), (52) и (53) мы не будем, отсылая интересующихся к работе автора „Тангенциальные силы от инерции поступательно двигающихся масс“, опубликованной в журнале „Техника воздушного флота“, № 5 за 1933 г.

В табл. 9 даны для различных  $\lambda$  значения коэффициентов  $B_k$ , подсчитанные по формулам (51) и (52).

Выражения для  $M_{vj}$  и  $M_{\phi j}$  в форме рядов Фурье получаются на основании равенств (43), (44) и (50):

$$M_{vj} = -M_{\phi j} = M_n R^2 \omega^2 \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin k\alpha = R \sum_{k=1}^{k=\infty} B_{\tau k} \sin k\alpha. \quad (54)$$

По аналогии с силами инерции принято называть:

$R B_{\tau 1} \sin \alpha = B_1 M_n R^2 \omega^2 \sin \alpha$  — моментом первого порядка,

$R B_{\tau 2} \sin 2\alpha = B_2 M_n R^2 \omega^2 \sin 2\alpha$  — моментом второго порядка,

$R B_{\tau 3} \sin 3\alpha = B_3 M_n R^2 \omega^2 \sin 3\alpha$  — моментом третьего порядка и т. д.

Значения коэффициентов  $B_k$  для различных  $\lambda$

1 λ	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
	0,0753	0,0729	0,0708	0,0689	0,0670	0,0652	0,0635
	—0,5	—0,5	—0,5	—0,5	—0,5	—0,5	—0,5
	—0,228	—0,221	—0,214	—0,203	—0,209	—0,197	—0,192
	—0,0227	—0,0213	—0,0201	—0,0190	—0,0180	—0,0170	—0,0161
	0,(2)431	0,(2)394	0,(2)360	0,(2)331	0,(2)305	0,(2)281	0,(2)259
	0,(3)766	0,(3)679	0,(3)603	0,(3)539	0,(3)484	0,(3)433	0,(3)390
	—0,(3)1029	—0,(4)883	—0,(4)762	—0,(4)659	—0,(4)566	—0,(4)494	—0,(4)440
	—0,(4)231	—0,(4)193	—0,(4)162	—0,(4)136	—0,(4)115	—0,(5)970	—0,(5)830
	0,(5)249	0,(5)202	0,(5)164	0,(5)134	0,(5)110	0,(6)910	0,(6)760
	0,(6)653	0,(6)513	0,(6)405	0,(6)323	0,(6)259	0,(6)208	0,(6)169
	—0,(7)604	—0,(7)459	—0,(7)352	—0,(7)272	—0,(7)212	—0,(7)166	—0,(7)131
	—0,(7)1222	—0,(8)901	—0,(8)672	—0,(8)506	—0,(8)383	—0,(8)293	—0,(8)225

Примечание. Число, стоящее в скобках после запятой, обозначает число нулей запятой.

Заметим, что выражения для  $P_j$  и  $M_{\phi j}$  в форме рядов Фурье потребуются при исследовании уравновешивания сил инерции поступательно двигающихся масс мотора. Выражение в форме ряда Фурье для  $M_{vj}$  требуется при определении действующих на вал моментов, вызывающих его крутильные колебания.

#### 5. Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме, от сил инерции поступательно двигающихся масс в боковом цилиндре

Обозначая индексом  $l$  величины, относящиеся к кривошипно-шатунному механизму с прицепным шатуном, будем иметь

$$M_{nl} = M_{nl} + M_{pl} \quad (55)$$

$$P_{jl} = -M_{nl} \cdot j_{pl}, \quad (56)$$

$M_{pl}$  — масса комплекта поршня бокового цилиндра,

$M_{nl}$  — отнесенная к оси поршневого пальца часть массы прицепного шатуна,

$M_{nl}$  — суммарная поступательно двигающаяся масса в боковом цилиндре,

$j_{pl}$  — ускорение поршня бокового цилиндра,

$P_{jl}$  — сила инерции суммарной поступательно двигающейся массы в боковом цилиндре.

Оставляя для сил, действующих в рассматриваемом механизме, обозначая § 3 с индексом  $l$  и обозначая через  $N_{jl}$  силу, приложенную к оси поршневого пальца главного цилиндра и действующую нормально к стенке цилиндра, вызываемую силой  $P_{jl}$ , получим, согласно фиг. 30, следующие соотношения для сил

$$N_{jl} = P_{jl} \operatorname{tg} \beta_l \quad (57)$$

$$K_{jl} = \frac{P_{jl}}{\cos \beta_l}. \quad (58)$$

Переносим силу  $K_{jl}$  в точку  $C$  и прикладываем в точке  $B$  две противоположно направленные силы, равные и параллельные силе  $K_{jl}$ , получим, что действие силы  $K_{jl}$  на главный шатун приводится к силе  $K_{jl}$ , приложенной в точке  $B$ , и к паре сил  $(K_{jl}, -K_{jl})$  с плечом  $r \sin(\beta - \beta_l)$ , где

$\psi = \gamma_l - \gamma$ . Эта пара создает в точках  $A$  и  $B$  две равные и противоположно направленные силы  $N'_{jl}$ , перпендикулярные к оси главного цилиндра. Сила  $N'_{jl}$  равна

$$N'_{jl} = \frac{r \sin(\beta - \beta_l - \psi)}{\cos \beta} K_{jl}. \quad (59)$$

Раскладывая приложенные в точке  $B$  силы  $K_{jl}$  и  $-N'_{jl}$  по направлениям нормально к радиусу кривошипа и по радиусу кривошипа, получим, что тангенциальная сила от инерции поступательно движущихся масс в боковом цилиндре будет

$$T_{jl} = K_{jl} \sin(\alpha_l + \beta_l) + N'_{jl} \cos \alpha. \quad (60)$$

Сила, действующая от инерции этих масс в направлении радиуса кривошипа, будет

$$Z_{jl} = K_{jl} \cos(\alpha_l + \beta_l) - N'_{jl} \sin \alpha. \quad (61)$$

Чтобы определить действие силы  $P_{jl}$  как на крутящий момент двигателя на валу, так и на подмоторную раму, приложим к точке  $O$  две противоположно направленные силы, равные и параллельные

силе  $K_{jl}$ , и две противоположно направленные силы, равные и параллельные силе  $N'_{jl}$ . Приложенные в точках  $B$  и  $O$  пары сил  $(-N'_{jl}, N_{jl})$  и  $(K_{jl}, -K_{jl})$ , складываясь, дадут момент  $M_{вjl}$ , равный

$$M_{вjl} = R[K_{jl} \sin(\alpha_l + \beta_l) + N'_{jl} \cos \alpha] = T_{jl}R. \quad (62)$$

Этот момент входит в общий крутящий момент двигателя на коленчатом валу.

Разлагая силу  $K_{jl}$ , приложенную в точке  $O$ , на две слагающие: 1) на силу, направленную по оси бокового цилиндра, и 2) на силу, направленную нормально к этой оси, мы получим, что первая сила будет равна силе  $P_{jl}$ , а вторая силе  $-N'_{jl}$ . Последняя сила и сила  $N_{jl}$ , приложенная в точке  $D$ , дают пару сил с плечом  $\overline{DO}$ ; силы  $N'_{jl}$ , приложенные в точках  $O$  и  $A$ , дают пару сил с плечом  $\overline{AO}$ . Последние две пары сил, складываясь, и дают момент, передающийся на подмоторную раму и вызываемый силой  $P_{jl}$ . Величина этого момента будет равна (фиг. 30)

$$\begin{aligned} M_{фjl} &= -(N'_{jl} \cdot \overline{AO} + N_{jl} \cdot \overline{DO}) = -(N'_{jl} \cdot \overline{Ab} - N'_{jl} \cdot \overline{Ob} + N_{jl} \cdot \frac{\overline{Of}}{\sin \beta_l}) = \\ &= -(K_{jl} \cdot \overline{fa} - N'_{jl} \cdot \overline{Ob} + K_{jl} \cdot \overline{Of}) = -(K_{jl} \cdot \overline{Oa} - N'_{jl} \cdot \overline{Ob}) = \\ &= -R[K_{jl} \sin(\alpha_l + \beta_l) + N'_{jl} \cos \alpha] = -M_{вjl}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M_{фjl} = -M_{вjl}. \quad (63)$$

Таким образом действие силы  $P_{jl}$  приводится к:  
1) силе

$$P_{jl} = -\mathfrak{M}_{nl} j_{pl},$$

направленной по оси бокового цилиндра и передающейся на подмоторную раму;

2) моменту  $M_{вjl}$  [выражение (62)], который входит в общий крутящий момент двигателя на коленчатом валу;

3) моменту  $M_{фjl}$  [выражение (63)], передающемуся на подмоторную раму.

Величина ускорения  $j_{pl}$ , входящего в выражение (56) для  $P_{jl}$ , определяется при  $\omega = \text{const}$  по соответствующим формулам § 5, главы III, части I для случая  $\gamma_l = \gamma$ , и по формулам § 3, главы IV, части I для случая  $\gamma_l \neq \gamma$ . При  $\omega \neq \text{const}$  величина  $j_p$  определяется по формуле (13), главы V, части I.

#### 6. Выражения для $P_{jl}$ , $T_{jl}$ , $M_{вjl}$ и $M_{фjl}$ в форме полиномов для случая кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном при $\omega = \text{const}$

Выражение для силы  $P_{jl}$  в форме тригонометрического полинома получим для общего случая, когда  $\gamma_l \neq \gamma$ , подставляя в равенство (56) выражение для  $j_{pl}$  из равенства (30), § 3, главы IV, части I. Имеем

$$j_{pl} = R\omega^2 (A_1 \cos \alpha + 4A_2 \cos 2\alpha + B_1 \sin \alpha + 4B_2 \sin 2\alpha) \quad (64)$$

$$\begin{aligned} P_{jl} &= -A_1 \mathfrak{M}_{nl} R \omega^2 \cos \alpha - B_1 \mathfrak{M}_{nl} R \omega^2 \sin \alpha - \\ &- 4A_2 \mathfrak{M}_{nl} R \omega^2 \cos 2\alpha - 4B_2 \mathfrak{M}_{nl} R \omega^2 \sin 2\alpha = \\ &= A_{j1} \cos \alpha + B_{j1} \sin \alpha + A_{j2} \cos 2\alpha + B_{j2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (65)$$

Это — приближенное выражение для  $P_{jl}$ , содержащее гармоники первых двух порядков. Входящие в него коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  являются функциями угла  $\gamma$  и определяются согласно равенствам (20), § 2, главы IV, части I.

Заметим, что для случая  $\gamma_l = \gamma$  выражение для ускорения  $j_{pl}$  имеет тот же вид, если ограничиваться гармониками первых двух порядков [см. равенство (46), § 5, главы III, части I]. Поэтому и в данном случае сила  $P_{jl}$  будет определяться равенством (65). Однако необходимо иметь в виду, что в этом случае коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  определяются согласно равенствам (33а), § 3, главы III, части I.

Искомое приближенное выражение для тангенциальной силы  $T_{jl}$  получим, пользуясь совершенно общим соотношением (48) § 4

$$T_{jl} = -\frac{\mathfrak{M}_{nl}}{2R} \frac{d}{d\alpha} (v_{pl})^2. \quad (66)$$

Подставляя в это равенство выражение для  $v_{pl}$  из равенства (26), § 3, главы IV, части I

$$v_{pl} = R\omega (A_1 \sin \alpha + 2A_2 \sin 2\alpha - B_1 \cos \alpha - 2B_2 \cos 2\alpha), \quad (67)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} T_{jl} &= -\frac{\mathfrak{M}_{nl}}{R} v_{pl} \frac{dv_{pl}}{d\alpha} = -\mathfrak{M}_{nl} R \omega^2 (A_1 \sin \alpha + 2A_2 \sin 2\alpha - \\ &- B_1 \cos \alpha - 2B_2 \cos 2\alpha) (A_1 \cos \alpha + 4A_2 \cos 2\alpha + B_1 \sin \alpha + 4B_2 \sin 2\alpha). \end{aligned}$$

Произведя перемножение стоящих в скобках тригонометрических полиномов и делая элементарные преобразования, получим окончательно (вывод опускаем)



$$\begin{aligned}
T_{ji} &= (A_1 A_2 + B_1 B_2) \mathfrak{M}_n R \omega^2 \sin \alpha - (A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos \alpha - \\
&\quad - \frac{1}{2} (A_1^2 - B_1^2) \mathfrak{M}_n R \omega^2 \sin 2\alpha + A_1 B_1 \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 2\alpha - \\
&\quad - 3 (A_1 A_2 - B_1 B_2) \mathfrak{M}_n R \omega^2 \sin 3\alpha + 3 (A_1 B_2 + A_2 B_1) \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 3\alpha - \\
&\quad - (A_2^2 - B_2^2) \mathfrak{M}_n R \omega^2 \sin 4\alpha + 8 A_2 B_2 \mathfrak{M}_n R \omega^2 \cos 4\alpha = \\
&= \sum_{k=1}^{k=4} A_{\tau k} \cos k\alpha + \sum_{k=1}^{k=4} B_{\tau k} \sin k\alpha. \quad (68)
\end{aligned}$$

Так как для случая  $\gamma_i = \gamma$  при условии ограничения гармониками первых двух порядков выражение для  $v_{pi}$  имеет тот же вид, что и для случая  $\gamma_i = \gamma$  [см. равенство (40), § 4, главы III, части I], то выражение (68) справедливо также и в случае  $\gamma_i = \gamma$ ; необходимо только иметь в виду для этих случаев вышеуказанное различие коэффициентов  $A_1, A_2, B_1$  и  $B_2$ .

Выражения для  $M_{nji}$  и  $M_{phi ji}$  в форме тригонометрических полиномов получатся на основании равенств (62), (63) и (68)

$$M_{nji} = -M_{phi ji} = T_{ji} R = R \sum_{k=1}^{k=4} A_{\tau k} \cos k\alpha + R \sum_{k=1}^{k=4} B_{\tau k} \sin k\alpha. \quad (69)$$

Найденные выражения для  $P_{ji}, M_{phi ji}$  и  $M_{nji}$  потребуются для целей, указанных в § 4.

Приближенные выражения в развернутом виде коэффициентов  $A_{j1}, B_{j1}, A_{j2}$  и  $B_{j2}$ , входящих в уравнение (65), будут (преобразования опускаем):

а) для случая  $\gamma_i \neq \gamma$

$$\begin{aligned}
A_{j1} &= -[\cos \gamma + (1 - \frac{1}{8} \lambda^2) \frac{r}{l} \sin \psi \sin \gamma] \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
B_{j1} &= \left[ -\left(1 - \frac{3}{8} \lambda^2\right) \frac{r}{l} \sin \psi \cos \gamma + \sin \gamma + \frac{r}{l} \sin \psi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{8} \lambda^2\right) \frac{r^2}{l^2} \sin 2\psi \right] \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
A_{j2} &= \left[ -2\lambda \frac{r}{l} \cos \psi \cos \gamma + \frac{R}{l} \cos 2\gamma + \lambda \frac{r}{l} \cos \psi + \right. \\
&\quad \left. + \lambda \frac{r^2}{l^2} \cos 2\psi \right] \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
B_{j2} &= \left[ -2\lambda \frac{r}{l} \cos \psi \sin \gamma + \frac{R}{l} \sin 2\gamma \right] \mathfrak{M}_n R \omega^2
\end{aligned}$$

и б) для случая  $\gamma_i = \gamma$

$$\begin{aligned}
A_{j1} &= -\cos \gamma \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
B_{j1} &= -\sin \gamma \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
A_{j2} &= \left[ -2\lambda \frac{r}{l} \cos \gamma + \frac{R}{l} \cos 2\gamma + \lambda \frac{r}{l} + \lambda \frac{r^2}{l^2} \right] \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
B_{j2} &= \left[ -2\lambda \frac{r}{l} \sin \gamma + \frac{R}{l} \sin 2\gamma \right] \mathfrak{M}_n R \omega^2.
\end{aligned} \quad (71)$$

Коэффициенты  $A_{\tau k}$  и  $B_{\tau k}$ , входящие в уравнения (68) и (69), будут равны

$$\begin{aligned}
A_{\tau 1} &= -(A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathfrak{M}_n R \omega^2, & A_{\tau 3} &= 3(A_1 B_2 + A_2 B_1) \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
B_{\tau 1} &= (A_1 A_2 + B_1 B_2) \mathfrak{M}_n R \omega^2, & B_{\tau 3} &= -3(A_1 A_2 - B_1 B_2) \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
A_{\tau 2} &= A_1 B_1 \mathfrak{M}_n R \omega^2, & A_{\tau 4} &= 8 A_2 B_2 \mathfrak{M}_n R \omega^2, \\
B_{\tau 2} &= \frac{1}{2} (A_1^2 - B_1^2) \mathfrak{M}_n R \omega^2, & B_{\tau 4} &= -4 (A_2^2 - B_2^2) \mathfrak{M}_n R \omega^2.
\end{aligned} \quad (72)$$

Входящие в эти выражения коэффициенты  $A_1, A_2, B_1$  и  $B_2$  являются функциями угла  $\gamma$  и определяются:

при  $\gamma_i = \gamma$  согласно равенствам (33а), § 3, главы III, части I и при  $\gamma_i \neq \gamma$  согласно равенствам (20), § 2, главы IV, части I.

## § 7. Силы инерции вращательно движущихся масс

К вращательно движущимся массам кривошипа принадлежат:

1) отнесенная к оси цапфы кривошипа масса  $M'_k$  приведенного главного шатуна, или, если на цапфу кривошипа действуют центральные шатуны соответствующие части масс этих последних;

2) масса самого кривошипа  $M_{кр}$ ;

3) масса соединенного с кривошипом противовеса (если таковой имеется)  $M_{пр}$ .

Принимая угловую скорость вращения коленчатого вала  $\omega$  постоянной, получим следующие выражения для сил инерции этих масс, которые будут действовать в этом случае центробежными силами инерции:

1. Сила инерции массы  $M'_k$  будет проходить через ось цапфы кривошипа и коленчатого вала, будет направлена перпендикулярно этим осям и действовать в направлении от оси коленчатого вала; ее величина будет

$$P'_{Lk} = M'_k R \omega^2. \quad (73)$$

2. Сила инерции массы кривошипа  $M'_{кр}$  будет проходить через центр тяжести кривошипа и через коленчатого вала; она будет направлена перпендикулярно последней и действовать в направлении от оси коленчатого вала; ее величина будет

$$P_{кр} = M'_{кр} R_S \omega^2 = M_{кр} R \omega^2, \quad (74)$$

$R_S$  — расстояние центра тяжести кривошипа от оси коленчатого вала,

$M_{кр}$  — приведенная к радиусу  $R$  масса кривошипа, определяемая из уравнения

$$M_{кр} = \frac{R_S}{R} M'_{кр}. \quad (75)$$

3. Сила инерции массы соединенного с кривошипом противовеса  $M_{пр}$  будет проходить через ось коленчатого вала мотора и будет направлена перпендикулярно последней; она будет действовать от оси коленчатого вала. обозначим (фиг. 31):

$dx$  — ширину элементарного объема противовеса;

$F_x$  — его площадь в плоскости, перпендикулярной чертежу;

$\rho_x$  — расстояние его центра тяжести от оси вращения;

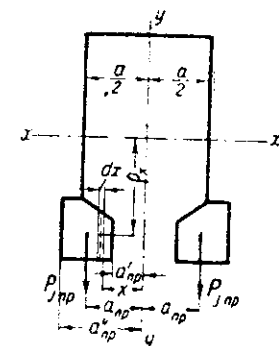
$M_{ст, пр}$  — объемный статический момент противовеса относительно плоскости  $dx$ , перпендикулярной чертежу;

$\gamma$  — удельный вес материала противовеса;

$g$  — ускорение силы тяжести,

тогда сила инерции противовеса будет равна

$$P_{пр} = \int_{x_{пр}}^{x_{кр}} \frac{\gamma}{g} F_x \rho_x dx = \frac{\gamma}{g} \omega^2 M_{ст, пр} R \quad (76)$$



Фиг. 31. Схема сил инерции противовесов.

Плечо  $a_{np}$  силы  $P_{np}$  найдется из уравнения

$$a_{np} = \frac{\int_{a_{np}}^{a_{np}} F_x \cdot \rho_x x dx}{\int_{a_{np}}^{a_{np}} F_x \cdot \rho_x dx} \quad (77)$$

причем значения величин  $a_{np}$  и  $a'_{np}$  видны из фиг. 31.

Для того чтобы найти  $a_{np}$  по уравнению (77), необходимо построить диаграмму изменения  $(F_x \rho_x)$  по  $x$  (фиг. 32) и найти обычным способом центр тяжести заштрихованной площади. Расстояние центра тяжести этой площади от оси  $OY$ , соответствующей оси  $YY$ , показанной на фиг. 31, и будет  $a_{np}$ .

Если угловая скорость вращения коленчатого вала мотора непостоянна, то силы инерции вращающейся вместе с валом массы определяются следующим образом. Пусть обозначают:

$\alpha$  — угол поворота коленчатого вала от некоторого начального положения  $\alpha = \varphi(t)$ ;

$\frac{d\alpha}{dt}$  — угловую скорость вращения коленчатого вала;

$\frac{d^2\alpha}{dt^2}$  — угловое ускорение коленчатого вала.

Положим, что мы имеем вращающуюся вместе с коленчатым валом массу любой формы, но симметричную относительно ее средней плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Согласно теореме о силах инерции тела, совершающего плоское движение, силы инерции рассматриваемой массы приводятся:

1) К силе инерции вращающейся массы  $M$ , сосредоточенной в ее центре тяжести  $S$  и двигающейся по закону движения этого центра тяжести; эта сила инерции складывается в нашем случае из двух сил инерции:

а) из центробежной силы инерции  $Z$ , равной

$$Z = -MR_s \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \quad (78)$$

и б) из тангенциальной силы инерции  $T$ , равной

$$T = -MR_s \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (79)$$

где  $R_s$  есть расстояние центра тяжести  $S$  вращающейся массы от оси вращения.

2) К паре сил инерции  $\Pi$ , равной

$$\Pi = -I_s \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (80)$$

где  $I_s$  есть момент инерции вращающейся массы относительно оси, проходящей через ее центр тяжести  $S$  и нормальной к плоскости ее движения.

Если указанной выше симметрии вращающейся массы нет, то искомые силы инерции такой массы найдутся суммированием сил инерции отдельных элементарных масс, на которые можно разбить данную массу плоскостями, нормальными к оси ее вращения. Силы инерции этих элементарных масс находятся согласно формул (8), (79) и (80).

Что касается знаков сил и пар, то они зависят от направления этих сил и пар. Нами принято:

для силы  $Z$  — знак — для силы, направленной от оси коленчатого вала мотора;

для силы  $T$  — знак + для силы, направленной в сторону вращения коленчатого вала мотора;

для пары  $\Pi$  — знак + для пары, действующей в направлении вращения коленчатого вала мотора.

В дальнейшем при исследовании уравновешивания сил инерции вращательно двигающихся масс кривошипно-шатунного механизма нам потребуется величина суммарной силы инерции вращающихся масс одного кривошипа.

Эта сила инерции будет равна

$$P_{jk} = -M_k R \omega^2 \quad (81)$$

где

$$M_k = M_{кр} + \sum M_k \quad (82)$$

и представляет собой сумму приведенной к радиусу кривошипа массы кривошипа  $M_{кр}$  и отнесенных к цапфе данного кривошипа масс  $M_k$  шатунов, действующих на данную цапфу (в случае приведенного главного шатуна  $\sum M_k = M_k$ , где  $M_k$  — отнесенная к оси цапфы кривошипа часть массы приведенного главного шатуна).

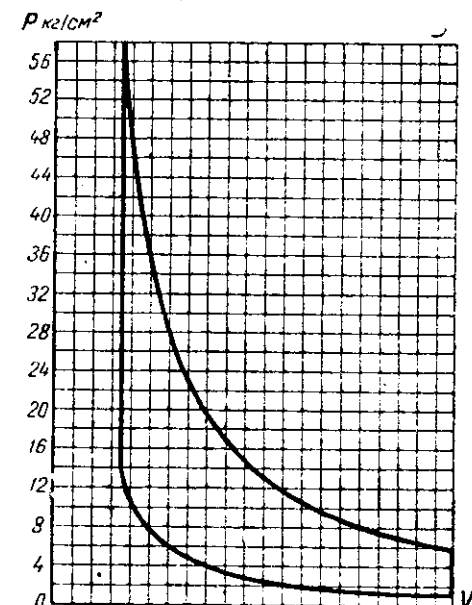
## Глава II

### СИЛЫ ОТ РАБОЧИХ ГАЗОВ В ЦИЛИНДРАХ ДВИГАТЕЛЯ

Давление газов в цилиндре  $p_r$  для данного угла поворота коленчатого вала  $\alpha$  определяется из индикаторной диаграммы двигателя; последняя строится на основании теплового расчета двигателя и предполагается известной. Определение давления  $p_r$  ведется следующим образом: для данного угла поворота  $\alpha$  определяется путь, пройденный поршнем от верхней мертвой точки; этот путь в соответствующем масштабе откладывается на координатной оси объемов индикаторной диаграммы; соответствующая ордината этой диаграммы и дает искомое  $p_r$ . На фиг. 33 дано определение  $p_r$  по углу поворота коленчатого вала  $\alpha$ , для разных цилиндров 9-цилиндрового, звездообразного мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

Сила давления газов на поршень  $P_r$ , соответствующая давлению газов в цилиндре  $p_r$ , будет

$$P_r = (p_r - p_0) F_n \quad (1)$$



	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	$\alpha$
1ц	720	700	680	660	640	620	600	580	560	540	$\alpha_i$
2ц	400°26'	420	440	460	480	500	520	540	560	579°19'	$\alpha_i$
3ц	82°25'	100	120	140	160	180	200	220	240	256°11'	$\alpha_i$
4ц	483°29'	500	520	540	560	580	600	620	640	653°01'	$\alpha_i$
5ц	161°35'	180	200	220	240	260	280	300	320	335°31'	$\alpha_i$
6ц	558°25'	580	600	620	640	660	680	700	720	724°23'	$\alpha_i$
7ц	236°31'	260	280	300	320	340	360	380	400	426°59'	$\alpha_i$
8ц	637°35'	660	680	700	720	740	760	780	800	803°49'	$\alpha_i$
9ц	319°31'	340	360	380	400	420	440	460	480	500°11'	$\alpha_i$

Фиг. 33. К определению давления газов на поршень в зависимости от угла поворота коленчатого вала  $\alpha$ .



где  $F_n$  — площадь поршня,  
 $p_0$  — атмосферное давление.

Сила  $P_r$  направлена по оси цилиндра. При определении создаваемых ею усилий в отдельных элементах кривошипно-шатунного механизма мы считаем ее приложенной к оси поршневого пальца.

### § 1. Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме, от рабочих газов в главном цилиндре

Обозначим через:

$N_r$  — силу, действующую нормально на стенку цилиндра от силы  $P_r$ ,

$K_r$  — силу, действующую по оси шатуна от силы  $P_r$ ,

$T_r$  — тангенциальное усилие на ось цапфы кривошипа от силы  $P_r$  и

$Z_r$  — нормальное усилие на ось цапфы кривошипа от силы  $P_r$ .

Принимая согласно фиг. 28 знаки сил, действующих в кривошипном механизме, в зависимости от их направления, получим, как видно из фиг. 34, следующие соотношения для сил:

$$N_r = P_r \operatorname{tg} \beta, \quad (2)$$

$$K_r = \frac{P_r}{\cos \beta}, \quad (3)$$

$$T_r = P_r \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}, \quad (4)$$

$$Z_r = P_r \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (5)$$

Для исследования действия силы  $P_r$  на крутящий момент двигателя на валу и на подмоторную раму поступаем аналогично тому, как это мы делали при исследовании действия силы  $P_r$ . Согласно фиг. 34 имеем, что действие сил давления газов в главном цилиндре сводится:

1. К двум противоположно направленным по оси цилиндра силам  $P_r$  и  $-P_r$ , действующим — первая на коренные подшипники коленчатого вала, а вторая — на дно цилиндра. Эти силы взаимно уравновешиваются, вызывая соответствующие напряжения в системе цилиндр картер мотора.

2. К паре сил  $(T_r, -T_r)$  с плечом  $R$  и моментом

$$M_{kr} = T_r R, \quad (6)$$

который входит в общий крутящий момент двигателя на коленчатом валу.

3. К паре сил  $(N_r, -N_r)$  с плечом  $OA = L \cos \beta + R \cos \alpha$  и моментом  $M_{fr}$ , равным и обратно направленным моменту  $M_{kr}$

$$M_{fr} = -N_r (L \cos \beta + R \cos \alpha) = -M_{kr}. \quad (7)$$

Этот момент передается на подмоторную раму.

### § 2. Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме, от рабочих газов в боковом цилиндре

Обозначая индексом  $l$  величины, относящиеся к кривошипно-шатунному механизму с прицепным шатуном и оставляя для сил, действующих в этом механизме, обозначения § 1 с индексом  $l$ , получим, согласно

фиг. 35, следующие соотношения для сил:

$$N_l = P_l \operatorname{tg} \beta_l \quad (8)$$

$$K_{rl} = \frac{P_l}{\cos \beta_l}. \quad (9)$$

Обозначая через  $N'_{rl}$  приложенную к оси поршневого пальца главного цилиндра и действующую нормально на стенку последнего силу, вызываемую силой  $P_l$  в боковом цилиндре, будем иметь

$$N'_{rl} = P_l \frac{r \sin(\beta - \beta_l - \psi)}{\cos \beta \cos \beta_l}, \quad (10)$$

$$T_{rl} = K_{rl} \sin(\alpha_l + \beta_l) + N'_{rl} \cos \alpha \quad (11)$$

$$Z_{rl} = K_{rl} \cos(\alpha_l + \beta_l) - N'_{rl} \sin \alpha. \quad (12)$$

Все эти силы определяются аналогично определению соответствующих сил от инерции поступательно двигающихся масс в боковом цилиндре (см. главу I, § 5).

Согласно фиг. 35 можем сказать, что действие сил давления газов в боковом цилиндре сводится:

1. К двум направленным по оси бокового цилиндра силам  $P_l$  и  $-P_l$ , действующим — первая на коренные подшипники коленчатого вала двигателя, а вторая — на дно цилиндра. Эти силы взаимно уравновешиваются, вызывая соответствующие напряжения в системе цилиндр — картер мотора.

2. К крутящему моменту на коленчатом валу двигателя

$$M_{krl} = R [K_{rl} \sin(\alpha_l + \beta_l) + N'_{rl} \cos \alpha], \quad (13)$$

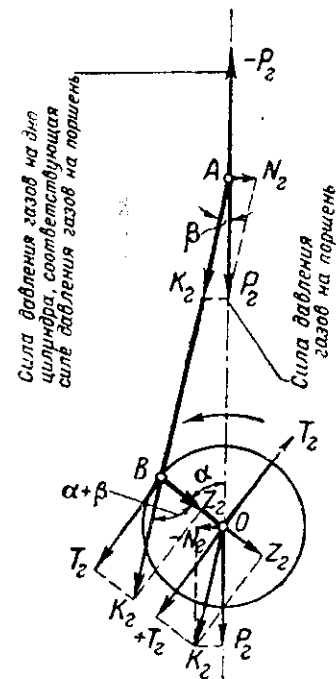
который входит в общий крутящий момент двигателя на коленчатом валу.

3. К опрокидывающему двигатель моменту  $M_{frl}$ , равному и обратно направленному моменту  $M_{krl}$

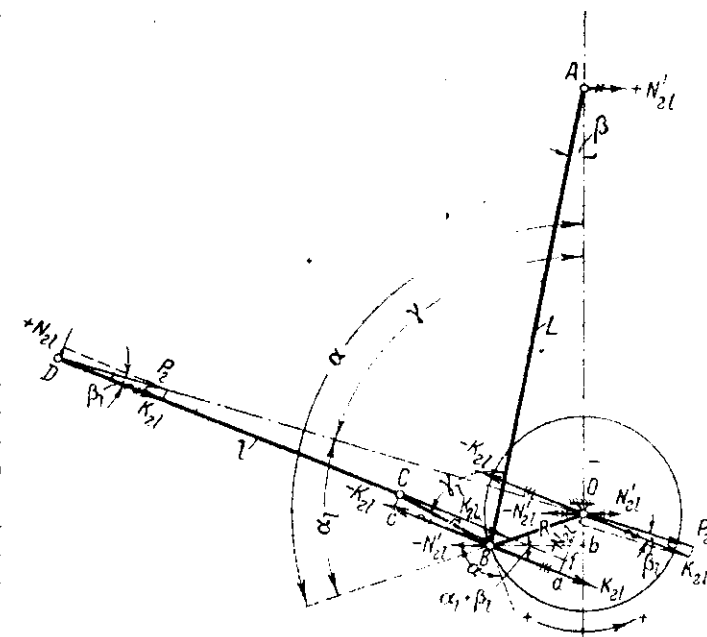
$$M_{frl} = -M_{krl}. \quad (14)$$

Этот момент передается на подмоторную раму.

Заметим, что силы  $K$ ,  $T$  и  $Z$ , создаваемые в любом кривошипно-шатунном механизме действием на поршень силы  $P$  (от сил давления газов или сил инерции поступательно двигающихся в цилиндре масс, или суммарного действия этих сил), могут быть определены, пользуясь



Фиг. 34. К определению сил, действующих в кривошипно-шатунном механизме, от давления газов в главном цилиндре.



Фиг. 35. К определению сил, действующих в кривошипно-шатунном механизме, от давления газов в боковом цилиндре.

принципом виртуальных перемещений. Обозначая коэффициенты  $k_K = \frac{\partial S_{pl}}{\partial R}$ ;  $k_T = \frac{\partial S_{pl}}{\partial \omega}$ ;  $k_Z = \frac{\partial S_{pl}}{\partial Z}$ , на основании этого принципа получим

$$k_K = -\frac{\partial S_{pl}}{\partial l}; \quad k_T = +\frac{\partial S_{pl}}{\partial \omega} = +\frac{v_{pl}}{R\omega}; \quad k_Z = -\frac{\partial S_{pl}}{\partial R}.$$

В качестве примера рассмотрим случай кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном, когда  $\gamma_l = \gamma + \psi$ . На основании равенств (1) и (2) главы IV и равенства (4) главы I, части I

$$(6, IV) \quad S_{pl} = S_{ol} - [R \cos \alpha_l + r \cos (\beta - \psi) + l \cos \beta_l],$$

$$(2, IV) \quad \sin \beta_l = \frac{R}{l} \sin \alpha_l - \frac{r}{l} \sin (\beta - \psi),$$

$$(4, I) \quad \sin \beta = \frac{R}{L} \sin \alpha = \lambda \sin \alpha,$$

имеем

$$k_K = -\frac{\partial S_{pl}}{\partial l} = \cos \beta_l - l \sin \beta_l \frac{\partial \beta_l}{\partial l} = \cos \beta_l + l \sin \beta_l \frac{\sin \beta_l}{l \cos \beta_l} = \frac{1}{\cos \beta_l},$$

$$k_K = \frac{1}{\cos \beta_l}.$$

Этот результат получается, конечно, проще непосредственным разложением силы  $P$ .

$$k_Z = -\frac{\partial S_{pl}}{\partial R} = \cos \alpha_l - r \sin (\beta - \psi) \frac{\partial \beta}{\partial R} - l \sin \beta_l \frac{\partial \beta_l}{\partial R}.$$

Так как

$$\frac{\partial \beta}{\partial R} = \frac{1}{L} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

и

$$\frac{\partial \beta_l}{\partial R} = \frac{1}{\cos \beta_l} \left[ \frac{1}{l} \sin \alpha_l - \frac{r}{l} \cos (\beta - \psi) \frac{1}{L} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right],$$

то

$$k_Z = \cos \alpha_l - r \sin (\beta - \psi) \frac{1}{L} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} -$$

$$- l \sin \beta_l \frac{1}{\cos \beta_l} \left[ \frac{1}{l} \sin \alpha_l - \frac{r}{l} \cos (\beta - \psi) \frac{1}{L} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right] =$$

$$= \frac{\cos (\alpha_l + \beta_l)}{\cos \beta_l} - \frac{r}{L} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \left[ \sin (\beta - \psi) - \frac{\sin \beta_l \cos (\beta - \psi)}{\cos \beta_l} \right],$$

$$k_Z = \frac{\cos (\alpha_l + \beta_l)}{\cos \beta_l} - \frac{r}{L} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \beta_l} \sin (\beta - \beta_l - \psi).$$

Это выражение для  $k_Z$  совпадает с выражением, получаемым на основании выведенных нами выше выражений для сил  $Z_{rl}$ ,  $K_{rl}$  и  $N'_{rl}$  [см. равенства (12), (9) и (10)].

Что касается выражения для коэффициента силы  $T$

$$k_T = \frac{v_{pl}}{R\omega},$$

то эта зависимость очевидна и общеизвестна.

### § 3. Гармонический анализ тангенциальных сил от газов

При исследовании вынужденных крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора необходимо иметь для крутящего момента на валу от газов в цилиндре выражение в форме тригонометрического полинома. Как мы видели выше [см. главу II, § I, равенство (6)], крутящий момент  $M_{вг}$  равен

$$M_{вг} = T_r R.$$

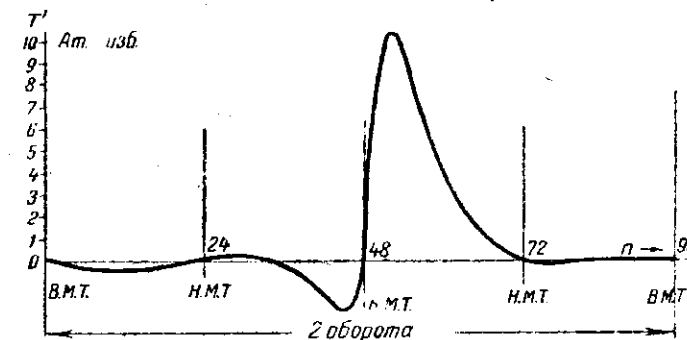
Входящая в это выражение тангенциальная сила от действия газов в одном цилиндре является периодической функцией угла поворота ко-

чатого вала  $\alpha$ , а следовательно, и времени. Периодом  $T$  этой функции является для двухтактных моторов время одного оборота мотора, а для четырехтактных — время двух оборотов мотора. Таким образом, если  $n$  есть число оборотов коленчатого вала мотора в минуту, а  $\omega$  — угловая скорость вращения этого вала

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{то для двухтактных моторов } T = \frac{60}{n} \\ &\text{и} \\ &\text{для четырехтактных моторов } T = \frac{120}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

На фиг. 36 дана в виде примера кривая тангенциальных усилий от сил давления газов в одном цилиндре мотора BMW-IV, отнесенных к  $1 \text{ см}^2$  площади поршня.



Фиг. 36. Кривая тангенциальных усилий от сил давления газов в одном цилиндре мотора BMW-IV, отнесенных к  $1 \text{ см}^2$  площади поршня;  $\epsilon = 6$ ,  $n = 1240$  об/мин.

Как известно, всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, а следовательно, и тангенциальная сила  $T_r$  может быть представлена в виде ряда

$$T_r = F(\theta t) = T_0 + A_{r1} \cos(\theta t) + A_{r2} \cos(2\theta t) + A_{r3} \cos(3\theta t) + \dots$$

$$+ B_{r1} \sin(\theta t) + B_{r2} \sin(2\theta t) + B_{r3} \sin(3\theta t) + \dots =$$

$$= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk} \cos(k\theta t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{rk} \sin(k\theta t), \quad (17)$$

где

$T_0$  — среднее тангенциальное усилие на цапфу кривошипа от одного цилиндра;

$A_{rk}$  и  $B_{rk}$  — амплитуды фазовых слагающих гармоники  $k$ -го порядка тангенциальной силы  $T_r$  (коэффициенты Фурье);

$\theta$  — круговая частота гармонического момента 1-го порядка (в сек.<sup>-1</sup>);  $k$  — порядок гармонической составляющей силы  $T_r$ .

В силу вышеуказанной периодичности силы  $T_r$ , имеем: для двухтактных моторов

$$\left. \begin{aligned} &\text{и для четырехтактных моторов } \theta = \omega \\ &\theta = \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Входящие в равенство (17) коэффициенты Фурье  $A_{r1}, A_{r2}, \dots, B_{r1}, B_{r2}, \dots$  являются величинами постоянными и могут быть определены из равенства (17), если обе части этого равенства умножить на  $\sin(k\theta t)$  или



$\cos(k\theta t)$  и проинтегрировать за полный период  $2\pi$ . При этом исчезнут все интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} \sin(h\theta t) \cos(k\theta t) d(\theta t),$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(h\theta t) \sin(k\theta t) d(\theta t),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(h\theta t) \cos(k\theta t) d(\theta t);$$

если  $h \neq k$ , и будут иметь место соотношения

$$\left. \begin{aligned} B_{rk} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta t) \sin(k\theta t) d(\theta t) \\ A_{rk} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta t) \cos(k\theta t) d(\theta t). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Интегралы этих уравнений могут быть легко определены во всех случаях, по крайней мере, графически.

Для  $T_0$  получается

$$T_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta t) d(\theta t). \quad (20)$$

Таким образом гармонический анализ тангенциальной силы от давления газов сводится к определению коэффициентов, входящих в выражение (17), что, как показано, всегда возможно. Интегралы, входящие в соотношения (19), могут быть заменены суммами и коэффициенты  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  могут быть определены по формулам Бесселя или методом Рунге (см., например, Справочную книгу для инженеров „Hütte“).

Как выяснилось из практики, обычное подразделение кривой в 24 точки (таблицы Zippeger'a, Lohman'a) дает для высших гармоник, с которыми приходится иметь дело в дальнейшем, недостаточно точные результаты. Поэтому при пользовании указанными методами диаграмму тангенциальной силы  $T_r$  необходимо подразделять в 96 точках.

Коэффициенты  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  могут быть очень быстро определены без построения индикаторной диаграммы и диаграммы тангенциальной силы  $T_r$  методом, предложенным автором и опубликованном в его статье „Гармонический анализ тангенциальных сил от газов“, напечатанной в Сборнике № 3 Центрального научно-исследовательского института авиационного моторостроения им. П. И. Баранова. Этот метод применим, когда требуется определить коэффициенты  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  тангенциальной силы  $T_r$ , исходя не из экспериментальной индикаторной диаграммы, а из расчетной; помимо этого предполагается нормальный кривошипно-шатунный механизм. Краткое описание этого метода будет дано в § 4 этой главы.

Помимо аналитических методов разложения тангенциальной силы в гармонический ряд существуют механические способы получения коэффициентов  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  при помощи специальных приборов — гармонических анализаторов. К числу этих приборов относятся, например, приборы д-ра Mader'a, проф. Мартенса и др. Описание и теория прибора д-ра Мадера будут даны в § 5 этой главы.

Заметим, что формулы Бесселя, метод Рунге и гармонические анализаторы применимы, конечно, для определения коэффициентов  $A_k$  и  $B_k$  любой периодической функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, в том числе,

например, и для гармонического анализа торснограмм, с которыми приходится иметь дело при исследовании крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора.

После этих замечаний о методах определения коэффициентов  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  обратимся к равенству (17). В этом равенстве возможно соединить две два члена одного порядка в один член вида

$$A_{rk} \cos(k\theta t) + B_{rk} \sin(k\theta t) = T_{rk} \sin(k\theta t + \beta_{rk}), \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{rk} &= \sqrt{A_{rk}^2 + B_{rk}^2} \\ \beta_{rk} &= \arctg \frac{A_{rk}}{B_{rk}} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Величина  $T_{rk}$  называется амплитудой, а величина  $\beta_{rk}$  — начальным фазовым углом гармоники  $k$ -го порядка тангенциальной силы  $T_r$ ;  $T_{rk}$  является наибольшим значением, которое может принять гармоника  $k$ -го порядка.

Из равенства (21) следует также, что всякий гармонический член  $T_{rk} \sin(k\theta t + \beta_{rk})$  может быть разложен на сумму двух гармонических членов, именно

$$T_{rk} \sin(k\theta t + \beta_{rk}) = A_{rk} \cos(k\theta t) + B_{rk} \sin(k\theta t),$$

$$\left. \begin{aligned} A_{rk} &= T_{rk} \sin \beta_{rk} \\ B_{rk} &= T_{rk} \cos \beta_{rk} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Принимая во внимание сказанное, мы можем тангенциальную силу  $T_r$  представить в следующем виде:

а) для двухтактных моторов

$$\begin{aligned} T_r = F(\theta t) &= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk} \cos(k\theta t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{rk} \sin(k\theta t) = \\ &= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T_{rk} \sin(k\theta t + \beta_{rk}) = \\ &= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{rk} \sin(kx) = \\ &= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T_{rk} \sin(kx + \beta_{rk}) \end{aligned} \quad (24)$$

б) для четырехтактных моторов

$$\begin{aligned} T_r = F(\theta t) &= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk} \cos(k \frac{\theta}{2} t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{rk} \sin(k \frac{\theta}{2} t) = \\ &= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T_{rk} \sin(k \frac{\theta}{2} t + \beta_{rk}) = \\ &= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk} \cos(\frac{k}{2} x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{rk} \sin(\frac{k}{2} x) = \\ &= T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T_{rk} \sin(\frac{k}{2} x + \beta_{rk}), \end{aligned} \quad (25)$$

причем  $\alpha = \omega t$  представляет угол поворота коленчатого вала мотора, координирующий его положение.

Гармонический анализ диаграммы тангенциальных сил от газов, отнесенных к 1 см<sup>2</sup> площади поршня, мотора BMW-IV (фиг. 36) дает для величин  $A_{rk}$ ,  $B_{rk}$ ,  $T_{rk}$  и  $\beta_{rk}$  значения приведенные в табл. 10 в процентах от среднего индикаторного давления  $p_i$ . В этой таблице обозначают:

Таблица 10

Значения величин  $A'_{rk}$ ,  $B'_{rk}$ ,  $T'_{rk}$  и  $\beta_{rk}$  для мотора BMW-IV

$k$	$A'_{rk}$	$B'_{rk}$	$T'_{rk}$	$\beta_{rk}$
1	30,2	20,8	36,6	235°25'
2	15,0	29,0	32,6	27°20'
3	1,37	32,0	32,2	182°30'
4	2,82	24,3	24,5	353°20'
5	4,67	18,2	18,8	165°35'
6	4,58	14,1	14,8	342°
9	4,23	5,27	6,76	141°15'
12	2,62	2,38	3,53	312°15'
15	1,65	1,10	1,98	123°40'

где  $F_{\Pi}$  — площадь поршня.

$$A'_{rk} = \frac{A_{rk}}{F_{\Pi} p_i} 100\%, \quad B'_{rk} = \frac{B_{rk}}{F_{\Pi} p_i} 100\%, \quad T'_{rk} = \frac{T_{rk}}{F_{\Pi} p_i} 100\% \quad (20)$$

На фиг. 37 дан график амплитуд  $T'_{rk}$  гармоник, от 1-го до 16-го порядков, тангенциальных усилий от давления газов, построенный на основании данных табл. 10. Как видно из этой таблицы, начиная с третьей, амплитуды гармоник уменьшаются.

Данные таблицы относятся, как уже было сказано, к мотору BMW-IV со следующими данными:  $\epsilon = 6,0$ ;  $\lambda = 0,292$ . Диаграмма тангенциальных усилий  $T$  построена для  $n = 1240$  об/мин; соответствующее среднее индикаторное давление  $p_i = 5,46$  ат.

Различным индикаторным диаграммам соответствуют, конечно, различные диаграммы тангенциальных сил, а потому и различные величины коэффициентов  $A_{rk}$ ,  $B_{rk}$  и  $T_{rk}$ . Для подсчетов в других случаях величин  $T_{rk}$  можно в первом приближении воспользоваться величинами, приведенными в табл. 10, исходя из следующих соображений. Влиянием моментов распределения и величины  $\lambda$  пренебрегают. Влияние степени сжатия и наполнения приводится грубо к линейной зависимости амплитуд гармоник от среднего индикаторного давления  $p_i$ .

Поэтому амплитуда гармоники  $k$ -го порядка для любого случая может быть определена по формуле

$$T_{rk} = \frac{T'_{rk} p_i}{100} F_{\Pi} \quad (27)$$

где  $T'_{rk}$  берется из табл. 10, а  $p_i$  является средним индикаторным давлением газов для данного случая и определяется по формуле:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) для двухтактных моторов} \quad p_i &= \frac{450 N_e}{V_h n \eta_{im}} \\ \text{и б) для четырехтактных моторов} \quad p_i &= \frac{900 N_e}{V_h n \eta_{im}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

В этих формулах обозначают:  
 $N_e$  — эффективную мощность мотора в л. с.,

— литраж мотора в л,

— число оборотов коленчатого вала мотора в минуту,

— механический коэффициент полезного действия мотора.

Нулевая гармоника  $T_0$ , являющаяся средней закручивающей вал силой,

$$\left. \begin{aligned} \text{и двухтактных моторов} \quad T_0 &= \frac{1}{\pi} p_i F_{\Pi} \\ \text{для четырехтактных моторов} \quad T_0 &= \frac{1}{2\pi} p_i F_{\Pi} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

эта сила вызывает постоянную закрутку вала.

Заметим, что для моторов с винтами постоянного шага возможно весьма приближенно определить  $T_{rk}$  при любом числе оборотов коленчатого мотора  $n$ , если известно  $T_{rk1}$ , соответствующее числу оборотов  $n_1$ . Но, принимая весьма приближенно величину  $\eta_m$  постоянной, будем иметь:

$$T_{rk} = \left( \frac{n}{n_1} \right)^2 T_{rk1} \quad (30)$$

Подставляя выражение (17) для  $T_r$  в равенство (6) § 1, получим

$$\begin{aligned} M_{br} &= RT_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R A_{rk} \cos(k\theta t) + \sum_{k=1}^{\infty} R B_{rk} \sin(k\theta t) = \\ &= RT_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R T_{rk} \sin(k\theta t + \beta_{rk}) = \\ &= M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_{rk} \cos(k\theta t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{N}_{rk} \sin(k\theta t) = \\ &= M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_{rk} \sin(k\theta t + \beta_{rk}). \end{aligned} \quad (31)$$

приняты обозначения:

$M_0$  — средний крутящий момент на валу мотора, вызываемый силой  $T_r$ ;

$\mathfrak{M}_{rk}$  и  $\mathfrak{N}_{rk}$  — косинусовые и синусовые коэффициенты Фурье момента  $M_{br}$ ;

$R$  — радиус кривошипа.

При указанных обозначениях имеют место следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= RT_0, \quad \mathfrak{M}_{rk} = RA_{rk}, \quad \mathfrak{N}_{rk} = RB_{rk}, \\ M_{rk} &= RT_{rk} = \sqrt{\mathfrak{M}_{rk}^2 + \mathfrak{N}_{rk}^2} \\ \operatorname{tg} \beta_{rk} &= \frac{A_{rk}}{B_{rk}} = \frac{\mathfrak{M}_{rk}}{\mathfrak{N}_{rk}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Напомним, что для двухтактных моторов  $\theta = \omega$  и для четырехтактных моторов  $\theta = \frac{\omega}{2}$ .

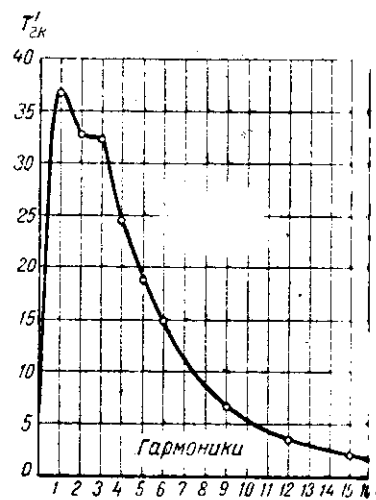
### Определение коэффициентов $A_{rk}$ и $B_{rk}$ тангенциальной силы $T_r$ от газов с помощью таблиц

Согласно сказанному раньше, тангенциальная сила  $T_r$  от действия газов поршень складывается из сил двух видов:

1) сил, вызванных давлением на поршень рабочих газов в цилиндре;

2) сил атмосферного противодействия на поршень.

Илагаемый ниже метод дает возможность непосредственно определять гармонические составляющие тангенциальной силы от рабочих газов и атмо-



Фиг. 37. Амплитуды гармоник тангенциальных сил от давления газов в одном цилиндре мотора BMW-IV, отнесенных к 1 см<sup>2</sup> площади поршня, в % от среднего индикаторного давления.



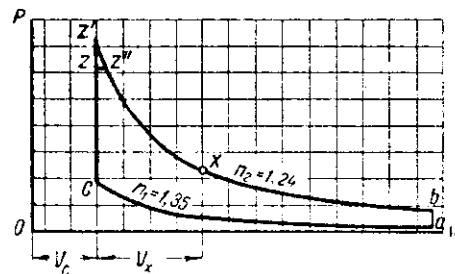
сферного противодействия без предварительного определения диаграммы тангенциальных усилий и анализа этой диаграммы каким-либо из существующих методов для выделения искоемых гармоник.

Этот метод дает возможность определить, с точностью трех единиц последнего пятого знака после запятой, коэффициенты Фурье первых 18 порядков тангенциальных сил от газов в работающих по циклу Отто четырехтактных моторах с нормальным кривошипным механизмом, имеющие степень сжатия  $\varepsilon$  в пределах

$$8 \geq \varepsilon \geq 5$$

и отношение  $\lambda$  — радиуса кривошипа  $R$  к длине шатуна  $L$  — в пределах

$$\frac{1}{3.2} \leq \lambda \leq \frac{1}{4.2}$$



Фиг. 38. Теоретическая индикаторная диаграмма.

вершина которой для большего приближения к действительной индикаторной диаграмме срезана прямой  $zz''$  постоянного давления  $p_z$ , равного

$$p_z = k_z p'_z, \quad (33)$$

где  $p'_z$  — давление вспышки теоретической индикаторной диаграммы, а  $k_z$  — коэффициент снижения действительного давления вспышки против теоретического.

В дальнейшем принимается, что в каждом конкретном случае следующие величины, определяющие индикаторную диаграмму  $aczz''ba$ , являются известными:

1. Степень сжатия мотора  $\varepsilon$ .
2. Давление конца сжатия  $p_c$ .
3. Давление вспышки  $p'_z$ .
4. Коэффициент  $k_z$ , принимаемый во всех случаях равным

$$k_z = 0,85. \quad (34)$$

5. Показатель политропы сжатия  $n_1$ , принимаемый во всех случаях равным  $n_1 = 1,35$ .

6. Показатель политропы расширения  $n_2$ , принимаемый во всех случаях равным  $n_2 = 1,24$ .

Помимо этого считаем известными:

$R$  — радиус кривошипа;

$\lambda = \frac{R}{L}$  — отношение радиуса кривошипа к длине шатуна;

$F$  — площадь поршня.

При выводах приняты следующие обозначения:

$V_c$  — объем камеры сжатия;

$V_x$  — объем, описанный поршнем при прохождении его от верхней мертвой точки до рассматриваемого его положения;

$$S_x = \frac{V_c}{F}; \quad (35)$$

$S_x$  — путь, пройденный поршнем от верхней мертвой точки и соответствующий объему  $V_x$ ;

$v_p$  — скорость поршня;

$\omega$  — угловая скорость вращения кривошипа;

$\alpha$  — угол поворота кривошипа, соответствующий  $S_x$ ;

$\beta$  — угол отклонения шатуна от оси цилиндра, соответствующий углу  $\alpha$ .

излагаемого метода заключается в том, что для каждого конкретного случая определяют отдельно коэффициенты Фурье:

- 1) тангенциальной силы от давления рабочих газов на поршень по линии расширения;
  - 2) тангенциальной силы от давления рабочих газов на поршень по линии сжатия;
  - 3) тангенциальной силы от атмосферного противодействия на поршень по линиям расширения и сжатия.
- Суммируя соответствующие коэффициенты Фурье этих трех компонентов, получаем искоемые коэффициенты Фурье тангенциальной силы от давления рабочих газов и атмосферного противодействия на поршень. Таким образом для четырехтактного мотора имеем

$$T_1 = T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{rk} \cos\left(\frac{k}{2} \alpha\right) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{rk} \sin\left(\frac{k}{2} \alpha\right) =$$

$$T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A'_{rk} + A'_{ck} + A'_{lk}) \cos\left(\frac{k}{2} \alpha\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (B'_{rk} + B'_{ck} + B'_{lk}) \sin\left(\frac{k}{2} \alpha\right). \quad (36)$$

ищем

$$\left. \begin{aligned} A_{rk} &= A'_{rk} + A'_{ck} + A'_{lk} \\ B_{rk} &= B'_{rk} + B'_{ck} + B'_{lk} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$T_0$  — среднее тангенциальное усилие на цапфу кривошипа от одного цилиндра;

$k$  — порядок гармоники;  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;

$\alpha$  — угол поворота кривошипа, отсчитываемый от начального положения, соответствующего верхнему мертвому положению поршня;

$A_{rk}$  и  $B_{rk}$  — косинусовые и синусовые коэффициенты Фурье тангенциальной силы от давления рабочих газов и атмосферного противодействия на поршень;

$A'_{rk}$  и  $B'_{rk}$  — то же, тангенциальной силы от давления рабочих газов на поршень по линии расширения;

$A'_{ck}$  и  $B'_{ck}$  — то же, тангенциальной силы от давления рабочих газов на поршень по линии сжатия;

$A'_{lk}$  и  $B'_{lk}$  — то же, тангенциальной силы от атмосферного противодействия на поршень по линиям расширения и сжатия.

Силами по линиям всасывания и выхлопа пренебрегаем.

На основании общих соображений можно выражениям (37) для коэффициентов  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  дать более развернутый вид, поясняющий, почему именно был принят для определения этих коэффициентов вышеуказанный метод. Во-первых, силы давления газов на поршень и соответствующие тангенциальные силы пропорциональны площади поршня  $F$ ; поэтому коэффициенты

$$A'_{rk}, B'_{rk}, A'_{ck}, B'_{ck}, A'_{lk} \text{ и } B'_{lk}$$

должны быть пропорциональны  $F$ . Во-вторых, силы давления газов на поршень по линии расширения и соответствующие им тангенциальные силы пропорциональны давлению вспышки  $p'_z$  теоретической индикаторной диаграммы, поэтому коэффициенты  $A'_{rk}$  и  $B'_{rk}$  должны быть пропорциональны  $p'_z$ . Аналогично коэффициенты  $A'_{ck}$  и  $B'_{ck}$  должны быть пропорцио-

нальны давлению сжатия  $p_c$ . Наконец, учитывая, что функция по тангенциальной силе от атмосферного противодавления на поршень является функцией нечетной, коэффициенты  $A_{1k}$  должны равняться нулю. В силу сказанного выражения для коэффициентов  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  должны иметь вид

$$\left. \begin{aligned} A_{rk} &= F(p'_z A_{rk} + p_c A_{ck}) \\ B_{rk} &= F(p'_z B_{rk} + p_c B_{ck} + B_{1k}) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Так как для каждого конкретного случая величины  $F$ ,  $p'_z$  и  $p_c$  являются известными и общими для всех коэффициентов  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$ , то задачи определения последних сводится к определению коэффициентов  $A_{rk}$ ,  $B_{rk}$ ,  $A_{ck}$ ,  $B_{ck}$  и  $B_{1k}$ . При принятом постоянстве показателей политроп расширения и сжатия коэффициенты  $A_{rk}$ ,  $B_{rk}$ ,  $A_{ck}$ ,  $B_{ck}$  и  $B_{1k}$  являются функциями только двух независимых переменных  $\varepsilon$  и  $\lambda$ . Последнее обстоятельство дает возможность свести в таблицы эти величины и таким образом позволяет практически решить поставленную задачу.

Точное определение коэффициентов  $A_{rk}$ ,  $B_{rk}$ ,  $A_{ck}$  и  $B_{ck}$  путем соответствующего интегрирования является невозможным в силу специфичности функций, определяющих эти коэффициенты. Поэтому явилась необходимость разработать способ приближенного вычисления этих коэффициентов, дающий возможность получения их числовых значений с определенной, заранее заданной точностью. Выполнение последнего условия представляло известные математические трудности, к разрешению которых Центральный институт авиационного моторостроения привлек Институт математики Московского государственного университета. Последний в лице его научных сотрудников Н. В. Смирнова и К. А. Семендяева разработал соответствующий способ подсчета коэффициентов  $A_{rk}$ ,  $B_{rk}$ ,  $A_{ck}$ ,  $B_{ck}$  и  $B_{1k}$ , а также выполнил работу по числовому подсчету этих коэффициентов.

Мы не будем здесь останавливаться на вопросах подсчета этих коэффициентов, отсылая интересующихся к упомянутой в § 3 статье автора.

В конце книги, в приложении II, даны таблицы коэффициентов  $A_{ck}$ ,  $B_{ck}$ ,  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  первых восемнадцати порядков, вычисленные с пятью десятичными знаками для значений:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 5,0; 5,5; 6,0; 6,5; 7,0; 7,5; 8,0 \\ \lambda &= 3,2; 3,4; 3,6; 3,8; 4,0; 4,2. \end{aligned}$$

Погрешность в вычисленных коэффициентах не превосходит трех единиц последнего пятого знака после запятой, но, как правило, эта погрешность еще меньше.

В табл. 43 даны значения коэффициента  $B_{1k}$ .

Коэффициенты Фурье для значений  $\varepsilon$  и  $\lambda$ , не имеющих в табл. 1 43, могут быть определены по табличным значениям с помощью какой-либо из существующих интерполяционных формул.

### § 5. Гармонический анализатор Mader-Ott

Теоретические основы гармонического анализатора Mader-Ott. Как уже было упомянуто в § 3, всякая периодическая функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье, имеющий следующий вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots = \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \end{aligned} \quad (39)$$

постоянный член  $\frac{1}{2} a_0$  представляет среднее значение функции

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad (40)$$

Коэффициенты Фурье  $a_n$  и  $b_n$  определяются согласно равенствам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (41)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (42)$$

Подом аргумента  $x$  является  $2\pi$ .

В случае, если функция  $f(x)$  задана графически и  $p$  является длиной этой кривой, соответствующей одному периоду, имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{p} x + a_2 \cos 2 \frac{2\pi}{p} x + \dots + b_1 \sin \frac{2\pi}{p} x + \\ &+ b_2 \sin 2 \frac{2\pi}{p} x + \dots, \end{aligned} \quad (43)$$

постоянный член  $\frac{1}{2} a_0$  представляет среднюю ординату функции  $f(x)$

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx, \quad (44)$$

Коэффициенты Фурье  $a_n$  и  $b_n$  определяются согласно равенствам

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos n \frac{2\pi}{p} x dx \quad (45)$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin n \frac{2\pi}{p} x dx. \quad (46)$$

Гармонический анализатор Mader-Ott производит гармонический анализ функции для представления ее в виде (43). С помощью этого прибора

получаются значения коэффициентов Фурье  $a_n$  и  $b_n$  для  $n = 1, 2, \dots, N$  по кривой  $y = f(x)$ . В основном прибор состоит из углового рычага и

планиметра (служащего для определения площади путем

Если обводной штифт углового рычага анализатора движется по кривой  $y = f(x)$ , то этот рычаг будет вести соединенный с ним планиметр

таким образом, что последний сможет определить значения интегралов (45)

и (46), в которых функция  $f(x)$  является помноженной на  $\cos n \frac{2\pi}{p} x$  и

$\sin n \frac{2\pi}{p} x$ , как величин некоторых площадей. Постоянный член  $\frac{1}{2} a_0$  опре-

деляется без включения рычага анализатора путем обвода одного пе-

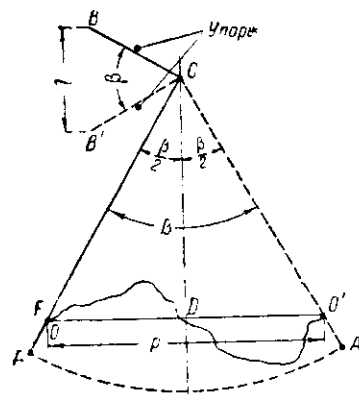
риода кривой  $y = f(x)$  планиметром и деления полученной таким образом

площади  $\int_0^p f(x) dx$  на длину периода  $p$ .

В основу конструкции углового рычага анализатора положено два со-



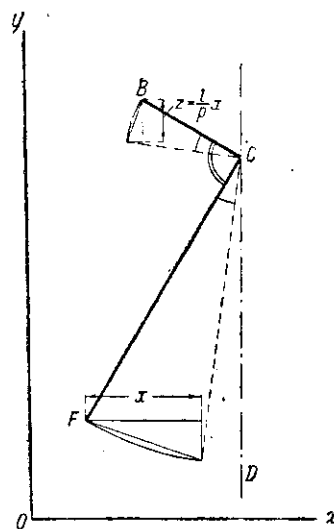
1. Посредством  $90^\circ$  углового рычага  $ACB$  (фиг. 39), который может поворачиваться вокруг точки вращения  $C$  только на определенный угол  $\beta$ , определяемый соответствующими упорами, любая длина периода  $OO' = p$  приводится к определенной длине периода  $BB' = l$ . Точка вращения  $C$  может двигаться только по прямой  $CD$ , перпендикулярной к отрезку  $OO'$ , представляющему период функции, и проходящей через середину этого отрезка. Обводной штифт  $F$ , который может передвигаться по  $AC$ , устанавливается таким образом, чтобы в своих крайних положениях, которые определяются упорами для другой стороны  $CB$  углового рычага, он совпадал с начальной и конечной точками одного периода кривой. Как видно из подобных треугольников (фиг. 40), при неподвижности точки  $C$  некоторому перемещению  $x$  точки  $F$  в направлении оси  $x$ -ов соответствует пропорциональное перемещение  $z = \frac{l}{p} x$  точки  $B$  в направлении оси  $y$ -ов.



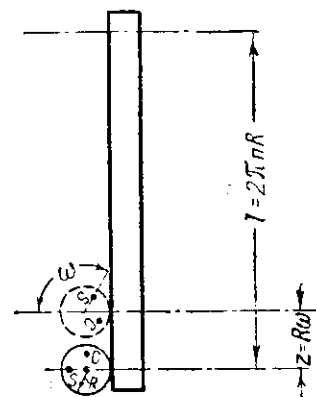
Фиг. 39. Схема углового рычага гармонического анализатора Mader-Ott.

2. Зубчатое колесо при качении его по зубчатой рейке длиной  $l$  делает точно  $n$  оборотов; при перемещении зубчатой рейки на величину  $z$  колесо повернется на пропорциональный  $z$  угол, равный  $\omega = n \frac{2\pi}{l} z$  (фиг. 41), в которой для большей наглядности принято, что зубчатая рейка неподвижна, а движется зубчатое колесо).

Угловой рычаг, зубчатая рейка и зубчатое колесо установлены на каретке (фиг. 42), которая может передвигаться только в направлении оси  $y$ -ов, а точка вращения  $C$  углового рычага может двигаться только



Фиг. 40. К теории гармонического анализатора Mader-Ott.

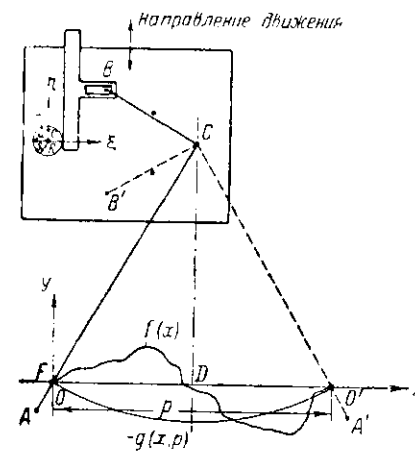


Фиг. 41. К теории гармонического анализатора Mader-Ott.

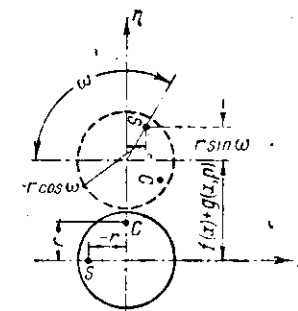
в направлении прямой  $CD$ , перпендикулярной к отрезку периода  $OO'$  и проходящей через середину этого отрезка. Если обводной штифт  $F$  проходит по кривой  $y = f(x)$  от начальной точки  $O$  одного периода до начальной точки  $O'$  следующего периода, то конечная точка  $B$  углового рычага при помощи кулисного механизма передвигает зубчатую рейку всегда на одну и ту же величину  $l$ , независимо от длины периода  $OO' = p$ , а при перемещении точки  $F$  от точки  $O$  на величину  $x$  в направлении оси  $x$ -ов пропорционально  $x$ . Этому перемещению зубчатой рейки соответствует про-

порциональный величине  $x$  поворот зубчатого колеса на угол  $\omega = n \frac{2\pi}{l} z = n \frac{2\pi}{p} x$ , который, именно, и входит в соотношения (45) и (46).

Зубчатое колесо радиуса  $R$  (соответственно  $2\pi n R = l$ ) имеет два малых отверстия, смещенных относительно друг друга на угол  $90^\circ$  и обозначенных  $C$  и  $S$  (Cosinus и Sinus). Эти отверстия находятся на расстоянии  $r$  от центра колеса и предназначены для установки в них обводного штифта планиметра. Чтобы исследовать, какие именно показания дает планиметр, соединенный таким образом с угловым рычагом анализатора, проведем параллельно системе координат  $xu$ , осью  $x$ -ов которой является базисная линия кривой  $y = f(x)$ , а началом координат — начальная точка периода, новую систему координат  $\xi\eta$  (фиг. 43), проходящую через начальное положение центра зубчатого колеса, которое соответствует начальному положению обводного штифта  $F$ . Само зубчатое колесо должно в начальном



Фиг. 42. Схема гармонического анализатора Mader-Ott.



Фиг. 43. К теории гармонического анализатора Mader-Ott.

Если каретку закрепить неподвижно и двигать обводной штифт  $F$  от  $O'$ , то он опишет дугу круга с ординатами  $g(x, p)$ . Если вести  $F$  по кривой  $y = f(x)$ , то перемещение каретки в направлении оси  $y$ -ов будет  $f(x) + g(x, p)$ . Вследствие этого перемещения  $f(x) + g(x, p)$  в направлении оси  $y$ -ов и вследствие поворота зубчатого колеса на угол  $\omega = n \frac{2\pi}{p} x$  благодаря перемещению  $x$  в направлении оси  $x$ -ов координаты  $\xi = -r$ ,  $\eta = 0$  точки  $S$  станут равными

$$\xi = -r \cos \omega \quad \text{и} \quad \eta = f(x) + g(x, p) + r \sin \omega.$$

Если мы обведем кривую  $y = f(x)$  от точки  $O$  до  $O'$  и затем возвратимся из точки  $O'$  обратно в точку  $O$  по оси  $x$ -ов, то для обратного обхода мы должны положить  $f(x) = 0$ . Точка  $S$  опишет по отношению к неподвижной системе координат  $\xi\eta$  некоторую замкнутую кривую, площадь которой равна

$$S = \int_0^p \eta d\xi. \quad (47)$$

так

$$d\xi = rn \frac{2\pi}{p} \sin \omega dx, \quad (48)$$

то, разделяя прямой и обратный путь обводки, мы можем написать

$$S = \int_0^p [f(x) + g(x, p) + r \sin \omega] r n \frac{2\pi}{p} \sin \omega dx + \\ + \int_p^0 [g(x, p) + r \sin \omega] r n \frac{2\pi}{p} \sin \omega dx. \quad (47)$$

Так как независимо от того, в каком направлении производится обводка кривой, весь второй интеграл сокращается с частью первого, то в результате получается

$$S = \pi r n \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin n \frac{2\pi}{p} x dx = \pi r n b_n = k b_n. \quad (48)$$

Число  $\pi r n$  является постоянной прибора  $k$ . Таким образом при установке обводного штифта на точке  $S$  величина замеренной планиметрической площади  $S = k b_n$  дает значение коэффициента Фурье  $b_n$ , помноженного на некоторый постоянный фактор  $k$ . Соответственно величина площади, полученной обводкой при установке обводного штифта в точке  $C$ , дает значение  $S = k a_n$ .

В анализаторе Mader-Ott величина  $k$  выбрана равной 100 мм, вследствие чего единице планиметра 0,1 см<sup>2</sup> соответствует величина коэффициента 0,01 см.

Полученные значения коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  не зависят от длины периода  $p$ , что вытекает из основного положения теории анализатора — редукции всех длин периода  $p$  к твердо установленной величине  $l$  перемещения зубчатой рейки. Анализатором возможно пользоваться для периодов любой длины в пределах от 2,5 до 36 см.

Переменная длина базиса представляет различные преимущества:

а) Записи технических регистрирующих аппаратов, как, например, тахографов, осциллографов, тахографов и т. п. могут быть анализированы непосредственно без перечерчивания, чем повышается точность и достигается значительная экономия времени.

б) Возможно определять коэффициенты высших порядков в случае, когда нужные зубчатые колеса отсутствуют или когда длина периода больше 36 см. Период делится на  $n$  равных частей и для каждого интервала определяются оба коэффициента  $n$ -го порядка. Складывая полученные таким образом коэффициенты  $a_n$  (соответственно  $b_n$ ) и деля сумму на  $n$ , получаем в результате коэффициенты  $a_{np}$  (соответственно  $b_{np}$ ) для  $np$ -й гармоники функции  $f(x)$  с периодом  $p$ .

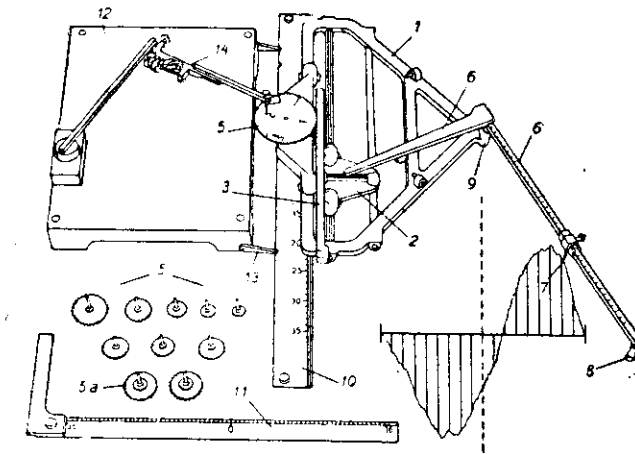
в) Последний способ обратим: если длина периода очень мала, то берут  $v$  периодов и определяют коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  для этого большого интервала длиной  $vp$ ; эти коэффициенты являются коэффициентами  $a_{nv}$  и  $b_{nv}$   $\frac{n}{v}$ -й гармоники функции  $f(x)$  с периодом  $p$ . Предполагается, что в этом случае  $n$  кратно  $v$ .

Описание устройства анализатора Mader-Ott. На фиг. 44 дан общий вид прибора в его рабочем состоянии. На каретке 1 имеется вторая, меньшая, подвижная каретка 2, которая несет зубчатую рейку. Слева от зубчатой рейки на каретке 1 находится стальная пластинка с отверстиями для набора зубчатых колес (фиг. 45). Как видно из теории, для каждой пары коэффициентов Фурье  $a_n$  и  $b_n$  должно быть употреблено каждое раз особое колесо. На каждом из зубчатых колес прибора выгравировано число, которое указывает порядок  $n$  коэффициента, определяемого при помощи этого колеса; помимо этого, на колесе высверлено несколько малых отверстий, которые обозначены через C (Cosinus) и S (Sinus). Край колеса находится в качестве установочной отметки штрих. Помимо

для коэффициентов с  $n=7$  и выше дается несколько промежуточных  $5a$  (фиг. 45), которые имеют числовые обозначения в форме дроби, черт  $\frac{6}{11-17}$ , дальше обозначение: 2 и у края тоже черту в качестве окончательной метки; значение обозначений будет разъяснено дальше.

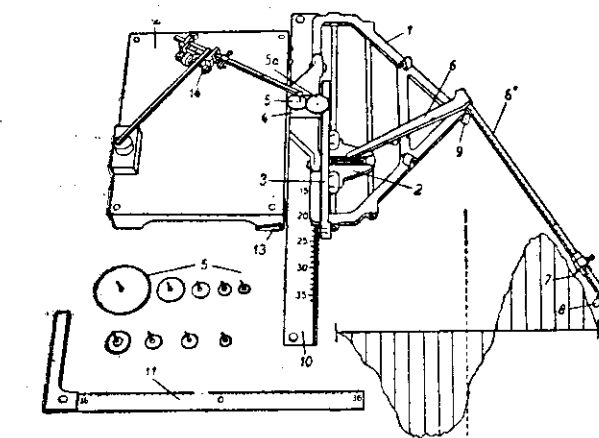
Угловой рычаг  $6-6'$  имеет на своем плече  $6'$ , которое служит обводкой, обводной штифт 7, служащий для обвода заданной кривой

и функций переставлять. Рычаг имеет шкалу, на которой обозначены цифрами. На конце угловой рукоятки (плеча) имеется держатель обводки 8, который путем поворота может устанавливаться в любое положение. Рычаг имеет также обводной штифт 7, который находится в плотном контакте с бумагой. На конце второго плеча  $6$  находится шаровая цапфа, установленная в теории



Фиг. 44. Общий вид установки гармонического анализатора Mader-Ott для получения коэффициентов Фурье первых шести порядков.

В), которая при движении кулисы двигает ку зубчатой рейки 2. В центре углового рычага находится вторая шаровая цапфа, которая установлена в подшипник 9, находящийся на правой стороне каретки 1, и служит в качестве точки опоры рычага (точка C в теории). Каретка 1 опирается на три ролика, из которых (конического профиля), катящиеся в пазу рельса 10. Рельс 10 может быть использован в требуемом положении при повороте двух заостренных концов. На рельсе имеются деления, которые обозначены цифрами от 1 до 36. Правильное положение рельса относительно анализируемой кривой определяется при помощи установочного штифта 11. Вдоль края длинной стороны угольника имеются деления с нулевой точкой посередине; цифры этих делений соответствуют цифрам на плече  $6'$  углового рычага и представляют длину периода в см. Короткая сторона угольника имеет на нижней своей поверхности два ребра, а верхняя риска. Если оба ребра будут установлены в паз рельса, то передний край длинной стороны угольника будут составлять друг с другом прямой угол; нулевая точка делений будет находиться при этом на том же расстоянии от паза рельса, что и шаровой подшипник 9.



Фиг. 45. Общий вид установки гармонического анализатора Mader-Ott для получения коэффициентов Фурье порядков выше 6-го.

Прибор снабжен деревянной подставкой 12. Она служит в качестве поверхности обвода для планиметра; ее верхняя поверхность обтянута



тонкой чертежной бумагой. На двух углах подставки имеются поворачивающиеся кверху на шарнирах установочные ушки, при помощи которых подставка устанавливается на определенном расстоянии от рельса. На подставке имеется три риска для установки полюса планиметра.

Установка и способ пользования анализатором Mader-Ott. В качестве подставки целесообразно пользоваться чертежной доской с минимальными размерами  $80 \times 80$  см. Для кривой, которую хотят анализировать, определяют начальную и конечную точки одного периода; чертят в качестве базиса линию, соединяющую эти точки, или прямую, параллельную этой линии; намечают на базисе среднюю точку и определяют длину периода в сантиметрах. Затем располагают чертеж относительно рельса 10 в требуемом положении, что достигается следующим образом. Установочный угольник 11 кладут ребрами короткой стороны в паз рельса; установочную метку на короткой стороне угольника приводят к совпадению с тем из делений, нанесенных на рельсе, которое соответствует числу сантиметров в длине периода. Затем приводят к совпадению край длинной стороны установочного угольника 11 с базисной линией таким образом, чтобы при этом совпадали нулевая точка делений угольника со средней точкой периода. Числа, стоящие на установочном угольнике у начала и конца периода, должны быть одинаковы и должны соответствовать длине периода. В этом положении чертеж и рельс закрепляются, после чего установочный угольник удаляется.

Длина периода может заключаться между 2,5 и 36 см; наибольшие допустимые величины ординат с обеих сторон базисной линии могут быть 16 см.

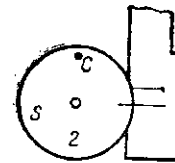
После установки чертежа и рельса устанавливают каретку анализатора 1 обоими коническими роликами в паз рельса. Затем вводят левую шаровую цапфу плеча 6 углового рычага в трубку со шлицами каретки 2 зубчатой рейки и вкладывают правую шаровую цапфу (точку вращения углового рычага 6—6') в соответствующий подшипник 9 каретки анализатора. Обводной штифт 7 устанавливается на плече 6' таким образом, чтобы отсчет на делениях этого плеча соответствовал длине периода. Контролем правильности установки обводного штифта 7 является совпадение последнего с начальной и конечной точками периода при наибольших возможных отклонениях обводной рукоятки (плеча 6') влево и вправо.

Подставка для планиметра (фиг. 44) располагается по отношению к рельсу так, что установочные ушки 13 опираются в соответствующие выемки рельса 10. Это будет правильное положение подставки для определения обоих первых коэффициентов  $a_1$  и  $b_1$ . Для получения коэффициентов высших порядков оба установочные ушка должны быть подняты кверху и подставка должна быть придвинута вплотную к рельсу так, как это показано на фиг. 45. На подставке устанавливается планиметр 14, опора обводного штифта которого заранее вывернута. Обычно применяется комплект полярного планиметра с грузовым или игольчатым полюсом. Чтобы при наибольших перемещениях ролик планиметра не вышел за край подставки, грузовой полюс должен находиться у левого края подставки между двумя нанесенными там штрихами. Игольчатый полюс устанавливается у среднего штриха. При пользовании линейным планиметром обводная линейка планиметра располагается на подставке так, чтобы она переставлялась вперед и назад на одинаковые расстояния и не опрокидывалась. Если употребляется планиметр с переменной длиной обводной рукоятки, то последняя устанавливается на масштаб  $0,1 \text{ см}^2$ .

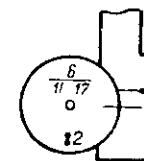
Размеры рычага анализатора выбраны такими, что единице планиметра  $0,1 \text{ см}^2$  соответствует величина коэффициента  $0,01 \text{ см}$ .

Зубчатое колесо 1 (фиг. 44) устанавливается на площадке с отверстиями. Отверстия этой площадки соответственно занумерованы так, что, например, отверстие 1 предназначено для зубчатого колеса 1. Для получения правильного положения меток С и S колеса должны устанавливаться так, чтобы риска у края колеса и соответствующая метка на зубчатой

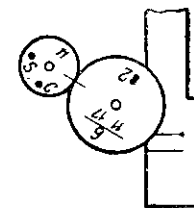
реке совпадали (фиг. 46) при положении обводной рукоятки анализатора в крайнем левом положении. Простыми зубчатыми колесами можно пользоваться только для порядков гармоник от  $n = 1$  до  $n = 6$ ; для  $n = 7$  для всех коэффициентов высших порядков устанавливаются промежуточные колеса. У этих колес число, стоящее над чертой деления, показывает, в какое отверстие должно вставляться колесо; число, стоящее ниже черты, показывает, для какого  $n$  это колесо употребляется; отметка 2 обозначает, что все величины, которые получаются при промежуточном включении этого колеса, должны быть разделены на 2. При приращении промежуточных колес установочные риски у края и на зубчатой рейке тоже должны совпадать (фиг. 47) при нахождении обводной рукоятки анализатора в левом крайнем положении. После этого зубчатое колесо, на котором имеется цифра для соответствующего  $n$ , вставляется



Фиг. 46. Установка зубчатых шестерен гармонического анализатора Mader-Ott для получения коэффициентов Фурье первых шести порядков.



Фиг. 47. Установка зубчатых шестерен гармонического анализатора Mader-Ott для получения коэффициентов Фурье порядков выше 6-го.



Фиг. 48. Установка зубчатых шестерен гармонического анализатора Mader-Ott для получения коэффициентов Фурье порядков выше 6-го.

соответствующее отверстие таким образом, чтобы установочные метки на обоих колесах стояли друг против друга (фиг. 48) при обводной рукоятке анализатора, несколько выведенной из своего крайнего левого положения. Правильность установки колес для зубчатых колес от  $n = 1$  до  $n = 6$  можно проверить, исходя из того, что в крайнем левом положении обводного рычага анализатора сверление S для синуса должно находиться слева, а сверление C для косинуса — наверху; для колес, применяемых для определения всех высших коэффициентов, сверление C должно находиться внизу (фиг. 46 и фиг. 48).

Наконец, вставляют обводной штифт планиметра в сверление, обозначенное С или S, смотря по тому, какой из коэффициентов (косинусного или синусного члена) желают определить. После того как обводной штифт рычага анализатора установлен на начальную точку анализируемой кривой, отмечают показание планиметра. Затем обводным штифтом 7 обводят анализируемую кривую до конца периода и по базисной линии возвращают штифт обратно к начальной точке. Вновь отмечают показание планиметра; разность конечного и начального показаний дает искомым коэффициент по знаку и величине, причем при значении единицы нониуса планиметра в  $0,1 \text{ см}^2$  коэффициент получается в десятых миллиметра.

Точность, с которой возможно определение коэффициентов Фурье при помощи этого гармонического анализатора, зависит от ошибки, которую можно сделать при обводе анализируемой кривой; эта ошибка достигает  $\pm 3$  единиц нониуса планиметра, что дает наибольшую ошибку в величине коэффициента  $0,3 \text{ мм}$ . При черчении анализируемой кривой ошибка черчения является величиной этого же порядка; поэтому указанная возможная ошибка прибора является допустимой. В силу сказанного найденные прибором значения коэффициентов Фурье следует соответствующим образом округлять.

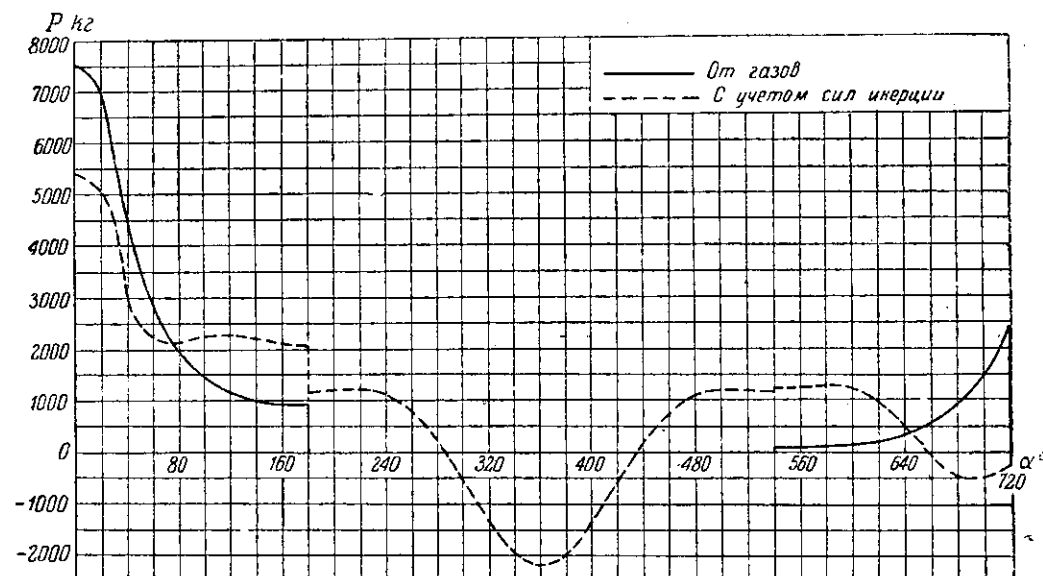
При помощи описанного гармонического анализатора возможно определять коэффициенты Фурье первых 25 порядков.

## СУММАРНЫЕ СИЛЫ ОТ ГАЗОВ И ИНЕРЦИИ ДВИГАЮЩИХСЯ МАСС, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В КРИВОШИПНО-ШАТУННОМ МЕХАНИЗМЕ ДВИГАТЕЛЯ

§ 1. Суммарные силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме от рабочих газов и инерции поступательно двигающихся масс одного цилиндра. Случай нормального кривошипно-шатунного механизма и случай механизма с прицепным шатуном. Примеры.

В главах I и II мы видели, что на поршневой палец действуют силы от рабочих газов в цилиндре, силы от атмосферного противодавления на поршень и силы от инерции суммарной поступательно двигающейся в цилиндре массы. Первые две силы при своем сложении давали силу  $P_r$ , а вторая сила являлась силой  $P_j$ . Силы  $P_r$  и  $P_j$ , складываясь, дают суммарную силу  $P$ , действующую на поршневой палец в направлении оси цилиндра:

$$P = P_r + P_j. \quad (1)$$



Фиг. 49. Кривые изменения сил  $P_r$  и  $P$  в главном цилиндре мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.

На фиг. 49 даны в зависимости от угла поворота коленчатого вала  $\alpha$  кривые изменения сил  $P_r$  и  $P$  главного цилиндра мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs при  $n = 2400$  об/мин. и  $N_e = 860$  л. с.

Суммируя силы, действующие в кривошипном механизме от сил  $P_r$  и  $P_j$  одного цилиндра, получим, что

1. Равнодействующая сил, действующих нормально на стенку цилиндра, будет

$$N = N_r + N_j. \quad (2)$$

2. Равнодействующая сил, действующих по оси шатуна, будет

$$K = K_r + K_j. \quad (3)$$

3. Суммарное тангенциальное усилие на ось цапфы кривошипа будет

$$T = T_r + T_j. \quad (4)$$

4. Суммарное усилие на ось цапфы кривошипа в направлении его радиуса будет

$$Z = Z_r + Z_j. \quad (5)$$

5. Суммарный крутящий момент на валу двигателя от сил одного цилиндра будет

$$M_b = M_{br} + M_{bj}. \quad (6)$$

6. Суммарный момент, передающийся на подмоторную раму от сил одного цилиндра, будет

$$M_\phi = -M_b. \quad (7)$$

7. Передающаяся на подмоторную раму сила от одного цилиндра будет  $P_j$ ; она направлена по оси соответствующего цилиндра.

Для случая кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном силы  $P_r$ ,  $N_r$ ,  $K_r$ ,  $T_r$  и  $Z_r$  и моменты  $M_{br}$  и  $M_{\phi r}$  определяются аналогичным образом. На подмоторную раму, помимо момента  $M_{\phi r}$ , будет действовать сила инерции  $P_{jr}$  суммарной поступательно двигающейся массы в соответствующем цилиндре, направленная по оси этого цилиндра. В этом случае силы, действующие в боковом цилиндре, создают силы, действующие нормально к стенке главного цилиндра и приложенные к оси поршневого пальца этого цилиндра. Равнодействующая этих сил будет

$$N_l = N'_{rl} + N'_{jl}. \quad (8)$$

Входящие в выражения (1) — (8) силы и моменты определяются по соответствующим формулам, приведенным в главах I и II и указанным в табл. 11.

Таблица 11

Перечень формул для подсчета величин сил и моментов

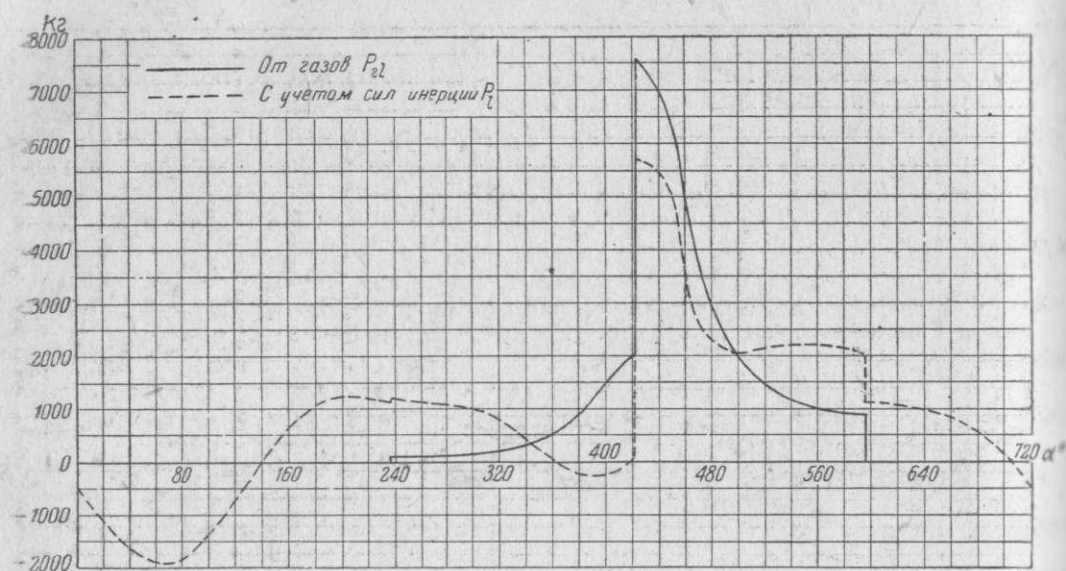
	$P_r$	$N_r$	$K_r$	$T_r$	$Z_r$	$M_{br}$	$P_j$	$N_j$	$K_j$	$T_j$	$Z_j$	$M_{bj}$
Глава	II	II	II	II	II	II	I	I	I	I	I	I
§	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3
Формула	1	2	3	4	5	6	38	39	40	41	42	43

	$P_{rl}$	$N_{rl}$	$N'_{rl}$	$K_{rl}$	$T_{rl}$	$Z_{rl}$	$M_{brl}$	$P_{jl}$	$N_{jl}$	$N'_{jl}$	$K_{jl}$	$T_{jl}$	$Z_{jl}$	$M_{bjl}$
Глава	II	II	II	II	II	II	II	I	I	I	I	I	I	I
§	2	2	2	2	2	2	2	5	5	5	5	5	5	5
Формула	—	8	10	9	11	12	13	56	57	59	58	60	61	62

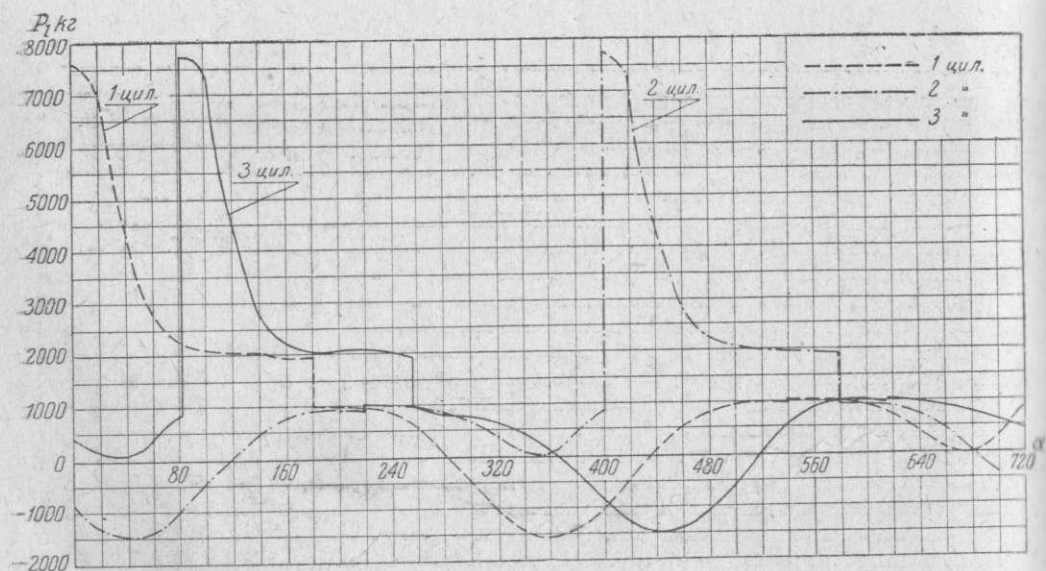
В качестве примеров приводим построенные по углу поворота коленчатого вала мотора  $\alpha$  кривые изменения сил, действующих в кривошипно-шатунных механизмах моторов:

1. Hispano-Suiza 12 Ybrs при  $n = 2400$  об/мин. и  $N_e = 860$  л. с. и
  2. Curtiss-Wright „Cyclone“ при  $n = 1950$  об/мин. и  $N_e = 600$  л. с.
- На фиг. 50 даны кривые изменения сил  $P_{rl}$  и  $P_l$  в боковом цилиндре мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.
- На фиг. 51, 52 и 53 даны кривые изменения сил  $P_l$  в цилиндрах 1-го мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

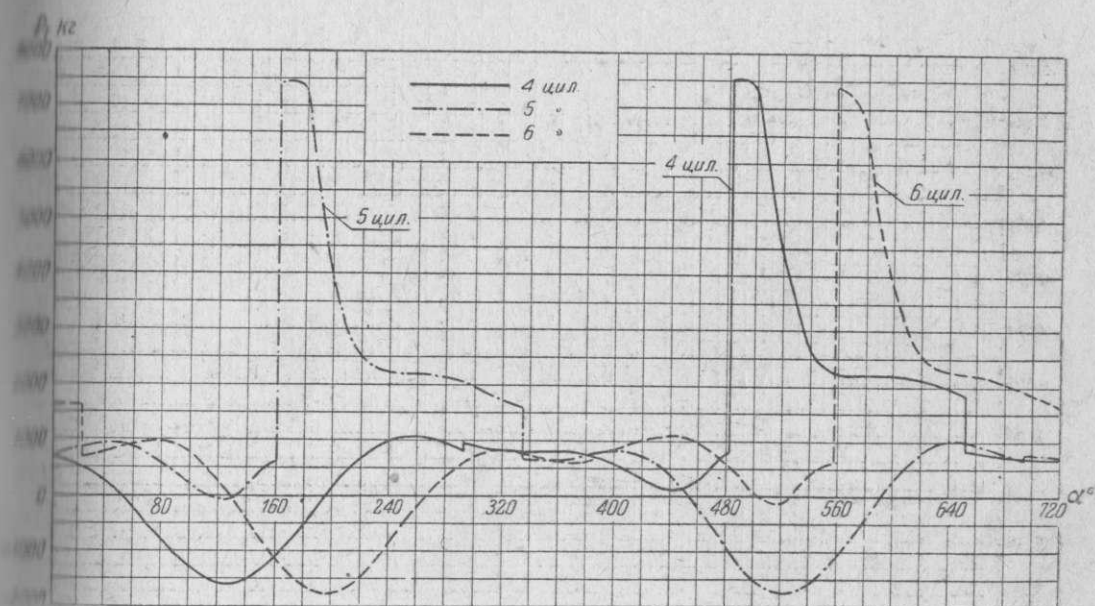




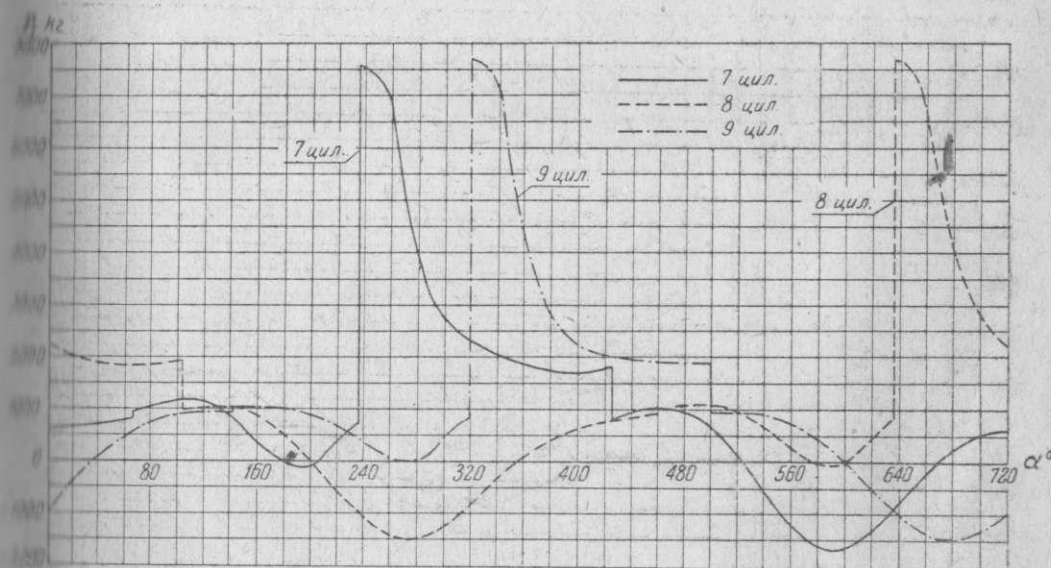
Фиг. 50. Кривые изменения сил  $P_{g1}$  и  $P_l$  в боковом цилиндре мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.



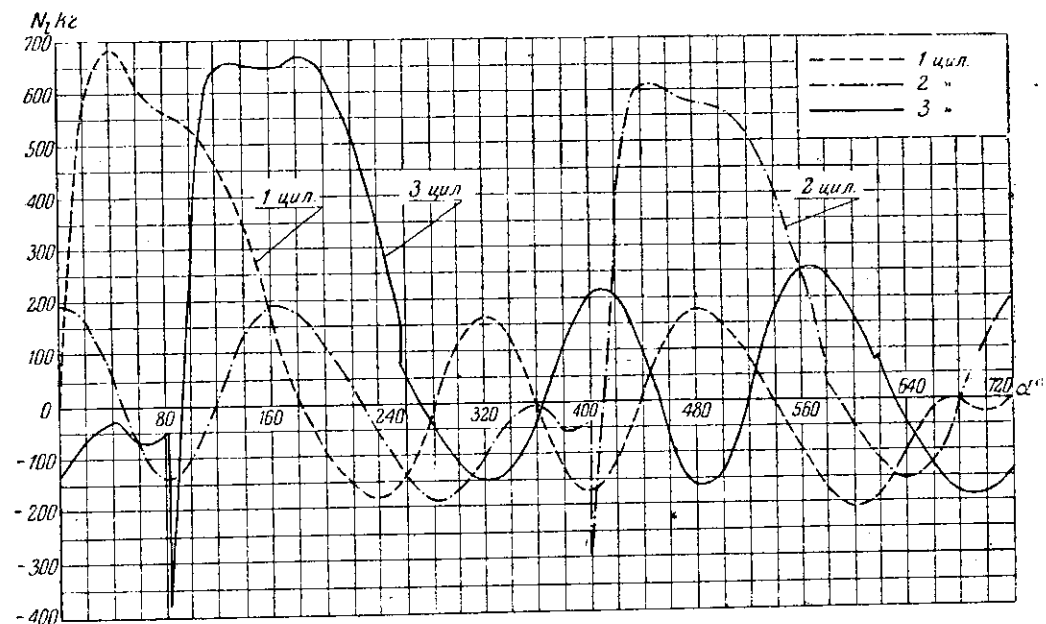
Фиг. 51. Кривые изменения сил  $P_l$  в цилиндрах 1, 2 и 3 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



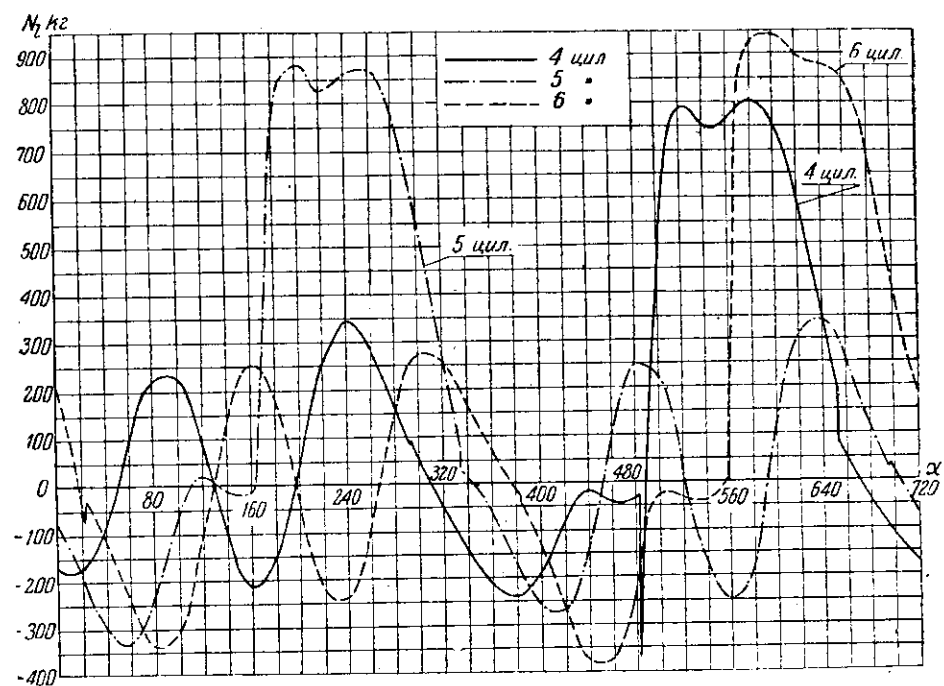
Фиг. 52. Кривые изменения сил  $P_l$  в цилиндрах 4, 5 и 6 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



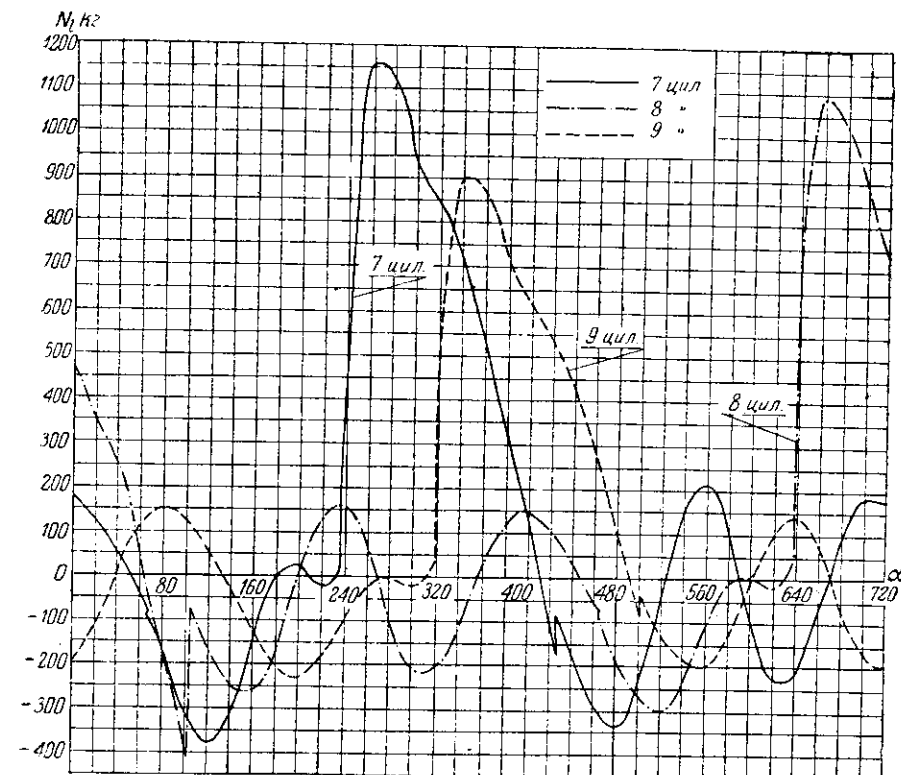
Фиг. 53. Кривые изменения сил  $P_l$  в цилиндрах 7, 8 и 9 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



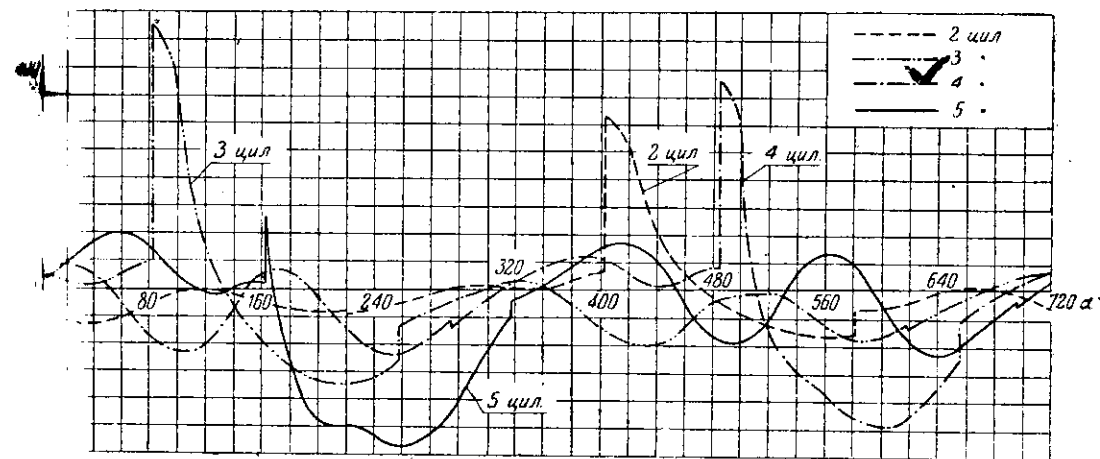
Фиг. 54. Кривые изменения сил  $N_i$  в цилиндрах 1, 2 и 3 мотора Curtiss-Wright "Cyclone".



Фиг. 55. Кривые изменения сил  $N_i$  в цилиндрах 4, 5 и 6 мотора Curtiss-Wright "Cyclone".

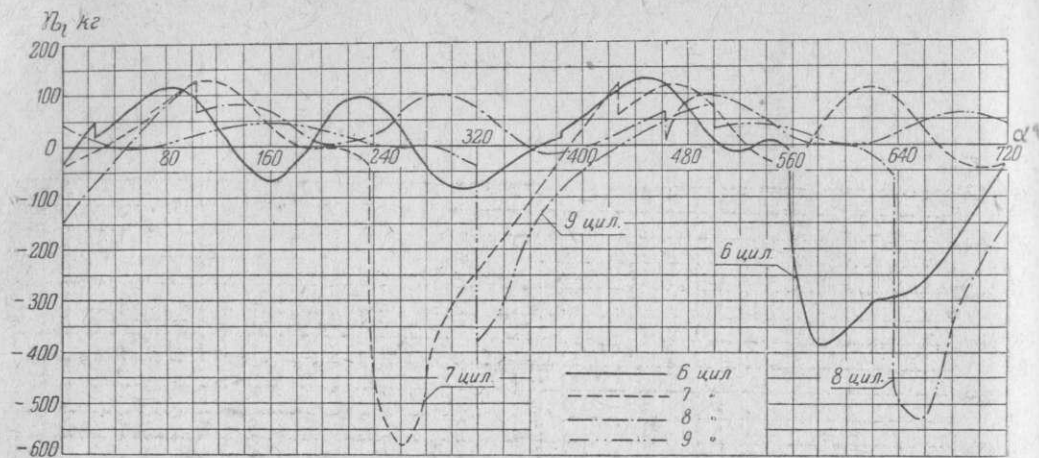


Фиг. 56. Кривые изменения сил  $N_i$  в цилиндрах 7, 8 и 9 мотора Curtiss-Wright "Cyclone".

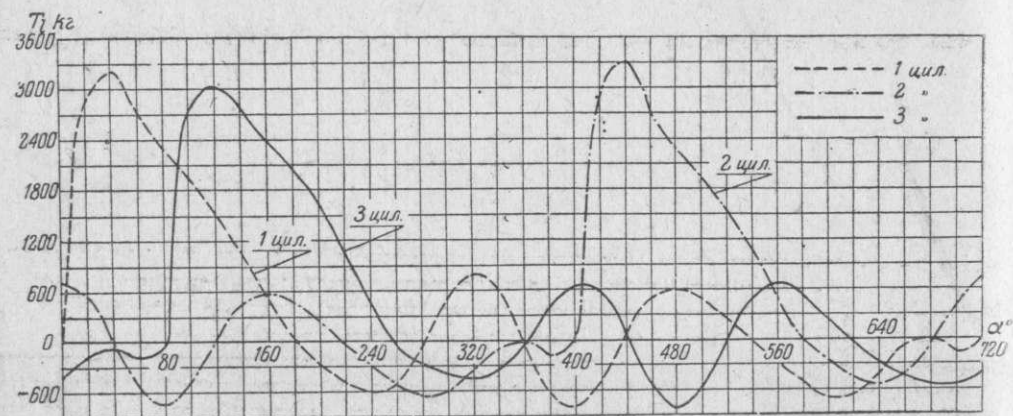


Фиг. 57. Кривые изменения сил  $N_i$  от сил  $P_i$  в цилиндрах 2, 3, 4 и 5 мотора Curtiss-Wright "Cyclone".

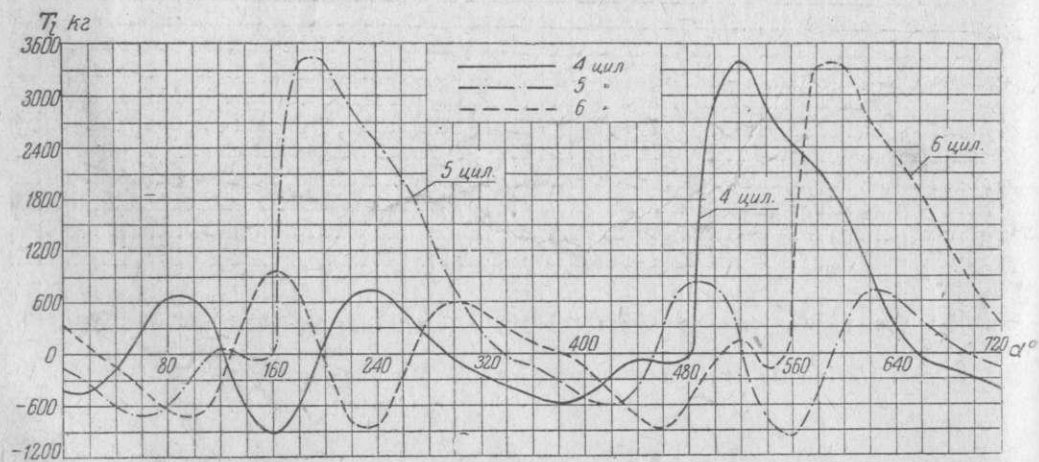




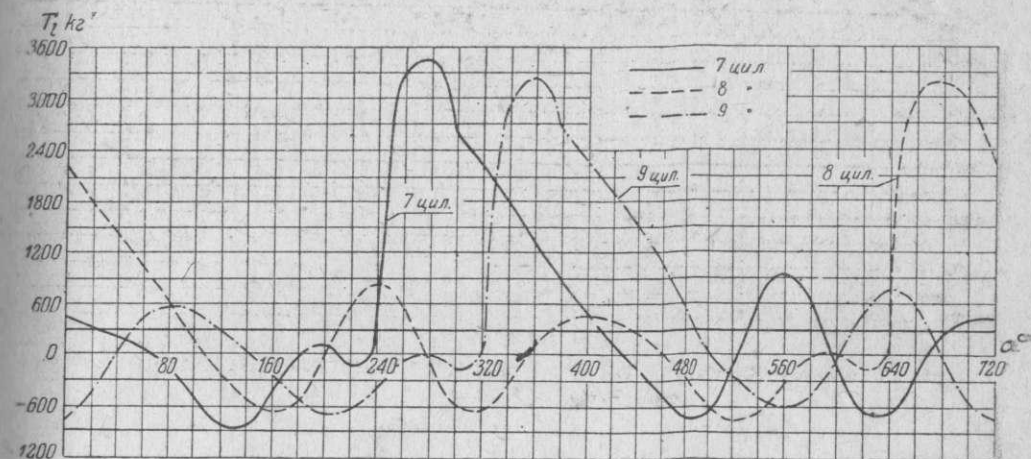
Фиг. 58. Кривые изменения сил  $N_l$  от сил  $P_l$  в цилиндрах 6, 7, 8 и 9 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



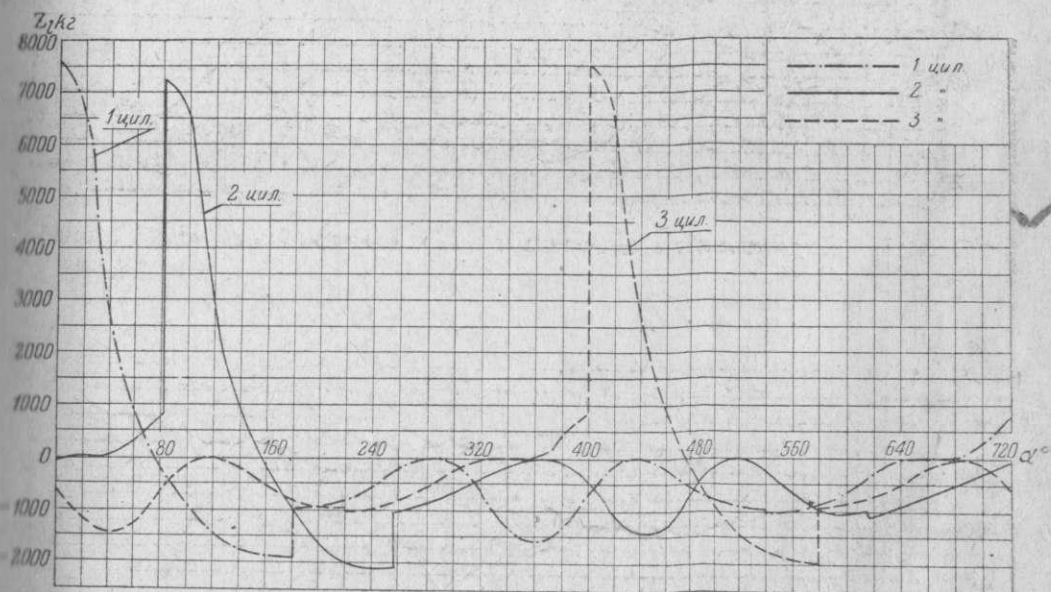
Фиг. 59. Кривые изменения сил  $T_l$  цилиндров 1, 2 и 3 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



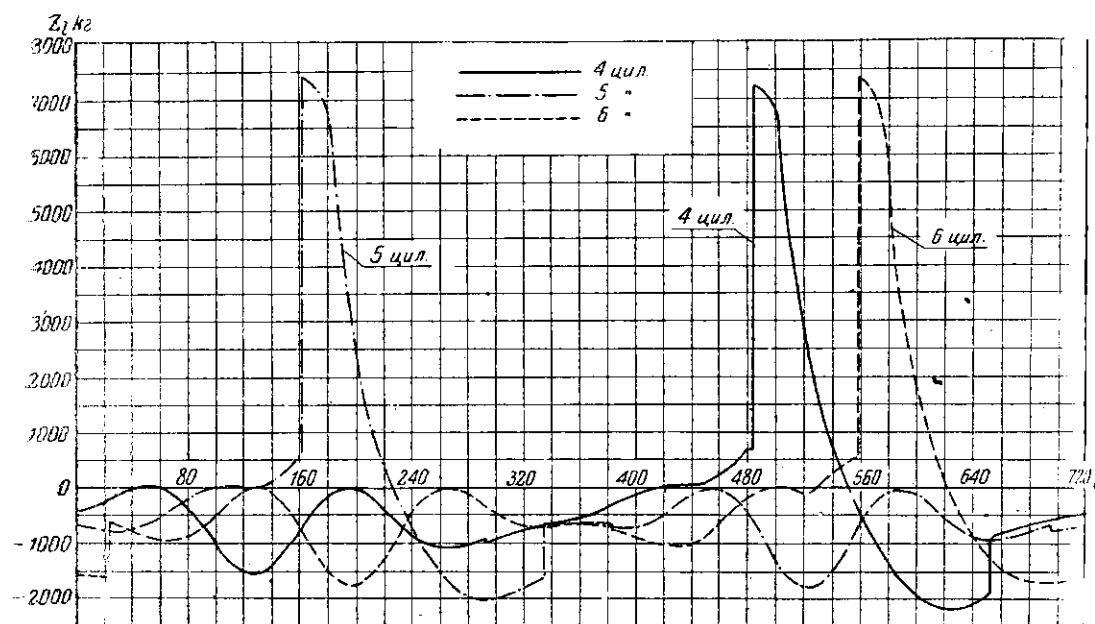
Фиг. 60. Кривые изменения сил  $T_l$  цилиндров 4, 5 и 6 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



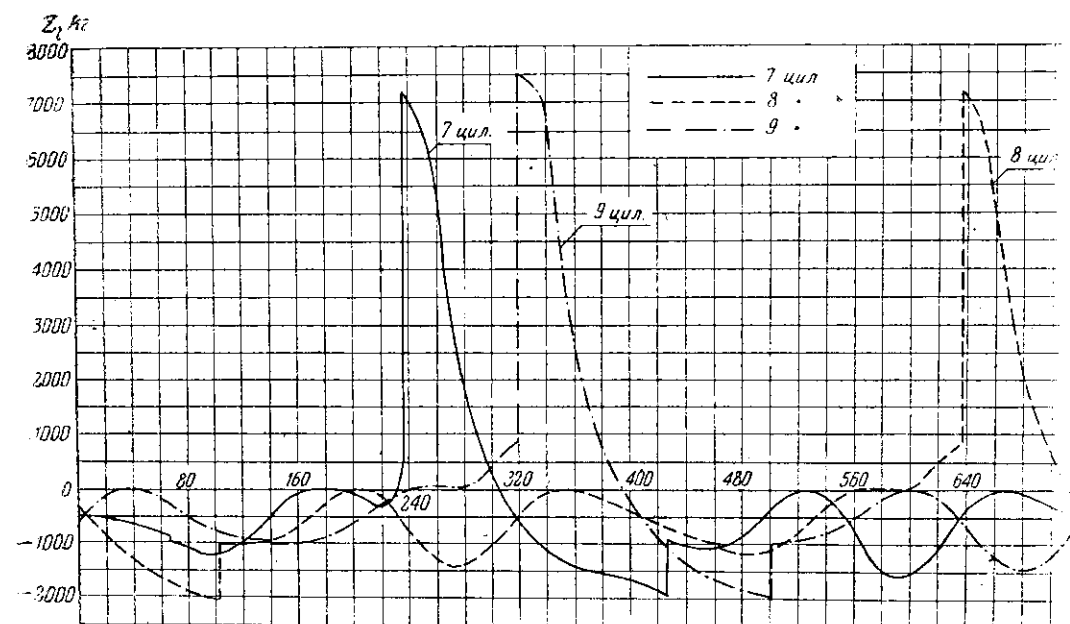
Фиг. 61. Кривые изменения сил  $T_l$  цилиндров 7, 8 и 9 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



Фиг. 62. Кривые изменения сил  $Z_l$  цилиндров 1, 2 и 3 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



Фиг. 63. Кривые изменения сил  $Z_i$  цилиндров 4, 5 и 6 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



Фиг. 64. Кривые изменения сил  $Z_i$  цилиндров 7, 8 и 9 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

На фиг. 54, 55 и 56 даны кривые изменения сил  $N_i$  в цилиндрах 1—9 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

На фиг. 57 и 58 даны кривые изменения сил  $R_i$  от сил  $P_i$  в цилиндрах 1—9 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

На фиг. 59, 60 и 61 даны кривые изменения сил  $T_i$  цилиндров 1—9 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

На фиг. 62, 63 и 64 даны кривые изменения сил  $Z_i$  цилиндров 1—9 мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

## § 2. Порядок вспышек в моторах разного типа

Порядок вспышек в цилиндрах мотора играет важную роль в его динамике, так как координирует по фазе силы и моменты, развиваемые отдельными цилиндрами, а следовательно, определяет характер динамических процессов, протекающих в моторе. Последние в свою очередь, дают возможность судить о таких динамических показателях мотора, как равномерность суммарного крутящего момента мотора на валу, уравновешенность мотора, напряженность коленчатого вала мотора, напряженность картера мотора и т. д. Исходя из этого порядок вспышек в цилиндрах мотора данного типа выбирается таким образом, чтобы по возможности удовлетворялись положения, перечисленные ниже.

1. Взрывы в цилиндрах мотора должны следовать один за другим через равные промежутки времени или, что одно и то же, через равные углы поворота коленчатого вала мотора. Так, например, если мотор имеет  $i$  цилиндров, то в четырехтактном моторе взрывы должны следовать через углы поворота коленчатого вала, равные  $\frac{4\pi}{i}$ ; для двухтактных моторов

соответствующие углы будут равны  $\frac{2\pi}{i}$ . Это положение вытекает из необходимости получения возможно максимальной равномерности крутящего момента двигателя на валу и, следовательно, максимальной равномерности хода мотора, с одной стороны, и сведения до минимума максимального момента от сил давления газов на поршни, опрокидывающего мотор и передающегося на подмоторную раму, т. е. максимальной уравновешенности двигателя, с другой.

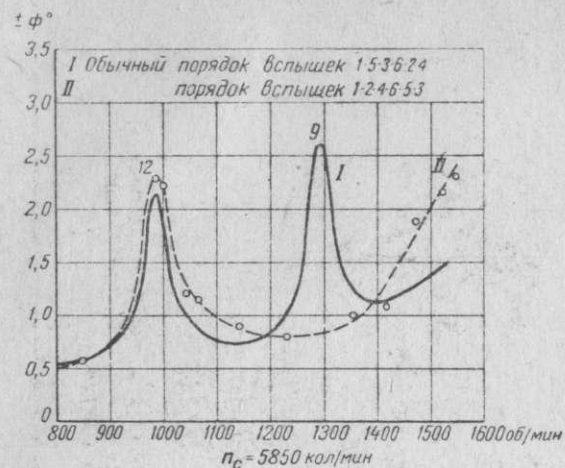
2. Расположение кривошипов коленчатого вала мотора должно быть таким, чтобы силы инерции вращающихся масс мотора и моменты от этих сил уравновешивались сами собой без применения добавочных масс противовесов. Это же требование относится и к силам инерции поступательно двигающихся масс в цилиндрах мотора. В основе этих положений лежит необходимость получения возможно меньшего веса мотора и возможно большей простоты его конструкции.

3. Вспышки в цилиндрах многоцилиндрового мотора с коленчатым валом, имеющим несколько кривошипов, должны следовать в таком порядке, чтобы два соседних по вспышкам цилиндра находились каждый раз по разные стороны от среднего коренного подшипника коленчатого вала мотора. Это условие создает более равномерную нагрузку на отдельные участки коленчатого вала и вызывает снижение максимальных напряжений в последнем.

Вышеуказанные три требования являются основными при выборе порядка вспышек в цилиндрах мотора. Помимо этого надо отметить важное влияние порядка вспышек на крутильные колебания коленчатого вала мотора. Соответствующее изменение порядка вспышек в цилиндрах двигателя ведет к устранению критических резонансов некоторых порядков в эксплуатационной области числа оборотов мотора, чем достигается более надежная и спокойная работа мотора в отношении крутильных колебаний. Так, например, для одного 6-цилиндрового мотора изменением порядка вспышек был устранен из эксплуатационной области числа оборотов мотора резонанс 9-го порядка.



На фиг. 65 показаны экспериментальные резонансные кривые этого мотора как для обычно принятого порядка вспышек 1—5—3—6—2—4, (кривая I), так и для порядка вспышек 1—2—4—6—5—3 (кривая II). Изменение порядка вспышек, достигнутое только изменением кулачкового валика, явилось в данном случае простым и действительным средством для устранения опасности резонанса.



Фиг. 65. Экспериментальные кривые резонансных амплитуд коленчатого вала 6-цилиндрового мотора для двух различных порядков вспышек в цилиндрах.

моторов схемы порядка вспышек в цилиндрах, обычно применяемые в настоящее время.

### § 3. Суммарные силы от всех цилиндров, действующих на данную кривошипную шейку. Примеры

При расчете коленчатого вала на прочность и при расчете шатунного подшипника требуется знание результирующей  $Z_v$  всех сил  $Z$ , действующих радиально на шатунную шейку, и результирующей  $T_v$  всех сил  $T$ , действующих касательно к этой шейке.

В случае, когда все шатуны, действующие на данную шатунную шейку являются центральными, на ось цапфы кривошипа действуют:

1. Суммарная результирующая  $Z_\Sigma$  сил  $Z$  от всех цилиндров двигателя, действующих на данную цапфу, равная

$$Z_\Sigma = \sum Z. \quad (9)$$

2. Центробежная сила инерции  $\sum P_{Lk}$  суммы вращающихся масс  $M_k$  шатунов, действующих на данную цапфу, равная

$$\sum P_{Lk} = -R\omega^2 \sum M_k. \quad (10)$$

Силы  $Z_\Sigma$  и  $\sum P_{Lk}$ , складываясь, дают результирующую силу  $Z_v$ , действующую на ось данной цапфы кривошипа и равную

$$Z_v = Z_\Sigma + \sum P_{Lk}. \quad (11)$$

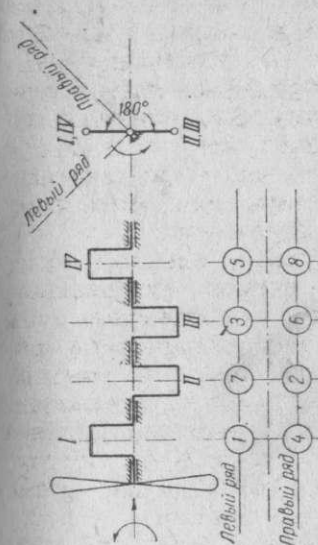
3. Суммарная результирующая  $T_v$  сил  $T$  от всех цилиндров двигателя, действующих на данную цапфу, равная

$$T_v = \sum T. \quad (12)$$

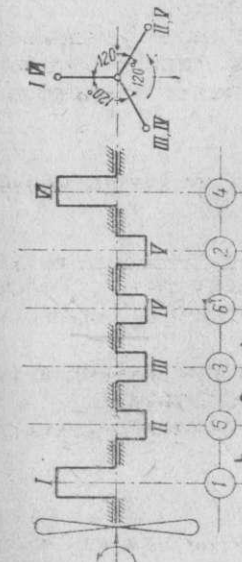
В случае, когда один из действующих на данную шатунную шейку шатунов является главным, а остальные прицепными, на ось цапфы кривошипа действуют:

1. Суммарная результирующая  $Z_\Sigma$  всех сил  $Z_i$  от боковых цилиндров и силы  $Z_L$  от главного цилиндра, равная

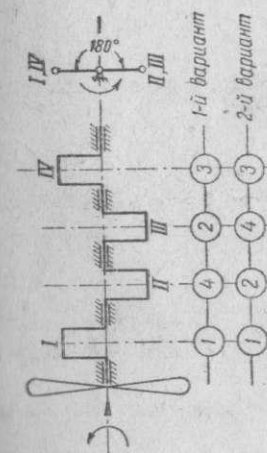
$$Z_\Sigma = \sum Z_i + Z_L. \quad (13)$$



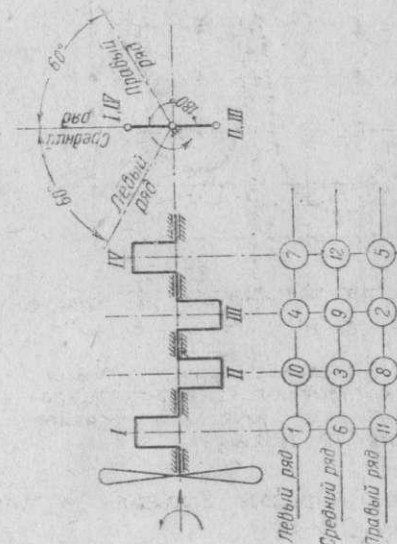
Фиг. 66. Порядок вспышек в 4-цилиндровом, однопорядном двигателе.



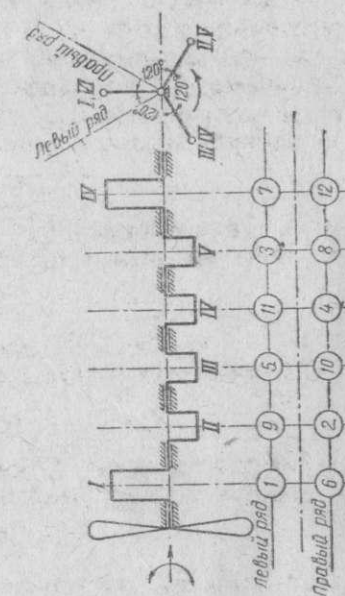
Фиг. 67. Порядок вспышек в 6-цилиндровом, однопорядном двигателе.



Фиг. 68. Порядок вспышек в 8-цилиндровом двигателе с цилиндрами, расположенными V-образно под углом в 90°.

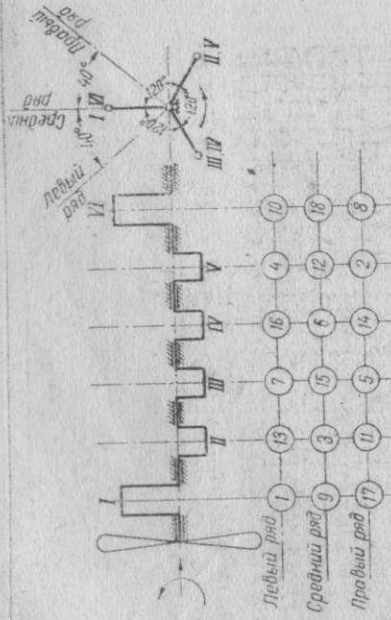


Фиг. 69. Порядок вспышек в 12-цилиндровом двигателе с цилиндрами, расположенными V-образно под углом в 60°.

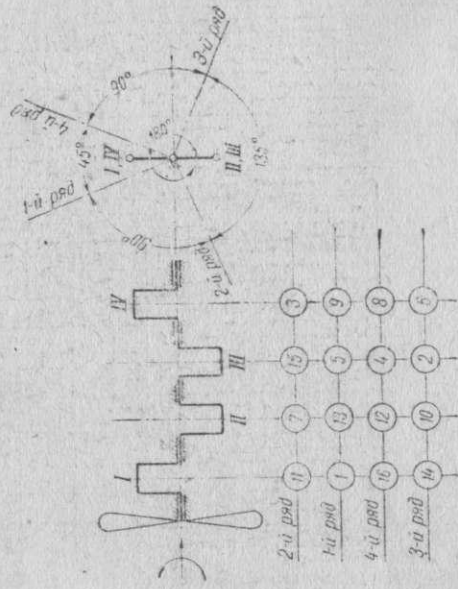


Фиг. 70. Порядок вспышек в 12-цилиндровом двигателе с цилиндрами, расположенными V-образно под углом в 60°.

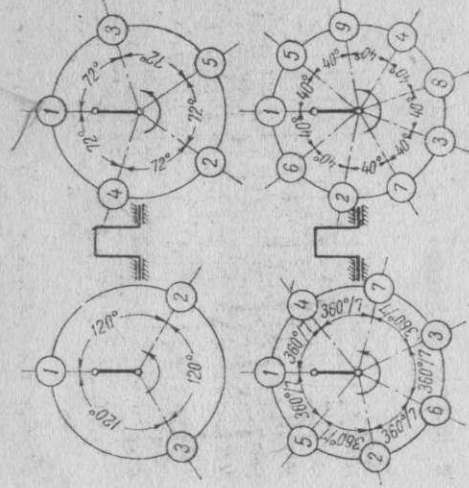




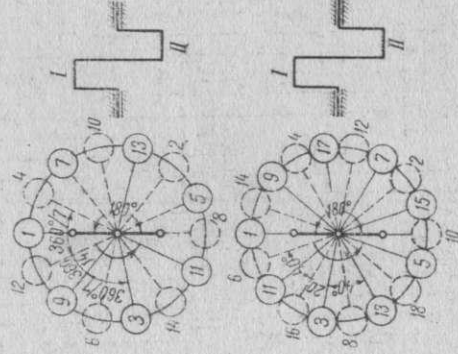
Фиг. 71. Порядок вспышек в 18-цилиндровом двигателе с цилиндрами, расположенными W-образно.



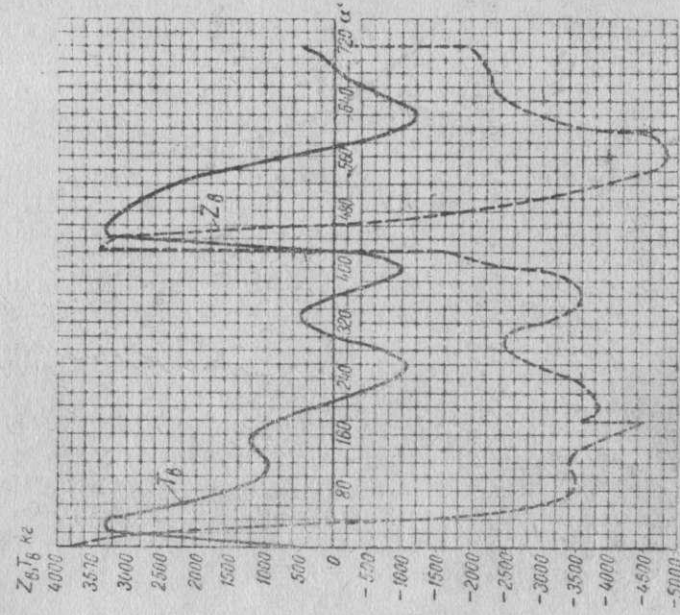
Фиг. 72. Порядок вспышек в 16-цилиндровом двигателе с цилиндрами, расположенными X-образно.



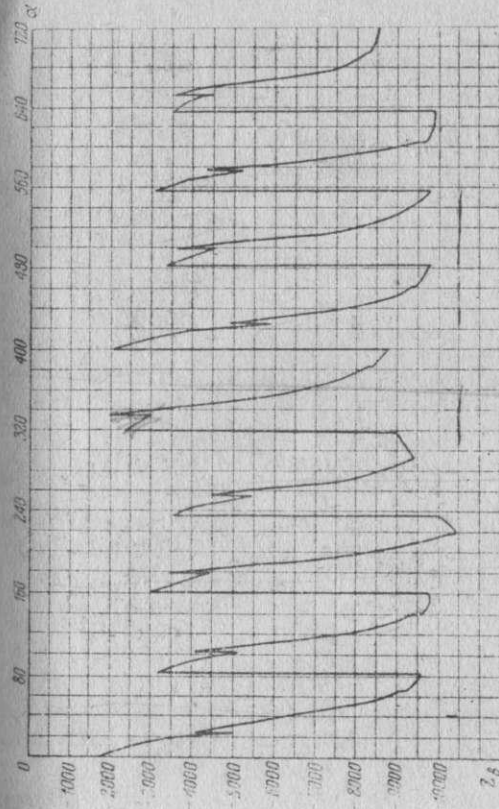
Фиг. 73. Порядок вспышек в звездообразных двигателях с 3, 5, 7 и 9 цилиндрами.



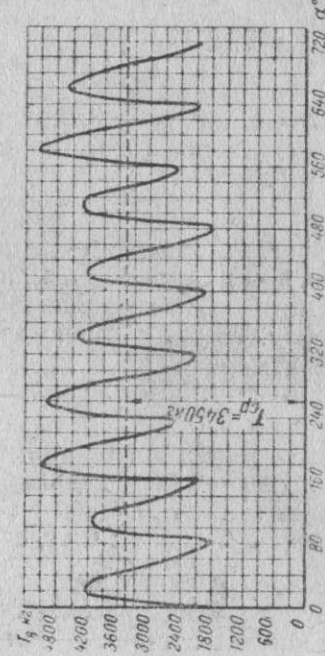
Фиг. 74. Порядок вспышек в двоянных звездообразных 14- и 18-цилиндровых двигателях с кривошипами, расположенными под углом в  $180^\circ$ .



Фиг. 75. Кривые изменения сил  $Z$  и  $T$  мотора Hispano Suiza 12 Ybrs.



Фиг. 76. Кривые изменения сил  $Z$  мотора „Curtiss-Wright „Cyclone“.



Фиг. 77. Кривые изменения сил  $T$  мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



2. Центробежная сила инерции  $P_{L_k}$  массы  $M_k$  приведенного главного шатуна, отнесенной к оси цапфы кривошипа, равная

$$P_{L_k} = -M_k R \omega^2. \quad (14)$$

Силы  $Z_\Sigma$  и  $P_{L_k}$ , складываясь, дают результирующую силу  $Z_\Sigma$ , действующую на ось цапфы кривошипа в радиальном направлении и равную

$$Z_\Sigma = Z_\Sigma + P_{L_k}, \quad (15)$$

3. Суммарная результирующая  $T_\Sigma$  всех сил  $T_i$  от боковых цилиндров и силы  $T_L$  от главного цилиндра; сила  $T_\Sigma$  действует в касательном направлении и равна

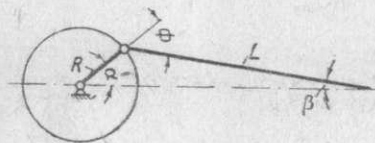
$$T_\Sigma = \sum T_i + T_L, \quad (16)$$

На фиг. 75 даны в виде примера построенные по углу поворота  $\alpha$  коленчатого вала кривые изменения сил  $Z_\Sigma$  и  $T_\Sigma$ , действующих на шатунную шейку мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs при  $n = 2400$  об/мин. и  $N_e = 860$  л. с.

На фиг. 76 и 77 даны построенные по углу поворота  $\alpha$  коленчатого вала кривые изменения сил  $Z_\Sigma$  и  $T_\Sigma$ , действующих на шатунную шейку мотора Curtiss-Wright „Cyclone“ при  $n = 1950$  об/мин. и  $N_e = 600$  л. с.

#### § 4. Векторные диаграммы результирующих сил, действующих на шатунную шейку и шатунный подшипник. Примеры. Средняя сила, действующая на шатунную шейку. Примеры. Графики для определения средних сил, действующих на шатунную шейку в моторах разного типа

В основу расчета шатунного подшипника кладется векторная диаграмма результирующей всех сил, действующих на соответствующую шатунную шейку коленчатого вала. Эта диаграмма представляет собой ряд векторов, проходящих через ось шатунной шейки; концы этих векторов лежат на поверхности шейки; длина каждого вектора соответствует в некотором масштабе указанной выше результирующей сил, действующих на шейку в момент, определяемый углом  $\alpha$  — поворота коленчатого вала от его начального положения. Результирующая находится либо при помощи многоугольника сил, либо как равнодействующая сил  $Z_\Sigma$  и  $T_\Sigma$ , определяемых аналитически. Последний способ практически является более удобным.

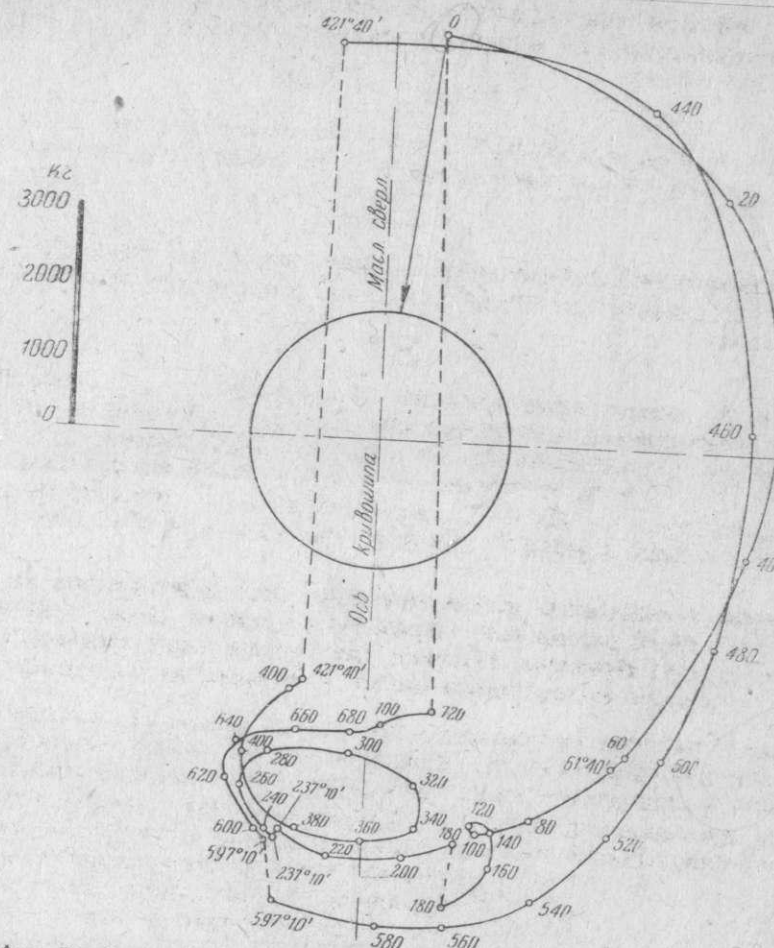


Фиг. 78. Угол перемещения подшипника шатуна относительно шатунной шейки.

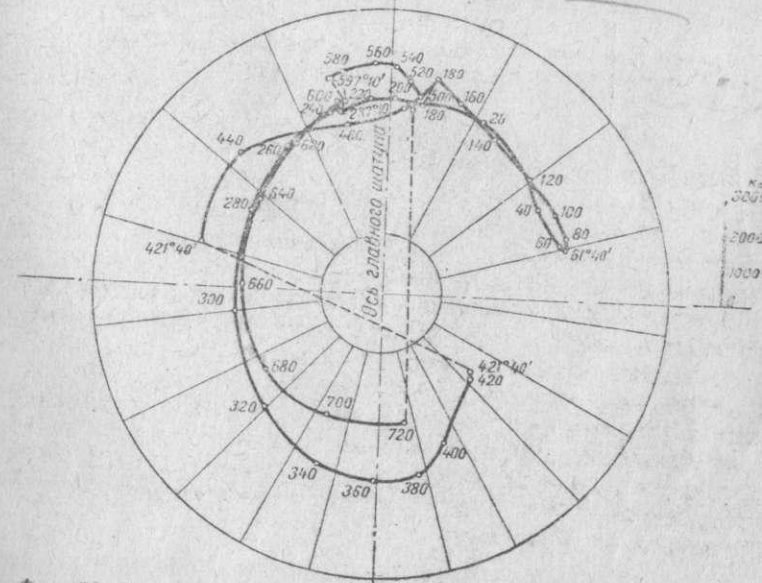
Результирующая всех сил, действующих для данного  $\alpha$  на шатунный подшипник, будет равна и противоположна соответствующей результирующей сил, действующих на шатунную шейку. На основании этого векторную диаграмму сил, действующих на подшипник, строят, накладывая кальку на соответствующую векторную диаграмму шейки и считая кальку за систему подшипника; поворачивая кальку около центра шейки так, чтобы для определенного  $\alpha$  взаимное угловое расположение кальки и векторной диаграммы шейки соответствовало действительному угловому расположению шейки и подшипника, переносят на кальку с векторной диаграммы шейки вектор силы, соответствующий данному  $\alpha$ , с обратным направлением. При этом надо иметь в виду, что относительная скорость вращения шатунного подшипника относительно шатунной шейки является переменной и угол поворота  $\Phi$  шатунного вкладыша (фиг. 78) относительно соответствующей шейки определяется в зависимости от угла поворота коленчатого вала  $\alpha$  из уравнения

$$\Phi = \alpha + \beta, \quad (17)$$

где  $\beta$  — угол отклонения оси шатуна от оси цилиндра.



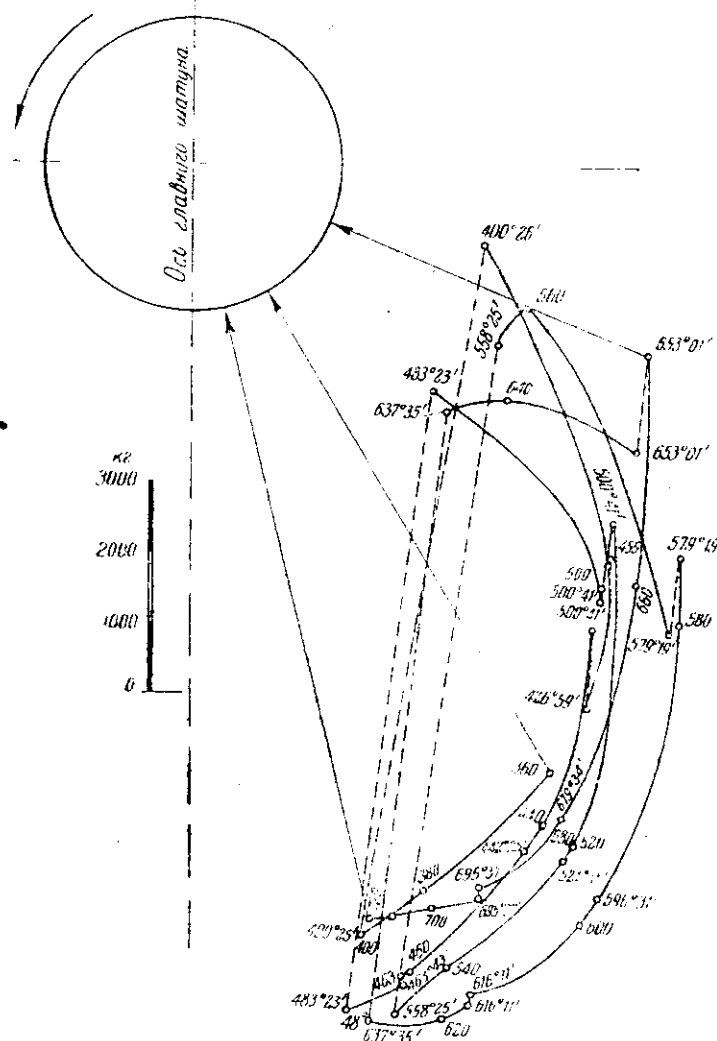
Фиг. 79. Векторная диаграмма сил, действующих на шатунную шейку вала мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.



Фиг. 80. Векторная диаграмма сил, действующих на шатунный подшипник вала мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.

### на для 4-тактных моторов

На фиг. 84 и 85 даны в виде примера развернутые по углу  $\alpha$  векторные диаграммы моторов Hispano-Suiza 12 Ybrs и Curtiss-Wright „Сус-е“ при указанных выше условиях их работы и указаны значения их  $K_{ср}$ .



Фиг. 82. Векторная диаграмма сил, действующих на шатунную шейку вала мотора Curtiss-Wright „Cyclone“ за 2-й оборот коленчатого вала.

Определение силы  $K_{ср}$  нормальным путем является достаточно кропотливой и занимает много времени. Быстрое определение силы  $K_{ср}$  с достаточной для практики точностью производится при помощи даваемых ниже таблиц, позволяющих определять силы  $K_{ср}$  для следующих типов авиационных моторов:

86 — для 6-цилиндровых однорядных авиамоторов,  
87 — „ 12-цилиндровых V-образных авиамоторов,  
88 „ 12- и 18-цилиндровых W-образных авиамоторов,  
89 „ 3-цилиндровых звездообразных авиамоторов,

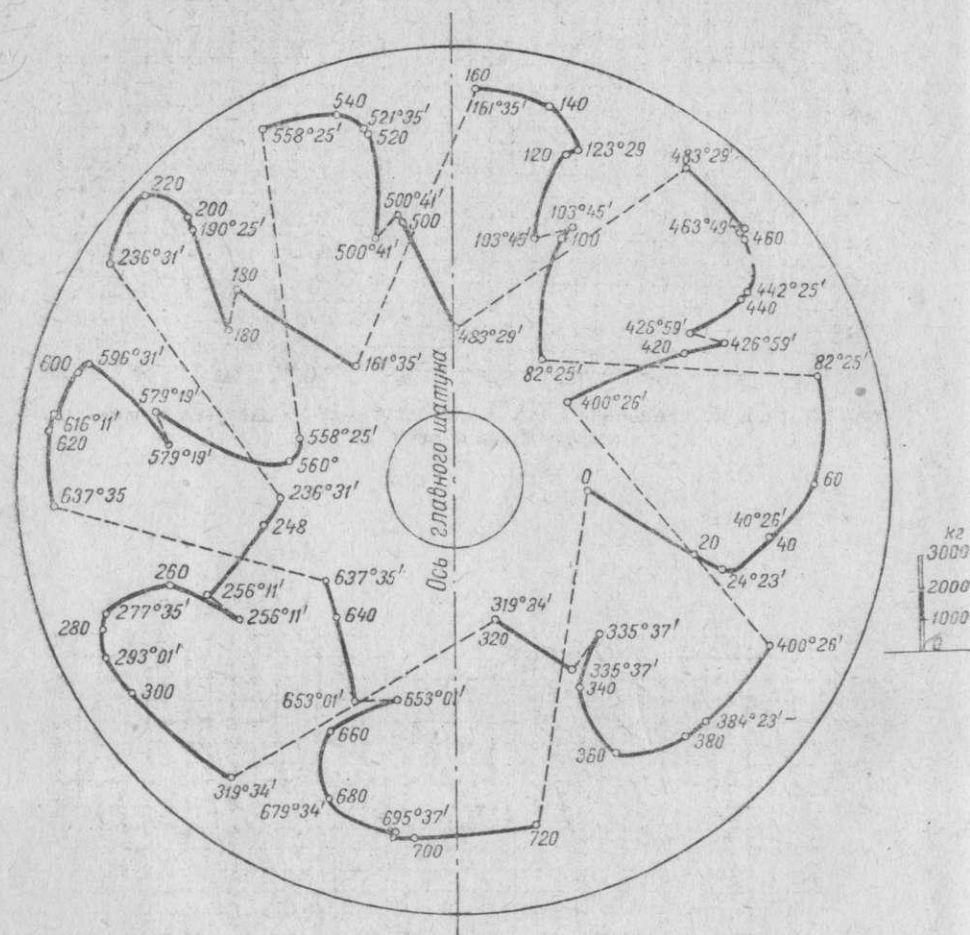
144



фиг. 90 — для 5-цилиндровых звездообразных авиамоторов,  
фиг. 91 — „ 7-цилиндровых звездообразных авиамоторов,  
фиг. 92 — „ 9-цилиндровых звездообразных авиамоторов.  
Определение  $K_{cp}$  по этим графикам производится следующим образом.

Обозначим:

$R$  — радиус кривошипа в м,  
 $\omega$  — угловую скорость коленчатого вала в сек.<sup>-1</sup>,  
 $i$  — число цилиндров, действующих на шатунную шейку,  
 $M_n$  — суммарную поступательно двигающуюся массу частей в одном цилиндре в кг сек<sup>2</sup>/м,



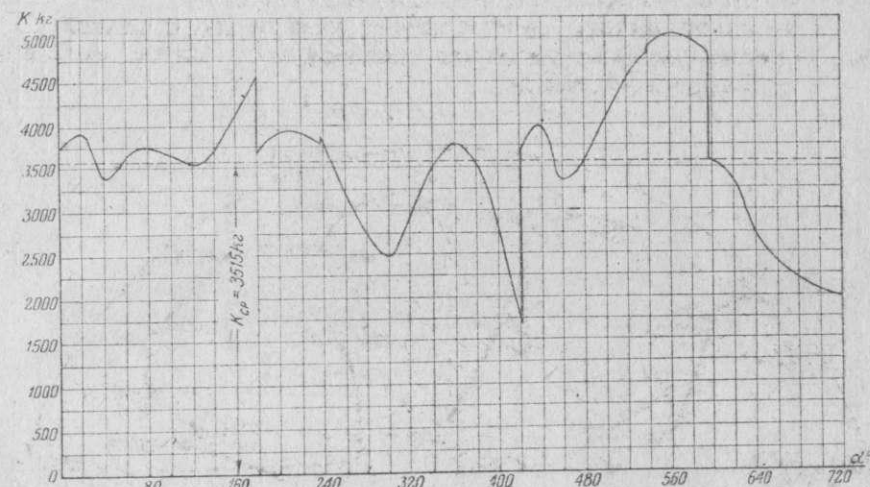
Фиг. 83. Векторная диаграмма сил, действующих на шатунный подшипник вала мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

$M_k$  — суммарную вращательно двигающуюся массу, отнесенную к шатунной шейке, в кг сек<sup>2</sup>/м,  
 $\varepsilon$  — степень сжатия мотора,  
 $p_e$  — среднее эффективное давление в кг/см<sup>2</sup>,  
 $p_0$  — давление начала сжатия в кг/см<sup>2</sup>,  
 $F_n$  — площадь поршня в см<sup>2</sup>

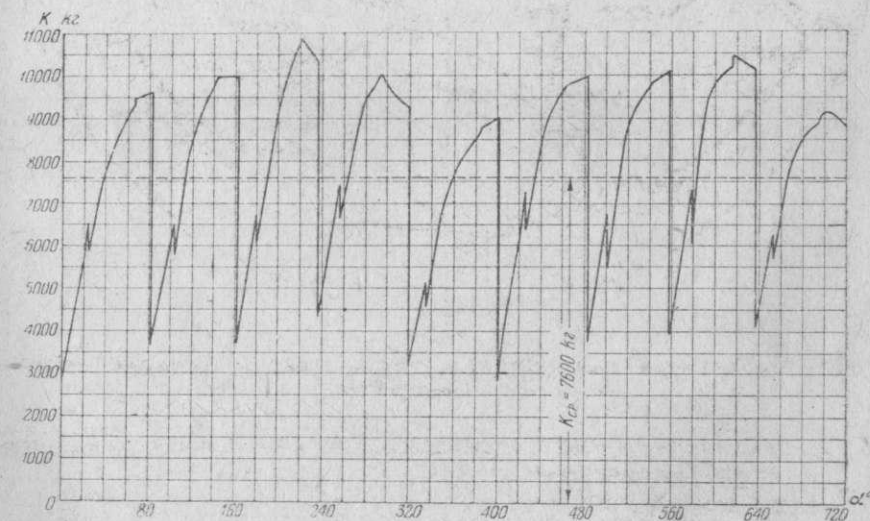
$$P_j = R \omega^2 (M_k + 0,5 i M_n). \quad (19)$$

Имея известными все эти величины, определяют для рассчитываемой шатунной шейки вала абсциссу, которая задана на соответствующем графике функцией величин

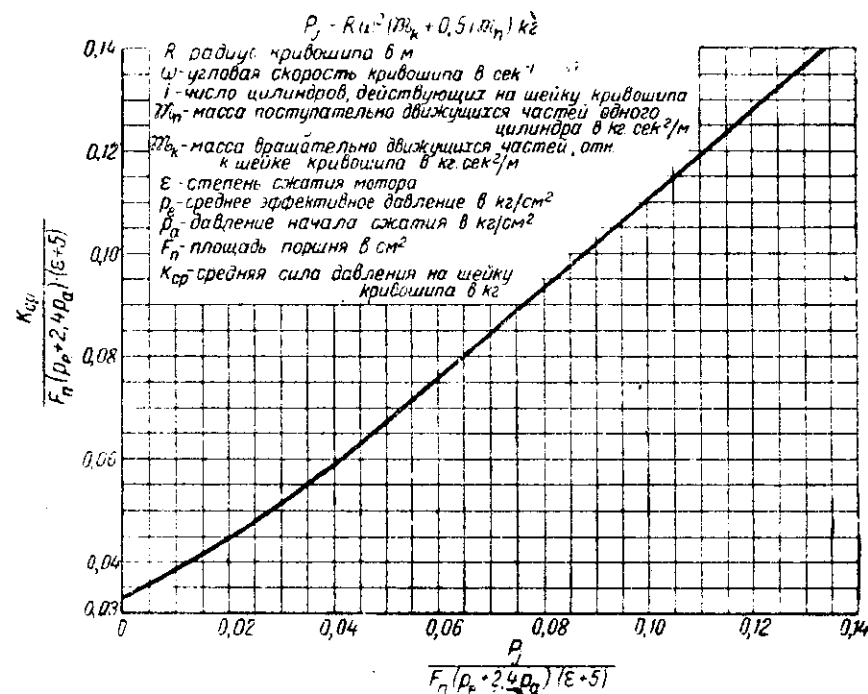
$$P_j, F_n, p_e, p_0 \text{ и } \varepsilon.$$



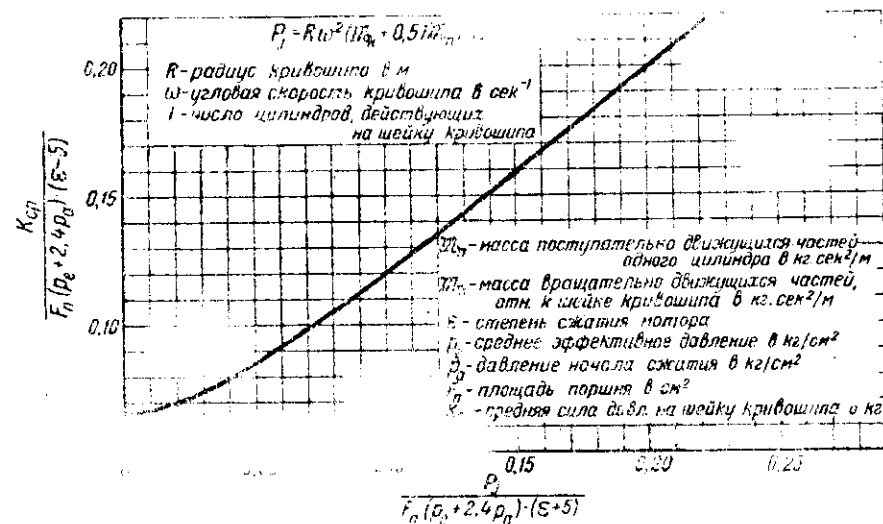
Фиг. 84. Кривые изменения силы  $K$ , действующей на шатунную шейку вала мотора Hispano-Sulza 12 Ybrs.



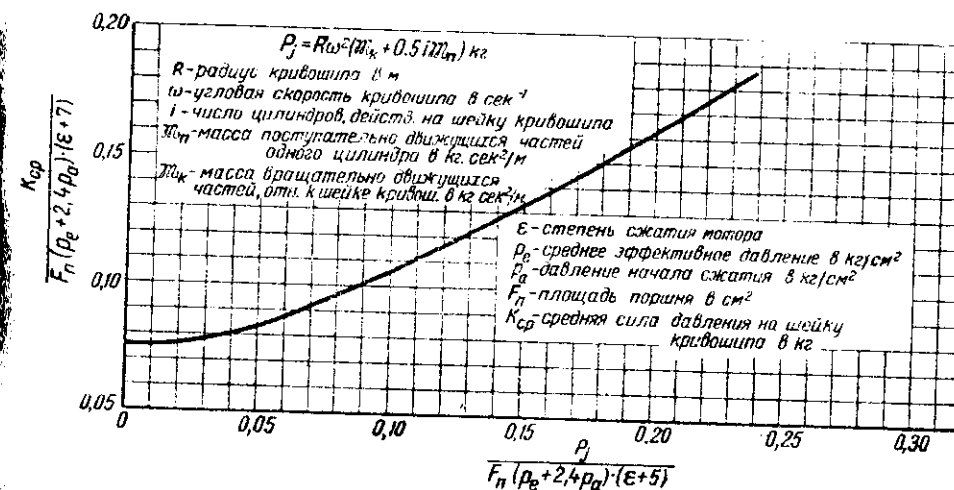
Фиг. 85. Кривые изменения силы  $K$ , действующей на шатунную шейку вала мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.



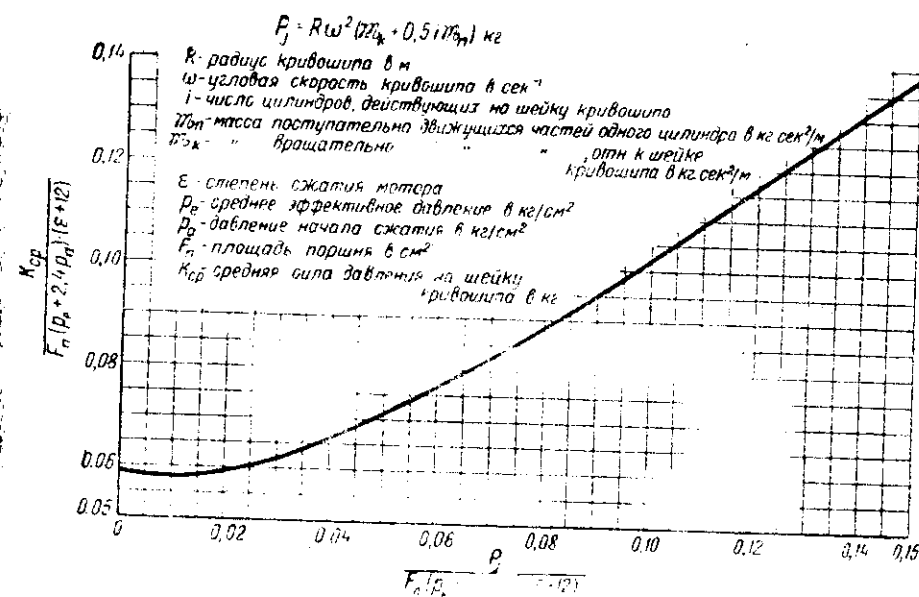
Фиг. 86. К определению  $K_{cp}$  на шатунной шейке вала 6-цилиндровых однорядных авиамоторов.



Фиг. 87. К определению  $K_{cp}$  на шатунной шейке вала 12-цилиндровых V-образных авиамоторов.

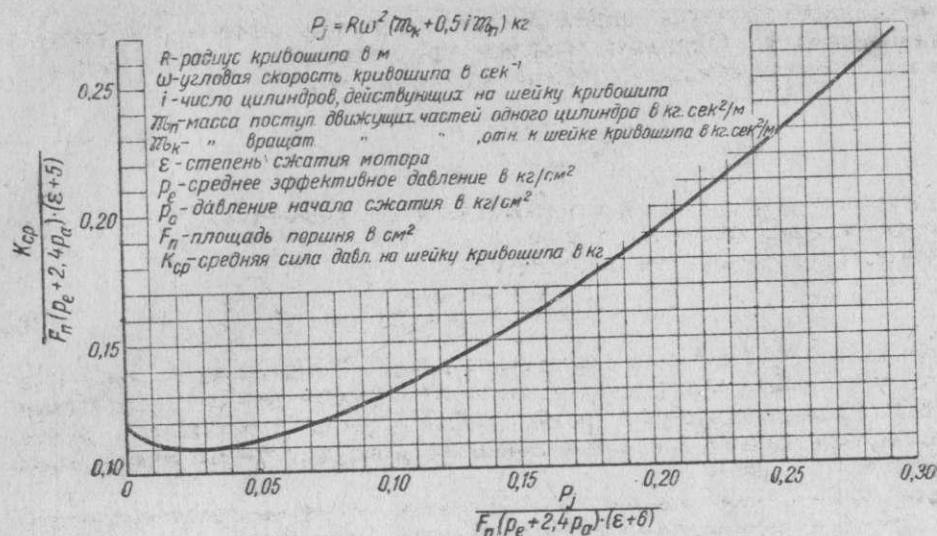


Фиг. 88. К определению  $K_{cp}$  на шатунной шейке вала 12- и 18-цилиндровых W-образных авиамоторов.

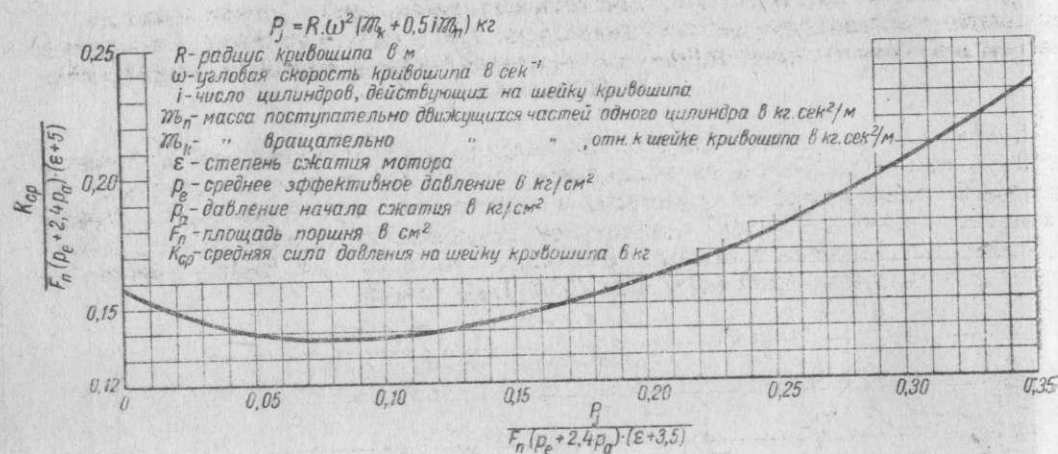


Фиг. 89. К определению  $K_{cp}$  на шатунной шейке вала 3-цилиндровых звездообразных авиамоторов.

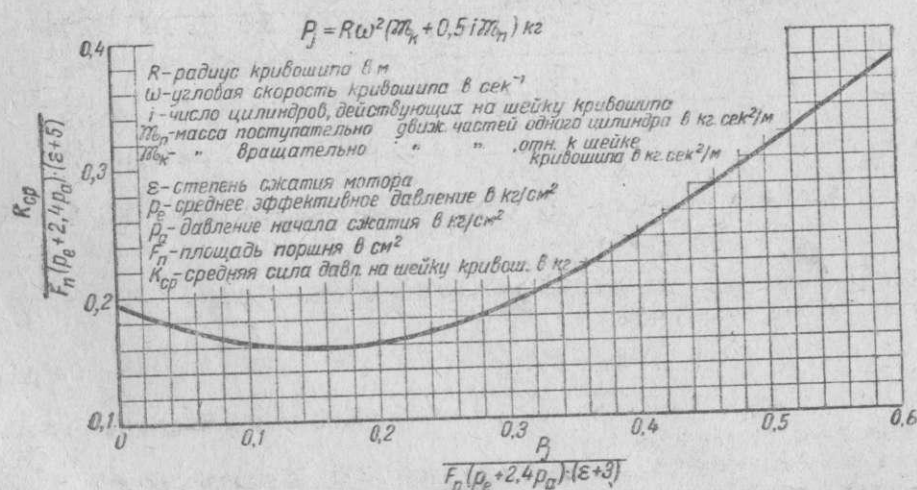




Фиг. 90. К определению  $K_{ср}$  на шатунной шейке вала 5-цилиндровых звездообразных авиамоторов.



Фиг. 91. К определению  $K_{ср}$  на шатунной шейке вала 7-цилиндровых звездобразных авиамоторов.



Фиг. 92. К определению  $K_{ср}$  на шатунной шейке вала 9-цилиндровых звездообразных авиамоторов.

По найденной абсциссе определяют по графику величину  $A$  соответствующей ординаты. Ордината графика представляет в свою очередь заданную на соответствующем графике функцию вида

$$\frac{K_{\text{ср}}}{f(F_n, \varepsilon, p_e, p_a)}$$

причем функция  $f(F_n, \varepsilon, p_e, p_a)$ , входящая в ее знаменатель, может быть определена по известным  $F_n, \varepsilon, p_e$  и  $p_a$ .

Искомое  $K_{\text{ср}}$  определится по формуле

$$K_{cp} = A \cdot f(F_n, \varepsilon, p_e, p_a). \quad (20)$$

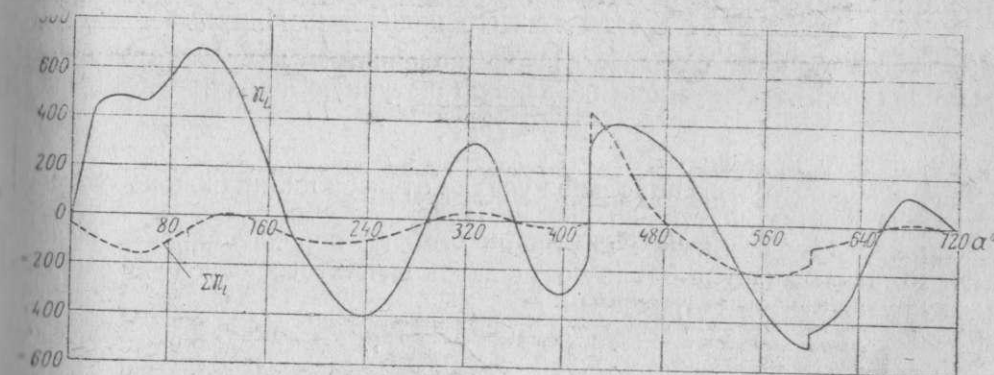
В отношении графика для определения  $K_{ср}$  в V-образных моторах надо заметить, что он был построен для моторов с углом между осями цилиндров в  $60^\circ$ ; однако, пользуясь этим графиком, можно определять достаточно точно величину  $K_{ср}$  и для V-образных моторов с углом между осями цилиндров в  $45$  и  $90^\circ$ .

Кривые, приведенные на фиг. 86—92, были получены графо-аналитическим методом, на изложении которого мы здесь останавливаться не будем.

§ 5. Результирующая сил, действующих нормально к стенке главного цилиндра и создаваемых работой цилиндров, действующих на данную шатунную шейку, при наличии кривошипно-шатунного механизма с прицепными шатунами.

### Примеры

В том случае, когда работа цилиндров, действующих на шатунную шейку вала, передается на последнюю посредством системы шатунов, из которых один является главным, а остальные — прицепными, на стенку главного цилиндра будет создаваться давление не только от сил, действующих на поршень главного цилиндра, но и от сил, действующих на поршни в боковых цилиндрах (см. § 1 этой главы).



Фиг. 93. Кривые изменения сил  $\mathcal{N}_L$  и  $\Sigma \mathcal{N}_L$  мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.

Результирующая  $\mathcal{N}_L$  всех сил  $\mathcal{N}_i$  от боковых цилиндров и силы  $N_L$  от главного цилиндра будет равна

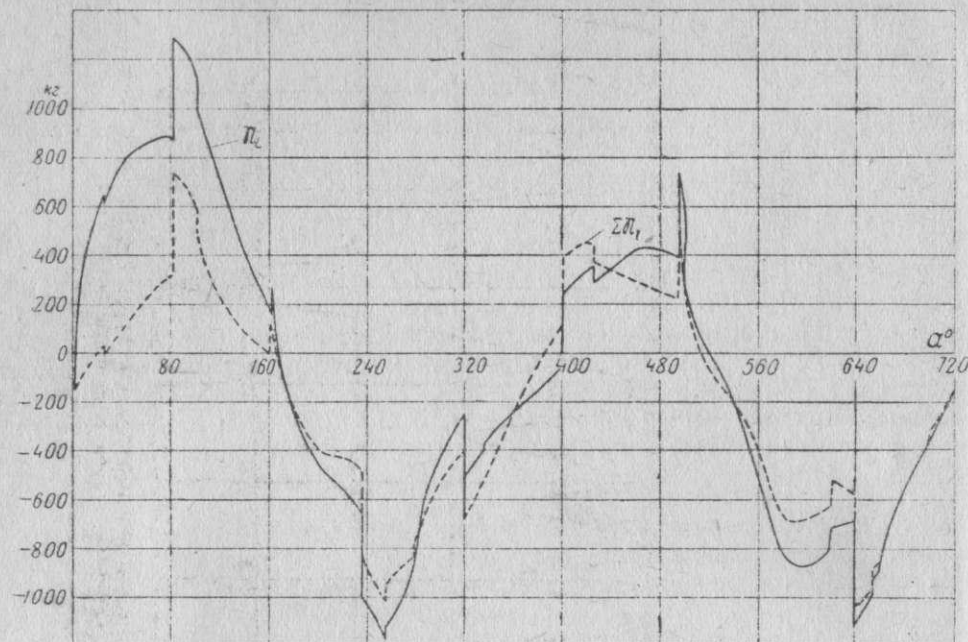
$$\mathfrak{N}_L = \Sigma \mathfrak{N}_l + N_L. \quad (21)$$

Этой силой определяется износ стенок [главного цилиндра и износ

Сила —  $\Sigma N$ , являющаяся реакцией на силу  $\Sigma N$ , вызывает поперечный изгиб стержня главного шатуна и принимается во внимание при расчете последнего на прочность.



На фиг. 93 и 94 даны в виде примеров кривые изменения сил  $\mathcal{N}_L$  и  $\Sigma \mathcal{N}_L$ , построенные по углу поворота коленчатого вала  $\alpha$  для моторов



Фиг. 94. Кривые изменения сил  $\mathcal{N}_L$  и  $\Sigma \mathcal{N}_L$  мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

Hispano-Suiza 12 Ybrs при  $N_e = 860$  л. с. и  $n = 2400$  об/мин. и Curtiss-Wright „Cyclone“ при  $N_e = 600$  л. с. и  $n = 1950$  об/мин.

#### § 6. Крутящие моменты, передающиеся через опорные шейки коленчатого вала; случай мотора с нагнетателем. Суммарный крутящий момент на валу двигателя от работы всех его цилиндров. Примеры

Крутящий момент, создаваемый на коленчатом валу мотора работой всех цилиндров, действующих на данную шатунную шейку, будет равен

$$M_{\Sigma} = RT_{\Sigma}, \quad (22)$$

где  $R$  — радиус кривошипа,

$T_{\Sigma}$  — суммарное тангенциальное усилие от всех цилиндров, работающих на данную шатунную шейку вала.

Если через  $M_n$  обозначим крутящий момент, передающийся к нагнетателю, то через любую опорную шейку коленчатого вала будет передаваться крутящий момент, равный

$$M_{кр} = \Sigma M_{\Sigma} - M_n, \quad (23)$$

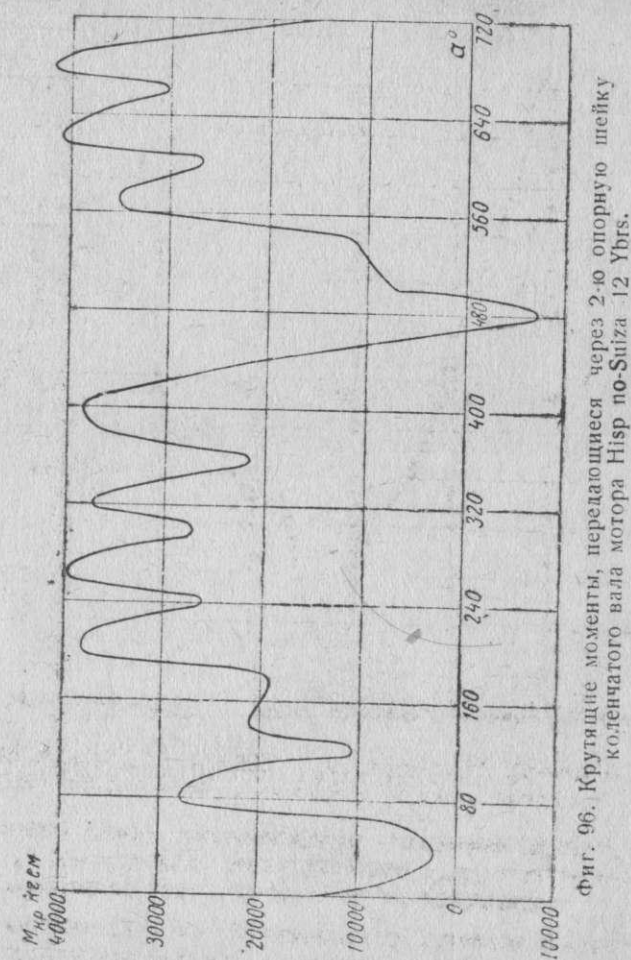
причем  $\Sigma M_{\Sigma}$  представляет сумму крутящих моментов всех кривошипов, лежащих к задку мотора от рассматриваемой шейки (передним концом мотора считается конец с пропеллером).

Очевидно, что суммарным крутящим моментом на валу двигателя от работы всех его цилиндров будет крутящий момент, передающийся через ближайшую к пропеллеру опорную шейку коленчатого вала.

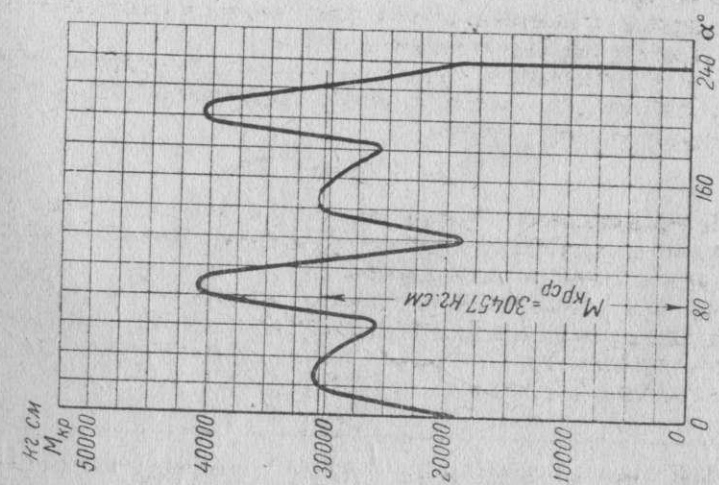
В случае мотора без нагнетателя  $M_n = 0$  и

$$M_{кр} = \Sigma M_{\Sigma}. \quad (24)$$

На фиг. 95, 96, 97 и 98 даны в виде примеров, построенные по углу поворота коленчатого вала  $\alpha$  кривые изменения крутящих моментов, передающихся через 1, 2, 3 и 4-ю опорные шейки коленчатого вала мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs при  $N_e = 860$  л. с. и  $n = 2400$  об/мин.

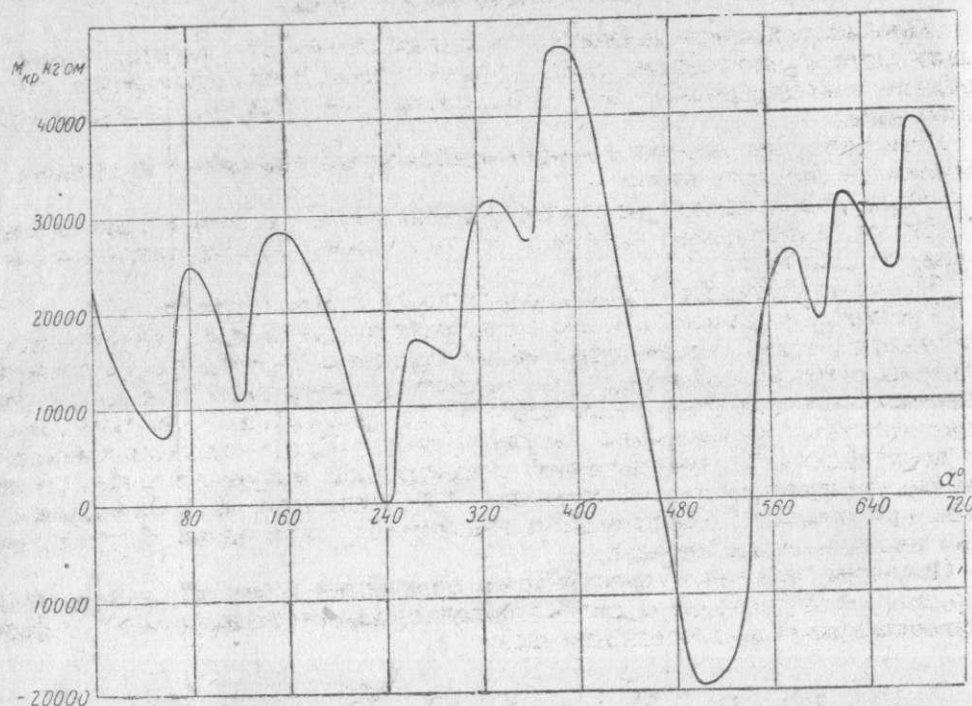


Фиг. 96. Крутящие моменты, передающиеся через 2-ю опорную шейку коленчатого вала мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.



Фиг. 95. Крутящие моменты, передающиеся через 1-ю опорную шейку коленчатого вала мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.





Фиг. 97. Крутящие моменты, передающиеся через 3-ю опорную шейку коленчатого вала мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.



Фиг. 98. Крутящие моменты, передающиеся через 4-ю опорную шейку коленчатого вала мотора Hispano-Suiza 12 Ybrs.

## § 7. Гармонический анализ суммарной тангенциальной силы на шатунной шейке от газов и инерции поступательно двигающихся масс в цилиндрах, действующих на эту шейку

При исследовании явлений крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора необходимо знать гармонические слагающие различных порядков тангенциальных сил, действующих на шатунные шейки коленчатого вала.

Эти силы, являясь источником возбуждения указанных колебаний, слагаются из сил трех видов:

- 1) сил, вызываемых давлением рабочих газов на поршни двигателя;
- 2) сил, вызываемых инерцией поступательно двигающихся масс в цилиндрах двигателя;
- 3) сил атмосферного противодействия на поршни двигателя.

Рассмотрим сначала случай, когда работа цилиндров, действующих на шатунную шейку коленчатого вала, передается последнему посредством системы шатунов, состоящей из главного и прицепных, и когда из динамического расчета двигателя известна построенная по углу поворота коленчатого вала  $\alpha$  диаграмма разультрирующей  $T_v$  всех тангенциальных сил от всех цилиндров, действующих на какую-либо шатунную шейку. В этом случае сначала производят гармонический анализ этой известной кривой  $T_v$  либо при помощи гармонического анализатора, либо одним из существующих аналитических методов.

Положим, что такой анализ нами произведен и что мы нашли, например, для 1-й от пропеллера шатунной шейки выражение для силы  $T_v$  в форме тригонометрического полинома вида

$$T_{v1} = A_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{1k} \cos \left( k \frac{\alpha}{2} \right) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{1k} \sin \left( k \frac{\alpha}{2} \right) \quad (25)$$

для 4-тактного мотора ( $\alpha$  изменяется от 0 до 720°) и в форме тригонометрического полинома вида

$$T_{v1} = A_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{1k} \cos(k\alpha) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{1k} \sin(k\alpha) \quad (25')$$

для 2-тактного мотора ( $\alpha$  изменяется от 0 до 360°), причем в равенствах (25) и (25') обозначают:

- $k$  — порядок гармоники,
- $A_{10}$  — среднюю ординату кривой силы  $T_{v1}$ ,
- $A_{1k}$  и  $B_{1k}$  — амплитуды фазовых слагающих гармоники  $k$ -го порядка силы  $T_{v1}$ .

Полагая в равенствах (25) и (25')

$$\left. \begin{aligned} A_{1k} &= T_{1k} \sin \beta_{1k} \\ B_{1k} &= T_{1k} \cos \beta_{1k} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

получим для 4-тактного мотора

$$\begin{aligned} A_{1k} \cos \left( k \frac{\alpha}{2} \right) + B_{1k} \sin \left( k \frac{\alpha}{2} \right) &= T_{1k} \sin \beta_{1k} \cos \left( k \frac{\alpha}{2} \right) + \\ &+ T_{1k} \cos \beta_{1k} \sin \left( k \frac{\alpha}{2} \right), \end{aligned}$$

или

$$A_{1k} \cos \left( k \frac{\alpha}{2} \right) + B_{1k} \sin \left( k \frac{\alpha}{2} \right) = T_{1k} \sin \left( k \frac{\alpha}{2} + \beta_{1k} \right). \quad (27)$$

Аналогично для 2-тактного мотора имеем

$$A_{1k} \cos(k\alpha) + B_{1k} \sin(k\alpha) = T_{1k} \sin(k\alpha + \beta_{1k}). \quad (27')$$



В выражениях (27) и (27') обозначают:

$T_{1k}$  — амплитуду гармоники  $k$ -го порядка силы  $T_{в1}$ ,

$\beta_{1k}$  — начальный фазовый угол этой гармоники.

Величины  $T_{1k}$  и  $\beta_{1k}$  определяются из соотношений (26), а именно:

$$T_{1k} = \sqrt{A_{1k}^2 + B_{1k}^2} \quad (28)$$

и

$$\operatorname{tg} \beta_{1k} = \frac{A_{1k}}{B_{1k}} \quad (29)$$

При определении угла  $\beta_{1k}$  из последнего равенства, необходимо принимать во внимание знаки величин  $A_{1k}$  и  $B_{1k}$ . Из равенств (26) следует приводимая в табл. 12 зависимость величины угла  $\beta_{1k}$  (четверть, которой соответствует угол  $\beta_{1k}$ ) от знаков величин  $A_{1k}$  и  $B_{1k}$ .

Таблица 12

К определению величины угла  $\beta_{1k}$

$A_{1k}$	$B_{1k}$	$\beta_{1k}$
+	+	I
+	-	II
-	-	III
-	+	IV

Принимая во внимание, что

$$\alpha = \omega t, \quad (30)$$

где  $\omega$  — средняя угловая скорость вращения коленчатого вала мотора и

$t$  — время, соответствующее углу поворота коленчатого вала  $\alpha$ ,

и обозначая через  $\Theta$  круговую частоту гармонического момента  $I$ -го порядка, равную

$$\left. \begin{aligned} \text{для 4-тактных двигателей } \Theta = \frac{\omega}{2} \\ \text{и} \\ \text{для 2-тактных двигателей } \Theta = \omega, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

получим для силы  $T_{в1}$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} T_{в1} &= A_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{1k} \cos(k\Theta t) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{1k} \sin(k\Theta t) = \\ &= A_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} T_{1k} \sin(k\Theta t + \beta_{1k}). \end{aligned} \quad (32)$$

Это выражение будет одинаковым как для 4-тактного, так и для 2-тактного мотора; необходимо только иметь в виду равенства (31).

Момент, закручивающий коленчатый вал мотора и создаваемый силой  $T_{в1}$ , в искомой форме будет

$$\begin{aligned} M_1 &= RA_{10} + R \sum_{k=1}^{k=p} A_{1k} \cos(k\Theta t) + R \sum_{k=1}^{k=p} B_{1k} \sin(k\Theta t) = \\ &= RA_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} RT_{1k} \sin(k\Theta t + \beta_{1k}) = \\ &= M_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} M_{1k} \cos(k\Theta t) + \sum_{k=1}^{k=p} N_{1k} \sin(k\Theta t) = \\ &= M_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} M_{1k} \sin(k\Theta t + \beta_{1k}), \end{aligned} \quad (33)$$

где  $R$  — радиус кривошипа. Именно с этими формами выражений для закручивающих коленчатый вал моментов приходится иметь дело при исследовании крутильных колебаний этого вала.

При обычно принятых в авиационных моторах порядках вспышек в цилиндрах, диаграммы результирующих тангенциальных сил, действующих на различные шатунные шейки коленчатого вала, будут одинаковы,

но сдвинуты по фазе на определенные углы. Поэтому, если известны выражения (25) и (25') суммарной тангенциальной силы  $T_{в1}$ , действующей на 1-ю шатунную шейку коленчатого вала, то легко получить соответствующие выражения для суммарной тангенциальной силы  $T_{вi}$ , действующей на  $i$ -ю шейку. Обозначим через  $\Delta_i$  тот угол, на который сила  $T_{в1}$  опережает силу  $T_{вi}$ ; тогда будем иметь для 4-тактных моторов

$$\begin{aligned} T_{вi} &= A_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \cos\left(k \frac{\alpha}{2}\right) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{ik} \sin\left(k \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= A_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{1k} \cos\left[\frac{k}{2}(\alpha - \Delta_i)\right] + \sum_{k=1}^{k=p} B_{1k} \sin\left[\frac{k}{2}(\alpha - \Delta_i)\right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Из последнего равенства для гармоник  $k$ -го порядка вытекает следующее соотношение:

$$\begin{aligned} A_{1k} \cos\left(\frac{k}{2}\alpha\right) + B_{1k} \sin\left(\frac{k}{2}\alpha\right) &= A_{1k} \cos\left[\frac{k}{2}(\alpha - \Delta_i)\right] + B_{1k} \sin\left[\frac{k}{2}(\alpha - \Delta_i)\right] = \\ &= A_{1k} \cos\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) \cos\left(\frac{k}{2}\alpha\right) + A_{1k} \sin\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) \sin\left(\frac{k}{2}\alpha\right) + \\ &+ B_{1k} \cos\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) \sin\left(\frac{k}{2}\alpha\right) - B_{1k} \sin\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) \cos\left(\frac{k}{2}\alpha\right) = \\ &= [A_{1k} \cos\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) - B_{1k} \sin\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right)] \cos\left(\frac{k}{2}\alpha\right) + \\ &+ [A_{1k} \sin\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) + B_{1k} \cos\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right)] \sin\left(\frac{k}{2}\alpha\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Это соотношение дает возможность определить искомые  $A_{1k}$  и  $B_{1k}$ . Для этих величин получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} A_{1k} &= A_{1k} \cos\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) - B_{1k} \sin\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) \\ B_{1k} &= A_{1k} \sin\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) + B_{1k} \cos\left(\frac{k}{2}\Delta_i\right) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Помимо этого непосредственно из равенства (34) имеем

$$A_{i0} = A_{10}. \quad (37)$$

Аналогично для 2-тактных моторов получим

$$T_{вi} = A_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \cos(k\alpha) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{ik} \sin(k\alpha), \quad (34')$$

причем

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= A_{1k} \cos(k\Delta_i) - B_{1k} \sin(k\Delta_i) \\ B_{ik} &= A_{1k} \sin(k\Delta_i) + B_{1k} \cos(k\Delta_i) \end{aligned} \right\} \quad (36')$$

и также

$$A_{i0} = A_{10}. \quad (37')$$

Принимая во внимание равенства (27) и (27'), получим для 4-тактного мотора

$$\begin{aligned} A_{1k} \cos\left(k \frac{\alpha}{2}\right) + B_{1k} \sin\left(k \frac{\alpha}{2}\right) &= T_{1k} \sin\left[\frac{k}{2}(\alpha - \Delta_i) + \beta_{1k}\right] = \\ &= T_{1k} \sin\left[k \frac{\alpha}{2} + \left(\beta_{1k} - k \frac{\Delta_i}{2}\right)\right] = T_{1k} \sin\left(k \frac{\alpha}{2} + \beta_{1k}\right) \end{aligned}$$



или

$$A_{ik} \cos\left(k \frac{\alpha}{2}\right) + B_{ik} \sin\left(k \frac{\alpha}{2}\right) = T_{ik} \sin\left(k \frac{\alpha}{2} + \beta_{ik}\right), \quad (38)$$

где

$$\beta_{ik} = \beta_{1k} - k \Delta_1. \quad (39)$$

Аналогично для 2-тактного мотора получим

$$A_{ik} \cos(k\alpha) + B_{ik} \sin(k\alpha) = T_{ik} \sin(k\alpha + \beta_{ik}), \quad (38')$$

где

$$\beta_{ik} = \beta_{1k} - k \Delta_1. \quad (39')$$

Момент, закручивающий коленчатый вал мотора и создаваемый силой  $T_{ik}$ , в искомой форме будет

$$\begin{aligned} M_i &= RA_{10} + R \sum_{k=1}^{k=p} A_{ik} \cos(k\Theta t) + R \sum_{k=1}^{k=p} B_{ik} \sin(k\Theta t) = \\ &= RA_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} RT_{ik} \sin(k\Theta t + \beta_{ik}) = \\ &= M_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} M_{ik} \cos(k\Theta t) + \sum_{k=1}^{k=p} M_{ik} \sin(k\Theta t) = \\ &= M_{10} + \sum_{k=1}^{k=p} M_{1k} \sin(k\Theta t + \beta_{ik}), \end{aligned} \quad (40)$$

причем  $\beta_{ik}$  определяется для 4-тактного мотора согласно равенству (39), и для 2-тактного согласно равенству (39').

Величина  $\Theta$  определяется согласно равенствам (31).

В основе вышеприведенных выводов лежал гармонический анализ кривой суммарной тангенциальной силы, действующей на шатунную шейку вала. В том случае, когда на шатунную шейку вала действуют только центральные шатуны или когда желают, хотя и приближенно, но быстро получить выражение для суммарной тангенциальной силы в форме тригонометрического полинома без предварительного подсчета и построения по углу  $\alpha$  диаграммы этой силы, поступают следующим образом. Находят сначала выражение в форме тригонометрического полинома для суммарной тангенциальной силы от одного цилиндра. Как указывалось раньше, эта тангенциальная сила складывается из трех сил:

- 1) из тангенциальной силы от давления газов на поршень,
- 2) из тангенциальной силы от атмосферного противодействия на поршень,
- 3) из тангенциальной силы от инерции суммарной поступательно движущейся в цилиндре массы.

Для первых двух сил выражение в форме тригонометрического полинома получается методом, изложенным в § 4 главы II. Согласно равенству (36), приведенному в главе II, для 4-тактного мотора имеем

$$T_r = T_0 + \sum_{k=1}^{k=p} A_{rk} \cos\left(k \frac{\alpha}{2}\right) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{rk} \sin\left(k \frac{\alpha}{2}\right), \quad (41)$$

где  $A_{rk}$  и  $B_{rk}$  определяются согласно равенствам (37) главы II.

Выражение в форме тригонометрического полинома для тангенциальной силы от инерции суммарной поступательно движущейся в цилиндре массы было нами найдено в § 4, главы I, части II. Это выражение [см. равенство (50) указанного параграфа] имеет вид

$$T_j = \sum_{k=1}^{k=p} B_{rk} \sin(k\alpha). \quad (42)$$

Складывая равенства (41) и (42), получим искомое выражение для суммарной тангенциальной силы от одного цилиндра

$$T_1 = T_r + T_j = T_0 + \sum_{k=1}^{k=p} A_{k1} \cos\left(k \frac{\alpha}{2}\right) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{k1} \sin\left(k \frac{\alpha}{2}\right). \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{k1} &= A_{rk}, \\ B_{k1} &= B_{rk}, \\ B_{k1} &= B_{rk} + B_{jm}. \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &k \text{ нечетных} \\ &k \text{ четных, } k = 2m \end{aligned} \quad (44)$$

Имея выражение (43) для силы  $T_1$  от одного цилиндра, легко найти аналогичное выражение для силы  $T_2$  от другого цилиндра, действующего на ту же шатунную шейку вала. Кривая изменения по углу поворота коленчатого вала  $\alpha$  силы  $T_2$  будет та же, что и для силы  $T_1$ , но сдвинута по фазе на угол  $\Delta_2$ , определяемый порядком вспышек в цилиндрах двигателя. Поэтому искомое выражение для силы  $T_2$  получится приемом совершенно аналогичным тому, который был применен нами при нахождении силы  $T_{r1}$  по известной силе  $T_{r1}$ . Имеем

$$T_2 = T_0 + \sum_{k=1}^{k=p} A_{k2} \cos\left(k \frac{\alpha}{2}\right) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{k2} \sin\left(k \frac{\alpha}{2}\right), \quad (45)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} A_{k2} &= A_{k1} \cos\left(\frac{k}{2} \Delta_2\right) - B_{k1} \sin\left(\frac{k}{2} \Delta_2\right) \\ B_{k2} &= A_{k1} \sin\left(\frac{k}{2} \Delta_2\right) + B_{k1} \cos\left(\frac{k}{2} \Delta_2\right) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Аналогичным образом найдутся соответствующие выражения для суммарных тангенциальных сил от других цилиндров, действующих на данную шатунную шейку вала. Складывая полученные выражения, найдем искомое выражение для суммарной тангенциальной силы от всех цилиндров, действующих на эту шейку

$$T_n = zT_0 + \sum_{k=1}^{k=p} A_k \cos\left(k \frac{\alpha}{2}\right) + \sum_{k=1}^{k=p} B_k \sin\left(k \frac{\alpha}{2}\right), \quad (47)$$

— число цилиндров, действующих на шатунную шейку;

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \sum_{i=1}^{i=z} A_{ki}, \\ B_k &= \sum_{i=1}^{i=z} B_{ki}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Выражение (47) идентично с выражением (25); поэтому все модификации последнего остаются в силе для первого.

В приводимых ниже табл. 13 и 14 даны в виде примеров результаты численного анализа суммарных тангенциальных сил, действующих на шейку валов моторов: 1) M-17 при  $N_e = 255$  л. с.;  $n = 1230$  об/мин.; 2) Curtiss-Wright „Cyclone“ при  $N_e = 600$  л. с.;  $n = 1950$  об/мин.

Для обоих моторов гармонический анализ был в целях сравнения проведен в двух вариантах:

- 1) без учета кинематики прицепного шатуна при определении сил  $T_r$  и  $T_j$ .
  - 2) с учетом кинематики прицепного шатуна при определении сил  $T_r$  и  $T_j$ .
- Рассмотрение данных табл. 13 и 14 показывает, что для V-образных моторов результаты анализа обоих вариантов близки; исключение составляет гармоника 6-го порядка, которая при анализе по первому варианту

равна нулю, а в действительности имеет место. С этой гармоникой приходится считаться в случае, когда она вызывает резонанс системы.

Для звездообразных моторов результаты гармонического анализа обоих вариантов близки только для гармоник, порядок которых кратен числу вспышек в цилиндрах мотора за один цикл. Поэтому в случае звездообразного мотора приходится делать гармонический анализ сил  $T_n$ , подсчитанных с учетом кинематики прицепных шатунов.

Таблица 13

Данные гармонического анализа суммарной тангенциальной силы, действующей на 1-ю шатунную шейку вала мотора M-17 при  $N_e = 255$  л. с.;  $n = 1230$  об/мин.;  $z = 6$

С учетом кинематики прицепного шатуна					Без учета кинематики прицепного шатуна				
$k$	$A_{1k}$	$B_{1k}$	$T_{1k}$	$\beta_{1k}$	$k$	$A_{1k}$	$B_{1k}$	$T_{1k}$	$\beta_{1k}$
1	-70,5	150,4	166	334°55'	1	-53,1	150	159	340°30'
2	478,2	388,5	615	50°56'	2	482,3	372,5	608	52°13'
3	-273	294	400	312°52'	3	-267,8	301,8	403	318°24'
4	-125,6	-32,2	130	255°37'	4	-113,9	-21,2	116	259°27'
5	-174,2	293,5	341	329°20'	5	-180,4	305	355	329°22'
6	-50,1	-22,1	54,6	246°14'	6	0	0	0	—
7	-46,8	197,2	202	346°32'	7	-52,3	192,9	199	344°47'
8	-75,3	-14,9	76,5	258°48'	8	-70	-19,7	72,8	254°16'
9	1,4	80,8	80,8	1°	9	1,8	88,4	88,4	1°10'
10	72,2	-9,2	72,5	277°16'	10	-80,8	13,8	82	279°41'
11	6,6	28,4	29,1	13°4'	11	8,5	20,2	21,9	22°50'
12	-60,5	25,6	65,6	292°58'	12	-60,6	26	66	293°14'
13	-32,9	-17,8	37,4	241°39'	13	-7	-11,6	13,5	211°5'
14	-25,4	24,7	35,4	314°9'	14	-27,8	24,4	37	311°15'
15	-24	-18,2	30,2	232°51'	15	-19	-19,2	26,9	224°43'

Таблица 14

Данные гармонического анализа суммарной тангенциальной силы, действующей на шатунную шейку вала мотора Curtiss-Wright „Cyclone“ при  $N_e = 600$  л. с.;  $n = 1950$  об/мин.;  $z = 6,4$

С учетом кинематики прицепных шатунов					Без учета кинематики прицепных шатунов				
$k$	$A_k$	$B_k$	$T_k$	$\beta_k$	$k$	$A_k$	$B_k$	$T_k$	$\beta_k$
1	9	97	98	5°18'	1	0	0	0	—
2	-213	-308	374	214°36'	2	0	0	0	—
3	60	-369	373	170°44'	3	0	0	0	—
4	69	135	151	27°1'	4	0	0	0	—
5	42	-28	50,4	123°41'	5	0	0	0	—
6	-51	5	51,5	275°39'	6	0	0	0	—
7	-62,9	32	70,5	296°58'	7	0	0	0	—
8	77,9	-27,6	82,5	109°32'	8	0	0	0	—
9	-845	858	1182	315°26'	9	-853	830	1190	314°15'
10	-0,5	38,7	38,7	359°15'	10	0	0	0	—
11	106,5	-74	130	124°47'	11	0	0	0	—
12	76,5	-20,9	79,5	105°17'	12	0	0	0	—
13	-16,5	66,5	68,6	346°4'	13	0	0	0	—
14	4,5	34,2	34,5	7°28'	14	0	0	0	—
15	-3,6	40,4	40,5	354°57'	15	0	0	0	—
18	-197,5	141,5	243	305°38'	18	-234	6	234	271°29'

Рассмотрим еще один практически важный случай, когда работа на цилиндры передается на шатунную шейку вала посредством системы шатунов, состоящей из главного и прицепных, но диаграмма результирующей тангенциальной силы  $T_n$  неизвестна. В этом случае выражение для  $T_n$  в форме тригонометрического полинома получается следующим образом

1. Находят выражение в форме тригонометрического полинома для тангенциальной силы от давления рабочих газов и атмосферного противодавления на поршень главного цилиндра согласно равенству (36), § 4, глава II

$$T_r = T_0 + \sum_{k=1}^{k=p} A_{rk} \cos\left(\frac{k}{2}\alpha\right) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{rk} \sin\left(\frac{k}{2}\alpha\right). \quad (49)$$

2. Находят выражение в форме тригонометрического полинома для тангенциальной силы от инерции суммарной поступательно двигающейся массы в главном цилиндре согласно равенству (49), § 4, глава I

$$T_j = \sum_{k=1}^{k=4} B_{jk} \sin(kz). \quad (50)$$

3. Находят выражение в форме тригонометрического полинома для тангенциальных сил от инерции суммарных поступательно двигающихся масс в боковых цилиндрах согласно равенству (68), § 6, глава I

$$T_{jk} = \sum_{k=1}^{k=4} A_{jk} \cos(kz) + \sum_{k=1}^{k=4} B_{jk} \sin(kz). \quad (51)$$

4. Находят выражение в форме тригонометрического полинома для суммарной тангенциальной силы (от сил давления рабочих газов и атмосферного противодавления на поршень) от каждого из боковых цилиндров в отдельности. Для этого поступают следующим образом. Так как зависимости (36) и (38), приведенные в § 4 главы I, являются общими, т. е. справедливы для любого кривошипно-шатунного механизма, то для кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном имеем

$$\begin{aligned} T_{rl} &= T_{0l} + \sum_{k=1}^{k=p} A_{rk}^{(l)} \cos\left(\frac{k}{2}\alpha\right) + \sum_{k=1}^{k=p} B_{rk}^{(l)} \sin\left(\frac{k}{2}\alpha\right) = \\ &= T_{0l} + F \sum_{k=1}^{k=p} \left[ (p'_r A_{rk}^{(l)} + p_c A_{ck}^{(l)} + A_{1k}^{(l)}) \cos\left(\frac{k}{2}\alpha\right) \right] + \\ &+ F \sum_{k=1}^{k=p} \left[ (p'_r B_{rk}^{(l)} + p_c B_{ck}^{(l)} + B_{1k}^{(l)}) \sin\left(\frac{k}{2}\alpha\right) \right], \end{aligned} \quad (52)$$

где индекс  $l$  указывает, что величины относятся к кривошипно-шатунному механизму с прицепным шатуном. Для определения входящих в выражение (52) величин  $A_{rk}^{(l)}$ ,  $B_{rk}^{(l)}$ ,  $A_{ck}^{(l)}$ ,  $B_{ck}^{(l)}$ ,  $A_{1k}^{(l)}$  и  $B_{1k}^{(l)}$  строят три диаграммы тангенциальных сил, действующих на шатунную шейку от рассматриваемого бокового цилиндра:

а) диаграмму тангенциальных сил от сил давления газов на поршень в боковом цилиндре по линии расширения, принимая теоретическое давление вспышки  $p'_z = 1$  кг/см<sup>2</sup>;

б) диаграмму тангенциальных сил от сил давления газов на поршень в боковом цилиндре по линии сжатия, принимая давление конца сжатия  $p_c = 1$  кг/см<sup>2</sup>;

в) диаграмму тангенциальных сил от сил атмосферного противодавления на поршень в боковом цилиндре по линиям расширения и сжатия.

Гармонический анализ первой диаграммы тангенциальных сил определяет величины  $A_{rk}^{(l)}$  и  $B_{rk}^{(l)}$ ; гармонический анализ второй диаграммы определяет величины  $A_{ck}^{(l)}$  и  $B_{ck}^{(l)}$ ; наконец, анализ третьей диаграммы определяет величины  $A_{1k}^{(l)}$  и  $B_{1k}^{(l)}$ .

Искомое выражение в форме тригонометрического полинома для суммарной тангенциальной силы, создаваемой на шатунной шейке работой всех действующих на нее цилиндров, найдется суммированием выражений (49), (50), (51) и (52).



Изложенный метод дает большую экономию в счетной работе, когда для данного мотора приходится строить ряд торсиограмм при разных числах оборотов коленчатого вала. В этом случае величины  $A_{pk}$ ,  $B_{pk}$ ,  $A_{ck}$ ,  $B_{ck}$  и  $B_{1k}$  берут прямо из прилагаемых в конце книги таблиц, а величины  $A_{pk}^{(i)}$ ,  $B_{pk}^{(i)}$ ,  $A_{ck}^{(i)}$ ,  $B_{ck}^{(i)}$ ,  $A_{1k}^{(i)}$  и  $B_{1k}^{(i)}$  определяют раз навсегда изложенным выше путем (для всех чисел оборотов коленчатого вала мотора эти величины для данного бокового цилиндра остаются одними и теми же).

#### Глава IV

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА

#### Общие положения

При расчете опорных подшипников коленчатого вала, а также при расчете на прочность картера мотора необходимо знать величины опорных реакций коленчатого вала. В настоящее время существует несколько способов определения этих реакций, а именно:

1. Вал считается разрезанным плоскостями, перпендикулярными его оси и проходящими через середины его опорных подшипников; выделенные таким образом колена вала принимаются свободно опертыми по концам на соответствующие подшипники. Этот метод является у нас наиболее распространенным как для определения величин опорных реакций коленчатого вала, так и для расчета последнего на прочность.

2. Вал считается разрезанным так же, как и в предыдущем методе, но выделенные колена вала принимаются заземленными по концам в соответствующих подшипниках. Этот способ определения опорных реакций и расчета коленчатого вала на прочность принят конструкторским отделением Инженерного отдела управления воздушного флота США.

3. Вал рассматривается как прямолинейный с постоянным сечением брус, свободно опертый на коренные подшипники коленчатого вала.

4. Вал рассматривается таким, как он есть, и принимается свободно опертым на свои опоры.

5. Вал разрезается плоскостями, перпендикулярными его оси и проходящими через середины соответствующих опорных подшипников таким образом, что полученные участки вала имеют несколько колен (два или три); эти участки рассматриваются как многоопорные бруссы (постоянного или переменного сечения в зависимости от принятого метода), свободно опертые на соответствующие подшипники коленчатого вала.

Наиболее близкие к действительности результаты должен давать четвертый метод. Однако и этот метод не учитывает таких, значительно влияющих на результаты факторов, как упругость картера мотора, наличие известного заземления коленчатого вала в его опорах, несоосность самих опорных подшипников коленчатого вала. Учет влияния шеек вала при этом методе также является весьма проблематичным. Помимо этого в практическом применении сам метод является, по крайней мере в отношении рядных моторов, чрезвычайно громоздким и сложным. Сказанным объясняется, почему этот метод не получил распространения в практике.

Значительно более удобным для практического применения является третий метод. Этот метод дает, как увидим ниже, результаты, несущественно отличающиеся от результатов, даваемых четвертым методом.

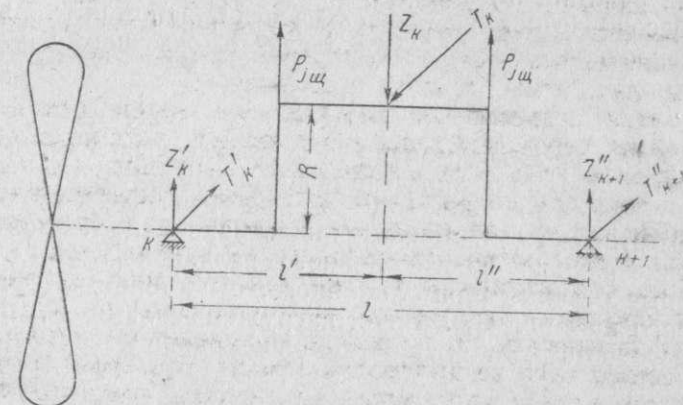
Не имея возможности рассмотреть здесь все перечисленные выше методы, ограничимся рассмотрением только первого и третьего методов. Интересующимся четвертым методом и результатами, даваемыми этим методом, рекомендуем статью инж. Р. С. Кинашвили „К расчету коленчатого вала авиационного мотора“, опубликованную в сборнике № 3 (за 1937 г.) Центрального научно-исследовательского института авиационного моторостроения им. П. И. Баранова.

### § 1. Определение опорных реакций коленчатого вала, считая последний разрезным

Положим (фиг. 99) мы вырезали указанным выше способом колено вала, находящееся между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м его опорными подшипниками. Положим далее, что на это колено при данном угле поворота коленчатого вала  $\alpha$  (по которому координируются все динамические процессы двигателя) действуют следующие силы:

$Z_k$  — результирующая всех сил, действующих в радиальном направлении на шатунную шейку рассматриваемого колена, включая и силу инерции самой шатунной шейки; эту силу считаем приложенной в середине шатунной шейки;

$T_k$  — результирующая всех тангенциальных сил, действующих на шатунную шейку; эту силу считаем тоже приложенной в середине шатунной шейки;



Фиг. 99. К определению опорных реакций коленчатого вала, считая его разрезной, свободно опертой балкой.

$P_{jш}$  — центробежные силы инерции шеек колена; эти силы считаем приложенными по осям соответствующих шеек.

Обозначая через

$Z'_k$  и  $Z'_{k+1}$  — реакции  $k$ -й и  $(k+1)$ -й опор рассматриваемого колена, вызываемые действием сил  $Z_k$  и  $P_{jш}$ ,

$T'_k$  и  $T'_{k+1}$  — реакции  $k$ -й и  $(k+1)$ -й опор колена, вызываемые действием сил  $T_k$  и

$R_{k\pi}$  — полную опорную реакцию  $k$ -й опорной шейки коленчатого вала от сил, действующих на два смежных с этой шейкой колена вала,

будем иметь (знак силы  $P_{jш}$  включен в ее обозначение)

$$Z'_k = -\frac{l''}{l} (Z_k + 2P_{jш}), \quad (1)$$

$$Z'_{k+1} = -\frac{l'}{l} (Z_k + 2P_{jш}), \quad (2)$$

$$T'_k = -\frac{l''}{l} T_k \quad (3)$$

$$T'_{k+1} = -\frac{l'}{l} T_k. \quad (4)$$

Зная силы  $Z_k$  и  $T_k$  от действия сил колена, расположенного справа от  $k$ -й опоры, и силы  $Z'_k$  и  $T'_k$  от действия сил колена, расположенного слева от  $k$ -й опоры [эти силы определяются аналогично определению сил  $Z'_{k+1}$  и



$T_{k+1}$ , см. равенства (2) и (4)], величину силы  $R_{k\Sigma}$  получим, складывая геометрически векторы сил  $Z_k$ ,  $T_k$ ,  $Z_k$  и  $T_k$ , т. е.

$$\bar{R}_{k\Sigma} = \bar{Z}_k + \bar{T}_k + \bar{Z}_k + \bar{T}_k, \quad (5)$$

В каждом конкретном случае величину силы  $R_{k\Sigma}$  можно получить либо чисто геометрическим путем, либо аналитическим, учитывая в обоих случаях угол между плоскостями смежных с  $k$ -й опорой колен. Задача решается элементарно просто, и останавливаться на этом мы здесь не будем.

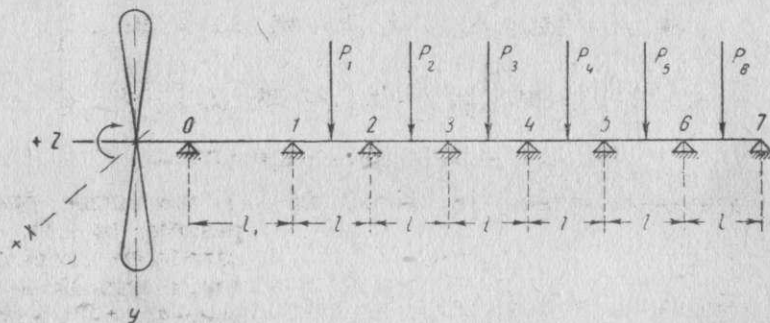
Сила давления на  $k$ -й подшипник со стороны коленчатого вала будет равна по величине и обратна по направлению силе  $\bar{R}_{k\Sigma}$ , т. е.

$$\bar{K}_k = -\bar{R}_{k\Sigma}.$$

Если рассматриваемое колено вала имеет противовесы, то при определении опорных реакций легко учесть влияние центробежных сил инерции этих противовесов. Не останавливаясь на этом, напомним только, что силы инерции противовесов определяются согласно сказанному в § 7, главы I, части II.

## § 2. Определение опорных реакций коленчатого вала, считая последний прямолинейной многоопорной балкой

Рассмотрим этот метод в применении к наиболее сложному в авиаторной практике случаю шестиколennого вала. Для этой цели определим сначала опорные реакции прямолинейного, с постоянным сечением бруса, представленного на фиг. 100. Брус нагружен силами  $P$ , приложенными в серединах соответствующих пролетов и находящимися в одной плоскости.



Фиг. 100. К определению опорных реакций коленчатого вала, считая его многоопорной, свободно опертой балкой с прямолинейной осью и постоянным по длине сечением.

Именно к такой схеме нагрузок приводится в рассматриваемом случае коленчатый вал, если все  $Z_i$  и  $T_i$  перенести на его ось и разложить их в направлении плоскости 1-го кривошипа и перпендикулярно ей. Для определения опорных реакций указанного бруса воспользуемся известной теоремой о трех моментах. Изложение этой теоремы можно найти в любом курсе сопротивления материалов, например, в курсе сопротивления материалов проф. С. П. Тимошенко. Теорема о трех моментах связывает определенным уравнением три опорных момента, соответствующих трем, последовательно расположенным опорам многоопорной неразрезной балки. Это уравнение для балки постоянного поперечного сечения и с опорами, расположенными на одной высоте, имеет вид

$$M_{i-1}l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} = -6 \frac{Q_i a_i}{l_i} - 6 \frac{Q_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} = N_i, \quad (6)$$

где (фиг. 101 и фиг. 102) обозначают

$M_{i-1}$ ,  $M_i$  и  $M_{i+1}$  — опорные моменты, соответствующие  $(i-1)$ -й,  $i$ -й и  $(i+1)$ -й опорам балки;

$l_i$  и  $l_{i+1}$  — длины пролетов балки соответственно между  $(i-1)$ -й и  $i$ -й, а также  $i$ -й и  $(i+1)$ -й опорами балки;

$Q_i$  и  $Q_{i+1}$  — моментные площади, соответствующие нагрузкам, лежащим на  $i$ -м и  $(i+1)$ -м пролете балки;

$a_i$  и  $b_{i+1}$  — координаты центров тяжести моментных площадей  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$ .

Составляя уравнения, подобные уравнению (6), для каждой пары смежных пролетов, получим систему уравнений, содержащую столько уравнений, сколько промежуточных опор и столько, следовательно, неизвестных опорных моментов, так как крайние опорные моменты  $M_0$  и  $M_n$  равны нулю (балка считается свободно опертой без защемления в опорах)

$$M_0 = M_n = 0. \quad (7)$$

Эта система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 &= N_1, \\ M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 &= N_2, \\ &\dots \dots \dots \\ M_{i-1}l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} &= N_i, \\ M_il_{i+1} + 2M_{i+1}(l_{i+1} + l_{i+2}) + M_{i+2}l_{i+2} &= N_{i+1}, \\ &\dots \dots \dots \\ M_{n-2}l_{n-2} + 2M_{n-1}(l_{n-2} + l_{n-1}) + M_nl_{n-1} &= N_{n-2}, \\ M_{n-1}l_{n-1} + 2M_n(l_{n-1} + l_n) &= N_{n-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Число уравнений системы (8) равно  $(n-1)$  при числе опор балки, равном  $(n+1)$ ; число неизвестных опорных моментов, принимая во внимание равенство (7), равно  $(n-1)$ .

Решения системы уравнений (8) будут иметь вид

$$M_k = \frac{D_k}{D}, \quad (9)$$

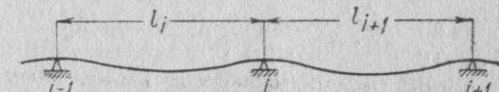
где  $D$  — определитель системы, а  $D_k$  — определитель, который отличается от определителя  $D$  тем, что на

место элементов  $k$ -го столбца поставлены свободные члены системы (8). Если разложить  $D_k$  по элементам  $k$ -го столбца, то получим

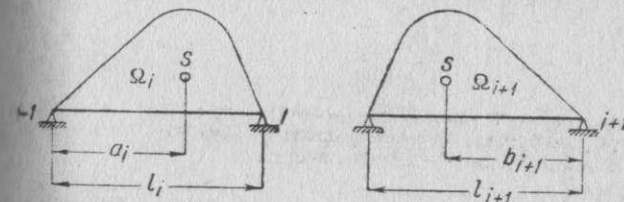
$$D_k = \sum_{m=1}^{m=n-1} A_{mk} N_m. \quad (10)$$

Отсюда

$$M_k = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{m=n-1} A_{mk} N_m. \quad (11)$$



Фиг. 101. К определению опорных моментов коленчатого вала, рассматриваемого как многоопорная, свободно опертая балка с прямолинейной осью и постоянным по длине сечением.



Фиг. 102. К определению опорных моментов коленчатого вала, рассматриваемого как многоопорная, свободно опертая балка с прямолинейной осью и постоянным по длине сечением.



Легко видеть, что каждый член  $\frac{1}{D} A_{mk} N_m$  суммы, стоящей в правой части равенства (11), представляет собой опорный момент  $k$ -й опоры для случая, когда все  $N$  равны нулю, за исключением  $N_m$ . Обозначая этот опорный момент через  $M_{km}$ , будем иметь

$$M_{km} = \frac{1}{D} A_{mk} N_m, \quad (12)$$

а следовательно,

$$M_k = \sum_{m=1}^{m=n-1} M_{km}. \quad (13)$$

Так как согласно равенству (12) опорный момент  $M_{km}$  пропорционален  $N_m$ , то  $M_{km}$  можно определить, принимая  $N_m = 1$  и определяя соответствующий опорный момент  ${}_1M_{km}$ . Момент  ${}_1M_{km}$  будет равен

$${}_1M_{km} = \frac{1}{D} A_{mk}, \quad (14)$$

а для момента  $M_{km}$  получим выражение

$$M_{km} = N_{m1} M_{km}. \quad (15)$$

Таким образом определение опорного момента  $M_{km}$  может быть сведено к определению опорного момента  ${}_1M_{km}$ .

Нетрудно показать путем преобразований соответствующих определителей  $D_i$  (доказательство не приводим<sup>1)</sup>), что

$${}_1M_{pq} = {}_1M_{qp}. \quad (16)$$

Принимая во внимание равенства (13), (15) и (16), будем иметь

$$M_k = \sum_{m=1}^{m=n-1} M_{km} = \sum_{m=1}^{m=n-1} N_{m1} M_{km} = \sum_{m=1}^{m=n-1} N_{m1} M_{mk}. \quad (17)$$

Последнее равенство показывает, что определение опорного момента  $M_k$  приводится к определению опорных моментов  ${}_1M_{mk}$ , причем  $m$  изменяется от  $m=1$  до  $m=n-1$ . Моменты  ${}_1M_{mk}$  легко определяются для любых  $m$  и  $k$  без решения соответствующих систем уравнений, если известны все опорные моменты  ${}_1M_{m1}$  и  ${}_1M_{m, n-1}$ , определяемые следующими системами уравнений:

$$\left. \begin{aligned} &2(l_1 + l_2) {}_1M_{11} + l_2 {}_1M_{21} = 1, \\ &l_2 {}_1M_{11} + 2(l_2 + l_3) {}_1M_{21} + l_3 {}_1M_{31} = 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ &l_k {}_1M_{k-1, 1} + 2(l_k + l_{k+1}) {}_1M_{k1} + l_{k+1} {}_1M_{k+1, 1} = 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ &l_{n-2} {}_1M_{n-3, 1} + 2(l_{n-2} + l_{n-1}) {}_1M_{n-2, 1} + l_{n-1} {}_1M_{n-1, 1} = 0, \\ &l_{n-1} {}_1M_{n-2, 1} + 2(l_{n-1} + l_n) {}_1M_{n-1, 1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

M

[illegible]

<sup>1</sup> Доказательство этого положения вполне аналогично доказательству, приводимому нами в § 4 главы III, часть III.

Положим, что решения систем уравнений (18) и (19) известны и надо найти значения опорных моментов  $M_{mk}$ , т. е. найти решения следующей системы уравнений:

[illegible]

Из структуры систем уравнений (18), (19) и (20) вытекает, что при  $k \geq m \geq 1$

$$\frac{{}_1M_{mk}}{{}_1M_{1k}} = \frac{{}_1M_{mn}}{{}_1M_{1n}} \quad (21)$$

и при  $n > m > k$

$$\frac{{}_1M_{mk}}{{}_1M_{nk}} = \frac{{}_1M_{m1}}{{}_1M_{n1}} \quad (22)$$

Принимая во внимание соотношение (16), получим при  $k \geq m \geq 1$

$${}_1M_{mk} = \frac{{}_1M_{mn}}{{}_1M_{1n}} {}_1M_{k1} \quad (23)$$

и при  $n > m \geq k$

$${}_1M_{mk} = \frac{{}_1M_{m1}}{{}_1M_{n1}} {}_1M_{kn}. \quad (24)$$

Так как все входящие в правые части равенств (23) и (24) величины известны из решений систем уравнений (18) и (19), то величины  $M_{mk}$  могут быть легко найдены по зависимостям (23) и (24), не прибегая к решению системы уравнений (20). Этим подтверждается сделанное выше замечание.

Полученные нами соотношения значительно облегчают счетную работу при определении опорных моментов многоопорной балки.

Вернемся к брусу, представленному на фиг. 100. Для него будут иметь место следующие соотношения

$$\Omega_i = \frac{1}{8} l_i^2 P_{i-1}, \quad \Omega_{i+1} = \frac{1}{8} l_{i+1}^2 P_i, \quad P_0 = 0, \quad (25)$$

$$a_i = \frac{1}{2} l_i, \quad b_{i+1} = \frac{1}{2} l_{i+1}, \quad (26)$$

$$N_i = -6 \frac{\Omega_i a_i}{l_i} - 6 \frac{\Omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} = -\frac{3}{8} (l_i^2 P_{i-1} + l_{i+1}^2 P_i). \quad (27)$$

Так как для схемы, показанной на фиг. 100,

$$l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = l_7 = l, \quad (28)$$

то, обозначая

$$\frac{l_1}{l} = q \quad (29)$$

Принимая во внимание равенства (27), получим следующую систему уравнений для определения опорных реакций системы, приведенной на фиг. 100, соответствующую системе уравнений (8):



$$\begin{aligned}
2(1+q)M_1 + M_2 &= -\frac{3}{8}lP_1, \\
M_1 + 4M_2 + M_3 &= -\frac{3}{8}l(P_1 + P_2), \\
M_2 + 4M_3 + M_4 &= -\frac{3}{8}l(P_2 + P_3), \\
M_3 + 4M_4 + M_5 &= -\frac{3}{8}l(P_3 + P_4), \\
M_4 + 4M_5 + M_6 &= -\frac{3}{8}l(P_4 + P_5), \\
M_5 + 4M_6 &= -\frac{3}{8}l(P_5 + P_6).
\end{aligned} \quad (30)$$

Согласно сказанному выше, решение этой системы уравнений сводится к решению следующих двух вспомогательных систем уравнений, соответствующих системам (18) и (19)

$$\begin{aligned}
2(1-q)M_{11} + M_{21} &= 1, \\
M_{11} + 4M_{21} + M_{31} &= 0, \\
M_{21} + 4M_{31} + M_{41} &= 0, \\
M_{31} + 4M_{41} + M_{51} &= 0, \\
M_{41} + 4M_{51} + M_{61} &= 0, \\
M_{51} + 4M_{61} &= 0.
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
2(1+q)M_{16} + M_{26} &= 0, \\
M_{16} + 4M_{26} + M_{36} &= 0, \\
M_{26} + 4M_{36} + M_{46} &= 0, \\
M_{36} + 4M_{46} + M_{56} &= 0, \\
M_{46} + 4M_{56} + M_{66} &= 0, \\
M_{56} + 4M_{66} &= 1.
\end{aligned} \quad (32)$$

Системы (31) и (32) решаются очень просто, и решения их могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{aligned}
M_{51} &= -4, & M_{26} &= -2q - 2, \\
M_{41} &= 15, & M_{16} &= 8q + 7, \\
M_{31} &= -56, & M_{46} &= -30q - 26, \\
M_{21} &= 209, & M_{56} &= 112q + 97, \\
M_{11} &= -780, & M_{66} &= -418q - 362, \\
M_{61} &= -\frac{1}{1560q + 1351}, & M_{16} &= -\frac{1}{1560q + 1351}.
\end{aligned} \quad (33)$$

Имея решения (33), легко найти при помощи зависимостей (23) и (24) значения величин  $M_{mk}$  для любых  $m$  и  $k$  и составить таблицу этих величин. В схеме, представленной на фиг. 100,  $k$  меняется от 1 до 6,  $m$  меняется тоже от 1 до 6. Всего, следовательно, будет  $6 \times 6 = 36$  значений

величин  $M_{mk}$ ; однако, пользуясь зависимостью (16), подсчитать придется только 21 значение, так как согласно этой зависимости

$$M_{mk} = M_{km},$$

причем и из этого 21 значения 11 уже найдены выше и определяются равенствами (33).

В табл. 15 даны в виде примера значения величин  $M_{mk}$ , подсчитанные для одного частного случая авиационного мотора, имеющего  $l_1 = 13,27$  см;  $l = 18$  см и  $q = 0,7372$ .

Таблица 15

Величины опорных моментов  $M_{mk}$  для одного авиационного мотора

$k \backslash m$	1	2	3	4	5	6
$M_{1k}$	0,3120	-0,0836	0,0224	-0,0060	0,0016	-0,0004
$M_{2k}$	-0,0836	0,2901	-0,0784	0,0210	-0,0056	0,0014
$M_{3k}$	0,0224	-0,0784	0,2890	-0,0780	0,0208	-0,0052
$M_{4k}$	-0,0060	0,0210	-0,0780	0,2887	-0,0768	0,0192
$M_{5k}$	0,0016	-0,0056	0,0208	-0,0768	0,2873	-0,0718
$M_{6k}$	-0,0004	0,0014	-0,0052	0,0192	-0,071	0,2680

Имея эту таблицу, легко подсчитать при помощи равенства (17) опорные моменты  $M_k$ . Принимая во внимание правые части системы уравнений (30), будем иметь:

$$M_k = \sum_{m=1}^6 M_{mk} N_m = -\frac{3}{8}l [M_{1k}P_1 + M_{2k}(P_1 + P_2) + M_{3k}(P_2 + P_3) + M_{4k}(P_3 + P_4) + M_{5k}(P_4 + P_5) + M_{6k}(P_5 + P_6)].$$

Отсюда

$$M_k = -\frac{3}{8}l [(M_{1k} + M_{2k})P_1 + (M_{2k} + M_{3k})P_2 + (M_{3k} + M_{4k})P_3 + (M_{4k} + M_{5k})P_4 + (M_{5k} + M_{6k})P_5 + M_{6k}P_6]. \quad (34)$$

Легко видеть, что каждое слагаемое последнего равенства представляет собой  $k$ -й опорный момент при действии на систему только одной нагрузки, соответствующей этому слагаемому. Обозначая

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{8}(M_{1k} + M_{2k})lP_1 &= M_{k1}, \\
-\frac{3}{8}(M_{2k} + M_{3k})lP_2 &= M_{k2}, \\
-\frac{3}{8}(M_{3k} + M_{4k})lP_3 &= M_{k3}, \\
-\frac{3}{8}(M_{4k} + M_{5k})lP_4 &= M_{k4}, \\
-\frac{3}{8}(M_{5k} + M_{6k})lP_5 &= M_{k5}, \\
-\frac{3}{8}M_{6k}lP_6 &= M_{k6},
\end{aligned} \quad (35)$$



получим

$$M_k = \sum_{i=1}^6 M_{ki} \quad (36)$$

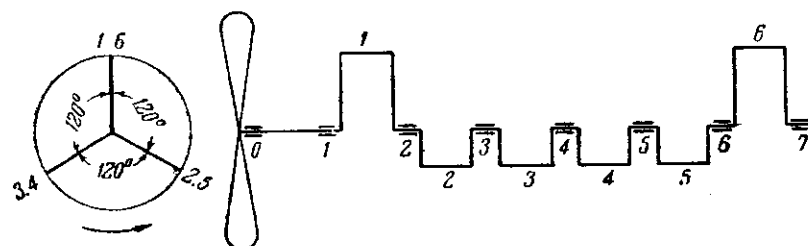
В табл. 16 приведены значения моментов  $M_{k1}, M_{k2}, \dots, M_{k6}$  для вышеуказанного примера.

Таблица 16

Величины опорных моментов  $M_{k1}, \dots, M_{k6}$  для одного авиационного мотора

№ опоры $k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$M_{k1}$	0	$-1,541 P_1$	$-1,395 P_1$	$0,374 P_1$	$-0,100 P_1$	$0,276 P_1$	$-0,00668 P_1$	0
$M_{k2}$	0	$0,413 P_2$	$-1,435 P_2$	$-1,424 P_2$	$0,381 P_2$	$-0,102 P_2$	$0,0254 P_2$	0
$M_{k3}$	0	$-0,111 P_3$	$0,384 P_3$	$-1,427 P_3$	$-1,426 P_3$	$0,380 P_3$	$-0,0950 P_3$	0
$M_{k4}$	0	$0,0297 P_4$	$-0,103 P_4$	$0,384 P_4$	$-1,428 P_4$	$-1,419 P_4$	$0,355 P_4$	0
$M_{k5}$	0	$-0,00810 P_5$	$0,0281 P_5$	$-0,104 P_5$	$0,390 P_5$	$-1,454 P_5$	$-1,324 P_5$	0
$M_{k6}$	0	$0,00270 P_6$	$-0,00981 P_6$	$0,0348 P_6$	$-0,130 P_6$	$0,485 P_6$	$-1,809 P_6$	0

В начале этого параграфа было указано, что к схеме, представленной на фиг. 100, приводится коленчатый вал и его нагрузки, если рассматривать коленчатый вал как прямолинейный, многоопорный брус постоянного по длине сечения. Для приведения вала к этой схеме все силы  $Z_i$  и  $T_i$ , действующие на кривошипы коленчатого вала, переносятся на ось вала и принимаются сосредоточенными нагрузками, приложенными в серединах



Фиг. 103. Схема коленчатого вала 12-цилиндрового V-образного авиационного мотора.

соответствующих пролетов. Силы инерции шек колена  $P_{i\pi}$  включаются в силу  $Z_i$  соответствующего колена. Затем силы  $Z_i$  и  $T_i$  раскладываются по направлению плоскости первого кривошипа и по направлению, перпендикулярному этой плоскости. Обозначая слагающие сил  $Z_i$  и  $T_i$  в направлении указанной плоскости и в направлении, перпендикулярном этой плоскости, соответственно через  $Y$  и  $X$  с индексами римскими цифрами, получим для обычной схемы коленчатого вала V-образного, 12-цилиндрового авиационного мотора, представленной на фиг. 103, следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} Y_I &= Z_I, \\ Y_{II} &= -Z_{II} \cos 60^\circ - T_{II} \cos 30^\circ, \\ Y_{III} &= -Z_{III} \cos 60^\circ + T_{III} \cos 30^\circ, \\ Y_{IV} &= -Z_{IV} \cos 60^\circ + T_{IV} \cos 30^\circ, \\ Y_V &= -Z_V \cos 60^\circ - T_V \cos 30^\circ, \\ Y_{VI} &= Z_{VI} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} X_I &= -T_I, \\ X_{II} &= -Z_{II} \cos 30^\circ + T_{II} \cos 60^\circ, \\ X_{III} &= Z_{III} \cos 30^\circ + T_{III} \cos 60^\circ, \\ X_{IV} &= Z_{IV} \cos 30^\circ + T_{IV} \cos 60^\circ, \\ X_V &= -Z_V \cos 30^\circ + T_V \cos 60^\circ, \\ X_{VI} &= -T_{VI} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Система сил  $Y$  — равенства (37) — и система сил  $X$  — равенства (38), — взятые в отдельности, и представляют схему сил, соответствующую фиг. 100. Указанным выше способом определяют опорные моменты отдельно для каждой из этих систем сил. Таким образом для каждой опоры найдутся два опорных момента, из которых один действует в плоскости первого колена, а другой — в плоскости, перпендикулярной первой. Соответственно этим двум системам опорных моментов находятся и опорные реакции.

Для определения опорных реакций вернемся опять к схеме, приведенной на фиг. 100. Величины опорных реакций в общем случае (фиг. 101) определяются на основании известного из курса сопротивления материалов соотношения

$$R_i = A_{i+1} + B_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} - \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}, \quad (39)$$

где, помимо уже известных обозначений,

$A_{i+1}$  — реакция левой опоры простой балки, опертой по концам и нагруженной нагрузкой, лежащей на  $(i+1)$ -м пролете;

$B_i$  — реакция правой опоры аналогичной балки, нагруженной нагрузкой, лежащей на  $i$ -м пролете.

Для определения реакции  $k$ -й опоры схемы, приведенной на фиг. 100, воспользуемся принципом сложения действия сил, согласно которому

$$R_k = \sum_{i=1}^{i=6} R_{ki}, \quad (40)$$

где  $R_k$  — реакция  $k$ -й опоры от действия всех сил схемы,

$R_{ki}$  — реакция  $k$ -й опоры от силы  $P_i$ , действующей на пролет бруса, расположенный между  $i$ -й и  $(i+1)$ -й опорами последнего.

Согласно равенству (39), имеем

$$R_{ki} = \frac{M_{k+1,i} - M_{ki}}{l_{k+1}} - \frac{M_{ki} - M_{k-1,i}}{l_k} \quad (41)$$

случаев, когда  $i < (k-1)$  или  $i > k$ , и

$$R_{ki} = \frac{1}{2} P_i + \frac{M_{k+1,i} - M_{ki}}{l_{k+1}} - \frac{M_{ki} - M_{k-1,i}}{l_k} \quad (41')$$

случаев, когда  $i = k-1$  или  $i = k$ .

Имея таблицу величины  $M_{ki}$ , легко найти согласно равенствам (41) и (41') величины  $R_{ki}$ , а следовательно, и величины  $R_k$  при помощи равенства (40).

В табл. 17 даны значения величин  $R_{ki}$  для взятого выше примера. Определив реакцию  $R_{ky}$   $k$ -й опоры от действия системы сил  $Y$  [см. равенство (37)] и реакцию  $R_{kx}$  этой опоры от действия системы сил  $X$  [см. равенство (38)], легко определить полную реакцию опоры  $R_{k\Sigma}$ ; она будет равна

$$R_{k\Sigma} = \sqrt{R_{ky}^2 + R_{kx}^2}. \quad (42)$$

Величины опорных реакций  $R_k$  для одного авиационного мотора

№ опоры $k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$R$								
$R_{k1}$	$-0,1161 P_1$	$0,6242 P_1$	$0,5903 P_1$	$-0,1246 P_1$	$0,0334 P_1$	$-0,0089 P_1$	$0,0022 P_1$	$-0,0004 P_1$
$R_{k2}$	$0,0311 P_2$	$-0,1337 P_2$	$0,6032 P_2$	$0,5997 P_2$	$-0,1271 P_2$	$0,0339 P_2$	$0,0085 P_2$	$0,0014 P_2$
$R_{k3}$	$-0,0083 P_3$	$0,0358 P_3$	$-0,1281 P_3$	$0,6007 P_3$	$0,6002 P_3$	$-0,1267 P_3$	$0,0317 P_3$	$-0,0053 P_3$
$R_{k4}$	$0,0022 P_4$	$-0,0096 P_4$	$0,0344 P_4$	$-0,1276 P_4$	$0,6011 P_4$	$0,5980 P_4$	$-0,1182 P_4$	$0,0197 P_4$
$R_{k5}$	$-0,0006 P_5$	$0,0026 P_5$	$-0,0094 P_5$	$0,0348 P_5$	$-0,1298 P_5$	$0,6096 P_5$	$0,5663 P_5$	$-0,0736 P_5$
$R_{k6}$	$0,0002 P_6$	$-0,0009 P_6$	$0,0031 P_6$	$-0,0116 P_6$	$0,0433 P_6$	$-0,1615 P_6$	$0,7279 P_6$	$0,3997 P_6$

Зная по величине и направлению  $R_{k\sum}$  для разных углов поворота  $\alpha$  коленчатого вала, легко построить векторную диаграмму сил давления  $K_k$  на подшипник  $k$ -й опоры. Сила  $K_k$  по величине будет равна силе  $R_{k\sum}$ , а по направлению противоположна последней. Векторная диаграмма сил  $K_k$  строится по известной векторной диаграмме сил  $R_{k\sum}$  при помощи кальки совершенно так, как это делалось при построении векторной диаграммы сил давления на шатунный подшипник; необходимо только иметь в виду, что относительная скорость опорной шейки и опорного подшипника постоянна и равна  $\omega$  — угловой скорости вращения коленчатого вала мотора.

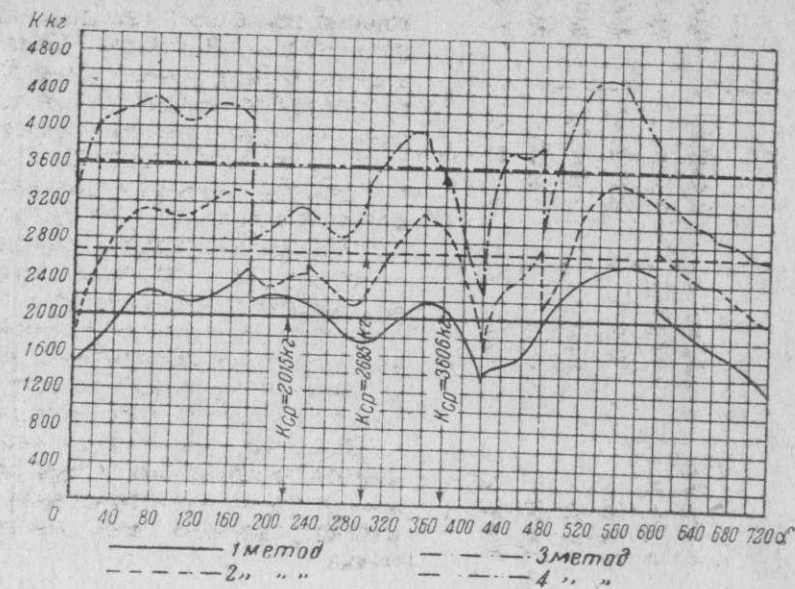
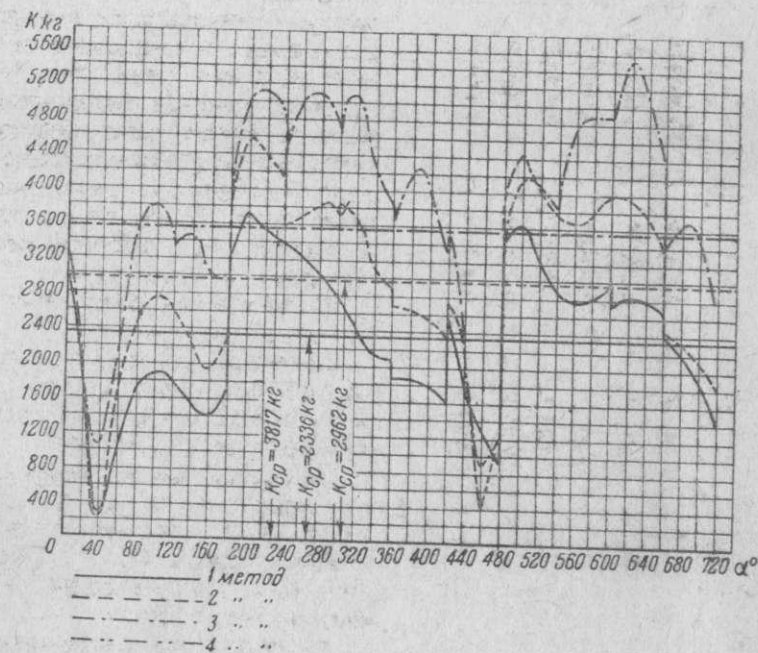
Заметим, что знание опорных моментов необходимо и при расчете на прочность коленчатого вала мотора, рассматриваемого как многоопорная балка.

### § 3. Сравнение результатов, полученных различными методами расчета

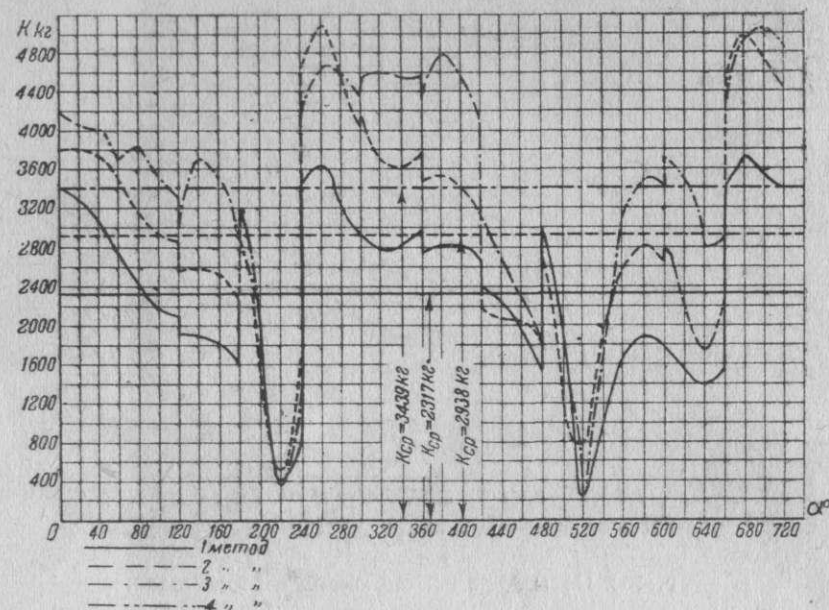
Различные методы определения сил давления на опорные подшипники коленчатого вала мотора дают при одном и том же угле поворота  $\alpha$  вала различные по величине и направлению значения этих сил. Чтобы проследить влияние различных методов расчета, рассмотрим результаты, полученные для вышеприведенного примера коленчатого вала одного 12-цилиндрового V-образного авиационного мотора при расчете следующими четырьмя методами:

- 1) считая вал разрезным и свободно опертым;
- 2) считая вал неразрезной, свободно опертой балкой с прямолинейной осью и постоянным по длине балки поперечным сечением;
- 3) считая вал неразрезным, свободно опертым, и учитывая влияние колен вала способом, изложенным в книге проф. С. П. Тимошенко и инж.-мех. Дж. Лессельс „Прикладная теория упругости“;
- 4) считая вал разрезным и защемленным в опорах.

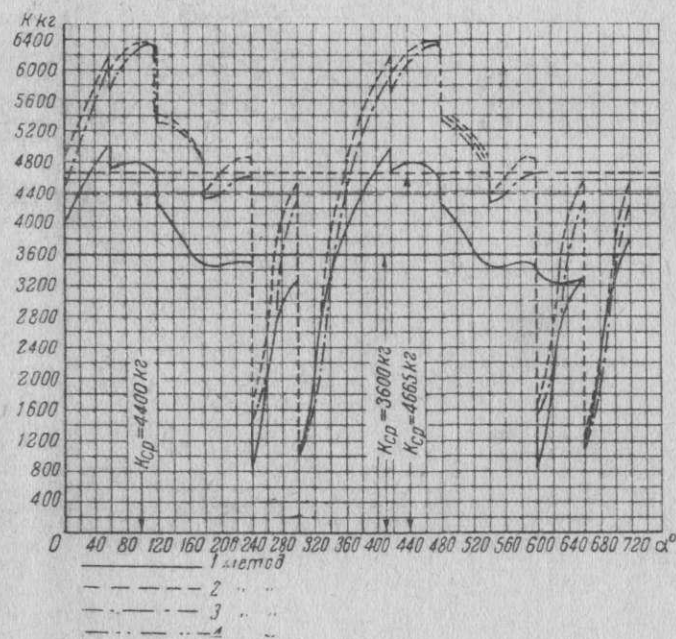
На фиг. 104, 105, 106 и 107 приведены построенные по углу поворота коленчатого вала  $\alpha$  диаграммы сил давления  $K$  соответственно на

Фиг. 104. Силы  $K$  на 1-й опоре коленчатого вала.Фиг. 105. Силы  $K$  на 2-й опоре коленчатого вала.





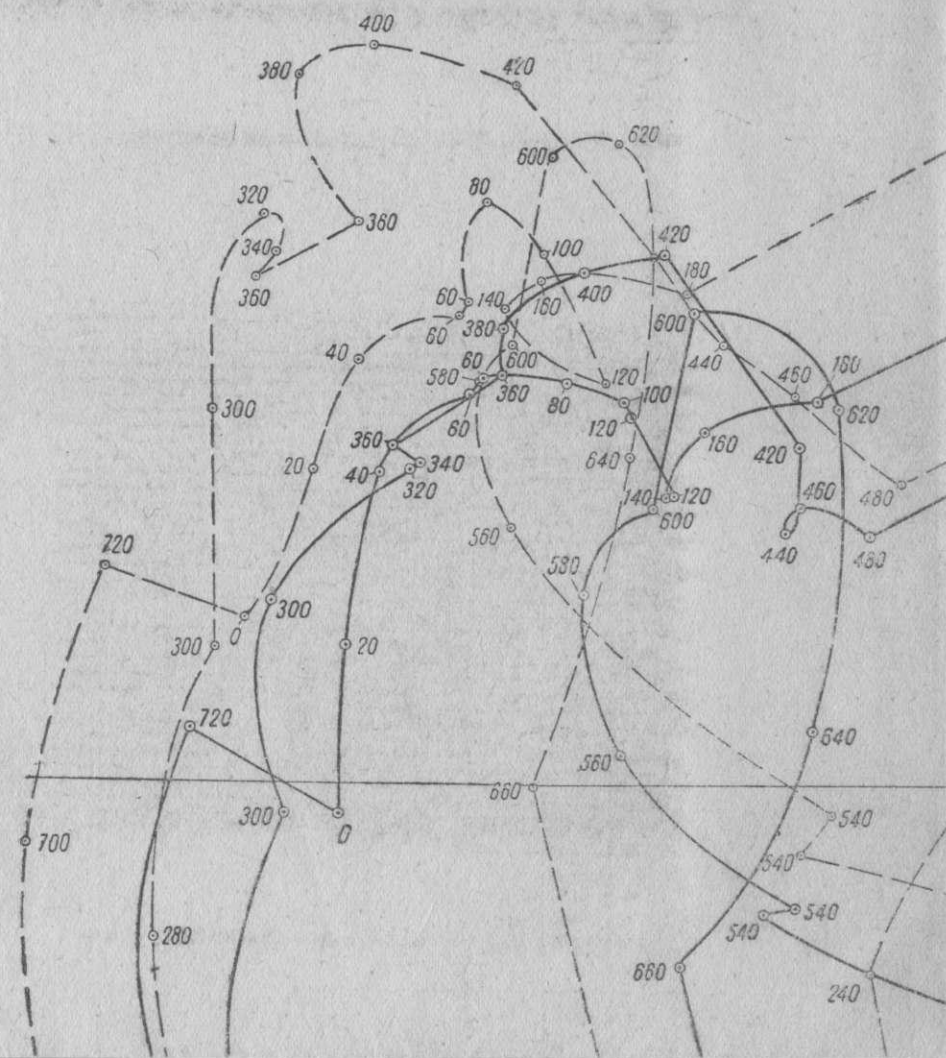
Фиг. 106. Силы  $K$  на 3-й опоре коленчатого вала.



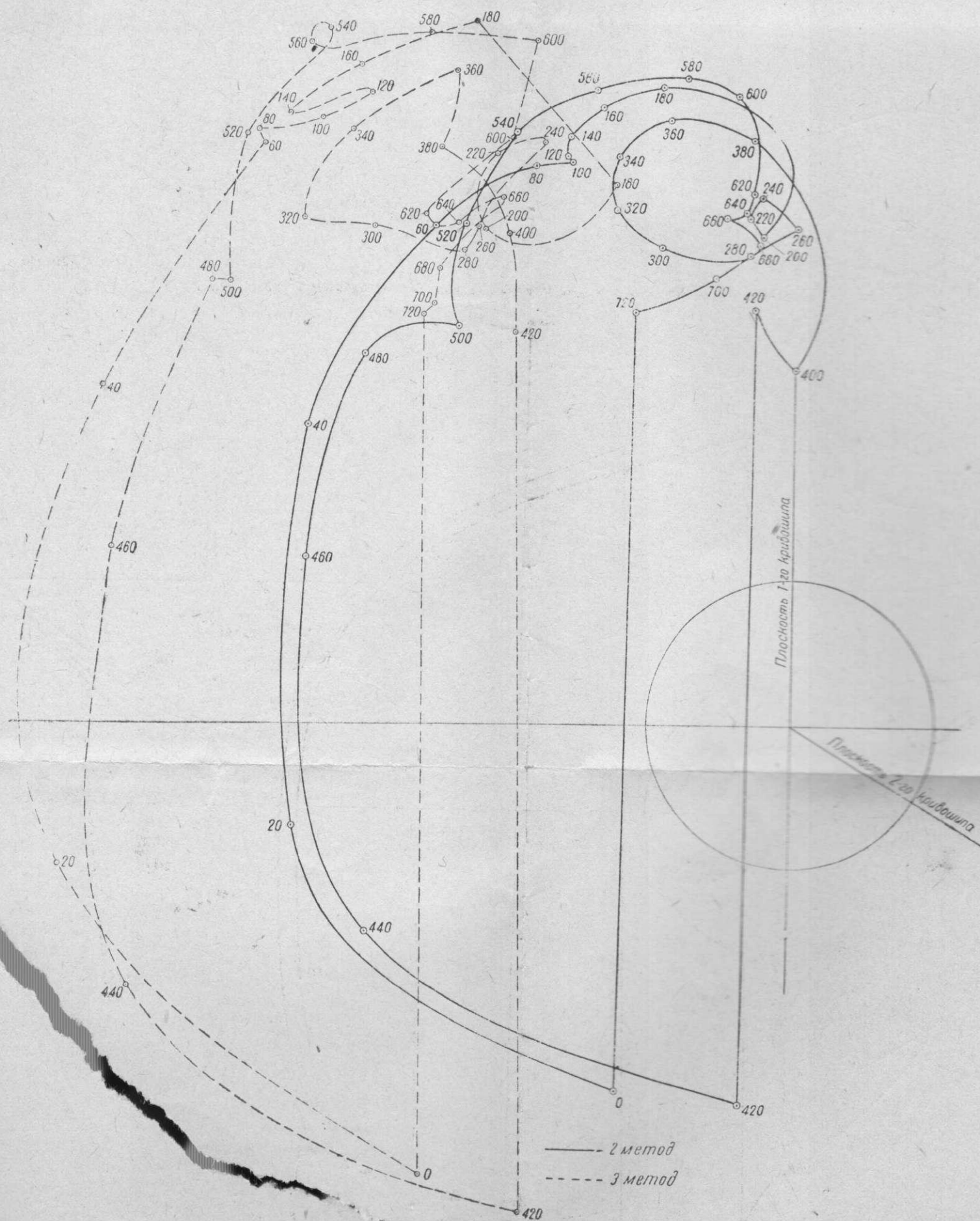
Фиг. 107. Силы  $K$  на 4-й опоре коленчатого вала.

1-ю, 2-ю, 3-ю и 4-ю опоры коленчатого вала (фиг. 100), причем силы  $K$

и сил  $K$  на эти годами.

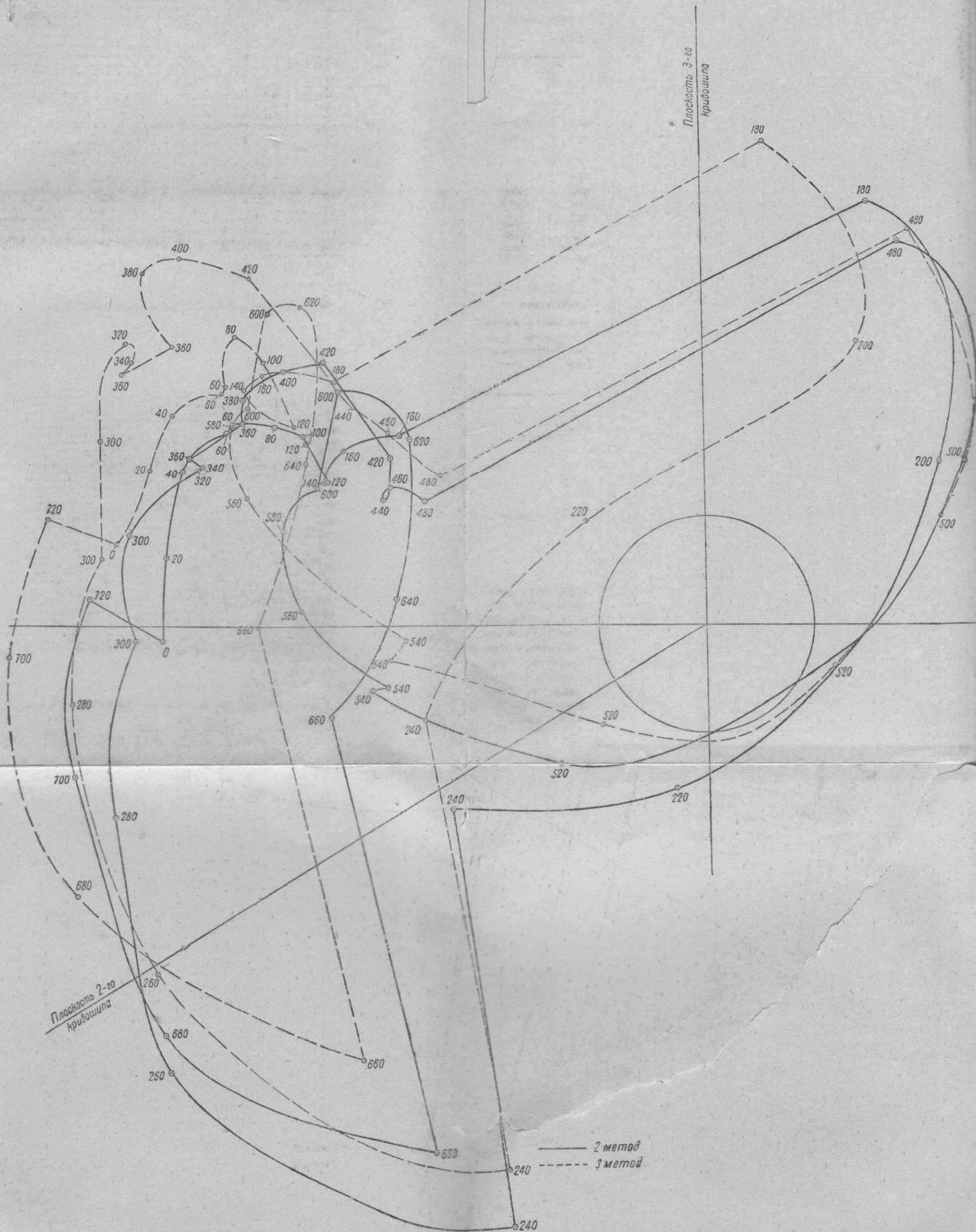






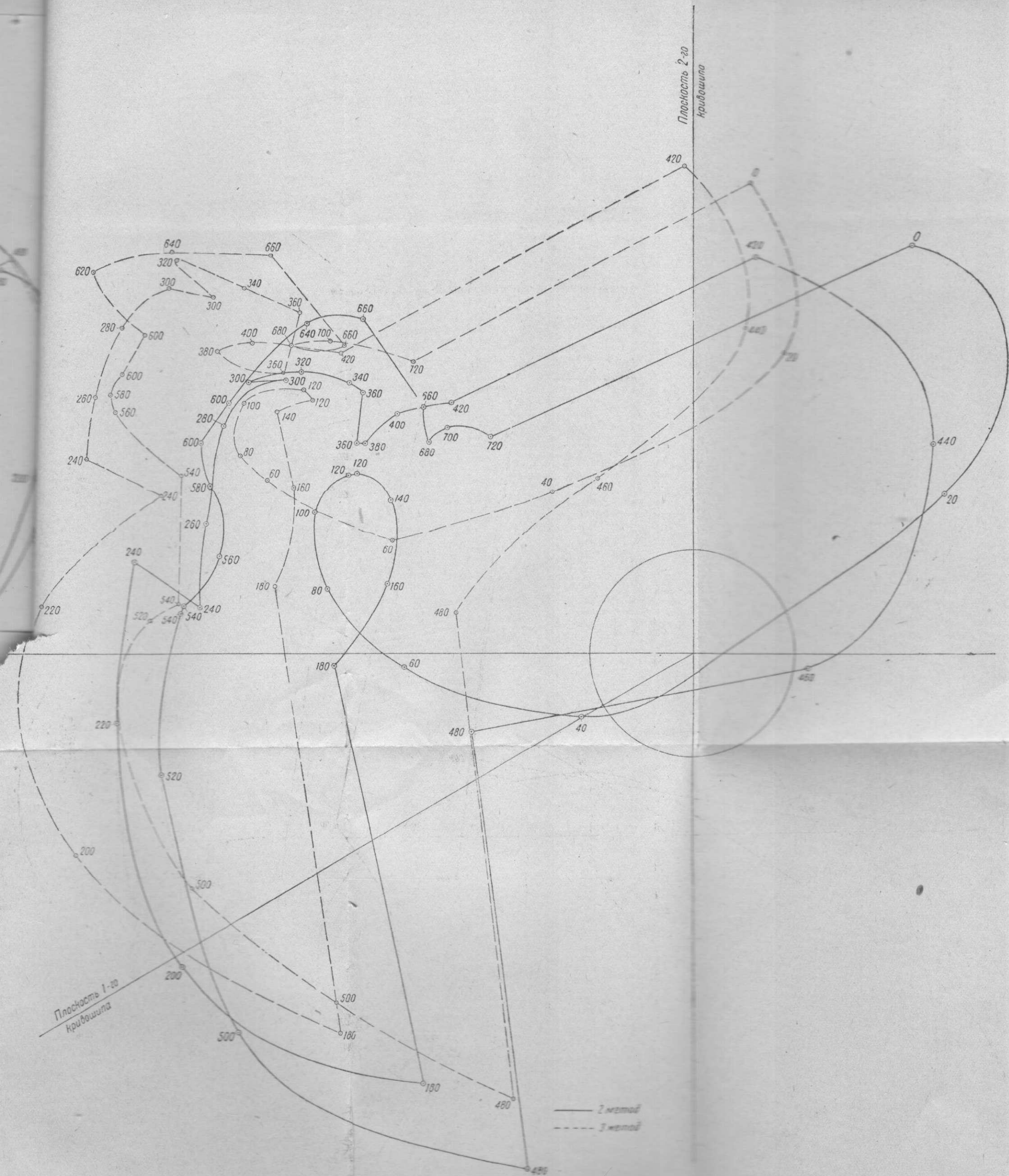
Фиг. 108. Векторные диаграммы сил давления  $K$  на 1-ю опору коленчатого вала.





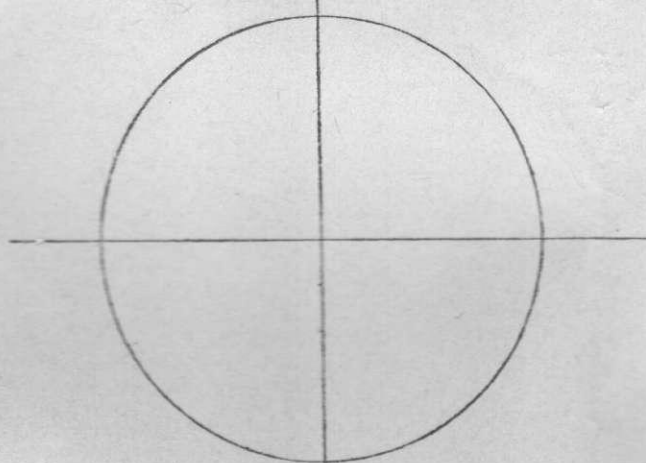
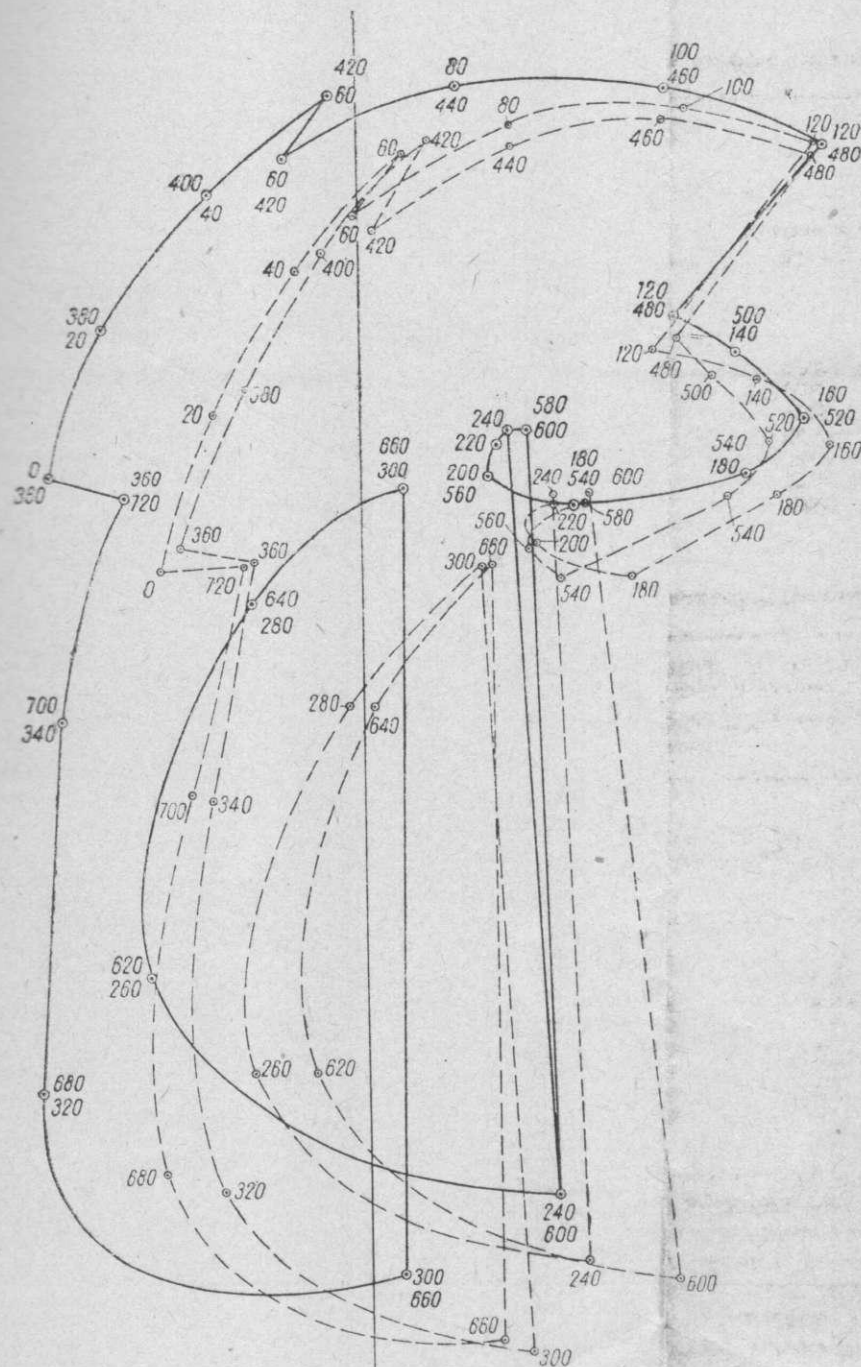
Фиг. 109. Векторные диаграммы сил давления  $K$  на 2-ю опору коленчатого вала.





Фиг. 110. Векторные диаграммы сил давления  $K$  на 3-ю опору кривошипа.

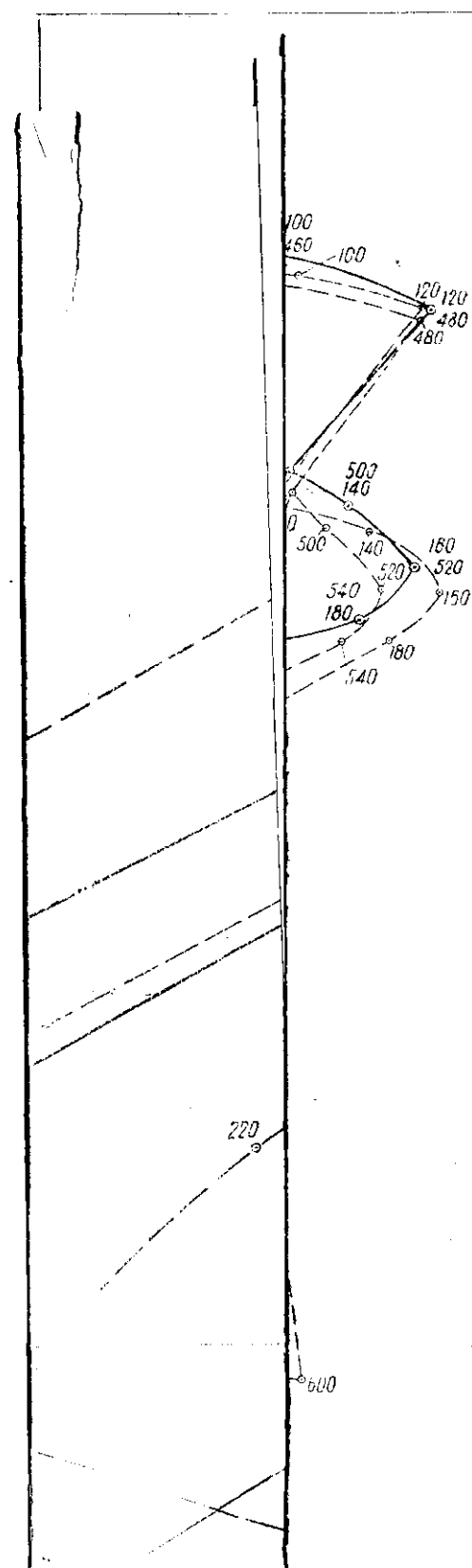




Плоскость 3-го и 4-го  
кривошипов

— 2 метод  
- - - 3 метод

Фиг. 111. Векторные диаграммы сил давления  $K$  на 4-ю опору коленчатого вала



1-ю, 2-ю, 3-ю и 4-ю опоры коленчатого вала (фиг. 100), причем силы  $K$  были подсчитаны указанными четырьмя методами.

На фиг. 108, 109, 110 и 111 даны векторные диаграммы сил  $K$  на эти опоры, причем силы  $K$  определялись вторым и третьим методами.

В табл. 18 и 19 даны в абсолютных цифрах и в процентах от значений, полученных третьим методом, величины средних и максимальных значений сил  $K$ .

Таблица 18

Величины сил  $K_{\text{ср}}$  и  $K_{\text{макс}}$ , подсчитанные различными методами

№ опор	$K_{\text{ср}}$			$K_{\text{макс}}$		
	1 и 4-й методы $K_{\text{ср I, IV}}$	2-й метод $K_{\text{ср II}}$	3-й метод $K_{\text{ср III}}$	1 и 4-й методы $K_{\text{макс I, IV}}$	2-й метод $K_{\text{макс II}}$	3-й метод $K_{\text{макс III}}$
0	—	502	1068	—	690	1336
1	2015	2685	3606	2585	3450	4594
2	2336	2962	3817	3720	4550	5572
3	2317	2938	3439	3727	5110	5088
4	3600	4665	4400	5030	6370	6360
5	2318	3080	3015	3727	5052	5066
6	2338	3246	2806	3720	5033	5050
7	2015	1694	1705	2585	2189	2275

Таблица 19

Относительные величины сил  $K_{\text{ср}}$  и  $K_{\text{макс}}$ , подсчитанных различными методами

Отношения в процентах величины сил $K_{\text{ср}}$ , найденных по 1, 2 и 4-му методам, к величине $K_{\text{ср}}$ , полученной по 3-му методу			Отношение в процентах величин сил $K_{\text{макс}}$ , полученных по 1, 2 и 4-му методам, к величине $K_{\text{макс}}$ , найденной по 3-му методу		
$\frac{K_{\text{ср I, IV}}}{K_{\text{ср III}}} \cdot 100$	$\frac{K_{\text{ср II}}}{K_{\text{ср III}}} \cdot 100$	$\frac{K_{\text{ср III}}}{K_{\text{ср III}}} \cdot 100$	$\frac{K_{\text{макс I, IV}}}{K_{\text{макс III}}} \cdot 100$	$\frac{K_{\text{макс II}}}{K_{\text{макс III}}} \cdot 100$	$\frac{K_{\text{макс III}}}{K_{\text{макс III}}} \cdot 100$
0	47,0	100,0	0	51,6	100,0
55,9	74,4	100,0	56,2	75,1	100,0
61,2	77,6	100,0	66,8	81,6	100,0
67,4	85,4	100,0	73,2	100,5	100,0
81,8	107,0	100,0	79,1	100,1	100,0
76,8	102,1	100,0	73,6	99,7	100,0
83,3	115,7	100,0	73,6	99,6	100,0
118,2	99,3	100,0	113,6	96,2	100,0

Фиг. 108—111 показывают, что характер протекания векторных диаграмм сил  $K$ , подсчитанных вторым и третьим методами, один и тот же. Что касается величин сил  $K$ , то второй метод дает величины для средних и максимальных значений этих сил, значительно более близкие к величинам, полученным третьим методом, чем первый метод. Максимальная разница между средними значениями сил  $K$  для второго и третьего методов, не считая нулевой опоры, составляет 22,4%. Для максимально нагруженной четвертой опоры разница составляет 7%. Еще меньшую разницу дают максимальные значения сил  $K$ ; для четвертой опоры величины максимальных сил, подсчитанные по второму и третьему методам, отличаются всего на 0,1%.



# КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ АВИАЦИОННЫХ МОТОРОВ

## Общие положения

Всякая инженерная конструкция представляет собой агрегат, состоящий из отдельных, кинематически между собой связанных, упругих элементов. Будучи подвергнута действию внешних, изменяющихся по времени сил, такая конструкция придет в колебательное движение, обусловленное упомянутой упругостью отдельных ее элементов.

В зависимости от характера действующих внешних сил колебания конструкции могут быть двух родов.

Если колебания конструкции вызваны таким путем, что конструкция была сначала деформирована системой внешних, приложенных к ней сил, а затем эти силы были внезапно устранены и конструкция была предоставлена сама себе, то в системе возникнут так называемые „свободные колебания“ или „собственные колебания“ системы. Колебания такого же характера возникнут в системе и в случае мгновенного, ударного действия на нее внешних сил. Собственные колебания системы обычно быстро затухают благодаря наличию в ней сопротивлений, заглушающих колебания.

Если колебания конструкции вызываются внешними, постоянно действующими, периодически изменяющимися по времени силами, то в системе возникнут так называемые „вынужденные колебания“ системы.

В отличие от свободных колебаний системы вынужденные колебания со временем не затухают, и колебательное движение системы происходит все время, пока действуют внешние силы. Вследствие наличия колебательных движений масс системы напряжения в элементах системы приходится в этом случае определять, принимая во внимание не только внешние, возбуждающие колебания системы силы, но и силы инерции колеблющихся масс системы. При некоторых условиях, именно, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой свободных колебаний системы, влияние указанных сил инерции на напряжения оказывается настолько значительным, что величина этих напряжений определяется в основном силами инерции колеблющихся масс системы. Мало того, при этом условии напряжения часто достигают такой величины, что ведут к поломкам конструкции. Напряжения эти во время работы могут менять не только свою величину, но и знак. При быстрых колебаниях в конструкции будет получаться большое число перемен знака напряжений, что особенно вредно отражается на прочности материала и конструкции. Вот почему в настоящее время является совершенно необходимым исследование вынужденных колебаний при расчете на прочность коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания.

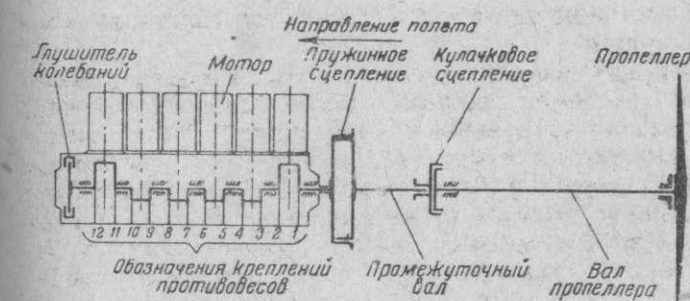
Одним из первых исследователей явлений крутильных колебаний в валах является Фрам (H. Frahm). Он опытным путем определял угол закручивания парового вала во время работы машины и по углу закручивания вычислял соответствующие напряжения (см.

H. Frahm, Neue Untersuchungen über dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen v. Schiffsmaschinen, „Zeit. d. Ver. deutsch. Ing.“ 1902). Опыты Фрама показали, что при известной скорости вращения вала возникают сильные колебания, и напряжения изменяются в пределах от +600 до -166 кг/см<sup>2</sup> (вал был рассчитан на напряжение 218 кг/см<sup>2</sup>). Таким образом в данном случае менялась не только величина, но и знак напряжения.

Явления крутильных колебаний в системах коленчатых валов авиационных двигателей обратили на себя внимание сравнительно недавно.

Поломки коленчатых валов моторов Maybach VL-2 представляют классический пример поломок коленчатых валов авиационных двигателей от крутильных колебаний<sup>1</sup>. Остановимся на этом случае несколько подробнее. 16 мая 1929 г.

на дирижабле „Graf Zeppelin“ LZ-127 был предпринят полет в Америку, который пришлось прервать вследствие неожиданного выхода из строя, друг за другом, четырех из пяти, имевшихся на этом воздушном корабле моторов фирмы Maybach VL-2 каждый мощностью 550 л. с. при 1600 об/мин. Неисправности были вызваны поломкой коленчатых валов и креплений



Фиг. 113. Схема моторной установки дирижабля „Graf Zeppelin“ LZ-127.

„Graf Zeppelin“ LZ-127, а на фиг. 113 дана схема моторной установки этого дирижабля. В табл. 20 приведено время продолжительности эксплуатации отдельных моторов, а также местоположения на них поломок.

Дирижабль „Graf Zeppelin“ успел до полета в Америку совершить с момента пуска в эксплуатацию в октябре 1927 г. 22 полета без значительных повреждений машинной установки, покрыв при этом почти 50 000 км. Три из пяти его моторов, установленных по одному в каждой гондole, проработали каждый около 500 часов при средней отдаче 400 л. с.; максимальная мощность каждого мотора, прибегать к которой, однако, было предположено только в особых случаях, равнялась 550 л. с.

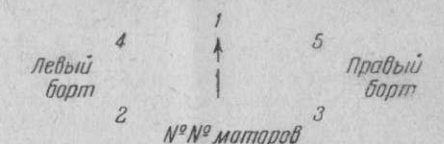
После того как машинная установка дирижабля показала себя в предыдущих полетах с лучшей стороны, было особенно удивительно, что при вышеуказанном полете в Америку, уже вскоре после отлета, именно

<sup>1</sup> См. следующие статьи, помещенные в „Jahrbuch der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V.“:

„Dreh-schwingungen in Reihenmotoren“ (140 DVL-Bericht), A. Stieglitz, S. 449, 1929 г.; „Schwingungsuntersuchungen an der Maschinenanlage des Luftschiffes „Graf Zeppelin“ (145 DVL-Bericht), W. Kamm und A. Stieglitz, S. 255, 1930 г.;

„Neuere Ergebnisse auf dem Gebiet der Kurbelwellenschwingungen“ (159 DVL-Bericht), A. Stieglitz, S. 281, 1930 г.

Перевод первых двух статей имеется в сборнике статей „Крутильные колебания коленчатых валов“, изданном под редакцией автора Центральным научно-исследовательским институтом авиационного моторостроения (ЦИАМ) и Военной воздушной академией РККА им. Жуковского; издание Академии 1935 г.



Фиг. 112. Схема расположения моторов на дирижабле „Graf Zeppelin“ LZ-127.

противовесов, поставленных на коленчатых валах. Оставшийся в работе последний мотор также показал при исследовании по возвращении дирижабля в гавань надлом одного из названных креплений. Все поломки носили явные признаки поломок от усталости. На фиг. 112 показана схема расположения моторов на дирижабле

Данные об авариях коленчатых валов моторов Maybach VL-2 от крутильных колебаний

М о т о р ы	1	2	3	4	5
Срок работы (в часах) на прерванном полете . . . . .	30	30	7	36	12
Общий срок эксплуатации (в часах) . . . . .	480	480	357	52	462
Место поломки коленчатого вала (фиг. 113) . . . . .	—	—	между 2-3	—	—
Поломка креплений противовесов . . . . .	3	7	—	—	7
Надлом креплений противовесов . . . . .	—	—	3	4	—

после 8 и 11 часов работы, вышло из строя два мотора, несмотря на нормальную нагрузку. Это обстоятельство и принудило дирижабль к возвращению в воздушную гавань в Тулоне. На обратном пути вышло из строя еще два мотора, так что в конце концов дирижабль добрался в воздушную гавань на одном моторе, который, как было упомянуто выше, тоже оказался поврежденным.

Для исследования причин этих поломок верфь дирижабля и завод Maybach обратились к проф. д-р-инж. Тома (Thoma) в Карлсруэ; германская испытательная станция воздухоплавания в Берлине-Адлерсгофе (DVL) командировала нескольких своих сотрудников, а Страховое общество привлекло к изучению этого явления проф. д-р-инж. Кутцбаха (Kutzbach) в Дрездене.

Всестороннее исследование перечисленными организациями и лицами причин поломок привело к заключению, что поломки были вызваны наличием крутильных колебаний в системе коленчатый вал — пропеллер мотора. Непосредственной причиной аварий моторов при полете в Америку явились предпринятые перед полетом некоторые изменения в пружинных сцеплениях моторных установок. Эти изменения заключались в увеличении увеличивающегося с течением времени зазора в этих сцеплениях и в увеличении предварительного сжатия их спиральных пружин.

Именно эти, кажущиеся на первый взгляд совершенно незначительными, переделки повели к такому изменению системы коленчатый вал — пропеллер мотора в отношении крутильных колебаний, что при прерванном полете резонансы основного колебания системы и первого обертона почти совпали, причем как раз в области рабочих чисел оборотов мотора. Это и вызвало поломки.

В отечественной практике авиационного моторостроения тоже встречались поломки коленчатых валов, вызванные явлениями крутильных колебаний.

Из сказанного становится совершенно ясным необходимость исследования на крутильные колебания системы коленчатого вала мотора при проектировании последнего (по крайней мере в тех пределах, в которых это является в настоящее время возможным по уровню наших технических знаний в этой области) и обязательного экспериментального исследования на крутильные колебания системы коленчатого вала каждой новой конструкции авиационного мотора.

Исследования колебаний различных видов, в том числе и крутильных, удобнее всего производить при помощи дифференциальных уравнений движения Лагранжа „второго рода“. Вывод этих уравнений можно найти в соответствующих курсах механики и физики, например, в книге Маке Планк „Введение в теоретическую физику“. Вывод этих уравнений дан также в книге проф. С. П. Тимошенко „Теория колебаний в инженерном деле“. Поэтому интересующихся этим вопросом отсылаем к указанным источникам, здесь же приводим окончательный вид этих уравнений, именно

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = Q_i. \quad (1)$$

В этом уравнении обозначают  
 $T$  — кинетическую энергию колеблющейся системы,  
 $V$  — потенциальную энергию колеблющейся системы,  
 $\varphi_i$  — обобщенную координату  $i$ -й массы системы,  
 $Q_i$  — обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате  $\varphi_i$ .

$$\dot{\varphi}_i = \frac{d\varphi_i}{dt}, \quad (2)$$

$t$  — время.

При исследовании явлений крутильных колебаний обобщенной координатой  $i$ -й массы системы будем считать угол отклонения этой массы от некоторой координатной плоскости; обобщенной силой  $Q_i$  будет в этом случае момент пары сил, приложенной к  $i$ -й массе извне.

Если совершающая крутильные колебания система состоит из  $n$  масс, то для каждой из этих масс можно составить уравнение типа (1). Таким путем будет получена система дифференциальных уравнений, состоящая из  $n$  уравнений и содержащая  $n$  неизвестных параметров  $\varphi_i$  ( $i$  изменяется от 1 до  $n$ ). Решая эту систему, найдем  $\varphi_i$ , т. е. определим те законы, по которым совершают колебания отдельные массы колеблющейся системы; этим и будет определено колебание системы.

Аналогичным образом может быть составлена система дифференциальных уравнений, определяющая свободные колебания системы. В этом случае все  $Q_i$  равны нулю.

После этих предварительных замечаний, перейдем к определению свободных крутильных колебаний систем и начнем наши исследования с общего случая системы с  $n$  степенями свободы, т. е. такой, положение которой определяется  $n$  обобщенными координатами.

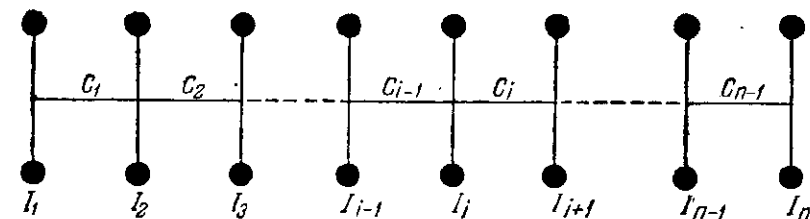
## Глава I

### СВОБОДНЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ

#### § 1. Свободные крутильные колебания системы с $n$ степенями свободы

Положим, что у нас имеется крутильная система, представленная на фиг. 114. Эта система представляет собой упругий вал, на котором в различных местах посажены жестко с ним связанные маховые массы. Обозначим через

$I_i$  — массовый момент инерции  $i$ -й массы системы относительно оси вала; число всех масс системы  $n$ , так что  $i$  меняется в пределах от  $i = 1$  до  $i = n$ ;



Фиг. 114. Крутильная система с  $n$  степенями свободы.

$C_i$  — крутильную жесткость участка вала, соединяющего  $i$ -ю и  $(i + 1)$ -ю массы; крутильной жесткостью участка вала называется величина моментов, которые надо приложить к концевым сечениям участка, чтобы вызвать их относительную закрутку на 1 радиан;

$\varphi_i$  — угол отклонения в радианах  $i$ -й массы системы от некоторой, общей для всех масс системы координатной плоскости, проходящей через ось вала.



Если рассматриваемую систему вывести каким-либо способом из состояния равновесия, например, скрутив ее около оси вала и затем предоставив самой себе, то отдельные массы системы начнут совершать движение около оси вала, и система начнет совершать, так называемые, свободные крутильные колебания. Положение системы в каждый данный момент будет определяться координатными параметрами  $\varphi_i$ . По числу масс системы этих параметров будет  $n$  и, следовательно,  $n$  будет являться числом степеней свободы системы.

Для определения законов движения отдельных масс рассматриваемой системы, совершающей свободные крутильные колебания, составим дифференциальные уравнения движения системы, пользуясь дифференциальными уравнениями движения Лагранжа [см. уравнение (1)],

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (3)$$

имея в виду, что при свободных колебаниях системы  $Q_i = 0$ .

Кинетическая энергия нашей свободно колеблющейся системы будет равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (I_i \dot{\varphi}_i^2), \quad (4)$$

где

$$\dot{\varphi}_i = \frac{d\varphi_i}{dt}. \quad (5)$$

Потенциальная энергия этой системы будет равна

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2]. \quad (6)$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = I_i \dot{\varphi}_i, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) = I_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = I_i \ddot{\varphi}_i, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (9)$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) - c_{i-1} (\varphi_{i-1} - \varphi_i). \quad (9)$$

На основании равенств (7), (8) и (9) уравнение (3) примет вид

$$I_i \ddot{\varphi}_i + c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = 0. \quad (10)$$

Написав уравнение (10) для каждой из  $n$  масс системы, получим ниже-следующую систему дифференциальных уравнений, определяющих движение совершающей свободные крутильные колебания системы, представленной на фиг. 114

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + c_3 (\varphi_3 - \varphi_4) + c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ I_i \ddot{\varphi}_i + c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) + c_{n-2} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) &= 0, \\ I_n \ddot{\varphi}_n + c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

и

Эта система представляет собой систему  $n$  линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Согласно теории интегрирования дифференциальных уравнений общее решение этой системы будет содержать  $2n$  произвольных постоянных, определяемых начальными условиями движения системы, например, начальными значениями координатных параметров  $\varphi_i$  и начальными значениями угловых скоростей масс системы  $\dot{\varphi}_i$ . Найдем общее решение системы уравнений (11). Прежде всего заметим, что равенства

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi + \omega t, \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_i &= \Phi + \omega t, \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_n &= \Phi + \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $\Phi$  и  $\omega$  — произвольные постоянные — являются частным решением системы (11); в этом легко убедиться непосредственной подстановкой значений  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  из этих равенств в систему уравнений (11). Далее нетрудно видеть, что при некоторых, определяемых ниже условиях равенства

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi_1 \sin(\Theta_c t + \gamma), \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_i &= \Phi_i \sin(\Theta_c t + \gamma), \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_n &= \Phi_n \sin(\Theta_c t + \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $\gamma$  — произвольный постоянный угол, тоже являются частным решением системы уравнений (11). Чтобы определить те условия, при которых равенства (13) являются решением системы уравнений (11), подставим в эту систему значения  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , определяемые равенствами (13). Сокращая после подстановки обе части каждого из уравнений на  $\sin(\Theta_c t + \gamma)$ , получим

$$\left. \begin{aligned} -I_1 \Theta_c^2 \Phi_1 + c_1 (\Phi_1 - \Phi_2) &= 0, \\ -I_2 \Theta_c^2 \Phi_2 + c_2 (\Phi_2 - \Phi_3) + c_1 (\Phi_2 - \Phi_1) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -I_i \Theta_c^2 \Phi_i + c_i (\Phi_i - \Phi_{i+1}) + c_{i-1} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -I_{n-1} \Theta_c^2 \Phi_{n-1} + c_{n-1} (\Phi_{n-1} - \Phi_n) + c_{n-2} (\Phi_{n-1} - \Phi_{n-2}) &= 0, \\ -I_n \Theta_c^2 \Phi_n + c_{n-1} (\Phi_n - \Phi_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Совокупность равенств (14) представляет систему уравнений, связывающих величины  $\Theta_c^2, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ . Этой зависимостью и определяются те условия, при которых равенства (13) являются частным решением системы уравнений (11). Перепишем систему (14) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - I_1 \Theta_c^2) \Phi_1 - c_1 \Phi_2 &= 0, \\ -c_1 \Phi_1 + (c_1 + c_2 - I_2 \Theta_c^2) \Phi_2 - c_2 \Phi_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -c_{i-1} \Phi_{i-1} + (c_{i-1} + c_i - I_i \Theta_c^2) \Phi_i - c_i \Phi_{i+1} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -c_{n-2} \Phi_{n-2} + (c_{n-2} + c_{n-1} - I_{n-1} \Theta_c^2) \Phi_{n-1} - c_{n-1} \Phi_n &= 0, \\ -c_{n-1} \Phi_{n-1} + (c_{n-1} - I_n \Theta_c^2) \Phi_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Система уравнений (15) является системой линейных однородных уравнений относительно неизвестных  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ . Для того чтобы эти величины были отличны от нуля, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю, т. е. чтобы имело место равенство

$$D = \begin{vmatrix} (c_1 - I_1 \Theta_c^2) & -c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2 - I_2 \Theta_c^2) & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & (c_2 + c_3 - I_3 \Theta_c^2) & -c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots -c_{n-1} \dots (c_{n-1} - I_n \Theta_c^2) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Это равенство представляет собой уравнение относительно неизвестного  $\theta_c^2$ . Величина  $\theta_c$  называется частотой свободных колебаний системы, а уравнение (16) носит название „уравнения частоты“.

Развернутая определитель  $D$  и деля обе части уравнения (16) на произведение  $(c_1 \cdot c_2 \dots c_{n-1})$ , получим уравнение частоты в виде

$$\frac{D}{c_1 c_2 \dots c_{n-1}} = A_{n-1} (\Theta_c^2)^n + A_{n-2} (\Theta_c^2)^{n-1} + A_{n-3} (\Theta_c^2)^{n-2} + \dots + A_0 \Theta_c^2 = 0. \quad (17)$$

Решая это уравнение, мы получим для  $\Theta_c$ :

- 1) тривиальное значение  $\Theta_c = 0$  и
- 2)  $(n-1)$  значений, определяемых уравнением

$$A_{n-1}(\Theta_c^2)^{n-1} + A_{n-2}(\Theta_c^2)^{n-2} + A_{n-3}(\Theta_c^2)^{n-3} + \dots + A_0 = 0. \quad (18)$$

Возможно показать, что в данном случае это уравнение имеет всегда  $(n-1)$  действительных и различных корней. Не приводя здесь доказательства этого положения, отсылаем интересующихся к работе проф. R. Grammel „Ein neues Verfahren zur Berechnung der Drehschwingungszahlen von Kurbelwellen“, опубликованной в журнале „Ingenieur Archiv“, II том, тетрадь 2, за май 1931 г.

Обозначим корни уравнения (18) через  $\theta_c^{(1)}, \theta_c^{(2)}, \dots, \theta_c^{(n-1)}$ , расположив их в порядке возрастания значений  $\theta_c$ .

Вернемся теперь к системе уравнений (15). Деля обе части каждого из уравнений этой системы на  $\Phi_d$  и обозначая

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_n} = \alpha_1, \quad \frac{\Phi_2}{\Phi_n} = \alpha_2, \quad \dots, \quad \frac{\Phi_n}{\Phi_n} = \alpha_n = 1, \quad (19)$$

мы приведем эту систему к виду

[illegible]

Для каждого из вышенайденных значений  $\Theta_c$  возможно определить из этой системы уравнений величины  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ . Определение этих величин производится очень просто в обратном порядке, начиная решение системы уравнений (20) с последнего уравнения. Первое уравнение системы в этом случае является контролирующим проделанные подсчеты.

Обозначим значения величин  $\alpha$ ,  $\Phi$  и  $\gamma$ , соответствующие  $\Theta_c = \Theta_c^{(k)}$ , следующим образом:

значения  $\alpha$  через  $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \alpha_3^{(k)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(k)}$ ;

значения  $\Phi$  через  $\Phi_1^{(k)}, \Phi_2^{(k)}, \Phi_3^{(k)}, \dots, \Phi_n^{(k)}$ .

значение  $\gamma$  через  $\gamma_k$ .

На основании равенств (19) получим

$$\Phi_1^{(k)} = \alpha_1^{(k)} \Phi_n^{(k)}, \quad \Phi_2^{(k)} = \alpha_2^{(k)} \Phi_n^{(k)}, \dots, \quad \Phi_n^{(k)} = \Phi_n^{(k)}. \quad (21)$$

Частное решение (13) системы дифференциальных уравнений (11) примет для  $\Theta_c = \Theta_c^{(k)}$  вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1k} &= \alpha_1^{(k)} \Phi_n^{(k)} \sin(\Theta_c^{(k)} t + \gamma_k), \\ \varphi_{2k} &= \alpha_2^{(k)} \Phi_n^{(k)} \sin(\Theta_c^{(k)} t + \gamma_k), \\ . &. . . . . \\ \varphi_{ik} &= \alpha_i^{(k)} \Phi_n^{(k)} \sin(\Theta_c^{(k)} t + \gamma_k), \\ . &. . . . . \\ \varphi_{n-1,k} &= \alpha_{n-1}^{(k)} \Phi_n^{(k)} \sin(\Theta_c^{(k)} t + \gamma_k) \\ \varphi_{nk} &= \Phi_n^{(k)} \sin(\Theta_c^{(k)} t + \gamma_k). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

II

Так как  $k$  меняется от  $k=1$  до  $k=(n-1)$ , то таких систем, представляющих частные решения системы дифференциальных уравнений (11), будет всего  $(n-1)$ . Каждое из этих решений содержит две произвольных постоянных  $\Phi_n^{(k)}$  и  $\gamma_k$ . Принимая во внимание частное решение (12) системы уравнений (11), содержащее две произвольных постоянных  $\Phi$  и  $\omega$ , мы можем написать общее решение системы уравнений (11) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} [\alpha_1^{(k)} \Phi_n^{(k)} \sin(\Theta_c^{(k)} t + \gamma_k)] + \omega t + \Phi, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_i &= \sum_{k=1}^{n-i} [\alpha_i^{(k)} \Phi_n^{(k)} \sin(\Theta_c^{(k)} t + \gamma_k)] + \omega t + \Phi, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n &= \sum_{k=1}^{n-1} [\Phi_n^{(k)} \sin(\Theta_c^{(k)} t + \gamma_k)] + \omega t + \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Это решение содержит  $(n-1)$  произвольных постоянных  $\Phi_{\pi}^{(k)}$ ,  $(n-1)$  произвольных постоянных  $\tau_k$  и произвольные постоянные  $\Phi$  и  $\omega$ . Таким образом оно содержит всего

$$(n-1) + (n-1) + 2 = 2n$$

произвольных, независимых постоянных, а потому действительно является общим решением системы дифференциальных уравнений (11).

Общее решение (23) показывает, что в общем случае свободные крутильные колебания системы с  $n$  степенями свободы, представленной на фиг. 114, складываются из равномерного вращения с угловой скоростью  $\omega$  всей системы, как одного целого, вокруг оси вала и из  $(n-1)$  видов колебаний системы около этой оси, определяемых для каждого вида системой уравнений (22).

Произвольные постоянные, входящие в общее решение (23), определяются по начальным условиям движения системы и имеют вполне определенный физический смысл. Если мы возьмем две плоскости, проходящие



Если начальные условия движения системы заданы, например, начальными значениями —  $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{n0}$ , углов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  и начальными значениями угловых скоростей масс системы —  $\dot{\varphi}_{10}, \dot{\varphi}_{20}, \dots, \dot{\varphi}_{n0}$ , то произвольные постоянные, входящие в общее решение (23), определятся из следующей системы уравнений, вытекающей из системы уравнений (23) при  $t = 0$ :

(24)

(25)

(26)

144

(27)

(28)

(29)

145

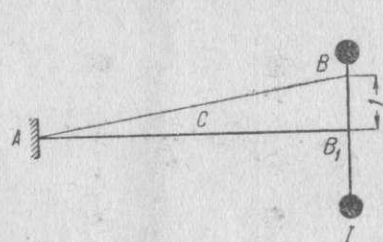


таким образом, что каждое  $\alpha$  будет отложено перпендикулярно к оси системы в месте расположения соответствующей массы системы, причем положительные  $\alpha$  будут расположены по одну сторону от этой оси, а отрицательные по другую, то, соединяя последовательно концы отрезков, представляющих  $\alpha$ , прямыми линиями, получим так называемую форму свободных колебаний системы. Каждому виду главных свободных колебаний системы соответствует своя форма колебаний. Кривая формы колебаний обладает тем свойством, что она пересекает ось системы в узлах колебания системы.

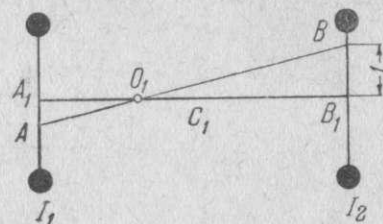
На этом закончим рассмотрение вопроса о свободных крутильных колебаниях системы с  $n$  степенями свободы и перейдем к рассмотрению частных случаев систем, совершающих главные виды свободных крутильных колебаний.

## § 2. Определение главных видов свободных крутильных колебаний систем

Определить главные виды свободных крутильных колебаний системы — значит определить соответствующие частоты колебаний  $\theta_c$  и построить соответствующие формы колебаний. Ниже мы рассмотрим определение главных видов свободных крутильных колебаний систем, имеющих одну, две, три и несколько степеней свободы; при этом мы будем пользоваться



Фиг. 115. Крутильная система с 1 степенью свободы.



Фиг. 116. Крутильная система с 2 степенями свободы.

общими положениями, доказанными в предыдущем параграфе. Начнем наши исследования с системы, имеющей одну степень свободы; на фиг. 115 представлена такая система. Система состоит из упругого вала крутильной жесткости  $c$ , на одном конце которого закреплена маховая масса с моментом инерции  $I$ , а другой конец зашцеplen. Уравнение частоты (16) в этом случае будет

$$c - I\theta_c^2 = 0, \quad (30)$$

откуда

$$\theta_c = \sqrt{\frac{c}{I}}. \quad (31)$$

Узел колебания системы находится в зашцеplенном сечении вала, а формой свободных колебаний будет прямая  $AB$ , причем  $\overline{BB_1} = 1$ .

Для 2-массовой системы, представленной на фиг. 116, уравнение частоты (16) будет

$$D = \begin{vmatrix} (c_1 - I_1\theta_c^2) & -c_1 \\ c_1 & (c_1 - I_2\theta_c^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

или

$$(c_1 - I_1\theta_c^2)(c_1 - I_2\theta_c^2) + c_1^2 = 0. \quad (32')$$

Отсюда

$$\theta_c^2 \left[ \frac{I_1 I_2}{c_1} \theta_c^2 - (I_1 + I_2) \right] = 0. \quad (32'')$$

Это будет уравнение частоты, соответствующее уравнению (17). Искомая частота свободных колебаний системы будет

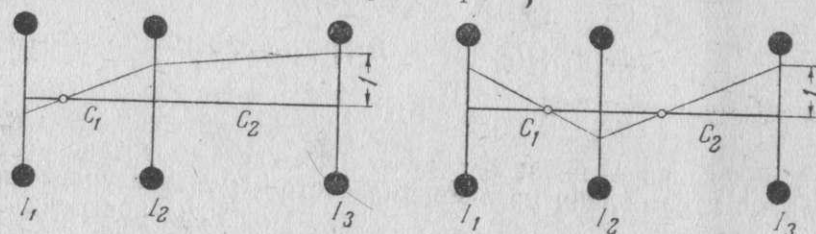
$$\theta_c = \sqrt{c_1 \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right)}. \quad (33)$$

Исследуемая система будет иметь только один главный вид свободных колебаний, именно 1-узловой. Форма колебаний системы представится прямой  $AB$ , причем согласно системе уравнений (20)

$$\left. \begin{aligned} \overline{BB_1} &= 1 \\ \overline{AA_1} &= \alpha_1 = \frac{c_1}{c_1 - I_1\theta_c^2} = \frac{I_2}{I_1} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Узел колебания системы будет находиться в сечении  $O_1$  упругого вала. Это сечение делит упругий вал на две части  $A_1O_1$  и  $O_1B_1$ , жесткости которых  $c^{(1)}$  и  $c^{(2)}$  определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{c^{(1)}}{c^{(2)}} &= \frac{I_1}{I_2} \\ \frac{1}{c^{(1)}} + \frac{1}{c^{(2)}} &= \frac{1}{c_1} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$



Фиг. 117. Крутильная система с 3 степенями свободы

Первое из этих уравнений вытекает непосредственно из формы колебаний системы, а второе из того положения, что закрутка всего вала равна сумме закруток составляющих его участков  $A_1O_1$  и  $O_1B_1$ .

Решая систему уравнений (35), получим

$$\left. \begin{aligned} c^{(1)} &= c_1 \left( 1 + \frac{I_1}{I_2} \right) \\ c^{(2)} &= c_1 \left( 1 + \frac{I_2}{I_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (35')$$

К рассмотренной системе из двух масс приводится система коленчатого вала однорядного звездообразного мотора без редуктора и нагнетателя. Приведение действительной системы коленчатого вала к теоретической схеме будет изложено в следующей главе.

Для 3-массовой системы, представленной на фиг. 117, уравнение частоты (16) будет

$$D = \begin{vmatrix} (c_1 - I_1\theta_c^2) & -c_1 & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2 - I_2\theta_c^2) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & (c_2 - I_3\theta_c^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (36)$$

Развертывая определитель, получим

$$D = (c_1 - I_1\theta_c^2)(c_1 + c_2 - I_2\theta_c^2)(c_2 - I_3\theta_c^2) - (c_1 - I_1\theta_c^2)c_2^2 - c_1^2(c_2 - I_3\theta_c^2) = 0. \quad (36')$$



Раскрывая скобки, делая приведение и обозначая

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_1 I_2 I_3}{c_1 c_2} &= K_1, \\ \frac{I_1 (I_2 + I_3)}{c_1} + \frac{I_3 (I_1 + I_2)}{c_2} &= K_2, \\ I_1 + I_2 + I_3 &= K_3, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

и

получим уравнение частоты в виде, соответствующем уравнению (17):

$$(-K_1 \Theta_c^4 + K_2 \Theta_c^2 - K_3) \Theta_c^2 = 0. \quad (36'')$$

Искомые частоты главных видов свободных колебаний рассматриваемой системы найдутся из уравнения

$$K_1 \Theta_c^4 - K_2 \Theta_c^2 + K_3 = 0. \quad (36''')$$

Решая это уравнение, мы найдем для  $\Theta_c$  два значения:  $\Theta_c^{(1)}$  и  $\Theta_c^{(2)}$ .

Эти значения соответствуют двум возможным главным видам свободных колебаний системы, а именно: 1-узловому виду и 2-узловому виду. Значения величин  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответствующих этим видам колебаний, найдутся из системы уравнений (20), которая в данном случае примет вид

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - I_1 \Theta_c^2) \alpha_1 - c_1 \alpha_2 &= 0, \\ -c_1 \alpha_1 + (c_1 + c_2 - I_2 \Theta_c^2) \alpha_2 - c_2 &= 0, \\ -c_2 \alpha_2 + (c_2 - I_3 \Theta_c^2) \alpha_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

и

Для определения величин  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  из этой системы уравнений мы пользуемся двумя какими-либо уравнениями системы; третье уравнение может служить для контроля правильности определения величин  $\Theta_c$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Решая систему уравнений (38), получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= 1 - \frac{I_3}{c_2} \Theta_c^2, \\ \alpha_1 &= \frac{c_1}{c_1 - I_1 \Theta_c^2} \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Фиг. 118. Крутильная система, состоящая из 4 моторных и 2 внешних масс.

Для определения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответствующих 1-узловому виду колебаний, в равенства (39) надо подставить  $\Theta_c = \Theta_c^{(1)}$ . Для определения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответствующих 2-узловому виду колебаний, в равенства (39) надо подставить  $\Theta_c = \Theta_c^{(2)}$ . Определив  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , легко построить формы главных свободных колебаний системы. На фиг. 117 слева показана 1-узловая форма колебания системы, а на фиг. 117 справа — 2-узловая. Узлы колебания системы будут находиться в местах пересечения кривых, представляющих соответствующие формы колебаний системы, с осью вала.

К рассмотренной системе из трех масс приводится система коленчатого вала двухрядного звездообразного мотора без редуктора и нагнетателя, а также система коленчатого вала однорядного звездообразного мотора с редуктором, но без нагнетателя.

Перейдем к определению главных видов свободных колебаний более сложных систем. На фиг. 118 представлена система, состоящая из 6 масс. Моменты инерции четырех из этих масс, называемых моторными массами, одинаковы; моменты инерции двух других масс, называемых внешними массами системы, любые. Что касается жесткостей участков вала между

массами, то жесткости участков между моторными массами одинаковы, а жесткости остальных участков любые.

К этой системе приводится система коленчатого вала таких, например, моторов как: 12-цилиндрового W-образного мотора и четырехрядного звездообразного мотора с редуктором, но без нагнетателя.

Для рассматриваемой системы уравнения (15) примут вид

$$\left. \begin{aligned} (c - I \Theta_c^2) \Phi_1 - c \Phi_2 &= 0, \\ -c \Phi_1 + (2c - I \Theta_c^2) \Phi_2 - c \Phi_3 &= 0, \\ -c \Phi_2 + (2c - I \Theta_c^2) \Phi_3 - c \Phi_4 &= 0, \\ -c \Phi_3 + (c + c_{II} - I \Theta_c^2) \Phi_4 - c_{II} \Phi_5 &= 0, \\ -c_{II} \Phi_4 + (c_{II}^* + c_I - I_{II} \Theta_c^2) \Phi_5 - c_I \Phi_6 &= 0, \\ -c_I \Phi_5 + (c_I - I_I \Theta_c^2) \Phi_6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

и

Деля обе части каждого из первых четырех уравнений этой системы на  $c$ , пятого уравнения на  $c_{II}$ , шестого на  $c_I$  и обозначая

$$\Theta_c^2 \frac{I}{c} = y; \frac{c}{c_I} = K_I; \frac{c}{c_{II}} = K_{II}; \frac{I}{I_I} = J_I; \frac{I}{I_{II}} = J_{II}, \quad (41)$$

приведем систему уравнений (40) к виду

$$\left. \begin{aligned} (1 - y) \Phi_1 - \Phi_2 &= 0, \\ -\Phi_1 + (2 - y) \Phi_2 - \Phi_3 &= 0, \\ -\Phi_2 + (2 - y) \Phi_3 - \Phi_4 &= 0, \\ -\Phi_3 + \left(1 + \frac{1}{K_{II}} - y\right) \Phi_4 - \frac{1}{K_{II}} \Phi_5 &= 0, \\ -\Phi_4 + \left(1 + \frac{K_{II}}{K_I} - \frac{J_{II}}{J_I} y\right) \Phi_5 - \frac{K_{II}}{K_I} \Phi_6 &= 0, \\ -\Phi_5 + \left(1 - \frac{K_I}{J_I} y\right) \Phi_6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40')$$

и

Из первых трех уравнений системы (40') последовательно находим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{1 - y} \Phi_2, \\ \Phi_2 &= \frac{1 - y}{y^2 - 3y + 1} \Phi_3, \\ \Phi_3 &= \frac{y^2 - 3y + 1}{-y^3 + 5y^2 - 6y + 1} \Phi_4. \end{aligned} \quad (42)$$

Аналогично из последних двух уравнений системы (40') получаем

$$\begin{aligned} \Phi_6 &= \frac{J_I}{J_I - K_I y} \Phi_5, \\ \Phi_5 &= \frac{1}{1 + K_{II} y p} \Phi_4, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$p = \frac{K_I y - (J_I + J_{II})}{J_{II} (J_I - K_I y)}. \quad (44)$$



Подставляя в четвертое уравнение системы (40') величину  $\Phi_3$  из равенства (42) и величину  $\Phi_5$  из равенства (43), будем иметь

$$\frac{y^2 - 3y + 1}{y^3 - 5y^2 + 6y - 1} + \left(1 - \frac{1}{K_{II}} - y\right) - \frac{1}{K_{II}(1 + K_{II}yp)} = 0$$

или

$$\left(\frac{y^2 - 3y + 1}{y^3 - 5y^2 + 6y - 1} + 1 - y\right) = \frac{1}{K_{II}} \left(\frac{1}{1 + K_{II}yp} - 1\right) = -\frac{yp}{1 + K_{II}yp}$$

Отсюда

$$\frac{y^4 - 6y^3 + 10y^2 - 4y}{y^3 - 5y^2 + 6y - 1} = \frac{yp}{1 + K_{II}yp}$$

Сокращая обе части уравнения на  $y$ , перевортывая дроби и вычитая из обеих частей уравнения по единице, получим

$$\frac{y^3 - 5y^2 + 6y - 1}{y^3 - 6y^2 + 10y - 4} - 1 = \frac{1 + K_{II}yp}{p} - 1$$

или

$$\frac{y^2 - 4y + 3}{y^3 - 6y^2 + 10y - 4} = K_{II}y - 1 + \frac{1}{p}$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $p$  из равенства (44), получим окончательно следующее уравнение:

$$\frac{y^2 - 4y + 3}{y^3 - 6y^2 + 10y - 4} = K_{II}y - \frac{L_{II}^2}{K_I y - (L_I + L_{II})} - (1 + L_{II}). \quad (45)$$

В этом уравнении величины  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $L_I$  и  $L_{II}$  являются постоянными и определяются согласно равенствам (41). Переменная  $y$ , согласно равенствам (41), является функцией  $\Theta_c^2$ . Поэтому по существу уравнение (45) представляет собой уравнение частоты рассматриваемой крутильной системы. Уравнение частоты в этом виде позволяет быстро определить графо-аналитическим методом частоты всех главных видов свободных колебаний системы, не решая аналитически самого уравнения частоты. Указанный метод заключается в следующем. Обозначая каждую из частей уравнения (45) через  $z$ , будем иметь

$$z = \frac{y^2 - 4y + 3}{y^3 - 6y^2 + 10y - 4} = \psi(y) \quad (46)$$

и

$$z = K_{II}y - \frac{L_{II}^2}{K_I y - (L_I + L_{II})} - (1 + L_{II}) = f(y). \quad (47)$$

Каждое из этих уравнений будет представлять в координатах  $(z, y)$  некоторую кривую. Очевидно, что кривая  $z = \psi(y)$  будет одна и та же для любых значений жесткостей и моментов инерции масс рассматриваемой крутильной системы; поэтому для этой системы кривая  $z = \psi(y)$  может быть построена раз навсегда. Эта кривая дана на фиг. 119. Кривая  $z = f(y)$  зависит от величин жесткостей и моментов инерции масс крутильной системы; поэтому для каждого конкретного случая будет иметь место своя кривая  $z = f(y)$ . Накладывая (или вычерчивая полученную для конкретного случая кривую  $z = f(y)$  на кривую  $z = \psi(y)$  так, чтобы координатные оси совпали, мы получим ряд точек пересечения обеих кривых, абсциссами которых пусть будут  $y^1, y^2, \dots, y^5$ . Очевидно, что эти значения  $y$  и будут корнями уравнения (45). Принимая во внимание, что согласно равенствам (41)

$$y = \Theta_c^2 \frac{I}{c},$$

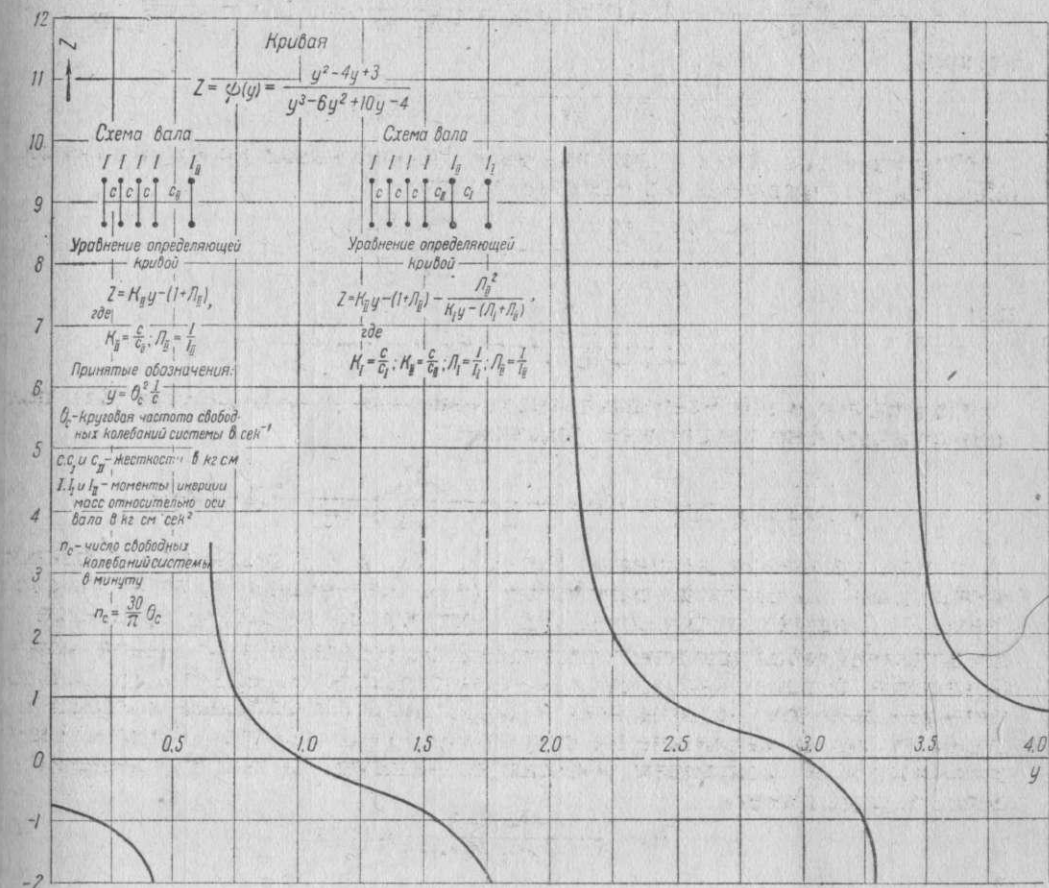
а следовательно,

$$\Theta_c = \sqrt{\frac{c}{I}} y, \quad (48)$$

получим

$$\Theta_c^{(1)} = \sqrt{\frac{c}{I}} y^{(1)}, \quad \Theta_c^{(2)} = \sqrt{\frac{c}{I}} y^{(2)}, \dots, \quad \Theta_c^{(5)} = \sqrt{\frac{c}{I}} y^{(5)}. \quad (49)$$

Это и будут частоты пяти главных видов свободных колебаний рассматриваемой системы из 6 масс.



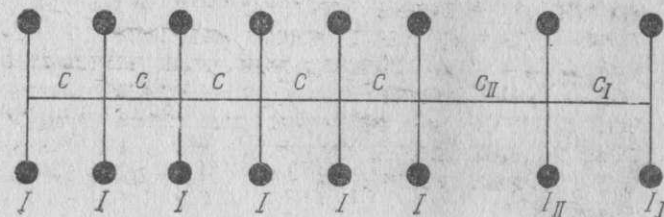
Фиг. 119. Базисная кривая крутильной системы, имеющей 4 моторных массы.

Назовем кривую  $z = \psi(y)$  базисной кривой, а кривую  $z = f(y)$  — определяющей кривой.

Особенно просто решается графо-аналитическим методом вопрос нахождения частот главных видов свободных колебаний системы, имеющей только одну внешнюю массу  $I_{II}$  при наличии тех же четырех моторных масс. Полагая для этого случая  $I_I = 0$  и  $c_I = \infty$ , мы получим, согласно равенствам (41),  $K_I = 0$  и  $L_I = \infty$ . Уравнение определяющей кривой (47) примет в этом случае вид

$$z = K_{II}y - (1 + L_{II}), \quad (50)$$

т. е. определяющая кривая будет прямой линией.



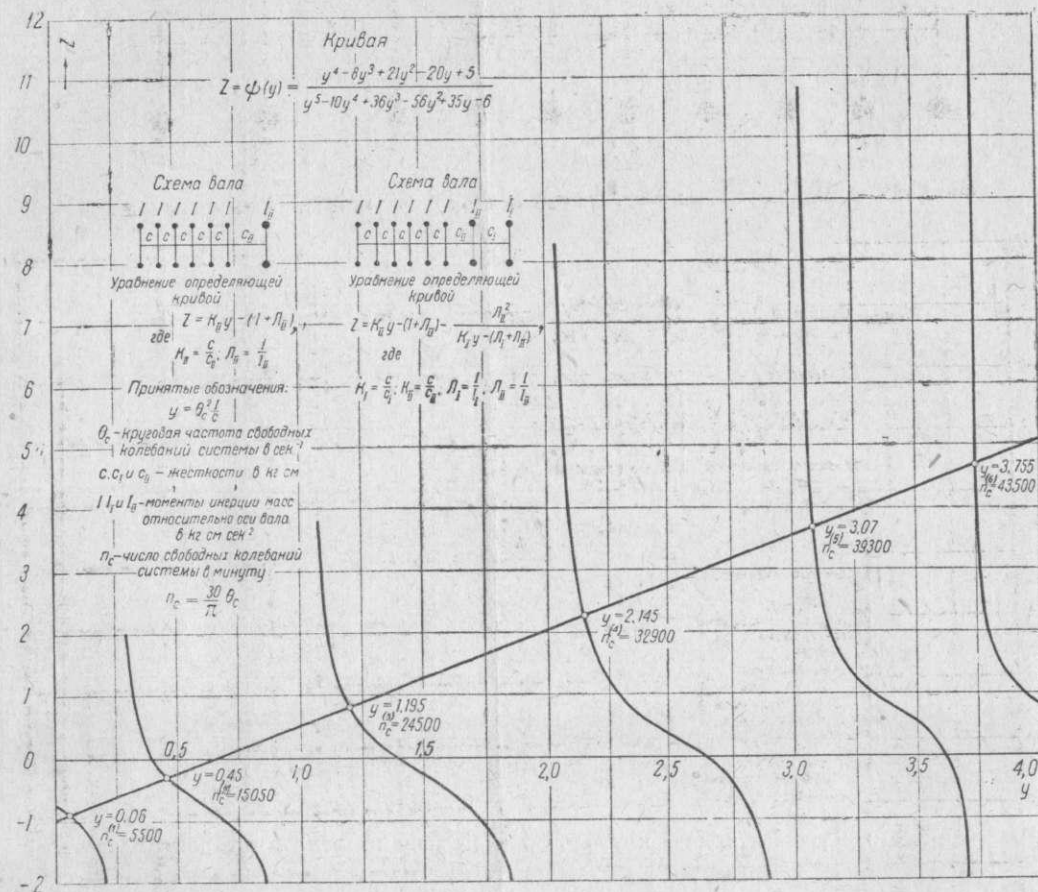
Фиг. 120. Крутильная система, состоящая из 6 моторных и 2 внешних масс.



Совершенно таким же путем решается вопрос об отыскании частот главных видов свободных колебаний системы, представленной на фиг. 120. Система состоит из 6 одинаковых моторных масс и 2 внешних масс. Не приводя выводов, которые вполне аналогичны предыдущим, дадим окончательные результаты. Уравнение базисной кривой в этом случае будет

$$z = \psi(y) = \frac{y^4 - 8y^3 + 21y^2 - 20y + 5}{y^5 - 10y^4 + 36y^3 - 56y^2 + 35y - 6} \quad (51)$$

Эта кривая дана на фиг. 121.



Фиг. 121. Базисная кривая крутильной системы, имеющей 6 моторных масс.

Уравнения определяющих кривых будут те же, что и в предыдущем случае, именно: для системы с двумя внешними массами — уравнение (47), а для системы с одной внешней массой — уравнение (50).

К системе, показанной на фиг. 120, приводятся системы коленчатых валов моторов, имеющих 6-коленный вал и редуктор, но не имеющих нагнетателя.

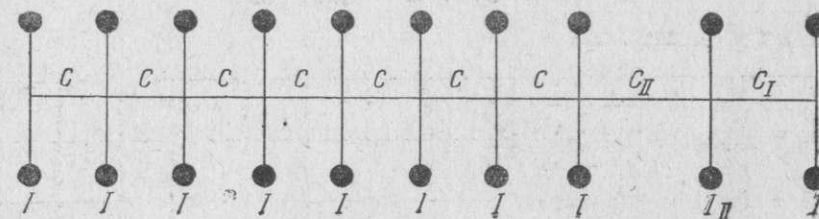
На фиг. 121 в виде примера нанесена прямая, соответствующая системе коленчатого вала авиационного мотора BMW-VI. Она, как видим, сразу определяет все шесть значений  $y$ , которым соответствуют следующие числа свободных крутильных колебаний этого вала в минуту:

$$\begin{aligned} n_c^{(1)} &= 5500 & n_c^{(4)} &= 32900 \\ n_c^{(2)} &= 15050 & n_c^{(5)} &= 39300 \\ n_c^{(3)} &= 24500 & n_c^{(6)} &= 43500 \end{aligned}$$

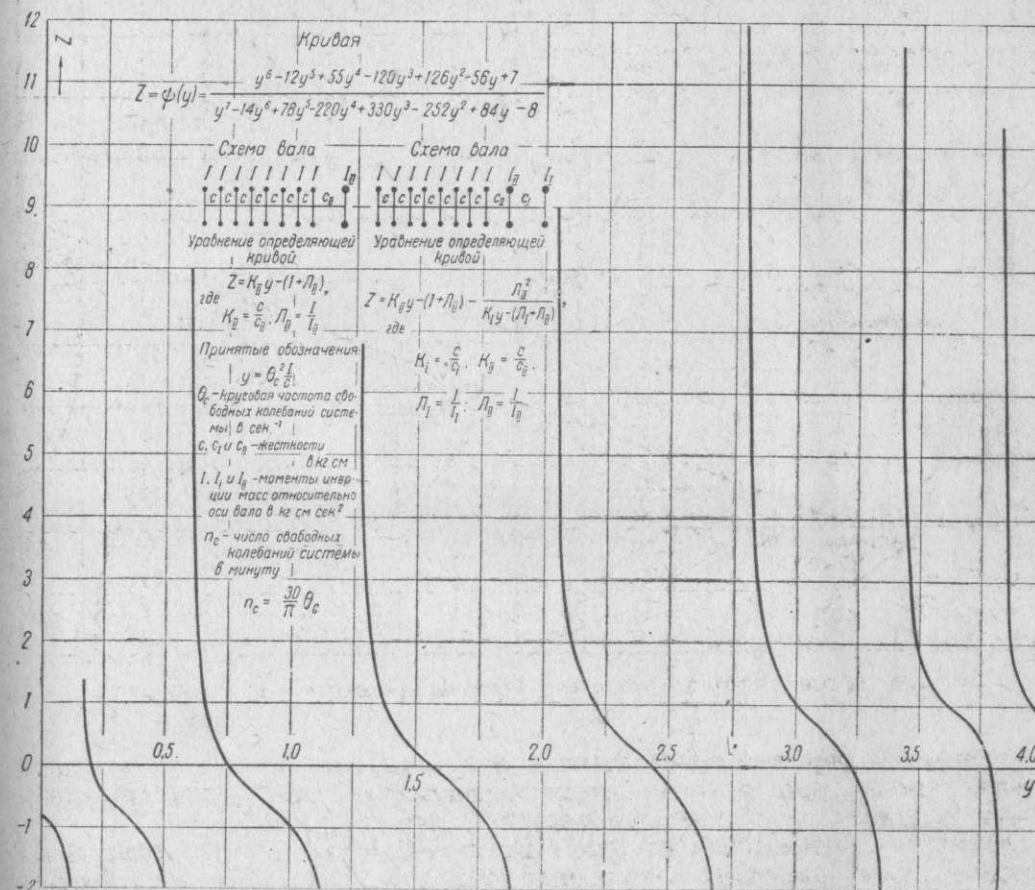
На фиг. 122 дана система, состоящая из 8 одинаковых моторных масс и 2 внешних масс. Уравнение базисной кривой в этом случае будет

$$z = \psi(y) = \frac{y^6 - 12y^5 + 55y^4 - 120y^3 + 126y^2 - 56y + 7}{y^7 - 14y^6 + 78y^5 - 220y^4 + 330y^3 - 252y^2 + 84y - 8} \quad (52)$$

Соответствующая кривая дана на фиг. 123.



Фиг. 122. Крутильная система, состоящая из 8 моторных и 2 внешних масс.

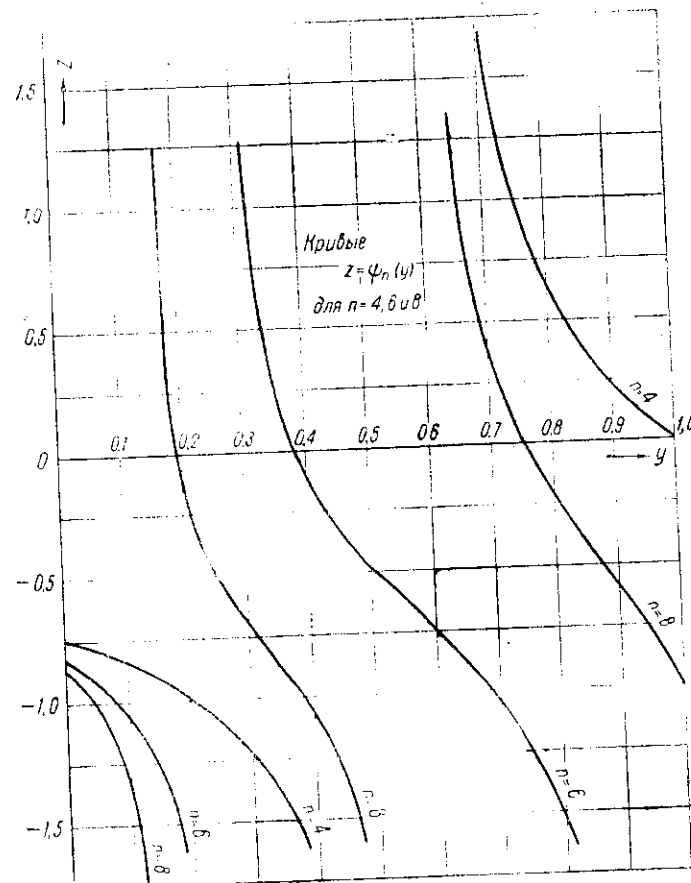


Фиг. 123. Базисная кривая крутильной системы, имеющей 8 моторных масс.

Уравнения определяющих кривых будут те же, что и в предыдущих случаях: для системы с двумя внешними массами — уравнение (47), а для системы с одной внешней массой — уравнение (50).

На фиг. 124 даны в большом масштабе по две ветви из фиг. 119 и 121 и три ветви из фиг. 123 для возможности более точного определения соответственно частот двух первых и трех первых главных видов свободных крутильных колебаний, имеющих наибольшее практическое значение.

Таблицы для построения вышеприведенных базисных кривых и некоторые интересные свойства этих кривых даны в работе автора „Графо-аналитический способ определения числа собственных крутильных колебаний коленчатых валов“, опубликованной в журнале „Техника воздушного флота“, № 5 — за 1932 г.



Фиг. 124. Первые ветви базисных кривых крутильных систем, имеющих 4, 6 и 8 моторных масс.

тильной системы из  $n$  масс, совершающей какой-либо из главных видов свободных колебаний. При наличии равенств (19) система уравнений (14) примет вид

$$\begin{aligned} -I_1 \Theta_c^2 z_1 + c_1(z_1 - z_2) &= 0, \\ I_2 \Theta_c^2 z_2 + c_2(z_2 - z_3) + c_1(z_2 - z_1) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ I_i \Theta_c^2 z_i + c_i(z_i - z_{i+1}) + c_{i-1}(z_i - z_{i-1}) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -I_{n-1} \Theta_c^2 z_{n-1} + c_{n-1}(z_{n-1} - 1) + c_{n-2}(z_{n-1} - z_{n-2}) &= 0, \\ \text{II} \quad I_n \Theta_c^2 + c_{n-1}(1 - z_{n-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Сущность метода заключается в том, что задаются ориентировочно величиной искомой частоты  $\Theta_c = \Theta_c'$  и проверяют, удовлетворяется ли система уравнений (53) при этой частоте. Для этого из последних ( $n$ ) уравнений системы определяют величины  $z_1$  и  $z_2$  и подставляют их в первое уравнение системы; если это уравнение будет удовлетворяться, взятое значение  $\Theta_c = \Theta_c'$  будет искомым; если этого нет, то определяют

величину остаточного момента  $R'$ , представляющего левую часть первого уравнения системы (53) при  $\Theta_c = \Theta_c'$ , задаются новым значением  $\Theta_c = \Theta_c''$  и определяют таким же путем соответствующий остаточный момент  $R''$ . Найденные значения  $R'$  и  $R''$  делят соответственно на  $(\Theta_c')^2$  и  $(\Theta_c'')^2$ ; строят в системе координат  $\left(\frac{R}{(\Theta_c')^2}, \Theta_c'\right)$  точку  $A'$  с координатами  $\left(\frac{R'}{(\Theta_c')^2}, \Theta_c'\right)$  и точку  $A''$  с координатами  $\left(\frac{R''}{(\Theta_c'')^2}, \Theta_c''\right)$ ; точки  $A'$  и  $A''$  соединяют между

собой прямой линией, продолжают эту линию до пересечения с осью  $\Theta_c$  и находят частоту  $\Theta_c = \Theta_c'''$ , соответствующую этой точке пересечения. После этого совершенно так же находят  $R'''$ , соответствующий  $\Theta_c'''$ , строят точку  $A'''$ , соединяют точку  $A'''$  с точкой  $A''$  или с точкой  $A'$  (смотря по тому, какая из этих точек ближе к оси  $\Theta_c$ ) прямой линией, проводят ее до пересечения с осью  $\Theta_c$  и находят частоту  $\Theta_c = \Theta_c''''$ , соответствующую точке пересечения. Этот процесс определения  $\Theta_c$  продолжают до тех пор, пока не получат  $R = 0$  или близким к 0.

Определяемые описанным способом величины  $\Theta_c'', \Theta_c''', \dots$  будут все ближе и ближе подходить к искомому значению  $\Theta_c$ , которое может быть найдено таким путем с любой точностью. При расчетах обычно бывает достаточно проделать 2—3 пересчета.

Подсчеты для определения остаточного момента  $R$  проще всего вести по следующей схеме. Обозначим через  $e_i$  упругий момент  $i$ -го участка вала, соединяющего  $i$ -ю и  $(i-1)$ -ю массы системы, так что

$$e_i = c_i(\alpha_i - \alpha_{i+1}). \quad (54)$$

Тогда, начиная с последнего уравнения системы (53), имеем

$$\left. \begin{aligned} e_{n-1} &= c_{n-1}(\alpha_{n-1} - 1) = -I_n \Theta_c^2, \\ \alpha_{n-1} - 1 &= \frac{e_{n-1}}{c_{n-1}}, \quad \alpha_{n-1} = 1 + \frac{e_{n-1}}{c_{n-1}}, \\ e_{n-2} &= c_{n-2}(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) = e_{n-1} - I_{n-1} \Theta_c^2 \alpha_{n-1}, \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} &= \frac{e_{n-2}}{c_{n-2}}, \quad \alpha_{n-2} = \alpha_{n-1} + \frac{e_{n-2}}{c_{n-2}}, \\ &\dots \dots \dots \\ R &= e_1 - I_1 \Theta_c^2 \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Для записи подсчетов, производимых по этой схеме, проф. М. Tolle (см. его книгу „Regelung der Kraftmaschinen“) предложил форму таблиц, которой обычно и пользуются при расчетах. Ниже в виде примера приводятся таблицы Tolle (табл. 21, 22 и 23) для определения частоты 1-узлового вида свободных колебаний системы коленчатого вала мотора M-17. Приведенная схема этой системы дана на фиг. 125, а. На этом же чертеже дана форма 1-узловой вида свободных колебаний системы. На фиг. 125, б дана форма 2-узловой вида свободных колебаний.

Кривая  $\frac{R}{\Theta_c^2} = f(\Theta_c)$  в той ее части, которая определяет частоту 1-узлового вида свободных колебаний системы, дана на фиг. 126. Из расчета получается

$$\Theta_c^{(1)} = 579,5 \text{ сек.}^{-1}, \quad n_c^{(1)} = 5534 \text{ кол./мин.}$$

$$\Theta_c^{(2)} = 1720 \text{ сек.}^{-1}, \quad n_c^{(2)} = 16430 \text{ кол./мин.}$$



Таблица Tolle

$$\theta_c = 579; \theta_c^2 = 335\,241$$

№ участка	$e$	$-I \frac{\theta_c^2}{c}$	$\alpha$	№ массы
6	— 368 760	$-1,1 \theta_c^2$	1,0000	7
	— 368 760	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,0475	
	— 351 240	$-1,1 \theta_c^2$	0,9525	6
5	— 720 000	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,0927	
	— 317 060	$-1,1 \theta_c^2$	0,8598	5
4	— 1 037 060	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,1335	
	— 267 830	$-1,1 \theta_c^2$	0,7263	4
3	— 1 304 890	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,1679	
	— 205 910	$-1,1 \theta_c^2$	0,5584	3
2	— 1 510 800	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,1944	
	— 134 230	$-1,1 \theta_c^2$	0,3640	2
1	— 1 645 030	$4,077 \cdot 10^6$	— 0,4035	
	1 575 800	$-119 \theta_c^2$	— 0,0395	1

$$R = -69\,230$$

$$\frac{R}{\theta_c^2} = -\frac{69\,230}{335\,241} = -0,206$$

Таблица 2

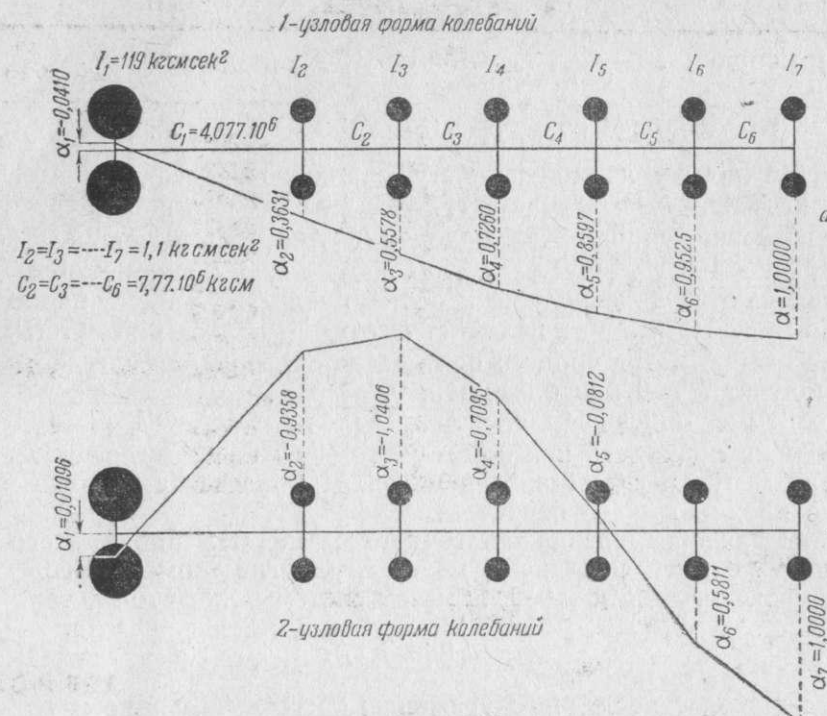
Таблица Tolle

$$\theta_c = 581; \theta_c^2 = 337\,561$$

№ участка	$e$	$-I \frac{\theta_c^2}{c}$	$\alpha$	№ массы
6	— 371 320	$-1,1 \theta_c^2$	1,0000	7
	— 371 320	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,0478	
	— 353 570	$-1,1 \theta_c^2$	0,9522	6
5	— 724 890	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,0933	
	— 318 520	$-1,1 \theta_c^2$	0,8578	5
4	— 1 043 410	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,1343	
	— 268 650	$-1,1 \theta_c^2$	0,7235	4
3	— 1 312 060	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,1689	
	— 205 930	$-1,1 \theta_c^2$	0,5546	3
2	— 1 517 990	$7,77 \cdot 10^6$	— 0,1954	
	— 133 380	$-1,1 \theta_c^2$	0,3592	2
1	— 1 651 370	$4,077 \cdot 10^6$	— 0,4050	
	+ 1 839 770	$-119 \theta_c^2$	— 0,0458	1

$$R = 188\,400$$

$$\frac{R}{\theta_c^2} = \frac{188\,400}{337\,561} = 0,558$$



Фиг. 125. 1-узловая (a) и 2-узловая (b) формы свободных колебаний системы коленчатого вала мотора М-17.

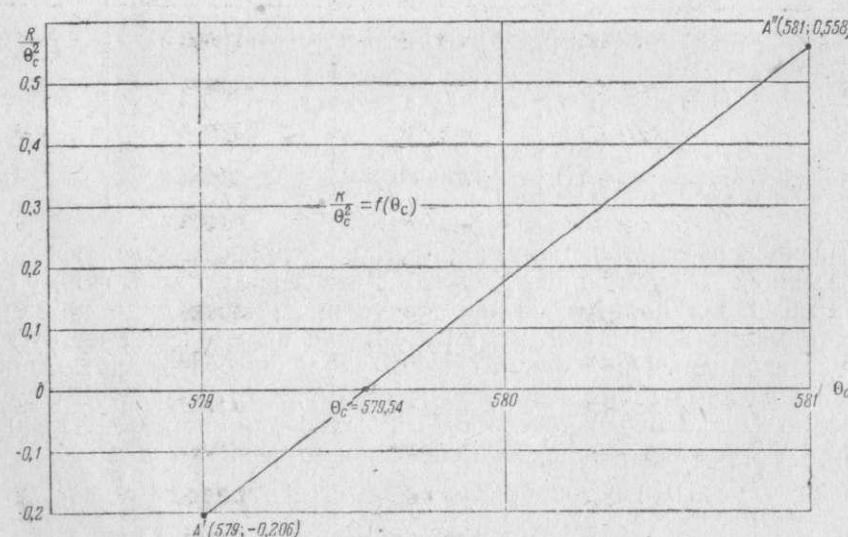
Фиг. 126. Кривая  $\frac{R}{\theta_c^2} = f(\theta_c)$  для свободных колебаний системы коленчатого вала мотора М-17.

Таблица Tolle

 $\Theta_0 = 579,54; \Theta_0^2 = 335,866$ 

№ участка	$e$	$I \Theta_c^2$ $c$	$\alpha$	№ массы
6	— 369 450	$-1,1 \Theta_c^2$	1,0000	7
	— 369 450	$7,77 \cdot 10^6$	$-0,0475$	
	— 351 900	$-1,1 \Theta_c^2$	0,9525	6
5	— 721 350	$7,77 \cdot 10^6$	$-0,0928$	
	— 317 620	$-1,1 \Theta_c^2$	0,8597	5
4	— 1 038 970	$7,77 \cdot 10^6$	$-0,1337$	
	— 268 220	$-1,1 \Theta_c^2$	0,7260	4
3	— 1 307 190	$7,77 \cdot 10^6$	$-0,1682$	
	— 206 080	$-1,1 \Theta_c^2$	0,5578	3
2	— 1 513 270	$7,77 \cdot 10^6$	$-0,1947$	
	— 134 150	$-1,1 \Theta_c^2$	0,3631	2
1	— 1 647 420	$4,077 \cdot 10^6$	$-0,4041$	
	+ 1 638 690	$-119 \Theta_c^2$	$-0,0410$	1

 $R = -8730$ 

$$\frac{R}{\Theta_c^2} = \frac{8730}{335,866} = -0,026$$

Сделаем по существу изложенного метода несколько замечаний. Если бы мы определили для остаточного момента  $R$  зависимость от  $\Theta_c$  в общем виде, то очевидно, что при подстановке величин  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (найденных тоже в общем виде, как функции  $\Theta_c$ ) в первое уравнение системы (53) мы пришли бы к уравнению частоты системы (17):

$$A_{n-1}(\Theta_c^2)^n + A_{n-2}(\Theta_c^2)^{n-1} + A_{n-3}(\Theta_c^2)^{n-2} + \dots + A_0 \Theta_c^2 = 0.$$

Таким образом выражение для остаточного момента  $R$  в общем виде будет

$$R = A_{n-1}(\Theta_c^2)^n + A_{n-2}(\Theta_c^2)^{n-1} + A_{n-3}(\Theta_c^2)^{n-2} + \dots + A_0 \Theta_c^2. \quad (56)$$

Соответствующее выражение в общем виде для функции

$$\frac{R}{\Theta_c^2} = f(\Theta_c)$$

будет

$$\frac{R}{\Theta_c^2} = f(\Theta_c) = A_{n-1}(\Theta_c^2)^{n-1} + A_{n-2}(\Theta_c^2)^{n-2} + A_{n-3}(\Theta_c^2)^{n-3} + \dots + A_0. \quad (57)$$

Последнее уравнение показывает, что кривая, выражаемая в системе координат  $\left(\frac{R}{\Theta_c^2}, \Theta_c\right)$  уравнением

$$\frac{R}{\Theta_c^2} = f(\Theta_c)$$

определяемая нами по точкам для отыскания  $\Theta_c$  вышеизложенным методом последовательных приближений, является не чем иным, как кривой частоты, соответствующей уравнению частоты в форме (18). Поэтому по существу отыскание  $\Theta_c$  вышеизложенным методом последовательных приближений является с математической точки зрения определением корней уравнения частоты (18) методом подбора, причем большим преимуществом изложенного метода является то обстоятельство, что для определения корней уравнения частоты (18) не требуется предварительного нахождения корня уравнения частоты. Кривая

$$\frac{R}{\Theta_c^2} = f(\Theta_c)$$

пересекает ось абсцисс  $\Theta_c$  в  $(n-1)$ -й точках, определяющих для  $\Theta_c$  значения  $\Theta_c^{(1)}, \Theta_c^{(2)}, \dots, \Theta_c^{(n-1)}$ ; эти значения и являются частотами главных видов свободных колебаний системы, соответственно 1-узлового, 2-узлового и т.д.

Мы не имеем возможности останавливаться в этой работе на изучении интересных свойств уравнения частоты (18). Одним из этих свойств является выражение для свободного члена  $A_0$  этого уравнения, именно

$$A_0 = -(I_1 + I_2 + \dots + I_n). \quad (58)$$

Не давая по указанной причине доказательства этого положения, заметим, что уравнения частот (32") и (36") подтверждают, например, это положение для крутильных систем из 2 и 3 масс.

Соотношение (58) показывает на основании равенства (57), что ордината в начальной точке ( $\Theta_c = 0$ ) кривой

$$\frac{R}{\Theta_c^2} = f(\Theta_c)$$

будет равна

$$f(0) = A_0 = -(I_1 + I_2 + \dots + I_n). \quad (59)$$

Это обстоятельство дает возможность сразу определить начальную точку кривой  $f(0)$  указанной кривой, что позволяет более правильно наметить продолжение этой кривой около  $\Theta_c = \Theta_c^{(1)}$ .

Второе замечание по существу изложенного способа определения  $\Theta_c$  методом последовательных приближений относится к вопросу определения исходного ориентировочного значения  $\Theta_c = \Theta_c^{(1)}$ . Для этого рассматривают крутильную систему приводят приблизительно к одной из разобранных схем, допускающих непосредственное определение  $\Theta_c$ . Достаточно простой и дающий хорошие практические результаты способ приведения заключается в том, что две или несколько рядом расположенных масс  $I_k, I_{k+1}, \dots$  крутильной системы заменяются одной массой с моментом инерции, равным

$$I_2 = I_k + I_{k+1} + \dots$$

Положение этой массы принимается в центре тяжести системы масс  $(I_k, I_{k+1}, \dots)$ , причем моменты инерции  $I_k, I_{k+1}, \dots$  условно рассматриваются при этом как обычные массы.

Объединяя таким образом одну или несколько групп масс рассматриваемой крутильной системы, всегда возможно привести эту систему, конечно, только приблизительно, к одной из рассмотренных нами схем, допускающих непосредственное определение  $\Theta_c$ , а следовательно, позволяющих определение исходного ориентировочного значения  $\Theta_c = \Theta_c^{(1)}$ .

До сих пор мы вели исследование главных видов свободных крутильных колебаний системы, состоящей из  $n$  масс, не принимая во внимание участки вала, соединяющих отдельные массы. Это позволило нам



рассматривать крутильную систему из  $n$  масс как систему с  $n$  степенями свободы. Далее мы составляли выражения для кинетической энергии  $T$  и потенциальной энергии  $V$  этой системы [см. равенства (4) и (6)], а именно

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (I_i \dot{\varphi}_i^2) \quad (4)$$

и

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n-1} [c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2]. \quad (6)$$

и, пользуясь дифференциальными уравнениями движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (3)$$

находили систему дифференциальных уравнений, определяющую движение системы, совершающей свободные крутильные колебания. Решая эту систему дифференциальных уравнений, мы пришли к заключению, что система с  $n$  степенями свободы имеет  $(n-1)$  главных видов свободных колебаний, которым соответствуют частоты свободных колебаний  $\theta_c^{(1)}, \theta_c^{(2)}, \dots, \theta_c^{(n-1)}$ . Каждому из этих главных видов колебаний соответствует своя форма колебаний, определяемая величинами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1$ ; физический смысл этих величин определяется равенствами (19).

Если при исследованиях принять во внимание массы участков вала, соединяющих отдельные массы системы, то систему придется рассматривать как систему с бесконечно большим числом степеней свободы. Такая система имеет бесконечно большое число главных видов свободных колебаний с соответствующими частотами колебаний.

Определение частот и форм главных видов свободных крутильных колебаний системы в этом случае может быть выполнено с любой степенью точности при помощи волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2}.$$

(Вывод этого уравнения см., например, в книге проф. С. П. Тимошенко „Колебания в инженерном деле“, глава IV).

Не останавливаясь здесь на соответствующих выводах, заметим, что для рассматриваемой системы задача приводится к решению системы уравнений, содержащей уравнения тригонометрического вида относительно искомой частоты. Решение этой системы может быть получено графическим путем.

С достаточной для практики точностью, частоты и формы первых двух главных видов свободных крутильных колебаний системы (имеющих наибольшее значение в большинстве практических вопросов) могут быть найдены при помощи приближенного метода, предложенного Релеем (Lord Rayleigh).

Этот метод имеет в основе некоторые допущения относительно конфигурации системы во время колебаний, а именно: с достаточной точностью можно допустить, что движение любого поперечного сечения вала действительной системы будет такое же, как у соответствующей системы с  $n$  степенями свободы. Имея в виду это положение, составим выражение для кинетической  $T$  и потенциальной  $V$  энергий рассматриваемой системы. Обозначая (фиг. 127) через

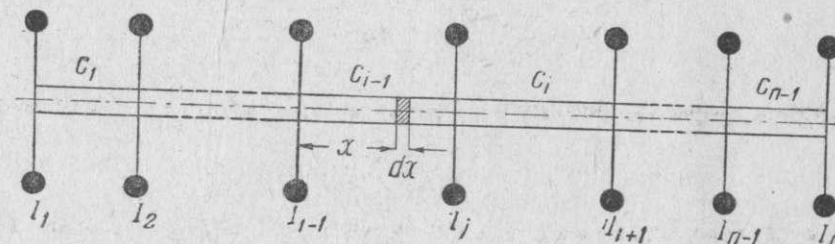
$l_{i-1}$  — длину участка вала, соединяющего  $(i-1)$ -ю и  $i$ -ю массы системы,  
 $I_{i-1}$  — массовый момент инерции относительно оси вала этого участка,  
 $l_i$  — длину участка вала, соединяющего  $i$ -ю и  $(i+1)$ -ю массы системы,  
 $I_i$  — массовый момент инерции относительно оси вала этого участка,  
найдем на основании принятого допущения, что отклонение находящегося

на расстоянии  $x$  от  $(i-1)$ -й массы сечения  $(i-1)$ -го участка вала будет равно

$$\varphi_x = \varphi_{i-1} + \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{l_{i-1}} x.$$

Угловая скорость этого сечения будет

$$\dot{\varphi}_x = \dot{\varphi}_{i-1} + \frac{\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}}{l_{i-1}} x.$$



Фиг. 127. К определению главных видов свободных колебаний системы с учетом массы участков вала, соединяющих отдельные массы системы.

Кинетическая энергия  $(i-1)$ -го участка вала равна

$$\begin{aligned} T_{i-1} &= \int_0^{l_{i-1}} \frac{1}{2} \frac{I_{i-1}}{l_{i-1}} \dot{\varphi}_x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{I_{i-1}}{l_{i-1}} \int_0^{l_{i-1}} \left[ \dot{\varphi}_{i-1}^2 + 2 \dot{\varphi}_{i-1} \frac{\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}}{l_{i-1}} x + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}}{l_{i-1}} \right)^2 x^2 \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} I_{i-1} \left[ \dot{\varphi}_{i-1}^2 + \dot{\varphi}_{i-1} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}) + \frac{1}{3} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1})^2 \right] \\ \text{или} \quad T_{i-1} &= \frac{1}{6} I_{i-1} (\dot{\varphi}_{i-1}^2 + \dot{\varphi}_{i-1} \dot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i^2). \end{aligned} \quad (60)$$

Принимая во внимание это соотношение, мы для кинетической энергии всей крутильной системы получим вместо выражения (4) следующее выражение:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (I_i \dot{\varphi}_i^2) + \frac{1}{6} [I_1 \dot{\varphi}_1^2 + (I_1 + I_2) \dot{\varphi}_2^2 + (I_2 + I_3) \dot{\varphi}_3^2 + \dots + I_{n-1} \dot{\varphi}_n^2] + \\ &\quad + \frac{1}{6} [I_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + I_2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + \dots + I_{n-1} \dot{\varphi}_{n-1} \dot{\varphi}_n]. \end{aligned} \quad (61)$$

Выражение для потенциальной энергии системы останется прежним [см. равенство (6)]

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n-1} [c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2]. \quad (62)$$

Имея выражения для кинетической и потенциальной энергий системы, находим обычным путем при помощи дифференциальных уравнений движения Лагранжа (3) систему дифференциальных уравнений, определяющую движение рассматриваемой крутильной системы, совершающей свободные колебания. Согласно равенству (61) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} &= I_i \dot{\varphi}_i + \frac{1}{3} (I_{i-1} + I_i) \dot{\varphi}_i + \frac{1}{6} I_{i-1} \dot{\varphi}_{i-1} + \frac{1}{6} I_i \dot{\varphi}_{i+1}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) &= \left[ I_i + \frac{1}{3} (I_{i-1} + I_i) \right] \ddot{\varphi}_i + \frac{1}{6} I_{i-1} \ddot{\varphi}_{i-1} + \\ &\quad + \frac{1}{6} I_i \ddot{\varphi}_{i+1} = a_i \ddot{\varphi}_i + b_{i-1} \ddot{\varphi}_{i-1} + b_i \ddot{\varphi}_{i+1}, \end{aligned} \quad (163)$$



где для краткости обозначено

$$\left. \begin{aligned} a_i &= I_i + \frac{1}{3} (i_{i-1} + i_i) \\ b_i &= \frac{1}{6} i_i \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

и также

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0. \quad (65)$$

Согласно равенству (62) имеем

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = c_i (\varphi_i - \varphi_{i-1}) - c_{i-1} (\varphi_{i-1} - \varphi_i). \quad (66)$$

Принимая во внимание равенства (63), (65) и (66), получим для  $i$ -й массы системы следующее уравнение движения:

$$b_i \ddot{\varphi}_{i-1} + a_i \ddot{\varphi}_i + b_{i+1} \ddot{\varphi}_{i+1} - c_{i-1} \varphi_{i-1} + (c_{i-1} + c_i) \varphi_i - c_i \varphi_{i+1} = 0. \quad (67)$$

Отсюда искомая система дифференциальных уравнений будет

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{\varphi}_1 + b_1 \ddot{\varphi}_2 + c_1 \varphi_1 - c_1 \varphi_2 &= 0, \\ b_1 \ddot{\varphi}_1 + a_2 \ddot{\varphi}_2 + b_2 \ddot{\varphi}_3 - c_1 \varphi_1 + (c_1 + c_2) \varphi_2 - c_2 \varphi_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ b_{i-1} \ddot{\varphi}_{i-1} + a_i \ddot{\varphi}_i + b_{i+1} \ddot{\varphi}_{i+1} - c_{i-1} \varphi_{i-1} + (c_{i-1} + c_i) \varphi_i - c_i \varphi_{i+1} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ b_{n-2} \ddot{\varphi}_{n-2} + a_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + b_n \ddot{\varphi}_n - c_{n-2} \varphi_{n-2} + \\ &+ (c_{n-2} + c_{n-1}) \varphi_{n-1} - c_{n-1} \varphi_n = 0, \\ b_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + a_n \ddot{\varphi}_n - c_{n-1} \varphi_{n-1} + c_n \varphi_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Решения этой системы уравнений, соответствующие ее главным видам свободных колебаний, будут

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi_1 \sin(\Theta_c t), \\ \varphi_2 &= \Phi_2 \sin(\Theta_c t), \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_i &= \Phi_i \sin(\Theta_c t), \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_n &= \Phi_n \sin(\Theta_c t), \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Подставляя эти выражения для  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  в систему уравнений (68), сокращая затем обе части каждого уравнения на  $\sin(\Theta_c t)$  и обозначая

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_n} = \alpha_1, \quad \frac{\Phi_2}{\Phi_n} = \alpha_2, \quad \dots, \quad \frac{\Phi_n}{\Phi_n} = 1, \quad (70)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - a_1 \Theta_c^2) \alpha_1 - (c_1 + b_1 \Theta_c^2) \alpha_2 &= 0, \\ -(c_1 + b_1 \Theta_c^2) \alpha_1 + (c_1 + c_2 - a_2 \Theta_c^2) \alpha_2 - (c_2 + b_2 \Theta_c^2) \alpha_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -(c_{i-1} + b_{i-1} \Theta_c^2) \alpha_{i-1} + (c_{i-1} + c_i - a_i \Theta_c^2) \alpha_i - (c_i + b_i \Theta_c^2) \alpha_{i+1} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -(c_{n-1} + b_{n-1} \Theta_c^2) \alpha_{n-1} + (c_{n-1} - a_n \Theta_c^2) \alpha_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Решая эту систему уравнений, мы найдем искомые значения  $\Theta_c$ , соответствующие главным видам свободных колебаний исследуемой системы, и соответствующие этим частотам значения величин  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ , определяющих соответствующие формы колебаний системы.

Решение системы уравнений (71) приходится начинать с определения  $\Theta_c$ . Для этого удобнее всего пользоваться изложенным выше методом последовательных приближений, останавливаться на рассмотрении которого здесь не будем.

Принимая во внимание равенства (69) и (70), можно равенству (63) дать следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) = \left[ I_i + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \right) i_{i-1} + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \right) i_i \right] \ddot{\varphi}_i.$$

Сравнивая это выражение с выражением (7) для соответствующей системы с  $n$  степенями свободы:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) = I_i \ddot{\varphi}_i, \quad (72)$$

мы приходим к заключению, что рассмотренная нами система в отношении частот и форм главных видов свободных колебаний эквивалентна обычной системе с  $n$  степенями свободы, у которой моменты инерции масс системы  $I_i$  заменены моментами инерции  $I_i$ , равными

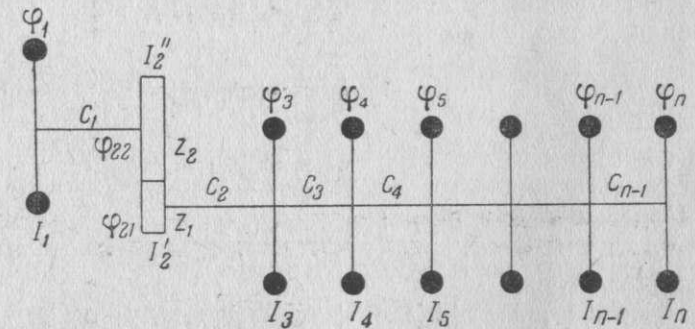
$$I_i = I_i + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \right) i_{i-1} + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \right) i_i. \quad (72)$$

Заметим, что входящие в эти выражения величины  $\alpha$  относятся к действительной крутильной системе, в которой принимаются во внимание массы участков вала, соединяющих отдельные массы системы.

### § 3. Определение главных видов свободных крутильных колебаний разветвленных систем

Рассмотрим теперь определение главных видов свободных крутильных колебаний, так называемых, разветвленных систем. Мы ограничимся здесь исследованием только таких систем, разветвления в которых получаются

благодаря наличию в них шестеренчатых передач. Типичным примером крутильной системы этого вида является система коленчатый вал — пропеллер — нагнетатель авиационного мотора с редуктором и нагнетателем.



Фиг. 128. К определению главных видов свободных колебаний системы коленчатого вала мотора с редуктором к пропеллеру.

Для определения главных видов свободных крутильных колебаний таких систем мы будем опять пользоваться дифференциальными уравнениями движения Лагранжа.

Начнем наши исследования с системы, представленной на фиг. 128. К этой схеме приводится система коленчатый вал — пропеллер мотора с редуктором к пропеллеру. Обозначим (фиг. 128) через

$I_1$  — момент инерции относительно оси вращения массы пропеллера мотора;



165



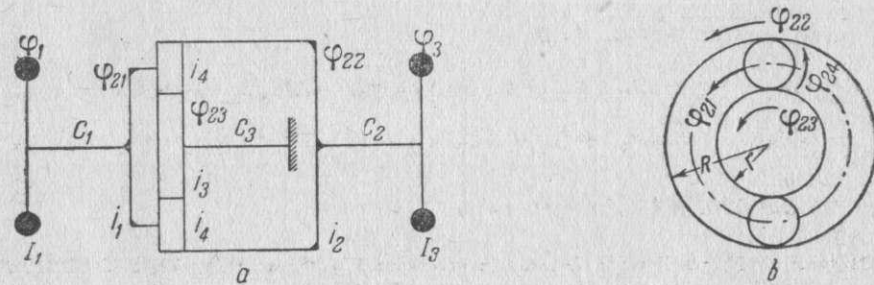
причем

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{I_1' I_2 I_3}{c_1 c_2}, \\ k_2 &= \frac{I_1' (I_2 + I_3)}{c_1} + \frac{I_3 (I_1' + I_2)}{c_2}, \\ k_3 &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

и

Решение уравнения (36''') дает два значения  $\Theta_c^{(1)}$  и  $\Theta_c^{(2)}$  для  $\Theta_c$ , соответствующих 1-узловому и 2-узловому видам свободных крутильных колебаний рассматриваемой системы. Если пренебречь приведенным моментом инерции редуктора  $I_3$ , то система, показанная на фиг. 131, приведет к системе, состоящей из 2 масс  $I_1$  и  $I_3$ , соединенных валом жесткости  $c$ . Эта жесткость определяется из уравнения

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{k^2 c_1} + \frac{1}{c_2}. \quad (81)$$



Фиг. 132. К определению главных видов свободных колебаний системы коленчатого вала однорядного звездообразного мотора с планетарным редуктором к пропеллеру.

Согласно равенству (33) частота свободных колебаний этой системы будет равна

$$\Theta_c = \sqrt{c \left( \frac{1}{I_1'} + \frac{1}{I_3} \right)} = \sqrt{\frac{\frac{1}{I_3} + \frac{1}{k^2 I_1}}{\frac{1}{c_2} + \frac{1}{k^2 c_1}}}. \quad (82)$$

Для случая однорядного звездообразного мотора с планетарным редуктором мы будем иметь схему, представленную на фиг. 132, а. Обозначая (фиг. 132, б)

$$\frac{R}{R+r} = k, \quad (83)$$

будем иметь

$$\varphi_{21} = k\varphi_{22} + (1-k)\varphi_{23}. \quad (84)$$

Пренебрегая моментами инерции масс сателлитов  $i_4$ , получим для кинетической энергии системы следующее выражение

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} i_1 \dot{\varphi}_{21}^2 + \frac{1}{2} i_2 \dot{\varphi}_{22}^2 + \frac{1}{2} i_3 \dot{\varphi}_{23}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2. \quad (85)$$

Потенциальная энергия системы будет равна

$$V = \frac{1}{2} c_1 (\varphi_1 - \varphi_{21})^2 + \frac{1}{2} c_3 \varphi_{23}^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_{22} - \varphi_3)^2. \quad (86)$$

Обозначая

$$\frac{1}{1-k} = a \text{ и } \frac{k}{1-k} = b, \quad (87)$$

на основании равенства (84) получим

$$\varphi_{23} = a\varphi_{21} - b\varphi_{22}. \quad (88)$$

Принимая во внимание это соотношение, получим для кинетической и потенциальной энергий системы следующие выражения

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} i_1 \dot{\varphi}_{21}^2 + \frac{1}{2} i_2 \dot{\varphi}_{22}^2 + \frac{1}{2} i_3 (a\dot{\varphi}_{21} - b\dot{\varphi}_{22})^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 \quad (85')$$

и

$$V = \frac{1}{2} c_1 (\varphi_1 - \varphi_{21})^2 + \frac{1}{2} c_3 (a\varphi_{21} - b\varphi_{22})^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_{22} - \varphi_3)^2. \quad (86')$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (3)$$

получим нижеследующую систему дифференциальных уравнений, определяющую движение исследуемой системы, совершающей свободные крутильные колебания:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 - c_1 \varphi_{21} &= 0, \\ -c_1 \varphi_1 + (i_1 + a^2 i_3) \ddot{\varphi}_{21} + (c_1 + a^2 c_3) \varphi_{21} - a b i_3 \ddot{\varphi}_{22} - a b c_3 \varphi_{22} &= 0, \\ -a b i_3 \ddot{\varphi}_{21} - a b c_3 \varphi_{21} + (i_2 + b^2 i_3) \ddot{\varphi}_{22} - (c_2 + b^2 c_3) \varphi_{22} - c_2 \varphi_3 &= 0, \\ -c_2 \varphi_{22} + I_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2 \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

и

Решения этой системы дифференциальных уравнений, определяющие главные виды свободных крутильных колебаний исследуемой системы, будут иметь вид

$$\varphi_i = \Phi_i \sin(\Theta_c t). \quad (90)$$

Подставляя эти выражения для  $\varphi_i$  в систему уравнений (89), получим

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - I_1 \Theta_c^2) \Phi_1 - c_1 \Phi_{21} &= 0, \\ -c_1 \Phi_1 + [(c_1 + a^2 c_3) - (i_1 + a^2 i_3) \Theta_c^2] \Phi_{21} - (a b c_3 - a b i_3 \Theta_c^2) \Phi_{22} &= 0, \\ -(a b c_3 - a b i_3 \Theta_c^2) \Phi_{21} + [(c_2 + b^2 c_3) - (i_2 + b^2 i_3) \Theta_c^2] \Phi_{22} - c_2 \Phi_3 &= 0, \\ -c_2 \Phi_{22} + (c_2 - I_3 \Theta_c^2) \Phi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

и

Частоты главных видов свободных колебаний системы определяются из уравнения

$$D = 0, \quad (92)$$

где  $D$  является определителем системы уравнений (91).

Определив частоты  $\Theta_c$ , легко найти из системы уравнений (91) соответствующие

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_1}{\Phi_3}, \quad \alpha_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_3} \text{ и } \alpha_{22} = \frac{\Phi_{22}}{\Phi_3}, \quad (93)$$

определяющие формы свободных колебаний системы.

Если пренебречь массами редуктора, т. е. принять, что

$$i_1 = i_2 = i_3 = 0,$$



то система уравнений (91) примет вид

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - I_1 \Theta_c^2) \Phi_1 - c_1 \Phi_{21} &= 0, \\ -c_1 \Phi_1 + (c_1 + a^2 c_3) \Phi_{21} - abc_3 \Phi_{22} &= 0, \\ -abc_3 \Phi_{21} + (c_2 + b^2 c_3) \Phi_{22} - c_2 \Phi_3 &= 0 \\ -c_2 \Phi_{22} + (c_2 - I_2 \Theta_c^2) \Phi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

И

Приравнивая определитель этой системы уравнений нулю и принимая во внимание обозначения (87), получим для частоты  $\Theta_c$  свободных крутильных колебаний исследуемой системы выражение

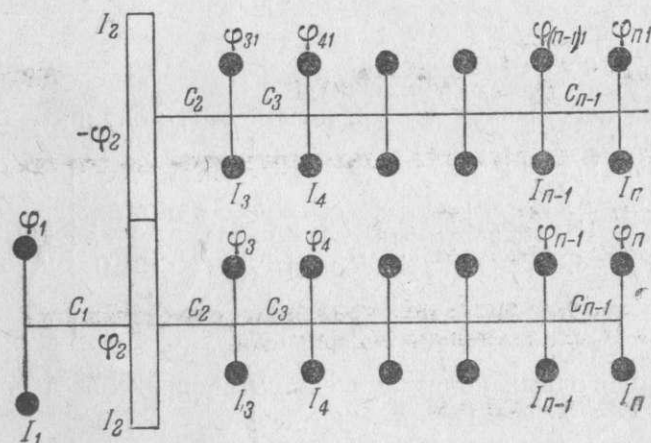
$$\Theta_c = \sqrt{\frac{\frac{1}{I_3} + \frac{1}{k^2 I_1}}{\frac{1}{c_3} + \frac{1}{k^2 c_1} + \frac{(1-k)^2}{k^2 c_2}}} \quad (95)$$

Если конструкция планетарного редуктора такова, что его центральная солнечная шестерня  $i_3$  жестко связана с картером мотора, то для определения  $\Theta_c$  такой системы надо в уравнении (95) положить  $c_3 = \infty$ . При этом значении  $c_3$  получится для  $\Theta_c$  выражение

$$\Theta_c = \sqrt{\frac{\frac{1}{I_3} + \frac{1}{k^2 I_1}}{\frac{1}{c_3} + \frac{1}{k^2 c_1}}}. \quad (96)$$

Это выражение совпадает с выражением (82) для  $\Theta_c$  системы с обычным редуктором.

Рассмотрим теперь два случая определения главных видов свободных крутильных колебаний систем, состоящих из двух одинаковых коленчатых



Фиг. 133. К определению главных видов свободных колебаний системы, состоящей из двух одинаковых коленчатых валов, передающих свою работу на общий пропеллерный вал и связанных между собой шестеренчатой передачей.

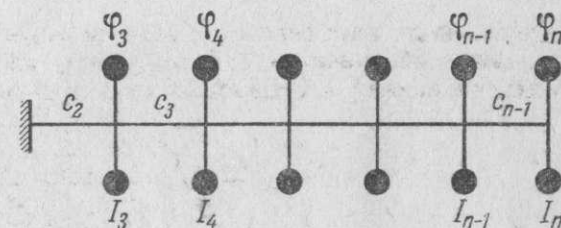
ветствующие массы обоих валов колеблются в одном направлении.

2. Шестерни передают совершаю́т крутильные колебания, а соответствующие массы обоих валов, совершая какой-либо из главных видов свободных колебаний системы, колеблются в разных направлениях.

Так как система совершает один из главных видов свободных крутильных колебаний, то прежде всего заметим, что частоты колебаний всех масс системы одинаковы. Далее, в указанном первом случае крутильных

колебаний системы углы поворота шестерен равны нулю, а во втором случае они одинаковы по величине, но противоположны по знаку (углы отклонения масс системы отсчитываем от координатной плоскости, проходящей через оси обоих валов). Из этого следует, что в обоих случаях углы отклонения соответствующих масс обоих валов одинаковы по величине. После этих предварительных замечаний рассмотрим, как совершает иссле-

дующая система главные виды свободных крутильных колебаний в первом и во втором случаях. В первом случае, когда шестерни не совершают крутильных колебаний, а соответствующие массы обоих валов колеблются в одном направлении, пропеллер и пропеллерный вал тоже не совершают крутильных колебаний. Каждый из валов совершает крутильные колебания так, как если бы его конец, несущий шестерню, был защемлен; при этом каждый из валов совершает колебаний с одинаковыми амплитудами свободных колебаний системы в представленной на фиг. 134. Для метода решения задачи. Кинетические энергии соответственно равны:



Фиг. 134. 1-я возможная эквивалентная схема системы, представленной на фиг. 133.

$$T = \sum_{i=3}^{i=n} \left( \frac{1}{2} I_i \dot{\psi}_i^2 \right) \quad (97)$$

И

$$V = \frac{1}{2} c_2 \varphi_0^2 + \sum_{i=3}^{i=n-1} \left[ \frac{1}{2} c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2 \right]. \quad (98)$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (3)$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений, определяющую свободные колебания системы, представленной на фиг. 134

$$\left. \begin{aligned} I_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0, \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 + c_3(\varphi_4 - \varphi_3) + c_4(\varphi_4 - \varphi_5) &= 0, \\ . &. . . . . \\ I_i \ddot{\varphi}_i + c_{i-1}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + c_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) &= 0, \\ . &. . . . . \\ I_n \ddot{\varphi}_n + c_{n-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Решения этой системы, соответствующие главным видам свободных крутильных колебаний, имеют вид

$$\varphi_i = \Phi_i \sin(\Theta_c t). \quad (100)$$

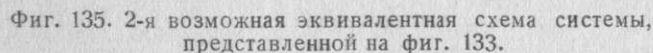


И

Приравнивая, как обычно, определитель этой системы уравнений нулю, найдем уравнение частоты, из которого для  $\Theta_c$  определяется  $(n-2)$  значений, соответствующих  $(n-2)$  возможным главным видам свободных крутильных колебаний системы, показанной на фиг. 134. Соответствующие формы колебаний найдутся, как обычно, из системы уравнений (101).

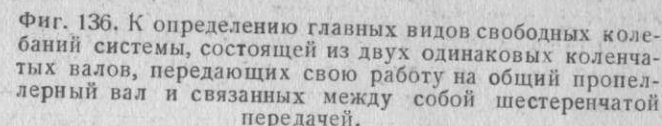
ИЛИ

Эти равенства показывают, что в рассматриваемом случае частоты и формы главных видов свободных крутильных колебаний системы будут те же,



Рассмотрим теперь определение главных видов свободных крутильных колебаний системы, представленной на фиг. 136. Пусть передаточное число редуктора будет  $k$ . Применяя те же рассуждения, что и в случае системы, показанной на фиг. 133, мы приходим к заключению, что система, представленная на фиг. 136, может иметь два случая главных видов свободных колебаний. В одном случае пропеллер, пропеллерный вал и шестерни редуктора не принимают участия в крутильных колебаниях системы; соответствующие массы обоих валов совершают одинаковые колебания, но в разных направлениях. Этот случай сводится к случаю крутильных колебаний системы, приведенной на фиг. 134.

И



Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения движения Лагранжа

получим следующую систему дифференциальных уравнений.

### Обозначая

мы можем систему уравнений (105) привести к виду

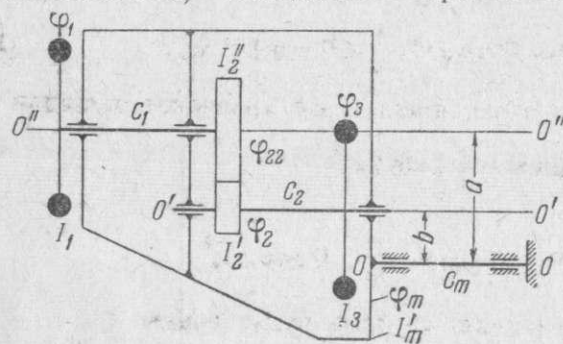
14



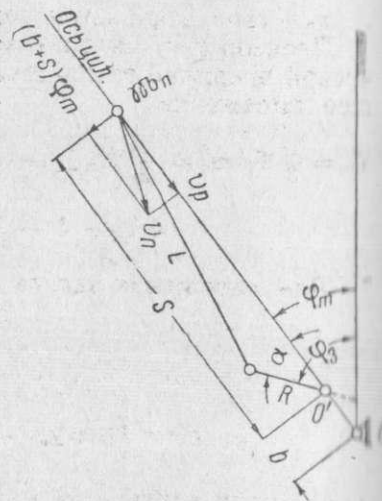
Эта система дифференциальных уравнений показывает, что частоты главных видов свободных крутильных колебаний системы, представленной на фиг. 136, в рассматриваемом случае ее колебаний определяются как частоты крутильной системы, приведенной на фиг. 129. Определение частот такой системы было рассмотрено нами раньше. Общее число возможных главных видов свободных крутильных колебаний системы, показанной на фиг. 136, будет тоже  $(2n - 3)$ . Формы главных видов колебаний этой системы определяются обычным путем.

#### § 4. Определение главных видов свободных крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов, имеющих редуктор, с учетом упругой связи мотора с подмоторной рамой

До сих пор мы определяли главные виды свободных крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов, имеющих редуктор, не принимая во внимание упругой связи мотора с подмоторной рамой, т. е. считая, что картер мотора не участвует в колебаниях и остается в пространстве неподвижным. Однако было замечено, что для указанного типа моторов, в частности для звездообразных моторов с редуктором, частоты главных видов свободных крутильных колебаний системы коленчатого вала, определенные расчетным путем без учета упругости подвески мотора, отличаются по величине от частот, определенных экспериментально; разница в некоторых случаях достигала 15%. Проведенные Хартог и Баттерфилд (J. P. Den Hartog и J. P. Butterfield) исследования причин этого



Фиг. 137. К определению главных видов свободных крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов, имеющих редуктор, с учетом упругой связи мотора с подмоторной рамой.



Фиг. 138. К определению главных видов свободных крутильных колебаний системы, представленной на фиг. 137.

расхождения (см. статью этих авторов „The Torsional Critical Speeds of Geared Airplane Engines“, опубликованную в журнале „Journal of the Aeronautical Sciences“ за октябрь 1937 г., № 12) показали, что именно упругость подвески мотора и обусловленное этим колебательное движение картера мотора является, при наличии крутильных колебаний системы его коленчатого вала, причиной указанного расхождения. Поэтому при определении частот главных видов свободных крутильных колебаний систем коленчатых валов моторов с редуктором необходимо принимать во внимание упругость подвески мотора. Рассмотрим определение частот главных видов свободных крутильных колебаний системы коленчатого вала одно-рядного звездообразного мотора с редуктором при наличии упругой подвески мотора. Крутильная схема такого мотора представлена на фиг. 137. Для получения дифференциальных уравнений движения исследуемой системы

мы опять воспользуемся дифференциальными уравнениями движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0. \quad (3)$$

За обобщенные координаты  $\varphi_i$  примем углы отклонения соответствующих масс системы от неподвижной в пространстве координатной плоскости, проходящей через ось  $OO$ , которая является осью вращения вала мотора при его колебаниях. Положение этой координатной плоскости в пространстве выбираем таким образом, чтобы с ней совпадали средние положения всех масс системы, совершающих свободные крутильные колебания.

Кинетическая энергия исследуемой системы складывается из кинетических энергий отдельных движущихся масс системы. Найдем выражения для кинетических энергий этих масс.

1. Кинетическая энергия поступательно двигающихся в цилиндрах масс. Обозначим (фиг. 138), через

- $M_n$  — суммарную поступательно двигающуюся в цилиндре массу;
- $v_n$  — абсолютную скорость оси поршневого пальца в пространстве;
- $v_p$  — относительную скорость оси поршневого пальца по оси цилиндра;
- $\varphi_m$  — обобщенную координату картера мотора и всех жестко с ним связанных масс мотора;
- $\varphi_3$  — обобщенную координату кривошипа мотора и всех отнесенных к нему масс мотора;

$\alpha$  — угол отклонения радиуса кривошипа от оси цилиндра.

Пренебрегая кинематикой прицепных шатунов, получим для кинетической энергии поступательно двигающейся в цилиндре массы  $M_n$  следующее выражение:

$$T_n = \frac{1}{2} M_n v_n^2 = \frac{1}{2} M_n [v_p^2 + (b + s)^2 \dot{\varphi}_m^2] = \frac{1}{2} M_n [R^2 (\sin \alpha + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\alpha)^2 \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (b + L - \frac{1}{4} \lambda R + R \cos \alpha + \frac{1}{4} \lambda R \cos 2\alpha)^2 \dot{\varphi}_m^2]. \quad (107)$$

Для упрощения задачи вместо входящих в это уравнение функций

$$\left( \sin \alpha + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\alpha \right)^2$$

$$\left( b + L - \frac{1}{4} \lambda R + R \cos \alpha + \frac{1}{4} \lambda R \cos 2\alpha \right)^2$$

возьмем их средние за цикл значения, которые будут равны

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sin \alpha + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\alpha \right)^2 d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \lambda^2 \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( b + L - \frac{1}{4} \lambda R + R \cos \alpha + \frac{1}{4} \lambda R \cos 2\alpha \right)^2 d\alpha &= \\ &= \left( b + L - \frac{1}{4} \lambda R \right)^2 + \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{32} \lambda^2 R^2 = \\ &= (b + L)^2 + \frac{3}{32} \lambda^2 R^2 - \frac{1}{2} \lambda b R \approx (b + L)^2. \end{aligned} \quad (109)$$

Далее из фиг. 138 имеем

откуда

$$\alpha = \varphi_3 - \varphi_m, \quad (110)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_m. \quad (111)$$



Обозначая через  $i$  число цилиндров мотора и принимая во внимание равенства (107), (108), (109) и (111), получим для кинетической энергии всех поступательнодвигающихся в цилиндрах мотора масс  $\mathcal{M}_n$  следующее выражение

$$T_n = \Sigma T'_n = \frac{i}{4} (1 + \frac{\lambda^2}{4}) \mathcal{M}_n R^2 (\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_m)^2 + \frac{i}{2} \mathcal{M}_n (b + L)^2 \dot{\psi}_m^2 \quad (112')$$

или, обозначая

$$\left. \begin{aligned} \frac{i}{2} (1 + \frac{\lambda^2}{4}) \mathcal{M}_n R^2 &= I_n \\ i \mathcal{M}_n (b + L)^2 &= I_p, \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

и

получим окончательно

$$T_n = \frac{1}{2} I_n (\dot{\psi}_3 - \dot{\psi}_m)^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\psi}_m^2 \quad (112)$$

2. Кинетическая энергия массы кривошипа и связанных с ними масс. Обозначим через

$I'_3$  — массовый момент инерции масс кривошипа, противовесов и отнесенных к оси цапфы кривошипа вращающихся масс шатунов относительно оси коленчатого вала  $O'O'$  (фиг. 137);

$M'_3$  — сумму всех этих масс;

$b$  — расстояние между осями  $O'O'$  и  $OO$ .

Согласно теореме Кёнига искомая кинетическая энергия будет равна

$$T_3 = \frac{1}{2} I'_3 \dot{\psi}_3^2 + \frac{1}{2} M'_3 b^2 \dot{\psi}_m^2 \quad (114)$$

3. Кинетическая энергия шестерни редуктора, находящейся на коленчатом вале.

Обозначая через

$I'_2$  — массовый момент инерции шестерни относительно оси  $O'O'$ ,

$M'_2$  — массу шестерни

и  $\psi_2$  — обобщенную координату шестерни, получим

$$T'_2 = \frac{1}{2} I'_2 \dot{\psi}_2^2 + \frac{1}{2} M'_2 b^2 \dot{\psi}_m^2 \quad (115)$$

4. Кинетическая энергия шестерни редуктора, находящейся на редукторном вале.

Обозначим через

$I'_2$  — массовый момент инерции шестерни относительно оси  $O''O''$ ;

$M'_2$  — массу шестерни;

$\psi_{22}$  — обобщенную координату шестерни;

$z_1$  — число зубьев шестерни редуктора, находящейся на коленчатом вале;

$z_2$  — число зубьев шестерни редуктора, находящейся на редукторном вале;

$k$  — передаточное число редуктора

$$k = -\frac{z_1}{z_2} \quad (116)$$

Кинетическая энергия шестерни будет равна

$$T'_2 = \frac{1}{2} I'_2 \dot{\psi}_{22}^2 + \frac{1}{2} M'_2 a^2 \dot{\psi}_m^2 \quad (117')$$

но так как

или

то

$$\begin{aligned} k(\psi_2 - \psi_m) &= (\psi_{22} - \psi_m) \\ \psi_{22} &= (1 - k)\psi_m + k\psi_2, \end{aligned} \quad (118)$$

$$\dot{\psi}_{22} = (1 - k)\dot{\psi}_m + k\dot{\psi}_2 \quad (119)$$

Поэтому

$$T'_2 = \frac{1}{2} I'_2 [(1 - k)\dot{\psi}_m + k\dot{\psi}_2]^2 + \frac{1}{2} M'_2 a^2 \dot{\psi}_m^2 \quad (117)$$

5. Кинетическая энергия пропеллера.

Обозначая через

$I_1$  — массовый момент инерции пропеллера относительно оси  $O''O''$ ,

$M_1$  — массу пропеллера и

$\psi_1$  — обобщенную координату пропеллера,

получим для кинетической энергии пропеллера следующее выражение:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} M_1 a^2 \dot{\psi}_m^2 \quad (120)$$

6. Кинетическая энергия картера мотора и всех жестко связанных с ним масс.

Обозначая через  $I'_m$  — массовый момент инерции картера мотора и всех жестко связанных с ним масс, относительно оси  $OO$ , получим для кинетической энергии этих масс следующее выражение:

$$T_m = \frac{1}{2} I'_m \dot{\psi}_m^2 \quad (121)$$

Суммарная кинетическая энергия всей исследуемой системы будет равна

$$T = T_n + T_3 + T'_2 + T'_2 + T_1 + T_m \quad (122')$$

Подставляя в это равенство найденные выше выражения для  $T_n$ ,  $T_3$ ,  $T'_2$ ,  $T'_2$ ,  $T_1$  и  $T_m$  [см. равенства (112), (114), (115), (117), (120) и (121)], получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}_3^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\psi}_2^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} I'_m \dot{\psi}_m^2 - \\ &\quad - I_n \dot{\psi}_3 \dot{\psi}_m + \frac{1}{2} k(1 - k) I'_2 \dot{\psi}_2 \dot{\psi}_m, \end{aligned} \quad (122)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} I_3 &= I'_3 + I_n, \\ I_2 &= I'_2 + k^2 I'_2, \\ I_m &= I'_m + (M'_3 + M'_2) b^2 + M'_2 a^2 + \\ &\quad + M_1 a^2 + I_n + I_p + (1 - k)^2 I'_2. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Потенциальная энергия системы (фиг. 137) будет равна

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} c_m \dot{\psi}_m^2 + \frac{1}{2} c_2 (\psi_2 - \psi_3)^2 + \frac{1}{2} c_1 (\psi_1 - \psi_{22})^2 = \\ &= \frac{1}{2} c_m \dot{\psi}_m^2 + \frac{1}{2} c_2 (\psi_2 - \psi_3)^2 + \frac{1}{2} c_1 [\psi_1 - k\psi_2 - (1 - k)\psi_m]^2. \end{aligned} \quad (124)$$

Согласно равенству (122), имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_3} &= I_3 \dot{\psi}_3 - I_n \dot{\psi}_m, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} &= I_2 \dot{\psi}_2 + \frac{1}{2} k(1 - k) I'_2 \dot{\psi}_m, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} &= I_1 \dot{\psi}_1, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_m} &= I_m \dot{\psi}_m - I_n \dot{\psi}_3 + \frac{1}{2} k(1 - k) I'_2 \dot{\psi}_2, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

и



Согласно равенству (124) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} &= c_2(\varphi_3 - \varphi_2), \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} &= c_2(\varphi_2 - \varphi_3) - kc_1[\varphi_1 - k\varphi_2 - (1-k)\varphi_m], \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} &= c_1[\varphi_1 - k\varphi_2 - (1-k)\varphi_m] \\ \text{и} \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_m} &= c_m\varphi_m - (1-k)c_1[\varphi_1 - k\varphi_2 - (1-k)\varphi_m]. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Подставляя найденные выражения (125) и (126) в дифференциальные уравнения движения Лагранжа (3), получим следующую систему дифференциальных уравнений, определяющую движение исследуемой крутильной системы, совершающей свободные крутильные колебания:

$$\left. \begin{aligned} I_3 \ddot{\varphi}_3 - I_n \ddot{\varphi}_m + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}k(1-k)I_2'' \ddot{\varphi}_m + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) - \\ - kc_1[\varphi_1 - k\varphi_2 - (1-k)\varphi_m] &= 0, \\ I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1[\varphi_1 - k\varphi_2 - (1-k)\varphi_m] &= 0 \\ \text{и} \\ I_m \ddot{\varphi}_m - I_n \ddot{\varphi}_3 + \frac{1}{2}k(1-k)I_2'' \ddot{\varphi}_2 + c_m\varphi_m - \\ - (1-k)c_1[\varphi_1 - k\varphi_2 - (1-k)\varphi_m] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Решения этой системы дифференциальных уравнений, определяющие главные виды свободных крутильных колебаний, будут

$$\left. \begin{aligned} \varphi_3 &= \Phi_3 \sin(\Theta_c t), \\ \varphi_2 &= \Phi_2 \sin(\Theta_c t), \\ \varphi_1 &= \Phi_1 \sin(\Theta_c t), \\ \varphi_m &= \Phi_m \sin(\Theta_c t). \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Подставляя эти выражения для  $\varphi_3$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_m$  в систему уравнений (127), получим

$$\left. \begin{aligned} (c_2 - I_3 \Theta_c^2) \Phi_3 - c_2 \Phi_2 + I_n \Theta_c^2 \Phi_m &= 0, \\ -c_2 \Phi_3 + (c_2 + k^2 c_1 - I_2 \Theta_c^2) \Phi_2 - kc_1 \Phi_1 + \\ + [k(1-k)c_1 - \frac{1}{2}k(1-k)I_2'' \Theta_c^2] \Phi_m &= 0, \\ -kc_1 \Phi_2 + (c_1 - I_1 \Theta_c^2) \Phi_1 - (1-k)c_1 \Phi_m &= 0 \\ \text{и} \\ I_n \Theta_c^2 \Phi_3 + [k(1-k)c_1 - \frac{1}{2}k(1-k)I_2'' \Theta_c^2] \Phi_2 - \\ - (1-k)c_1 \Phi_1 + [c_m + (1-k)^2 c_1 - I_m \Theta_c^2] \Phi_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Приравнявая, как обычно, определитель этой системы уравнений нулю, найдем уравнение частоты, из которого определится для  $\Theta_c$  три значения, соответствующие трем возможным главным видам свободных крутильных

колебаний исследуемой системы. Таким образом наличие упругой подвески мотора не только изменяет величину частот свободных крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора, соответствующих жесткой подвеске мотора, но и создает добавочный возможный главный вид колебания с соответствующей частотой. В рассматриваемом случае звездообразного мотора моменты инерции шестерен редуктора  $I_2'$  и  $I_2''$  обычно малы по сравнению с моментами инерции  $I_1$ ,  $I_3$  и  $I_m$ ; поэтому они мало сказываются на величине  $\Theta_c$ , и ими можно пренебречь. Полагая

$$I_2 = I_2' = I_2'' = 0,$$

получим вместо системы уравнений (129) следующую

$$\left. \begin{aligned} (c_2 - I_3 \Theta_c^2) \Phi_3 - c_2 \Phi_2 + I_n \Theta_c^2 \Phi_m &= 0, \\ -c_2 \Phi_3 + (c_2 + k^2 c_1) \Phi_2 - kc_1 \Phi_1 + k(1-k)c_1 \Phi_m &= 0, \\ -kc_1 \Phi_2 + (c_1 - I_1 \Theta_c^2) \Phi_1 - (1-k)c_1 \Phi_m &= 0 \\ \text{и} \\ I_n \Theta_c^2 \Phi_3 + k(1-k)c_1 \Phi_2 - (1-k)c_1 \Phi_1 + \\ + [c_m + (1-k)^2 c_1 - I_m \Theta_c^2] \Phi_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (129')$$

Найдем уравнение частоты, соответствующее этой системе уравнений. Для этого предварительно преобразуем эту систему в более простую. Из второго уравнения системы имеем

$$\Phi_2 = \frac{c_2}{c_2 + k^2 c_1} \Phi_3 + \frac{kc_1}{c_2 + k^2 c_1} \Phi_1 - \frac{k(1-k)c_1}{c_2 + k^2 c_1} \Phi_m.$$

Отсюда

$$c_2(\Phi_3 - \Phi_2) = \frac{k^2 c_1 c_2}{c_2 + k^2 c_1} \Phi_3 - \frac{kc_1 c_2}{c_2 + k^2 c_1} \Phi_1 + \frac{k(1-k)c_1 c_2}{c_2 + k^2 c_1} \Phi_m.$$

Обозначая

$$\frac{1}{c_2} + \frac{1}{k^2 c_1} = \frac{1}{c}, \quad (130)$$

причем  $c$ , очевидно, представляет жесткость приведенного вала, соединяющего 3-ю и приведенную 1-ю массы системы, будем иметь

$$c_2(\Phi_3 - \Phi_2) = c \Phi_3 - \frac{1}{k} c \Phi_1 + \frac{1-k}{k} c \Phi_m. \quad (131)$$

Принимая во внимание это равенство, из того же второго уравнения системы (129') получим

$$\begin{aligned} c_1[\Phi_1 - k\Phi_2 - (1-k)\Phi_m] &= -\frac{1}{k} c_2(\Phi_3 - \Phi_2) = \\ &= -\frac{1}{k} c \Phi_3 + \frac{1}{k^2} c \Phi_1 - \frac{1-k}{k^2} c \Phi_m. \end{aligned} \quad (132)$$

Соотношения (131) и (132) позволяют привести систему уравнений (129') к следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} (c - I_3 \Theta_c^2) \Phi_3 - \frac{1}{k} c \Phi_1 + \left( I_n \Theta_c^2 + \frac{1-k}{k} c \right) \Phi_m &= 0, \\ -\frac{1}{k} c \Phi_3 + \left( \frac{1}{k^2} c - I_1 \Theta_c^2 \right) \Phi_1 - \frac{1-k}{k^2} c \Phi_m &= 0 \\ \text{и} \\ \left( I_n \Theta_c^2 + \frac{1-k}{k} c \right) \Phi_3 - \frac{1-k}{k^2} c \Phi_1 + \left[ c_m + \frac{(1-k)^2}{k^2} c - I_m \Theta_c^2 \right] \Phi_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (133')$$

Умножая второе уравнение этой системы на  $k$  и складывая его с первым уравнением системы, затем умножая его на  $(1-k)$  и складывая с третьим



уравнением системы и, наконец: умножая его на  $\frac{k^2}{c}$ , получим окончательно следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_3 \Phi_3 + k I_1 \Phi_1 - I_n \Phi_m &= 0, \\ I_n \Theta_c^2 \Phi_3 - (1-k) I_1 \Theta_c^2 \Phi_1 + (c_m - I_m \Theta_c^2) \Phi_m &= 0 \\ k \Phi_3 - \left(1 - \frac{k^2}{c} I_1 \Theta_c^2\right) \Phi_1 + (1-k) \Phi_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Искомое уравнение частоты будет

$$D = \begin{vmatrix} I_3 & k I_1 & -I_n \\ I_n \Theta_c^2 & -(1-k) I_1 \Theta_c^2 & (c_m - I_m \Theta_c^2) \\ k & -\left(1 - \frac{k^2}{c} I_1 \Theta_c^2\right) & (1-k) \end{vmatrix} = 0. \quad (134)$$

Развертывая определитель, получим

$$\begin{aligned} D = I_3 &\left[ -(1-k)^2 I_1 \Theta_c^2 + \left(1 - \frac{k^2}{c} I_1 \Theta_c^2\right) (c_m - I_m \Theta_c^2) \right] - \\ &- k I_1 [(1-k) I_n \Theta_c^2 - k (c_m - I_m \Theta_c^2)] - \\ &- I_n \left[ -\left(1 - \frac{k^2}{c} I_1 \Theta_c^2\right) I_n \Theta_c^2 + k (1-k) I_1 \Theta_c^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{k^2}{c} I_1 (I_3 I_m - I_n^2) \Theta_c^4 + \left\{ -\left[ (1-k)^2 + k^2 \frac{c_m}{c} \right] I_3 I_1 - 2k(1-k) I_1 I_n - \right. \\ \left. - I_3 I_m - k^2 I_1 I_m + I_n^2 \right\} \Theta_c^2 + c_m (I_3 + k^2 I_1) = 0. \quad (135)$$

Деля обе части этого уравнения на коэффициент при  $\Theta_c^4$  и обозначая через

$$A = \frac{-\left[ (1-k)^2 + k^2 \frac{c_m}{c} \right] I_3 I_1 - 2k(1-k) I_1 I_n - I_3 I_m - k^2 I_1 I_m + I_n^2}{\frac{k^2}{c} I_1 (I_3 I_m - I_n^2)} \quad (136)$$

и

$$B = \frac{c_m (I_3 + k^2 I_1)}{\frac{k^2}{c} I_1 (I_3 I_m - I_n^2)},$$

получим уравнение частоты в виде

$$\Theta_c^4 + A \Theta_c^2 + B = 0. \quad (137)$$

Из этого уравнения для  $\Theta_c$  получатся два значения —  $\Theta_c^{(1)}$  и  $\Theta_c^{(2)}$ , как и следовало ожидать, имея в виду условие

$$I_2 = I_2' = I_2'' = 0.$$

Заметим, что согласно известному положению теории квадратных уравнений имеет место соотношение

$$[\Theta_c^{(1)} \Theta_c^{(2)}]^2 = B. \quad (138)$$

Так как величина  $I_n^2$  равна примерно 1/4% величины  $(I_3 I_m)$ , то в выражении (136) для  $B$  величиной  $I_n^2$  можно пренебречь и принять, что  $B$  равно

$$B = \frac{c_m (I_3 + k^2 I_1)}{\frac{k^2}{c} I_1 I_3 I_m} = \frac{c_m}{I_m} \frac{1}{I_3} + \frac{1}{\frac{k^2}{c} I_1}. \quad (139)$$

Не трудно видеть, что

$$\frac{c_m}{I_m} = \Theta_{cm}^2 \quad (140)$$

и

$$\frac{1}{I_3} + \frac{1}{\frac{k^2}{c} I_1} = \Theta_{cv}^2, \quad (141)$$

причем  $\Theta_{cm}$  является частотой крутильных колебаний суммарной моторной массы  $I_m$  (123), а  $\Theta_{cv}$  — частотой крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора при определении ее без учета упругости подвески мотора. Поэтому на основании равенств (139), (140) и (141) имеем

$$B = \Theta_{cm}^2 \Theta_{cv}^2. \quad (142)$$

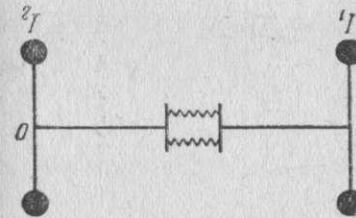
Соотношения (138) и (142) приводят к очень интересной зависимости между частотами главных видов свободных крутильных колебаний рассматриваемой системы, а именно

$$\Theta_c^{(1)} \Theta_c^{(2)} = \Theta_{cm} \Theta_{cv}. \quad (143)$$

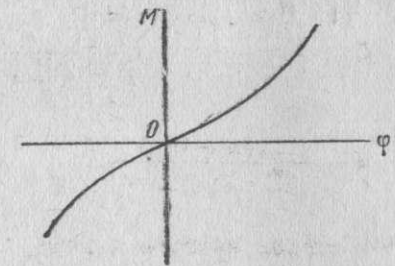
Полученное уравнение частоты (137) справедливо и для случая планетарного редуктора, надо только во всех соотношениях переменить знак у передаточного числа  $k$  редуктора на обратный.

## § 5. Определение свободных крутильных колебаний системы из двух масс, соединенных переменной крутильной жесткостью

Мы рассмотрим здесь только так называемые псевдогармонические колебания, т. е. такие колебания, когда жесткость системы зависит от перемещений. Типичными примерами таких крутильных систем являются системы, состоящие из масс, соединенных упругими муфтами, упругость которых создается либо наличием в их конструкции резины, либо наличием пружин с предварительным сжатием.



Фиг. 139. Крутильная система из двух масс, соединенных переменной жесткостью.



Фиг. 140. Характеристика крутильной жесткости системы, представленной на фиг. 139.

Положим, что у нас имеется (фиг. 139) крутильная система, состоящая из двух масс, соединенных жесткостью, величина которой зависит от величины относительного угла сдвига этих масс  $\varphi$ . Крутильная жесткость системы обычно задается так называемой „характеристикой крутильной жесткости системы“, представляющей (фиг. 140) зависимость между скручивающим систему моментом  $M$  и величиной соответствующего этому моменту угла закрутки  $\varphi$  системы

$$M = f(\varphi). \quad (144)$$

При наличии зависимости (144) жесткость системы  $c$ , соответствующая данному углу закрутки  $\varphi_1$ , определяется как первая производная от  $M$  по  $\varphi$  при  $\varphi = \varphi_1$

$$c = c(\varphi_1) = \left( \frac{dM}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_1}. \quad (145)$$



Исследуем свободные крутильные колебания системы, представленной на фиг. 139. Обозначим через

$I_1$  и  $I_2$  — массовые моменты инерции 1-й и 2-й масс системы относительно оси  $OO$  вращения системы;

$\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — текущие углы отклонения 1-й и 2-й масс системы от координатной плоскости, проходящей через ось  $OO$ ; положение этой плоскости в пространстве выбираем так, чтобы с ней совпадали массы системы в тот момент, когда закрутка системы равна 0.

Очевидно, что в каждый данный момент угол закрутки системы будет равен

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (146)$$

Дифференциальные уравнения движения системы, совершающей свободные крутильные колебания, получим непосредственно, применяя принцип д'Аламбера. Принимая во внимание равенства (144) и (146), будем иметь

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 - f(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + f(\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \end{cases} \quad (147)$$

Деля первое уравнение на  $I_1$ , а второе на  $I_2$  и вычитая из второго уравнения первое, получим

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 = -\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) f(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (148')$$

или

$$\ddot{\varphi} = -\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) f(\varphi) = -\mathfrak{M}(\varphi). \quad (148)$$

Это дифференциальное уравнение решается известным способом. Так как

$$2\dot{\varphi} dt = 2d\varphi,$$

то, умножая левую и правую части уравнения (148) соответственно на  $2\dot{\varphi} dt$  и  $2d\varphi$  и интегрируя, получим

$$\dot{\varphi}^2 = 2 \int_{\varphi}^{\Phi} \mathfrak{M}(\varphi) d\varphi + C_1 = \mathfrak{N}(\varphi) \quad (149')$$

или

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\mathfrak{N}(\varphi)}. \quad (149)$$

Отсюда

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{N}(\varphi)}}$$

и

$$t = \int_{\varphi}^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{N}(\varphi)}} + C_2 = \eta(\varphi). \quad (150')$$

Из последнего уравнения определяем  $\varphi$  как функцию  $t$ :

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \phi(t). \quad (150)$$

Уравнения (150) и (147) позволяют определить законы изменения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  по времени и таким образом решить задачу.

Произвольные постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий движения системы. Положим, что для начального момента движения системы имеют место равенства

$$\varphi_{10} = -\Phi_1, \quad \varphi_{20} = \Phi_2, \quad \Phi_2 + \Phi_1 = \Phi, \quad \dot{\varphi}_{10} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}_{20} = 0. \quad (151)$$

Тогда согласно уравнению (149') имеем

$$\dot{\varphi}_0^2 = (\dot{\varphi}_{20} - \dot{\varphi}_{10})^2 = 0 = 2 \int_{\varphi}^{\Phi} \mathfrak{M}(\varphi) d\varphi + C_1.$$

Откуда

$$C_1 = 0.$$

Аналогично из уравнения (150') получаем

$$C_2 = 0.$$

При решении задачи затруднения могут иметь место только при интегрировании. Если интегрирование не может быть произведено аналитически, то оно всегда может быть выполнено графически, и практически задача всегда разрешима.

Рассмотрим некоторые свойства исследуемой системы. Из системы уравнений (147) имеем

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = -I_2 \ddot{\varphi}_2. \quad (152)$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия (151), получим

$$I_1 \dot{\varphi}_1 = -I_2 \dot{\varphi}_2 \quad (153')$$

или

$$\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2} = -\frac{I_2}{I_1}, \quad (153)$$

т. е. угловые скорости колеблющихся масс системы обратно пропорциональны моментам инерции этих масс и противоположны по знаку. Таким образом массы системы движутся всегда противоположно друг к другу и одновременно достигают своих крайних положений, когда их скорости равны нулю. Эти массы достигают одновременно и тех своих положений, когда их скорости максимальны; очевидно, что это будет иметь место в тот момент, когда они проходят через координатную плоскость, так как в этот момент закрутка системы и, следовательно, потенциальная энергия системы равны нулю, а кинетическая энергия системы максимальна.

Из уравнения (153') находим дальше, что

$$I_1 \varphi_1 = -I_2 \varphi_2 + b.$$

Так как согласно сказанному массы одновременно проходят через координатную плоскость, т. е. отклонения масс  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  одновременно становятся равными нулю, то

$$b = 0$$

и

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{I_2}{I_1}. \quad (154)$$

Это соотношение позволяет по найденной выше зависимости (150):

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \phi(t),$$

определить  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Решая совместно уравнения (150) и (154), получим

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\frac{I_2}{I_1 + I_2} \phi(t) \\ \varphi_2 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \phi(t). \end{cases} \quad (155)$$

При наличии начальных условий движения системы (151) имеем

$$\phi(0) = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \Phi.$$



Поэтому на основании равенств (155) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= -\varphi_{10} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \Phi \\ \Phi_2 &= \varphi_{20} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \Phi \end{aligned} \right\} \quad (155')$$

Соотношение (153) позволяет получить зависимость между кинетическими энергиями масс системы. Кинетическая энергия  $T_1$  массы  $I_1$  системы равна

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, \quad (156)$$

а кинетическая энергия  $T_2$  массы  $I_2$  системы равна

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2. \quad (157)$$

Отсюда на основании равенства (153) находим

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{I_1}{I_2} \frac{\dot{\varphi}_1^2}{\dot{\varphi}_2^2} = \frac{I_2}{I_1}, \quad (158)$$

т. е. кинетические энергии масс системы обратно пропорциональны моментам инерции этих масс.

Наконец, уравнение (150') показывает, что период  $T$  колебания системы, а следовательно, и число  $n_c$  свободных колебаний системы в минуту зависит от величины угла начальной закрутки  $\Phi$  системы. Напомним, что в рассмотренных нами раньше крутильных системах с постоянной крутильной жесткостью эти величины не зависели от начальной закрутки системы. Если кривая, выражающая зависимость (144) скручивающего систему момента  $M$  от угла закрутки  $\varphi$  системы

$$M = f(\varphi)$$

симметрична относительно начала координат, то при свободных колебаниях системы углы закрутки системы в ту и другую стороны будут по величине одинаковы и равны  $\Phi$ . Период колебания системы в этом случае будет равен [см. уравнение (150')]

$$T = 4\tau_1 = 4 \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{M}(\varphi)}}. \quad (159)$$

Если кривая  $M = f(\varphi)$  не симметрична относительно начала координат, то углы закрутки  $\Phi$  и  $\Phi'$  системы в ту и другую стороны будут не одинаковы. При заданном угле закрутки  $\Phi$  угол закрутки  $\Phi'$  найдется из того условия, что потенциальная энергия системы, соответствующая углу закрутки  $\Phi'$ , равна потенциальной энергии, соответствующей углу закрутки  $\Phi$  системы, т. е.

$$V_{\max} = \int_0^{\Phi} M d\varphi = \int_0^{\Phi'} M d\varphi. \quad (160)$$

Период колебания системы в этом случае будет равен

$$T = 2(\tau_1 + \tau_2), \quad (161)$$

где  $\tau_1$  — время закрутки системы от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \Phi$ , определяемое согласно равенству (150')

$$\tau_1 = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{M}(\varphi)}}, \quad (162)$$

а  $\tau_2$  — определяемое аналогичным путем время закрутки системы в другую сторону от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = -\Phi'$ .

Число свободных колебаний системы в минуту будет равно

$$n_c = \frac{60}{T}. \quad (163)$$

Зависимость (158) позволяет решить задачу о свободных колебаниях исследуемой системы несколько иным путем. Если обозначить через

$V$  — потенциальную энергию системы, соответствующую углу закрутки системы  $\varphi$ ,

$V_{\max}$  — потенциальную энергию системы, соответствующую максимальному углу закрутки системы [см. равенство (160)],

$T_1$  и  $T_2$  — кинетические энергии 1-й и 2-й масс системы [см. равенства (156) и (157)],

то на основании закона сохранения энергии будем иметь

$$T_1 + T_2 = V_{\max} - V = V(\varphi). \quad (164)$$

Принимая во внимание зависимость (158)

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{I_2}{I_1},$$

получим на основании уравнений (164) и (158)

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} V(\varphi) \\ T_2 &= \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} V(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (165')$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} |\dot{\varphi}_1| &= \sqrt{\frac{2I_2}{I_1(I_1 + I_2)}} \sqrt{V(\varphi)} \\ |\dot{\varphi}_2| &= \sqrt{\frac{2I_1}{I_2(I_1 + I_2)}} \sqrt{V(\varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Так как согласно сказанному раньше, скорости  $\dot{\varphi}_2$  и  $\dot{\varphi}_1$  противоположны по знаку, то

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 = |\dot{\varphi}_2| + |\dot{\varphi}_1| = \\ &= \sqrt{\frac{2}{I_1 I_2 (I_1 + I_2)}} (I_1 + I_2) \sqrt{V(\varphi)} = \\ &= \sqrt{2 \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right)} \sqrt{V(\varphi)}. \end{aligned} \quad (166)$$

Нетрудно видеть, что это выражение для  $\dot{\varphi}$  в точности совпадает с выражением (149)

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\mathfrak{M}(\varphi)}.$$

В самом деле на основании равенств (149), (149') и (148) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \sqrt{\mathfrak{M}(\varphi)} = \sqrt{2 \int_0^{\Phi} \mathfrak{M}(\varphi) d\varphi} = \\ &= \sqrt{2 \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \int_0^{\Phi} f(\varphi) d\varphi} = \\ &= \sqrt{2 \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) (V_{\max} - V)} = \sqrt{2 \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right)} \sqrt{V(\varphi)}. \end{aligned} \quad (167)$$

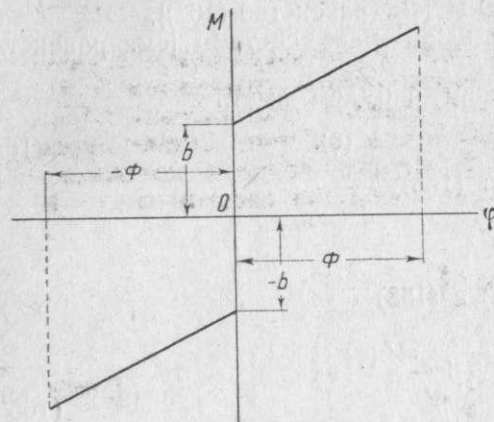


Дальнейший ход решения задачи остается прежним.

Рассмотрим два примера.

Положим, что характеристика крутильной жесткости системы имеет вид, представленный на фиг. 141. Эта характеристика соответствует характеристике пружинной муфты, у которой пружины имеют предварительную затяжку. Уравнение характеристики в этом случае будет

$$\text{и } \left. \begin{aligned} M = f(\varphi) &= b + c\varphi && \text{при } \Phi \geq \varphi \geq 0 \\ M = f(\varphi) &= -b + c\varphi && \text{при } 0 \geq \varphi \geq -\Phi. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$



Фиг. 141. Характеристика крутильной жесткости упругой пружинной муфты с предварительным сжатием пружин.

Обозначая

$$\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} = \frac{1}{I}, \quad (169)$$

имеем согласно общей теории [см. уравнение (167)]

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{I} 2 \int_{\varphi}^{\Phi} f(\varphi) d\varphi},$$

но так как

$$2 \int_{\varphi}^{\Phi} f(\varphi) d\varphi = 2 \int_{\varphi}^{\Phi} (b + c\varphi) d\varphi =$$

$$= 2 \left[ b\varphi + \frac{1}{2} c\varphi^2 \right]_{\varphi}^{\Phi} =$$

$$= (2b\Phi + c\Phi^2) - 2b\varphi - c\varphi^2 = a - 2b\varphi - c\varphi^2, \quad (170)$$

где

$$a = 2b\Phi + c\Phi^2, \quad (171)$$

то

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{I} (a - 2b\varphi - c\varphi^2)}. \quad (172)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{I} \int_{\Phi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a - 2b\varphi - c\varphi^2}} = \\ &= \sqrt{I} \frac{-1}{\sqrt{c}} \left[ \arcsin \frac{-b - c\varphi}{\sqrt{b^2 + ac}} \right]_{\Phi}^{\varphi} = \\ &= -\sqrt{\frac{I}{c}} \left( \arcsin \frac{-b - c\varphi}{\sqrt{b^2 + ac}} - \arcsin \frac{-b - c\Phi}{\sqrt{b^2 + ac}} \right). \end{aligned} \quad (173)$$

Принимая во внимание равенство (171), будем иметь

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{-b - c\varphi}{\sqrt{b^2 + ac}} &= \arcsin \frac{-b - c\varphi}{\sqrt{b^2 + (2b\Phi + c\Phi^2)c}} = \\ &= \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$t = \sqrt{\frac{I}{c}} \left( \arcsin \frac{-b - c\varphi}{b + c\Phi} + \frac{\pi}{2} \right). \quad (174)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{b + c\varphi}{b + c\Phi} &= \sqrt{\frac{c}{I}} t + \frac{\pi}{2}, \\ \frac{b + c\varphi}{b + c\Phi} &= \sin \left( \sqrt{\frac{c}{I}} t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \cos \left( \sqrt{\frac{c}{I}} t \right) \end{aligned}$$

и

$$\varphi = -\frac{b}{c} + \left( \frac{b}{c} + \Phi \right) \cos \left( \sqrt{\frac{c}{I}} t \right) = \psi(t). \quad (175)$$

Таким образом закрутка системы происходит в рассматриваемом случае за каждую половину периода по закону, выражаемому уравнением (175). Движение масс системы определяется на основании соотношений (155).

Так как характеристика крутильной жесткости системы симметрична относительно начала координат, то время  $T$  одного полного колебания системы определится как учетверенное время раскрутки системы от  $\varphi = \Phi$  до  $\varphi = 0$ . Согласно уравнению (175) имеем

$$0 = -\frac{b}{c} + \left( \frac{b}{c} + \Phi \right) \cos \left( \sqrt{\frac{c}{I}} \frac{T}{4} \right)$$

или

$$\cos \left( \sqrt{\frac{c}{I}} \frac{T}{4} \right) = \frac{1}{1 + \frac{c}{b} \Phi}, \quad (176')$$

откуда

$$T = 4 \sqrt{\frac{I}{c}} \arccos \frac{1}{1 + \frac{c}{b} \Phi}. \quad (176)$$

Для частного случая, когда

$$I_1 = 50 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2,$$

$$I_2 = 2,02 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2,$$

$$b = 6720 \text{ кг} \cdot \text{см},$$

$$c = 140000 \text{ кг} \cdot \text{см}$$

и

$$\Phi = 0,048 \text{ радиан},$$

находим

$$T = 0,01559 \text{ сек.}$$

Этому периоду свободных колебаний системы соответствует

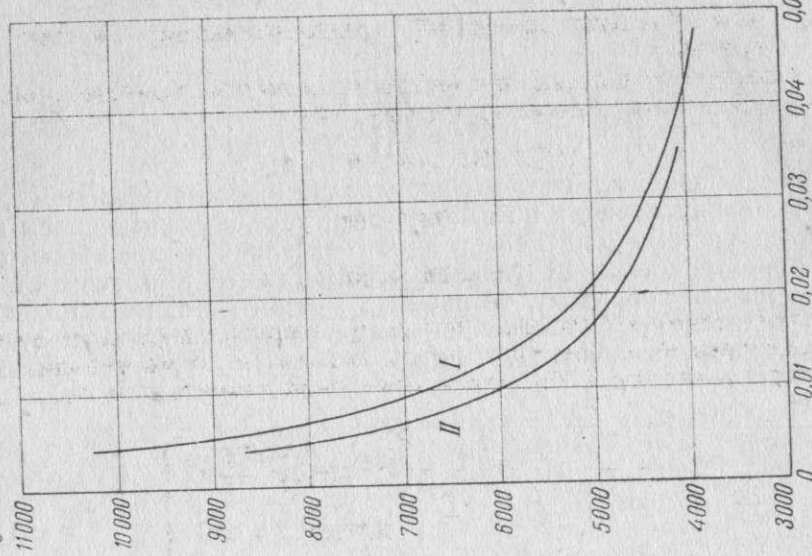
$$n_c = \frac{60}{T} = 3860 \text{ кол/мин.}$$

На фиг. 142 дан для этого случая закон протекания по времени закрутки системы [см. уравнение (175)]. Уравнение (176) подтверждает вывод общей теории относительно зависимости периода колебания  $T$  системы, и следовательно, и числа  $n_c$  свободных колебаний системы в минуту от начальной закрутки системы  $\Phi$ . На фиг. 143 кривая  $I$  представляет закон изменения  $n_c$  в зависимости от средней амплитуды закрутки системы  $\Phi_c = \Phi$ .

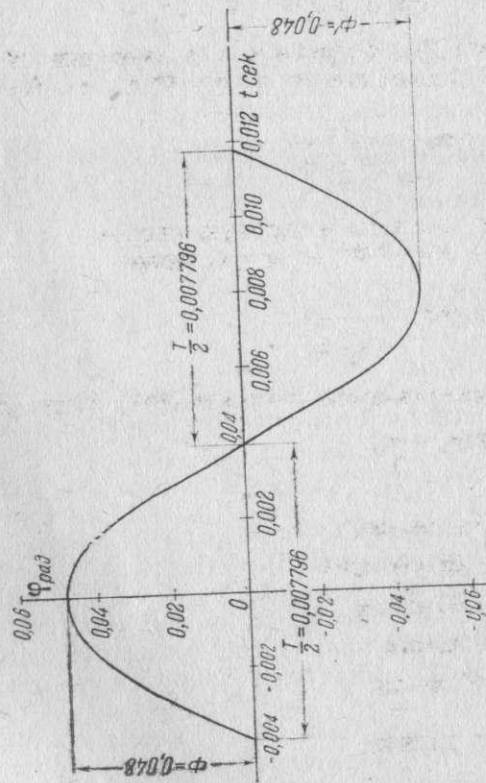
В качестве второго примера рассмотрим случай, когда массы системы соединены упругой пружинной муфтой с предварительным сжатием пружин и когда на массы системы действуют постоянные по величине, но противоположные по направлению скручивающие муфту моменты  $M_c$ . Характеристика крутильной жесткости системы в этом случае представлена на



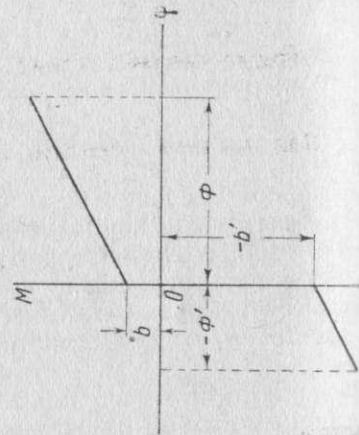
$\eta_c$  кол/мин



Фиг. 143. Законы изменения  $\eta_c$  в зависимости от средней амплитуды закрутки системы  $\Phi_c$  при характеристиках крутильной жесткости системы, данных на фиг. 141 и 144.



Фиг. 142. Закон протекания по времени закрутки системы, представленной на фиг. 139 и совершающей свободные крутильные колебания при наличии характеристики крутильной жесткости системы, данной на фиг. 141.



Фиг. 144. Характеристика крутильной жесткости упругой пружинной муфты с предварительным сжатием пружин и при наличии постоянного среднего скручивающего момента.

фиг. 144. Уравнение характеристики будет

$$\left. \begin{aligned} M &= f(\varphi) = b + c\varphi \\ M &= f(\varphi) = -b' + c\varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } \Phi \geq \varphi \geq 0 \\ &\text{при } 0 \geq \varphi \geq -\Phi' \end{aligned} \quad (177)$$

Если  $M_0$  — момент, соответствующий предварительному сжатию пружин муфты, а

$M_c$  — величина постоянного внешнего момента, приложенного к каждой из масс системы, то (фиг. 144)

$$M_0 = M_c + b = b' - M_c,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} b &= M_0 - M_c \\ b' &= M_0 + M_c \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

Амплитуда закрутки системы  $\Phi$  в одну сторону дается, а амплитуда закрутки системы  $\Phi'$  в другую сторону находится по уравнению (160).

Согласно уравнению (175), закон изменения закрутки системы по времени будет

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\frac{b}{c} + \left(\frac{b}{c} + \Phi\right) \cos\left(\sqrt{\frac{c}{I}} t\right) \\ \varphi &= \frac{b'}{c} - \left(\frac{b'}{c} + \Phi'\right) \cos\left(\sqrt{\frac{c}{I}} t\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } \Phi \geq \varphi \geq 0 \\ &\text{при } 0 \geq \varphi \geq -\Phi' \end{aligned} \quad (179)$$

Согласно уравнению (176), время  $2\tau_1$ , потребное для закрутки системы от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \Phi$  и для обратной раскрутки ее от  $\varphi = \Phi$  до  $\varphi = 0$ , равно

$$2\tau_1 = 2\sqrt{\frac{I}{c}} \arccos \frac{1}{1 + \frac{c}{b}\Phi} \quad (180)$$

Время, потребное для закрутки системы в другую сторону от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = -\Phi'$  и для раскрутки ее от  $\varphi = -\Phi'$  до  $\varphi = 0$ , равно

$$2\tau_2 = 2\sqrt{\frac{I}{c}} \arccos \frac{1}{1 + \frac{c}{b'}\Phi'} \quad (180')$$

Отсюда, период колебания рассматриваемой системы (161) будет равен

$$T = 2(\tau_1 + \tau_2).$$

Для частного случая, когда

$$\begin{aligned} I_1 &= 50 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2, \\ I_2 &= 2,02 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2, \\ c &= 140000 \text{ кг} \cdot \text{см}, \\ b &= 2400 \text{ кг} \cdot \text{см}, \\ b' &= 11040 \text{ кг} \cdot \text{см} \end{aligned}$$

и  
имеем

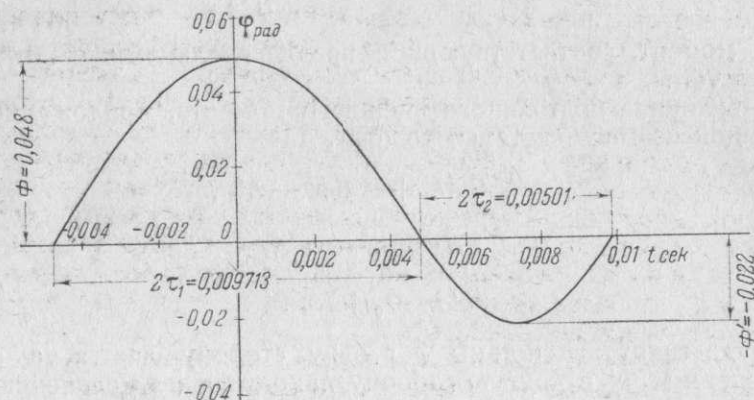
$$\begin{aligned} \Phi &= 0,048 \text{ радиан}, \\ \Phi' &= 0,022 \text{ радиан}, \\ 2\tau_1 &= 0,009713 \text{ сек.}, \end{aligned}$$



$$2\tau_2 = 0,005009 \text{ сек.}$$

$$T = 0,014722 \text{ сек.}$$

$$n_c = 4080 \text{ кол/мин.}$$



Фиг. 145. Закон протекания по времени закрутки системы, представленной на фиг. 139 и совершающей свободные крутильные колебания при наличии характеристики крутильной жесткости системы, данной на фиг. 144.

На фиг. 145 показан для этого случая закон протекания закрутки  $\varphi$  системы по времени; кривая II на фиг. 143 дает зависимость  $n_c$  от средней амплитуды закрутки системы  $\Phi_c$ , равной

$$\Phi_c = \frac{1}{2} (\Phi + \Phi'). \quad (181)$$

На фиг. 146 даны две кривые. Одна из них

$$n_c = \varphi(M_0)$$

представляет зависимость  $n_c$  от величины скручивающего муфты момента  $M_0$ , соответствующего предварительному сжатию ее пружин. Средний, постоянный закручивающий муфты момент принимается в этом случае равным нулю, а числовые значения величин  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $c$  и  $\Phi$  остаются прежними.

Другая кривая

$$n_c = f(M_c)$$

представляет зависимость  $n_c$  от величины среднего, постоянного закручивающего муфты момента  $M_c$ . Момент, соответствующий предварительному сжатию пружин муфты, остается при этом постоянным и равен  $6720 \text{ кг}\cdot\text{см}$ ; числовые значения величин  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $c$  и  $\Phi$  остаются прежними.

Из этих кривых видно, что из двух факторов  $M_c$  и  $M_0$  большее влияние на  $n_c$  оказывает предварительное сжатие пружин. Влияние на  $n_c$  передаваемого муфтой постоянного среднего крутящего момента  $M_c$  незначительно.

## ПРИВЕДЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ КРУТИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ К ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ СХЕМЕ

При исследовании на крутильные колебания действительная крутильная система заменяется динамически эквивалентной ей в отношении крутильных колебаний теоретической схемой. Такая замена дает большие удобства для аналитического исследования явления и заключается в основном в следующем: крутильные жесткости, связывающие между собой отдельные массы системы, рассматриваются как жесткости соответствующих длин цилиндрического вала постоянного сечения; массы системы приводятся к маховым массам соответствующих моментов инерции относительно их осей вращения, расположенным в соответствующих местах крутильной системы.

Ниже мы рассмотрим, как определяются крутильные жесткости разных элементов крутильной системы и как определяются редуцированные моменты инерции ее колеблющихся масс; знание этих величин определяет вышеуказанную теоретическую схему.

При исследовании свободных крутильных колебаний систем, рассмотренных нами в предыдущей главе, мы имели дело именно с теоретическими схемами, к которым приводятся соответствующие действительные крутильные системы.

### § 1. Определение крутильных жесткостей

Крутильной жесткостью какого-либо элемента крутильной системы называют величину тех крутящих моментов, которые, будучи приложены к концам этого элемента и действуя в противоположных направлениях, вызовут его закрутку на один радиан.

Если данный элемент представляет собой брус постоянного по длине сечения, то крутильная жесткость, соответствующая единице его длины, называется единичной крутильной жесткостью.

Величина, обратная крутильной жесткости, называется крутильной податливостью.

Приведенной, эквивалентной или редуцированной длиной рассматриваемого элемента конструкции, подвергаемого скручиванию, называется длина такого прямолинейного, с постоянным по длине поперечным сечением, вала, крутильная жесткость которого равна крутильной жесткости этого элемента.

Положим, что у нас имеется вал постоянного по длине кольцевого сечения, представленный на фиг. 147. Обозначим через

$l$  — длину вала в см;

$d$  — наружный диаметр вала в см;

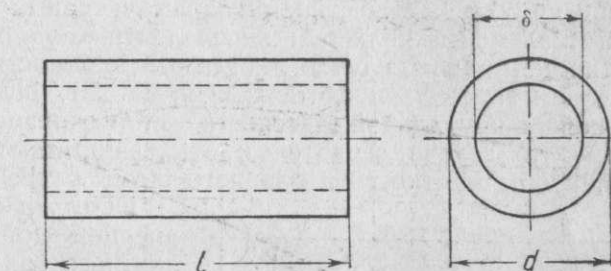
$\delta$  — внутренний диаметр вала в см;

$I_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения вала в см<sup>4</sup>

$$I_p = \frac{\pi}{32} (d^4 - \delta^4); \quad (1)$$

$G$  — модуль упругости материала вала на кручение в кг·см<sup>-2</sup>. Для материала валов авиационных моторов и легких двигателей  $G = 830\,000 \text{ кг}\cdot\text{см}^{-2}$ ;

$c$  — крутильную жесткость данного вала в кг·см.



Фиг. 147. К определению крутильной жесткости цилиндрического вала.



Если мы приложим к каждому из концов этого вала по равному, но противоположно направленному моменту  $M$ , то концевые сечения вала закрутятся друг относительно друга на угол  $\varphi$ , определяемый, как известно, из соотношения

$$\varphi = M \frac{l}{GI_p} \quad (2)$$

Отсюда

$$M = \frac{GI_p}{l} \varphi \quad (3)$$

Согласно определению крутильной жесткости последняя будет равна моменту  $M$ , соответствующему  $\varphi = 1$ . Поэтому

$$c = \frac{GI_p}{l} \quad (4)$$

По данному выше определению единичной крутильной жесткости, последняя будет равна крутильной жесткости вала данного сечения и длиной 1 см. Поэтому

$$c_1 = GI_p \quad (5)$$

Крутильная податливость данного вала, как величина, обратная крутильной жесткости, будет равна

$$e = \frac{1}{c} = \frac{l}{GI_p} \quad (6)$$

Введем еще одно понятие, именно понятие об эквивалентных в отношении крутильных жесткостей конструктивных элементах. Два конструктивных элемента являются эквивалентными в отношении их крутильных жесткостей в том случае, когда эти жесткости равны. Поэтому если мы пожелаем заменить представленный на фиг. 147 вал эквивалентным ему в отношении крутильной жесткости валом с размерами поперечного сечения  $d_0$  и  $\delta_0$ , то задача сведется к отысканию такой длины  $l_0$  эквивалентного вала, чтобы жесткость последнего была равна жесткости данного вала.

Обозначая через  $I_{p0}$  полярный момент инерции поперечного сечения эквивалентного вала, причем

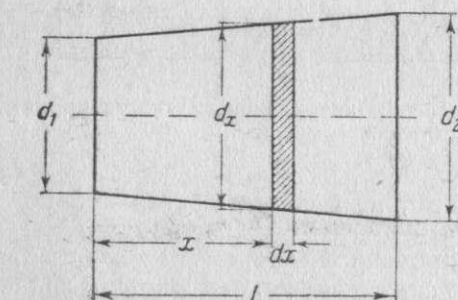
$$I_{p0} = \frac{\pi}{32} (d_0^4 - \delta_0^4) \quad (7)$$

будем согласно равенству (4) иметь

$$c = G \frac{I_p}{l} = G \frac{I_{p0}}{l_0} \quad (8)$$

Отсюда

$$\frac{l}{I_p} = \frac{l_0}{I_{p0}} \quad (9)$$



Фиг. 148. К определению крутильной жесткости конического вала.

или

$$l_0 = \frac{I_{p0}}{I_p} l = \frac{d_0^4 - \delta_0^4}{d^4 - \delta^4} l \quad (10)$$

Определим теперь приведенную длину конического вала, отнесенную к полярному моменту инерции  $I_{p0}$ . Положим, что у нас имеется вал, представленный на фиг. 148. Согласно чертежу имеем

$$d_x = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} x.$$

Отсюда

$$dx = \frac{l}{d_2 - d_1} d(d_x).$$

Рассматривая элементарный участок конического вала длиной  $dx$ , как цилиндрический вал с диаметром сечения  $d_x$ , мы на основании предыдущих выводов найдем, что эквивалентная длина  $d(l_0)$  этого участка, отнесенная к полярному моменту инерции сечения  $I_{p0}$ , будет равна

$$d(l_0) = \frac{32}{\pi} \frac{I_{p0}}{d_x^4} dx = \frac{32}{\pi} \frac{l}{d_2 - d_1} I_{p0} \frac{d(d_x)}{d_x^4}.$$

Искомая приведенная длина  $l_0$  всего конического вала будет

$$\begin{aligned} l_0 &= \int_{d_1}^{d_2} d(l_0) = \frac{32}{\pi} \frac{l}{d_2 - d_1} I_{p0} \int_{d_1}^{d_2} \frac{d(d_x)}{d_x^4} = \frac{32}{3\pi} \frac{I_{p0}}{d_2 - d_1} \left( \frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3} \right) l = \\ &= \frac{32}{3\pi} \frac{I_{p0}}{d_1 d_2^3} \left[ \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 + \left( \frac{d_2}{d_1} \right) + 1 \right] l = \frac{I_{p0} l}{\frac{3\pi}{32} d_2^4} = \frac{I_{p0} l}{I_p'} \end{aligned}$$

или

$$l_0 = \frac{I_{p0}}{I_p'} l, \quad (11)$$

где

$$I_p' = \frac{\frac{3\pi}{32} d_2^4}{\frac{d_2}{d_1} \left[ \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 + \left( \frac{d_2}{d_1} \right) + 1 \right]} = \frac{3 I_{p2}}{\frac{d_2}{d_1} \left[ \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 + \left( \frac{d_2}{d_1} \right) + 1 \right]} = \frac{\pi}{32} (d')^4, \quad (12)$$

причем

$$I_{p2} = \frac{\pi}{32} d_2^4. \quad (13)$$

Из равенства (12) вытекает, что

$$\frac{I_p'}{I_{p2}} = \frac{3}{\frac{d_2}{d_1} \left[ \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 + \left( \frac{d_2}{d_1} \right) + 1 \right]} \quad (14)$$

$$\frac{d'}{d_2} = \sqrt[4]{\frac{3}{\frac{d_2}{d_1} \left[ \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 + \left( \frac{d_2}{d_1} \right) + 1 \right]}} \quad (15)$$

В табл. 24 даны в зависимости от величины отношения  $\frac{d_2}{d_1}$  значения отношений  $\frac{I_p'}{I_{p2}}$  и  $\frac{d'}{d_2}$ .

Таблица 24  
К определению крутильной жесткости конического вала

$d_2 : d_1$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$I_p' : I_{p2}$	1,000	0,824	0,687	0,578	0,491	0,421	0,363	0,316	0,276	0,243	0,214
$d' : d_2$	1,000	0,953	0,911	0,872	0,837	0,806	0,777	0,750	0,725	0,702	0,681

На фиг. 149 эти соотношения представлены графически.

Если бы мы выбрали величину  $I_{p0}$  такой, чтобы эквивалентная длина цилиндрического вала была равна длине  $l$  конического вала, то согласно равенству (11)

$$I_{p0} = I_p'.$$



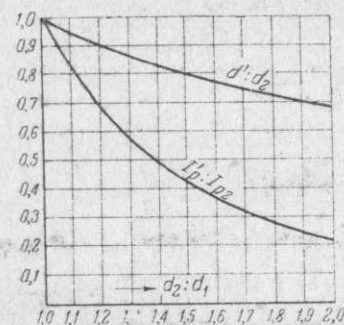
Принимая во внимание это значение, легко найти крутильную жесткость конического вала. Согласно равенству (4), имеем

$$c = \frac{GI_p'}{l}, \quad (16)$$

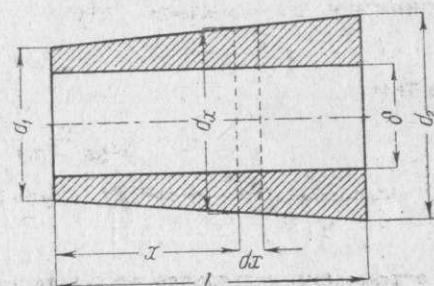
причем  $I_p'$  легко находится по графику (149).

Рассмотрим теперь определение эквивалентной длины конического вала с цилиндрическим сверлением, представленного на фиг. 150. Положим, что требуется найти эквивалентную длину этого вала, соответствующую валу постоянного по длине кольцевого сечения с наружным диаметром  $d_0$  и внутренним  $\delta_0$ . Согласно фиг. 150 имеем

$$d_x = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} x.$$



Фиг. 149. К определению крутильной жесткости конического вала.



Фиг. 150. К определению крутильной жесткости конического вала с цилиндрическим сверлением.

Рассматривая элементарный участок данного вала, соответствующий элементу длины  $dx$ , как цилиндрический вал постоянного по длине кольцевого сечения с наружным диаметром  $d_x$  и с внутренним  $\delta_0$ , мы определим приведенную длину этого элементарного участка из соотношения

$$\begin{aligned} d(l_0) &= \frac{d_0^4 - \delta_0^4}{d_x^4 - \delta_0^4} dx = \frac{d_0^4 - \delta_0^4}{2\delta_0^2} \left( \frac{1}{d_x^2 - \delta_0^2} - \frac{1}{d_x^2 + \delta_0^2} \right) dx = \\ &= \frac{l(d_0^4 - \delta_0^4)}{2\delta_0^2(d_2 - d_1)} \left( \frac{1}{d_x^2 - \delta_0^2} - \frac{1}{d_x^2 + \delta_0^2} \right) d(d_x). \end{aligned}$$

Искомая эквивалентная длина будет равна

$$l_0 = \frac{l(d_0^4 - \delta_0^4)}{2\delta_0^2(d_2 - d_1)} \left[ \int_{d_1}^{d_2} \frac{d(d_x)}{d_x^2 - \delta_0^2} - \int_{d_1}^{d_2} \frac{d(d_x)}{d_x^2 + \delta_0^2} \right]$$

или, так как

$$\begin{aligned} \int_{d_1}^{d_2} \frac{d(d_x)}{d_x^2 - \delta_0^2} &= \frac{1}{\delta_0} \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\left(\frac{d_x}{\delta_0}\right)}{\left(\frac{d_x}{\delta_0}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\delta_0} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dy}{y^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{2\delta_0} \left( \ln \frac{a_2 - 1}{a_2 + 1} - \ln \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{d_1}^{d_2} \frac{d(d_x)}{d_x^2 + \delta_0^2} &= \frac{1}{\delta_0} \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\left(\frac{d_x}{\delta_0}\right)}{\left(\frac{d_x}{\delta_0}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\delta_0} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dy}{1 + y^2} = \\ &= \frac{1}{\delta_0} (\arctg a_2 - \arctg a_1), \end{aligned}$$

причем

$$a_1 = \frac{d_1}{\delta_0}, \quad a_2 = \frac{d_2}{\delta_0}, \quad (17)$$

то

$$l_0 = \frac{l(d_0^4 - \delta_0^4)}{2\delta_0^2(d_2 - d_1)} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{a_2 - 1}{a_2 + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} - \arctg a_2 + \arctg a_1 \right).$$

Обозначая

$$f(x) = \frac{16}{\pi} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + \arctg x \right) \quad (18)$$

и принимая во внимание, что

$$d_0^4 - \delta_0^4 = \frac{32}{\pi} I_{p0}, \quad (19)$$

получим

$$l_0 = \frac{I_{p0}}{\delta_0^4(d_2 - d_1)} [f(a_1) - f(a_2)] l. \quad (20)$$

В табл. 25 даны значения функции  $f(x)$  для значений  $x$  меняющихся от  $x=1,1$  до  $x=5$ .

Таблица 25  
К определению крутильной жесткости конического вала с цилиндрическим сверлением

$x$	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$f(x)$	11,995	10,558	9,455	8,890	8,608	8,436	8,324	8,249	8,195	8,155	8,127
$x$	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	
$f(x)$	8,104	8,087	8,073	8,062	8,053	8,046	8,039	8,034	8,030	8,026	

На фиг. 151 функция  $f(x)$  дана графически.

Пользуясь этим графиком, возможно быстро подсчитать приведенную длину  $l_0$ , определяемую формулой (20). Для этого надо только определить по графику значения  $f(a_1)$  и  $f(a_2)$  функции  $f(x)$ , соответствующие значениям  $x=a_1$  и  $x=a_2$ , и подставить найденные значения в формулу (20).

Если  $I_{p0}$  выбрать таким, чтобы приведенная длина  $l_0$  равнялась длине приводимого конического вала  $l$ , то согласно равенству (20)

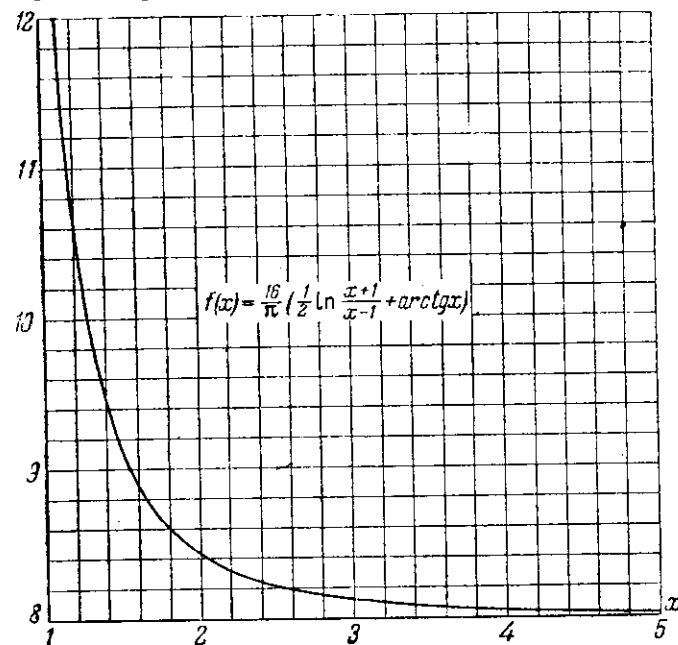
$$I_{p0} = \frac{[\delta_0^4(a_2 - a_1)]}{f(a_1) - f(a_2)}. \quad (21)$$

Это значение  $I_{p0}$  легко определяется при помощи графика, приведенного на фиг. 151. Зная  $I_{p0}$ , легко найти крутильную жесткость рассматриваемого конического вала с цилиндрическим сечением. Согласно равенству (4), она будет равна

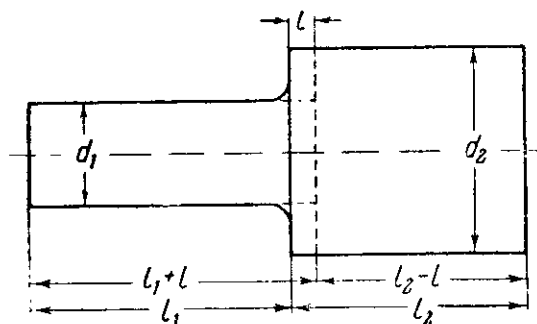
$$c = \frac{GI_{p0}}{l}. \quad (22)$$

В случае если требуется определить эквивалентную длину вала, представляющего собой тело вращения со сложной образующей, то всегда

является возможным разбить этот вал на отдельные элементарные участки и рассматривать каждый из них как конический вал. Общая эквивалентная



Фиг. 151. К определению крутильной жесткости конического вала с цилиндрическим сверлением.



Фиг. 152. К определению крутильной жесткости конструкции, состоящей из двух цилиндрических валов с переходной галтелью.

диаметров  $\frac{d_2}{d_1}$  и может быть определена из табл. 26.

длина всего вала найдется как сумма эквивалентных длин отдельных элементарных участков. Если образующая представляет собой аналитическую кривую, то в наиболее простых случаях общая эквивалентная длина может быть найдена аналитически. Практически, однако, бывает проще определять эту длину так, как указано выше.

При наличии в конструкции резких изменений поперечных сечений эквивалентная длина не может быть определена вышеизложенным, чисто аналитическим путем. Наличие местных деформаций в местах резкого изменения поперечных сечений конструкции влияет на величину эквивалентной

длины и может быть учтено только на основании экспериментальных исследований таких конструкций. Так, например, для конструкции, представленной на фиг. 152, эквивалентная длина (по данным, приводимым W. Ken Wilson в его книге „Practical solution of torsional vibration problems“) определяется как эквивалентная длина двух, сочлененных без переходных галтелей, цилиндрических валов тех же диаметров  $d_1$  и  $d_2$ , но других длин, а именно:  $(l_1 + l)$  и  $(l_2 - l)$ . Величина  $l$  зависит от отношения

Таблица 26

К определению крутильной жесткости конструкции, представленной на фиг. 152

$d_2 : d_1$	1,00	1,25	1,50	2,00	3,00	$\infty$
$l : d_1$	0	0,055	0,085	0,100	0,107	0,125

На фиг. 153 дана графически зависимость  $\frac{l}{d_1}$  от  $\frac{d_2}{d_1}$ .

Если конструкция состоит из ряда участков, крутильные жесткости которых  $c_1, c_2, \dots, c_n$  определены тем или другим путем, то крутильная жесткость  $c$  всей конструкции определится следующим образом. Положим, что к концевым сечениям конструкции приложены два, противоположно направленные, скручивающие ее момента  $M$ . Пусть под действием этих моментов вся конструкция скрутится на угол  $\varphi$ , а отдельные ее участки — соответственно на углы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Согласно основному определению крутильной жесткости имеем

$$c = \frac{M}{\varphi}, \quad c_1 = \frac{M}{\varphi_1}, \quad c_2 = \frac{M}{\varphi_2}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{M}{\varphi_n}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}. \quad (23)$$

Так как полная закрутка конструкции  $\varphi$  равна сумме закруток отдельных ее участков

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \quad (24)$$

то, принимая во внимание равенства (23), получим

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}. \quad (25)$$

Последнее соотношение и определяет искомую крутильную жесткость  $c$  всей конструкции.

Одним из основных элементов конструкции, крутильную жесткость которого приходится определять при исследовании крутильных колебаний систем коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания, является колено коленчатого вала. Для авиационных моторов наиболее подходящими для этой цели являются следующие формулы:

1. Эмпирическая формула Картера (В. С. Carter) для определения жесткости коленчатого вала при кручении, опубликованная в журнале „Engineering“ 13 июля 1928 г.

2. Формула проф. С. П. Тимошенко для той же цели, не учитывающая защемления вала в подшипниках.

3. Формула проф. С. П. Тимошенко для той же цели, учитывающая защемление вала в подшипниках.

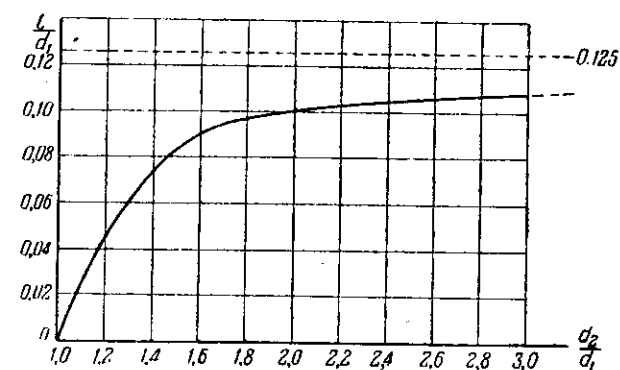
Последние две формулы имеются в русском переводе труда проф. С. П. Тимошенко „Теория колебаний в инженерном деле“.

1. Формула инж. Картера для эквивалентной длины колена состоит из трех членов:

а) первый член, представляет эквивалентную длину опорных шеек коленчатого вала, увеличенную на величину  $0,8h$ , которая примерно учитывает деформацию шеек в местах их соединения с коренными и мотылевой шейками;

б) второй член соответствует эквивалентной длине мотылевой шейки, через которую передается полностью крутящий момент;

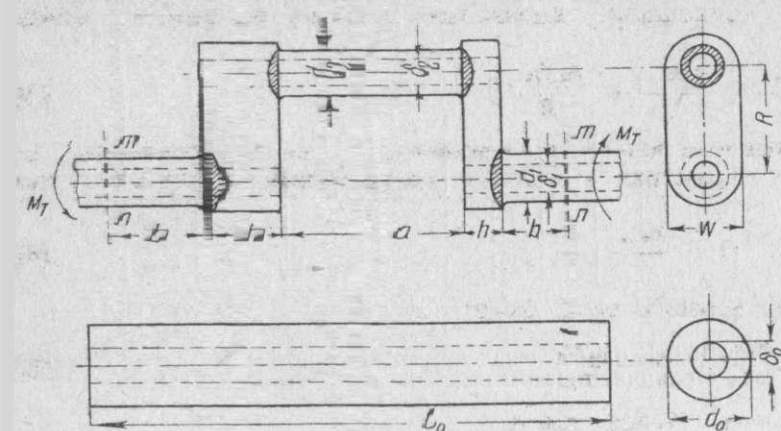
в) третий член пропорционален скручиванию, имеющему место в результате изгиба шеек в их плоскости при передаче чистого крутящего



Фиг. 153. К определению крутильной жесткости конструкции, представленной на фиг. 152.



момента без заземления в подшипниках (так что одна коренная шейка помещается относительно другой шейки в сторону) в том случае, если применить уравнение простой балки. Принимая обозначения, данные на



Фиг. 154. К определению крутильной жесткости колена коленчатого вала.

Обычно сечение эквивалентного вала принимают одинаковым с сечением коренных шеек коленчатого вала, т. е. принимают, что  $d_0 = d_1$  и  $\delta_0 = \delta_1$ . В этом случае формула (26) принимает вид

$$l_0 = (2b + 0,8h) + \frac{3}{4} a \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{d_2^4 - \delta_2^4} + \frac{3}{2} R \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{hw^3}. \quad (27)$$

2. Формула проф. С. П. Тимошенко, не учитывающая заземления вала в подшипниках, основана на допущении, что зазоры в подшипниках позволяют свободные перемещения поперечных сечений ( $m-n$ ) во время кручения (фиг. 154). Исходя из этого, угол скручивания колена, вызываемый крутящим моментом  $M_T$ , будет состоять из трех частей:

- угла от скручивания коренных шеек,
- угла от скручивания шейки кривошипа и
- угла от изгиба щеки вала.

Обозначим через

- $c_1$  — единичную жесткость на кручение коренной шейки,
- $c_2$  — единичную жесткость на кручение шейки кривошипа и
- $B$  — жесткость на изгиб щеки.

Согласно обозначениям, данным на фиг. 154, имеем

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{\pi}{32} (d_1^4 - \delta_1^4) G, \\ c_2 &= \frac{\pi}{32} (d_2^4 - \delta_2^4) G, \\ B &= \frac{hw^3}{12} E. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Для материала авиационных валов можно принять

$$G = 830\,000 \text{ кг/см}^2$$

$$E = 2\,200\,000 \text{ кг/см}^2.$$

В целях учета местных деформаций щеки в частях, заштрихованных на фиг. 154, из-за скручивания длины коренных и кривошипной шеек взяты

равными:

$$\left. \begin{aligned} 2b_1 &= 2b + 0,9h \\ a_1 &= a + 0,9h. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Отсюда угол скручивания  $\Theta$  кривошипа, вызванный крутящим моментом  $M_T$ , будет

$$\Theta = \frac{2b_1 M_T}{c_1} + \frac{a_1 M_T}{c_2} + \frac{2R M_T}{B}. \quad (30)$$

Заменяя кривошип эквивалентным валом постоянного поперечного сечения с единичной жесткостью кручения  $c$ , длину эквивалентного вала находим из уравнения

$$\Theta = \frac{M_T l_0}{c}. \quad (31)$$

Таким образом длина эквивалентного вала будет

$$l_0 = c \left( \frac{2b_1}{c_1} + \frac{a_1}{c_2} + \frac{2R}{B} \right). \quad (32)$$

Принимая, как и раньше,  $c = c_1$ , будем иметь

$$l_0 = 2b_1 + c' a_1 + 2RB',$$

где

$$c' = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{d_2^4 - \delta_2^4}$$

и

$$B' = \frac{c_1}{B} = \frac{12\pi}{32} \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{hw^3} \frac{G}{E} = \frac{12\pi}{32} \frac{830\,000}{2\,200\,000} \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{hw^3} = 0,445 \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{hw^3}.$$

Получаем окончательно

$$l_0 = (2b + 0,9h) + (a + 0,9h) \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{d_2^4 - \delta_2^4} + 0,89R \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{hw^3}. \quad (33)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (27) Картера, видим, что по своему составу обе формулы идентичны. Этого и следовало ожидать, так как в основе обеих формул лежат одни и те же положения, а разница заключается лишь в опытных поправочных коэффициентах.

3. Формула проф. С. П. Тимошенко, учитывающая заземление вала в опорных подшипниках, основана на предположении полного закрепления вала в подшипниках, отвечающего отсутствию зазоров. Для этого случая длина  $l_0$  эквивалентного вала найдется из уравнения

$$\begin{aligned} l_0 &= c \left[ \frac{2b_1}{c_1} + \frac{a_1}{c_2} \left( 1 - \frac{R}{k} \right) + \frac{2R}{B} \left( 1 - \frac{R}{2k} \right) \right] = (2b + 0,9h) + \\ &+ (a + 0,9h) \left( 1 - \frac{R}{k} \right) \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{d_2^4 - \delta_2^4} + 0,89R \left( 1 - \frac{R}{2k} \right) \frac{d_1^4 - \delta_1^4}{hw^3}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $k$  определяется из уравнения

$$k = \frac{\frac{R(a+h)^2}{4 \cdot c_2} + \frac{aR^2}{2c_2} + \frac{a^3}{24B_1} + \frac{R^3}{3B} + \frac{1,2}{G} \left( \frac{a}{2F} + \frac{R}{F_1} \right)}{\frac{aR}{2c_2} + \frac{R^2}{2B}}. \quad (35)$$

В равенства (34) и (35) помимо величин, входящих в предыдущие формулы и определяемых согласно соотношениям (28) и (29), входят:

$c_3$  — жесткость на кручение щеки как стержня прямоугольного поперечного сечения со сторонами  $h$  и  $w$ ,

$B_1$  — жесткость на изгиб шейки кривошипа,  
 $F$  — площадь поперечного сечения шейки кривошипа и  
 $F_1$  — площадь поперечного сечения щеки.  
 Согласно обозначениям, данным на фиг. 154, имеем

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= \frac{w^2 h^3 G}{3,6(w^2 + h^2)} \\ B_1 &= \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4)E, \\ F &= \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) \\ F_1 &= wh. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Для сравнения между собой результатов, даваемых этими тремя формулами, ниже в табл. 27 даны приведенные длины кривошипов ряда авиационных моторов, просчитанные по этим формулам. В таблице даны также отношения приведенных длин колен, вычисленных по формулам проф. С. П. Тимошенко, к приведенным длинам этих колен, вычисленным по формуле Картера.

Таблица 27

К определению приведенных длин колен валов различными методами

Наименование моторов	По формуле Картера		По формулам проф. С. П. Тимошенко					R k
			Не заземленный вал		Заземленный вал			
	длина в см	отноше- ние	длина в см	отноше- ние	длина в см	отноше- ние		
Паккард 3A-2500	26,73	1	27,91	1,045	24,03	0,90	0,233	
Паккард 2A-2500	23,48	1	26,60	1,133	21,82	0,930	0,271	
Фиат A-25	30,47	1	31,40	1,030	26,82	0,847	0,25	
Либерти	26,06	1	27,22	1,045	21,21	0,814	0,369	
BMW-VI a	36,85	1	32,82	0,891	26,05	0,707	0,417	
M-13	32,11	1	32,20	1,003	27,75	0,865	0,230	
X	62,65	1	70,93	1,131	63,85	1,02	0,134	
Y	28,23	1	31,16	1,103	22,94	0,813	—	
Среднее отношение	—	1	—	1,048	—	0,862	—	

Чтобы выяснить, какая из трех формул дает наиболее близкие к действительности результаты, в Расчетно-исследовательской группе ЦИАМ была произведена обработка экспериментальных данных, приведенных в вышеуказанной статье Картера (помещенной в журнале „Engineering“ от 13 июля 1928 г.) и в статье Прескота „Характеристики колебаний коленчатых валов авиационных моторов“ (опубликованной в журнале „Aeronautical Engineering“ за июль — сентябрь 1930 г., т. 2, № 3).

Картер дает в своей статье приведенные длины колен ряда морских, авиационных и автомобильных моторов, определенные экспериментально путем закрутки, а также вычисленные по его формуле. В Расчетно-исследовательской группе ЦИАМ приведенные длины колен этих моторов были подсчитаны по обеим формулам проф. С. П. Тимошенко и были найдены относительные величины приведенных длин, подсчитанных по всем трем формулам, по отношению к соответствующим приведенным длинам, определенным экспериментально. Результаты этих подсчетов приведены в табл. 28. Как видно из средних величин этой таблицы, для валов морских моторов наилучшие результаты дает формула Картера. Почти столь же

хорошие результаты дает для этих моторов формула проф. С. П. Тимошенко для вала, заземленного в опорах. Для валов авиационных моторов наилучшие результаты, судя по средним величинам, дает формула проф. С. П. Тимошенко для вала, незаземленного в опорах. Почти столь же хорошие результаты дает формула Картера. Такой же вывод можно сделать и в отношении валов автомобильных моторов.

Формула проф. С. П. Тимошенко, учитывающая заземление вала в опорных подшипниках, дает для валов авиационных и автомобильных моторов худшие результаты.

Прескот в указанной выше работе приводит числа собственных крутильных колебаний коленчатых валов ряда авиационных моторов. Эти числа были определены экспериментально, а также расчетным путем. В основу расчета клались:

1) различные эквивалентные длины вала, которые получались в результате определения эквивалентной длины колена вала по каждой из трех вышеприведенных формул, и

2) суммарная эквивалентная масса, расположенная на радиусе кривошипа в плоскости симметрии кривошипов мотора и равная сумме всех эквивалентных масс, сосредоточенных у шеек кривошипов. Этим самым задача определения чисел собственных колебаний коленчатого вала сводилась к определению эквивалентной длины вала на кручение от края

Таблица 28

К определению приведенных длин колен валов различными методами

Валы	Приве- денная длина по опы- там Картера	По формуле Картера		По формулам проф. С. П. Тимошенко				$\frac{R}{k}$
				Не заземленный вал		Заземленный вал		
		в см	длина в см	отноше- ние	длина в см	отноше- ние	длина в см	
1M	13,42	12,74	0,95	14,76	1,100	12,78	0,951	0,26
2M	75,50	69,10	0,915	81,45	1,078	70,85	0,938	0,246
3M	11,82	12,23	1,033	13,45	1,139	11,62	0,983	0,272
4M	86,90	82,00	0,945	95,50	1,100	82,50	0,950	0,262
5M	52,10	55,80	1,072	65,70	1,260	54,00	1,037	0,357
Среднее отношение	—	—	0,983	—	1,135	—	0,972	—
6A	31,65	30,15	0,952	29,80	0,940	24,45	0,772	0,274
7A	25,68	28,60	1,113	29,40	1,142	24,05	0,936	0,284
8A	53,10	56,90	1,071	53,50	1,008	41,80	0,787	0,363
9A	37,70	36,85	0,978	31,40	0,832	27,07	0,717	0,251
11A	51,30	54,00	1,052	49,60	0,965	40,02	0,780	0,396
Среднее отношение	—	—	1,033	—	0,977	—	0,798	—
13C	30,00	29,00	0,967	31,35	1,045	22,65	0,755	0,420
14C	27,95	26,05	0,932	28,72	1,027	19,10	0,683	0,477
15C	30,75	27,70	0,900	33,35	1,085	21,60	0,703	0,477
16C	34,25	30,40	0,888	28,73	0,840	19,27	0,563	0,467
17C	27,77	30,60	1,102	33,18	1,194	26,80	0,965	0,209
Среднее отношение	—	—	0,958	—	1,038	—	0,714	—

Примечания. 1. M — валы морских моторов, A — валы авиационных моторов, C — валы автомобильных моторов.

2. Вал 17C шестиконный на четырех опорах. Колена брались при подсчете попарно.



штулки пропеллера до оси симметрии кривошипов мотора и к определению эквивалентного момента инерции масс систем шеек кривошипов. Определение самих чисел собственных крутильных колебаний (в 1 секунду) производилось по формуле (37) для крутильного маятника, считая, в дополнение к вышепринятым упрощениям, что масса пропеллера бесконечно велика:

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{I}} \text{ кол./сек.}, \quad (37)$$

где  $c$  — жесткость вала крутильного маятника и  $I$  — момент инерции маятника.

Принятые Прескотом допущения относительно суммарной эквивалентной массы системы, позволившие ему находить числа собственных крутильных колебаний по формуле (37), дают для этих чисел значения приблизительно на 10% меньшие тех, которые получаются, если рассчитывать систему как многомассовую. Поэтому Расчетно-исследовательской группой ЦИАМ были произведены соответствующие пересчеты; результаты этих расчетов и экспериментальные данные Прескота приведены в табл. 29

Таблица 29

К определению чисел собственных крутильных колебаний систем коленчатых валов некоторых авиационных моторов

Наименование моторов	Опытные данные	По формуле Картера		По формулам проф. С. П. Тимошенко			
		$n_{c1}$	$\frac{n_{c1}}{n_c}$	Не заземленный вал		Заземленный вал	
	$n_c$ в сек.	в сек.	$\frac{n_{c1}}{n_c}$	$n_{c2}$ в сек.	$\frac{n_{c2}}{n_c}$	$n_{c3}$ в сек.	$\frac{n_{c3}}{n_c}$
Либерти	100	100	1,00	100	1,00	111	1,11
Кертисс D-12	160	168,5	1,053	163	1,02	178,5	1,115
» V-1570	155	166	1,07	154,5	0,997	169,5	1,093
» Crusader	160	172	1,075	167	1,043	179	1,12
Паккард 2A-2500	135	150	1,11	147	1,09	155	1,15
У	128,5	137,5	1,070	132,5	1,030	147,5	1,15
Среднее отношение	—	—	1,063	—	1,03	—	1,123

Как видно из сравнения средних величин этой таблицы, формула проф. С. П. Тимошенко для вала, не заземленного в опорах, опять дает наиболее близкие к действительности результаты. Формула Картера дает результаты несколько худшие, а формула проф. С. П. Тимошенко для вала заземленного в опорах, дает наихудшие результаты.

Как показывают вышеприведенные опытные данные Картера и Прескота наилучшие результаты при определении приведенной длины колена дает формула проф. С. П. Тимошенко, не учитывающая заземления вала в опорах.

Определим в виде примера крутильную жесткость колена вала мотора М-17ф, данного на фиг. 155.

Согласно формуле (33) проф. С. П. Тимошенко эквивалентная длина колена равна

$$l_0 = (2b + 0,9h) + (a + 0,9h) \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_2^4 - d_3^4} + 0,89R \frac{d_1^4 - d_2^4}{hw^3} =$$

$$= (2 \cdot 3,25 + 0,9 \cdot 3,1) + (5,3 + 0,9 \cdot 3,1) \frac{7,5^4 - 3,6^4}{7,2^4 - 3,6^4} + 0,89 \cdot 9,5 \frac{7,5^4 - 3,6^4}{3,1 \cdot 9,2^3} =$$

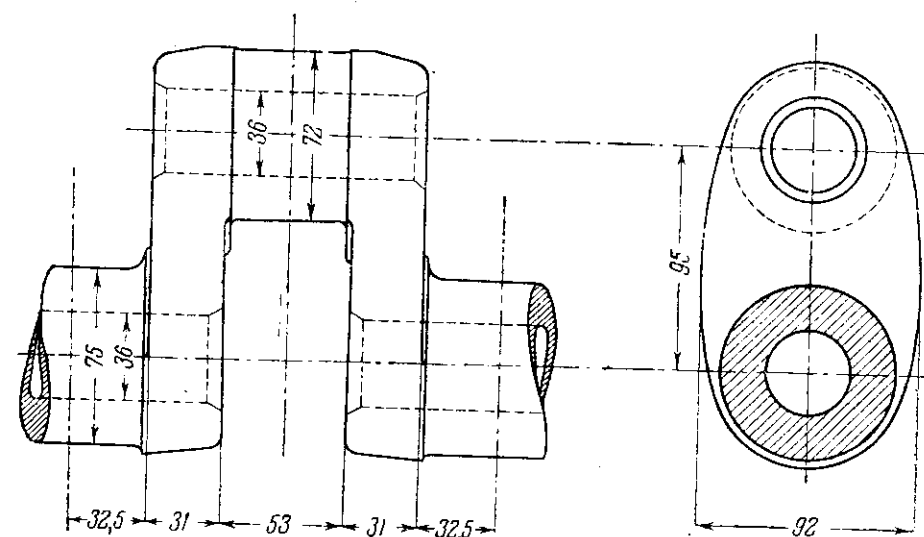
$$= 9,29 + 9,63 + 10,5 = 29,42 \text{ см.}$$

Крутильная жесткость колена равна

$$c = \frac{830000}{29,42 \cdot 32} (7,5^4 - 3,6^4) = \frac{830000}{29,42} \cdot 294,5 = 8,3 \cdot 10^6 \text{ кг см.}$$

Крутильная жесткость колена, определенная по эквивалентной длине, найденной по формуле (26) Картера, будет равна

$$c = \frac{830000}{31,42} \cdot 294,5 = 7,77 \cdot 10^6 \text{ кг см.}$$



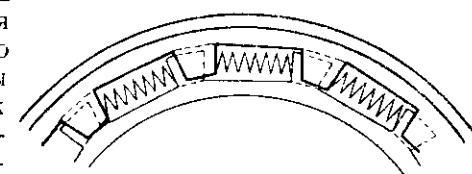
Фиг. 155. К определению крутильной жесткости колена вала мотора М-17 ф.

Разница обоих найденных значений крутильной жесткости колена равна

$$\frac{8,3 - 7,77}{8,3} 100 = 6,4\%.$$

При передаче движения от мотора к пропеллеру через редуктор или промежуточный вал часто в конструкцию вводят упругую муфту. Наличием этой муфты является предохранить конструкцию от повреждений, возникающих при резких изменениях режима работы мотора.

Вместе с этим упругая муфта служит средством для изменения жестких свойств конструкции с целью удлинения эксплуатационной зоны оборотов мотора от критических крутильных резонансов. Упругость муфты в большинстве случаев осуществляется либо наличием в конструкции муфты пружин, либо наличием резины. На фиг. 156 представлена схема сцепления, применявшегося на моторной установке дирижабля „Graf Zeppelin LZ-127“. Это сцепление представляет собой пример упругой муфты с пружинами. Определим крутильную жесткость такой упругой муфты.



Фиг. 156. Схема пружинной упругой муфты.

- Обозначим через
- $c$  — жесткость одной пружины в  $\text{кг/см}$ ; под жесткостью пружины понимают силу в килограммах, необходимую для сжатия пружины на 1 см;
  - $n$  — число пружин муфты;
  - $R$  — радиус окружности, по которой расположены оси пружин, в см;

$c$  — крутильную жесткость муфты в  $\text{кгсм/рад}$ ; под крутильной жесткостью муфты понимают величину в  $\text{кгсм}$ , передаваемого муфтой момента, скручивающего ее на 1 радиан;  
 $P_n$  — силу предварительной затяжки одной пружины в  $\text{кг}$ ;  
 $f_n$  — соответствующее предварительное сжатие пружины в  $\text{см}$ .  
 Если через муфту передается крутящий момент  $M$ , то муфта будет представлять собой жесткое целое (пружины не будут работать), пока величина момента  $M$  будет меньше величины момента  $M_n$ , соответствующего предварительной затяжке пружин и равного

$$M_n = i P_n \rho. \quad (38)$$

Если момент  $M$  станет больше  $M_n$ , то пружины начнут работать и муфта станет упругой. Под действием некоторого крутящего момента  $M$ , равного

$$M = M_n + M_1,$$

каждая из пружин будет сжата на величину  $f$ , равную

$$f = f_n + f_1.$$

Таким образом под действием добавочного к  $M_n$  момента  $M_1$  пружины получат добавочное к  $f_n$  сжатие  $f_1$ . Добавочная сила на пружину, вызывающая добавочное сжатие  $f_1$ , равна

$$P_1 = k f_1. \quad (39)$$

Соответствующий добавочный момент будет равен

$$M_1 = i k f_1 \rho. \quad (40)$$

Сжатию пружин  $f_1$  соответствует закрутка упругой муфты на угол  $\gamma$ , равный

$$\gamma = \frac{f_1}{\rho}. \quad (41)$$

Поэтому

$$M_1 = i k \rho^2 \gamma. \quad (42)$$

Отсюда, принимая во внимание определение крутильной жесткости муфты, получим

$$c = \frac{M_1}{\gamma} = i k \rho^2. \quad (43)$$

Если пружины муфты запроектированы с таким расчетом, что на всех режимах работы мотора муфта работает как муфта упругая, то крутильные колебания установки являются гармоническими крутильными колебаниями. Если мы назовем через  $M_0$  средний крутящий момент, передающийся через муфту на данном режиме работы мотора, а через  $M_v$  — величину максимального момента, накладывающегося на момент  $M_0$  от крутильных колебаний установки, то условием постоянства работ муфты как упругой будет, очевидно, неравенство

$$M_0 \pm M_v > M_n, \quad (44)$$

где  $M_n$  определяется согласно равенству (38). Если неравенство (44) удовлетворяется, то в течение одного цикла работы мотора муфта будет работать то как упругая, то как жесткая. Следствием этого является то, что жесткость муфты будет принимать за цикл два различных значения  $c_1 = \infty$  и  $c_2$ , определяемое согласно равенству (43). В этом случае крутильные колебания системы будут не гармоническими, а псевдогармоническими.

Рассмотрим теперь как ведет себя в отношении крутильной жесткости муфта, упругость которой создается наличием в ее конструкции резины. На фиг. 157 дана характеристика крутильной жесткости резиновой муфты

экспериментальной установки, состоящей из мотора BMW-IV, резиновой муфты, передаточного к пропеллеру вала (длиной 150 см) и пропеллера<sup>1</sup>.

Эта характеристика, полученная путем экспериментальной закрутки муфты, показывает, что величина закрутки муфты не пропорциональна соответствующему, скручивающему муфту моменту, а образует петлеобразную кривую. Таким образом крутильная жесткость  $c$  этой муфты не представляет собой постоянной величины, а является функцией закручивающего момента. На фиг. 157 пунктиром представлено изменение  $c$  в зависимости от закручивающего момента, найденное путем графического дифференцирования кривой изменения закручивающего момента в зависимости от угла закрутки.

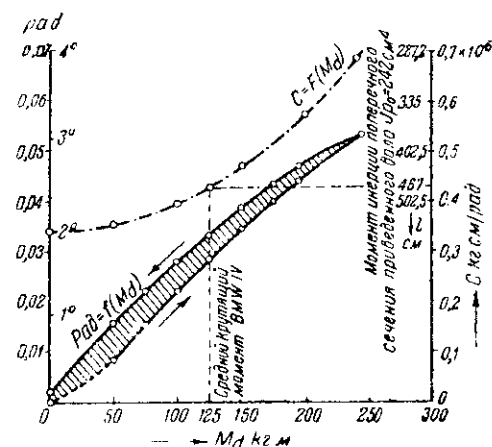
Вследствие указанной петлеобразности характеристики, приблизительно 15% затраченной на деформацию работы задерживается при разгрузке и превращается в тепло. Следствием этого является способность муфты заглушать крутильные колебания системы колена вала моторной установки.

В данном случае вследствие указанной переменности крутильной жесткости  $c$  муфты крутильные колебания моторной установки, строго говоря, тоже будут не гармоническими, а псевдогармоническими.

Точное аналитическое исследование крутильных колебаний многоаковых систем, имеющих в своей конструкции муфты переменной жесткости, в общем случае пока невозможно. Однако, как показали экспериментально-расчетные исследования таких систем, проведенные за последние годы ЦИАМ, вполне возможно практически достаточно точное, приближенное решение вопроса. Именно, выяснилось, что если при расчетах вместо переменной жесткости муфты  $c = \text{var}$  принять некоторую постоянную жесткость  $c = c_{\text{ср}}$ , то расчетные торсиограммы, полученные обычным путем, хорошо совпадают с экспериментальными торсиограммами. При этом жесткость  $c_{\text{ср}}$  является именно той жесткостью, при которой частота собственных крутильных колебаний теоретической системы равна частоте действительных крутильных колебаний действительной системы, найденной из экспериментальной резонансной кривой системы. Необходимо отметить, что и соответствующая частота собственных крутильных колебаний зависят от числа оборотов мотора. Люренбаум в вышеуказанной работе предлагает при расчетах приближенно принимать жесткость муфты постоянной и равной ее крутильной жесткости, соответствующей данному крутящему моменту, передаваемому через муфту. Возможность делать при расчетах такую предпосылку требует, однако, дальнейших экспериментальных подтверждений.

Для определения характеристик крутильных жесткостей упругих муфт экспериментальным путем служат специальные машины, позволяющие измерять величину закрутки детали в зависимости от закручивающего момента. Типичным образцом такой машины является машина для Ольшева.

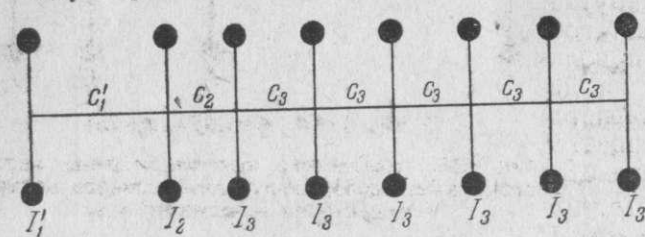
<sup>1</sup> Характеристика и другие данные этой муфты взяты из доклада К. Люренбаума, датированного 21/V 1931 г. в Киле и опубликованного в его статье „Практическое исследование крутильных колебаний передаточных механизмов воздухоплавательных машин“, журнал „Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt“, № 4 от 29/II 1932 г.



Фиг. 157. Характеристика крутильной жесткости резиновой упругой муфты.



Большое значение при исследовании крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов с редуктором имеет правильная оценка влияния на жесткость системы редуктора. При настоящих наших знаниях этого вопроса мы не располагаем методом определения этого влияния расчетным путем. Изложенный в предыдущей главе метод не учитывает таких факторов, как упругость опор и картера редуктора, которые значительно влияют на крутильную жесткость системы. Учет влияния этой добавочной упругости является возможным только путем экспериментального определения характеристики крутильной жесткости редуктора, причем закрутку надлежит производить с редуктором, смонтированным на моторе. Сама закрутка производится следующим образом. Между поршнем и дном одного из цилиндров закладывают промежуточное



$$I_1' = 1111; I_2 = 1,275; I_3 = 0,808 \text{ кг см сек}^2$$

Фиг. 158. Приведенная крутильная схема 12-цилиндрового V-образного авиационного мотора с редуктором и нагнетателем.

жесткое тело, которое не позволяет проворачиваться коленчатому валу при нагрузке его крутящим моментом. Последний создается грузом, подвешенным на конце рычага, укрепленного на носке вала мотора вместо пропеллера. Закрутка измеряется посредством замера индикатором перемещения конца другого рычага, укрепленного в том месте системы, закрутку в котором желают измерить. Аналогичным путем можно получить характеристики крутильной жесткости различных участков крутильной системы. Так, например, для получения характеристики крутильной жесткости колена коленчатого вала снимают характеристики двух участков системы, разнящихся на одно колено. Экспериментально это достигается тем, что вышеупомянутое жесткое тело перекладывается из одного цилиндра в соседний по длине вала. Разность найденных характеристик дает характеристику колена.

На фиг. 158 дана приведенная схема одного 12-цилиндрового V-образного авиационного мотора с редуктором и нагнетателем, а в табл. 30 даны величины жесткостей  $c_i$  и соответствующие числа собственных колебаний системы  $n_c$ , определенные: 1) теоретически, 2) путем закрутки, 3) исходя из  $n_c$ , полученного на основании экспериментальной резонансной кривой.

Таблица 30

Величины жесткостей  $c_i$  и чисел собственных колебаний  $n_c$  системы коленчатого вала одного авиационного V-образного мотора

	$c_1, \text{кг см}$	$c_2, \text{кг см}$	$c_3, \text{кг см}$	$n_c \text{ кол./мин.}$
Теоретические значения	$5,727 \cdot 10^6$	$11,453 \cdot 10^6$	$10,217 \cdot 10^6$	6670
Значения по закрутке	$2,710 \cdot 10^6$	$10,900 \cdot 10^6$	$9,370 \cdot 10^6$	5300
Значения по экспериментальной резонансной кривой	$2,330 \cdot 10^6$	$10,900 \cdot 10^6$	$9,370 \cdot 10^6$	5070

Как видно из табл. 30, действительная жесткость  $c_1$  в  $\frac{5,727}{2,33} = 2,46$  раз меньше теоретической жесткости, определенной методом, изложенным

в главе I. Это объясняется вышеупомянутой упругостью опор и картера редуктора.

Значительно лучше совпадают теоретическое и экспериментальное значения жесткости колена  $c_3$ . Разница этих значений составляет около 9% от экспериментального значения.

Разница в значениях  $n_c$ , определенных теоретически и на основании экспериментальной резонансной кривой, составляет 31,5% от экспериментального значения. Такая разница недопустима, и поэтому при исследовании крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов с редуктором предварительное экспериментальное определение жесткостей системы является совершенно необходимым.

На фиг. 159 дана приведенная крутильная схема одного двухрядного звездообразного мотора, не имеющего опоры между коленами вала. В табл. 31 даны величины как жесткостей  $c_i$ , определенные теоретически и путем закрутки, так и соответствующие  $n_c$ .



$$I_1' = 108; I_2 = 1,2; I_3 = 4,68 \text{ кг см сек}^2$$

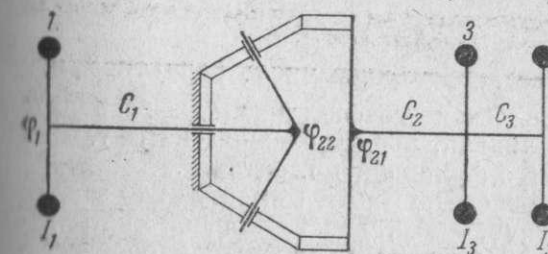
Фиг. 159. Приведенная крутильная схема двухрядного звездообразного авиационного мотора с редуктором и нагнетателем.

Таблица 31

Величины жесткостей  $c_i$  и чисел собственных колебаний  $n_c$  системы коленчатого вала одного авиационного звездообразного мотора

	$c_1, \text{кг см}$	$c_2, \text{кг см}$	$c_3, \text{кг см}$	$n_c \text{ кол./мин.}$
Теоретические значения	$4,155 \cdot 10^6$	$10,500 \cdot 10^6$	$15,750 \cdot 10^6$	5520
Значения по закрутке	$2,000 \cdot 10^6$	$3,300 \cdot 10^6$	$8,450 \cdot 10^6$	3400
Разница в %	108	218	86,5	62,5

В этом случае не только теоретическое значение жесткости  $c_2$ , зависящей от редуктора, но и значение жесткости  $c_3$ , представляющей жесткость участка коленчатого вала между моторными массами, сильно отличаются



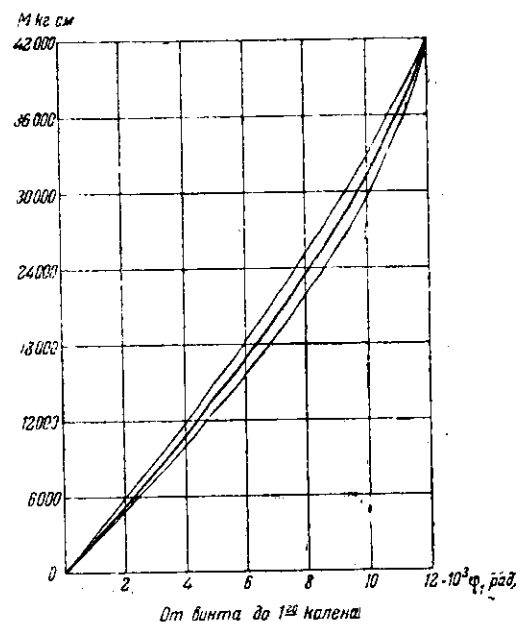
Фиг. 160. Действительная крутильная схема двухрядного звездообразного авиационного мотора с редуктором и нагнетателем.

от их экспериментальных значений. Различие в обоих значениях жесткости  $c_3$  объясняется конструкцией вала, для которой вышеприведенные формулы проф. С. П. Тимошенко и Картера неприемлемы.

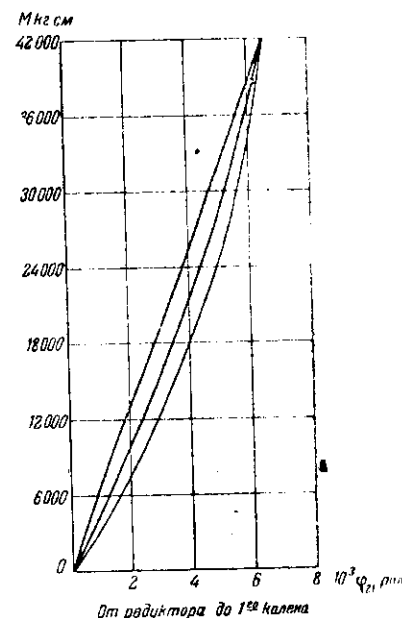
Рассмотрим подробнее, как определяются величины жесткостей  $c_1$  и  $c_2$  на основании экспериментальных закруток (фиг. 159).

На фиг. 160 представлена действительная крутильная схема

момента  $M$ . На фиг. 161 и 162 эти зависимости представлены графически. Как видим, кривые являются петлеобразными и часть израсходованной



Фиг. 161. Зависимость закручивающего момента  $M$  от угла закрутки участка 1—3 системы.



Фиг. 162. Зависимость закручивающего момента  $M$  от угла закрутки участка 21—3 системы.

закрутку энергии тратится на необратимые процессы. Для определения искомых жесткостей эти петлеобразные кривые заменены, в целях упрощения задачи, средними кривыми, показанными на фиг. 161 и 162.

Так как соответствующая моменту  $M$  приложенному в сечении I системы, закрутка действительной системы от редуктора до моторной массы 3 равна  $\varphi_{21}$ , то крутильная жесткость  $c_2$  этого участка будет равна

$$c_2 = i \frac{dM}{d\varphi_{21}},$$

где  $i$  — передаточное число редуктора, а  $\frac{dM}{d\varphi_{21}}$  определяется графическим дифференцированием кривой, представленной на фиг. 162, и является функцией момента  $M$ .

Соответствующая моменту  $M$  закрутка  $(\varphi_1 - \varphi_{22})$  действительной системы от 1-й массы до редуктора определяется из уравнения

$$(\varphi_1 - \varphi_{22}) = \varphi_1 - i \varphi_{21}. \quad (16)$$

На фиг. 163 дана графическая зависимость  $(\varphi_1 - \varphi_{22})$  от  $M$ . Крутильная жесткость  $c_1$  будет равна

$$c_1 = \frac{dM}{d(\varphi_1 - \varphi_{22})}. \quad (17)$$

определится графическим дифференцированием кривой, показанной на фиг. 163.

На фиг. 164 даны зависимости жесткостей  $c_1$  и  $c_2$  от момента  $M$ .

Зная жесткость  $c_1$  действительной крутильной системы, легко находим соответствующую жесткость  $c'_1$  приведенной системы (фиг. 159)

$$c'_1 = i^2 c_1. \quad (48)$$

Так как жесткости  $c_1$  и  $c_2$  зависят от момента  $M$ , то и частота свободных крутильных колебаний системы будет функцией  $M$ . На фиг. 165 дана для рассмотренного мотора зависимость числа свободных крутильных колебаний  $n_c$  от крутящего момента мотора  $M$ , подводимого к винту. Так как при крутильных колебаниях момент  $M$  меняется не только в зависимости от числа оборотов мотора  $n$ , но и является переменным за один цикл работы мотора, то возникает вопрос, по какому именно моменту  $M$  определять  $n_c$  при расчетах. Обычно  $n_c$  определяют по среднему крутящему моменту мотора на винте  $M_0$ . Расчет ведется следующим образом. Согласно указанному  $n_c$  является функцией  $M_0$ ; но так как  $M_0$  в свою очередь, является функцией числа оборотов  $n$  мотора в минуту, то  $n_c$  будет являться функцией  $n$ . На фиг. 166 дана зависимость  $n_c$  от  $n$  для вышеприведенного примера звездообразного мотора.

Положим, что мы теперь ищем то число оборотов мотора, которое соответствует резонансу гармоник  $k$ -го порядка ( $k$  циклу двигателя) сил, возбуждающих крутильные колебания нашей системы. Для этого через начало координат (фиг. 166) проводим прямую линию, уравнение которой

$$n_c = \frac{k}{2} n. \quad (49)$$

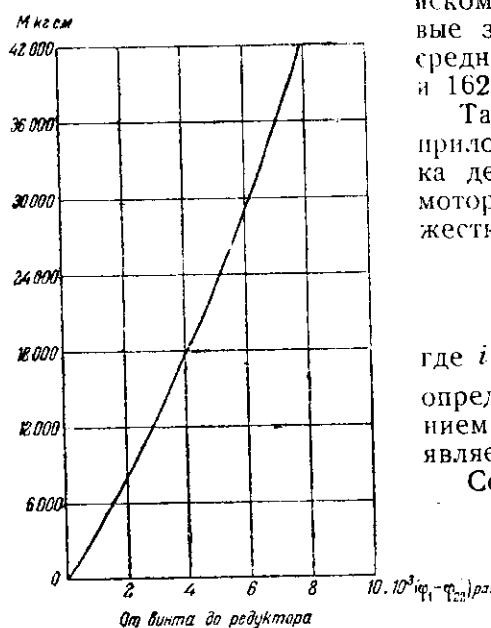
Пересечение этой прямой с кривой

$$n_c = f(n)$$

определил точку, абсцисса которой даст искомое резонансное число оборотов мотора, а ордината — соответствующее  $n_c$  системы. Таким образом каждому значению порядка  $k$  будет соответствовать свое  $n_c$ .

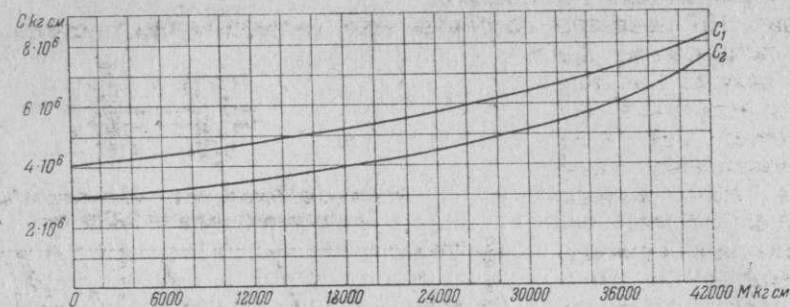
Так как в рассматриваемом случае определение расчетным путем числа оборотов мотора, при котором имеет место резонанс  $k$ -го порядка, связано рядом допущений, то результаты расчета являются сугубо ориентировочными. Действительные резонансные числа оборотов мотора могут быть найдены в этом случае только экспериментально, путем заснятия торсионных и построения по ним экспериментальной резонансной кривой.

Рассмотрим еще один элемент конструкции коленчатого вала авиационного мотора, жесткость которого приходится принимать во внимание при расчетах вала на крутильные колебания, именно втулку пропеллера. При этих расчетах некоторые авторы предлагают считать массу пропеллера сосредоточенной у края втулки, а жесткость втулки бесконечно большой; другие считают, что масса пропеллера сосредоточена в средней плоскости вращения, а часть втулки винта до этой плоскости заменяют валом сечения, одинакового с сечением коленчатого вала в местах опорных шеек. Вопрос о том, какова в действительности крутильная жесткость втулки пропеллера, является очень сложным. Этот вопрос может быть разрешен только экспериментальным путем. На фиг. 167 приведены данные экспериментальной закрутки коленчатого вала одного звездообразного мотора, обобщенные Картером в его статье „Dynamic forces in aircraft engines (torsional vibration)“, опубликованной в журнале „The Journal of the Royal Aeronautical Society“, № 196, том XXXI, апрель 1927 г. На фиг. 167 представлено для различных участков исследованного вала изменение момента, закручивающего данный участок, в зависимости от угла закрутки этого участка. Как видно из кривых, данных на фиг. 167, крутильные жесткости отдельных участков не являются постоянными величинами, а изменяются

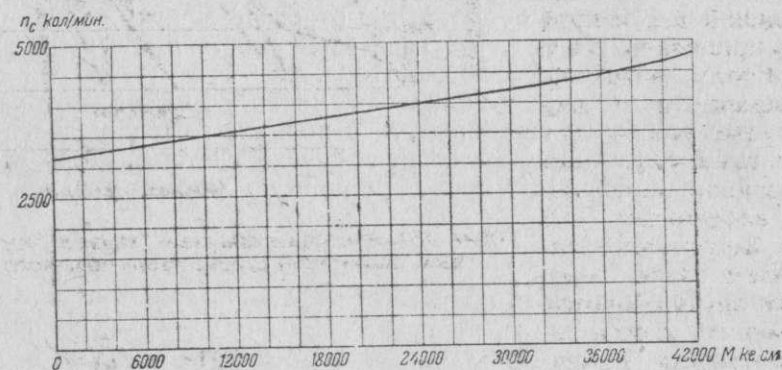


Фиг. 163. Зависимость момента  $M$ , закручивающего систему, представленную на фиг. 160, от угла закрутки участка 1—22 системы.

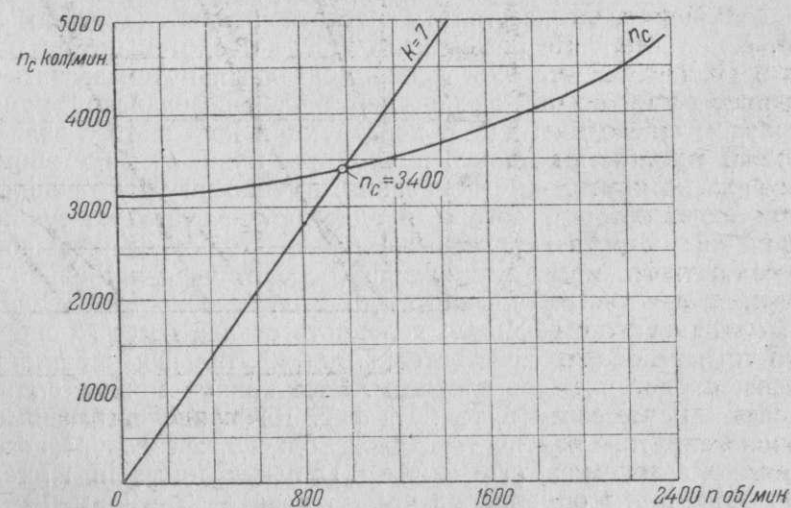




Фиг. 164. Зависимость жесткостей  $c_1$  и  $c_2$  от момента  $M$ , закручивающего систему, представленную на фиг. 160.



Фиг. 165. Зависимость числа свободных крутильных колебаний  $n_c$  системы, представленной на фиг. 160, от крутящего момента мотора  $M$ , подводимого к винту.



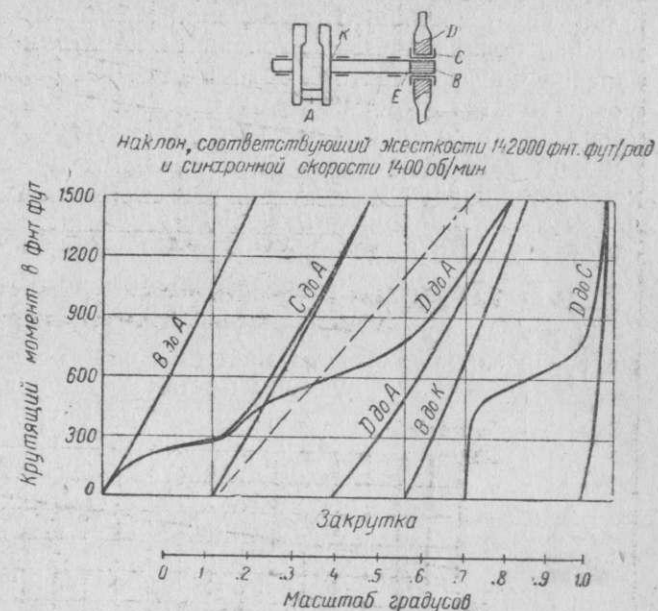
Фиг. 166. Зависимость  $n_c$  от  $n$  для крутильной системы, представленной на фиг. 160.

в зависимости от скручивающего момента. Вследствие этого диаграммы получают вид петель гистерезиса.

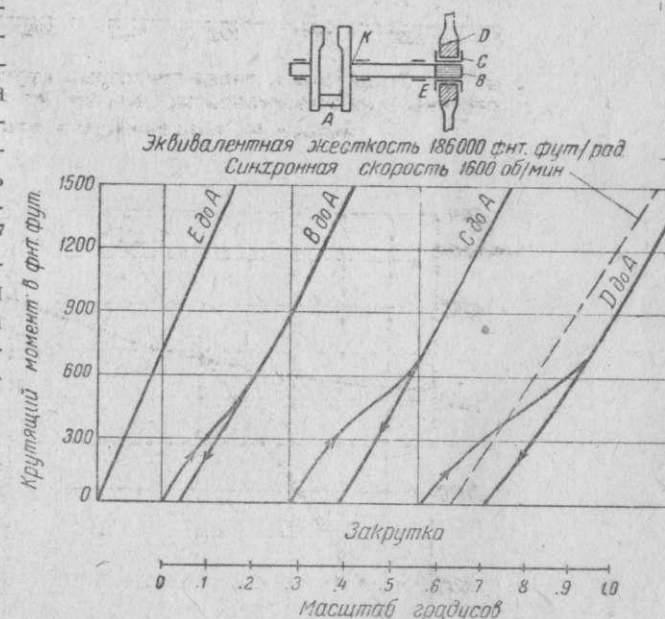
На фиг. 167 показаны половины этих гистерезисонных петель. Площади петли гистерезиса для участка вала  $D-A$  соответствует энергия в 10,4 футо-фунтов (1,44 кгм). При резонансном числе оборотов этого мотора, равном 1400 об/мин., поглощаемая при крутильных колебаниях на участке  $D-A$  вала мощность составляет  $10,4 \cdot 1400 \cdot 4,5 : 33000 = 2$  л. с.

Около трех четвертей этой мощности теряется в результате взаимных перемещений деревянной ступицы пропеллера и его втулки. Столь значительные перемещения в данном случае получились за счет плохой затяжки болтов втулки пропеллера. По найденному для данного мотора экспериментальным путем резонансному числу оборотов 1400 в минуту и по известным полярным моментам приведенных масс мотора была вычислена средняя крутильная жесткость участка  $D-A$  вала, которая оказалась равной 142000 футо-фунтов/радиан ( $2,04 \cdot 10^7$  кгсм/рад). На фиг. 167 через среднюю точку петли гистерезиса проведена (пунктиром) прямая, наклон которой соответствует этой жесткости.

На фиг. 168 представлены аналогичные кривые, полученные после надлежащей затяжки болтов втулки пропеллера. Как видно из этих кривых, петля гистерезиса сильно уменьшилась, и то, что осталось, обязано, главным образом, передвижению втулки по шлицам. Резонансное число оборотов мотора в этом случае поднялось почти до 1600 об/мин. Соответствующая вычисленная средняя крутильная жесткость участка вала  $D-A$  равна 174000 футо-фунтов/радиан ( $2,5 \cdot 10^7$  кгсм/рад). На фиг. 168



Фиг. 167. Экспериментальные характеристики крутильных жесткостей одного звездообразного мотора.



Фиг. 168. Экспериментальные характеристики крутильных жесткостей звездообразного мотора (фиг. 167) при надлежащей затяжке болтов втулки пропеллера.



через среднюю точку петли гистерезиса проведена прямая, наклон которой соответствует этой жесткости.

Приведенные исследования выявляют важность хорошо пригнанных шлицов и правильного соединения между пропеллером и втулкой. Ненормальная податливость в этой части конструкции вала может снизить резонансное число оборотов мотора до их эксплуатационной области, если оно находится выше последней, и создать в этом случае опасность поломки коленчатого вала мотора от крутильных колебаний. Поэтому является необходимым тщательно следить за правильностью монтажа этих частей конструкции вала мотора во избежание неприятностей от крутильных колебаний для коленчатого вала мотора, не говоря уже об опасности для самой втулки и винта.

## § 2. Определение эквивалентных полярных моментов инерции масс

При исследовании на крутильные колебания системы коленчатого вала мотора все вращающиеся массы заменяются расположенными в соответствующих местах крутильной системы дисками, массовые полярные моменты инерции которых относительно их осей вращения равны массовым полярным моментам инерции действительных масс относительно осей вращения последних.

Определение массовых полярных моментов инерции этих масс не представляет затруднений. В том случае, когда конструкция вращающейся детали дается чертежами, искомый момент инерции ее определяется методами прикладной механики, останавливаться на которых здесь не будем. Когда налицо имеется готовая деталь, ее момент инерции определяется методом прокачивания. Таким путем определяются, например, полярные моменты инерции пропеллера и колена коленчатого вала. Для определения массового полярного момента инерции колена коленчатого вала относительно его оси подвешивают вал на двух стальных струнах так, как это показано на фиг. 169, и заставляют его качаться с малой угловой амплитудой вокруг его оси. Если

$G$  — вес детали в кг,

$l$  — длина каждой нити в см,

$a$  — расстояние между осями нитей в см и

$T$  — время одного полного (парного) качания в сек., то искомый момент инерции найдется по известной из механики формуле

$$I_p = \frac{Ga^2T^2}{16\pi^2l} \text{ кг см сек}^2. \quad (50)$$

Например, при прокачке коленчатого вала звездообразного мотора, упомянутого в предыдущем параграфе, величины, входящие в эту формулу, имели следующие значения

$$G = 65,55 \text{ кг}; l = 470 \text{ см}; a = 40,5 \text{ см} \text{ и } T = 2,32 \text{ сек.}$$

Полярный момент инерции, соответствующий этим величинам, равен

$$I_{p1} = 7,8 \text{ кг см сек}^2.$$

Так как в эту величину входит и полярный момент инерции приспособлений для прокачки, то для получения чистого полярного момента инерции коленчатого вала из  $I_{p1}$  надо вычесть полярный момент инерции приспособлений  $I_{p2}$ . Этот момент инерции был определен при помощи той же установки для прокачивания. Соответствующие значения величин, входящих в формулу (50), оказались следующими:

$$G = 5,55 \text{ кг}; l = 470 \text{ см}; a = 40,5 \text{ см} \text{ и } T = 2,8 \text{ сек.}$$

Отсюда

$$I_{p2} = 0,96 \text{ кг см сек}^2.$$

Искомый полярный момент инерции вала равен

$$I_p = I_{p1} - I_{p2} = 7,8 - 0,96 = 6,84 \text{ кг см сек}^2.$$

После того как полярный момент инерции вала найден, из него вычитают полярные моменты инерции опорных шеек и носка вала; полученная разность, разделенная на число колен вала, будет равна полярному моменту инерции одного колена вала.

В том случае, когда коленчатый вал имеет жестко связанные с ним противовесы, полярные моменты инерции последних складываются с полярными моментами инерции тех колен, к которым прикреплены противовесы. При наличии у коленчатого вала маятниковых противовесов, последние учитываются при расчете на крутильные колебания особым образом. Подробно об этом будет сказано позднее в главе о демпферах крутильных колебаний.

Далее в полярный момент инерции колена выключается полярный момент инерции относительно оси коленчатого вала масс шатунов, отнесенных к кривошипной шейке данного колена.

Наконец, в полярный момент инерции колена включается полярный момент инерции, учитывающий влияние на крутильные колебания системы поступательнодвигающихся масс в цилиндрах, действующих на данное колено.

Рассмотрим характер влияния на крутильные колебания системы поступательнодвигающихся в цилиндрах мотора масс. При наличии крутильных колебаний системы скорость поступательнодвигающихся в цилиндре масс будет согласно уравнению (12), главы V, части I равна

$$v_p = \frac{v_{p1}}{\omega_c} \frac{d\alpha}{dt}, \quad (51)$$

где  $v_{p1}$  является скоростью поршня при постоянной средней угловой скорости вращения  $\omega_c$  коленчатого вала мотора. Величина  $\frac{v_{p1}}{\omega_c}$  может быть согласно кинематике кривошипно-шатунных механизмов представлена в виде

$$\frac{v_{p1}}{\omega_c} = Rf(\alpha), \quad (52)$$

где  $R$  — радиус кривошипа, а  $f(\alpha)$  есть функция угла поворота кривошипа  $\alpha$ . Вид этой функции для каждого типа кривошипно-шатунного механизма известен из кинематики этого механизма.

Согласно уравнениям (51) и (52), имеем

$$v = Rf(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} = Rf(\alpha) \dot{\alpha}. \quad (53)$$

Кинетическая энергия  $T$  суммарной, поступательнодвигающейся в цилиндре массы  $M_n$  будет равна

$$T = \frac{1}{2} M_n v_p^2 = \frac{1}{2} M_n R^2 [f(\alpha)]^2 (\dot{\alpha})^2. \quad (54)$$

Потенциальную энергию  $V$  этой массы принимаем равной нулю

$$V = 0. \quad (55)$$

В дифференциальное уравнение движения Лагранжа той эквивалентной массы крутильной системы, к которой относится рассматриваемый кривошип, войдет за счет поступательнодвигающейся массы  $M_n$  выражение

$$\psi(M_n) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}. \quad (56)$$



Согласно найденным для  $T$  и  $V$  выражениям (54) и (55), имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= M_n R^2 \dot{\alpha} [f(\alpha)]^2, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= M_n R^2 \ddot{\alpha} [f(\alpha)]^2 + 2 M_n R^2 (\dot{\alpha})^2 f(\alpha) \frac{df}{d\alpha}, \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= M_n R^2 (\dot{\alpha})^2 f(\alpha) \frac{df}{d\alpha}, \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha} &= 0, \\ \varphi(M_n) &= M_n R^2 \ddot{\alpha} [f(\alpha)]^2 + M_n R^2 (\dot{\alpha})^2 f(\alpha) \frac{df}{d\alpha}.\end{aligned}\quad (57)$$

Обозначая

$$[f(\alpha)]^2 = \Phi(\alpha), \quad (58)$$

получим

$$\varphi(M_n) = M_n R^2 \ddot{\alpha} \Phi(\alpha) + \frac{1}{2} M_n R^2 (\dot{\alpha})^2 \frac{d\Phi}{d\alpha}. \quad (59)$$

Для простого кривошипного механизма функция  $\Phi(\alpha)$  имеет следующее выражение (см. статью автора „Тангенциальные силы от инерции поступательно двигающихся масс“, опубликованную в журнале „Техника воздушного флота“, № 5 за 1933 г.)

$$\Phi(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = A_{j0} + A_{j1} \cos \alpha + A_{j2} \cos 2\alpha + A_{j3} \cos 3\alpha + \dots, \quad (60)$$

где

$$\left. \begin{aligned}A_{j0} &= \frac{1}{2} (1 + 2^2 \rho_2^2 + 4^2 \rho_4^2 + 6^2 \rho_6^2 + 8^2 \rho_8^2 \dots), \\ A_{j1} &= 2\rho_2, \\ A_{j2} &= \frac{1}{2} (-1 - 16\rho_2^2 - 48\rho_4^2 \dots), \\ A_{j3} &= -2\rho_2 - 4\rho_4, \\ A_{j4} &= \frac{1}{2} (-2^2 \rho_2^2 + 24\rho_2 \rho_6 + 64\rho_4 \rho_8 \dots), \\ A_{j5} &= 4\rho_4 + 6\rho_6, \\ A_{j6} &= \frac{1}{2} (16\rho_2 \rho_4 - 32\rho_2 \rho_8 - 80\rho_4 \rho_{10} \dots),\end{aligned} \right\} \quad (61)$$

причем  $\rho$  являются функциями величины  $\lambda$  — отношения радиуса кривошипа  $R$  к длине шатуна  $L$ . Выражения для этих функций в общем виде даны равенствами (53) в части II, глава I, § 4; в развернутом виде эти функции даны равенствами (21) в части I, глава I, § 4.

Обращаясь к равенству (59), мы видим, что действие поступательно двигающихся в цилиндре масс при крутильных колебаниях выражается двояким образом. Первый член этого равенства показывает, что полярный момент инерции кривошипа и всех жестко с ним связанных масс увеличивается на величину

$$I_n = M_n R^2 \Phi(\alpha). \quad (62)$$

Этот добавочный полярный момент инерции не является величиной постоянной, а зависит от угла поворота кривошипа  $\alpha$ . Однако его в целях математического упрощения задачи принимают постоянным, оставляя в выражении (60) для функции  $\Phi(\alpha)$  только постоянный член  $A_{j0}$ , равный приближенно

$$A_{j0} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{4} \right). \quad (63)$$

Влияние такого упрощения вопроса на частоту свободных крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов мы рассмотрим ниже.

Второй член равенства (59) тоже упрощают, полагая в нем приближенно угловую скорость  $\dot{\alpha}$ , равной средней угловой скорости  $\omega_c$  вращения вала, т. е. принимая приближенно

$$\frac{1}{2} M_n R^2 (\dot{\alpha})^2 \frac{d\Phi}{d\alpha} \approx \frac{1}{2} M_n R^2 \omega_c^2 \frac{d\Phi}{d\alpha}. \quad (64)$$

Если этот член перенести со знаком минус в правую часть дифференциального уравнения движения Лагранжа рассматриваемой эквивалентной массы крутильной системы, то он будет представлять собой не что иное, как действующий на соответствующий этой массе кривошип крутящий момент от сил инерции поступательно двигающихся в цилиндре масс  $M_n$ . В самом деле, если этот момент обозначим через  $M_{nj}$ , то

$$\begin{aligned}M_{nj} \omega &= -M_n j_p v_p = -\frac{1}{2} M_n \frac{d}{dt} (v_p^2) = \\ &= -\frac{1}{2} M_n \frac{d}{dt} \{R^2 \omega^2 [f(\alpha)]^2\} = \\ &= -\frac{1}{2} M_n R^2 \omega^2 \frac{d}{dt} [f(\alpha)]^2 = \\ &= -\frac{1}{2} M_n R^2 \omega^2 \frac{d\Phi}{d\alpha}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$-\frac{1}{2} M_n R^2 \omega^2 \frac{d\Phi}{d\alpha} = M_{nj}. \quad (65)$$

Из сказанного следует, что момент  $M_{nj}$  можно рассматривать как момент, возбуждающий крутильные колебания системы. При исследовании вынужденных крутильных колебаний системы этот момент складывают с возбуждающим крутильные колебания системы моментом от сил давления газов на поршень соответствующего цилиндра.

Резюмируя все вышесказанное, мы приходим к заключению, что эквивалентный полярный момент инерции  $I$ , соответствующий массам кривошипа, действующих на этот кривошип шатунов и поршней цилиндров, работающих на этот кривошип, равен

$$I = I_{кр} + [M'_k + 0,5(1 + 0,25\lambda^2) \sum M_n] R^2, \quad (66)$$

где  $I_{кр}$  — массовый полярный момент инерции кривошипа относительно оси коленчатого вала;

$M'_k$  — отнесенная к оси цапфа кривошипа масса от масс всех шатунов, действующих на данную цапфу, определяемая нормальным методом разности масс шатунов;

$\sum M_n$  — сумма поступательно двигающихся масс в цилиндрах (включая и часть от масс шатунов), работающих на данный кривошип;

$R$  — радиус кривошипа;

$\lambda = \frac{R}{L}$  — отношение радиуса кривошипа к длине шатуна.

Выше мы показали [равенство (62)], что полярный момент инерции  $I_n$ , соответствующий поступательно двигающейся в цилиндре массе  $M_n$ , является функцией угла поворота кривошипа  $\alpha$ . Для нормального кривошипно-шатунного механизма точное значение этого момента, соответствующее углу  $\alpha$ , определяется следующим образом. Согласно равенствам (58) и (52) имеем

$$\Phi(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = \left( \frac{v_{p1}}{R\omega_c} \right)^2 = \left[ \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \right]^2, \quad (67)$$

причем угол  $\beta$  определяется из уравнения

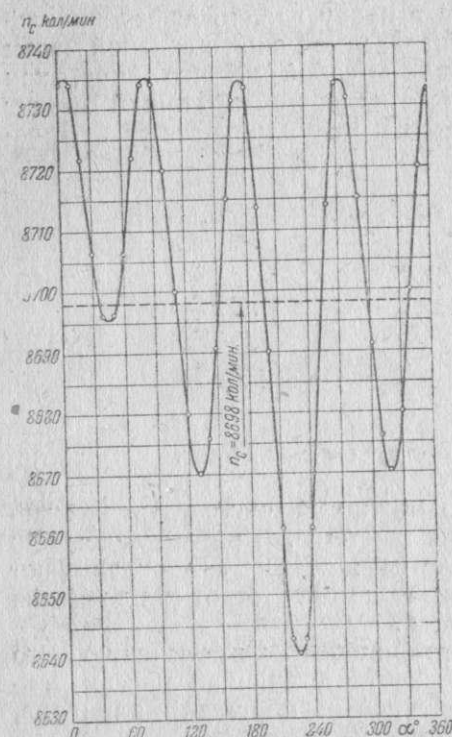
$$\sin \beta = \lambda \sin \alpha. \quad (68)$$



Поэтому

$$I_n = \left[ \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \right]^2 M_n R^2. \quad (69)$$

Пренебрегая кинематикой прицепных шатунов, возможно при помощи этого уравнения исследовать частоты свободных крутильных колебаний  $n_c$  систем коленчатых валов моторов различных типов в зависимости от положения коленчатого вала при колебаниях. Так как  $I_n$  зависит от угла поворота соответствующего кривошипа, то для каждого данного угла поворота коленчатого вала  $\alpha$  (угол поворота первого кривошипа) полярные моменты инерции  $I_n$  различны для поступательнодвигающихся масс в различных цилиндрах. Поэтому, строго говоря, каждому значению  $\alpha$  будут соответствовать своя эквивалентная крутильная система (различие будет заключаться в величинах эквивалентных полярных моментов инерции), а следовательно, и свое  $n_c$ . В виде примеров приведем зависимость  $n_c$  от  $\alpha$



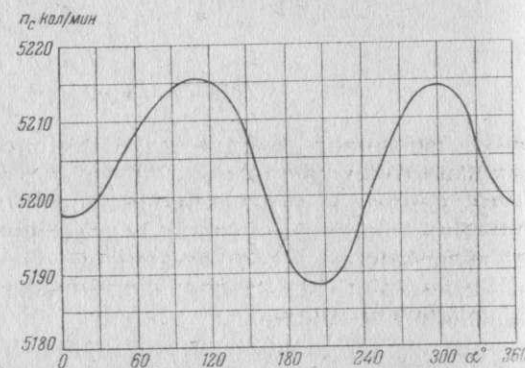
Фиг. 170. Зависимость  $n_c$  от угла поворота коленчатого вала  $\alpha$  для мотора Hispano-Suiza.

для двух типов авиационных моторов. На фиг. 170 дана эта зависимость для 8-цилиндрового, V-образного мотора Hispano-Suiza. Максимальное и минимальное значения  $n_c$  для этого мотора отличаются от значения  $n_c = 8698$  кол/мин. [определенного на основании равенства (66)] соответственно на  $8735 - 8698 = 37$  кол/мин. и  $8640 - 8698 = -58$  кол/мин.

На фиг. 171 дана эта зависимость для 12-цилиндрового, V-образного мотора BMW-VI. Максимальное и минимальное значения  $n_c$  для этого мотора отличаются от значения  $n_c = 5205$  кол/мин. [определенного на основании равенства (66)] соответственно на  $5216 - 5205 = 11$  кол/мин. и  $5188 - 5205 = -17$  кол/мин.

Для случая звездообразного мотора, если пренебречь кинематикой прицепных шатунов и считать все их главными, зависимость  $n_c$  от  $\alpha$  будет совсем ничтожной.

Вышеприведенные примеры показывают, что при расчетах на крутильные колебания систем коленчатых валов обычных многоцилиндровых авиационных моторов вполне допустимо производить подсчет эквивалентного полярного момента инерции, соответствующего массам агрегата коленчатого вала, по формуле (66), пренебрегая зависимостью этого момента инерции (за счет поступательнодвигающихся масс  $M_n$ ) от угла поворота коленчатого вала  $\alpha$ .

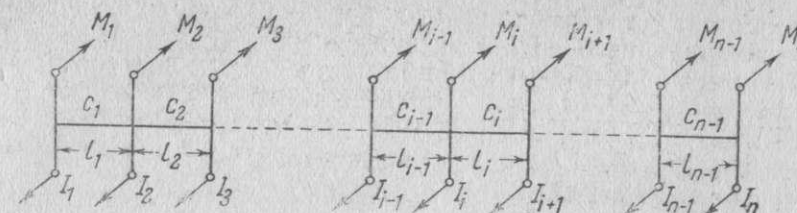


Фиг. 171. Зависимость  $n_c$  от угла поворота коленчатого вала  $\alpha$  для мотора BMW-VI.

## ПРИНУЖДЕННЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ АВИАЦИОННЫХ МОТОРОВ

### § 1. Моменты, возбуждающие, и моменты, заглушающие крутильные колебания

Известно, что на каждую шатунную шейку коленчатого вала действует периодически изменяющаяся тангенциальная сила от сил давления газов и от сил инерции поступательнодвигающихся масс в цилиндрах двигателя, работающих на данную шатунную шейку. Период этой тангенциальной силы для 4-тактных моторов соответствует двум оборотам коленчатого вала мотора, а для 2-тактных моторов — одному обороту. Эта сила, будучи приложена на радиусе кривошипа, и создает возбуждающий крутиль-



Фиг. 172. Общий случай многомассовой крутильной системы.

ные колебания вала момент на данной шатунной шейке. Как всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, этот момент может быть представлен в виде тригонометрического полинома. Ограничивая число членов этого полинома гармониками  $p$ -го порядка, мы можем написать общее выражение для возбуждающего момента, действующего на  $i$ -ю массу нашей динамически эквивалентной системы (фиг. 172), в следующей форме:

$$\begin{aligned} M_i &= RA_{i0} + R \sum_{k=1}^{k=p} [A_{ik} \cos(k\theta t) + B_{ik} \sin(k\theta t)] = \\ &= RA_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} R [T_{ik} \sin(k\theta t + \beta_{ik})] = \\ &= M_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} [M_{ik} \cos(k\theta t) + \mathfrak{M}_{ik} \sin(k\theta t)] = \\ &= M_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} [M_{ik} \sin(k\theta t + \beta_{ik})]. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих соотношениях приняты следующие обозначения

- $R$  — радиус кривошипа;
- $A_{i0}$  — постоянная слагающая тригонометрического полинома тангенциальной силы, действующей на  $i$ -ю массу;
- $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  — амплитуды фазовых слагающих гармоники  $k$ -го порядка тангенциальной силы, действующей на  $i$ -ю массу;
- $\theta$  — круговая частота гармонического момента первого порядка (в сек.<sup>-1</sup>);
- $k$  — порядок гармонической составляющей;
- $T_{ik}$  — амплитуда гармоники  $k$ -го порядка тангенциальной силы, действующей на  $i$ -ю массу;
- $\beta_{ik}$  — начальный фазовый угол силы  $T_{ik}$ ;
- $t$  — время, прошедшее от некоторого начального момента.



Для четырехтактных двигателей

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

и для двухтактных двигателей

$$\Theta = \pi,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения коленчатого вала мотора, определяемая обычным образом

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (3)$$

причем  $n$  — число оборотов коленчатого вала в минуту.

Соответственно

$M_{i0}$  — постоянная слагающая тригонометрического полинома возбуждающего момента, действующего на  $i$ -ю массу;

$M_{ik}$  и  $N_{ik}$  — амплитуды фазовых слагающих гармоники  $k$ -го порядка возбуждающего момента, действующего на  $i$ -ю массу;

$M_{ik}$  — амплитуда гармоники  $k$ -го порядка возбуждающего момента, действующего на  $i$ -ю массу.

При указанных обозначениях имеют место следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} T_{ik} &= \sqrt{A_{ik}^2 + B_{ik}^2}, \\ M_{ik} &= \sqrt{M_{ik}^2 + N_{ik}^2} = RT_{ik}, \\ M_{i0} &= RA_{i0}, \quad M_{ik} = RA_{ik}, \quad N_{ik} = RB_{ik}, \\ \text{и} \\ \operatorname{tg} \beta_{ik} &= \frac{A_{ik}}{B_{ik}} = \frac{M_{ik}}{N_{ik}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Гармонический анализ суммарной тангенциальной силы на шатунной шейке от сил давления газов и сил инерции поступательно двигающихся масс в цилиндрах, действующих на эту шейку, был нами подробно рассмотрен в части II, глава III, § 7.

Помимо вышеуказанных возбуждающих крутильные колебания моментов на систему коленчатого вала авиационного мотора действуют моменты, заглушающие крутильные колебания этой системы. В авиационном моторе имеется ряд источников, создающих эти заглушающие моменты; остановимся на рассмотрении их несколько подробнее.

1. Гистерезис материала вала. Гистерезис материала вала является, как известно, в установках тяжелого типа одной из основных причин, вызывающих заглушение крутильных колебаний. Что касается авиационных и автомобильных моторов, то гистерезис материала вала не имеет существенного значения; в этих случаях приблизительно только 10—15% всей работы заглушающих крутильные колебания сопротивлений приходится на долю гистерезиса; поэтому на вопросах гистерезиса материала вала при кручении мы здесь останавливаться не будем, отсылая интересующихся к следующим работам: 1. Rowett, F. E. „Elastic Hysteresis in Steel“, Proc. Roy. Soc., Series A, 1913—1914, vol. 89; 2. Föppl, O., Becker, E. und Heydekampf, „Die Dauerprüfung der Werkstoffe“, 1929 (Springer, Berlin); 3. Dorey, S. F. „Elastic Hysteresis in Crankshaft Steels“, Proc. I. M. E, 1932, vol. 123.

2. Гистерезис материала пропеллера. В некоторых случаях крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов гистерезис материала пропеллера имеет существенное значение. В авиационной практике известны случаи, когда поломки коленчатых валов от крутильных колебаний прекращались при замене металлического пропеллера деревянным. В настоящее время не представляется возможным учесть аналитически при расчетах на крутильные колебания влияние гистерезиса материала пропеллера.

3. Заглушение, создаваемое сопротивлением воздуха при движении пропеллера. Этот тип заглушения имеет существенное значение в тех

случаях, когда узел крутильных колебаний системы находится далеко от пропеллера. В этих случаях амплитуда колебания пропеллера становится значительной, в связи с чем становится значительной и работа рассматриваемого заглушения. В большинстве практически встречающихся в авиации случаев форма крутильных колебаний систем такова, что узел крутильных колебаний находится вблизи пропеллера и влияние этого заглушения незначительно.

4. Заглушения, создаваемые мотором. К числу этих заглушений в основном относятся: заглушения, создаваемые поршнями и поршневыми кольцами; заглушения, создаваемые шатунными и опорными подшипниками коленчатого вала мотора.

Шанон (J.F. Shannon) в своей работе „Damping Influences in Torsional Oscillation“, опубликованной в „The Institution of Mechanical Engineers Proceedings“, 1935 г., vol 131, приходит к ряду очень интересных выводов относительно заглушений этого типа. По его экспериментальным исследованиям поршневые кольца (их наличие или отсутствие) не влияют на величину амплитуды крутильных колебаний при резонансе и рассеяние энергии вследствие трения в поршнях и в шатунных подшипниках незначительно. Далее им было установлено, что недостаточная смазка опорных подшипников дает увеличение (примерно в два раза) резонансной амплитуды. Окончательный вывод, к которому он приходит, заключается в том, что основное рассеяние энергии при крутильных колебаниях происходит в масляном слое опорных подшипников коленчатого вала. Физически это происходит не за счет момента трения, создаваемого масляным слоем подшипника и зависящего от крутильных колебаний опорной шейки во вкладыше (на потери этого типа уходит около 7% всей энергии вибрации), а за счет потерь на трение в масляном слое при выдавливании смазки опорной шейкой из одной половины вкладыша в другую. Такое колебательное движение опорной шейки во вкладыше получается в результате изгиба коленчатого вала тангенциальными силами инерции вращающихся масс; эти силы инерции создаются крутильными колебаниями коленчатого вала и при резонансе достигают большой величины.

На основании теоретических соображений, останавливаться на которых здесь не будем, Шанон получил следующее выражение для энергии, затраченной на трение в опорном подшипнике при крутильных колебаниях за один цикл вследствие указанных выше поперечных вибраций опорной шейки во вкладыше

$$W = C \lambda (k \Theta) \left( \frac{d}{\Delta} \right)^3 A^2, \quad (5)$$

где

$C$  — постоянный числовой коэффициент;

$\lambda$  — вязкость масла;

$k \Theta$  — круговая частота поперечных колебаний опорной шейки во вкладыше;

$d$  — диаметр опорной шейки;

$\Delta$  — радиальный зазор в опорном подшипнике и

$A$  — амплитуда поперечных колебаний опорной шейки во вкладыше.

Порядок цифр, полученных Шаноном на основании этой формулы, согласуется с порядком цифр, полученных им экспериментально. Это показывает, что физическая сущность явления дана им правильно. Однако формула (5) вряд ли получит практическое применение из-за трудности определения величин  $\lambda$  и  $A$ .

5. Заглушения, вносимые в крутильную систему упругими муфтами, редукторами и другими конструктивными элементами, имеющими петлеобразную характеристику крутильной жесткости. Работа заглушения за один цикл этих конструктивных элементов может быть определена только на основании их экспериментальных характеристик крутильной жесткости. В некоторых случаях, например, при наличии в крутильной системе упругой резиновой муфты, величина этой работы может достигнуть значительной величины и оказать заметное влияние на снижение резонансной амплитуды.



6. Заглушения, создаваемые в крутильной системе демпферами крутильных колебаний. С целью снизить резонансные амплитуды, в конструкцию крутильной системы вводят иногда специальный агрегат-демпфер крутильных колебаний, работающий на принципе создания в крутильной системе добавочного трения, заглушающего крутильные колебания. Заметим, что помимо демпферов трения существует еще другой вид демпферов — динамические демпферы, работающие на другом принципе. Подробно о конструкции, работе и расчете демпферов различных видов будет сказано ниже в специальной главе, посвященной этому вопросу.

При аналитическом исследовании явлений крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов явления заглушения крутильных колебаний в целях возможности математического решения задачи упрощают. Упрощение заключается в том, что вместо реально действующих на систему заглушающих моментов в дифференциальные уравнения движения системы вводят фиктивные заглушающие моменты, величины которых принимают пропорциональными угловым скоростям тех масс системы, к которым они приложены. Таким образом заглушающий крутильные колебания момент  $M_{\xi}$ , действующий на  $i$ -ю массу системы, принимается равным

$$M_{\xi} = \xi_i \dot{\varphi}_i \quad (6)$$

где  $\dot{\varphi}_i$  — угловая скорость при крутильных колебаниях  $i$ -й массы системы, а  $\xi_i$  — эквивалентный коэффициент заглушения.

При расчетах на крутильные колебания систем коленчатых валов авиационных моторов фиктивные заглушающие моменты  $M_{\xi}$  прикладывают обычно к тем массам крутильной системы, к которым приложены возбуждающие крутильные колебания моменты  $M_i$ ; коэффициент  $\xi_i$  принимают одинаковым для всех моментов  $M_{\xi}$ ; размерность коэффициента  $\xi_i$  [согласно равенству (6)]  $\text{кг см сек}$ .

Возникает вопрос, почему допустимо такое упрощение явления в отношении моментов, заглушающих крутильные колебания? Ряд экспериментально-расчетных исследований крутильных колебаний систем коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания показал следующее:

1. Заглушающие моменты, обычно имеющие место в этих системах, влияют только на величины амплитуд резонирующих гармоник колебания системы; на нерезонирующие гармоники эти моменты практически влияния не оказывают.

2. При тех сравнительно малых величинах заглушающих моментов, которые обычно имеют место в этих системах, форма вынужденных колебаний системы, соответствующая резонирующей гармонике, практически совпадает с соответствующей формой свободных крутильных колебаний системы.

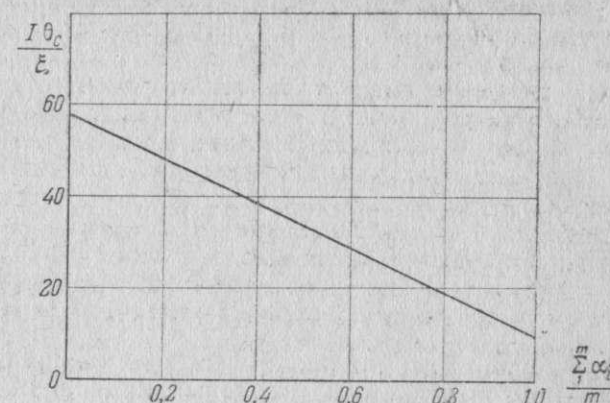
Первое из этих положений позволяет заключить, что замена действительных заглушающих моментов фиктивными, практически не меняет нерезонирующие гармоники колебания системы. Что касается резонирующей гармоники колебания системы, то она при замене действительных заглушающих моментов фиктивными не изменится в том случае, если коэффициенты заглушения  $\xi$  будут подобраны так, чтобы амплитуда резонирующей гармоники колебания была в обоих случаях одинакова; такой подбор коэффициентов заглушения  $\xi$  всегда возможен. Правильность всех выдвинутых выше положений подтверждается, наконец, тем, что расчетные торсиограммы, построенные исходя из этих положений, дают хорошее совпадение с экспериментальными торсиограммами. К этому вопросу мы еще вернемся позднее при рассмотрении методов расчетного построения торсиограмм. Какова же величина эквивалентных коэффициентов заглушения  $\xi$  и как задаваться ею при расчетах?

В существующих авиационных моторах коэффициент  $\xi$  меняется в широких пределах. В нашей практике мы встречались с величинами коэффициента  $\xi$ , изменяющимися в пределах от 20 до 100  $\text{кг см сек}$ . Коэффициент  $\xi$

является различным не только для разных моторов, но и для одного и того же мотора он не постоянен, а различен для различных порядков резонирующих гармоник. Так как при расчетах на крутильные колебания точное знание коэффициента  $\xi$

чрезвычайно важно, то отдельными исследователями делались попытки дать для этого коэффициента общее выражение в виде функции основных параметров исследуемой крутильной системы. К числу таких попыток относится, например, кривая Шанона (см. вышеупомянутую его работу), которая дает зависимость между двумя функциями в виде

$$\frac{l \theta_c}{\xi} = \varphi \left( \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i}{m} \right), \quad (7)$$



Фиг. 173. Кривая J. F. Shannon'a для определения эквивалентного коэффициента заглушения крутильных колебаний  $\xi$ .

где  $l$  — полярный момент инерции, соответствующий массам агрегата одного колена;

$\theta_c$  — круговая частота свободных крутильных колебаний системы;

$\xi$  — эквивалентный коэффициент заглушения;

$\alpha_i$  — относительная амплитуда колебания  $i$ -й моторной массы по отношению к последней, согласно форме свободных крутильных колебаний системы;

$m$  — число колен мотора (число моторных масс).

На фиг. 173 дана кривая Шанона. Эта кривая представляет собой прямую линию, уравнение которой (полученное нами)

$$y = 58 - 48x, \quad (8)$$

причем

$$y = \frac{l \theta_c}{\xi} \quad \text{и} \quad x = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i}{m}. \quad (9)$$

Р. Брандт (R. Brandt) в своей статье „Untersuchung über die Erregung von Drehschwingungen in Reihemotoren“, опубликованной в DVL-Jahrbuch за 1931 г., дает для определения коэффициента затухания  $\xi$  следующие зависимости:

а) для однорядных моторов

$$\xi = \text{от } 0,0008FR^2 \text{ до } 0,001FR^2 \quad (10)$$

и б) для двухрядных моторов

$$\xi = \text{от } 0,0016FR^2 \text{ до } 0,002FR^2, \quad (10')$$

где  $F$  — площадь поршня в  $\text{см}^2$  и

$R$  — радиус кривошипа в  $\text{см}$ .

Тэйлор (E. S. Taylor) в своей работе „Eliminating Crankshaft Torsional Vibration in Radial Aircraft Engines“, опубликованной в журнале SAE за март 1936 г., указывает, что для однорядного звездообразного мотора амплитуда закрутки коленчатого вала при резонансе резонирующим моментом  $k$ -го порядка примерно в 15 раз больше амплитуды закрутки коленчатого вала, вызванной этим же моментом при статическом его действии. Так как эта зависимость позволяет определить соответствующую резонансную амплитуду и соответствующий эквивалентный коэффициент затухания  $\xi$ , то мы развили в применении к рядным моторам излагаемый ниже метод



и проверили правильность его на двух 12-цилиндровых V-образных авиационных моторах, не имеющих ни редуктора, ни нагнетателя. Амплитуда закрутки коленчатого вала  $\Phi_{ст}$  при статическом действии приложенных к моторным массам системы возбуждающих моментов  $k$ -го порядка, вызывающих критический крутильный резонанс системы при динамическом их действии, определялась нами следующим образом. Обозначим через 0 — узел колебания, а через 1, 2, ..., 6 моторные массы крутильной системы. Далее введем следующие обозначения:

$c_{\theta i}$  — крутильная жесткость участка крутильной системы между узлом 0 и  $i$ -й моторной массой;  
 $\delta_{\theta i}$  — угол отклонения  $i$ -й моторной массы системы относительно узла 0 при статическом действии момента  $M_i$ , приложенного к  $i$ -й моторной массе, причем

$$M_i = M_k \sin(k\theta t + \beta_{ik}) = M_k \sin(\theta_c t + \beta_{ik}); \quad (11)$$

$k$  — порядок гармоники, вызывающей критический резонанс;  
 $\theta_c$  — круговая частота свободных колебаний системы;  
 $\beta_{ik}$  — начальный фазовый угол момента  $M_i$ ;  
 $\delta_{\theta i}$  — угол отклонения  $i$ -й моторной массы системы относительно узла 0 при статическом действии на систему всех моментов  $M_i$ ;  
 $\Phi_d$  — амплитуда колебания 6-й моторной массы системы при динамическом действии на систему всех моментов  $M_i$ ;  
 $\Phi_{ст}$  — амплитуда колебания 6-й моторной массы системы при статическом действии на систему всех моментов  $M_i$ ;  
 $\rho$  — коэффициент резонанса, определяемый соотношением

$$\rho = \frac{\Phi_d}{\Phi_{ст}}. \quad (12)$$

Согласно принятым обозначениям, имеем

$$\delta_{\theta i} = \frac{M_k}{c_{\theta i}} \sin(\theta_c t + \beta_{ik}), \quad (13)$$

$$\delta_{\theta} = \sum_{i=1}^6 \delta_{\theta i} = \sum_{i=1}^6 \frac{M_k}{c_{\theta i}} \sin(\theta_c t + \beta_{ik}) = M_k \sum_{i=1}^6 \frac{1}{c_{\theta i}} \sin(\theta_c t + \beta_{ik}) \quad (14)$$

$$\Phi_{ст} = (\delta_{\theta})_{\max} = M_k \sum_{i=1}^6 \left( \frac{1}{c_{\theta i}} \right), \quad (15)$$

причем последняя сумма представляет геометрическую сумму векторов  $\left( \frac{1}{c_{\theta i}} \right)$ , взаимное расположение которых определяется начальными фазовыми углами  $\beta_{ik}$ .

Что касается амплитуды  $\Phi_d$ , то она, как увидим дальше, определяется из соотношения

$$\Phi_d = \frac{M_k \sum_{i=1}^6 \bar{\alpha}_{ik}}{\xi \theta_c \sum_{i=1}^6 \alpha_i^2}, \quad (16)$$

где  $\alpha_i$  представляет взятые по форме свободных крутильных колебаний системы отношения амплитуды колебания  $i$ -й моторной массы системы к 6-й, а  $\sum_{i=1}^6 \bar{\alpha}_{ik}$  — представляет геометрическую сумму векторов  $\bar{\alpha}_{ik}$ , взаимное расположение которых определяется теми же начальными фазовыми углами  $\beta_{ik}$ .

На основании соотношений (12), (15) и (16), получаем

$$\Phi_d = \rho \Phi_{ст} = \frac{M_k \sum_{i=1}^6 \bar{\alpha}_{ik}}{\xi \theta_c \sum_{i=1}^6 \alpha_i^2} = \rho M_k \sum_{i=1}^6 \left( \frac{1}{c_{\theta i}} \right).$$

Отсюда для определения эквивалентного коэффициента заглушения  $\xi$  вытекает следующая зависимость:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^6 \bar{\alpha}_{ik}}{\rho \theta_c \left( \sum_{i=1}^6 \alpha_i^2 \right) \sum_{i=1}^6 \left( \frac{1}{c_{\theta i}} \right)}. \quad (17)$$

Принимая для коэффициента резонанса  $\rho$  значение  $\rho = 14$ , мы получили для двух вышеупомянутых авиационных моторов значения коэффициентов заглушения  $\xi$ , приведенные в табл. 32. В этой же таблице помещены для сравнения коэффициенты  $\xi$ , определенные по уравнению (8) кривой Шанона, найденные по формуле (10') DVL и полученные по формуле (16) на основании экспериментальной величины амплитуды  $\Phi_d$ .

Таблица 32

Величины коэффициентов заглушения для двух авиационных моторов, определенные различными методами

Наименование мотора	Порядок $k$ резонирующей гармоники	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$
X	7	40,6	28,6	29—36,2	38,0
Y	9	32,8	28,6	29—36,2	36,0
·	12	33,5	28,6	29—36,2	33,8
·	9	59,8	43,9	29—36,2	58,0
·	12	106,0	43,9	29—36,2	73,5

Примечания.

В табл. 32 обозначают:  $\xi_1$  — экспериментальный коэффициент, определенный по формуле (16),

$\xi_2$  — коэффициент, определенный по уравнению (8) Шанона,

$\xi_3$  — коэффициент, определенный по формуле (10') DVL,

$\xi_4$  — коэффициент, определенный по формуле (17) при  $\rho = 14$ .

Как показывают данные табл. 32, изложенный метод определения эквивалентного коэффициента заглушения  $\xi$  [см. равенство (17)] дает для  $\xi$  величины, значительно более близкие к экспериментальным, чем методы Шанона и DVL. Особенно интересным является то обстоятельство, что коэффициент  $\xi$  при этом методе зависит от порядка  $k$  резонирующей гармоники и поэтому не остается постоянным для одного и того же мотора; это положение неоднократно обнаруживалось нами при экспериментальных исследованиях на крутильные колебания систем коленчатых валов авиационных моторов. Таким образом этот метод дает весьма обнадеживающие результаты; однако он требует дальнейшего подтверждения экспериментальными данными, полученными на основании торсионграфирований большего числа авиационных моторов.

Резюмируя все сказанное, мы приходим к заключению, что в настоящее время не существует надежного метода для расчетного определения величины коэффициента  $\xi$ . Правильное определение этого коэффициента возможно лишь путем соответствующего анализа экспериментальных торсионграмм мотора. На основании этого анализа определяется величина амплитуды резонирующей гармоники колебания  $\Phi_d$ , а по ней при помощи зависимости (16) находится искомое значение коэффициента  $\xi$ .



## § 2. Принужденные крутильные колебания 1-массовой и 2-массовой систем

Переходя к рассмотрению принужденных крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов, мы остановимся только на системах, имеющих постоянные крутильные жесткости. Вопрос о принужденных крутильных колебаниях систем с переменными крутильными жесткостями является сложным с математической точки зрения и выходит за пределы настоящей работы. Интересующихся основами этого вопроса отсылаем к книге Курант Р. „Курс дифференциального и интегрального исчисления“, часть II. См. также статью М. Rauscher „Steady Oscillations of Systems with Nonlinear and Unsymmetrical Elasticity“, опубликованную в Journal of Applied Mechanics, 1938 г., т. 5, № 4 и книгу Т. Р. Den Hartog „Mechanical Vibrations“.

Мы начнем с исследования принужденных крутильных колебаний 1-массовой и 2-массовой систем, как наиболее простых, позволяющих наглядно выяснить сущность рассматриваемого явления. Положим, что масса (фиг. 115) совершает принужденные крутильные колебания в среде, создающей момент сопротивления, пропорциональный первой степени угловой скорости этой массы. Рассмотрим сперва случай, когда на массу действует возбуждающий колебания внешний периодический момент, изменяющийся по закону

$$M = B \sin(\Theta t). \quad (18)$$

Обозначая через  $\xi$  — коэффициент заглушения, представляющий момент сопротивления среды при угловой скорости массы, равной единице,

$$c = \frac{GI_0}{l} \text{ — жесткость вала на кручение,}$$

$I$  — полярный момент инерции массы относительно оси вала

$$\frac{\xi}{I} = 2q \text{ и } \frac{B}{I} = b \quad (19)$$

и имея в виду, что круговая частота  $\Theta_c$  собственных колебаний рассматриваемой системы равна

$$\Theta_c = \sqrt{\frac{c}{I}},$$

получим уравнение движения массы для данного случая в виде

$$\ddot{\varphi} + 2q\dot{\varphi} + \Theta_c^2 \varphi = b \sin(\Theta t). \quad (20)$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$\varphi = e^{-qt} [\alpha_0 \cos(\Theta_0 t) + \beta_0 \sin(\Theta_0 t)] + \frac{b(\Theta_c^2 - \Theta^2)}{(\Theta_c^2 - \Theta^2)^2 + (2q\Theta)^2} \sin(\Theta t) - \frac{2bq\Theta}{(\Theta_c^2 - \Theta^2)^2 + (2q\Theta)^2} \cos(\Theta t). \quad (21)$$

Первый член правой части этого уравнения представляет собой затухающие колебания. Два последних члена, пропорциональные величине  $b$ , представляют собой „вынужденные колебания“ системы. Эти колебания поддерживаются действием периодического внешнего момента и не исчезают с течением времени. Период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\Theta} \quad (22)$$

равен периоду возбуждающего колебания момента, а амплитуда пропорциональна амплитуде этого момента. Амплитуда колебаний зависит также от соотношения между периодом  $T_c$  собственных колебаний системы и периодом  $T$  возбуждающего момента, что видно из дальнейшего.

Выражение для вынужденных колебаний можно упростить, если ввести следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2bq\Theta}{(\Theta_c^2 - \Theta^2)^2 + (2q\Theta)^2} &= \Phi_d \sin \gamma \\ \frac{b(\Theta_c^2 - \Theta^2)}{(\Theta_c^2 - \Theta^2)^2 + (2q\Theta)^2} &= \Phi_d \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Тогда выражение для вынужденных колебаний будет иметь вид

$$\Phi_d [\sin(\Theta t) \cos \gamma - \cos(\Theta t) \sin \gamma] = \Phi_d \sin(\Theta t - \gamma). \quad (24)$$

Амплитуда  $\Phi_d$  вынужденных колебаний будет равна

$$\Phi_d = \frac{b}{\sqrt{(\Theta_c^2 - \Theta^2)^2 + (2q\Theta)^2}}. \quad (25)$$

Угол  $\gamma$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2q\Theta}{\Theta_c^2 - \Theta^2} = \frac{\xi\Theta}{I(\Theta_c^2 - \Theta^2)}. \quad (26)$$

Так как в рассматриваемом случае возбуждающий крутильные колебания системы момент выражается формулой (18), то угол сдвига фаз между вынужденными колебаниями и возбуждающим моментом будет равен углу  $\gamma$ .

Имея в виду, что период собственных колебаний системы

$$T_c = \frac{2\pi}{\Theta_c}, \quad (27)$$

а период возбуждающего момента

$$T = \frac{2\pi}{\Theta}$$

будем иметь при  $\Theta_c > \Theta$ , т. е. при периоде собственных колебаний системы, меньшем периода возбуждающего момента, величину  $\gamma$  положительной и меньшей  $\frac{\pi}{2}$ , а при  $\Theta_c < \Theta$  величину  $\gamma$  большей  $\frac{\pi}{2}$ .

Из уравнения (24) видно, что вынужденные колебания отстают по фазе от возбуждающего колебания момента  $B \sin(\Theta t)$ .

Когда  $\Theta_c = \Theta$ , т. е. когда частота собственных колебаний системы равна частоте возбуждающего момента, имеет место случай резонанса; при этом  $\operatorname{tg} \gamma = \infty$ , и разность фаз получается равной  $\frac{\pi}{2}$ . При таком колебательном движении система достигает своего среднего положения в тот момент, когда возбуждающий момент достигает своего максимального значения.

Исследуем теперь изменение амплитуды  $\Phi_d$  вынужденных колебаний. Согласно равенству (25), имеем:

$$\Phi_d = \frac{b}{\sqrt{(\Theta_c^2 - \Theta^2)^2 + (2q\Theta)^2}} = \frac{\frac{b}{\Theta_c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Theta}{\Theta_c}\right)^2 + \left(\frac{\Theta}{\Theta_c}\right)^2 \left(\frac{2q}{\Theta_c}\right)^2}}, \quad (28)$$

а так как

$$\Theta_c^2 = \frac{c}{I},$$

то

$$\frac{b}{\Theta_c^2} = \frac{Ib}{c} = \frac{B}{c},$$



т. е. есть не что иное, как угол закрутки, соответствующий статическому действию наибольшего возбуждающего момента  $B$ .

Обозначим этот угол через  $\Phi_{ст}$

$$\frac{b}{\theta_c^2} = \frac{B}{c} = \Phi_{ст}. \quad (29)$$

Далее имеем

$$\frac{\theta}{\theta_c} = \frac{T_c}{T} \quad (30)$$

и

$$\frac{2\eta}{\theta_c} = \frac{1}{\pi} q T_c = \frac{\xi}{\sqrt{Ic}}. \quad (31)$$

Обозначим

$$\frac{2q}{\theta_c} = \frac{\xi}{\sqrt{Ic}} = \frac{1}{\pi} q T_c = \Delta. \quad (32)$$

Принимая во внимание все эти соотношения, будем иметь

$$\Phi_d = \frac{\Phi_{ст}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T_c}{T}\right)^2\right]^2 + \Delta^2 \left(\frac{T_c}{T}\right)^2}}. \quad (33)$$

Называя отношение  $\frac{\Phi_d}{\Phi_{ст}}$  фактором резонанса, будем иметь, что фактор резонанса равен

$$\frac{\Phi_d}{\Phi_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{T_c}{T}\right)^2\right]^2 + \Delta^2 \left(\frac{T_c}{T}\right)^2}}. \quad (34)$$

Исследуем выражение (34) для фактора резонанса.

Если возбуждающий момент имеет очень большой период  $T$  по сравнению с  $T_c$ , то  $\Phi_d$  приближается к  $\Phi_{ст}$ ; в этом случае деформации системы могут быть вычислены в предположении, что возбуждающий момент  $B \sin(\theta t)$  действует статически.

Когда  $T$  представляет собой малую величину, т. е. когда возбуждающий момент имеет очень высокую частоту, то знаменатель уравнения (34) будет очень большим и величина  $\Phi_d$  будет очень мала по сравнению с  $\Phi_{ст}$ , т. е. будет стремиться в пределе к нулю.

Если  $T$  приближается к  $T_c$  и коэффициент  $\Delta$  мал, то знаменатель уравнения (34) будет мал и амплитуда  $\Phi_d$  будет значительно больше  $\Phi_{ст}$ . Это означает, что при резонансе сравнительно небольшие возбуждающие моменты могут вызвать очень сильные колебания, которые, в свою очередь, могут вызвать в колеблющейся системе очень большие напряжения.

Чтобы дать картину зависимости фактора резонанса  $\frac{\Phi_d}{\Phi_{ст}}$  от изменения отношения  $\frac{T_c}{T}$  и от величины коэффициента  $\Delta$ , на фиг. 174 построено несколько кривых  $\frac{\Phi_d}{\Phi_{ст}} = F\left(\frac{T_c}{T}, \Delta\right)$  в зависимости от отношения  $\frac{T_c}{T}$  для различных значений  $\Delta$ .

Из этих кривых видно, что максимум фактора резонанса не совпадает точно с условием резонанса  $\left(\frac{T_c}{T} = 1\right)$ ; величина отношения  $\frac{T_c}{T}$ , соответствующая максимуму фактора резонанса, меньше единицы и равна согласно уравнению (34)

$$\frac{T_c}{T} = \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{2}}. \quad (35)$$

Соответствующее этому отношению  $\frac{T_c}{T}$  максимальное значение фактора резонанса будет

$$\left(\frac{\Phi_d}{\Phi_{ст}}\right)_{\max} = \frac{1}{\Delta \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}}. \quad (36)$$

При условии резонанса, когда  $T_c = T$ , фактор резонанса равен

$$\rho = \left(\frac{\Phi_d}{\Phi_{ст}}\right)_{T_c=T} = \frac{1}{\Delta} = \frac{c}{\xi \theta_c}. \quad (37)$$

Назовем  $\rho$  коэффициентом резонанса.

Когда  $\Delta = 0$ , фактор резонанса больше единицы для всех значений  $\frac{T_c}{T}$  между 0 и  $\sqrt{2}$ .

Вне величин, близких к  $\frac{T_c}{T} = 1$ , коэффициент  $\Delta$  оказывает незначительное влияние на кривые, если только  $\Delta$  сравнительно мал, примерно меньше 0,2.

Если  $\Delta$  не больше 0,2, то фактор резонанса равен приблизительно 2, когда  $\frac{T_c}{T} = 0,7$  и 1,2, и больше двух, когда  $\frac{T_c}{T}$  внутри этих пределов.

Если  $\frac{T_c}{T}$  больше  $\sqrt{2}$ , то действие упругих колебаний благоприятно, т. е. вал закручивается меньше, чем при статическом действии момента  $M$ .

Рассмотрим теперь случай, когда на массу действует возбуждающий момент с основным периодом

$$T = \frac{2\pi}{\theta}, \quad (38)$$

а переменная часть этого момента может быть представлена в виде

$$M = \sum_{k=1}^{k=\infty} [\Re_k \cos(k\theta t) + \Im_k \sin(k\theta t)]. \quad (39)$$

Помимо этого момента на массу действует, как и раньше, заглушающий колебания момент  $\xi\varphi$ . Пользуясь прежними обозначениями, имеем

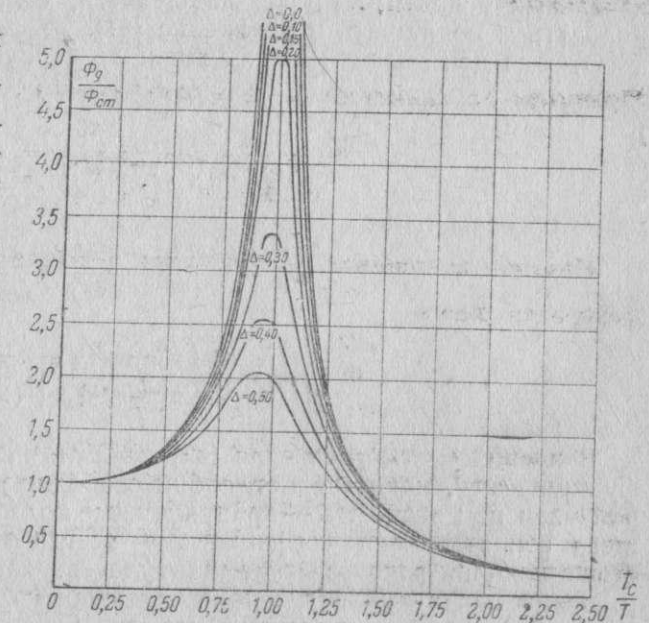
$$\frac{\xi}{I} = 2q.$$

Имея в виду, что

$$\theta_c^2 = \frac{c}{I}$$

и обозначая

$$\frac{\Re_k}{I} = a_k, \quad \frac{\Im_k}{I} = b_k, \quad (40)$$



Фиг. 174. Кривые отношения амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде при статической нагрузке максимальным моментом, возбуждающим колебания.



получим из условия равновесия всех действующих на массу моментов следующее дифференциальное уравнение движения массы

$$\ddot{\varphi} + 2q\dot{\varphi} + \Theta_c^2 \varphi = \sum_{k=1}^{k=\infty} [a_k \cos(k\Theta t) + b_k \sin(k\Theta t)]. \quad (41)$$

Полное решение этого дифференциального уравнения представится в виде

$$\varphi = e^{-qt} [x_0 \cos(\Theta_0 t) + y_0 \sin(\Theta_0 t)] + \sum_{k=1}^{k=\infty} [x_k \cos(k\Theta t) + y_k \sin(k\Theta t)]. \quad (42)$$

В этом равенстве  $x_0$  и  $y_0$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий;  $x_k$  и  $y_k$  определяются, если уравнение (42) продифференцировать и подставить в уравнение (41).

Отсюда для определения величин  $x_k$  и  $y_k$  получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} a_k &= x_k(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2) + 2y_k q k \Theta \\ b_k &= y_k(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2) - 2x_k q k \Theta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

из которых находим

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \frac{a_k(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2) - 2b_k q k \Theta}{(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2)^2 + (2q k \Theta)^2} \\ y_k &= \frac{b_k(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2) + 2a_k q k \Theta}{(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2)^2 + (2q k \Theta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

В правой части уравнения (42) первый член, содержащий множителем функцию  $e^{-qt}$ , представляет собой свободные затухающие колебания; второй член под знаком  $\Sigma$  — принужденные колебания системы. Для заглушающего сопротивления коэффициент  $q$  всегда положителен, поэтому вследствие наличия фактора  $e^{-qt}$  амплитуда затухающих колебаний со временем уменьшается, а амплитуда принужденных колебаний остается постоянной, пока действует возбуждающий момент. Период  $T_0$  затухающих колебаний и число затухающих колебаний в минуту  $n_0$  определяются из равенств

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Theta_0} \quad \text{и} \quad n_0 = \frac{60}{T_0} = \frac{30}{\pi} \Theta_0, \quad (45)$$

причем

$$\Theta_0 = \sqrt{\Theta_c^2 - q^2} = \Theta_c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}, \quad (46)$$

где  $\Delta = \frac{2q}{\Theta_c} = \frac{1}{\pi} q T_c$ .

Из равенств (46) видно, что период затухающих колебаний не зависит от времени и больше периода собственных (не заглушаемых) колебаний системы.

В случае, если

$$q^2 \geq \Theta_c^2,$$

для  $T_0$  получается либо бесконечно большое, либо мнимое значение. Этот случай представляет для нас только теоретический интерес; при этом уже не получается явления свободных колебаний, а имеет место апериодическое движение по закону

$$\varphi_0 = e^{-qt} [B_0 e^{\sqrt{q^2 - \Theta_c^2} t} + A_0 e^{-\sqrt{q^2 - \Theta_c^2} t}] \quad (47)$$

Обращаясь к принужденным колебаниям, на основании равенств (44) заключаем, что амплитуды фазовых слагающих  $x_k$  и  $y_k$  принужденных колебаний определенного периода  $T_k = \frac{2\pi}{k\Theta}$  зависят от возбуждающих гармонических моментов  $A_k$  и  $B_k$  только этого периода. Знаменатель правой части в уравнениях (44), как сумма квадратов двух действительных чисел, никогда не равен нулю, так как одно из этих чисел  $(2q k \Theta)$  всегда отлично от нуля;  $x_k$  и  $y_k$  поэтому никогда не бывают бесконечно большими. Амплитуда  $\Phi_k$  принужденного колебания  $k$ -го порядка определяется из уравнения

$$\Phi_k^2 = x_k^2 + y_k^2 = \frac{a_k^2 + b_k^2}{(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2)^2 + (2q k \Theta)^2}.$$

Принимая во внимание обозначения (40) и (19), будем иметь

$$a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{I^2} (\mathfrak{M}_k^2 + \mathfrak{N}_k^2) = \frac{M_k^2}{I^2}, \quad (48)$$

где  $M_k$  представляет амплитуду возбуждающего момента  $k$ -го порядка

$$2q = \frac{\xi}{I}. \quad (49)$$

Отсюда

$$\Phi_k = \frac{M_k}{I \sqrt{(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2)^2 + (\xi k \Theta)^2}}. \quad (50)$$

Возбуждающий момент  $k$ -го порядка может быть представлен в виде

$$\mathfrak{M}_k \cos(k\Theta t) + \mathfrak{N}_k \sin(k\Theta t) = M_k \sin(k\Theta t + \beta_k), \quad (51)$$

причем угол  $\beta_k$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \beta_k = \frac{\mathfrak{M}_k}{\mathfrak{N}_k}. \quad (52)$$

Принужденное гармоническое колебание  $k$ -го порядка может быть представлено в виде

$$\varphi_k = x_k \cos(k\Theta t) + y_k \sin(k\Theta t) = \Phi_k \sin(k\Theta t + \gamma_k), \quad (53)$$

причем угол  $\gamma_k$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma_k = \frac{x_k}{y_k}. \quad (54)$$

Между возбуждающим гармоническим моментом  $k$ -го порядка и вызываемым им гармоническим колебанием этого же порядка образуется благодаря наличию в крутильной системе заглушающих сопротивлений сдвиг фаз  $\psi$ , определяемый из уравнения

$$\psi_k = \beta_k - \gamma_k. \quad (55)$$

Так как согласно равенствам (52), (40) и (54), (44)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_k &= \frac{a_k}{b_k} \\ \operatorname{tg} \gamma_k &= \frac{a_k(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2) - 2b_k q k \Theta}{b_k(\Theta_c^2 - k^2\Theta^2) + 2a_k q k \Theta} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

и

то

$$\operatorname{tg} \psi_k = \frac{\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \gamma_k}{1 + \operatorname{tg} \beta_k \operatorname{tg} \gamma_k} = \frac{2q(k\Theta)}{\Theta_c^2 - (k\Theta)^2} = \frac{\xi(k\Theta)}{I[\Theta_c^2 - (k\Theta)^2]}. \quad (57)$$



Если заглушение в системе отсутствует, т. е. если  $\xi = 0$ , то угол  $\psi = 0$  и принужденное гармоническое колебание  $k$ -го порядка будет одинаково по фазе с возбуждающим гармоническим моментом этого порядка.

Так как выражение (57) совпадает с выражением (26), все сказанное выше в отношении угла  $\gamma$  остается справедливым для угла  $\psi$ .

Из рассмотрения выражения (50) для амплитуды гармоники  $k$ -го порядка принужденных колебаний вытекает, что:

1. Амплитуда  $\Phi_k$  пропорциональна амплитуде гармонического возбуждающего момента соответствующего порядка.

2. При наличии заглушающих сопротивлений эта амплитуда никогда не становится бесконечно большой.

3. При резонансе, т. е. когда  $(k\theta) = \theta_c$ , величина этой амплитуды становится равной:

$$\Phi_{кр} = \frac{M_k}{\xi \theta_c}, \quad (58)$$

т. е. она пропорциональна амплитуде возбуждающего момента  $M_k$  и обратно пропорциональна коэффициенту заглушения  $\xi$  и частоте  $\theta_c$  свободных крутильных колебаний системы.

4. Максимальное значение  $\Phi_k$  будет при значении  $(k\theta)$ , обращающем в минимум подкоренную функцию, т. е. при

$$(k\theta) = \theta_c \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi}{\theta_c I} \right)^2} \quad (59)$$

и будет равно

$$(\Phi_k)_{\max} = \frac{M_k}{\xi \theta_c \sqrt{1 - \left( \frac{\xi}{2\theta_c I} \right)^2}}, \quad (60)$$

При значениях величин  $\xi$ ,  $\theta_c$  и  $I$ , имеющих место в однорядных звездообразных авиационных моторах, величина  $(\Phi_k)_{\max}$  практически совпадает с величиной  $\Phi_{кр}$ , определяемой согласно равенству (58); соответствующее значение частоты  $(k\theta)$  практически совпадает с частотой  $\theta_c$ .

Любой из входящих в выражение (39) гармонических моментов вызывает крутильный резонанс системы, если только его круговая частота  $(k\theta)$  становится равной частоте  $\theta_c$  свободных колебаний системы.

Рассмотрим теперь принужденные колебания 2-массовой крутильной системы, представленной на фиг. 116. Положим, что на массу  $I_2$  системы действует периодически изменяющийся возбуждающий момент

$$M = \sum_{k=1}^{k=p} [\mathfrak{M}_k \cos(k\theta t) + \mathfrak{N}_k \sin(k\theta t)] = \sum_{k=1}^{k=p} [M_k \sin(k\theta t + \beta_k)], \quad (61)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M_k &= \sqrt{\mathfrak{M}_k^2 + \mathfrak{N}_k^2} \\ \text{и} \quad \text{tg } \beta_k &= \frac{\mathfrak{M}_k}{\mathfrak{N}_k} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Положим далее, что на эту же массу действует заглушающий крутильные колебания системы момент, изменяющийся по закону

$$M_{\xi} = \xi \dot{\varphi}_2, \quad (63)$$

где  $\xi$  — коэффициент заглушения, а  $\dot{\varphi}_2$  — угловая скорость массы  $I_2$  системы при колебаниях.

Обозначим через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  текущие угловые отклонения масс  $I_1$  и  $I_2$  от некоторой координатной плоскости, проходящей через ось системы  $A_1 B_1$ . Применяя принцип д'Аламбера или дифференциальные уравнения движе-

ния Лагранжа, мы получим следующую систему дифференциальных уравнений движения, определяющую принужденные крутильные колебания рассматриваемой системы, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \text{и} \quad I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + \xi \dot{\varphi}_2 &= \sum_{k=1}^{k=p} [\mathfrak{M}_k \cos(k\theta t) + \mathfrak{N}_k \sin(k\theta t)] \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Рассматривая установившееся движение системы, мы согласно теории интегрирования дифференциальных уравнений получим общее решение системы уравнений (64) в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{и} \quad \varphi_1 &= \sum_{k=1}^{k=p} [x_{1k} \cos(k\theta t) + y_{1k} \sin(k\theta t)] \\ \varphi_2 &= \sum_{k=1}^{k=p} [x_{2k} \cos(k\theta t) + y_{2k} \sin(k\theta t)], \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

причем  $x_{1k}$ ,  $y_{1k}$  и  $x_{2k}$ ,  $y_{2k}$  представляют амплитуды фазовых слагающих гармоник  $k$ -го порядка колебаний масс системы  $I_1$  и  $I_2$  при действии на нее возбуждающих крутящих моментов только этого порядка. Таким образом величины  $x_{1k}$ ,  $y_{1k}$ ,  $x_{2k}$  и  $y_{2k}$  определяются подстановкой

$$\left. \begin{aligned} \text{и} \quad \varphi_1 &= x_{1k} \cos(k\theta t) + y_{1k} \sin(k\theta t) \\ \varphi_2 &= x_{2k} \cos(k\theta t) + y_{2k} \sin(k\theta t) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

в систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \text{и} \quad I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + \xi \dot{\varphi}_2 &= \mathfrak{M}_k \cos(k\theta t) + \mathfrak{N}_k \sin(k\theta t). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Согласно равенствам (66), имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{и} \quad \ddot{\varphi}_1 &= -(k\theta)^2 x_{1k} \cos(k\theta t) - (k\theta)^2 y_{1k} \sin(k\theta t) \\ \ddot{\varphi}_2 &= -(k\theta)^2 x_{2k} \cos(k\theta t) - (k\theta)^2 y_{2k} \sin(k\theta t). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Подставляя равенства (66) и (68) в систему уравнений (67), получим

$$\begin{aligned} &-(k\theta)^2 I_1 x_{1k} \cos(k\theta t) - (k\theta)^2 I_1 y_{1k} \sin(k\theta t) + \\ &+ c_1 x_{1k} \cos(k\theta t) + c_1 y_{1k} \sin(k\theta t) - c_1 x_{2k} \cos(k\theta t) - \\ &- c_1 y_{2k} \sin(k\theta t) = 0 \\ \text{и} \quad &-(k\theta)^2 I_2 x_{2k} \cos(k\theta t) - (k\theta)^2 I_2 y_{2k} \sin(k\theta t) + \\ &+ c_1 x_{2k} \cos(k\theta t) + c_1 y_{2k} \sin(k\theta t) - c_1 x_{1k} \cos(k\theta t) - \\ &- c_1 y_{1k} \sin(k\theta t) - \xi(k\theta) x_{2k} \sin(k\theta t) + \\ &+ \xi(k\theta) y_{2k} \cos(k\theta t) - \mathfrak{M}_k \cos(k\theta t) - \mathfrak{N}_k \sin(k\theta t) = 0. \end{aligned}$$

Группируя в этих равенствах члены, содержащие  $\cos(k\theta t)$ , и члены, содержащие  $\sin(k\theta t)$ , и приравнявая в полученных группах выражения



при  $\cos(k\theta t)$  и  $\sin(k\theta t)$  нулю, получим следующую систему уравнений для определения  $x_{1k}$ ,  $y_{1k}$ ,  $x_{2k}$  и  $y_{2k}$ :

$$\left. \begin{aligned} [c_1 - (k\theta)^2 I_1] x_{1k} - c_1 x_{2k} &= 0, \\ [c_1 - (k\theta)^2 I_1] y_{1k} - c_1 y_{2k} &= 0, \\ [c_1 - (k\theta)^2 I_2] x_{2k} - c_1 x_{1k} + \xi(k\theta) y_{2k} &= \mathfrak{M}_k, \\ [c_1 - (k\theta)^2 I_2] y_{2k} - c_1 y_{1k} - \xi(k\theta) x_{2k} &= \mathfrak{N}_k. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

и

Решая эту систему уравнений и вводя при решении обозначения

$$\left. \begin{aligned} \xi(k\theta) &= b_k, \\ c_1 - (k\theta)^2 I_1 &= a_{1k}, \\ c_1 - (k\theta)^2 I_2 &= a_{2k}, \\ a_{2k} - \frac{c_1^2}{a_{1k}} &= d_k, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

и

получим

$$\left. \begin{aligned} x_{2k} &= \frac{d_k \mathfrak{M}_k - b_k \mathfrak{N}_k}{d_k^2 + b_k^2}, \\ y_{2k} &= \frac{d_k \mathfrak{N}_k + b_k \mathfrak{M}_k}{d_k^2 + b_k^2}, \\ x_{1k} &= \frac{c_1}{a_{1k}} x_{2k}, \\ y_{1k} &= \frac{c_1}{a_{1k}} y_{2k}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

и

Таким образом мы нашли общие выражения для амплитуд фазовых слагающих, входящих в выражения (65), и задача может считаться решенной. Исследуем теперь подробнее колебания нашей системы под действием возбуждающего момента  $k$ -го порядка. Амплитуда гармонического колебания  $k$ -го порядка массы  $I_2$  системы будет равна

$$\Phi_{2k} = \sqrt{x_{2k}^2 + y_{2k}^2} = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_k^2 + \mathfrak{N}_k^2}{d_k^2 + b_k^2}} = \frac{M_k}{\sqrt{d_k^2 + b_k^2}}. \quad (72)$$

Начальный фазовый угол  $\gamma_{2k}$  этого колебания определится из уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma_{2k} = \frac{x_{2k}}{y_{2k}} = \frac{d_k \mathfrak{M}_k - b_k \mathfrak{N}_k}{d_k \mathfrak{N}_k + b_k \mathfrak{M}_k}. \quad (73)$$

Уравнение движения массы  $I_2$  будет

$$(\varphi_2)_k = x_{2k} \cos(k\theta t) + y_{2k} \sin(k\theta t) = \Phi_{2k} \sin(k\theta t + \gamma_{2k}). \quad (74)$$

Амплитуда гармонического колебания  $k$ -го порядка массы  $I_1$  системы будет равна

$$\Phi_{1k} = \sqrt{x_{1k}^2 + y_{1k}^2} = \frac{c_1}{a_{1k}} \Phi_{2k}. \quad (75)$$

Начальный фазовый угол  $\gamma_{1k}$  этого колебания определится из уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma_{1k} = \frac{x_{1k}}{y_{1k}}. \quad (76)$$

Уравнение движения массы  $I_1$  будет

$$(\varphi_1)_k = x_{1k} \cos(k\theta t) + y_{1k} \sin(k\theta t) = \Phi_{1k} \sin(k\theta t + \gamma_{1k}). \quad (77)$$

Рассмотрим, как будет колебаться исследуемая система при резонансе, т. е. когда имеет место равенство

$$k\theta = \Theta_c, \quad (78)$$

где  $\Theta_c$  — частота свободных крутильных колебаний системы, равная

$$\Theta_c = \sqrt{c_1 \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right)}. \quad (79)$$

Имея в виду последнее равенство, коэффициенты  $b_k$ ,  $a_{1k}$ ,  $a_{2k}$  и  $d_k$  при наличии условия (78) становятся равными

$$\left. \begin{aligned} b_k &= \xi(k\theta) = \xi\Theta_c, \\ a_{1k} &= c_1 - (k\theta)^2 I_1 = c_1 - \Theta_c^2 I_1 = -c_1 \frac{I_1}{I_2}, \\ a_{2k} &= c_1 - (k\theta)^2 I_2 = c_1 - \Theta_c^2 I_2 = -c_1 \frac{I_2}{I_1}, \\ d_k &= a_{2k} - \frac{c_1^2}{a_{1k}} = -c_1 \frac{I_2}{I_1} + c_1 \frac{I_2}{I_1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

и

Амплитуда колебания массы  $I_2$  системы становится равной

$$\Phi_{2k} = \frac{M_k}{\sqrt{d_k^2 + b_k^2}} = \frac{M_k}{\xi\Theta_c}. \quad (81)$$

Амплитуда колебания массы  $I_1$  системы будет равна

$$\Phi_{1k} = \frac{c_1}{a_{1k}} \Phi_{2k} = -\frac{I_2}{I_1} \frac{M_k}{\xi\Theta_c}. \quad (82)$$

Из равенств (81) и (82) следует, что

$$\frac{\Phi_{1k}}{\Phi_{2k}} = -\frac{I_2}{I_1}, \quad (83)$$

т. е. при резонансных принужденных колебаниях исследуемой системы амплитуды колебаний ее масс обратно пропорциональны их полярным моментам инерции.

Определим теперь сдвиг фаз принужденных колебаний масс  $I_1$  и  $I_2$  системы при резонансном условии (78). При этом условии согласно равенству (71) имеем

$$x_{1k} = -\frac{I_2}{I_1} x_{2k} \quad \text{и} \quad y_{1k} = -\frac{I_2}{I_1} y_{2k}. \quad (84)$$

Эти соотношения показывают, что при резонансе  $x_{1k}$  противоположно по знаку  $x_{2k}$ , а  $y_{1k}$  противоположно  $y_{2k}$ . Далее, из равенств (71), (73) и (76) вытекает, что

$$\operatorname{tg} \gamma_{2k} = \operatorname{tg} \gamma_{1k}. \quad (85)$$

Отсюда, в силу вышеуказанной противоположности знаков, имеем

$$\gamma_{2k} - \gamma_{1k} = 180^\circ. \quad (86)$$

Таким образом при резонансных принужденных колебаниях исследуемой системы сдвиг фаз колебаний масс  $I_1$  и  $I_2$  будет равен  $180^\circ$ .

Соотношения (83) и (86) позволяют заключить, что при резонансе исследуемой системы, вызываемом гармоническим моментом  $k$ -го порядка,



форма принужденных крутильных колебаний системы совпадает с формой ее свободных крутильных колебаний. Это положение, будучи распространено с известным приближением на многомассовую крутильную систему, является весьма важным, как увидим дальше, для расчета принужденных крутильных колебаний таких систем при резонансе.

При условии (78) на основании равенств (73), (80) и (62) имеем

$$\operatorname{tg} \gamma_{2k} = -\frac{\mathfrak{M}_k}{\mathfrak{M}_k} = -\operatorname{ctg} \beta_k. \quad (87)$$

Отсюда

$$\gamma_{2k} = \beta_k - 90^\circ, \quad (88)$$

т. е. при принужденных резонансных колебаниях исследуемой системы колебание массы  $I_2$  системы отстает по фазе на  $90^\circ$  от приложенного к ней момента, возбуждающего эти колебания.

Заметим, наконец, что, согласно равенствам (81) и (82), амплитуды  $\Phi_{2k}$  и  $\Phi_{1k}$  резонансных колебаний масс системы, вызываемых возбуждающим гармоническим моментом  $k$ -го порядка, прямо пропорциональны амплитуде этого момента  $M_k$  и обратно пропорциональны коэффициенту заглушения  $\xi$  и частоте свободных колебаний системы  $\Theta_c$ . Как увидим дальше, аналогичная зависимость имеет место и в отношении амплитуд принужденных резонансных колебаний многомассовой крутильной системы.

### § 3. Принужденные крутильные колебания многомассовой системы

Рассмотрим теперь самый общий случай принужденных крутильных колебаний многомассовой системы при наличии заглушающих сопротивлений. Положим, что у нас имеется система из  $n$  масс (фиг. 172), совершающая крутильные колебания под действием возбуждающих моментов  $M_i$  [см. равенство (1)], и при наличии заглушающих колебания сопротивлений, определяемых согласно равенству (6). Дифференциальное уравнение движения  $i$ -й массы этой системы напишется в виде

$$I_i \ddot{\varphi}_i + \xi_i \dot{\varphi}_i + c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = M_i, \quad (89)$$

где, напомним,

$\varphi_i$  — отклонение в данный момент  $i$ -й массы системы от некоторой произвольно выбранной координатной плоскости, проходящей через ось системы и общей для всех масс системы, в радианах;

$\dot{\varphi}_i$  и  $\ddot{\varphi}_i$  — первая и вторая производные по времени от  $\varphi_i$ ;

$I_i$  — полярный момент инерции  $i$ -й массы относительно оси колебания, в  $\text{кг см сек}^2$ ;

$c_i$  — жесткость вала между  $i$ -й и  $(i+1)$ -й массами, в  $\text{кг см}$  и

$\xi_i$  — коэффициент заглушающего сопротивления для  $i$ -й массы в  $\text{кг см сек}$ .

Те же обозначения, но с другими значениями индексов, имеют место для других масс.

Если мы будем рассматривать установившееся движение системы под действием моментов  $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ , то каждая из масс будет совершать периодическое движение, и отклонения этих масс  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n$  явятся периодическими функциями времени  $t$ . Поэтому выражение для отклонения, например,  $i$ -й массы должно иметь вид

$$\varphi_i = \Phi_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} [\Phi_{ik} \sin(k\Theta t + \gamma_{ik})] = \Phi_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} [x_{ik} \cos(k\Theta t) + y_{ik} \sin(k\Theta t)], \quad (90)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ik} &= \sqrt{x_{ik}^2 + y_{ik}^2} \\ \operatorname{tg} \gamma_{ik} &= \frac{x_{ik}}{y_{ik}} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Из соотношения (90) видно, что для каждой из масс необходимо определить величину  $\Phi_{i0}$ ,  $p$  величин  $x_{ik}$  и  $p$  величин  $y_{ik}$ , т. е.  $(2p+1)$  неизвестных. Следовательно, чтобы определить движение всей системы, состоящей из  $n$  масс, надо определить  $(2p+1)n$  неизвестных. Для определения этих неизвестных служат  $n$  уравнений типа (89), каждое из которых, как увидим ниже, может быть разбито на  $(2p+1)$  уравнений. Таким образом в результате получим  $(2p+1)n$  уравнений с  $(2p+1)n$  неизвестными.

Подставляя в уравнение (89) решения (90), получим

$$\begin{aligned} & -I \sum_{k=1}^{k=p} [k^2 \Theta^2 x_{ik} \cos(k\Theta t)] - I_i \sum_{k=1}^{k=p} [k^2 \Theta^2 y_{ik} \sin(k\Theta t)] + \\ & + \xi_i \sum_{k=1}^{k=p} [k\Theta y_{ik} \cos(k\Theta t)] - \xi_i \sum_{k=1}^{k=p} [k\Theta x_{ik} \sin(k\Theta t)] + \\ & + c_i \sum_{k=1}^{k=p} [(x_{ik} - x_{i+1,k}) \cos(k\Theta t)] + c_i \sum_{k=1}^{k=p} [(y_{ik} - y_{i+1,k}) \sin(k\Theta t)] + \\ & + c_{i-1} \sum_{k=1}^{k=p} [(x_{ik} - x_{i-1,k}) \cos(k\Theta t)] + \\ & + c_{i-1} \sum_{k=1}^{k=p} [(y_{ik} - y_{i-1,k}) \sin(k\Theta t)] + \\ & + c_i (\Phi_{i0} - \Phi_{i+1,0}) + c_{i-1} (\Phi_{i0} - \Phi_{i-1,0}) = \\ & = \sum_{k=1}^{k=p} [\mathfrak{M}_{ik} \cos(k\Theta t)] + \sum_{k=1}^{k=p} [\mathfrak{N}_{ik} \sin(k\Theta t)] + M_{i0}. \end{aligned} \quad (92)$$

Преобразуем это тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k=p} \{ [-k^2 \Theta^2 I_i x_{ik} + k\Theta \xi_i y_{ik} + c_i (x_{ik} - x_{i+1,k}) + c_{i-1} (x_{ik} - x_{i-1,k})] \cos(k\Theta t) \} + \\ & + \sum_{k=1}^{k=p} \{ [-k^2 \Theta^2 I_i y_{ik} - k\Theta \xi_i x_{ik} + c_i (y_{ik} - y_{i+1,k}) + c_{i-1} (y_{ik} - y_{i-1,k})] \sin(k\Theta t) \} + \\ & + [c_i (\Phi_{i0} - \Phi_{i+1,0}) + c_{i-1} (\Phi_{i0} - \Phi_{i-1,0})] = \\ & = \sum_{k=1}^{k=p} [\mathfrak{M}_{ik} \cos(k\Theta t)] + \sum_{k=1}^{k=p} [\mathfrak{N}_{ik} \sin(k\Theta t)] + M_{i0}. \end{aligned} \quad (92')$$

Так как это равенство является тождеством, то

$$-k^2 \Theta^2 I_i x_{ik} + k\Theta \xi_i y_{ik} + c_i (x_{ik} - x_{i+1,k}) + c_{i-1} (x_{ik} - x_{i-1,k}) = \mathfrak{M}_{ik}, \quad (93)$$

$$-k^2 \Theta^2 I_i y_{ik} - k\Theta \xi_i x_{ik} + c_i (y_{ik} - y_{i+1,k}) + c_{i-1} (y_{ik} - y_{i-1,k}) = \mathfrak{N}_{ik} \quad (94)$$

и

$$c_i (\Phi_{i0} - \Phi_{i+1,0}) + c_{i-1} (\Phi_{i0} - \Phi_{i-1,0}) = M_{i0}. \quad (95)$$

В уравнениях (93) и (94)  $k$  меняется от 1 до  $p$ .

Таким образом из дифференциального уравнения движения  $i$ -й массы системы мы получаем  $2p$  уравнений типа (93) и (94) относительно неизвестных  $x_{ik}$  и  $y_{ik}$ .

Написав уравнения (93) и (94) для каждой из  $n$  масс системы ( $i$  меняется от 1 до  $n$ ), мы получим всего  $2pn$  уравнений с  $2pn$  неизвестными  $x_{ik}$  и  $y_{ik}$ , из которых эти неизвестные и определяются.



Написав для каждой из масс системы уравнение (95), мы получим  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными  $\Phi_{10}, \Phi_{20}, \dots, \Phi_{i0}, \dots, \Phi_{n0}$ , а именно

$$\left. \begin{aligned} -c_1(\Phi_{20} - \Phi_{10}) &= M_{10}, \\ -c_2(\Phi_{30} - \Phi_{20}) + c_1(\Phi_{20} - \Phi_{10}) &= M_{20}, \\ -c_3(\Phi_{40} - \Phi_{30}) + c_2(\Phi_{30} - \Phi_{20}) &= M_{30}, \\ \dots &\dots \\ -c_{n-1}(\Phi_{n0} - \Phi_{n-1,0}) + c_{n-2}(\Phi_{n-1,0} - \Phi_{n-2,0}) &= M_{n-1,0} \\ \text{и} \\ c_{n-1}(\Phi_{n0} - \Phi_{n-1,0}) &= M_{n,0}. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Из  $(n-1)$  первых уравнений системы (96) мы определим величины  $(\Phi_{20} - \Phi_{10}), (\Phi_{30} - \Phi_{20}), \dots, (\Phi_{n0} - \Phi_{n-1,0})$ .

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{20} - \Phi_{10} &= \Phi_{21}, \\ \Phi_{30} - \Phi_{20} &= \Phi_{32}, \\ \dots &\dots \\ \Phi_{n0} - \Phi_{n-1,0} &= \Phi_{n, n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{21} &= -\frac{M_{10}}{c_1}, \\ \Phi_{32} &= -\frac{M_{10} + M_{20}}{c_2}, \\ \Phi_{43} &= -\frac{M_{10} + M_{20} + M_{30}}{c_3}, \\ \dots &\dots \\ \Phi_{n, n-1} &= -\frac{M_{10} + M_{20} + \dots + M_{n-1,0}}{c_{n-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Последнее уравнение системы (96) дает условие

$$M_{10} + M_{20} + \dots + M_{n0} = \sum_{i=1}^{i=n} M_{i0} = 0. \quad (99)$$

Это условие в применении, скажем, к авиационному мотору констатирует факт, что средний момент полезного сопротивления на пропеллере равен сумме средних рабочих моментов на кривошипных шейках мотора.

Принимая, положим, для  $\Phi_{10}$  некоторое произвольное постоянное значение

$$\Phi_{10} = \Phi_{10},$$

что соответствует произвольному выбору вышеуказанной координатной плоскости, от которой ведется отсчет отклонений масс системы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n$ , из уравнений (97) получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{10} &= \Phi_{10}, \\ \Phi_{20} &= \Phi_{10} + \Phi_{21}, \\ \Phi_{30} &= \Phi_{10} + \Phi_{21} + \Phi_{32}, \\ \dots &\dots \\ \Phi_{n0} &= \Phi_{10} + \Phi_{21} + \Phi_{32} + \dots + \Phi_{n, n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Разобьем теперь систему  $2pn$  уравнений типа (93) и (94) на  $p$  систем уравнений, в которых каждая состоит из  $2n$  уравнений, подобранных таким

образом, что в них параметр  $k$  имеет одно определенное значение (одно из значений  $k = 1, 2, 3, \dots, p$ ). Легко видеть, что каждая из этих систем уравнений определит неизвестные  $x_{ik}$  и  $y_{ik}$  для всех масс ( $i$  изменяется от 1 до  $n$ ), но для определенного значения  $k$ . Если бы на нашу систему действовали только гармонические моменты  $m$ -го порядка, то легко видеть, что в этом случае мы пришли бы к одной из вышеуказанных систем уравнений относительно  $x_{im}$  и  $y_{im}$ , для которой  $k = m$ .

Таким образом мы пришли к заключению, что возможно исследовать в отдельности влияние гармонических моментов каждого порядка, причем результирующее влияние (результирующее отклонение масс  $\varphi_i$ ) получится простым сложением отдельных влияний [см. формулу (90)].

Перепишем теперь уравнения (93) и (94) в следующем виде

$$-c_{i-1}x_{i-1, k} + (-k^2\Theta^2 I_i + c_i + c_{i-1})x_{ik} - c_i x_{i+1, k} + k\Theta^2 y_{ik} = \mathfrak{M}_{ik} \quad (93')$$

и

$$-c_{i-1}y_{i-1, k} + (-k^2\Theta^2 I_i + c_i + c_{i-1})y_{ik} - c_i y_{i+1, k} - k\Theta^2 x_{ik} = \mathfrak{N}_{ik}. \quad (94')$$

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} -k^2\Theta^2 I_i + c_i + c_{i-1} &= a_{ik}, \\ k\Theta^2 &= b_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

будем иметь

$$-c_{i-1}x_{i-1, k} + a_{ik}x_{ik} + b_{ik}y_{ik} - c_i x_{i+1, k} = \mathfrak{M}_{ik} \quad (102)$$

и

$$-c_{i-1}y_{i-1, k} + a_{ik}y_{ik} - b_{ik}x_{ik} - c_i y_{i+1, k} = \mathfrak{N}_{ik}. \quad (103)$$

Отсюда, для определенного  $k$  мы получим следующую систему уравнений (для упрощения письма индексы  $k$  у величин  $x, y, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, a$  и  $b$  мы отбросим, имея, однако, в виду, что эти величины относятся к определенному  $k$ )

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + b_1y_1 - c_1x_2 &= \mathfrak{M}_1, \\ -b_1x_1 + a_1y_1 - c_1y_2 &= \mathfrak{N}_1, \\ -c_1x_1 + a_2x_2 + b_2y_2 - c_2x_3 &= \mathfrak{M}_2, \\ -c_1y_1 - b_2x_2 + a_2y_2 - c_2y_3 &= \mathfrak{N}_2, \\ \dots &\dots \\ -c_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n + b_ny_n &= \mathfrak{M}_n, \\ -c_{n-1}y_{n-1} - b_nx_n + a_ny_n &= \mathfrak{N}_n. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

и

Эта система состоит из  $2n$  уравнений и содержит  $2n$  неизвестных

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{и} \quad y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Эту систему проще всего решить путем последовательных подстановок. Начиная с первого из уравнений (104), мы получим для неизвестных

$$x_2, x_3, \dots, x_n \quad \text{и} \quad y_2, y_3, \dots, y_n$$

выражения через  $x_1$  и  $y_1$  типа:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= A_{xi}x_1 + B_{xi}y_1 + D_{xi}, \\ y_i &= A_{yi}x_1 + B_{yi}y_1 + D_{yi}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Подставляя эти выражения для  $x_{n-1}, x_n$  и  $y_{n-1}, y_n$  в последние два уравнения системы (104), мы получим систему двух уравнений с двумя неизвестными  $x_1$  и  $y_1$ , из которой и определяем  $x_1$  и  $y_1$ , а пользуясь соотношениями (105), находим все остальные неизвестные

$$x_2, \dots, x_n \quad \text{и} \quad y_2, \dots, y_n.$$



Для системы из многих масс получение решений в общем виде громоздко; указанным же путем решения получаются достаточно просто.

Мы не имеем возможности останавливаться здесь на ряде интересных свойств системы уравнений (104), позволяющих значительно сократить счетную работу при определении принужденных крутильных колебаний рассматриваемой системы. Интересующихся этим вопросом отсылаем к работе автора „Принужденные крутильные колебания“, опубликованной в „Трудах военной воздушной академии РККА им. Жуковского“, в сборнике № 8 за 1934 г.

В том случае, когда круговая частота ( $k\theta$ ) какого-либо из гармонических моментов, действующих на рассматриваемую систему, становится равной частоте  $\theta_c$  свободных крутильных колебаний этой системы, амплитуды гармоник этой частоты ( $k\theta$ ) колебаний масс системы значительно возрастают и создается так называемое резонансное колебание системы, соответствующее резонансу гармоники  $k$ -го порядка. При резонансных колебаниях системы, соответствующих некоторым порядкам резонирующих гармоник, могут резко возрасти и суммарные амплитуды колебаний масс системы, определяемых равенствами (90). В этих случаях имеют место так называемые критические резонансные колебания системы. Эти критические резонансные колебания могут оказаться опасными в отношении прочности системы. Поэтому основной целью расчета системы коленчатого вала авиационного мотора на крутильные колебания является определение надежности в отношении прочности этой системы при ее критических резонансных колебаниях.

Вся задача распадается на следующие части:

1. Определение частоты  $\theta_c$  свободных крутильных колебаний исследуемой системы.
2. Определение тех чисел оборотов мотора, при которых имеют место критические резонансные колебания системы.
3. Определение для этих чисел оборотов мотора законов колебаний или, что одно и то же, торсиограмм масс системы.
4. Определение по найденным торсиограммам максимальных напряжений и запасов прочности в крутильной системе.

С определением частоты  $\theta_c$  свободных крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов мы уже детально ознакомились раньше.

Определение тех чисел оборотов мотора, при которых имеют место резонансные колебания системы его коленчатого вала, производится исходя из основного условия резонанса

$$k\theta = \theta_c. \quad (106)$$

Напомним, что в этом уравнении  $k$  означает порядок резонирующей гармоники, отнесенный для 4-тактных моторов к двум оборотам мотора (для 2-тактных к одному обороту);  $\theta$  — круговая частота гармонического момента 1-го порядка, равная

$$\theta = \frac{\omega}{2} \text{ для 4-тактных моторов}$$

и

$$\theta = \omega \text{ для 2-тактных моторов,}$$

причем  $\omega = \frac{\pi}{30} n$  — представляет среднюю угловую скорость вращения коленчатого вала мотора.

Поэтому для 4-тактных моторов числа оборотов мотора, соответствующие резонансным крутильным колебаниям системы его коленчатого вала, определяются из уравнения

$$k\theta = k \frac{\omega}{2} = k \frac{\pi n}{60} = \theta_c = \frac{\pi n_c}{30}.$$

Откуда

$$n = \frac{n_c}{k}, \quad (107)$$

где  $n_c$  — число свободных крутильных колебаний системы в минуту.

Для 2-тактных моторов будем иметь

$$n = \frac{n_c}{k}. \quad (107')$$

В формулах (107) и (107')  $k$  принимает значения натурального ряда чисел 1, 2, 3, ... По этим формулам и определяют те значения  $k$  и соответствующие  $n$ , при которых имеют место резонансные крутильные колебания системы. Не все из этих резонансных колебаний являются критическими. Для определения тех порядков, которые являются критическими, приходится делать дополнительные исследования. Для этого при расчетах систем на крутильные колебания строят кривую изменения амплитуды колебания какой-либо массы системы (обыкновенно последней моторной массы), вызываемого действием на систему гармонических моментов только резонирующего порядка, в зависимости от чисел оборотов мотора, при которых соответствующие резонансы имеют место. Такая кривая называется расчетной резонансной кривой.

На фиг. 175 дана в виде примера расчетная резонансная кривая системы коленчатого вала одного 6-цилиндрового мотора. В этом случае в области эксплуатационного числа оборотов мотора имеют место критические резонансы гармоник 12, 9 и 7 порядков. Метод определения расчетным путем резонансных амплитуд будет дан в следующем параграфе.

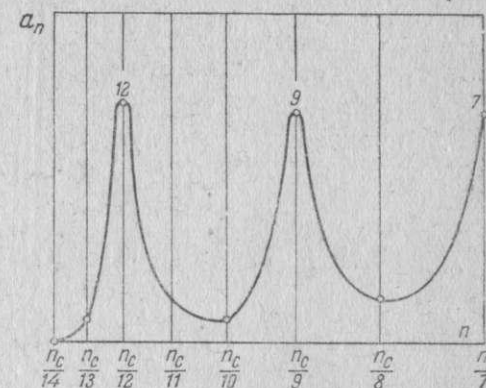
При экспериментальном исследовании на крутильные колебания строят путем соответствующей обработки заснятых торсиограмм экспериментальные резонансные кривые. В отличие от расчетных эти кривые представляют изменение полной амплитуды колебания (вызванной действием на систему всех возбуждающих гармонических моментов) какой-либо массы системы в зависимости от числа оборотов мотора. В одном из следующих разделов мы подробно остановимся на методе получения экспериментальной резонансной кривой.

В этом параграфе мы подробно рассмотрели в общем виде вопрос определения расчетным путем принужденных крутильных колебаний системы или, что одно и то же, торсиограмм масс этой системы. Перейдем теперь к изложению практических методов получения расчетным путем торсиограмм масс системы при резонансных числах оборотов мотора.

#### § 4. Получение расчетных торсиограмм для резонансных чисел оборотов мотора

Ряд экспериментально-расчетных исследований крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов, проведенных за границей и у нас, показал, что при определении торсиограмм расчетным путем можно ввести следующие упрощения:

1. При расчетах достаточно принимать во внимание первые 15 порядков гармоник моментов, возбуждающих крутильные колебания системы.



Фиг. 175. Расчетная резонансная кривая для системы коленчатого вала одного 6-цилиндрового мотора.



2. При определении крутильных колебаний системы, вызываемых нерезонирующими гармониками возбуждающих моментов, можно не принимать во внимание силы, заглушающие крутильные колебания системы.

3. При определении крутильных колебаний системы, вызываемых резонирующими гармониками возбуждающих моментов, можно принимать, что форма принужденных крутильных колебаний системы совпадает с соответствующей формой ее свободных крутильных колебаний.

4. При определении резонансных крутильных колебаний системы можно принимать, что работа резонирующих гармоник возбуждающих моментов максимальна и равна работе сил, заглушающих крутильные колебания системы.

После того как найдены критические резонансные числа оборотов мотора и получены для этих оборотов возбуждающие моменты в форме (1), определение расчетных торсиограмм для каждого резонансного числа оборотов мотора производится следующим образом.

1. Определяют принужденные крутильные колебания системы, вызываемые нерезонирующими гармониками возбуждающих моментов.

2. Определяют принужденные крутильные колебания системы, вызываемые резонирующей гармоникой возбуждающего момента.

3. Определяют расчетную торсиограмму каждой из масс системы. Эта торсиограмма получается суммированием принужденных колебаний этой массы, создаваемых резонирующей и нерезонирующими гармониками возбуждающего момента.

Перейдем к определению принужденных крутильных колебаний системы, вызываемых нерезонирующими гармониками возбуждающих моментов. Согласно сказанному в этом случае можно не принимать во внимание сил, заглушающих крутильные колебания системы, т. е. положить коэффициент заглушения  $\xi$  равным нулю. При  $\xi = 0$  коэффициент  $b_{ik}$  [см. равенства (101)] становится равным нулю, и система уравнений (104) распадается на две системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 - c_1 x_2 &= M_1, \\ -c_1 x_1 + a_2 x_2 - c_2 x_3 &= M_2, \\ \dots &\dots \\ -c_{i-1} x_{i-1} + a_i x_i - c_i x_{i+1} &= M_i, \\ \dots &\dots \\ -c_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n &= M_n \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} a_1 y_1 - c_1 y_2 &= M_1, \\ -c_1 y_1 + a_2 y_2 - c_2 y_3 &= M_2, \\ \dots &\dots \\ -c_{i-1} y_{i-1} + a_i y_i - c_i y_{i+1} &= M_i, \\ \dots &\dots \\ -c_{n-1} y_{n-1} + a_n y_n &= M_n \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

причем согласно равенствам (101)

$$a_i = -(k\theta)^2 I_i + c_i + c_{i-1}.$$

Системы уравнений (108) и (109) отличаются друг от друга только свободными членами. Определитель этих систем уравнений будет

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -c_1 & a_2 & -c_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -c_2 & a_3 & -c_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -c_3 & a_4 & -c_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -c_4 & a_5 & -c_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (110)$$

Решения системы уравнений (108) будут иметь вид

$$x_p = \frac{D_{px}}{D}, \quad (111)$$

причем  $D_{px}$  является определителем, который отличается от определителя  $D$  тем, что на место элементов  $p$ -го столбца поставлены свободные члены системы (108).

Решения системы уравнений (109) будут иметь аналогичный вид

$$y_p = \frac{D_{py}}{D}, \quad (112)$$

причем определитель  $D_{py}$  получается из определителя  $D$  заменой  $p$ -го столбца свободными членами системы (109). Если развернуть определители  $D_{px}$  и  $D_{py}$  по элементам их  $p$ -го столбца, то для  $x_p$  и  $y_p$  мы получим следующие выражения:

$$x_p = \frac{1}{D} [M_1 A_{1p} + M_2 A_{2p} + \dots + M_n A_{np}] = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n (M_i A_{ip}) \quad (113)$$

и

$$y_p = \frac{1}{D} [M_1 A_{1p} + M_2 A_{2p} + \dots + M_n A_{np}] = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n (M_i A_{ip}), \quad (114)$$

где  $A_{ip}$  является алгебраическим дополнением элемента, стоящего в определителях  $D_{px}$  и  $D_{py}$  или, что равносильно, в определителе  $D$  на пересечении  $p$ -го столбца и  $i$ -й строки.

Равенства (113) и (114) показывают, что определение величин  $x_p$  и  $y_p$  сводится к определению величин  $\frac{A_{ip}}{D}$ . Найдем физический смысл величин  $\frac{A_{ip}}{D}$ . Положим, что на нашу крутильную систему действует только один гармонический возбуждающий момент, приложенный к  $i$ -й массе системы и равный

$$M_i = \cos(k\theta t). \quad (115)$$

Этот момент будем в дальнейшем называть „единичным моментом, приложенным к  $i$ -й массе системы“. Нетрудно видеть, что согласно равенству (113) амплитуда колебания  $p$ -й массы системы будет в этом случае равна

$${}_1\Phi_{pi} = x_p = \frac{A_{ip}}{D}. \quad (116)$$

Таким образом величина  $\frac{A_{ip}}{D}$  представляет собой величину  ${}_1\Phi_{pi}$  амплитуды колебания  $p$ -й массы системы при действии на последнюю единичного момента, приложенного к  $i$ -й массе системы; это и указывается индексами у  ${}_1\Phi_{pi}$ . Принимая во внимание соотношение (116), мы получаем для величин  $x_p$  и  $y_p$  следующие выражения:

$$x_p = M_{11}\Phi_{p1} + M_{21}\Phi_{p2} + \dots + M_{n1}\Phi_{pn} = \sum_{i=1}^n (M_{i1}\Phi_{pi}) \quad (117)$$

и

$$y_p = M_{11}\Phi_{p1} + M_{21}\Phi_{p2} + \dots + M_{n1}\Phi_{pn} = \sum_{i=1}^n (M_{i1}\Phi_{pi}). \quad (118)$$

Мы свели теперь решение систем уравнений (108) и (109) к определению величин  ${}_1\Phi_{pi}$ . Определение величин  ${}_1\Phi_{pi}$  сильно упрощается благодаря ряду интересных свойств рассматриваемой крутильной системы, к доказательству которых мы и переходим.



1 свойство. Единичный момент, приложенный к  $i$ -й массе системы, вызовет колебания  $p$ -й массы системы с амплитудой  ${}_1\Phi_{pi}$ , равной амплитуде  ${}_1\Phi_{ip}$  колебания  $i$ -й массы системы при действии единичного момента на  $p$ -ю ее массу:

$${}_1\Phi_{pi} = {}_1\Phi_{ip}. \quad (119)$$

На основании равенства (116) доказательство равенства (119) равносильно доказательству равенства

$$A_{ip} = A_{pi}. \quad (120)$$

Для доказательства последнего равенства обратимся к определителю  $D$  [см. равенство (110)]. Этот определитель обладает тем замечательным свойством, что вид его не меняется от замены его горизонтальных строк столбцами. В силу этого минор определителя  $D$ , полученный вычеркиванием его  $i$ -й строки и  $p$ -го столбца, равен минору, полученному вычеркиванием его  $p$ -й строки и  $i$ -го столбца. Так как алгебраическое дополнение представляет соответствующий минор, взятый со знаком  $(-1)^{p+i}$ , то равенство (120), а следовательно, и равенство (119) можно считать доказанными.

Положим, что мы определили амплитуды колебаний масс системы при действии на нее: 1) единичного момента, приложенного к 1-й массе системы, и 2) единичного момента, приложенного к последней,  $n$ -й массе системы. Для определения этих амплитуд мы решаем обычным способом две нижеследующие системы уравнений [см. систему уравнений (108)]

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Phi_{11} - c_{11}\Phi_{21} &= 1, \\ -c_{11}\Phi_{11} + a_{21}\Phi_{21} - c_{21}\Phi_{31} &= 0, \\ \dots &\dots \\ -c_{i-1,1}\Phi_{i-1,1} + a_{i1}\Phi_{i1} - c_{i1}\Phi_{i+1,1} &= 0, \\ \dots &\dots \\ -c_{n-1,1}\Phi_{n-1,1} + a_{n1}\Phi_{n1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Phi_{1n} - c_{11}\Phi_{2n} &= 0, \\ -c_{11}\Phi_{1n} + a_{21}\Phi_{2n} - c_{21}\Phi_{3n} &= 0, \\ \dots &\dots \\ -c_{i-1,1}\Phi_{i-1,n} + a_{i1}\Phi_{in} - c_{i1}\Phi_{i+1,n} &= 0, \\ \dots &\dots \\ -c_{n-1,1}\Phi_{n-1,n} + a_{n1}\Phi_{nn} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Зная эти амплитуды, мы можем определить, не решая соответствующей системы уравнений, амплитуды колебаний масс системы при действии единичного момента на любую из ее масс. Положим, что единичный момент действует на  $i$ -ю массу системы. Система уравнений, определяющая амплитуды колебаний масс системы, будет в этом случае следующая:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\Phi_{1i} - c_{11}\Phi_{2i} &= 0, \\ -c_{11}\Phi_{1i} + a_{21}\Phi_{2i} - c_{21}\Phi_{3i} &= 0, \\ \dots &\dots \\ -c_{i-1,1}\Phi_{i-1,i} + a_{i1}\Phi_{ii} - c_{i1}\Phi_{i+1,i} &= 1, \\ \dots &\dots \\ -c_{n-2,1}\Phi_{n-2,i} + a_{n-1,1}\Phi_{n-1,i} - c_{n-1,1}\Phi_{ni} &= 0, \\ -c_{n-1,1}\Phi_{n-1,i} + a_{n1}\Phi_{ni} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Из характера систем уравнений (121), (122) и (123) следует, что

1. Для  $i > p > 1$

$$\frac{{}_1\Phi_{pi}}{{}_1\Phi_{ii}} = \frac{{}_1\Phi_{pn}}{{}_1\Phi_{in}}. \quad (124')$$

В самом деле, если из системы уравнений (123) определить последовательно через  ${}_1\Phi_{ii}$  амплитуды  ${}_1\Phi_{2i}$ ,  ${}_1\Phi_{3i}$ , ...,  ${}_1\Phi_{pi}$ , а из системы уравнений (122) определить последовательно через  ${}_1\Phi_{in}$  амплитуды  ${}_1\Phi_{2n}$ ,  ${}_1\Phi_{3n}$ , ...,  ${}_1\Phi_{pn}$ , то мы придем к следующим зависимостям:

$${}_1\Phi_{pi} = K {}_1\Phi_{ii}$$

и

$${}_1\Phi_{pn} = K {}_1\Phi_{in},$$

причем  $K$  в обоих случаях будут одинаковы, так как первые  $(p-1)$  уравнений обеих систем отличаются только обозначением неизвестных.

Из равенства (124') имеем

$${}_1\Phi_{pi} = \frac{{}_1\Phi_{pn}}{{}_1\Phi_{in}} {}_1\Phi_{ii} = \frac{{}_1\Phi_{pn}}{{}_1\Phi_{in}} {}_1\Phi_{ii}, \quad (124)$$

так как согласно 1 свойству  ${}_1\Phi_{ii} = {}_1\Phi_{ii}$ .

2. Для  $n > p > i$

$$\frac{{}_1\Phi_{pi}}{{}_1\Phi_{ni}} = \frac{{}_1\Phi_{pi}}{{}_1\Phi_{ni}}. \quad (125')$$

Доказательство этого соотношения аналогично доказательству соотношения (124'). Если из системы уравнений (123) определить последовательно через  ${}_1\Phi_{ni}$  амплитуды  ${}_1\Phi_{n-1,i}$ ,  ${}_1\Phi_{n-2,i}$ , ...,  ${}_1\Phi_{pi}$ , а из системы уравнений (121) определить последовательно через  ${}_1\Phi_{ni}$  амплитуды  ${}_1\Phi_{n-1,1}$ ,  ${}_1\Phi_{n-2,1}$ , ...,  ${}_1\Phi_{p1}$ , то мы придем к зависимостям

$${}_1\Phi_{pi} = L {}_1\Phi_{ni}$$

и

$${}_1\Phi_{p1} = L {}_1\Phi_{n1},$$

причем  $L$  в обоих случаях будут тоже одинаковы.

Из равенства (125') имеем

$${}_1\Phi_{pi} = \frac{{}_1\Phi_{p1}}{{}_1\Phi_{n1}} {}_1\Phi_{ni} = \frac{{}_1\Phi_{p1}}{{}_1\Phi_{n1}} {}_1\Phi_{ni}, \quad (125)$$

так как согласно 1 свойству  ${}_1\Phi_{ni} = {}_1\Phi_{ni}$ .

3. Для  $p = i$ , пользуясь любой из зависимостей (124) и (125), получим

$${}_1\Phi_{ii} = \frac{{}_1\Phi_{in}}{{}_1\Phi_{in}} {}_1\Phi_{ii}. \quad (126)$$

Таким образом при помощи соотношений (124), (125) и (126) мы действительно можем, не решая соответствующей системы уравнений (123), определить амплитуды колебаний масс системы при действии единичного момента на любую  $i$ -ю массу системы; для этого надо иметь только решения систем уравнений (121) и (122).

Зная амплитуды колебаний масс системы при действии на нее единичного момента частоты  $(k\theta)$ , приложенного к каждой из масс в отдельности, легко найти, пользуясь соотношениями (117) и (118), амплитуды фазовых слагающих  $x_p$  и  $y_p$  колебания  $p$ -й массы при действии на систему всех возбуждающих гармонических моментов  $k$ -го порядка. Изложенный метод решения систем уравнений (108) и (109) дает значительное сокращение счетной работы.

Дополнительное сокращение счетной работы при определении  $x_p$  и  $y_p$  можно получить, если для определения  ${}_1\Phi_{pi}$  исходить не из систем



уравнений (121) и (122), а из следующих

$$\left. \begin{aligned} a_1 E_{11} - c_1 E_{21} &= R_k, \\ -c_1 E_{11} + a_2 E_{21} - c_2 E_{31} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -c_{i-1} E_{i-1,1} + a_i E_{i1} - c_i E_{i+1,1} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -c_{n-1} E_{n-1,1} + a_n E_{n1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (121a)$$

и

$$\left. \begin{aligned} a_1 E_{1n} - c_1 E_{2n} &= 0, \\ -c_1 E_{1n} + a_2 E_{2n} - c_2 E_{3n} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -c_{i-1} E_{i-1,n} + a_i E_{in} - c_i E_{i+1,n} &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -c_{n-1} E_{n-1,n} + a_n E_{nn} &= R_k, \end{aligned} \right\} \quad (122a)$$

т. е. если принять, что на первую и последнюю массы системы действуют возбуждающие моменты  $k$ -го порядка с амплитудой, равной не единице, а величине  $R_k$ . Так как амплитуды колебаний масс системы пропорциональны амплитуде возбуждающего момента, то

$$\left. \begin{aligned} {}_1\Phi_{11} &= \frac{1}{R_k} E_{11}, \quad {}_1\Phi_{21} = \frac{1}{R_k} E_{21}, \dots, \quad {}_1\Phi_{n1} = \frac{1}{R_k} E_{n1} \\ {}_1\Phi_{1n} &= \frac{1}{R_k} E_{1n}, \quad {}_1\Phi_{2n} = \frac{1}{R_k} E_{2n}, \dots, \quad {}_1\Phi_{nn} = \frac{1}{R_k} E_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Согласно доказанному раньше

$$\begin{aligned} {}_1\Phi_{n1} &= {}_1\Phi_{1n}, \\ E_{n1} &= E_{1n}. \end{aligned} \quad (b)$$

а поэтому

$$\begin{aligned} \text{Если подобрать величину момента } R_k \text{ так, чтобы} \\ E_{n1} = E_{1n} = 1, \end{aligned} \quad (c)$$

то, принимая во внимание равенства (a), (124), (125), (126) и (c), получим  
1. Для  $i > p > 1$

$${}_1\Phi_{pi} = \frac{{}_1\Phi_{pn}}{{}_1\Phi_{1n}} {}_1\Phi_{i1} = \frac{\frac{1}{R_k} E_{pn}}{\frac{1}{R_k} E_{1n}} \frac{1}{R_k} E_{i1} = \frac{1}{R_k} E_{pn} E_{i1} = \frac{1}{R_k} E_{pi}. \quad (124a)$$

2. Для  $n > p > i$

$${}_1\Phi_{pi} = \frac{{}_1\Phi_{p1}}{{}_1\Phi_{n1}} {}_1\Phi_{in} = \frac{\frac{1}{R_k} E_{p1}}{\frac{1}{R_k} E_{n1}} \frac{1}{R_k} E_{in} = \frac{1}{R_k} E_{p1} E_{in} = \frac{1}{R_k} E_{pi}. \quad (125a)$$

3. Для  $p = i$

$${}_1\Phi_{ii} = \frac{{}_1\Phi_{in}}{{}_1\Phi_{1n}} {}_1\Phi_{i1} = \frac{1}{R_k} E_{in} E_{i1} = \frac{1}{R_k} E_{ii}. \quad (126a)$$

Величина момента  $R_k$ , удовлетворяющая условиям (c), и соответствующие этому моменту амплитуды колебаний масс системы при действии его на первую и последнюю массы системы определяются очень просто. Принимая в системе уравнений (121a)  $E_{n1} = 1$  и решая эту систему, начиная с последнего уравнения, мы определим последовательно амплитуды колебаний масс системы при действии момента  $R_k$  на ее первую массу; из первого уравнения системы (121a) мы найдем искомое значение  $R_k$ . Аналогичным образом, принимая в системе уравнений (122a)  $E_{1n} = 1$  и решая

эту систему, начиная с первого уравнения, мы определим последовательно амплитуды колебаний масс системы при действии момента  $R_k$  на ее последнюю массу; из последнего уравнения системы (122a) мы должны получить то же значение момента  $R_k$ , что и из системы (121a); совпадение обоих значений момента  $R_k$  должно служить показателем правильности проделанных вычислений.

Принимая во внимание равенства (124a) и (125a), мы получим для  $x_p$  и  $y_p$  [см. равенства (117) и (118)] следующие выражения:

$$x_p = \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{i=n} (M_i E_{pi}) \quad (117a)$$

и

$$y_p = \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{i=n} (M_i E_{pi}). \quad (118a)$$

Сокращение счетной работы и состоит именно в том, что вычисление величин  $E_{pi}$  и  $R_k$  представляет менее трудоемкую работу, чем вычисление величин  ${}_1\Phi_{pi}$ .

В табл. 33 и 34 мы даем в виде примера определение величин  $E_{pi}$  и  $R_k$  для гармоник 7-го порядка ( $k=7$ ) системы коленчатого вала авиационного мотора, крутильная схема которой дана на фиг. 125,а, при числе оборотов коленчатого вала  $n=1230$  в минуту. Табл. 33 дана в форме, предложенной проф. М. Толле. В этой таблице  $e_i$  обозначает упругий момент участка вала между  $i$ -й и  $(i+1)$ -й массами вала, соответствующий колебаниям системы, когда момент  $R_k$  приложен к последней массе системы; ( $e_i$ ) обозначает то же, для случая когда момент  $R_k$  приложен к первой массе системы; через  $c_i$  обозначена крутильная жесткость участка вала между  $i$ -й и  $(i+1)$ -й массами вала. Табл. 33 составлена для производства подсчетов по следующим рекуррентным формулам:

$$e_i = e_{i-1} - I_i \Theta^2 \alpha_i; \quad \alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{e_i}{c_i}$$

и

$$\alpha_{i+1} = (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \alpha_i.$$

Таблица 33

Определение амплитуд колебания масс системы, когда момент  $R_k$  приложен в отдельности к ее первой и к ее последней массам

$$(k\Theta) = 7 \frac{\omega}{2} = 7 \frac{\pi n}{60} = 7 \frac{\pi 1230}{60} = 450,5; \quad (k\Theta)^2 = 202\,950$$

( $e_i$ )	№ участ-ка	$e_i$	$-(k\Theta)^2 I_i / c_i$	$E_{in}$	№ масс	$E_{i1}$
$R_k = -8\,887\,000$						
-7762 100		-24 151 000	$-119 (k\Theta)^2$	1,0000	1	0,3214
-1 125 200	1	-24 151 000	$4,077 \cdot 10^6$	-5,9237		-0,2760
-133 370		1 099 000	$-1,1 (k\Theta)^2$	-4,9237	2	0,5974
-991 830	2	-23 052 000	$7,77 \cdot 10^6$	-2,9668		-0,1276
-161 850		1 762 000	$-1,1 (k\Theta)^2$	-7,8905	3	0,7250
-829 980	3	-21 290 000	$7,77 \cdot 10^6$	-2,7400		-0,1068
-185 690		2 373 000	$-1,1 (k\Theta)^2$	-10,6305	4	0,8318
-644 290	4	-18 917 000	$7,77 \cdot 10^6$	-2,4346		-0,0829
-204 200		2 917 000	$-1,1 (k\Theta)^2$	-13,0651	5	0,9147
-440 090	5	-16 000 000	$7,77 \cdot 10^6$	-2,0592		-0,0566
-216 840		3 376 000	$-1,1 (k\Theta)^2$	-15,1243	6	0,9713
-223 250	6	-12 624 000	$7,77 \cdot 10^6$	-1,6247		-0,0287
-223 250		3 739 000	$-1,1 (k\Theta)^2$	-16,7490	7	1,0000
( $e_i$ )	$R_k =$	-8 885 000				$E_{i1}$

Примечание. Расхождение в величинах  $R_k = -8\,887\,000$  и  $R_k = -8\,885\,000$  объясняется принятой при подсчетах точностью.



Эти рекуррентные формулы представляют по существу те же зависимости, которые были нами получены при определении частот свободных крутильных колебаний по методу проф. М. Толле [см. глава I, § 2, равенства (55)].

Таблица 34

Величины  $E_{pi}$  для определения вынужденных крутильных колебаний системы при действии на ее моторные массы возбуждающих гармонических моментов 7-го порядка

$$R_7 = -8,886 \cdot 10^6$$

№ масс	№ массы, к которой приложен момент $R_7$						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0,3214	0,5974	0,7250	0,8318	0,9147	0,9713	1,000
2	0,5974	-2,942	-3,570	-4,096	-4,504	-4,783	-4,924
3	0,7250	-3,570	-5,721	-6,564	-7,218	-7,665	-7,891
4	0,8318	-4,096	-6,564	-8,843	-9,724	-10,326	-10,631
5	0,9147	-4,504	-7,218	-9,724	-11,951	-12,690	-13,065
6	0,9713	-4,783	-7,665	-10,326	-12,690	-14,690	-15,124
7	1,000	-4,924	-7,891	-10,631	-13,065	-15,124	-16,749

Примечания: 1. Таблица дает значение величины  $E_{pi}$ , которые определяются согласно зависимостям (124а), (125а) и (126а):

$$1. \text{ Для } i > p > 1, \quad E_{pi} = E_{pn} \cdot E_{ii},$$

$$2. \text{ Для } n > p > i, \quad E_{pi} = E_{pi} \cdot E_{in},$$

$$3. \text{ Для } p = i \quad E_{ii} = E_{in} \cdot E_{ii}.$$

2. Для удобства дальнейших подсчетов знаки величин  $E_{pi}$ , данных в этой таблице, можно заменить на обратные, изменив одновременно и знак у  $R_7$ ; как видно из уравнений (117а) и (118а), это изменение знаков не влияет на величины  $x_p$  и  $y_p$ .

Определив амплитуды фазовых слагающих  $x_p$  и  $y_p$  колебаний  $p$ -й массы системы при действии на последнюю в отдельности всех нерезонирующих возбуждающих гармонических моментов из числа первых 15 порядков, суммарное колебание  $p$ -й массы при действии на систему всех этих гармонических моментов находим согласно равенству (90) (полагая  $i = p$ ), отбрасывая при суммировании малые по величине гармоники

$$\varphi_p = \sum_k [x_{pk} \cos(k\theta t) + y_{pk} \sin(k\theta t)]. \quad (127)$$

Для построения расчетной торсиограммы этому выражению придают другой вид, вводя вместо аргумента  $t$  угол  $\alpha$  поворота коленчатого вала мотора. Так как

$$\alpha = \omega t, \quad (128)$$

то для 4-тактных моторов

$$\varphi_p = \sum_k \left[ x_{pk} \cos\left(\frac{k}{2} \alpha\right) + y_{pk} \sin\left(\frac{k}{2} \alpha\right) \right] \quad (129)$$

и для 2-тактных моторов

$$\varphi_p = \sum_k [x_{pk} \cos(kx) + y_{pk} \sin(kx)]. \quad (129')$$

При подсчетах величин  $\varphi_p$  по уравнениям (129) и (129') необходимо иметь значения тригонометрических функций  $\cos\left(k \frac{\alpha}{2}\right)$ ,  $\sin\left(k \frac{\alpha}{2}\right)$  и  $\cos(kx)$ ,  $\sin(kx)$ . Для облегчения подсчетов в конце книги (приложение III) даны две таблицы значений функций  $\cos(nx)$  и  $\sin(nx)$ ; эти таблицы дают значения указанных функций для  $n$ , изменяющегося в пределах от  $n = 1$  до  $n = 24$ , и для значений углов  $\alpha$ , изменяющихся через  $5^\circ$ .

Перейдем теперь к определению колебаний масс системы, вызываемых резонирующими гармоническими моментами. Положим, что на массы системы действуют возбуждающие гармонические моменты вида

$$M_i = M_i \sin(k\theta t + \beta_i), \quad (130)$$

где индекс  $i$  обозначает массу, к которой этот момент приложен. Так как этот момент является резонирующим, то

$$k\theta = \theta_c \quad (131)$$

и поэтому

$$M_i = M_i \sin(\theta_c t + \beta_i). \quad (132)$$

Кроме моментов  $M_i$  на массы системы действуют моменты, заглушающие резонансные крутильные колебания системы, равные

$$M_{\xi} = \xi \dot{\varphi}_i, \quad (133)$$

где  $\xi$  — коэффициент заглушения, принимаемый для всех масс одинаковым, и  $\varphi_i$  — угловая скорость крутильных колебаний  $i$ -й массы системы.

Согласно сказанному раньше, при резонансных колебаниях форма принужденных колебаний системы может быть принята одинаковой с формой ее свободных колебаний. Поэтому в этом случае массы системы колеблются частью в одной фазе, частью со сдвигом фаз на  $180^\circ$ ; сдвиг колебаний некоторых масс по фазе на  $180^\circ$  будем учитывать знаком минус для амплитуд соответствующих масс. Принимая это во внимание, для колебания  $i$ -й массы системы будем иметь следующее выражение:

$$\varphi_i = \Phi_i \sin(\theta_c t + \gamma), \quad (134)$$

причем начальный фазовый угол  $\gamma$  будет одинаков для всех масс системы.

На основании равенства (134), выражение (133) для момента  $M_{\xi}$  примет вид

$$M_{\xi} = \xi \theta_c \Phi_i \cos(\theta_c t + \gamma). \quad (135)$$

Найдем теперь выражения для работ  $R$  — моментов  $M_i$  и  $R_{\xi}$  — моментов  $M_{\xi}$  за один цикл колебаний.

Имеем

$$\begin{aligned} R &= \sum_i \int_0^T M_i \dot{\varphi}_i dt = \sum_i \int_0^T M_i \Phi_i \theta_c \sin(\theta_c t + \beta_i) \cos(\theta_c t + \gamma) dt = \\ &= \sum_i \int_0^T M_i \Phi_i \left[ \frac{1}{2} \sin(\beta_i - \gamma) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_c t + \beta_i + \gamma) \right] d(\theta_c t) = \\ &= \sum_i \int_0^{2\pi} M_i \Phi_i \left[ \frac{1}{2} \sin(\beta_i - \gamma) + \frac{1}{2} \sin(2x + \beta_i + \gamma) \right] dx = \\ &= \pi \sum_i [M_i \Phi_i \sin(\beta_i - \gamma)] \end{aligned}$$

или

$$R = \pi \sum_i [M_i \Phi_i \sin(\beta_i - \gamma)], \quad (136)$$

причем суммирование распространяется на все массы, к которым приложены моменты  $M_i$ , и

$$\begin{aligned} R_{\xi} &= \sum_i \int_0^T M_{\xi} \dot{\varphi}_i dt = \sum_i \int_0^T \xi \theta_c^2 \Phi_i^2 \cos^2(\theta_c t + \gamma) dt = \\ &= \sum_i \int_0^{2\pi} \xi \theta_c \Phi_i^2 \cos^2(x + \gamma) dx = \pi \xi \theta_c \sum_i \Phi_i^2, \end{aligned}$$

или

$$R_{\xi} = \pi \xi \theta_c \sum_i \Phi_i^2, \quad (137)$$

причем суммирование распространяется на все массы системы, на которые действуют моменты  $M_k$ .

Так как согласно сказанному выше при резонансных крутильных колебаниях системы работа  $R$  равна работе  $R_k$ , то

$$\sum [M_i \Phi_i \sin(\beta_i - \gamma)] = \xi \theta_c \sum \Phi_i^2. \quad (138)$$

Это соотношение позволяет определить амплитуду колебания  $\Phi_p$  любой массы системы при резонансных колебаниях. Для этого вынесем в левой части равенства (138) за знак суммы  $\Phi_p$ , а в правой части  $\Phi_p^2$ ; будем иметь

$$\Phi_p \sum [M_i \alpha_i \sin(\beta_i - \gamma)] = \xi \theta_c \Phi_p^2 \sum \alpha_i^2,$$

откуда

$$\Phi_p = \frac{\sum [M_i \alpha_i \sin(\beta_i - \gamma)]}{\xi \theta_c \sum \alpha_i^2}, \quad (139)$$

причем

$$\alpha_i = \frac{\Phi_i}{\Phi_p}. \quad (140)$$

Последнее представляет отношение амплитуды колебания  $i$ -й массы системы к амплитуде колебания ее  $p$ -й массы; так как при резонансных колебаниях системы форма принужденных крутильных колебаний совпадает с формой ее свободных колебаний, то  $\alpha_i$  берется по этой последней форме. В авиационных моторах амплитуды возбуждающих моментов  $M_i$  обычно одинаковы для всех шатунных шеек коленчатого вала; поэтому в равенстве (139) величину  $M_i$  можно вынести за знак суммы и написать это равенство в следующем виде:

$$\Phi_p = \frac{M_k \sum [\alpha_i \sin(\beta_{ik} - \gamma_k)]}{\xi \theta_c \sum \alpha_i^2} = \frac{M_k J_k}{\xi \theta_c \sum \alpha_i^2}. \quad (141)$$

Мы ввели в это выражение индексы  $k$  для того, чтобы подчеркнуть зависимость соответствующих величин от порядка  $k$  резонирующей гармоники. Через  $J_k$  обозначена сумма

$$J_k = \sum [\alpha_i \sin(\beta_{ik} - \gamma_k)]. \quad (142)$$

Входящие в эту сумму углы  $\beta_{ik}$  представляют начальные фазовые углы гармонических возбуждающих моментов  $k$ -го порядка, приложенных к соответствующим массам системы; эти углы являются известными из гармонического анализа суммарных тангенциальных сил, действующих на шатунные шейки коленчатого вала рассчитываемой системы. Угол  $\gamma_k$  является начальным фазовым углом колебания масс системы при резонансе гармоник  $k$ -го порядка; величина его пока нам неизвестна. Для ее определения мы воспользуемся положением, что при резонансных колебаниях системы фазовое расположение возбуждающих моментов и колебания системы таковы, что работа  $R$  [см. равенство (136)] становится максимальной. Как видно из этого равенства, максимальное значение  $R$  будет иметь место при максимальном значении выражения

$$\begin{aligned} \sum [M_i \Phi_i \sin(\beta_i - \gamma)] &= M_k \Phi_p \sum [\alpha_i \sin(\beta_{ik} - \gamma_k)] = \\ &= M_k \frac{M_k J_k}{\xi \theta_c \sum \alpha_i^2} J_k = \frac{M_k^2 J_k^2}{\xi \theta_c \sum \alpha_i^2}, \end{aligned} \quad (143)$$

т. е. тогда, когда  $J_k$  будет максимально. Это положение позволяет найти как величину начальной фазы  $\gamma_k$ , так и соответствующую величину  $J_k$ . Если обозначить через  $\alpha_{ik}$  вектор, равный по величине  $\alpha_i$  и совпадающий

по фазе с гармоническим моментом  $k$ -го порядка, приложенным к  $i$ -й массе системы, то

$$J_k = \sum [\alpha_i \sin(\beta_{ik} - \gamma_k)] = [\sum \alpha_{ik}] \sin(\beta_k - \gamma_k), \quad (144)$$

где  $\sum \alpha_{ik}$  представляет геометрическую сумму векторов  $\alpha_{ik}$ , а  $\beta_k$  — начальный фазовый угол вектора  $\sum \alpha_{ik}$ .

Для того чтобы  $J_k$  было максимально, надо, чтобы

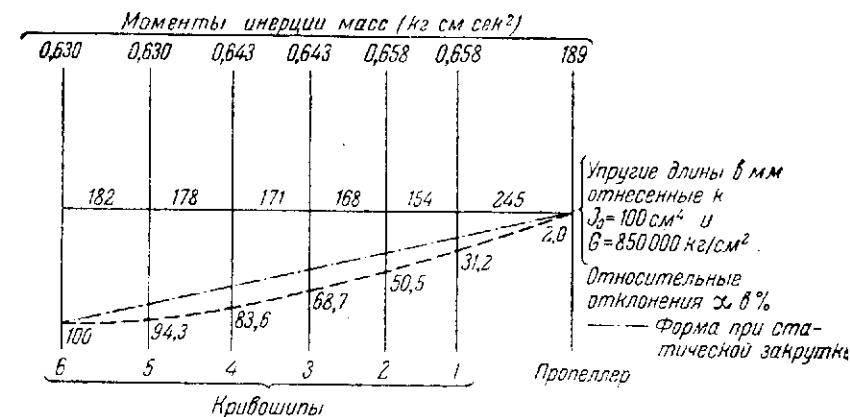
$$\sin(\beta_k - \gamma_k) = 1,$$

т. е. чтобы

$$\gamma_k = \beta_k - 90^\circ. \quad (145)$$

Величина  $J_k$  станет при этом равной

$$J_k = \sum \alpha_{ik}. \quad (146)$$



Фиг. 176: Форма свободных крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора BMW-IV.

Таким образом для величины  $\Phi_p$  амплитуды колебания  $p$ -й массы системы при резонансе мы получим окончательно следующее выражение [см. равенство (141)]:

$$\Phi_p = \frac{M_k \sum \alpha_{ik}}{\xi \theta_c \sum \alpha_i^2}. \quad (147)$$

Равенство (145) показывает, что принужденные крутильные колебания масс системы при резонансе отстают по фазе на  $90^\circ$  от вектора  $\sum \alpha_{ik}$ .

Уравнение колебания  $p$ -й массы системы при резонансных колебаниях будет:

для 4-тактных моторов

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \Phi_p \sin(\theta_c t + \beta_k - \frac{\pi}{2}) = -\Phi_p \cos(\theta_c t + \beta_k) = \\ &= -\Phi_p \cos\left(\frac{k}{2} \alpha + \beta_k\right) \end{aligned} \quad (148)$$

и для 2-тактных моторов

$$\varphi_p = -\Phi_p \cos(k \alpha + \beta_k). \quad (148')$$

В виде примера приводим определение величины  $J_k$  для системы коленчатого вала 6-цилиндрового авиационного мотора BMW-IV, имеющего порядок вспышек 1—5—3—6—2—4. На фиг. 176 дана форма свободных крутильных колебаний этой системы. Из этой формы получаем для величин  $\alpha_i$  следующие значения:

$$\alpha_1 = 0,312; \quad \alpha_2 = 0,505; \quad \alpha_3 = 0,687; \quad \alpha_4 = 0,836; \quad \alpha_5 = 0,943; \quad \alpha_6 = 1.$$



На фиг. 177 даны векторные диаграммы возбуждающих гармонических моментов различных порядков, действующих на кривошип вала. Эти диаграммы даны применительно к тем однорядным, 6-цилиндровым и V-образным 12-цилиндровым моторам, порядок вспышек в цилиндрах рядов которых 1-5-3-6-2-4.

Для определения величины и начального фазового угла вектора  $L_k = \sum \bar{a}_{ik}$ , соответствующего возбуждающим гармоническим моментам  $k$ -го порядка, находим (фиг. 177) сумму  $-\sum_y \bar{a}_{ik}$  проекций всех векторов  $\bar{a}_{ik}$  на ось  $y$ -ов и сумму  $-\sum_x \bar{a}_{ik}$  проекций всех векторов  $\bar{a}_{ik}$  на ось  $x$ -ов. Величина вектора  $L_k$  будет равна

$$L_k = \sqrt{(\sum_x \bar{a}_{ik})^2 + (\sum_y \bar{a}_{ik})^2}. \quad (149)$$

Угол сдвига фаз вектора  $\sum \bar{a}_{ik}$  и вектора гармонического момента  $k$ -го порядка, действующего на 1-й кривошип, определится из уравнения

$$\operatorname{tg} \epsilon_k = \frac{\sum_x \bar{a}_{ik}}{\sum_y \bar{a}_{ik}}. \quad (150)$$

В зависимости от знаков  $\sum_x \bar{a}_{ik}$  и  $\sum_y \bar{a}_{ik}$  угол  $\epsilon_k$  может меняться в пределах от 0 до 360°. Эта зависимость показана в табл. 35.

Таблица 35

К определению величины угла  $\epsilon_k$  в зависимости от знаков величин  $\sum_x \bar{a}_{ik}$  и  $\sum_y \bar{a}_{ik}$

$\sum_x \bar{a}_{ik}$	$\sum_y \bar{a}_{ik}$	$\epsilon_k$
+	+	0°—90°
+	—	90°—180°
—	—	180°—270°
—	+	270°—360°

Если начальный фазовый угол вектора гармонического момента  $k$ -го порядка, действующего на 1-й кривошип, равен  $\beta_{1k}$ , то начальный фазовый угол  $\beta_k$  вектора  $\sum \bar{a}_{ik}$  будет равен

$$\beta_k = \beta_{1k} + \epsilon_k. \quad (151)$$

Для гармонических моментов 1, 7, 13, ... порядков вышеупомянутого мотора BMW-IV имеем:

$$\begin{aligned} \sum_x \bar{a}_{ik} &= [(a_4 + a_2) - (a_3 + a_6)] \cos 30^\circ = \\ &= [(0,836 + 0,505) - (0,687 + 0,943)] 0,866 = -0,25 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_y \bar{a}_{ik} &= (a_1 - a_6) + [(a_4 + a_5) - (a_2 + a_3)] \cos 60^\circ = \\ &= (0,312 - 1) + [(0,836 + 0,943) - (0,505 + 0,687)] 0,5 = -0,394. \end{aligned}$$

Поэтому

$$L_k = \sqrt{0,25^2 + 0,394^2} = 0,467,$$

$$\operatorname{tg} \epsilon_k = \frac{-0,25}{-0,394} = 0,635 \quad \text{и} \quad \epsilon_k = 180^\circ + 32^\circ 25' = 212^\circ 25'.$$

Для гармонических моментов других порядков определение значений  $L_k$  и  $\epsilon_k$  производится аналогичным образом.

Заметим, что определение колебания  $p$ -й массы системы при действии на последнюю нерезонирующих возбуждающих моментов  $k$ -го порядка тоже может быть выполнено в векторной форме. Согласно равенству (90), имеем

$$\varphi_p = x_p \cos(k\theta t) + y_p \sin(k\theta t). \quad (152)$$

Подставляя в это уравнение найденные нами выше выражения для  $x_p$  и  $y_p$  [равенства (117а) и (118а)], получим

$$\varphi_p = \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{i=n} \{E_{pi} [\mathfrak{M}_i \cos(k\theta t) + \mathfrak{N}_i \sin(k\theta t)]\}. \quad (153)$$

Принимая во внимание равенства (1), найдем

$$\varphi_p = \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{i=n} [E_{pi} M_{ik} \sin(k\theta t + \beta_{ik})], \quad (154)$$

где, напомним,  $M_{ik}$  является амплитудой возбуждающего момента  $k$ -го порядка, действующего на  $i$ -ю массу системы, а  $\beta_{ik}$  — начальным фазовым углом этого момента.

Так как в авиационных двигателях величины  $M_{ik}$  обычно одинаковы для всех кривошипов, то, вынося в уравнении (154) величину

$$M_{ik} = M_k$$

за знак  $\Sigma$ , получим

$$\varphi_p = \frac{M_k}{R_k} \sum_i [E_{pi} \sin(k\theta t + \beta_{ik})], \quad (155)$$

причем суммирование в уравнении (155) распространяется на все массы системы, подверженные действию возбуждающих моментов  $k$ -го порядка.

Уравнение (155) в векторной форме будет иметь следующий вид:

$$\varphi_p = \frac{M_k}{R_k} \left[ \sum_i \bar{E}_{pi} \right], \quad (156)$$

причем скалярная величина вектора  $\bar{E}_{pi}$  равна  $E_{pi}$ , а его начальный фазовый угол равен  $\beta_{ik}$ .

Если обозначить скалярную величину результирующего вектора суммы векторов  $\sum_i \bar{E}_{pi}$  через  $S_{pk}$ , а его начальный фазовый угол через  $\gamma_{pk}$ , то

$$\varphi_p = \frac{M_k}{R_k} S_{pk} \sin(k\theta t + \gamma_{pk}). \quad (157)$$

Величина  $S_{pk}$  находится при помощи векторной диаграммы аналогично тому, как это делалось нами при определении  $[\sum \bar{a}_{ik}]$ . Фазовый угол  $\gamma_{pk}$  определяется на основании равенства

$$\gamma_{pk} = \beta_{1k} + \epsilon_k, \quad (158)$$

где  $\beta_{1k}$  — начальный фазовый угол гармонического возбуждающего момента  $k$ -го порядка, действующего на 1-й кривошип мотора, а  $\epsilon_k$  — сдвиг фаз между этим моментом и вектором  $\sum_i \bar{E}_{pi}$ . Угол  $\epsilon_k$  определяется из соответ-

ствующей векторной диаграммы, аналогично тому, как это делалось нами при определении резонансных колебаний  $p$ -й массы системы [см. уравнение (150)].

Если нерезонансные колебания  $p$ -й массы системы, вызываемые отдельными порядками гармоник возбуждающих моментов, определены в форме (157), то для получения суммарного колебания этой массы при действии на систему всех рассматриваемых гармонических моментов (как нерезонирующих, так и резонирующих) поступают следующим образом: пользуясь уравнениями (157) и (148), строят по углу поворота  $\alpha$  коленчатого вала кривые колебаний  $p$ -й массы, вызываемых действием на систему гармонических возбуждающих моментов отдельных порядков, и алгебраически суммируют ординаты, соответствующие каждому значению  $\alpha$ .

Если нерезонансные колебания  $p$ -й массы системы при действии на последнюю всех возбуждающих гармонических моментов нерезонирующих порядков определены в форме (127), то полное колебание этой массы найдется суммированием выражений (127) и (148).



Фиг. 178. Экспериментальная и расчетная торсиограммы одного 12-цилиндрового V-образного авиационного мотора.

Найдя по углу поворота коленчатого вала  $\alpha$ , величины отклонений  $p$ -й массы крутильной системы, вызываемых нерезонирующими возбуждающими гармоническими моментами первых 15 порядков и возбуждающими гармоническими моментами резонирующего порядка, и построив соответствующую диаграмму изменения величин отклонений в зависимости от угла  $\alpha$ , мы получим расчетную торсиограмму  $p$ -й массы рассматриваемой системы. На фиг. 178 показана в виде примера торсиограмма последней моторной массы одного 12-цилиндрового, V-образного авиационного мотора, полученная для числа оборотов коленчатого вала мотора 1230 в минуту, когда имеют место резонансные крутильные колебания системы коленчатого вала, вызванные гармоническими моментами 9-го порядка. Сплошной линией показана на этой фигуре экспериментальная торсиограмма, а пунктирной — расчетная, найденная описанным методом. Совпадение обеих торсиограмм получается хорошее. В нашей практике мы неоднократно получали вполне удовлетворительное совпадение экспериментальных торсиограмм с расчетными, найденными описанным методом; это подтверждает правильность примененного расчетного метода.

Остановимся теперь на вопросе, в каких практически случаях приходится строить расчетные торсиограммы для масс крутильной системы. Нами уже указывалось раньше, что при настоящих наших знаниях мы не можем определить надежно расчетным путем ряда факторов, играющих существенную роль в явлениях крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов. К числу таких факторов относятся например: крутильные жесткости редукторов, величины заглушающих крутильные колебания системы сил, величины возбуждающих резонансные крутильные колебания системы гармонических моментов высокого порядка и т. д. Поэтому в настоящее время мы не можем надежно рассчитать на крутильные колебания систему коленчатого вала авиационного мотора при его проектировании. Оценить влияние крутильных колебаний на прочность конструкции мотора мы можем пока только путем экспериментально-расчетного исследования этого явления на выполненном агрегате. Применяемая у нас аппаратура для торсиографирования — торсиограф DVL — позволяет снимать торсиограммы только в каком-либо одном, определенном месте исследу-

емой крутильной системы. Это дает возможность путем построения экспериментальной резонансной кривой определить критические резонансные числа оборотов мотора и выяснить соответствующие порядки резонирующих гармоник. Однако этого недостаточно для суждения о прочности крутильной системы; для выяснения последнего вопроса необходимо знать торсиограммы ряда масс систем. Эти дополнительные торсиограммы и строятся расчетным путем изложенным нами выше методом. Так как анализ заснятых экспериментальных торсиограмм дает возможность определить критические резонансные числа оборотов мотора и колебания крутильной системы, создаваемые резонирующими порядками возбуждающих гармонических моментов, то расчетные торсиограммы в этом случае получаются достаточно надежными.

Заметим, что исследование явлений крутильных колебаний значительно упростилось бы, если бы мы располагали аппаратурой, позволяющей синхронно снимать торсиограммы с нескольких мест исследуемой крутильной системы. В этом случае не пришлось бы строить расчетных торсиограмм. В настоящее время соответствующая аппаратура у нас разработана и находится в стадии экспериментальных испытаний и доводки.

Перейдем теперь к определению сил, действующих в системе коленчатого вала авиационного мотора и к оценке надежности конструкции вала при наличии крутильных колебаний системы.

## § 5. Определение сил, действующих в системе коленчатого вала авиационного мотора, и оценка надежности его конструкции при наличии крутильных колебаний системы

Положим, что торсиограммы масс исследуемой крутильной системы, представленной на фиг. 172, нам известны. Уравнение торсиограммы  $i$ -й массы в общем виде будет

$$\varphi_i = f_i(\alpha), \quad (159)$$

причем  $f_i(\alpha)$  является периодической функцией угла поворота коленчатого вала  $\alpha$ . Период этой функции для 4-тактных двигателей равен  $4\pi$ , а для 2-тактных равен  $2\pi$ .

Момент, создаваемый крутильными колебаниями системы и передаваемый через конструктивные элементы системы, находящиеся между  $(i-1)$ -й и  $i$ -й ее массами, будет равен

$$M_{i-1,i}^{(v)} = c_i(\varphi_{i-1} - \varphi_i), \quad (160)$$

где  $c_i$  представляет крутильную жесткость участка системы между  $(i-1)$ -й и  $i$ -й массами, а  $\varphi_{i-1}$  и  $\varphi_i$  определяются согласно уравнений вида (159).

Помимо момента  $M_{i-1,i}^{(v)}$  через рассматриваемый участок системы будет передаваться средний крутящий момент  $M_{i-1,i}^{(c)}$  всех цилиндров двигателя, находящихся к задку мотора от рассматриваемого участка (за массу пропеллера принимаем на фиг. 172 1-ю массу системы), если таковые имеются.

Полный крутящий момент, передающийся через рассматриваемый участок, будет равен

$$M_{i-1,i} = M_{i-1,i}^{(v)} + M_{i-1,i}^{(c)}. \quad (161)$$

Этот момент является тоже периодической функцией угла  $\alpha$ , и определение его не представляет трудностей, если торсиограммы масс системы известны либо в аналитической, либо в графической форме.

Определим теперь моменты и силы, действующие на кривошип коленчатого вала мотора при наличии в системе крутильных колебаний. Если (фиг. 172)  $i$ -я масса приведенной крутильной схемы соответствует рассчитываемому кривошипу, то крутящий момент, передаваемый к кривошипу через заднюю опорную шейку, будет равен  $M_{i-1,i}$  и будет опре-



деляться согласно равенству (161); крутящий момент, идущий от кривошипа через переднюю опорную шейку, будет равен  $M_{i,i+1}$  и будет определяться аналогично моменту  $M_{i-1,i}$ . Разность этих двух моментов должна равняться моменту, создаваемому действующими на кривошип тангенциальными силами от инерции движущихся масс кривошипа и от сил газов в соответствующих кривошипу цилиндрах двигателя. Считая результирующую  $T_i$  всех этих сил, приложенной к оси цапфы кривошипа, будем иметь

$$T_i = \frac{M_{i,i+1} - M_{i-1,i}}{R}, \quad (162)$$

где  $R$  — радиус кривошипа. Сила  $T_i$  будет тоже периодической функцией угла  $\alpha$ .

Помимо силы  $T_i$ , на ось цапфы кривошипа будет действовать в радиальном направлении сила  $Z_i$ , создаваемая центробежными силами инерции масс кривошипа и слагающимися в этом направлении сил по шатунам. Крутильные колебания системы сравнительно слабо влияют на эти силы; поэтому сила  $Z_i$  определяется обычным способом, изложенным во II части книги.

Знание величин сил  $T_i$  и  $Z_i$  позволяет определить все действующие на коленчатый вал силы и рассчитать его на прочность. Широко распространенные до настоящего времени методы расчета коленчатого вала на прочность устарели. Эти методы основаны на статических характеристиках прочности материала вала, что не соответствует действительным условиям работы вала, когда все действующие на него усилия периодически меняются в значительных пределах. В настоящее время создаются новые методы расчета на прочность деталей (в том числе и коленчатого вала), подверженных воздействию периодически изменяющихся нагрузок. Эти методы не получили еще законченного оформления в применении к расчету таких сложных и в конструктивном отношении и в отношении нагрузок деталей, как коленчатый вал. Причиной этого является отсутствие экспериментально проверенного метода расчета деталей при сложном напряженном состоянии, а также отсутствие надежных данных по ряду экспериментальных коэффициентов, входящих в расчетные формулы. Мы не имеем возможности останавливаться здесь подробно на расчете коленчатого вала с учетом вибропрочности его материала. Отсылаем интересующихся новыми методами расчета деталей к книге проф. С. В. Серенсена „Прочность металла и расчет деталей машин“, ОНТИ, 1937 г.

Рассмотрим в общих чертах основные положения для расчета коленчатого вала на прочность, учитывая механические свойства материала при переменной нагрузке. Начнем с некоторых общих определений. Положим, что у нас имеется одномерное напряженное состояние какого-либо цилиндрического вала, вызванное действием постоянного по величине скручивающего момента  $M_{\tau m}$ . Напряжение материала вала  $\tau_m$ , вычисленное по элементарной формуле сопротивления материалов без учета концентрации напряжений материала вала (вызванной, например, наличием масляного сверления, галтели, шпоночных канавок, шлицов, резьбы и т. д.), называется номинальным напряжением. Напряжение  $\tau_{max}$ , представляющее напряжение материала вала с учетом концентрации напряжений, называется действительным напряжением. Теоретическим коэффициентом концентрации напряжений  $\alpha_\tau$  называется отношение

$$\alpha_\tau = \frac{\tau_{max}}{\tau_m}. \quad (163)$$

Буквы и индексы  $\tau$  указывают, что речь идет о тангенциальных напряжениях.

Назовем коэффициентом опасности  $\lambda_{\tau m}$  при статической нагрузке отношение величины момента  $M_{\tau m}$  к величине того момента  $M_{\tau k}$ , при котором

начинается разрушение рассматриваемого вала (начинается текучесть материала)

$$\lambda_{\tau m} = \frac{M_{\tau m}}{M_{\tau k}}. \quad (164)$$

Так как у пластических материалов, т. е. у таких, для которых удлинение при разрыве больше 5%, концентрация напряжений при статических напряжениях повышает предел текучести, то для материала коленчатых валов авиационных моторов отношение  $M_{\tau m}$  к  $M_{\tau k}$  принимают при наличии концентрации напряжений в вале равным отношению  $\tau_m$  к  $\tau_s$  — пределу текучести материала при сдвиге; это допущение ведет к большей надежности расчета.

Поэтому

$$\lambda_{\tau m} = \frac{M_{\tau m}}{M_{\tau k}} = \frac{\tau_m}{\tau_s}. \quad (165)$$

Положим теперь, что на рассматриваемый вал действует скручивающий момент  $M_{\tau v}$ , периодически меняющийся по закону

$$M_{\tau v} = M_{\tau a} \sin(k\theta t), \quad (166)$$

причем  $M_{\tau a}$  — амплитуда момента, а  $(k\theta)$  — его круговая частота. В этом случае говорят, что на деталь действует нагрузка, изменяющаяся по симметричному циклу. Напряжение материала вала  $\tau_a$ , вычисленное по моменту  $M_{\tau a}$  без учета концентрации напряжений, называется номинальной амплитудой напряжений. Пределом выносливости материала при симметричном цикле  $\tau_{-1}$  называется то наибольшее напряжение, которое материал выдерживает при фактически бесконечно большом числе циклов.

Коэффициентом опасности  $\lambda_{\tau a}$  при нагрузке типа, характеризующегося выражением (166), назовем отношение величины момента  $M_{\tau a}$  к величине того максимального момента  $M_{\tau ak}$ , при котором момент, изменяющийся по закону

$$M_{\tau v} = M_{\tau ak} \sin(k\theta t), \quad (167)$$

еще не вызывает поломки рассматриваемого вала при практически бесконечно большом числе циклов. Будем иметь

$$\lambda_{\tau a} = \frac{M_{\tau a}}{M_{\tau ak}}. \quad (168)$$

И в этом случае отношение величин моментов  $M_{\tau a}$  и  $M_{\tau ak}$  заменяют отношением величин напряжений  $\tau_a$  и  $\tau_{-1}$ , вводя фактор вибропрочности  $\gamma_\tau$ , т. е. полагают

$$\lambda_{\tau a} = \frac{M_{\tau a}}{M_{\tau ak}} = \gamma_\tau \frac{\tau_a}{\tau_{-1}}. \quad (169)$$

Фактор вибропрочности  $\gamma_\tau$  зависит от ряда факторов, влияющих на прочность детали в условиях ее работы под переменной нагрузкой. Основными из этих факторов являются:

- 1) концентрация напряжений;
- 2) чувствительность материала к концентрации напряжений;
- 3) абсолютные размеры детали и
- 4) технология детали.

Если через  $\beta$  обозначить эффективный коэффициент концентрации напряжений, который представляет отношение предела выносливости гладкого полированного образца к пределу выносливости образца, изготовленного из того же материала и имеющего исследуемую форму, то

$$\beta = 1 + \eta(\alpha - 1), \quad (170)$$

где  $\eta$  — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений ( $\eta$  всегда меньше единицы) и

$\alpha$  — теоретический коэффициент концентрации напряжений.

Фактор вибропрочности  $\gamma_z$  определяется по формуле

$$\gamma_z = \frac{\sigma}{\delta}, \quad (171)$$

причем коэффициент  $\delta$  учитывает снижение предела выносливости материала с ростом абсолютных размеров детали.

Если на рассматриваемый вал действуют одновременно постоянный крутящий момент  $M_{zm}$  и момент  $M_{za}$ , изменяющийся по закону, представленному выражением (166), то коэффициент опасности  $\lambda_z$  принимают равным сумме коэффициентов опасности  $\lambda_{zm}$  и  $\lambda_{za}$  [равенства (165) и (169)]

$$\lambda_z = \lambda_{zm} + \lambda_{za} = \frac{\tau_m}{\tau_s} + \gamma_z \frac{\tau_a}{\tau_{-1}}. \quad (172)$$

В том случае, когда на вал действуют не скручивающие, а изгибающие моменты, все выводы и формулы получаются аналогичными по замене в последних буквы  $\tau$  на  $\sigma$ . Для коэффициента опасности  $\lambda_z$  в этом случае будем иметь выражение

$$\lambda_z = \lambda_{zm} + \lambda_{za} = \frac{\sigma_m}{\sigma_s} + \gamma_z \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}. \quad (173)$$

Если на рассматриваемый вал действуют совместно скручивающий и изгибающий моменты, каждый из которых представляет постоянный момент с наложенным на него моментом, изменяющимся по закону, представленному выражением (166), причем моменты действуют синфазно, то коэффициент опасности  $\lambda$  вала при этом двухмерном напряженном состоянии может быть определен по формуле

$$\lambda = \sqrt{\lambda_z^2 + \lambda_\sigma^2}. \quad (174)$$

Не останавливаясь на выводе этой формулы, заметим, что она может быть получена исходя из III теории прочности или из теории прочности Мизес-Генки. Формула (174) показывает, что коэффициент опасности  $\lambda$  при двухмерном напряженном состоянии детали представляет собой величину вектора, равного геометрической сумме векторов  $\lambda_z$  и  $\lambda_\sigma$ , т. е.

$$\lambda = (\lambda_z + \lambda_\sigma). \quad (175)$$

В действительности на коленчатый вал авиационного мотора действуют крутящие и изгибающие периодические моменты, изменяющиеся не по простому синусоидальному закону, а по гораздо более сложному. В целях возможности решения задачи ее упрощают, заменяя сложные законы изменения номинальных напряжений кручения и изгиба в вале простыми. Каждый из этих видов номинального напряжения считают изменяющимся по закону постоянного напряжения с наложенным на него переменным, изменяющимся по синусоиде. За постоянную слагающую напряжений цикла, которая называется средним напряжением цикла, берется алгебраическая полусумма максимального и минимального напряжений цикла.

Для сдвигающих напряжений среднее напряжение цикла будет

$$\tau_m = \frac{1}{2} (\tau_{\max} + \tau_{\min}). \quad (176)$$

Для нормальных напряжений среднее напряжение цикла будет

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}). \quad (177)$$

За амплитуду переменной слагающей напряжений цикла, которая называется амплитудой напряжений цикла, принимается абсолютная величина алгебраической полуразности максимального и минимального напряжений цикла.

Для сдвигающих напряжений амплитуда напряжений цикла будет

$$\tau_a = \frac{1}{2} (\tau_{\max} - \tau_{\min}). \quad (178)$$

Для нормальных напряжений амплитуда напряжений цикла будет

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (179)$$

Величины  $\tau_{\max}$ ,  $\tau_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  определяются по соответствующим, полученным из динамического расчета двигателя диаграммам крутящих и изгибающих коленчатый вал моментов.

Найдя для рассчитываемой шейки коленчатого вала величины  $\tau_m$ ,  $\tau_a$ ,  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$  согласно равенствам (176) — (179), определяют по формулам (172) — (174) искомый коэффициент опасности  $\lambda$ , который и характеризует вал в отношении его прочности. Часто вместо коэффициента опасности  $\lambda$  употребляют при расчетах обратный ему по величине коэффициент  $n$ , называемый запасом прочности

$$n = \frac{1}{\lambda}. \quad (180)$$

При этом расчетные формулы получают несколько более сложный вид.

Для материала авиационных валов имеют место следующие средние величины основных напряжений, характеризующих его механические свойства

$$\sigma_s = 9500 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{-1} = 5000 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau_s = 5500 \text{ кг/см}^2,$$

и

$$\tau_{-1} = 3000 \text{ кг/см}^2.$$

Средние значения факторов вибропрочности  $\gamma_z$  и  $\gamma_\sigma$  при расчете сечений шеек коленчатого вала, проходящих через масляные сверления, где имеет место наибольшая концентрация напряжений, равны

$$\gamma_z = \frac{\beta_z}{\delta_z} = \frac{2}{0,7} = 2,86$$

и

$$\gamma_\sigma = \frac{\beta_\sigma}{\delta_\sigma} = \frac{2,2}{0,7} = 3,14.$$

При этих значениях факторов вибропрочности и при указанных выше величинах основных напряжений, характеризующих механические свойства материала коленчатого вала, выражения (165) и (166) при расчете сечений шатунных и опорных шеек коленчатого вала, проходящих через масляные сверления, принимают вид

$$\lambda_z = (1,82\tau_m + 9,52\tau_a) 10^{-4} \quad (172')$$

и

$$\lambda_\sigma = (1,05\sigma_m + 6,29\sigma_a) 10^{-4}, \quad (173')$$

причем напряжения  $\tau_m$ ,  $\tau_a$ ,  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$  берутся в кг/см<sup>2</sup>.

Какова же предельная допустимая величина коэффициента опасности  $\lambda$ ? Мы имели возможность определить этот коэффициент для коленчатых валов двух авиационных моторов, потерпевших аварию вследствие поломки от крутильных колебаний. Расчеты были проведены для критических резонансных чисел оборотов этих моторов с учетом крутильных колебаний систем коленчатых валов. Коэффициенты  $\lambda$  оказались равными 1,15 и 1,01.



Повидимому, предельная допустимая величина коэффициента опасности  $\lambda$  должна быть не больше 0,5.

Недостаточность в настоящее время экспериментально расчетных исследований поломок коленчатых валов авиационных моторов от крутильных колебаний, а также отсутствие специально поставленных экспериментальных исследований прочности коленчатого вала в натуре при действии на него периодически изменяющихся нагрузок не позволяют уточнить значение допустимой величины коэффициента  $\lambda$ . Поэтому в нашей практике мы пока предпочитаем пользоваться при определении опасности крутильных колебаний системы коленчатого вала авиационного мотора положением, эмпирически установленным Германским институтом воздухоплавания DVL (см. статью К. Люренбаума „Практическое исследование крутильных колебаний передаточных механизмов воздухоплавательных машин“, опубликованную в журнале „Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt“, № 4 от 29/II 1932 г.). Согласно этому положению, крутильные колебания системы коленчатого вала авиационного мотора не являются опасными для прочности вала, пока напряжения кручения, вызываемые в вале одними крутильными колебаниями, не превосходят  $600 \text{ кг/см}^2$ . Это положение имеет и теоретическое обоснование, так как при крутильных колебаниях напряжения в вале, вызванные этими колебаниями, являются доминирующими знакопеременными напряжениями; эти напряжения при недостаточной вибропрочности вала являются основными напряжениями, ведущими вал к поломке от усталости материала. Ряд поломок от крутильных колебаний коленчатых валов за границей и у нас подтвердил правильность этого простого метода оценки надежности коленчатого вала обычной конструкции при наличии крутильных колебаний.

В заключение необходимо отметить следующее. Если, при некотором резонансном числе оборотов мотора  $n_p$ , коленчатый вал последнего оказался неблагоприятным в отношении крутильных колебаний при работе мотора на земле, то при работе мотора на высоте на тех же оборотах  $n_p$ , начиная с некоторой определенной высоты  $H$ , крутильные колебания коленчатого вала перестают быть опасными для его прочности. Это обстоятельство объясняется тем, что, начиная с некоторой высоты  $H$ , индикаторная мощность мотора и величины соответствующих возбуждающих крутильные колебания вала моментов понижаются по сравнению с таковыми на земле настолько, что крутильные колебания становятся неопасными. Надежное определение указанной высоты  $H$  возможно пока только экспериментальным путем.

#### Глава IV

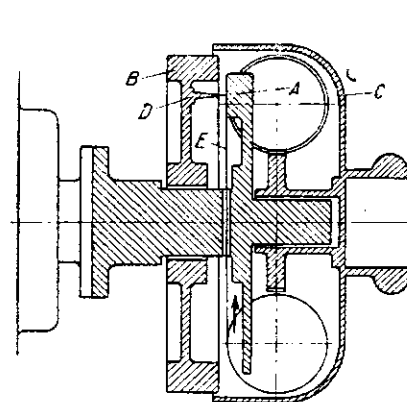
### АППАРАТУРА ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ АВИАЦИОННЫХ МОТОРОВ

#### § 1. Торсиографы и торсиоиндикаторы

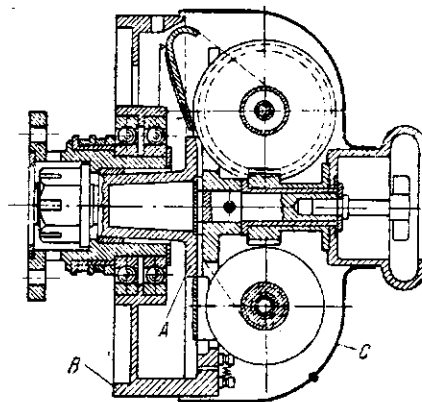
Основным прибором для исследования явлений крутильных колебаний является торсиограф. Этот прибор регистрирует относительные колебания исследуемого сечения вала относительно равномерно вращающейся вместе с валом маховой массы. Существующие торсиографы по принципу действия можно разбить на три группы: а) торсиографы механические, б) торсиографы оптические и в) торсиографы электрические.

Мы рассмотрим только механические торсиографы, как наиболее распространенные у нас в настоящее время. Классическим торсиографом этого типа является известный прибор д-ра Гейгера. Однако этот прибор рассчитан для исследования крутильных колебаний систем коленчатых валов тихоходных двигателей, имеющих невысокую частоту свободных крутильных колебаний. Для современных быстроходных авиационных мо-

торов прибор д-ра Гейгера непригоден как по причине указанной быстроходности этих моторов, так и вследствие высокой частоты свободных крутильных колебаний систем их коленчатых валов. Наиболее распространенным торсиографом для исследования крутильных колебаний в этих моторах является прибор DVL, разработанный Германским институтом воздухоплавания. В нашей исследовательской практике мы в настоящее время тоже пользуемся прибором DVL.



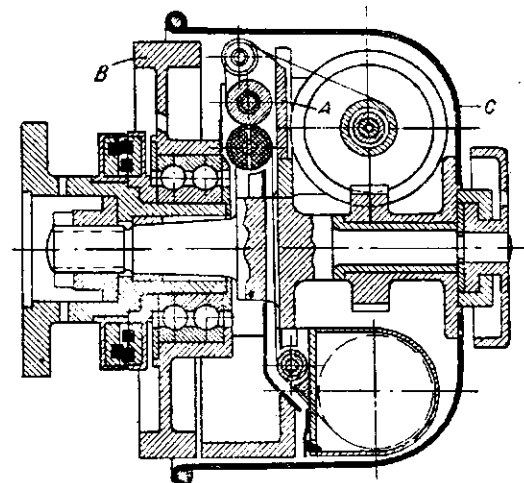
Фиг. 179. Схема устройства торсиографа DVL.



Фиг. 180. Разрез большого типа торсиографа DVL.

Торсиограф DVL выпускается двух типов: а) большого размера с диаметром кожуха 200 мм и в) малого размера с диаметром кожуха 120 мм.

Торсиограф большого размера пригоден для всех больших стационарных и воздухоплавательных моторов; он дает возможность регистрировать крутильные колебания в большем масштабе и за больший промежуток времени, чем малый тип; однако он рассчитан для моторов, число оборотов валов которых не превышает 2000 в минуту. Малый тип торсиографа может применяться для моторов с числом оборотов валов до 3000 в минуту. На фиг. 179 показана схема устройства торсиографа DVL, а на фиг. 180 и фиг. 181 даны разрезы большого и малого типов этого торсиографа. Торсиограф (фиг. 179) состоит из трех основных частей.



Фиг. 181. Разрез малого типа торсиографа DVL.

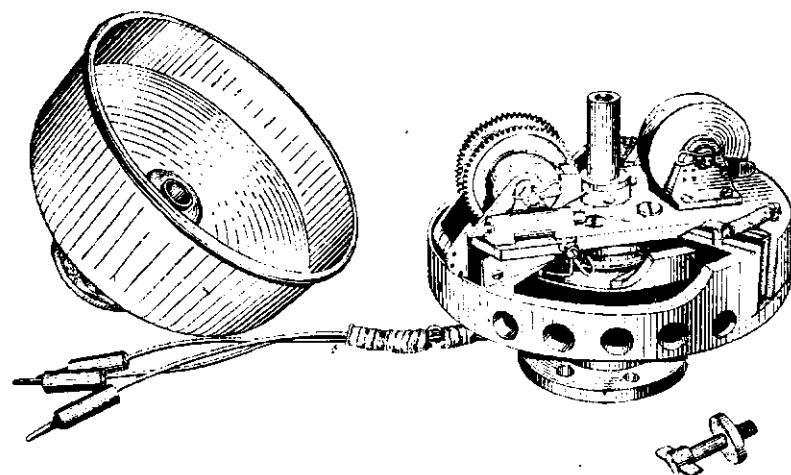
1. Жестко связанной посредством фланца с валом поперечины  $A$ , которая несет регистрирующее и приводное устройства, а также два магнита для отметки времени и чисел оборотов.

2. Установленного на шариковых подшипниках маховика  $B$ , связанного посредством двух винтовых пружин с поперечиной  $A$  и ограниченного в свободе своего движения двумя упорами; не участвующий в колебаниях маховик несет пишущий штифт.

3. Могущего вращаться барабана  $C$ , несущего червяк передачи и служащего одновременно предохранительным кожухом.

Каждая из этих трех частей уравновешена в отдельности. Пока замеры не производятся, все три части вращаются вместе с валом. Снятие тор-

сиограммы производится путем торможения барабана С, благодаря чему приводится в движение целлулоидная лента Е, служащая для записи торсиограмм. В качестве ленты используется обычная узкая фильма (16 мм шириной для большого торсиографа и 12 мм для малого), но без эмульсии и перфорации. Фильма должна быть изготовлена из возможно более мягкого целлулоида. Фильма проводится через щель вала вдоль поперечины А, причем при замерах она наматывается на ось червячного колеса. Фильма в месте записи на нее торсиограммы точно проходит между двумя направляющими, исключаящими боковые ее движения. В виде пишущего острья применено в приборе алмазное острие. Процесс записи состоит в пластическом вытеснении острием материала фильма. Поэтому пишущее острие не должно иметь острых граней; оно должно иметь определенную округлость, чтобы избежать царапания фильмы.



Фиг. 182. Торсиограф DVL.

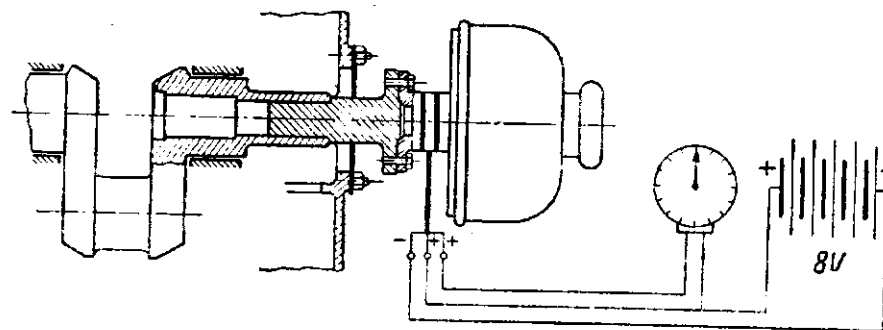
Привод для движения фильмы состоит из укрепленного на поперечине А вместе с ней вращающегося червячного колеса и червяка, связанного с барабаном С, который может быть остановлен вместе с барабаном. Червячная передача не должна иметь никакой игры, так как иначе запись искажается. Для устранения появляющейся со временем игры червячное колесо устроено переставляющимся посредством эксцентрика. Оно должно периодически переставляться, что достигается поворотом этого эксцентрика.

Для того чтобы при определенном числе оборотов мотора заснять торсиограмму, необходимо остановить барабан С. Это осуществляется либо прямо рукой, либо посредством простого механического тормоза, которым можно оперировать на известном расстоянии от прибора; последнее важно при снятии торсиограмм в полете, когда прибор в большинстве случаев совершенно недоступен.

Для того чтобы иметь возможность точно определять число оборотов мотора, которому соответствует заснятая торсиограмма, прибор имеет два магнита, получающие ток извне посредством двух контактных колец. Один магнит дает отметки чисел оборотов приводного червячного колеса, другой магнит дает отметки времени, которые управляются извне посредством контактных часов. Отметки наносятся на фильму связанными с магнитами штифтами и имеют вид прерывающихся продольных линий, расположенных по обеим сторонам записи крутильных колебаний. Якоря магнитов, несущие пишущие штифты, должны поворачиваться около оси, точно проходящей через их центр тяжести, так как в противном случае они подвергаются влиянию происходящих в различных направлениях сотрясений.

Описанный прибор дает запись крутильных колебаний на целлулоидной ленте в натуральную величину. Колебания записываются вполне свободно от инерции, благодаря чему возможно получать безукоризненные записи колебаний самых высоких частот. Колеблющаяся масса прибора настолько мала, что практически не влияет на частоту свободных крутильных колебаний исследуемой системы.

На фиг. 182 дан общий вид торсиографа DVL, а на фиг. 183 дана схема установки прибора на коленчатом валу мотора и схема присоединения к прибору аккумулятора и контактных часов.



Фиг. 183. Схема установки торсиографа DVL на коленчатом валу мотора и присоединения к прибору аккумулятора и контактных часов.

Остановимся теперь на рассмотрении теории торсиографов типа DVL. Положим, что конец коленчатого вала мотора, с которым соединен торсиограф DVL, совершает сложное периодическое колебательное движение; пусть

$$\varphi_k = \Phi_k \sin(k\theta t + \gamma_k) \quad (1)$$

представляет гармоническую слагающую  $k$ -го порядка этого движения.

Если  $i$  — число пружин торсиографа, удерживающих его маховую массу (массовый момент инерции этой массы относительно оси вращения равен  $I_T$  кг см сек<sup>2</sup>) в среднем положении,

$p$  — сила, вызывающая удлинение одной пружины на 1 см, и

$r$  — плечо сил пружин относительно оси вращения маховой массы торсиографа,

то крутильная жесткость  $c_T$ , эквивалентная действию пружин на маховую массу торсиографа, будет равна

$$c_T = ip r^2. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение движения маховой массы торсиографа, вызываемого гармонической слагающей  $k$ -го порядка колебательного движения конца коленчатого вала, будет

$$I_T \ddot{\varphi}_{Tk} + c_T (\varphi_{Tk} - \varphi_k) = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения будем искать в форме

$$\varphi_{Tk} = \Phi_{Tk} \sin(k\theta t + \gamma_k). \quad (4)$$

Принимая во внимание уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{Tk} &= k\theta^2 \Phi_{Tk} \cos(k\theta t + \gamma_k), \\ \ddot{\varphi}_{Tk} &= -(k\theta)^2 \Phi_{Tk} \sin(k\theta t + \gamma_k), \\ -(k\theta)^2 \Phi_{Tk} I_T + c_T (\Phi_{Tk} - \Phi_k) &= 0. \end{aligned}$$



Отсюда

$$\frac{\Phi_{\tau k}}{\Phi_k} = \frac{1}{1 - (k\theta)^2 \frac{I_{\tau}}{c_{\tau}}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{k\theta}{\theta_{\tau c}}\right)^2}, \quad (5)$$

причем

$$\theta_{\tau c} = \sqrt{\frac{c_{\tau}}{I_{\tau}}} \quad (6)$$

представляет частоту свободных крутильных колебаний маховой массы  $I_{\tau}$  торсиографа, закрепленной на жесткости  $c_{\tau}$ .

Из уравнения (5) мы видим, что отношение амплитуд  $\Phi_{\tau k}$  и  $\Phi_k$  может принимать следующие значения:

1) при  $(k\theta) < \theta_{\tau c}$  это отношение положительно и колебания маховой массы торсиографа происходят в одной фазе с колебаниями конца коленчатого вала мотора;

2) при  $(k\theta) = \theta_{\tau c}$  это отношение становится бесконечно большим, наступают резонансные колебания маховой массы торсиографа, которые отстают по фазе на  $90^\circ$  от колебаний конца коленчатого вала мотора;

3) при  $(k\theta) > \theta_{\tau c}$  это отношение становится отрицательным и колебания маховой массы торсиографа отстают по фазе на  $180^\circ$  от колебаний конца коленчатого вала мотора.

Благодаря наличию колебаний маховой массы торсиографа, происходящих по закону, [см. уравнение (4) и зависимость (5)],

$$\varphi_{\tau k} = \frac{\Phi_k}{1 - \left(\frac{k\theta}{\theta_{\tau c}}\right)^2} \sin(k\theta t + \gamma_k), \quad (7)$$

запись крутильных колебаний на ленте торсиографа будет происходить с искажением; вместо амплитуды  $\Phi_k$  будет записываться амплитуда  $(\Phi_k - \Phi_{\tau k})$ . Относительная ошибка в % будет равна

$$\Delta_k = \frac{\Phi_k - (\Phi_k - \Phi_{\tau k})}{\Phi_k} 100 = 100 \frac{\Phi_{\tau k}}{\Phi_k} = \frac{100}{1 - \left(\frac{k\theta}{\theta_{\tau c}}\right)^2} \quad (8)$$

Из уравнения (8) видно, что ошибка  $\Delta_k$  зависит от величины  $\theta_{\tau c}$  и от порядка  $k$  записываемой торсиографом гармоники. Таким образом при записи торсиографом сложных колебаний отдельные гармонические составляющие этих колебаний будут записываться с различной точностью. Чтобы получить возможно большие точности, выбирают  $\theta_{\tau c}$  возможно малой. Для большого торсиографа DVL имеют место следующие величины

$$I_{\tau} = 0,12 \text{ кг см сек}^2$$

и

$$c_{\tau} = i p \rho^2 = 2 \cdot 0,655 \cdot 7,8^2 = 80 \text{ кг см.}$$

Этим значениям  $I_{\tau}$  и  $c_{\tau}$  соответствуют

$$\theta_{\tau c} = 25,83 \text{ сек}^{-1}.$$

и

$$n_{\tau c} = 247 \approx 250 \text{ кол/мин.}$$

При торсиографировании авиационных моторов редко приходится снимать торсиограммы при числах оборотов коленчатого вала, меньших 1000 об/мин. Найдем ошибку в записи амплитуды 1-го порядка (к двум оборотам коленчатого вала мотора) торсиограммой, снятой при числе

оборотов коленчатого вала  $n_m = 1000$  в минуту; ошибка  $\Delta_k$  для  $k = 1$  будет наибольшей. Имеем

$$\Delta_k = \frac{100}{1 - \left(\frac{k\theta}{\theta_{\tau c}}\right)^2} = \frac{100}{1 - \left(\frac{kn_m}{2n_{\tau c}}\right)^2} \quad (9)$$

и

$$\Delta_1 = \frac{100}{1 - \left(\frac{1000}{2 \cdot 250}\right)^2} = -\frac{100}{3} = -33,3\%.$$

т. е. амплитуда 1-го порядка, записанная торсиографом, на 33,3% больше действительной; ошибка очень большая. В авиационных моторах гармоника 1-го порядка обычно мало влияет на величину суммарной амплитуды торсиограммы; поэтому, даже значительная ошибка в величине амплитуды гармоники 1-го порядка практически мало сказывается на результатах исследования крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора. Основное влияние на суммарную амплитуду торсиограммы оказывает резонирующая гармоника. Если  $n_c$  будет число свободных крутильных колебаний в минуту системы коленчатого вала мотора, то, принимая во внимание, что при резонансе гармоники  $k$ -го порядка

$$\frac{k}{2} n_m = n_c, \quad (10)$$

получим для амплитуды гармоники колебания  $k$ -го порядка ошибку  $\Delta_k$ , равной

$$\Delta_k = \frac{100}{1 - \left(\frac{n_c}{n_{\tau c}}\right)^2}. \quad (11)$$

Например, при  $n_c = 5000$  кол/мин. имеем

$$\Delta_k = \frac{100}{1 - \left(\frac{5000}{250}\right)^2} = -\frac{1}{4} \%,$$

т. е. ошибка будет ничтожна.

Для малого торсиографа DVL имеют место следующие величины:

$$I_{\tau} = 0,0206 \text{ кг см сек}^2,$$

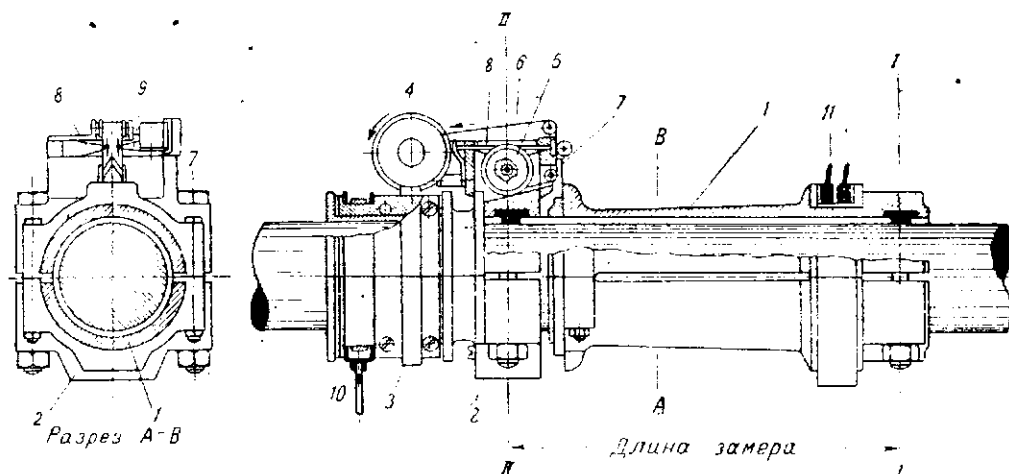
$$c_{\tau} = i p \rho^2 = 2 \cdot 0,625 \cdot 4,77^2 = 28,5 \text{ кг см.}$$

$$\theta_{\tau c} = 37,2 \text{ сек}^{-1}$$

$$n_{\tau c} = 355 \text{ кол/мин.}$$

Для тех систем коленчатых валов, форма крутильных колебаний которых в настоящее время твердо установлена, определение нагрузок при крутильных колебаниях может быть сделано достаточно точно на основании торсиограмм, снятых на свободном конце вала. Это является, например, правильным для систем коленчатых валов авиационных моторов с непосредственно приводимым пропеллером. В тех случаях, когда пропеллер соединяется с мотором при помощи длинного промежуточного вала, муфты и редуктора, форма колебаний не может быть указана с достаточной надежностью; ее протекание должно быть установлено в возможно большем числе поперечных сечений колеблющейся системы при помощи приспособленных для этого измерительных приборов. С этой целью Германский институт воздухоплавания разработал прибор — торсиоиндикатор DVL — для записи закруток передаточных валов в тех авиационных моторных установках, где передача мощности от мотора к пропел-

леру осуществляется при помощи вала, муфты и редуктора. На фиг. 184 дана схема устройства этого прибора. Аналогично известному крутильному индикатору, относительная закрутка двух поперечных сечений I—I и II—II измеряется при помощи надетой на вал жесткой на кручение индикаторной трубы, закрепленной на валу в сечении I—I. Так как при относительно коротких длинах замера (от 24 до 38 см) необходимо считаться с очень малыми относительными закрутками измеряемых поперечных сечений, то для записи этих закруток в приборе применен тот же метод, что и в



Фиг. 184. Торсиоиндикатор DVL.

1—индикаторная труба, закрепленная в поперечном сечении I—I; 2—противоположная часть прибора, закрепленная в поперечном сечении II—II; 3—червяк для привода в движение ленты фильма; 4—червячное колесо; 5—барабан фильма; 6—лента фильма; 7—пишущий алмаз; 8—механически действующий регистратор оборотов; 9—электрически действующий регистратор времени; 10—ленточный тормоз с тросом Боудена для торможения червяка 3; 11—подвод тока для регистрации времени.

торсиографе DVL. Конструкция прибора близко подходит к конструкции торсиографа DVL. Привод в движение целлулоидной ленты происходит и здесь от коленчатого вала посредством червячного колеса и червяка. Остановка червяка при снятии торсиоиндикаторограмм производится при помощи ленточного тормоза с тросом Боудена. Измерительное устройство выполнено разъемным и допускает при помощи сменных зажимных колец возможность приспособления в настоящем выполнении к валам всех диаметров до 80 мм. Также и длина замера может быть приспособлена к имеющей место в каждом отдельном случае закрутке путем постановки индикаторных труб различной длины.

## § 2. Обработка торсиограмм и построение экспериментальной резонансной кривой

После снятия торсиограмм, которое производится по всему эксплуатационному диапазону изменения числа оборотов коленчатого вала мотора примерно через промежуток в 25 оборотов, приступают к их обработке. Первая стадия обработки торсиограмм заключается в выборе участков торсиограмм для дальнейшей обработки и в определении чисел оборотов вала мотора, которым эти участки соответствуют. Для определения чисел оборотов вала мотора служат отметки на ленте торсиограммы времени и оборотов червячного колеса. Обычно употребляемые с торсиографом DVL контактные часы фирмы „H. Wetzler Pfronten Bayern“ позволяют по желанию делать отметки времени через 0,25; 0,5; 1,0 или 10 секунд; в нашей практике торсиографирования мы пользуемся отметками времени через 0,25 секунды. Отметки чисел оборотов червячного колеса делаются в большом торсиографе DVL через 15, а в малом торсиографе DVL, через 10 оборотов коленчатого вала исследуемого мотора. Если на данном участке торсиограммы расстояние (в мм) между отметками времени

равно  $t$ , а между отметками оборотов червячного колеса равно  $c$ , то число оборотов в минуту  $n$  коленчатого вала мотора, соответствующее этому участку торсиограммы, будет при установке контактных часов на отметки через 0,25 сек. равно:

а) для большого торсиографа

$$n = \frac{15 \cdot 60}{0,25} \frac{t}{c} = 3600 \frac{t}{c} \quad (12)$$

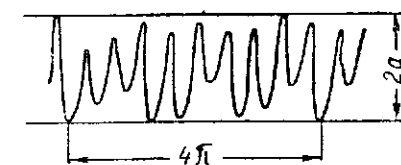
и б) для малого торсиографа

$$n = 2400 \frac{t}{c} \quad (13)$$

Отметки времени на ленте торсиограммы отличаются по внешнему виду от отметок чисел оборотов червячного колеса тем, что первые представляют (при отметках через 0,25 сек.) пунктирную линию из частых и коротких черточек, а вторые—пунктирную линию из редких и длинных.

Для каждого числа оборотов коленчатого вала мотора (с промежутком примерно в 25 оборотов) на торсиограмме выбирается несколько участков, соответствующих каждый одному циклу мотора (двум оборотам коленчатого вала мотора для 4-тактных двигателей и одному обороту—для 2-тактных).

Вторая стадия обработки торсиограмм заключается в замере амплитуд  $a$  выбранных участков торсиограмм. Амплитудой данного участка торсиограммы называется (фиг. 185) половина максимального размаха крутильных колебаний, записанных торсиограммой. Торсиографы DVL дают записи торсиограмм в таком масштабе, что амплитуды  $a$  их для торсиограмм систем коленчатых валов авиационных моторов, не превышают в среднем 2—3 мм. Поэтому обмер амплитуд приходится производить при помощи микроскопа. В нашей практике мы пользуемся очень удобной для этой цели мерительной машиной Cambridge Instrument Co. Ltd., London and Cambridge. Этот прибор дает увеличение в 14 раз при диаметре поля зрения в 7 мм.



Фиг. 185. Определение суммарной амплитуды торсиограммы.

В большом торсиографе DVL расстояние  $p$  острия пишущего штифта от оси исследуемого вала равно 67 мм; в малом торсиографе DVL величина  $p = 45,5$  мм. Поэтому, если  $a$  мм представляет замеренную амплитуду торсиограммы, то соответствующая фактическая амплитуда  $\Phi$  крутильных колебаний будет равна

$$\Phi = \frac{a}{p} \text{ радиан.} \quad (14)$$

Амплитуды  $a$ , полученные обмером ряда участков ленты торсиографа, соответствующих числу оборотов мотора  $n$ , могут значительно отличаться друг от друга; поэтому, в первую очередь, необходимо из величин этих амплитуд вывести некоторое среднее значение амплитуды колебаний, соответствующей этому числу оборотов  $n$ . Для этого сначала надо исключить наиболее сомнительную часть данных, полученную при эксперименте случайно, что производится следующим образом:

а) для каждого числа оборотов вычисляют среднее арифметическое из замеренных амплитуд;

б) находят отклонения всех замеренных амплитуд от их среднего арифметического и среднюю квадратную ошибку отдельного замера по формуле

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{k-1}}, \quad (15)$$

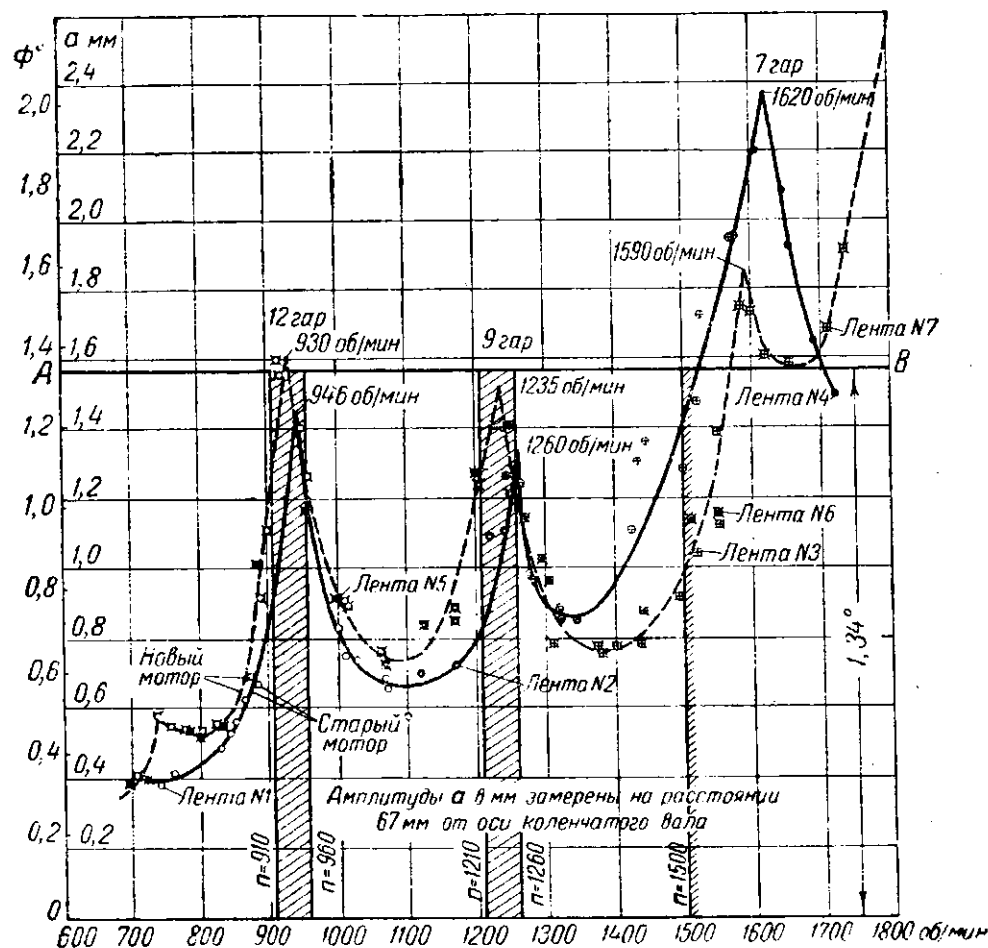
где через  $V_i$  обозначены отклонения замеренных амплитуд от их среднего арифметического, а через  $k$ —число замеренных амплитуд;

с) отбрасывают те замеренные амплитуды, отклонения которых от их среднего арифметического больше  $2\delta$ .



За окончательное значение амплитуды, соответствующей данному числу оборотов мотора, принимают среднее арифметическое из оставшихся замеренных амплитуд.

Следует заметить, что выбор наибольшего допустимого отклонения  $2\delta$  в достаточной степени произволен; однако нельзя обойтись без какого-либо объективного критерия. Повидимому, величина  $2\delta$  практически является достаточно удобной. Если допустить, что имеет место нормальный закон распределения, то вероятность того, что ошибка может оказаться больше  $2\delta$ ;  $2,5\delta$ ;  $3\delta$  равна соответственно 5, 1,25 и 0,3%.<sup>6</sup>



Фиг. 186. Экспериментальные резонансные кривые.

Для получения надежного среднего значения амплитуды желательно иметь для каждого числа оборотов мотора 8—12 значений амплитуд.

Определив для ряда чисел оборотов мотора  $n$  величины средних амплитуд  $a$ , строят кривую зависимости  $a$  от  $n$ . Эта кривая называется экспериментальной резонансной кривой. На фиг. 186 даны в виде примера экспериментальные резонансные кривые системы коленчатого вала одного 12-цилиндрового, V-образного авиационного мотора. Пунктирная кривая представляет резонансную кривую нового мотора, а сплошная — мотора, бывшего долгое время в эксплуатации. Каждая кривая отчетливо выявляет три критических резонансных числа оборотов мотора, соответствующие резонансу гармоник 12, 9 и 7-го порядков. Для нового мотора эти числа оборотов мотора равны 930, 1235 и 1590 в мин.; для старого мотора — 946, 1260 и 1620 в мин. Для выяснения опасности крутильных колебаний для прочности коленчатого вала мотора при этих числах оборо-

тов мотора проведена на фиг. 186 параллельно оси абсцисс прямая, ординаты которой равны  $1,34^\circ$ . Амплитуда, равная  $1,34^\circ$ , является той амплитудой колебания последней массы системы коленчатого вала, при которой напряжение в одной из шеек коленчатого вала (первая шатунная) достигает от крутильных колебаний предельной допустимой величины  $600 \text{ кг/см}^2$ . Мы видим, что фактически для каждого мотора (нового и старого) работа на числах оборотов, близких к вышеуказанным трем критическим резонансным числам оборотов, является опасной для прочности коленчатого вала; неоднократные поломки последнего при эксплуатации подтверждают эти выводы. Опасные для прочности коленчатого вала зоны чисел оборотов мотора показаны на фиг. 186 вертикальными заштрихованными столбиками. Вследствие опасности поломок коленчатого вала от крутильных колебаний мотор не может работать на числах оборотов выше 1500 в мин.

### § 3. Анализ торсиограмм, соответствующих критическим резонансным числам оборотов мотора. Выделение резонирующей гармоники колебаний и определение эквивалентного коэффициента заглушения $\xi$

Определив по экспериментальной резонансной кривой критические резонансные числа оборотов мотора, выбирают торсиограммы, соответствующие этим числам оборотов мотора. Эти торсиограммы кладутся в основу расчета на прочность коленчатого вала мотора с учетом крутильных колебаний. Расчет делается в отдельности для каждого из найденных критических резонансных чисел оборотов мотора. Соответствующая критическому резонансному числу оборотов мотора торсиограмма подвергается гармоническому анализу, путем которого определяются амплитуды фазовых слагающих гармонического колебания резонирующего порядка; по этим амплитудам фазовых слагающих находят амплитуду гармонического колебания резонирующего порядка. Знание последней амплитуды позволяет, без знания коэффициента заглушения  $\xi$ , построить расчетным путем торсиограммы для тех неподвергавшихся непосредственному торсиографированию масс системы, между которыми лежат рассчитываемые участки крутильной системы. Помимо этого в целях контроля строится расчетным путем торсиограмма того сечения исследуемой крутильной системы, с которого снимались экспериментальные торсиограммы. Построение расчетных торсиограмм и расчет на прочность крутильной системы изложен нами выше (см. главу III).

Найденная из экспериментальной торсиограммы путем гармонического анализа амплитуда резонирующей гармоники  $\Phi_p$  позволяет определить эквивалентный коэффициент затухания крутильной системы. Для этой цели служит равенство (147) главы III, из которого имеем

$$\xi = \frac{M_k \sum \alpha_{ik}}{\Phi_p \theta_c \sum x_i^2} \quad (16)$$

Все входящие в правую часть этого соотношения величины являются известными.

## Глава V

### СРЕДСТВА ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ ОПАСНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ АВИАЦИОННЫХ МОТОРОВ

Неблагоприятные в отношении крутильных колебаний моторы приходится лечить. Однако универсального средства для устранения или уменьшения крутильных колебаний в любой конструкции мы не имеем. Поэтому к каждому конкретному случаю приходится подходить индивидуально. Имеющиеся в настоящее время в распоряжении конструктора средства для парализования крутильных колебаний можно разбить на пять групп.

1. Средства, влияющие на начальные фазовые углы возбуждающих крутильные колебания моментов. Это достигается либо изменением порядка

вспышек в цилиндрах двигателя, либо изменением угла между цилиндрами. Суть этого способа уменьшения критических резонансных крутильных колебаний системы заключается в том, что, изменяя соответствующим образом порядок вспышек в цилиндрах двигателя или изменяя угол между цилиндрами, уменьшают величину  $\Sigma \bar{a}_{ik}$ , стоящую в числителе выражения для амплитуды  $\Phi_p$  резонирующей гармоники [см. равенство (147) главы III]

$$\Phi_p = \frac{M_k \Sigma \bar{a}_{ik}}{\xi \Theta_c \Sigma a_i^2}.$$

Уменьшая таким путем величину амплитуды резонирующей гармоники, уменьшают и суммарную амплитуду крутильных колебаний при соответствующем критическом числе оборотов мотора. На фиг. 65 показаны в виде примера экспериментальные резонансные кривые системы коленчатого вала одного 6-цилиндрового мотора при двух различных порядках вспышек в его цилиндрах: 1—5—3—6—2—4 и 1—2—4—6—5—3. Изменение порядка вспышек освободило в данном случае эксплуатационную зону числа оборотов мотора от критического резонанса 9-й гармоники.

Отметим, что применение этого способа требует в каждом отдельном случае специальных исследований, так как в эксплуатационной зоне числа оборотов мотора вместо устраненного критического резонанса гармоники одного порядка может возникнуть критический резонанс гармоники другого порядка.

2. Средства, переводящие крутильные колебания из класса гармонических колебаний в класс псевдогармонических колебаний. Указанное достигается путем введения в крутильную систему специальных агрегатов.

3. Средства, изменяющие систему, подверженную крутильным колебаниям, и таким путем освобождающие эксплуатационную зону чисел оборотов мотора от критических резонансов. К этим средствам относятся например: упругие муфты между мотором и пропеллером; упругости, включенные в конструкцию втулки пропеллера; добавочные маховые массы и упругости с соответствующей настройкой.

4. Средства, заглушающие крутильные колебания и снижающие опасные резонансные пики крутильных колебаний до надлежащих величин. К числу этих средств относятся так называемые демпферы трения крутильных колебаний, например: демпфер полусухого трения, демпфер жидкостного трения, демпфер из резины и т. д.

5. Динамические демпферы крутильных колебаний.

Мы подробно рассмотрим здесь два типа демпферов крутильных колебаний, получивших наибольшее распространение в авиационной практике: демпферы трения и динамические демпферы.

## § 1. Демпферы трения крутильных колебаний

Демпфер трения крутильных колебаний представляет в конструктивном отношении так соединенную с колеблющейся системой и вращающуюся вместе с ней массу, что при их относительном движении возникает работа сил трения, поглощающая часть работы сил, вызывающих крутильные колебания системы. Этим достигается уменьшение амплитуды крутильных колебаний системы до величины, гарантирующей безопасную работу. По характеру развиваемого трения демпферы трения разбиваются на два класса: 1) демпферы полусухого трения и 2) демпферы жидкостного трения. Типичным образчиком демпферов 1-го класса является демпфер Ланчестера, представленный на фиг. 187. Этот тип демпфера не получил распространения в авиационной практике вследствие ненадежности действия, обусловленной непостоянством коэффициента полусухого трения. Поэтому мы не будем здесь останавливаться подробно на методе его расчета, а ограничимся приведением окончательных результатов; интересующихся подробными выводами отсылаем к книге Т. Р. Den Hartog „Mechanical vibrations“, 1934 г.

Если  $\Theta_c$  — круговая частота свободных крутильных колебаний системы,

$\Phi_n'$  — амплитуда колебания конца вала, с которым соединен демпфер (при наличии этого последнего),

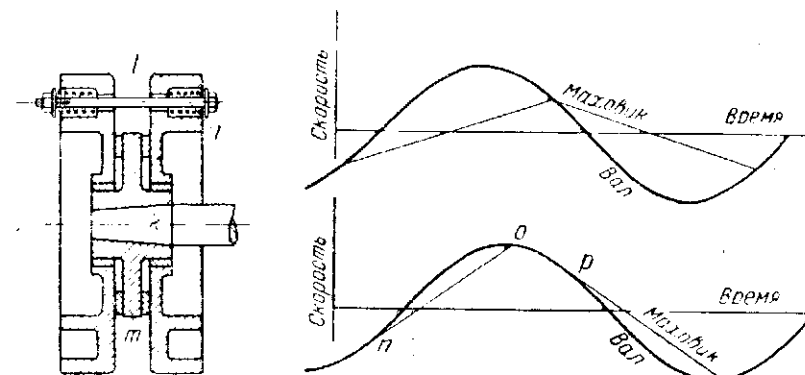
$I_r$  — момент инерции маховой массы демпфера относительно оси колебаний системы и

$M_r$  — момент сил трения, развиваемых демпфером, то оптимальная величина момента  $M_r$ , при которой работа сил трения демпфера за один цикл максимальна, равна

$$(M_r)_{\text{наиб}} = \frac{V^2}{\pi} I_r \Theta_c^2 \Phi_n'^2. \quad (1)$$

Соответствующая работа сил трения демпфера за один цикл колебания равна

$$R_r = \frac{4}{\pi} I_r \Theta_c^2 (\Phi_n')^2. \quad (2)$$



Фиг. 187. Демпфер крутильных колебаний Ланчестера. На верхней диаграмме дан случай, когда маховики демпфера непрерывно проскальзывают относительно коленчатого вала, в то время как на нижней диаграмме — случай, когда маховики благодаря затяжке болтов проскальзывают часть времени, а остальную часть времени сидят жестко.

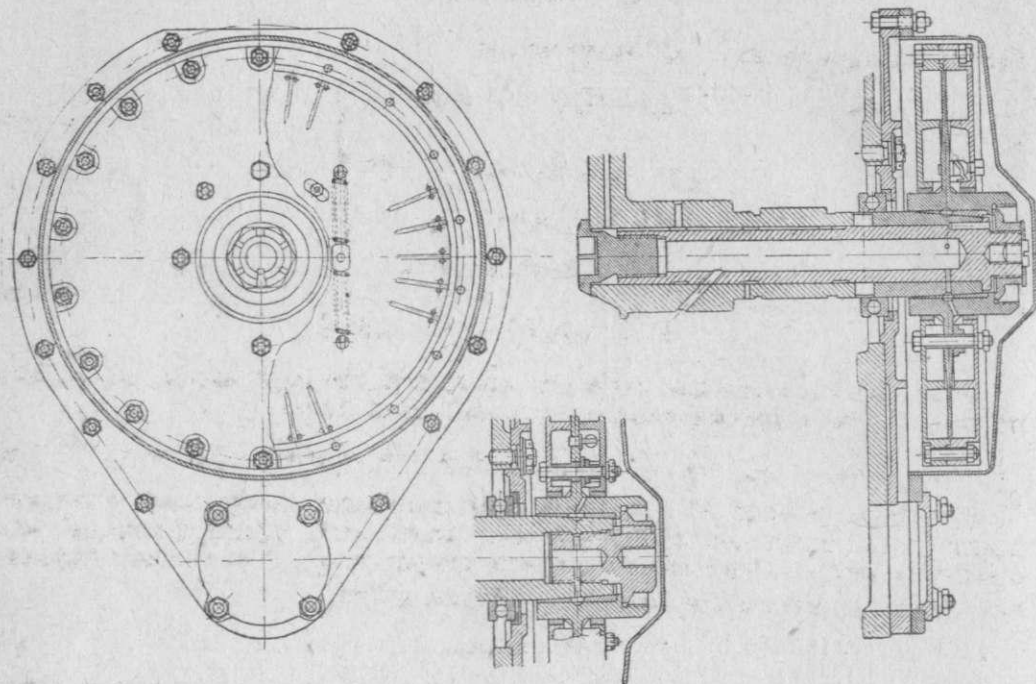
Зная из расчета данной крутильной системы на крутильные колебания величину амплитуды  $\Phi_n'$ , при которой крутильные колебания системы становятся неопасными для ее прочности, и зная ту дополнительную работу  $R$  заглушающих сопротивлений, которая снижает амплитуду  $n$ -й массы системы с величины  $\Phi_n$  (без демпфера) до величины  $\Phi_n'$  (при наличии в системе демпфера), находим по уравнению (2) величину необходимого момента инерции демпфера  $I_r$ ; по уравнению (1) определяем затем  $(M_r)_{\text{наиб}}$ ; последняя величина дает возможность рассчитать элементы конструкции демпфера, создающие момент трения.

Типичным образчиком демпферов жидкостного трения является демпфер Юнкера. На фиг. 188 этот демпфер представлен в разрезе. Демпфер показан смонтированным на заднем конце коленчатого вала мотора.

На фиг. 189 дана фотография двух половин этого демпфера. Демпфер состоит из диска  $a$  с лопатками  $c$ , жестко связанного с концом коленчатого вала мотора. Диск охватывается снаружи состоящим из двух половин  $b_1$  и  $b_2$  маховиком, могущим свободно проворачиваться относительно коленчатого вала и связанным с диском демпфера посредством винтовых пружин  $e$ . Соединенные половины маховика образуют полости  $d$ , в которые входят с небольшим зазором лопатки диска  $c$ . Полости  $d$  заполнены маслом. При работе мотора маховик демпфера стремится, благодаря своей инерции, равномерно вращаться вместе с коленчатым валом мотора; конец вала, с которым соединен диск демпфера, совершает крутильные колебания; вследствие этого получается относительное колебательное движение диска и маховика демпфера, которое является причиной попере-

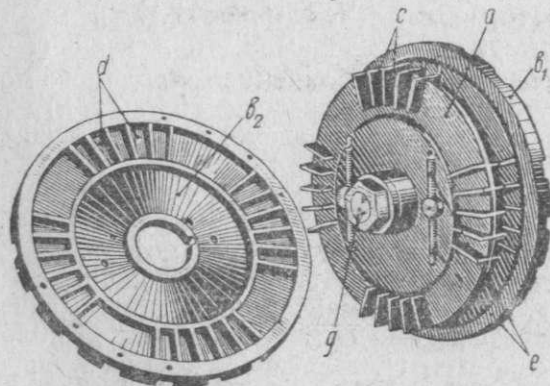


менного вытеснения масла из одной половины полости  $d$  в другую; происходящее при этом движении трение друг о друга частиц масла поглощает часть энергии крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора и тем самым глушит эти колебания. В демпфере осуществлен непрерывный проток свежего масла для отвода тепла, развиваемого жидкостным трением.



Фиг. 188. Монтаж демпфера крутильных колебаний Junkers'a на коленчатом валу авиационного мотора.

При расчете глушителей крутильных колебаний, основанных на жидкостном трении, принимают, что заглушающий крутильные колебания момент, создаваемый глушителем, пропорционален относительной угловой скорости его маховика и конца вала, с которым глушитель соединен.



Фиг. 189. Демпфер крутильных колебаний Junkers'a.

$\Phi_r$  — амплитуду колебательного движения маховой массы глушителя;  
 $\Phi_n$  — амплитуду колебательного движения конца вала, с которым соединен глушитель;

Обозначим через  $\Theta_c$  — круговую частоту свободных крутильных колебаний системы и маховой массы глушителя. Круговые частоты системы и маховой массы глушителя одинаковы потому, что только в этом случае возможно установившееся состояние движения всей системы;  
 $I_r$  — момент инерции маховой массы глушителя относительно оси вращения;

$\varphi_r$  и  $\varphi_n$  — соответствующие текущие отклонения от начального положения для момента времени  $t$  и

$\beta$  — угол сдвига фаз между  $\varphi_r$  и  $\varphi_n$ .

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= \Phi_n' \sin(\Theta_c t) \\ \varphi_r &= \Phi_r \sin(\Theta_c t - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Угловые скорости  $\dot{\varphi}_n$  и  $\dot{\varphi}_r$  будут равны

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= \Phi_n' \Theta_c \cos(\Theta_c t) \\ \dot{\varphi}_r &= \Phi_r \Theta_c \cos(\Theta_c t - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Угловые ускорения  $\ddot{\varphi}_n$  и  $\ddot{\varphi}_r$  будут равны

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_n &= -\Phi_n' \Theta_c^2 \sin(\Theta_c t) \\ \ddot{\varphi}_r &= -\Phi_r \Theta_c^2 \sin(\Theta_c t - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Относительная угловая скорость вращения маховой массы глушителя по отношению к рассматриваемому концу вала будет

$$\dot{\varphi}_{от} = \dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_r = \Theta_c [\Phi_n' \cos(\Theta_c t) - \Phi_r \cos(\Theta_c t - \beta)]. \quad (6)$$

Крутящий момент  $M_r$ , заглушающий колебания конца вала и являющийся следствием действия глушителя колебаний, пропорционален, как принято выше, относительной угловой скорости  $\dot{\varphi}_{от}$ . Принимая коэффициент пропорциональности равным  $\xi_r$ , будем иметь

$$M_r = \xi_r \dot{\varphi}_{от}. \quad (7)$$

С другой стороны, рассматривая в отдельности движение маховой массы глушителя, будем иметь

$$M_r = I_r \ddot{\varphi}_r. \quad (8)$$

Следовательно,

$$M_r = \xi_r \dot{\varphi}_{от} = I_r \ddot{\varphi}_r. \quad (9)$$

Отсюда, принимая во внимание равенства (5) и (6), будем иметь

$$\xi_r \Theta_c [\Phi_n' \cos(\Theta_c t) - \Phi_r \cos(\Theta_c t - \beta)] = -I_r \Phi_r \Theta_c^2 \sin(\Theta_c t - \beta)$$

и

$$\Phi_n' \cos(\Theta_c t) = \Phi_r [\cos(\Theta_c t - \beta) - \frac{I_r \Theta_c}{\xi_r} \sin(\Theta_c t - \beta)].$$

Полагая

$$\frac{I_r \Theta_c}{\xi_r} = \tan \psi, \quad (10)$$

будем иметь

$$\Phi_n' \cos(\Theta_c t) = \frac{\Phi_r}{\cos \psi} \cos(\Theta_c t - \beta + \psi).$$

Отсюда

$$\Phi_r = \Phi_n' \cos \psi \frac{\cos(\Theta_c t)}{\cos(\Theta_c t - \beta + \psi)}. \quad (11)$$

Так как амплитуда  $\Phi_r$  по своей сущности должна не зависеть от  $t$ , то должно иметь место соотношение

$$\beta = \psi \quad \text{или} \quad \tan \beta = \frac{I_r \Theta_c}{\xi_r}. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\Phi_r = \Phi_n' \cos \psi = \Phi_n' \cos \beta. \quad (13)$$

Принимая это во внимание, будем иметь

$$\begin{aligned} M_r &= I_r \ddot{\varphi}_r = -I_r \Phi_r \Theta_c^2 \sin(\Theta_c t - \beta) = \\ &= -I_r \Phi_n' \cos \beta \Theta_c^2 [\sin(\Theta_c t) \cos \beta - \cos(\Theta_c t) \sin \beta] = \\ &= -I_r \cos^2 \beta [\Phi_n' \Theta_c^2 \sin(\Theta_c t)] + 0,5 I_r \Theta_c \sin 2\beta [\Phi_n' \Theta_c \cos(\Theta_c t)] = \\ &= I_r \cos^2 \beta \ddot{\varphi}_n + 0,5 I_r \Theta_c \sin 2\beta \dot{\varphi}_n \end{aligned}$$

или

$$M_r = I_r \cos^2 \beta \ddot{\varphi}_n + 0,5 I_r \Theta_c \sin 2\beta \dot{\varphi}_n. \quad (14)$$

Из последнего соотношения вытекает, что действие глушителя колебаний эквивалентно тому, как если бы:

1) на валу, в месте посадки глушителя колебаний, имелась добавочная закрепленная на валу масса с моментом инерции

$$I_{nr} = I_r \cos^2 \beta, \quad (15)$$

и 2) на вал, в месте посадки глушителя колебаний, действовал момент, заглушающий колебания и равный

$$M_{nr} = 0,5 I_r \Theta_c \sin 2\beta \dot{\varphi}_n. \quad (16)$$

Таким образом общее действие глушителя состоит в известном снижении числа собственных колебаний системы, обусловленном первым действием глушителя, и в снижении резонансной амплитуды колебательного движения системы, обусловленном вторым действием глушителя. Последнее и является используемым свойством глушителя в рассматриваемом вопросе.

Принимая во внимание равенство (12), получим согласно равенству (13)

$$\Phi_r^2 = \frac{(\Phi_n')^2}{1 + \left(\frac{I_r \Theta_c}{\xi_r}\right)^2}. \quad (17)$$

Из этого соотношения видно, что при слабом заглушении амплитуда  $\Phi_r$  мала; в предельном случае, когда  $\xi_r = 0$ , имеем  $\Phi_r = 0$ , т. е. маховая масса глушителя не колеблется.

При сильном заглушении величина амплитуды приближается к величине амплитуды  $\Phi_n'$ ; в предельном случае, когда  $\xi_r = \infty$  имеем  $\Phi_r = \Phi_n'$ , т. е. маховая масса глушителя является жестко соединенной с последней массой системы и колеблется вместе с ней.

Подставляя в уравнение (16) выражение для  $\dot{\varphi}_n$  из уравнения (4), будем иметь

$$M_{nr} = 0,5 I_r \Theta_c^2 \Phi_n \sin 2\beta \cos(\Theta_c t). \quad (18)$$

Амплитуда этого заглушающего колебания момента будет

$$\mathfrak{M}_r = 0,5 I_r \Theta_c^2 \Phi_n' \sin 2\beta. \quad (19)$$

Пренебрегая влиянием на  $\Theta_c$  регулировки глушителя и принимая во внимание, что с увеличением  $\mathfrak{M}_{nr}$  величина  $\Phi_n'$  уменьшается, имеем, что наивыгоднейшая регулировка данного глушителя колебаний, соответствующая максимальному возможному  $\mathfrak{M}_{nr}$ , будет получена при такой регулировке глушителя, когда

$$\sin 2\beta = 1, \text{ т. е. когда } \beta = 45^\circ \text{ и } \operatorname{tg} \beta = 1.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (12), будем иметь, что наивыгоднейшая регулировка глушителя соответствует значению  $\xi_r$ , определяемому из уравнения

$$(\xi_r)_{\text{наиб}} = I_r \Theta_c. \quad (20)$$

Соответствующее максимальное значение момента  $\mathfrak{M}_{nr}$  будет

$$(\mathfrak{M}_{nr})_{\text{max}} = 0,5 I_r \Theta_c^2 (\Phi_n')_{\text{наиб}}. \quad (21)$$

Далее интересно установить насколько определенный глушитель снижает резонансные амплитуды.

Согласно равенства (147) главы III, имеем, что величина  $\Phi_n$  амплитуды  $n$ -й массы крутильной системы при резонансе равна

$$\Phi_n = \frac{M_k \Sigma \bar{\alpha}_{ik}}{\xi \Theta_c \Sigma \alpha_i^2}. \quad (22)$$

Найдем амплитуду  $\Phi_n'$  конечной массы при наличии глушителя колебаний. Примем, что и в этом случае форма собственных колебаний не изменяется, а величина амплитуд  $\Phi_i$  каждой из масс уменьшается в отношении уменьшения амплитуды  $n$ -й массы, т. е.

$$\frac{\Phi_i'}{\Phi_i} = \frac{\Phi_n'}{\Phi_n},$$

что приводит к соотношению

$$\frac{\Phi_i'}{\Phi_n'} = \frac{\Phi_i}{\Phi_n}$$

или

$$\alpha_i' = \alpha_i,$$

т. е. относительные амплитуды масс системы не изменяются от применения глушителя колебаний. Имея это в виду и оставляя прежние обозначения, но со знаком ' для системы с глушителем колебаний, будем иметь,

что суммарная работа  $\sum_1^n R_{i3}'$  всех заглушающих моментов  $M_{i3}'$ , действующих на все  $n$  масс, и работа  $M_{nr}$  заглушающего момента, создаваемого глушителем, равна

$$\begin{aligned} \sum_1^n R_{i3}' &= \sum_1^n \int_0^T M_{i3}' \dot{\varphi}_i dt + \int_0^T 0,5 I_r \Theta_c^2 \Phi_n' \sin 2\beta \cos(\Theta_c t) \Phi_n' \Theta_c \cos(\Theta_c t) dt = \\ &= \pi \xi \Theta_c \sum_1^n (\Phi_i')^2 + 0,5 I_r \Theta_c^2 (\Phi_n')^2 \sin 2\beta \int_0^{2\pi} \cos^2(\Theta_c t) d(\Theta t) \end{aligned}$$

или

$$\sum_1^n R_{i3}' = \pi \xi \Theta_c \sum_1^n (\Phi_i')^2 + 0,5 \pi I_r \Theta_c^2 (\Phi_n')^2 \sin 2\beta. \quad (23)$$

Суммарная работа  $\sum_1^n R_{i3}'$  всех возбуждающих моментов  $M_{i3}$  за один период будет

$$\sum_1^n R_{i3}' = \pi M_k \Phi_n' \Sigma \bar{\alpha}_{ik}. \quad (24)$$

Искомая амплитуда  $\Phi_n'$  определится из равенства работ

$$\sum_1^n R_{i3}' = \sum_1^n R_{i3}$$



$$\pi M_k \Phi_n' \sum_1^n \alpha_{ik} = \pi \xi \Theta_c (\Phi_n')^2 \sum_1^n \alpha_i^2 + 0,5 \pi I_r \Theta_c^2 (\Phi_n')^2 \sin 2\beta.$$

Отсюда

$$\Phi_n' = \frac{M_k \sum_1^n \alpha_{ik}}{\xi \Theta_c \sum_1^n \alpha_i^2 + 0,5 I_r \Theta_c^2 \sin 2\beta}. \quad (25)$$

Принимая во внимание равенство (22), будем иметь

$$\frac{\Phi_n'}{\Phi_n} = \frac{1}{1 + 0,5 \frac{I_r \Theta_c}{\xi \sum_1^n \alpha_i^2} \sin 2\beta} = \frac{1}{1 + \rho \sin 2\beta}, \quad (26)$$

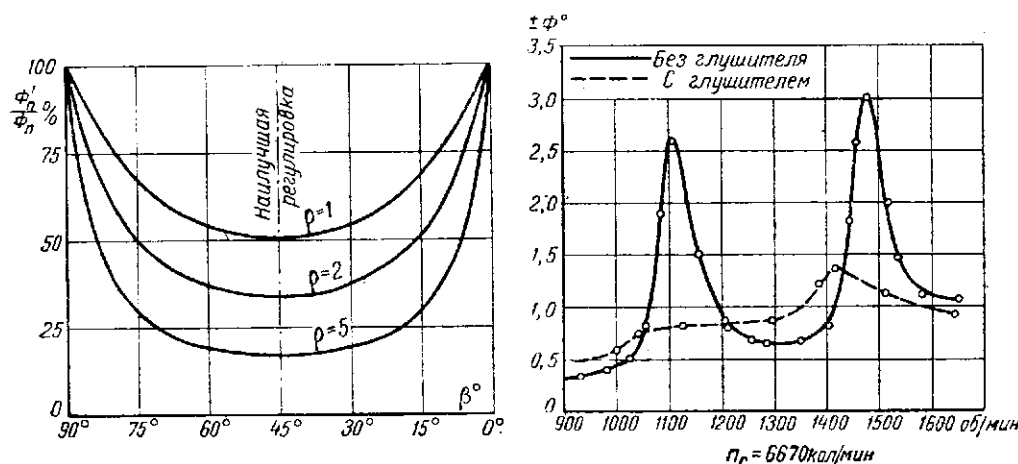
где

$$\rho = \frac{I_r \Theta_c}{2\xi \sum_1^n \alpha_i^2}. \quad (27)$$

При наивыгоднейшей регулировке глушителя колебаний, которая имеет место согласно выведенному раньше при  $\beta = 45^\circ$ , имеем

$$\left( \frac{\Phi_n'}{\Phi_n} \right)_{\min} = \frac{1}{1 + \rho}. \quad (28)$$

На фиг. 190 даны кривые изменения отношения  $\frac{\Phi_n'}{\Phi_n}$  в зависимости от изменения угла  $\beta$  (различная регулировка глушителя) при различных  $\rho$ .



Фиг. 190. Резонансные амплитуды коленчатого вала при наличии глушителя в % от таковых без глушителя в зависимости от регулировки глушителя.

На фиг. 191 даны экспериментальные резонансные кривые системы коленчатого вала одного авиационного мотора с глушителем крутильных колебаний рассмотренного типа и без него.

Как видно из этих кривых, применение глушителя колебаний дает значительное снижение критических резонансных амплитуд. Поэтому глушитель крутильных колебаний является хорошим средством для устранения опасности поломки коленчатого вала мотора от крутильных колебаний.

Формулы (20), (27) и (28) позволяют определить при известном коэффициенте  $\xi$  необходимые  $\xi_r$  и момент инерции  $I_r$  массы глушителя для требуемого снижения амплитуд или, наоборот, определить уменьшение амплитуд для заданного глушителя.

При заданном  $\frac{\Phi_n'}{\Phi_n}$  по уравнению (28) определяем значение  $\rho$ , соответствующее наивыгоднейшей регулировке глушителя. Зная  $\rho$ , имеем на основании уравнений (27) и (20)

$$(\xi_r)_{\min} = 2\rho \xi \sum_1^n \alpha_i^2, \quad (29)$$

откуда определяем  $(\xi_r)_{\min}$ . Наконец согласно уравнению (20) определяем необходимый момент инерции  $I_r$  глушителя колебаний

$$I_r = \frac{(\xi_r)_{\min}}{\Theta_c}. \quad (30)$$

Для того чтобы можно было судить об ожидаемом нагреве и о требующемся охлаждении глушителя, необходимо знать, какую работу поглощает при резонансе глушитель. Мощность, поглощенная глушителем за один цикл, была уже определена выше [см. последний член уравнения (23)]; она равна

$$R_{rr} = 0,5 \pi \Theta_c^2 I_r (\Phi_n')^2 \sin 2\beta. \quad (31)$$

Так как время одного цикла равно

$$T_c = \frac{2\pi}{\Theta_c},$$

то работа, поглощаемая глушителем за 1 секунду, будет

$$R_r = \frac{R_{rr}}{T_c} = 0,25 \Theta_c^3 I_r (\Phi_n')^2 \sin 2\beta. \quad (32)$$

При наивыгоднейшей регулировке глушителя, для которой  $\beta = 45^\circ$ , имеем

$$(R_r)_{\min} = 0,25 \Theta_c^3 I_r (\Phi_n')^2, \quad (33)$$

причем  $(R_r)_{\min}$  получается в кг м/сек, если  $I_r$  взято в кгсмсек<sup>2</sup>.

## § 2. Динамические демпферы крутильных колебаний

Наиболее распространенным в авиации динамическим демпфером крутильных колебаний является демпфер, осуществленный в виде маятникового противовеса.

Е. S. Taylor в статье „Eliminating crankshaft torsional vibration in radial aircraft engines“, опубликованной в журнале „SAE“ за март 1936 г., изложил теорию маятникового противовеса, как устранителя крутильных колебаний того порядка, на который он настроен, в применении к крутильной системе из двух масс. Практическое применение этой теории нашло в маятниковом противовесе, конструкции R. Chilton, установленном на 9 цилиндровом, звездообразном моторе Wright „Cyclone“.

Мы разовьем здесь теорию маятникового противовеса в более общем виде, именно в применении к многомассовой крутильной системе.

Положим, что у нас имеется крутильная система из  $n$  масс, представленная на фиг. 192. Пусть обозначают:

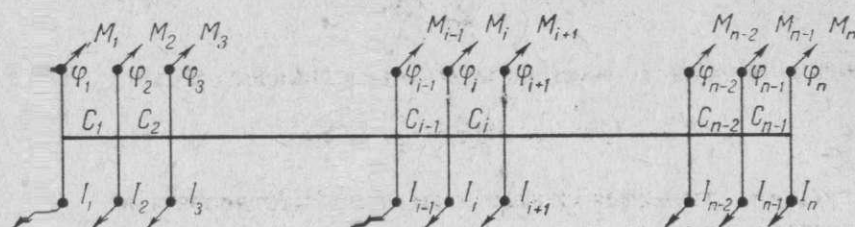
$I_x$  — массовый полярный момент инерции  $x$ -й массы относительно оси вращения системы,

$c_x$  — крутильную жесткость участка вала, соединяющего  $x$ -ю и  $(x+1)$ -ю массы;

$M_x$  — приложенный к  $x$ -й массе момент, вызывающий крутильные колебания системы, причем выражение для этого момента имеет вид

$$M_x = M_{x0} + \sum_{k=1}^p M_{xk} \cos(k\theta t) + \sum_{k=1}^p N_{xk} \sin(k\theta t), \quad (34)$$

где  $M_{x0}$  — постоянная слагающая момента,  
 $k$  — порядок гармоник и  
 $\theta$  — круговая частота гармонического момента 1-го порядка.



Фиг. 192. Схема многомассовой крутильной системы.

Если  $\omega$  есть средняя угловая скорость вращения системы, то имеем для 2-тактных двигателей и для 4-тактных двигателей

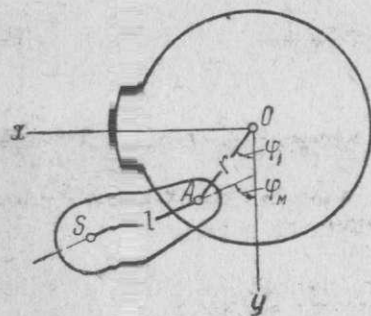
$$\left. \begin{aligned} \theta &= \omega \\ \theta &= \frac{\omega}{2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Пусть, далее, на  $x$ -ю массу нашей системы, помимо момента  $M_x$ , возбуждающего колебания, действует момент  $M_{x\pm}$ , заглушающий колебания и равный

$$M_{x\pm} = \xi_x \dot{\varphi}_x, \quad (36)$$

где  $\xi_x$  — коэффициент заглушения и  
 $\dot{\varphi}_x$  — угловая скорость колебания  $x$ -й массы системы.

Пусть, наконец, в какой-либо  $i$ -й массе системы подвешен противовес маятникового типа, схема которого дана на Фиг. 193, где обозначают:



Фиг. 193. Схема маятникового противовеса.

$A$  — точку подвеса маятникового противовеса,  
 $S$  — центр тяжести этого противовеса,  
 $r$  — расстояние от точки  $A$  до оси вращения системы  $O$  и  
 $l$  — расстояние от точки  $S$  до точки  $A$ .

Обозначим через  $M$  массу противовеса и через  $I_S$  момент инерции противовеса относительно оси  $S$ .

Найдем дифференциальные уравнения движения нашей системы при действии на нее моментов  $M_x$ ,  $M_{x\pm}$  и при наличии маятникового противовеса, присоединенного к  $i$ -й массе. Для этой цели воспользуемся дифференциальными уравнениями движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = Q_k, \quad (37)$$

где, напомним, обозначают:

$T$  — кинетическую энергию системы,  
 $V$  — потенциальную энергию системы,  
 $\varphi_k$  — обобщенную координату  $k$ -й массы системы и  
 $Q_k$  — обобщенную силу, соответствующую  $\varphi_k$ .

В нашем случае обобщенными координатами будут служить углы отклонения масс от некоторой координатной плоскости, проходящей через ось вращения системы. Обобщенными силами будут являться моменты  $M_x$  и  $M_{x\pm}$ , действующие извне на систему.

Найдем  $T$  и  $V$  исследуемой системы. Величина  $T$  складывается из кинетической энергии вращающихся основных масс системы и кинетической энергии маятникового противовеса. Кинетическая энергия масс системы будет равна

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=n} I_x \dot{\varphi}_x^2. \quad (38)$$

Кинетическая энергия  $T_2$  маятникового противовеса будет

$$T_2 = \frac{1}{2} M v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}_m^2, \quad (39)$$

где  $v_S$  — скорость движения центра тяжести противовеса и  
 $\dot{\varphi}_m$  — угловая скорость вращения противовеса.

Согласно фиг. 194 имеем, что координаты точки  $S$  будут

$$\left. \begin{aligned} x_S &= r \sin \varphi_i + l \sin \varphi_m \\ y_S &= r \cos \varphi_i + l \cos \varphi_m \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Отсюда слагающие скорости  $v_S$  в направлении осей  $x$  и  $y$  будут

$$\left. \begin{aligned} v_{Sx} &= r \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i + l \dot{\varphi}_m \cos \varphi_m \\ v_{Sy} &= -r \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i - l \dot{\varphi}_m \sin \varphi_m \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Тогда  $v_S^2$  будет

$$\begin{aligned} v_S^2 &= v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2 = r^2 \dot{\varphi}_i^2 \cos^2 \varphi_i + l^2 \dot{\varphi}_m^2 \cos^2 \varphi_m + 2rl \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_m \cos \varphi_i \cos \varphi_m + \\ &+ r^2 \dot{\varphi}_i^2 \sin^2 \varphi_i + l^2 \dot{\varphi}_m^2 \sin^2 \varphi_m + 2rl \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_m \sin \varphi_i \sin \varphi_m = \\ &= r^2 \dot{\varphi}_i^2 + l^2 \dot{\varphi}_m^2 + 2rl \cos(\varphi_m - \varphi_i) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_m. \end{aligned} \quad (42)$$

На основании равенств (39) и (42) будем иметь

$$T_2 = \frac{1}{2} Mr^2 \dot{\varphi}_i^2 + \frac{1}{2} Ml^2 \dot{\varphi}_m^2 + Mrl \cos(\varphi_m - \varphi_i) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_m + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}_m^2. \quad (43)$$

Принимая во внимание равенства (43) и (38), получим для полной кинетической энергии системы  $T$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} I_k \dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2} Mr^2 \dot{\varphi}_i^2 + \frac{1}{2} Ml^2 \dot{\varphi}_m^2 + \\ &+ Mrl \cos(\varphi_m - \varphi_i) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_m + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}_m^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Потенциальная энергия системы  $V$  будет равна

$$V = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=n-1} c_x (\varphi_x - \varphi_{x+1})^2. \quad (45)$$

На основании равенств (37), (44) и (45) составим дифференциальные уравнения движения нашей системы. Получим сначала дифференциальное уравнение движения  $i$ -й массы системы, к которой присоединен маятниковый противовес, и дифференциальные уравнения движения этого последнего.







где  $\Delta$  является определителем следующей системы уравнений, получающейся известным образом из системы уравнений (21):

$$\left. \begin{aligned} -I_1 \Phi_1 \Theta_c^2 + c_1 (\Phi_1 - \Phi_2) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -J_i \Phi_i \Theta_c^2 + c_i (\Phi_i - \Phi_{i+1}) + c_{i-1} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) - J_1 \Phi_1 \Theta_c^2 - \\ &\quad \cdot - J_1 \omega^2 (\Phi_m - \Phi_i) = 0, \\ -J_2 \Phi_2 \Theta_c^2 - J_1 \Phi_1 \Theta_c^2 + J_1 \omega^2 (\Phi_m - \Phi_i) &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ -I_n \Phi_n \Theta_c^2 + c_{n-1} (\Phi_n - \Phi_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Определитель этой системы является функцией  $\omega$  — средней угловой скорости вращения системы (в моторах  $\omega$  — средняя угловая скорость вращения коленчатого вала мотора), что обуславливает следующее интересное свойство исследуемой системы:

„Частота свободных колебаний системы  $\Theta_c$  является функцией средней угловой скорости  $\omega$  вращения системы или, другими словами,  $\Theta_c$  зависит от числа оборотов в минуту  $n_m$  коленчатого вала мотора“.

Имея в виду, что

$$\text{для 2-тактных двигателей } n_c = kn_m, \quad (57)$$

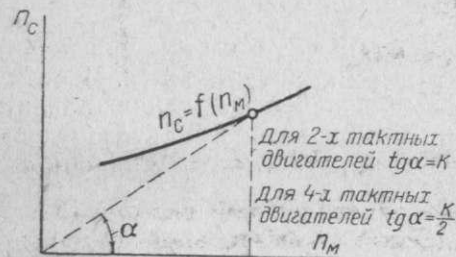
$$\text{а для 4-тактных двигателей } n_c = \frac{k}{2} n_m,$$

где  $n_c$  — число собственных колебаний системы в мин. и

$k$  — порядок резонирующей гармоник,

можно это положение сформулировать следующим образом:

„Резонансные числа оборотов мотора зависят от порядка резонирующей гармоник по более сложному, чем гиперболический, закону“.



Фиг. 194. К определению резонансного числа оборотов мотора, соответствующего резонансу гармоник  $k$ -го порядка.

Определение резонансных чисел оборотов мотора, соответствующих резонирующей гармонике  $k$ -го порядка, дано на фиг. 194.

II свойство исследуемой системы. Решения системы уравнений (54) имеют вид

$$\varphi_x = \Phi_x \cos(k\Theta t + \gamma_x). \quad (58)$$

Следовательно, для  $i$ -й массы системы, с которой соединен маятниковый противовес, будем иметь

$$\varphi_i = \Phi_i \cos(k\Theta t + \gamma_i). \quad (59)$$

Подставляя это выражение для  $\varphi_i$  в уравнение движения маятникового противовеса [см. систему уравнений (54)]

$$J_2 \ddot{\varphi}_m + J_1 \ddot{\varphi}_i + J_1 \omega^2 (\varphi_m - \varphi_i) = 0,$$

получим

$$J_2 \ddot{\varphi}_m - \Phi_i J_1 (k\Theta)^2 \cos(k\Theta t + \gamma_i) + J_1 \omega^2 \varphi_m - J_1 \omega^2 \Phi_i \cos(k\Theta t + \gamma_i) = 0$$

или

$$J_2 \ddot{\varphi}_m + J_1 \omega^2 \varphi_m = [(k\Theta)^2 + \omega^2] J_1 \Phi_i \cos(k\Theta t + \gamma_i). \quad (60)$$

Решение последнего уравнения будет иметь вид

$$\varphi_m = \Phi_m \cos(k\Theta t + \gamma_m), \quad (61)$$

причем амплитуда  $\Phi_m$  определяется из уравнения

$$-(k\Theta)^2 J_2 \Phi_m + \omega^2 J_1 \Phi_m = [(k\Theta)^2 + \omega^2] J_1 \Phi_i$$

и равна

$$\Phi_m = \frac{[(k\Theta)^2 + \omega^2] J_1}{\omega^2 J_1 - (k\Theta)^2 J_2} \Phi_i = a_k \Phi_i, \quad (62)$$

где

$$a_k = \frac{[(k\Theta)^2 + \omega^2] J_1}{\omega^2 J_1 - (k\Theta)^2 J_2}. \quad (63)$$

Принимая во внимание равенства (62), (61) и (59), получим

$$\varphi_m = a_k \Phi_i \cos(k\Theta t + \gamma_i) = a_k \varphi_i, \quad (64)$$

откуда

$$\dot{\varphi}_m = a_k \dot{\varphi}_i \text{ и } \ddot{\varphi}_m = a_k \ddot{\varphi}_i. \quad (65)$$

Сделаем теперь следующие преобразования системы уравнений (54): сложим дифференциальное уравнение движения маятникового противовеса с дифференциальным уравнением движения  $i$ -й массы системы, с которой соединен этот противовес, и заменим согласно равенству (65)  $\ddot{\varphi}_m$  через  $a_k \ddot{\varphi}_i$ . После этих преобразований система уравнения (54) примет вид

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= M_{1k} \cos(k\Theta t), \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= M_{2k} \cos(k\Theta t), \\ \dots \dots \dots \\ J_i \ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i + c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) &= M_{ik} \cos(k\Theta t), \\ \dots \dots \dots \\ I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + \dot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) + c_{n-2} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) &= \\ &= M_{n-1,k} \cos(k\Theta t), \\ I_n \ddot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_n + c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= M_{nk} \cos(k\Theta t), \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

где

$$J_i = J_i + J_1 + a_k (J_1 + J_2) = I_i + Mr^2 + Mrl + a_k (Mrl + I_s + MI^2). \quad (67)$$

Из рассмотрения системы уравнений (66), эквивалентной системе (54), вытекает второе интересное свойство исследуемой колебательной системы:

„В отношении крутильных колебаний исследуемая система эквивалентна системе основных масс без маятникового противовеса, в которой  $i$ -я масса  $I_i$ , к которой присоединен противовес, заменена маховой массой  $J_i$ , определяемой согласно равенству (67)\*“.

Заметим, что I и II свойства исследуемой системы имеют силу и в отношении колеблющейся системы с несколькими маятниковыми противовесами, соединенными с несколькими основными массами системы. Это положение легко доказывается и останавливаться на этом не будем.

III свойство исследуемой системы. Если подобрать величины  $J_1$  и  $J_2$ , входящие в выражение (63) для  $a_k$  так, чтобы

$$\omega^2 J_1 - (k\Theta)^2 J_2 = 0, \quad (68)$$

т. е. чтобы

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{Mrl}{I_s + MI^2} = \left( \frac{k\Theta}{\omega} \right)^2, \quad (69)$$

\* Отсюда следует, что частоту собственных колебаний системы с маятниковыми противовесами можно определять не только по уравнению (55), но и по уравнению равенства нулю определителя системы однородных уравнений, соответствующей системе (66). Практически это будет удобнее.



что даст для 2-тактных двигателей

$$\frac{Mrl}{I_S + Mr^2} = k^2, \quad (70)$$

а для 4-тактных

$$\frac{Mrl}{I_S + Mr^2} = \left(\frac{k}{2}\right)^2, \quad (70')$$

то  $a_k$  и  $J_i$  [см. равенство (67)] становятся бесконечно большими величинами. Отсюда, обращаясь к системе уравнений (66), вытекает третье интересное свойство исследуемой системы:

«Если маятниковый противовес, соединенный с  $i$ -й массой системы, будет настроен на  $k$ -й порядок — порядок приложенных к массам системы возбуждающих моментов, т. е. если будет удовлетворяться зависимость (69), то рассматриваемая система под действием этих моментов совершает крутильные колебания так, как если бы в месте расположения  $i$ -й массы системы находилась бесконечно большая масса».

Из этого свойства вытекают нижеуказанные следствия:

1. При наличии соотношения (69)  $i$ -я масса системы не будет совершать колебаний под действием на систему возбуждающих моментов  $k$ -го порядка, а будет вращаться равномерно с угловой скоростью  $\omega$ , т. е. при этом в месте расположения  $i$ -й массы образуется узел колебаний.

2. Под действием на систему возбуждающих моментов  $k$ -го порядка система при настроенном на этот же порядок маятниковом противовесе колеблется так, как если бы она состояла из двух самостоятельных частей, защемленных каждая в месте расположения  $i$ -й массы (с которой соединен маятниковый противовес) и возбуждаемых каждая теми моментами, которые действуют на расположенные на ней массы.

3. Под действием на систему возбуждающих моментов  $k$ -го порядка и при настроенном на этот же порядок маятниковом противовесе резонансные колебания исследуемой системы возникнут, когда частота  $(k\theta)$  совпадет с частотой собственных колебаний какого-либо из двух участков, указанных в следствии 2.

4. Под действием на систему возбуждающих моментов  $k$ -го порядка и при ненастроенном на этот порядок маятниковом противовесе резонансные колебания исследуемой системы возникнут, когда частота  $(k\theta)$  совпадает с частотой собственных колебаний всей колеблющейся системы. Это будет иметь место при числе оборотов мотора, определяемом согласно фиг. 194.

При действии на систему возбуждающих моментов  $k$ -го порядка и при настроенном на этот же порядок маятниковом противовесе, присоединенном к  $i$ -й массе системы, амплитуда колебания этой массы, как показано выше, равна нулю. Однако сам маятниковый противовес будет качаться с частотой возбуждающих моментов  $(k\theta)$ . Закон его качания не может быть получен из уравнения (64), так как входящие в его правую часть величины  $a_k = \infty$  и  $\Phi_i = 0$ , что дает неопределенность. Этот закон получается из дифференциального уравнения движения  $i$ -й массы системы, взятого из системы уравнений (54)

$$J_i \ddot{\varphi}_i + \xi_i \dot{\varphi}_i + c_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + J_1 \ddot{\varphi}_m - J_1 \omega^2 (\varphi_m - \varphi_i) = \mathfrak{M}_{ik} \cos(k\theta t). \quad (71)$$

Полагая в этом уравнении

$$\varphi_i = \dot{\varphi}_i = \ddot{\varphi}_i = 0,$$

получим

$$J_1 \ddot{\varphi}_m - J_1 \omega^2 \varphi_m = \mathfrak{M}_{ik} \cos(k\theta t) + c_i \varphi_{i+1} + c_{i-1} \varphi_{i-1}. \quad (72)$$

Так как  $\varphi_{i-1}$  и  $\varphi_{i+1}$  определяются раньше согласно сделанным замечаниям, то из последнего уравнения величина  $\varphi_m$  может быть определена обычным

способом. Закон качания маятникового противовеса будет

$$\varphi_m = \Phi_m \cos(k\theta t + \gamma_m). \quad (73)$$

III свойство исследуемой крутильной системы легко обобщить на систему, имеющую не один маятниковый противовес, а несколько, присоединенных к нескольким любым основным массам системы. В этом случае, если на систему действуют возбуждающие моменты  $k$ -го порядка, в системе образуются узлы колебаний в местах расположения тех основных масс системы, с которыми соединены маятниковые противовесы, настроенные на этот же порядок  $k$ .

При этих условиях вся колеблющаяся система может быть разбита на ряд отдельных, независимых друг от друга участков, имеющих защемления в указанных выше узлах. Резонансные явления в такой системе возникают, когда частота  $(k\theta)$  возбуждающих моментов совпадает с частотой собственных колебаний какого-либо из указанных участков системы. Каждый из таких участков совершает вынужденные колебания под действием тех возбуждающих моментов  $k$ -го порядка, которые действуют на этом участке.

IV свойство исследуемой системы. Из третьего свойства исследуемой системы вытекает ее четвертое свойство, которое может быть сформулировано так:

«Систему, находящуюся под действием возбуждающих моментов  $k$ -го порядка, можно совершенно освободить от крутильных колебаний этого порядка, если к тем массам, на которые действуют указанные возбуждающие моменты, присоединить маятниковые противовесы, настроенные на  $k$ -й порядок». В самом деле согласно доказанных выше положений имеем:

1. Все массы системы, к которым приложены возбуждающие моменты и с которыми соединены настроенные на порядок этих моментов маятниковые противовесы, не будут совершать колебаний этого порядка, а будут вращаться равномерно.

2. В отношении крутильных колебаний система разбивается на ряд отдельных систем с защемлениями в местах посадки масс с маятниковыми противовесами: так как между этими массами на систему возбуждающие моменты не действуют, то, следовательно, и колебаний масс, расположенных на этих участках, не будет.

Надо заметить, что хотя массы, с которыми соединены маятниковые противовесы, совершать крутильных колебаний не будут, сами противовесы такие колебания совершать будут. Для определения в этом случае закона колебания маятникового противовеса, соединенного, например, с  $i$ -й массой, обратимся к дифференциальному уравнению движения этой массы [см. систему уравнений (54)]. Имеем

$$J_i \ddot{\varphi}_i + \xi_i \dot{\varphi}_i + c_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + J_1 \ddot{\varphi}_m - J_1 \omega^2 (\varphi_m - \varphi_i) = \mathfrak{M}_{ik} \cos(k\theta t).$$

Полагая в этом уравнении

$$\varphi_i = \dot{\varphi}_i = \ddot{\varphi}_i = (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = 0,$$

получим

$$\ddot{\varphi}_m - \omega^2 \varphi_m = \frac{\mathfrak{M}_{ik}}{J_1} \cos(k\theta t). \quad (74)$$

Решением последнего уравнения будет

$$\varphi_m = \Phi_m \cos(k\theta t - \pi), \quad (75)$$

где

$$\Phi_m = \frac{\mathfrak{M}_{ik}}{J_1 [\omega^2 + (k\theta)^2]} = \frac{\mathfrak{M}_{ik}}{Mrl [\omega^2 + (k\theta)^2]}. \quad (76)$$

Имеем для 4-тактных двигателей

$$\Phi_m = \frac{M_{ik}}{Mr l \omega^2 \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)} \quad (77)$$

и для 2-тактных двигателей

$$\Phi_m = \frac{M_{ik}}{Mr l \omega^2 (1 + k^2)} \quad (78)$$

Таким образом в исследуемой системе, находящейся под действием возбуждающих моментов  $k$ -го порядка и имеющей на всех массах системы, подверженных действию этих моментов, маятниковые противовесы, настроенные на тот же порядок  $k$ , маятниковые противовесы колеблются с амплитудой, пропорциональной амплитуде возбуждающего момента, действующего на соответствующую массу системы, и обратно пропорциональной квадрату средней угловой скорости вращения системы.

Помимо этого амплитуда качания маятникового противовеса обратно пропорциональна произведению  $Mr l$ . В начале нашего исследования мы заменили точные нелинейные дифференциальные уравнения движения системы (46) и (50) приближенными линейными уравнениями (47) и (52), что было сделано в предположении возможности осуществить практически малую разность углов ( $\varphi_m - \varphi_i$ ). При крутильных колебаниях системы амплитуда угла  $\varphi_i$  бывает порядка  $1-3^\circ$ ; следовательно, для того чтобы разность ( $\varphi_m - \varphi_i$ ) была мала, необходимо, чтобы амплитуда угла  $\varphi_m$  была достаточно мала. Последнее достигается, как это видно из равенства (78), надлежащим выбором размеров маятникового противовеса — величин  $M$  и  $l$ , а также расстояния  $r$  от оси привеса маятникового противовеса до оси вращения системы.

Полученные свойства исследуемой системы дают возможность сделать заключение о применимости маятниковых противовесов в качестве устранителей критических резонансных крутильных колебаний в многомассовых системах. Положим, что у нас имеется многомассовая система, совершающая вынужденные крутильные колебания под действием возбуждающих моментов  $k$ -го порядка (порядок относится к одному циклу явления). Положим далее, что при некоторой средней угловой скорости вращения системы  $\omega$  наступает под действием вышеуказанных моментов резонанс системы. Очевидно, что это явление будет иметь место, когда частота возбуждающих колебаний моментов становится равной частоте собственных колебаний системы  $\Theta_c$ , т. е. когда

$$\left. \begin{aligned} &\text{для 2-тактных моторов } k\omega = \Theta_c \\ &\text{и} \\ &\text{для 4-тактных моторов } \frac{k}{2}\omega = \Theta_c. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Чтобы устранить этот резонанс системы, вызванной возбуждающими моментами  $k$ -го порядка, достаточно присоединить к какой-либо массе системы, надлежащим образом выбранной, маятниковый противовес, настроенный на тот же  $k$ -й порядок. Согласно третьему свойству исследованной системы, этот маятниковый противовес создает в системе узел колебаний в месте расположения той массы системы, с которой он соединен, и разбивает колеблющуюся систему на две самостоятельные колеблющиеся системы с защемлениями в вышеуказанном узле. Последние две системы будут обладать своими частотами собственных колебаний  $\Theta_c^I$  и  $\Theta_c^{II}$ , отличными от частоты собственных колебаний  $\Theta_c$  системы без противовеса. Поэтому при том числе оборотов мотора, при котором возбуждающие моменты  $k$ -го порядка создавали резонансные колебания системы без маятникового противовеса, эти возбуждающие моменты не будут создавать резонансных колебаний системы с маятниковым противовесом, и система освободится от резонанса, вызванного возбуждающими моментами  $k$ -го порядка. Резонансные колебания системы с маятниковым противовесом,

создаваемые возбуждающими моментами  $k$ -го порядка, смогут вновь возникнуть при числах оборотов мотора, определяемых из уравнений: для 2-тактных моторов

$$\left. \begin{aligned} n_c^I &= kn_m^I \\ n_c^{II} &= kn_m^{II} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

и для 4-тактных моторов:

$$\left. \begin{aligned} n_c^I &= \frac{k}{2} n_m^I \\ n_c^{II} &= \frac{k}{2} n_m^{II} \end{aligned} \right\} \quad (80')$$

где

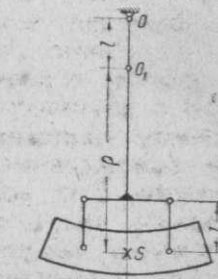
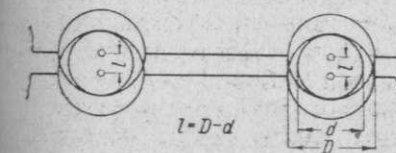
$$\left. \begin{aligned} n_c^I &= \frac{30}{\pi} \Theta_c^I \\ n_c^{II} &= \frac{30}{\pi} \Theta_c^{II} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Выбирая надлежащим образом месторасположение маятникового противовеса в колеблющейся системе, возможно подобрать  $\Theta_c^I$  и  $\Theta_c^{II}$  так, чтобы  $n_m^I$  и  $n_m^{II}$  не находились в эксплуатационной области числа оборотов мотора.

Если основная колеблющаяся система имеет в эксплуатационной области числа оборотов мотора несколько критических резонансных чисел оборотов —  $n_{m1}, n_{m2}, \dots$ , соответствующих резонансам  $k_1, k_2, \dots$  порядков, то постановкой в соответствующих местах колеблющейся системы соответствующего числа маятниковых противовесов, настроенных на порядки  $k_1, k_2, \dots$ , возможно ликвидировать резонансные пики этих порядков.

Таким образом маятниковые противовесы являются весьма сильным средством борьбы с крутильными колебаниями в установках, подверженных этим колебаниям.

Фиг. 195. Схема подвески маятникового противовеса конструкции Чилтона.



Фиг. 196. Схема маятникового противовеса конструкции Чилтона.

Остановимся теперь на некоторых соображениях о конструктивном выполнении маятниковых противовесов для указанных выше целей. Повидимому, наиболее удачным конструктивным решением вопроса является конструкция Чилтона (R. Chilton), схематически представленная на фиг. 195 и 196.

Трудность проектирования маятниковых противовесов заключается в том, что, как это видно из основного условия для этих противовесов (70) и (70'), при обычно резонирующих в авиационных моторах порядках  $k$  отношение  $\frac{r}{l}$  получается достаточно большим. Так как по габаритным условиям в моторе  $r$  является ограниченным по величине, то для  $l$  получаются малые значения, трудные для конструктивного выполнения противовеса. Эту задачу и решил успешно Чилтон в своей конструкции. Другая, более новая конструкция маятникового противовеса, запатентованная фирмой Wright, опубликована в журнале „Aircraft Engineering“, № 107 за 1938 г.

Физическая сущность обеих конструкций заключается в том, что противовесы представляют собой не физические маятники, а (фиг. 196) бесконечно большое число математических маятников с элементарными массами  $dm$  и длиной  $l$ . Вся выше выведенная теория остается в силе и для этого



типа маятниковых противовесов. Необходимо только во всех полученных соотношениях сделать следующие замены

$$\left. \begin{aligned} I_S &= 0, \\ r &= \rho, \\ Mr^2 &= I_m, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

и где (фиг. 196):

$\rho$  — расстояние центра тяжести противовеса от оси  $O_1$  (в его среднем положении) и

$I_m$  — массовый момент инерции противовеса (в его среднем положении) относительно оси  $O_1$ .

Ось  $O_1$  сдвинута относительно оси  $O$  в направлении центра тяжести противовеса на расстояние  $l$ .

Попутно заметим, что коэффициент  $a_k$ , определяемый согласно равенству (63):

$$a_k = \frac{[(k\theta)^2 + \omega^2] J_1}{\omega^2 J_1 - (k\theta)^2 J_2} = \frac{[(k\theta)^2 + \omega^2] Mr l}{\omega^2 Mr l - (k\theta)^2 (I_S + M l^2)},$$

получит при маятниках типа Чилтона выражение

$$a_k = \frac{1 + \left(\frac{k\theta}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{k\theta}{\omega}\right)^2 \frac{l}{\rho}}, \quad (83)$$

что дает:

для 2-тактных двигателей

$$a_k = \frac{1 + k^2}{1 - k^2 \frac{l}{\rho}}, \quad (83')$$

и для 4-тактных двигателей

$$a_k = \frac{1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{l}{\rho}}, \quad (83'')$$

Условие настройки (68) на порядок  $k$  для противовесов этого типа дает:

$$\left. \begin{aligned} \text{для 2-тактных двигателей } \frac{\rho}{l} &= k^2 \\ \text{и} \\ \text{для 4-тактных двигателей } \frac{\rho}{l} &= \left(\frac{k}{2}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Маятниковые противовесы особенно выгодны в звездообразных моторах. Наличие в этих моторах противовесов, уравнивающих силы инерции вращающихся масс кривошипно-шатунного механизма и силы инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс, позволяет без дополнительного увеличения веса мотора превратить эти противовесы путем соответствующего подвешивания в маятниковые противовесы, настроенные на нужный порядок  $k$ .

Что касается рядных моторов, то выбор места в системе для установки маятниковых противовесов зависит от двух требований:

1. Место расположения противовесов должно давать наиболее удачное решение задачи освобождения эксплуатационных чисел оборотов мотора от резонансных пик.

2. Место расположения противовесов должно давать возможность их размещения в системе мотора по габаритным условиям.

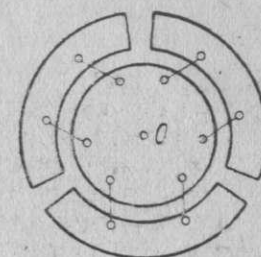
Наиболее удачное решение вопроса в этом отношении должна дать соответствующая практика моторостроения. Предварительные соображения

подсказывают возможность решения поставленного вопроса в двух направлениях:

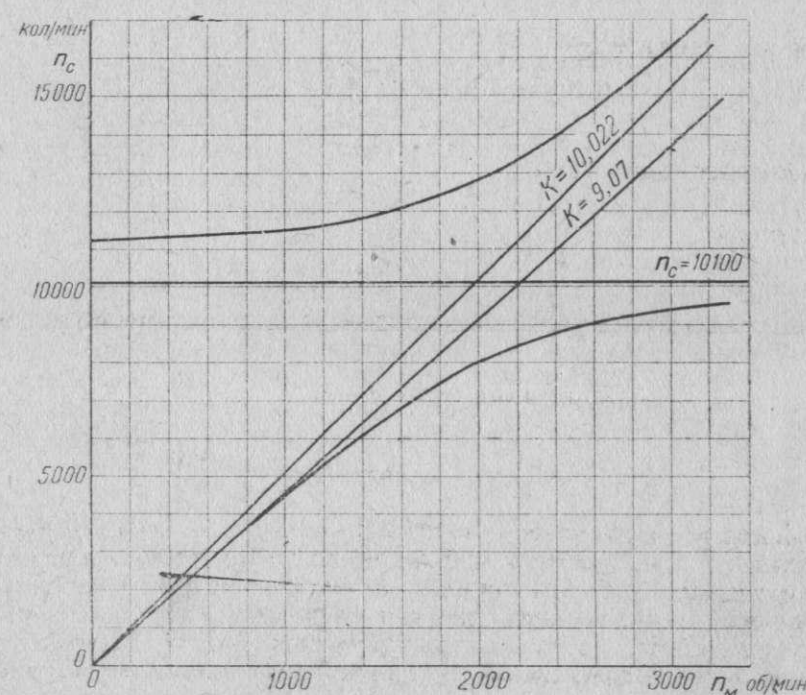
1. Устанавливать маятниковые противовесы на щеках некоторых колен вала мотора, заставляя эти противовесы служить двум целям: устранению критических резонансов и разгрузке опорных подшипников вала. При постановке таких противовесов следует, конечно, учитывать необходимость уравнивания развиваемых ими сил инерции.

2. Выполнять маятниковый противовес по схеме, представленной на фиг. 197.

Эта конструкция представляет собой специальный агрегат, состоящий из нескольких маятниковых противовесов (число их равно числу критических резонансных пик, от которых желают освободить мотор; обычно в авиационных моторах их бывает не более трех). Каждый из маятников настроен на свой порядок  $k$ , соответствующий одной из резонансных пик. Центробежные силы всей этой конструкции являются уравновешенными сами собой. Вся конструкция целиком помещается в том месте системы мотора, где она может наилучшим образом выполнить свою задачу и где для нее найдется место. Например, в моторах с редукторами ее можно расположить на переднем конце коленчатого вала мотора.



Фиг. 197. Схема одной из возможных конструкций маятникового демпфера крутильных колебаний.



Фиг. 198. Зависимость  $n_c$  от  $n_m$  для системы коленчатого вала мотора Curtiss-Wright «Cyclone».

Необходимо заметить, что в противоположность звездообразным моторам, постановка маятниковых противовесов в рядных моторах поведет к некоторому увеличению веса мотора; однако это должно полностью окупиться устранением критических резонансов в эксплуатационной области числа оборотов мотора и надежностью действия такой конструкции.



момент инерции ванта . . . . .	$I_1 = 102,8 \text{ кг см сек}^2$ ,
момент инерции колена без маятникового противовеса . . . . .	$I_2 = 7,08 \text{ "}$ ,
момент инерции маятникового противовеса относительно его центра тяжести . . . . .	$I_3 = 0,54 \text{ "}$ ,
длина маятника . . . . .	$l = 0,733 \text{ см}$ ,
расстояние центра тяжести маятникового противовеса до точки подвеса $O$ (фиг. 196) . . . .	$\rho = 14,867 \text{ см}$ ,
масса маятникового противовеса . . . . .	$M = 0,75 \text{ кг м}^{-1} \text{ сек}^2$ ,
крутильная жесткость коленчатого вала . . . . .	$c = 9,744 \cdot 10^6 \text{ кг см}$ ,

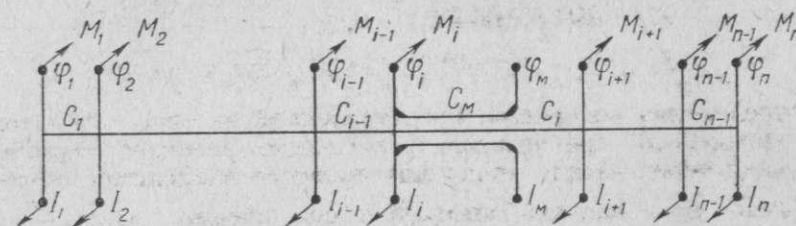
$$J_0 = Ml^2 = 0,00405$$

$$I_M = I_S + Mr^2 = 0,54 + 1,66 = 2,2 \text{ кг см сек}^2.$$

На фиг. 198 через начало координат проведены две прямые; одна из них, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен 10,022, касается в бесконечности верхней ветви кривой; другая прямая, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен 9,07, касается в начале координат нижней ветви кривой. Мы видим, что прямая, проходящая через начало координат и соответствующая  $k = 10$ , не пересекает кривой  $n_c = f(n_m)$ , а следовательно, порядок  $k = 10$  никогда не может вызвать резонансных крутильных колебаний рассматриваемой системы.

286

5%-я расстройка демпфера мотора Wright „Cyclone“ мало влияет на кривую, приведенную на фиг. 198; она сдвигает резонанс 9-й гармоники с  $n_m = 655$  об/мин. на  $n_m = 1160$  об/мин. и создает возможность резонанса 10-й гармоники, правда только теоретическую, так как резонанс этой гармоники имеет место при  $n_m = 4800$  об/мин.



Фиг. 199. Крутильная система с динамическим демпфером.

Система дифференциальных уравнений движения этой системы найдется обычным путем и будет

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + \xi_1 \dot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + \xi_2 \dot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= M_2, \\ I_i \ddot{\varphi}_i + \xi_i \dot{\varphi}_i + c_i (\varphi_i - \varphi_{i-1}) + c_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) - c_M (\varphi_M - \varphi_i) &= M_i, \\ I_M \ddot{\varphi}_M + c_M (\varphi_M - \varphi_i) &= 0, \\ . &. \\ I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + \xi_{n-1} \dot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) + c_{n-2} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) &= M_{n-1}, \\ I_n \ddot{\varphi}_n + \xi_n \dot{\varphi}_n + c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= M_n. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Решение этой системы уравнений приводится к решению систем, имеющих в правой части: 1) косинусовые фазовые слагающие гармоник отдельных порядков моментов  $M_r$  и 2) синусовые фазовые слагающие этих гармоник, например:



$$\begin{aligned}
I_1 \ddot{\varphi}_1 + \xi_1 \dot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= M_{1k} \cos(k\theta t), \\
I_2 \ddot{\varphi}_2 + \xi_2 \dot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= M_{2k} \cos(k\theta t), \\
\vdots & \\
I_i \ddot{\varphi}_i + \xi_i \dot{\varphi}_i + c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) - c_m (\varphi_m - \varphi_i) &= M_{ik} \cos(k\theta t), \\
I_m \ddot{\varphi}_m + c_m (\varphi_m - \varphi_i) &= 0, \\
\vdots & \\
I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + \xi_{n-1} \dot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) + c_{n-2} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) &= M_{n-1, k} \cos(k\theta t) \\
\text{и} & \\
I_n \ddot{\varphi}_n + \xi_n \dot{\varphi}_n + c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= M_{nk} \cos(k\theta t).
\end{aligned} \quad (86)$$

Поступая аналогично тому, как мы делали при исследовании систем с маятниковыми противовесами, будем иметь

$$\begin{aligned}
I_m \ddot{\varphi}_m + c_m (\varphi_m - \varphi_i) &= 0, \\
I_m \ddot{\varphi}_m + c_m \varphi_m &= c_m \varphi_i, \\
\frac{I_m}{c_m} \ddot{\varphi}_m + \varphi_m &= \varphi_i,
\end{aligned} \quad (87)$$

$$\varphi_i = \Phi_i \cos(k\theta t + \gamma_i), \quad (88)$$

$$\frac{I_m}{c_m} \ddot{\varphi}_m + \varphi_m = \Phi_i \cos(k\theta t + \gamma_i), \quad (89)$$

$$\varphi_m = \Phi_m \cos(k\theta t + \gamma_i), \quad (90)$$

$$\dot{\varphi}_m = -(k\theta) \Phi_m \sin(k\theta t + \gamma_i), \quad (91)$$

$$\ddot{\varphi}_m = -(k\theta)^2 \Phi_m \cos(k\theta t + \gamma_i), \quad (92)$$

$$-(k\theta)^2 \frac{I_m}{c_m} \Phi_m + \Phi_m = \Phi_i$$

и

$$\Phi_m = \frac{\Phi_i}{1 - (k\theta)^2 \frac{I_m}{c_m}} = a_k \Phi_i, \quad (93)$$

где

$$a_k = \frac{1}{1 - (k\theta)^2 \frac{I_m}{c_m}}, \quad (94)$$

$$\varphi_m = a_k \Phi_i \cos(k\theta t + \gamma_i) = a_k \varphi_i, \quad (95)$$

$$\dot{\varphi}_m = a_k \dot{\varphi}_i \quad \text{и} \quad \ddot{\varphi}_m = a_k \ddot{\varphi}_i. \quad (96)$$

Складывая [см. систему уравнений (86)] дифференциальное уравнение движения маховой массы динамического демпфера с дифференциальным уравнением движения  $i$ -й массы системы и принимая во внимание равенство (96), получим следующую систему дифференциальных уравнений движения нашей системы, эквивалентную системе (86)

$$\begin{aligned}
I_1 \ddot{\varphi}_1 + \xi_1 \dot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= M_{1k} \cos(k\theta t), \\
I_2 \ddot{\varphi}_2 + \xi_2 \dot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= M_{2k} \cos(k\theta t), \\
\vdots & \\
J_i \ddot{\varphi}_i + \xi_i \dot{\varphi}_i + c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) - c_m (\varphi_m - \varphi_i) &= M_{ik} \cos(k\theta t), \\
\vdots & \\
I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + \xi_{n-1} \dot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) + c_{n-2} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) &= \\
&= M_{n-1, k} \cos(k\theta t) \\
\text{и} & \\
I_n \ddot{\varphi}_n + \xi_n \dot{\varphi}_n + c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= M_{nk} \cos(k\theta t),
\end{aligned} \quad (97)$$

где

$$J_i = I_i + a_k I_m. \quad (98)$$

Таким образом и в случае системы с динамическим демпфером мы приходим к заключению, что движение системы определяется системой дифференциальных уравнений, написанной для основных масс колеблющейся системы без демпфера, если момент инерции  $i$ -й массы  $I_i$  заменить моментом инерции  $J_i$ , определяемым согласно равенству (98).

Частота собственных колебаний системы с демпфером определяется из условия равенства нулю определителя системы однородных уравнений, соответствующей системе (97).

Если настроить динамический демпфер на частоту возбуждающих моментов  $(k\theta)$ , т. е. если подобрать величины  $I_m$  и  $c_m$  демпфера такими, чтобы частота собственных колебаний системы, состоящий из  $I_m$  и  $c_m$  с заземлением на конце, была равна  $(k\theta)$ , то

$$(k\theta)^2 \frac{I_m}{c_m} = 1. \quad (99)$$

При этом условии  $a_k$  [выражение (94)] и  $J_i$  [выражение (98)] становятся бесконечно большими и система начинает колебаться так, как если бы  $i$ -я масса системы была заменена бесконечно большой массой.

Таким образом получается полная аналогия действия на систему маятникового противовеса с действием на систему динамического демпфера, с тем, однако, существенным отличием, что маятниковый противовес настраивается на порядок гармоник возбуждающего момента  $k$ , а динамический демпфер настраивается на частоту возбуждающего момента  $(k\theta)$ . Поэтому при помощи первого могут быть устранены резонансные крутильные колебания, создаваемые гармониками возбуждающих моментов соответствующего порядка, а при помощи второго — резонансные крутильные колебания, создаваемые гармониками возбуждающих моментов соответствующей частоты.

Легко видеть, что если к каждой массе системы, на которую действует гармонический возбуждающий момент частоты  $(k\theta)$ , присоединить динамический демпфер, настроенный на эту же частоту  $(k\theta)$ , то под действием этих возбуждающих моментов система не будет совершать крутильных колебаний. Однако масса демпфера будет совершать крутильные колебания по закону, который найдется из дифференциального уравнения движения  $i$ -й массы системы [см. систему уравнений (86)]

$$I_i \ddot{\varphi}_i + \xi_i \dot{\varphi}_i + c_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}) + c_{i-1} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) - c_m (\varphi_m - \varphi_i) = M_{ik} \cos(k\theta t).$$

Полагая в этом уравнении

$$\varphi_i = \dot{\varphi}_i = \ddot{\varphi}_i = (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = 0,$$

получим

$$-c_m \varphi_m = M_{ik} \cos(k\theta t),$$



откуда

$$\varphi_M = \Phi_M \cos(k\theta t - \pi), \quad (100)$$

где

$$\Phi_M = \frac{M_{ik}}{c_M}. \quad (101)$$

На дальнейшем исследовании свойств системы с динамическим демпфером останавливаться не будем.

## Глава VI

### НЕРАВНОМЕРНОСТЬ ХОДА МОТОРА

Крутильные колебания системы коленчатого вала авиационного мотора оказывают большое влияние на динамику последнего. Выше мы рассмотрели их влияние на прочность коленчатого вала мотора — этой основной детали, определяющей в значительной степени работоспособность всего мотора данной конструкции. Влияние крутильных колебаний на общую уравновешенность авиационного мотора мы рассмотрим в следующей части этой книги. Остановимся теперь на рассмотрении влияния крутильных колебаний на неравномерность хода мотора, которая является одним из элементов, определяющих общую динамику мотора.

#### § 1. Неравномерность хода мотора

Мы начнем с определения неравномерности хода мотора, принимая систему коленчатого вала мотора абсолютно жесткой на скручивание.

Неравномерностью хода мотора  $\delta$  называется отношение

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}, \quad (1)$$

где  $\omega_{\max}$  — максимальная угловая скорость вращения пропеллерного вала при работе мотора,

$\omega_{\min}$  — минимальная его скорость вращения и

$\omega_{\text{ср}}$  — средняя его скорость вращения.

Если  $n_{\text{пр}}$  число оборотов пропеллерного вала в минуту, то

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\pi}{30} n_{\text{пр}}. \quad (2)$$

Величины  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  определяются из диаграммы  $\omega = f(t)$ , которая, в свою очередь, строится на основании диаграммы суммарных тангенциальных усилий двигателя.

1-й случай — мотор без редуктора.

Обозначим через

$I$  — массовый момент инерции относительно оси коленчатого вала всех вращающихся с валом масс и массы  $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) \sum M$ , сосредоточенной на расстоянии  $r$  от оси вращения, равном радиусу кривошипа  $R$ ; здесь  $\sum M$  — сумма поступательно двигающихся масс во всех цилиндрах двигателя;

$M_{\text{вн}}$  — внешний момент, действующий на вал, и

$M_{\text{в}}$  — рабочий момент двигателя на валу.

Уравнение движения системы вала напишется в виде

$$M_{\text{в}} + M_{\text{вн}} - I \frac{d\omega}{dt} = 0. \quad (3)$$

Отсюда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I} (M_{\text{в}} + M_{\text{вн}}) \quad (4)$$

и

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{I} \int_1^2 (M_{\text{в}} + M_{\text{вн}}) dt. \quad (5)$$

Пренебрегая изменением момента  $M_{\text{вн}}$  в зависимости от  $\omega \neq \text{const}$ , т. е. полагая

$$M_{\text{вн}} = \text{const},$$

мы можем (фиг. 200, а и б) построить диаграмму  $\omega = f(t)$ , пользуясь диаграммой суммарного крутящего момента двигателя на валу

$$M_{\text{в}} = \varphi(t).$$

Если  $\omega_A$  — угловая скорость вала, соответствующая точке А, и  $\omega_B$  — то же для точки В, то согласно равенству (5) имеем

$$\begin{aligned} \omega_B - \omega_A &= \\ &= \frac{1}{I} \int_A^B (M_{\text{в}} + M_{\text{вн}}) dt = A. \end{aligned} \quad (6)$$

Величина А (в соответствующем масштабе) равна алгебраической сумме заштрихованных на фиг. 200, а площадей. Пользуясь соотношением (6), можно построить (фиг. 200, б) кривую

$$\omega - \omega_A = \psi(t).$$

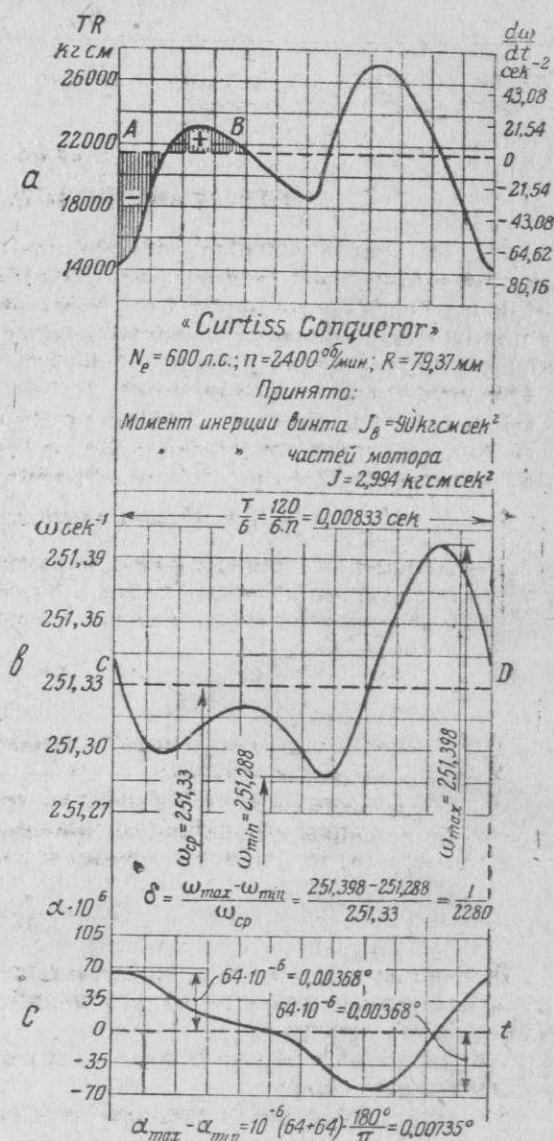
Проведя среднюю по площади ординату  $CD$  и проведя на расстоянии  $\omega_{\text{ср}} = \frac{4\pi}{T}$  (где  $T$  — время, соответствующее повороту вала на угол  $4\pi$ ) от нее новую ось абсцис  $Ot$ , мы получим кривую  $\omega = f(t)$ , отнесенную к системе координат  $(\omega Ot)$ . По этой кривой находим  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ ; очевидно, что они будут соответствовать одним из тех точек кривой  $M_{\text{в}} = \varphi(t)$ , для которых  $|M_{\text{в}}| = |M_{\text{вн}}|$  ( $\frac{d\omega}{dt} = 0$ ).

При помощи фиг. 201, б мы можем получить диаграмму угловых колебаний коленчатого вала. Если мы на ось коленчатого вала посадим свободно диск и заставим его равномерно вращаться с угловой скоростью  $\omega_{\text{ср}}$ , то, обозначая через  $\alpha$  — угол поворота коленчатого вала от начального положения за время  $t$  и  $\alpha_1$  — угол поворота диска за это же время  $t$ , будем иметь

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega; \quad d\alpha = \omega dt; \quad \frac{d\alpha_1}{dt} = \omega_{\text{ср}}; \quad d\alpha_1 = \omega_{\text{ср}} dt,$$

$$d(\alpha - \alpha_1) = (\omega - \omega_{\text{ср}}) dt,$$

$$(\alpha - \alpha_1) = \int_1^2 (\omega - \omega_{\text{ср}}) dt. \quad (7)$$



Фиг. 200. а. Суммарные крутящие моменты и угловые ускорения коленчатого вала мотора Curtiss „Conqueror“;

б. Угловые скорости коленчатого вала мотора Curtiss „Conqueror“;

с. Кривая  $\alpha = \theta(t)$  мотора Curtiss „Conqueror“.



Согласно этому соотношению, аналогично тому, как (фиг. 200, б) строилась диаграмма  $\omega - \omega_A = \psi(t)$ , может быть построена (фиг. 200, с) диаграмма

$$\alpha - \alpha_1 = \Phi(t).$$

Проведя среднюю по площади ординату  $Ot$ , получим кривую

$$\alpha = \Theta(t),$$

отнесенную к системе координат  $(\alpha, Ot)$ .

Таким образом движение вала будет складываться из двух движений:

1) из равномерного вращательного движения с постоянной угловой скоростью  $\omega_{cp}$  и

2) из относительного колебательного движения, совершающегося по

закону  $\alpha = \Theta(t)$ , данному на фиг. 200, с.

2-й случай — мотор с редуктором.

За положительное направление моментов и угловых скоростей принимаем направление вращения коленчатого вала мотора:

Обозначим через

$\omega_{np}$  — угловую скорость вращения пропеллерного вала;

$\omega$  — угловую скорость вращения вала мотора;

$z_1$  — число зубьев шестерни моторного вала;

$z_2$  — число зубьев шестерни пропеллерного вала;

$r_2$  — радиус средней окружности зубьев шестерни пропеллерного вала;

$r_1$  — то же шестерни моторного вала;

$k$  — передаточное число редуктора, равное

$$k = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_{np}}{\omega}, \quad (8)$$

$P$  — окружное усилие на зубьях шестерен;

$I_{np}$  — массовый момент инерции относительно оси пропеллерного вала масс, вращающихся с этим валом;

$I$  — массовый момент инерции относительно оси вала мотора всех вращающихся с этим валом масс и массы  $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}\lambda^2) \sum M_n$ , сосредоточенной на расстоянии от оси вращения, равном радиусу кривошипа  $R$ ; здесь  $\sum M_n$  — сумма поступательно двигающихся масс во всех цилиндрах двигателя;

$M_{вн}$  — внешний момент, действующий на пропеллерный вал;

$M_{в}$  — рабочий момент двигателя на коленчатом валу.

Имеем:

1) дифференциальное уравнение движения для вала мотора

$$M_{в} - I \frac{d\omega}{dt} - Pr_1 = 0 \quad (9)$$

и 2) дифференциальное уравнение движения для вала пропеллера

$$-Pr_2 - I_{np} \frac{d\omega_{np}}{dt} + M_{вн} = 0. \quad (10)$$

Отсюда

$$Pr_1 = -I \frac{d\omega}{dt} + M_{в} \quad (9')$$

и

$$Pr_2 = -k I_{np} \frac{d\omega}{dt} + M_{вн}. \quad (10')$$

Исключая из этих уравнений  $P$ , будем иметь

$$(I + k^2 I_{np}) \frac{d\omega}{dt} = M_{в} + k M_{вн}, \quad (11)$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I + k^2 I_{np}} (M_{в} + k M_{вн}). \quad (12)$$

Для определения  $\frac{d\omega_{np}}{dt}$  будем иметь соотношение

$$\frac{d\omega_{np}}{dt} = k \frac{d\omega}{dt}. \quad (13)$$

Из последнего равенства видно, что

$$\delta = \frac{\omega_{np \max} - \omega_{np \min}}{\omega_{np \text{ ср}}} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}, \quad (14)$$

а поэтому при определении неравномерности хода мотора  $\delta$  является безразличным, из чего исходить: из  $\omega_{np}$  или из  $\omega$ .

Необходимо иметь в виду, что моменты  $M_{в}$  и  $M_{вн}$  определяются по эффективной мощности мотора.

Пользуясь соотношением (12), мы можем (аналогично тому, как это делалось для случая мотора без редуктора) построить кривые  $\omega = f(t)$  и  $\alpha = \Theta(t)$ , а по ним определить  $\delta$  и максимальные угловые отклонения редукторного вала или вала мотора в их относительных движениях.

На фиг. 201 даны для мотора BMW-VI 7,3 Z в зависимости от угла поворота коленчатого вала  $\alpha$  кривые:

$M_{в} = \varphi(\alpha)$  — суммарный крутящий момент на валу двигателя (фиг. 201, а),

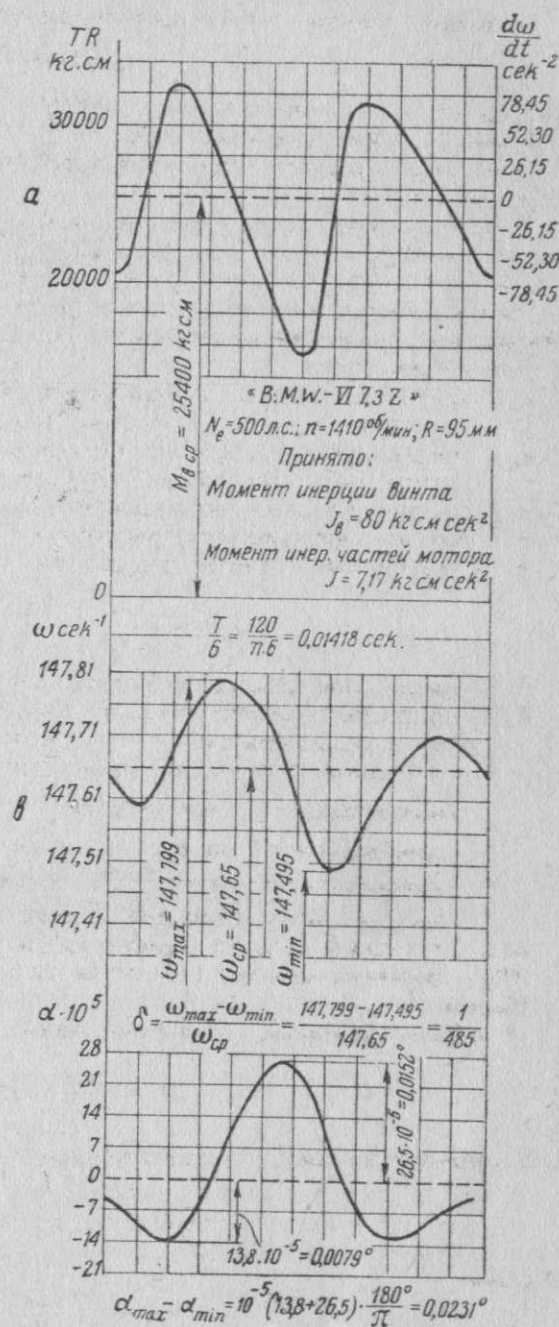
$\omega = f(\alpha)$  — угловая скорость вала (фиг. 201, б),

$\alpha = \Theta(\alpha)$  — углы отклонения вала в относительном движении (фиг. 201, с).

Как видно из кривых, для этого мотора  $\delta = \frac{1}{485}$  и  $\alpha_{\max} = 0,0152^\circ$ .

Мы рассмотрели определение неравномерности хода мотора  $\delta$ , принимая, что система коленчатого вала мотора абсолютно жестка на скручивание.

При этом предположении все сечения системы коленчатого вала мотора имеют одинаковую неравномерность хода  $\delta$ . В действительности система



Фиг. 201. а. Суммарные крутящие моменты и угловые ускорения коленчатого вала мотора BMW-VI 7,3 Z;

б. Угловые скорости коленчатого вала мотора BMW-VI-7,3 Z;

с. Кривая  $\alpha = \Theta(t)$  мотора BMW-VI-7,3 Z.



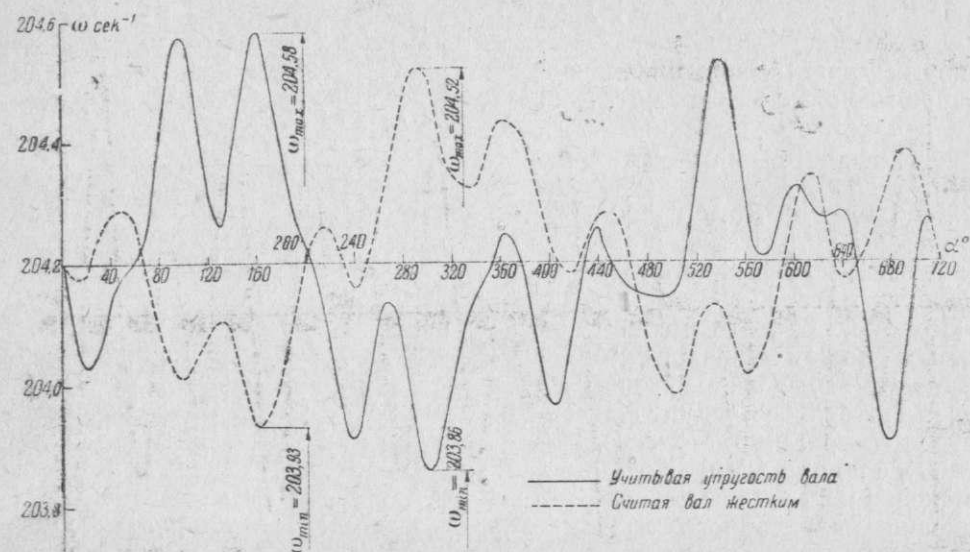
коленчатого вала является упругой на скручивание и действующие на эту систему силы вызывают ее крутильные колебания; при этом каждое сечение системы совершает свое колебательное движение, определяемое уравнением вида (90), глава III:

$$\varphi_i = \Phi_{i0} + \sum_{k=1}^{k=p} [x_{ik} \cos(k\theta t) + y_{ik} \sin(k\theta t)]. \quad (15)$$

Поэтому каждое сечение  $i$  системы будет иметь свою неравномерность хода  $\delta_i$ . Для определения  $\delta_i$  находим закон изменения по времени угловой скорости  $\dot{\varphi}_i$   $i$ -го сечения системы.

Имеем

$$\dot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^{k=p} [k\theta y_{ik} \cos(k\theta t) - k\theta x_{ik} \sin(k\theta t)]. \quad (16)$$



Фиг. 202. Угловые скорости пропеллера мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

Так как выражение (15) для  $\varphi_i$  является известным в аналитической форме из расчета на крутильные колебания системы коленчатого вала мотора, то выражение (16) для  $\dot{\varphi}_i$  тоже может быть легко найдено в аналитической форме.

Уравнение (16) позволяет построить графически кривую изменения угловой скорости  $\dot{\varphi}_i$  по времени  $t$ . Если

$(\dot{\varphi}_i)_{\max}$  — максимальное положительное значение скорости  $\dot{\varphi}_i$ ,

$(\dot{\varphi}_i)_{\min}$  — максимальное отрицательное значение скорости  $\dot{\varphi}_i$ ,

$(\omega_i)_{\text{ср}}$  — средняя угловая скорость вращения  $i$ -го сечения системы, то неравномерность хода  $i$ -го сечения системы будет равна

$$\delta_i = \frac{(\omega_i)_{\max} - (\omega_i)_{\min}}{(\omega_i)_{\text{ср}}} = \frac{(\dot{\varphi}_i)_{\max} + (\dot{\varphi}_i)_{\min}}{(\omega_i)_{\text{ср}}}, \quad (17)$$

причем в числителе этого выражения складываются абсолютные значения величин  $(\dot{\varphi}_i)_{\max}$  и  $(\dot{\varphi}_i)_{\min}$ .

На фиг. 202 в виде примера даны две кривые, представляющие угловые скорости вращения пропеллера мотора Wright „Cyclone“ в зависимости от угла поворота коленчатого вала  $\alpha$ ; кривые построены с учетом влияния маятникового демпфера крутильных колебаний; одна из кривых построена при том условии, что вал мотора является абсолютно жестким на кручение,

а другая — с учетом действительной его упругости. В первом случае неравномерность хода пропеллера получилась равной

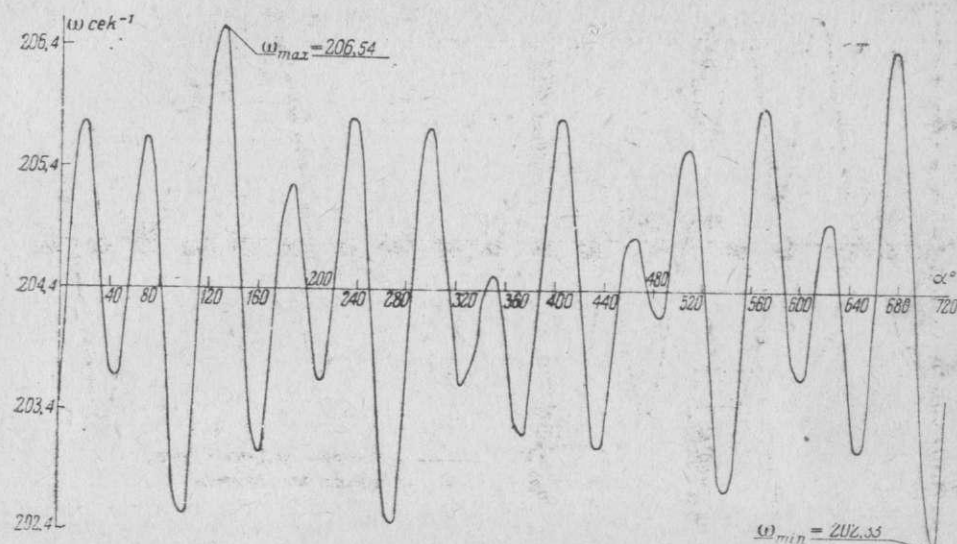
$$\delta_1 = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{204,52 - 203,93}{204,2} = \frac{1}{346}.$$

Во втором случае неравномерность хода пропеллера равна

$$\delta_1 = \frac{204,58 - 203,86}{204,2} = \frac{1}{284}.$$

На фиг. 203 дана в зависимости от угла  $\alpha$  кривая изменения угловой скорости колена вала мотора Wright „Cyclone“, построенная с учетом влияния маятникового демпфера крутильных колебаний и упругости вала. Согласно этой кривой неравномерность хода колена равна

$$\delta = \frac{206,54 - 202,33}{204,4} = \frac{1}{48,5}.$$



Фиг. 203. Угловые скорости колена мотора Curtiss-Wright „Cyclone“.

Без учета крутильных колебаний неравномерность хода колена была бы равна  $\delta = \frac{1}{346}$ , т. е. была бы в  $\frac{346}{48,5} = 7,15$  раз меньше. Таким образом влияние крутильных колебаний на неравномерность хода очень значительно, вследствие чего при определении неравномерности хода необходимо учитывать крутильные колебания системы.

## § 2. Неравномерность момента внешнего сопротивления $M_{\text{вн}}$

Для воздушных винтов имеет место соотношение

$$M_{\text{вн}} = k\omega^2, \quad (18)$$

где  $k$  — постоянная,

$\omega$  — угловая скорость вращения винта.

Так как согласно предыдущему  $\omega \neq \text{const}$ , то, вообще говоря,  $M_{\text{вн}} \neq \text{const}$ .

Если  $\delta_m$  — неравномерность момента  $M_{\text{вн}}$ , то на основании соотношения (18) имеем

$$\delta_m = \frac{M_{\text{вн max}} - M_{\text{вн min}}}{M_{\text{вн ср}}} = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_{\text{ср}}^2}. \quad (19)$$



Если  $\delta$  — неравномерность хода мотора, то

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}$$

Отсюда

$$\frac{\delta_M}{\delta} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}$$

Полагая приближенно

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (\omega_{\max} + \omega_{\min}),$$

получим

$$\delta_M = 2\delta, \quad (20)$$

т. е. неравномерность момента внешнего сопротивления  $M_{\text{вн}}$  в два раза больше неравномерности хода мотора.

Отсюда видно, что при существующих в авиационных моторах значениях величин  $\delta$  мы можем при построении диаграмм  $\omega = f(t)$  и  $\alpha = \Theta(t)$  принимать  $M_{\text{вн}}$  постоянным, как это и было сделано выше.

Под неуравновешенными силами в моторе в широком смысле надлежит понимать все силы, уравнивание которых приходится на долю опор мотора. Реакции опор мотора определяют, применяя принцип д'Аламбера, согласно которому действующие на систему внешние силы и силы инерции двигающихся масс системы находятся в равновесии. К внешним силам, действующим на мотор, относятся:

- 1) вес мотора,
- 2) давление окружающей среды на мотор,
- 3) реакции отходящих газов и жидкостей,
- 4) внешнее сопротивление вращению пропеллера и
- 5) опорные реакции мотора.

К силам инерции двигающихся масс мотора относятся:

- 1) силы инерции поступательно двигающихся масс в цилиндрах двигателя;
- 2) центробежные силы инерции вращающихся масс двигателя;
- 3) тангенциальные силы инерции вращающихся масс, образующиеся благодаря тому, что угловая скорость вращения коленчатого вала мотора  $\omega$  не является, вообще говоря, постоянной;
- 4) моменты от пар сил инерции шатунов  $\Pi_L$ .

Не все из перечисленных сил оказывают влияние на динамическую уравновешенность мотора. Динамически неуравновешенным мотором считается такой, который имеет стремление вибрировать при работе и вызывать вибрационные движения установки. Поэтому на динамическую уравновешенность мотора оказывают влияние только периодически переменные силы, а силы постоянные с точки зрения динамического уравнивания никакого значения не имеют.

Исходя из этого, под динамическим уравниванием мотора надлежит понимать такое комбинирование неуравновешенных сил, которое ведет к получению равнодействующих сил или моментов, постоянных по величине и направлению или в частном случае равных нулю.

Возвращаясь к вышеперечисленным силам, действующим на мотор, мы видим, что динамическую неуравновешенность мотора могут вызвать только:

- 1) силы инерции двигающихся масс,
- 2) внешнее сопротивление вращению коленчатого вала мотора,
- 3) реакции выхлопных газов.

Реакция выхлопных газов определяется по формуле

$$P = \frac{dm}{dt} v = Mv, \quad (1)$$

где  $M = \frac{dm}{dt}$  — секундная масса для данного момента вытекающих газов,

$v$  — скорость газов в выходном сечении.

Величина реакции выхлопных газов в авиационных моторах является незначительной, не оказывающей практического влияния на уравновешенность мотора; поэтому ее во внимание не принимают.

Момент внешнего сопротивления вращению коленчатого вала мотора является при существующих для авиационных моторов неравномерностях момента внешнего сопротивления  $M_{\text{вн}}$  величиной тоже практически постоянной, поэтому и  $M_{\text{вн}}$  практически не оказывает влияния на уравновешенность мотора и во внимание не принимается.

Таким образом динамическая неуравновешенность двигателя обуславливается только силами инерции двигающихся масс.

Тангенциальные силы инерции вращающихся масс, образующиеся, как указано выше, вследствие того, что угловая скорость  $\omega$  вращения вала мотора не является постоянной, создают в авиационных моторах (в которых центробежные силы инерции вращающихся масс обычно уравновешены) суммарный вращающий момент, передающийся на опоры мотора. Этот момент  $M_{\phi}$  в случае мотора без редуктора определится из уравнения

$$M_{\phi} = -I \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

а в случае мотора с редуктором из уравнения

$$M_{\phi} = -I \frac{d\omega}{dt} - I_{\text{пр}} \frac{d\omega_{\text{пр}}}{dt} \quad (3)$$

Значения входящих в эти уравнения величин даны в главе VI части III книги. Принимая во внимание равенства (4) и (12) указанной главы, будем иметь для случая мотора без редуктора

$$M_{\phi} = -I \frac{d\omega}{dt} = (M_{\text{в}} + M_{\text{мн}}) \quad (4)$$

и для случая мотора с редуктором

$$\begin{aligned} M_{\phi} &= -I \frac{d\omega}{dt} - I_{\text{пр}} \frac{d\omega_{\text{пр}}}{dt} = -(I + kI_{\text{пр}}) \frac{d\omega}{dt} = \\ &= -\frac{I + kI_{\text{пр}}}{1 + k^2 I_{\text{пр}}} (M_{\text{в}} + kM_{\text{мн}}). \end{aligned} \quad (5)$$

В современных авиационных моторах момент  $M_{\phi}$  остается обычно неуравновешенным, хотя в случае мотора с редуктором, создающим вращение пропеллера, обратное направлению вращения коленчатого вала мотора, теоретически возможно получить  $M_{\phi} = 0$ ; в этом случае коэффициент  $k$  отрицателен и согласно равенству (5)  $M_{\phi} = 0$ , когда вращающиеся массы системы таковы, что удовлетворяется соотношение

$$I + kI_{\text{пр}} = 0$$

или

$$\frac{I}{I_{\text{пр}}} = -k.$$

Практически в авиационных моторах такое соотношение моментов инерции  $I$  и  $I_{\text{пр}}$  неосуществимо.

В случае мотора с редуктором, у которого пропеллерный вал вращается в одном направлении с коленчатым валом мотора, коэффициент  $k$  положителен; отсюда можно сделать заключение, что для одного и того же мотора при одинаковых  $I$ ,  $I_{\text{пр}}$  и коэффициенте редукции  $k$  получается большая уравновешенность мотора в отношении момента  $M_{\phi}$  при такой конструкции редуктора, когда пропеллерный вал имеет направление вращения, обратное направлению вращения коленчатого вала мотора. В этом случае переменная часть момента  $M_{\phi}$  получается в

$$\frac{I + kI_{\text{пр}}}{I - kI_{\text{пр}}}$$

раз меньше, чем в случае, когда пропеллерный вал имеет направление вращения, одинаковое с направлением вращения коленчатого вала мотора.

Суммируя все вышеизложенное, мы приходим к заключению, что задача динамического уравновешивания авиационного мотора приводится к задаче уравновешивания сил инерции вращательно и поступательно двигающихся масс мотора. Моменты от пар  $H_c$  сил инерции шатунов, ввиду их малой величины, во внимание не принимаются.

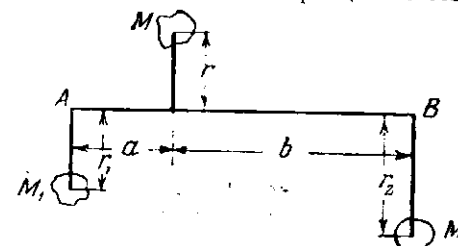
## Глава I

### УРАВНОВЕШИВАНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС ДВИГАТЕЛЯ

#### § 1. Уравновешивание сил инерции вращающихся масс

Силу инерции любой массы  $M$  (фиг. 204), равномерно вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  около оси  $AB$ , можно всегда уравновесить силами инерции двух масс  $M_1$  и  $M_2$ , равномерно вращающихся около оси  $AB$  с той же угловой скоростью  $\omega$ , причем центры тяжести всех трех масс  $M$ ,  $M_1$  и  $M_2$  находятся в одной плоскости с осью вращения  $AB$ . Если  $r$ ,  $r_1$  и  $r_2$  обозначают соответственно расстояния центров тяжести масс  $M$ ,  $M_1$  и  $M_2$  от оси вращения  $AB$ , а  $P$ ,  $P_1$  и  $P_2$  — соответственно центробежные силы инерции этих масс, то

$$\left. \begin{aligned} P &= Mr\omega^2, \\ P_1 &= M_1 r_1 \omega^2 \\ P_2 &= M_2 r_2 \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Фиг. 204. К уравновешиванию сил инерции двух вращающихся масс.

Чтобы силы  $P_1$  и  $P_2$  уравновешивали силу  $P$ , необходимо наличие соотношений

$$\left. \begin{aligned} M_1 r_1 + M_2 r_2 &= Mr \\ M_1 r_1 a &= M_2 r_2 b, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

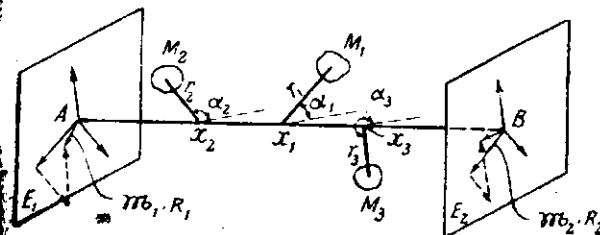
и

откуда

$$M_1 = M \frac{r}{r_1} \frac{b}{(a+b)} \quad (3)$$

$$M_2 = M \frac{r}{r_2} \frac{a}{(a+b)} \quad (4)$$

Величины  $a$ ,  $b$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $M_1$  и  $M_2$ , связанные между собой и с величинами  $M$  и  $r$  уравнениями (2), выбираются для каждого отдельного случая, исходя из конструктивных возможностей размещения масс  $M_1$  и  $M_2$  и из соображений получения наименьшей массы  $(M_1 + M_2)$ .



Фиг. 205. К уравновешиванию сил инерции нескольких вращающихся масс.

В том случае, когда имеет несколько масс, равномерно вращающихся около оси  $AB$  и имеющих центры тяжести, не лежащими в одной плоскости, проходящей через ось  $AB$ , силы инерции этих масс можно тоже уравновесить силами инерции двух масс, центры тяжести которых лежат в любых плоскостях  $E_1$  и  $E_2$  (фиг. 205). Для определения величины этих масс и

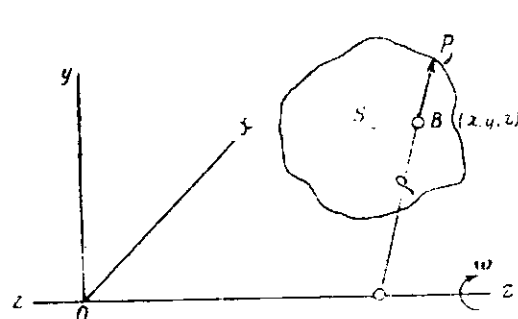


расположения их центров тяжести относительно оси вращения  $AB$  проводим через ось  $AB$  и центр тяжести каждой из уравниваемых масс плоскости до пересечения с плоскостями  $E_1$  и  $E_2$ . Согласно вышеизложенному находим уравнивающие силу инерции каждой из уравниваемых масс. Эти уравнивающие будут направлены по линиям пересечения плоскостей  $E_1$  и  $E_2$  с соответствующей плоскостью, проходящей через центр тяжести рассматриваемой уравниваемой массы и ось  $AB$ . Таким образом в плоскостях  $E_1$  и  $E_2$  получим ряд проходящих через ось  $AB$  сил, определенных по величине и направлению и представляющих собой уравнивающие силы инерции уравниваемых масс. Складывая геометрически силы, лежащие в каждой из плоскостей  $E_1$  и  $E_2$ , получим для каждой плоскости соответственно результирующий уравнивающий вектор  $M_1 R_1$  и  $M_2 R_2$ . Отсюда определяем величины  $M_1$ ,  $R_1$ ,  $M_2$  и  $R_2$ . Выбор плоскостей  $E_1$  и  $E_2$  и конфигурации масс  $M_1$  и  $M_2$  зависит в каждом отдельном случае от конструктивных возможностей и связан с соображениями получения наименьшей массы ( $M_1 + M_2$ ).

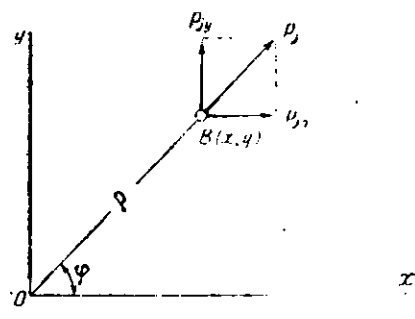
## § 2. Общий признак полной уравниваемости равномерно вращающегося тела

Положим (фиг. 206), что твердое тело массы  $M$  с центром тяжести  $S$  вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $zz$ . Сила инерции элементарной массы  $dm$ , сосредоточенной в точке  $B$  и лежащей на расстоянии  $r$  от оси  $zz$ , будет равна

$$p_j = -dm r \omega^2 \quad (5)$$



Фиг. 206. К определению сил инерции равномерно вращающейся массы.



Фиг. 207. К определению сил инерции равномерно вращающейся массы.

и будет направлена перпендикулярно оси  $zz$ , пересекая последнюю; знак минус показывает, что сила  $p_j$  направлена от оси  $zz$  к точке  $B$ .

Возьмем в системе тела систему координат  $xuz$ , равномерно вращающуюся вместе с телом вокруг оси  $zz$ . Каждую из элементарных сил  $p_j$  разложим на две составляющие:

- $p_{jx}$ , направленную по оси  $x$ , и
- $p_{jy}$ , направленную по оси  $y$ .

Если  $x$ ,  $y$  и  $z$  — координаты точки  $B$  относительно системы координат  $xuz$ , то (фиг. 207)

$$p_{jx} = -p_j \cos \varphi = -dm \omega^2 r \cos \varphi = -\omega^2 dm x \quad (6)$$

$$p_{jy} = -p_j \sin \varphi = -dm \omega^2 r \sin \varphi = -\omega^2 dm y \quad (7)$$

Результирующие сил  $p_j$  в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  будут

$$\sum_x p_j = \sum p_{jx} = -\omega^2 \sum dm x = -\omega^2 M x_S \quad (8)$$

$$\sum_y p_j = \sum p_{jy} = -\omega^2 \sum dm y = -\omega^2 M y_S \quad (9)$$

$$\sum_z p_j = 0 \quad (10)$$

где  $x_S$  и  $y_S$  — координаты центра тяжести.

Результирующие моменты сил  $p_j$  относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  будут

$$M_x = \sum p_{jy} z = -\omega^2 \sum dm y z = -\omega^2 I_{yz} \quad (11)$$

$$M_y = \sum p_{jx} z = -\omega^2 \sum dm x z = -\omega^2 I_{xz} \quad (12)$$

$$M_z = 0 \quad (13)$$

где  $I_{yz}$  — центробежный момент инерции тела относительно осей  $y$  и  $z$ ,

$I_{xz}$  — центробежный момент инерции тела относительно осей  $x$  и  $z$ .

Для уравнивания рассматриваемого вращающегося тела в отношении сил инерции необходимо, чтобы

$$\sum_x p_j = 0, \quad \sum_y p_j = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0 \quad (14)$$

Равенства (14) будут иметь место, когда

$$1. \quad x_S = y_S = 0, \quad (15)$$

т. е. центр тяжести тела должен лежать на оси вращения  $zz$ : это — условие статической уравниваемости вращающегося тела;

$$2. \quad I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad (16)$$

т. е. центробежные моменты инерции  $I_{xz}$  и  $I_{yz}$  должны равняться нулю; это — условие динамической уравниваемости вращающегося тела.

Условия (15) и (16) дают следующий, совершенно общий признак уравниваемости сил инерции массы  $M$ , равномерно вращающейся около оси  $zz$ :

«условием уравниваемости сил инерции массы  $M$ , равномерно вращающейся около оси  $zz$ , является совпадение этой оси с одной из главных осей инерции вращающейся массы».

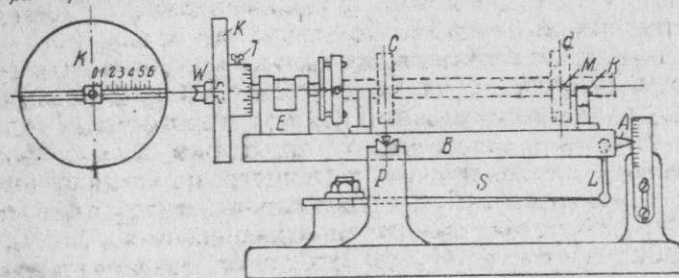
## § 3. Машины для динамической балансировки вращающихся деталей

Неуравновешенные вращающиеся массы двигателя создают силы инерции, действующие на опоры соответствующих деталей и передающиеся на подмоторную раму. При больших числах оборотов, даже малые по величине неуравновешенные вращающиеся массы могут создать значительные центробежные силы инерции; вследствие того, что эти силы вращаются в пространстве вместе с неуравновешенной массой, они являются по отношению к подмоторной раме силами, периодически изменяющимися по гармоническому закону, и поэтому могут явиться причиной значительных вибраций всей моторной установки. Вот почему такие детали авиационного мотора, как коленчатый вал и пропеллер, должны быть обязательно динамически уравнированы. Под динамической уравниваемостью вращающейся детали понимаем такую ее уравниваемость, при которой центробежные силы инерции вращающейся детали полностью уравнированы как в отношении сил, так и в отношении моментов. Динамически уравниваемая вращающаяся деталь не оказывает на поддерживающие ее опоры давления, кроме давления, вызываемого ее весом.

Для динамического уравнивания деталей служат специальные станки, так называемые станки для динамической балансировки. Мы рассмотрим здесь принцип действия балансирующего станка Гишольта, наиболее распространенного в авиационной промышленности и служащего для динамической балансировки коленчатых валов. На фиг. 208 дана схема устройства этого станка, а на фиг. 209 его общий вид. Станок состоит из рамы  $B$ , опирающейся на призмы  $P$  и могущей на них кататься. Ко-

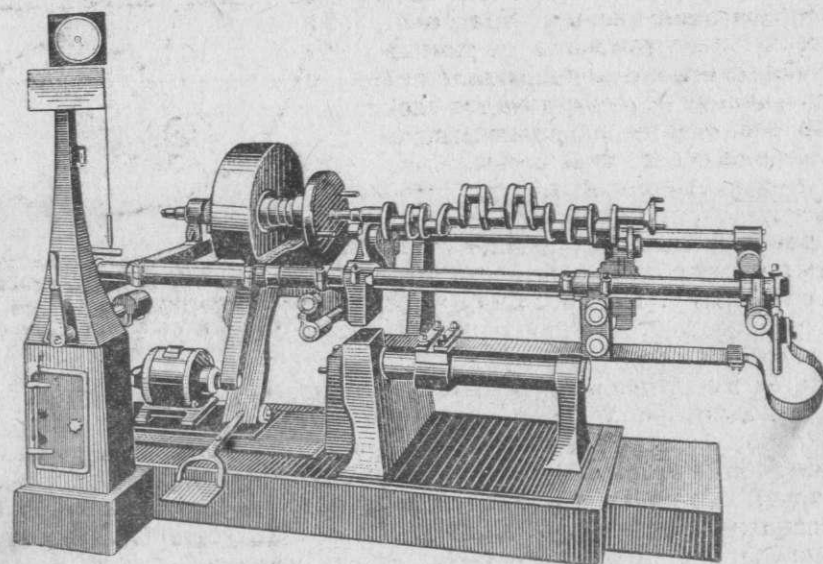
нец  $A$  рамы  $B$  посредством звена  $L$  опирается на конец плоской пружины  $S$ ; пружина  $S$  закреплена другим концом на станине станка. На раме станка установлена передняя бабка  $E$  и два регулируемых разъемных подшипника для поддержания балансируемого вала. На левом конце шпинделя бабки посажен диск  $K$  с противовесом  $W$ , могущим перемещаться в радиальном направлении и закрепляться на желаемом расстоянии от оси вращения. На правом конце шпинделя находится патрон, в который зажимается конец балансируемого вала; последний может быть приведен во вращение от электромотора посредством фрикционной

Положение противовеса при первом испытании



Фиг. 208. Схема устройства балансирующего станка Гишольта.

передачи и диска  $K$ . Если балансируемая деталь имеет неуравновешенность, то при ее вращении развиваются центробежные силы, которые заставляют раму  $B$  качаться на призмах  $P$ . Для увеличения точности балансировки работа станка основана на резонансном принципе, который заключается в том, что все отсчеты производятся при таких числах оборотов в минуту балансируемой детали, которые равны числу свободных колебаний в минуту (около призм  $P$ ) рамы  $B$  со всеми смонтированными на ней деталями;



Фиг. 209. Общий вид балансирующего станка Гишольта.

так как при этом получают вынужденные резонансные колебания рамы  $B$ , то амплитуда ее колебаний становится весьма значительной даже при малой неуравновешенности балансируемой детали. Для приведения всей системы в резонанс дают сначала балансируемой детали число оборотов, превышающее резонансное число оборотов, и отсоединяют фрикционную передачу; тогда вследствие наличия в системе трения числа оборотов детали начинают падать и приближаться к резонансным; амплитуда колебания рамы  $B$ , замеряемая посредством указателя на правом конце рамы

и градуированной вертикальной шкалы, растет по мере приближения системы к резонансу и при наличии последнего становится максимальной.

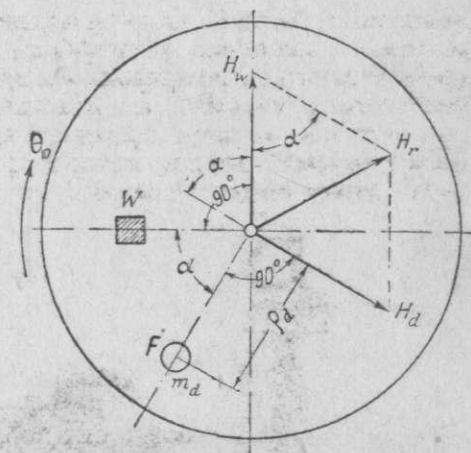
Балансировка вращающихся деталей основана на доказанном нами в § 1 положении, согласно которому любая неуравновешенность вращающейся массы может быть устранена путем двух, соответствующим образом подобранных масс, центра тяжести которых расположены в двух произвольно выбранных плоскостях, перпендикулярных к оси вращения неуравновешенной массы; назовем эти плоскости плоскостями уравнивания. Очевидно, что эффект уравнивания может быть достигнут не только путем добавления к вращающейся массе двух уравнивающих масс, расположенных в плоскостях уравнивания, но и путем отнятия от неуравновешенной вращающейся массы двух, соответствующим образом подобранных по величине масс, причем снимаемые массы могут находиться в двух любых плоскостях уравнивания, позволяющих произвести на готовой детали нужный съем материала. При динамической балансировке коленчатых валов используют последний способ устранения неуравновешенности. На балансируемой детали выбирают прежде всего две плоскости уравнивания. Задача балансирующего станка Гишольта заключается в том, чтобы определить величину и месторасположение в каждой из плоскостей уравнивания той массы, которую надлежит удалить с детали. Для этой цели сначала определяют и удаляют массу в одной плоскости уравнивания, а потом в другой. Процесс балансировки на станке Гишольта ведется следующим образом. Положим (фиг. 208), что плоскости  $c$  и  $d$  уравниваемой детали выбраны в качестве плоскостей уравнивания. Уравниваемую деталь помещают на раму  $B$  так, чтобы плоскость  $c$  проходила через ось качания  $P$  рамы; доводят число оборотов детали до резонансного и определяют соответствующую величину неуравновешенности  $H_d$ . Неуравновешенность  $H_d$  измеряется в некотором масштабе резонансной амплитудой колебания конца  $A$  рамы  $B$  и представляет собой произведение

$$H_d = m_d r_d, \quad (17)$$

где  $m_d$  — масса, подлежащая удалению с детали в плоскости уравнивания  $d$ , а

$r_d$  — расстояние центра тяжести массы  $m_d$  от оси вращения детали.

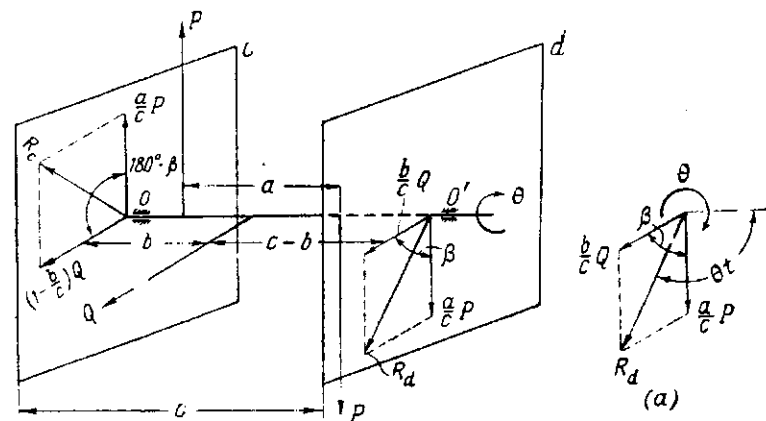
Помимо знания величины  $H_d$  необходимо знать то место по окружности вращающейся детали, с которого надлежит удалить массу  $m_d$ . Для этой цели передвигают груз  $W$  по диску  $K$  в радиальном направлении и закрепляют его на таком расстоянии от оси вращения, чтобы создаваемая им неуравновешенность  $H_w$  была равна неуравновешенности  $H_d$ ; после этого балансируемую деталь вновь доводят до резонансного числа оборотов и замеряют неуравновешенность  $H_r$ , создаваемую совместным действием неуравновешенной детали и передвинутого груза  $W$ . Три величины:  $H_d$ ,  $H_w$  и  $H_r$  позволяют определить направление того радиуса, на котором лежит центр тяжести массы  $m_d$ ; для этого необходимо иметь в виду, что при резонансных колебаниях колебания отстают по фазе на  $90^\circ$  от силы, вызывающей эти резонансные колебания. Искомое направление определяется следующим образом (фиг. 210). Если  $W$  представляет положение передвинутого груза на диске  $K$ , а стрелка указывает направление вращения балансируемой детали; то при резонансе вектор  $H_w$  будет соот-



Фиг. 210. Определение местоположения массы, удаляемой с балансируемой на станке Гишольта детали при динамической ее балансировке.



ветствовать в некотором масштабе вектору колебания системы, создаваемому неуравновешенным грузом  $W$ ; вектор  $H_W$  будет направлен перпендикулярно к радиусу, проходящему через центр тяжести груза  $W$ , и будет иметь показанное на фиг. 210 направление (а не противоположное) потому, что груз  $W$ , находясь слева от оси качания  $P$ , вызовет колебания сечений качающейся системы, находящихся справа от этой оси качания, сдвинутые по фазе на  $180^\circ$  от таковых для сечений, расположенных слева от этой оси. Так как  $H_r$  должен равняться геометрической сумме  $H_W$  и  $H_d$ , то легко определить взаимное расположение всех этих трех векторов и груза  $W$ . Вектор  $H_d$  можно тоже рассматривать как представленный в том же, что и вектор  $H_W$ , масштабе вектор резонансного колебания системы, вызванного неуравновешенностью балансируемой детали. Искомое направление того радиуса, на котором лежит центр тяжести массы  $m_d$ , будет перпендикулярно вектору  $H_d$ , а положение самой массы будет в  $F$ , так как вектор центробежной силы, развиваемой массой  $m_d$ , опережает при резонансных колебаниях на  $90^\circ$  вектор колебания  $H_d$ .



Фиг. 211. Схема неуравновешенных сил инерции равномерно вращающейся детали.

Для проверки правильности полученных результатов проводится контрольное испытание, которое заключается в том, что диск  $K$  поворачивают на оси шпинделя таким образом, чтобы вектора  $H_W$  и  $H_d$  были противоположно направлены, и доводят балансируемую деталь до резонансного числа оборотов; так как в этом случае вектор  $H_r$  должен равняться нулю, то отсутствие колебаний конца  $A$  рамы  $B$  является подтверждением правильности полученных результатов. Для того чтобы вектор  $H_W$  был направлен противоположно вектору  $H_d$ , диск  $K$  надо повернуть против вращения балансируемой детали на угол  $\alpha$ , определяемый из уравнения

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \frac{H_r}{H_W}. \quad (18)$$

Так как угол  $\alpha$  можно рассматривать как центральный угол, для которого отношение длины хорды к длине радиуса равно  $\frac{H_r}{H_W}$ , то угол  $\alpha$  можно непосредственно определять по таблицам длин хорд для радиуса, равного 1.

Определив величину и местоположение массы  $m_d$ , удаляют ее с балансируемой детали путем высверливания.

Произведя балансировку детали в плоскости уравнивания  $d$ , представляют ее на раме  $B$  так, чтобы плоскость уравнивания  $d$  проходила через ось качания  $P$  рамы, и производят балансировку детали в плоскости уравнивания  $c$  совершенно так же, как это делалось в плоскости  $d$ ; после этой балансировки деталь будет динамически уравновешена.

Остановимся теперь более подробно на теории балансируемого станка Гишольта. Неуравновешенные силы инерции тела равномерно вращающегося

около оси  $OO'$  (фиг. 211) с угловой скоростью  $\Theta$ , могут быть представлены в самом общем случае парой сил  $P$  с плечом  $a$  и силой  $Q$ . Если перпендикулярные оси  $OO'$  плоскости  $c$  и  $d$  являются плоскостями уравнивания, то мы можем заменить пару сил  $P$  с моментом  $aP$  парой сил  $\frac{a}{c}P$  с тем же моментом  $aP$ , лежащих в плоскостях уравнивания  $c$  и  $d$ ; силу  $Q$  мы можем заменить двумя силами: силой  $\frac{b}{c}Q$ , лежащей в плоскости  $d$ , и силой  $(1 - \frac{b}{c})Q$ , лежащей в плоскости  $c$ , причем эти силы параллельны силе  $Q$ ;  $c$  представляет расстояние между плоскостями  $c$  и  $d$ . Складывая силы  $\frac{a}{c}P$  и  $\frac{b}{c}Q$ , лежащие в плоскости  $d$  под углом  $\beta$  друг к другу, получим результирующую силу  $R_d$ ; аналогично, складывая силы  $\frac{a}{c}P$  и  $(1 - \frac{b}{c})Q$ , лежащие в плоскости  $c$  под углом  $(180^\circ - \beta)$  друг к другу, получим результирующую силу  $R_c$ . Силы  $R_d$  и  $R_c$  определяют те неуравновешенности  $H_d$  и  $H_c$  в плоскостях  $c$  и  $d$ , которые должны быть устранены путем соответствующего удаления в этих плоскостях материала с балансируемой детали: при этом имеют место соотношения

$$R_d = \Theta^2 H_d = \Theta^2 m_d r_d \quad (19)$$

и

$$R_c = \Theta^2 H_c = \Theta^2 m_c r_c \quad (20)$$

где  $m_d$  — величина массы, удаляемой с балансируемой детали в плоскости  $d$ ;  $r_d$  — расстояние центра тяжести массы  $m_d$  до оси вращения детали;  $m_c$  и  $r_c$  — то же для плоскости  $c$ .

Задачей балансируемого станка является определение величин  $H_d$  и  $H_c$  и определение местоположений центров тяжести масс  $m_d$  и  $m_c$  в плоскостях  $d$  и  $c$ .

Заметим, что так как силы  $P$  и  $Q$ , а следовательно, и силы  $R_d$  и  $R_c$  пропорциональны  $\Theta^2$ , то величины

$$H_d = m_d r_d \quad (21)$$

и

$$H_c = m_c r_c \quad (22)$$

не зависят от угловой скорости  $\Theta$  балансируемой детали.

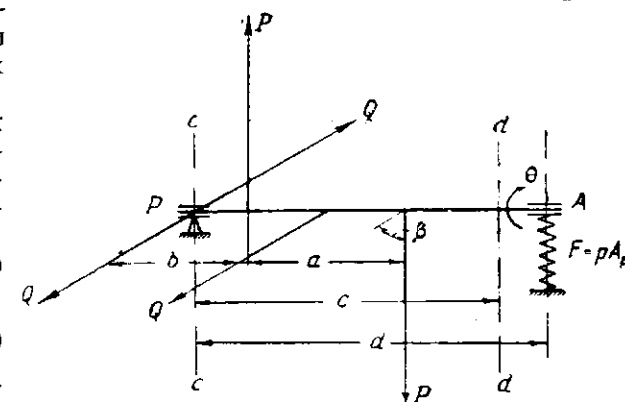
Положим теперь, что балансируемой детали, установленной на балансируемом станке Гишольта так, как это было описано выше, сообщили угловую скорость вращения  $\Theta$ . Рассмотрим, какие колебания будет при этом совершать рама станка  $B$ . На фиг. 212 представлена схема сил, действующих на раму  $B$ ; эти силы следующие.

- 1) пара сил  $P$  с плечом  $a$  и
- 2) сила  $Q$  с плечом  $b$  относительно оси качания  $P$  рамы  $B$ .

Эти пара и сила создаются неуравновешенностью вращающейся балансируемой детали и вызывают колебания рамы станка около оси качания  $F$  моментом  $M_d$ , равным моменту относительно оси качания  $P$  найденной выше силы  $R_d$

$$M_d = c R_d \sin(\Theta t).$$

Помимо сил  $P$  и  $Q$ , на раму  $B$  действует сила  $F$  плоской пружины станка  $S$ .



Фиг. 212. Схема сил, действующих на раму балансируемого станка Гишольта при балансировке неуравновешенной детали.

Обозначая через

- $p$  — силу, которая после приложения ее к концу пружины  $S$  вызовет прогиб этого конца на единицу длины;  
 $d$  — расстояние (по горизонтали) конца пружины  $S$ , на который опирается конец  $A$  рамы  $B$ , от оси качания  $P$  рамы;  
 $\psi$  — текущий угол отклонения при колебаниях рамы  $B$ , отсчитываемый от ее горизонтального положения, будем иметь

$$F = p d \psi. \quad (24)$$

Действующий на раму  $B$  момент, создаваемый силой  $F$ , будет равен

$$M_F = p d^2 \psi. \quad (25)$$

Принимая, что действующие в балансирующей системе сопротивления, заглушающие колебания рамы  $B$ , создают действующий на раму момент  $M_\xi$ , пропорциональный угловой скорости колебания рамы  $\psi$  и равный

$$M_\xi = \xi \dot{\psi} \quad (26)$$

и обозначая через  $I$  массовый момент инерции относительно оси  $P$  рамы  $B$  со всеми смонтированными на ней деталями, мы получим следующее дифференциальное уравнение движения рамы  $B$

$$I \ddot{\psi} + \xi \dot{\psi} + p d^2 \psi = c R_d \sin(\theta t). \quad (27)$$

Деля обе части этого уравнения на  $I$  и принимая во внимание, что частота свободных колебаний  $\theta_c$  системы рамы  $B$  равна

$$\theta_c = d \sqrt{\frac{p}{I}}, \quad (28)$$

получим

$$\ddot{\psi} + 2q\dot{\psi} + \theta_c^2 \psi = b \sin(\theta t), \quad (29)$$

причем

$$\frac{\xi}{I} = 2q \quad \text{и} \quad \frac{c R_d}{I} = b. \quad (30)$$

Сравнивая уравнение (29) с уравнением (20) главы III части III, мы видим, что колебания рамы  $B$  совершенно аналогичны принужденным крутильным колебаниям 1-массовой системы; поэтому амплитуда колебаний рамы  $B$  при резонансных колебаниях, когда  $\theta = \theta_c$ , будет определяться уравнением (58) главы III части III:

$$\Phi_p = \frac{c R_d}{\xi \theta_c}. \quad (31)$$

Там же было показано, что колебания отстают при резонансе по фазе от возбуждающего момента на  $90^\circ$ . Линейная амплитуда колебания конца  $A$  рамы  $B$  будет при резонансе ( $\theta = \theta_c$ ) равна

$$A_p = d \Phi_p = \frac{c d R_d}{\xi \theta_c} \quad (32)$$

или, принимая во внимание равенство (19),

$$A_p = \frac{d \theta_c}{\xi} c H_d = k c H_d. \quad (33)$$

Таким образом мы доказали, что:

1) замеряемая на станке Гишольта резонансная амплитуда  $A_p$  колебания конца  $A$  рамы  $B$  действительно представляет в некотором масштабе [см. равенство (33)] неуровненность  $H_d$ ; входящая в это равенство постоянная  $k$  определяется специальной тарировкой станка;

2) при резонансных колебаниях, когда  $\theta = \theta_c$ , колебания рамы  $B$  отстают по фазе на  $90^\circ$  от возбуждающих колебания моментов, создаваемых неуровненностью балансируемой детали.

В заключение заметим, что современные балансирующие станки дают возможность динамической балансировки с точностью:

до 0,1 гсм	для деталей весом до 1 кг
" 1,0 "	" " " " 20 "
" 10,0 "	" " " " 100 "
" 30,0 "	" " " " 500 "

Обычно для деталей делающих меньше 5000 об/мин., бывает достаточно следующая точность динамической балансировки:

0,2 гсм	для деталей весом до 1 кг
2,0 "	" " " " 20 "
20,0 "	" " " " 100 "

## Глава II

### УРАВНОВЕШИВАНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИГАЮЩИХСЯ МАСС ДВИГАТЕЛЯ

#### § 1. Сводка основных формул

1. Сила инерции суммарной поступательно двигающейся в цилиндре массы  $M_n$  для случая нормального кривошипно-шатунного механизма. Согласно уравнению (45) главы I части II, имеем

$$P_j = \sum_{k=1, 2, 4, 6, \dots} A_{jk} \cos k\alpha = -M_n R \omega^2 \cos \alpha + M_n R \omega^2 \sum_{k=2, 4, 6, \dots} [(-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \rho_k \cos k\alpha], \quad (1)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} A_{j1} &= -M_n R \omega^2, \\ A_{j2} &= -4\rho_2 M_n R \omega^2, \\ A_{j4} &= 16\rho_4 M_n R \omega^2, \\ A_{j6} &= -36\rho_6 M_n R \omega^2, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= \frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{16} \lambda^3 + \frac{15}{512} \lambda^5 + \frac{35}{2048} \lambda^7 + \dots, \\ \rho_4 &= \frac{1}{64} \lambda^3 + \frac{3}{256} \lambda^5 + \frac{35}{4096} \lambda^7 + \dots, \\ \rho_6 &= \frac{1}{512} \lambda^5 + \frac{5}{2048} \lambda^7 + \dots, \\ \rho_8 &= \frac{5}{128^2} \lambda^7 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Силы  $A_{j1} \cos \alpha$ ,  $A_{j2} \cos 2\alpha$ ,  $A_{j4} \cos 4\alpha$  и т. д. называются соответственно силами инерции 1-го, 2-го, 4-го и т. д. порядков.

При имеющих место в современных авиационных моторах значения  $\lambda$  коэффициенты  $\rho_2$ ,  $\rho_4$ ,  $\rho_6$ ,  $\rho_8$  и т. д. очень быстро убывают с увеличением порядка гармоник. Так, например, при

$$\lambda = \frac{1}{3,6}$$

имеем

$$4\rho_2 = 0,2832; \quad 16\rho_4 = 0,00568; \quad 36\rho_6 = 0,000127 \text{ и т. д.}$$

и амплитуды гармоник будут относиться между собой, как

$$1 : 0,2832 : 0,00568 : 0,000127.$$



Из этого примера видно, что величины сил инерции поступательно двигающихся масс порядков выше второго являются относительно малыми и поэтому при динамическом уравнивании мотора стремятся уравнивать силы инерции первых двух порядков. Исходя из этого, т. е. пренебрегая силами инерции высших порядков, получают для силы инерции поступательно двигающейся массы в одном цилиндре выражение

$$P_j = -M_n R \omega^2 \cos \alpha - \lambda M_n R \omega^2 \cos 2\alpha, \quad (4)$$

которым обычно и пользуются при рассмотрении вопросов об уравнивании двигателей.

2. Сила инерции суммарной поступательно двигающейся в цилиндре массы  $M_{n1}$  для случая кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном, когда  $\gamma_1 = \gamma$ .

Пользуясь для ускорения поршня  $j_{pl}$  выражением (43) главы III части I, получим для силы  $P_{j1}$  следующее полное выражение:

$$\begin{aligned} P_{j1} = & -M_{n1} R \omega^2 \left\{ \cos \alpha_l + \frac{r}{L} [4\rho_2 \cos 2(\alpha_l + \gamma) - 16\rho_4 \cos 4(\alpha_l + \gamma) + \right. \\ & \left. + 36\rho_6 \cos 6(\alpha_l + \gamma) - + \dots] + \frac{r}{L} [4\rho_{12} \cos 2(\alpha_l - \delta) - \right. \\ & \left. - 16\rho_{14} \cos 4(\alpha_l - \delta) + 36\rho_{16} \cos 6(\alpha_l - \delta) - + \dots] \right\} = \\ = & -M_{n1} R \omega^2 \cos \alpha_l + M_{n1} R \omega^2 \left\{ \frac{r}{L} \sum_{k=2, 4, 6, \dots} \left[ (-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \rho_k \cos k(\alpha_l + \gamma) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{r}{L} \sum_{k=2, 4, 6, \dots} \left[ (-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \rho_{1k} \cos k(\alpha_l - \delta) \right] \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

В этих формулах приняты следующие обозначения:

$\alpha_l$  — угол поворота кривошипа от оси рассматриваемого цилиндра с прицепным шатуном;

$\gamma$  — угол между осями рассматриваемого и главного цилиндров;

$\delta$  — угол, указанный на фиг. 14;

$R$  — длина радиуса кривошипа;

$L$  — длина главного шатуна;

$r$  — расстояние оси пальца прицепного шатуна, закрепленного на главном шатуне, от оси цапфы кривошипа; в вопросах уравнивания звездобразных моторов  $r$  обычно принимается одинаковым для всех цилиндров, равным среднему арифметическому значению всех действительных значений  $r$  мотора;

$\lambda$  — геометрический параметр, указанный на фиг. 14;

$$\lambda = \frac{R}{L}; \quad \lambda_l = \lambda \frac{r}{L}, \quad (6)$$

$l$  — длина прицепного шатуна;

$\rho_2, \rho_4, \rho_6, \dots$  определяются согласно формулам (3);

$\rho_{12}, \rho_{14}, \rho_{16}, \dots$  определяются формулами (3) с заменой  $\lambda$  через  $\lambda_l$ ;

$M_{n1}$  — суммарная поступательно двигающаяся масса в цилиндре с прицепным шатуном; в вопросах уравнивания обычно принимают, что суммарные поступательно двигающиеся массы во всех цилиндрах двигателя одинаковы, т. е. принимают, что поступательно двигающаяся масса  $M_n$  в главном цилиндре равна таковой в цилиндре с прицепным шатуном;

$\omega$  — угловая скорость вращения коленчатого вала мотора.

Заметим, что в случае, когда  $\gamma_1 = \gamma$ , ряд Фурье для силы  $P_{j1}$  не имеет гармоник нечетного порядка, за исключением первого.

Ограничиваясь в выражении (5) для силы инерции  $P_{j1}$  гармониками первых двух порядков, будем иметь:

$$P_{j1} = -M_{n1} R \omega^2 [\cos \alpha_l + F \cos (2\alpha_l - \Theta)], \quad (7)$$

где, согласно равенствам (20) § 3 главы III части I

$$\left. \begin{aligned} F &= \lambda \frac{r}{L} \frac{A}{\cos \Theta}, \quad \text{tg } \Theta = \frac{B}{A}, \\ A &= \frac{r^2}{L^2} \cos 2\delta + \cos 2\gamma \\ B &= \frac{r^2}{L^2} \sin 2\delta - \sin 2\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. Сила инерции суммарной поступательно двигающейся в цилиндре массы  $M_{n1}$  для случая кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном, когда  $\gamma_1 \neq \gamma$ .

Пользуясь для ускорения поршня  $j_{pl}$  выражением (31) главы IV части I, получим для силы  $P_{j1}$  следующее выражение

$$P_{j1} = -M_{n1} R \omega^2 [E \cos (\alpha_l + \Phi) + F \cos (2\alpha_l - \Theta)]. \quad (9)$$

Величины  $E$ ,  $F$ ,  $\Phi$  и  $\Theta$  определяются на основании соотношений (21) и (23) главы IV части I

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \Phi &= \frac{D}{C}; \quad E = \frac{C}{\cos \Phi}; \quad \text{tg } \Theta = \frac{B}{A}; \quad F = \frac{4A}{\cos \Theta}; \\ A &= \frac{1}{4} \frac{R}{L} - \frac{1}{2} \lambda \frac{r}{L} \cos \psi \cos \gamma + (\rho_2 \cos \psi + \frac{1}{4} \lambda \frac{r}{L} \cos 2\psi) \frac{r}{L} \cos 2\gamma, \\ B &= \frac{1}{2} \lambda \frac{r}{L} \cos \psi \sin \gamma - (\rho_2 \cos \psi + \frac{1}{4} \lambda \frac{r}{L} \cos 2\psi) \frac{r}{L} \sin 2\gamma, \\ C &= 1 + [1 + (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r}{L} \cos \psi] \frac{r}{L} \sin \psi \sin \gamma, \\ D &= (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r}{L} \sin \psi - [1 + (1 - \lambda k - \frac{1}{2} \lambda \rho_2) \frac{r}{L} \cos \psi] \frac{r}{L} \sin \psi \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При подсчетах можно принимать  $k = \frac{1}{4} \lambda$  и  $\rho_2 = \frac{1}{4} \lambda$ .

Для случая нормального кривошипного механизма имеем

$$\left. \begin{aligned} E &= 1, \\ \Phi &= 0, \\ F &= \lambda, \\ \Theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти соотношения позволяют применять формулы, выведенные для моторов с прицепными шатунами, к моторам такого же типа, но с нормальными шатунами.

Для случая, когда  $\gamma_1 = \gamma$ , имеем

$$E = 1 \text{ и } \Phi = 0. \quad (12)$$

Величины  $F$  и  $\Theta$  для этого случая определяются согласно равенствам (7).

При суммировании сил инерции отдельных порядков поступательно двигающихся масс в цилиндрах двигателя приходится пользоваться следующими соотношениями:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin [m\alpha \pm \frac{2\pi}{l} kn] = A$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos [m\alpha \pm \frac{2\pi}{l} kn] = B.$$

Когда  $\frac{k}{l}$  есть дробь, то  $A = 0$ ,  $B = 0$ ;

когда  $\frac{k}{l}$  есть целое число, то

$$A = i \sin (m\alpha); \quad B = i \cos (m\alpha).$$

Часто также приходится пользоваться следующими тригонометрическими формулами:

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

$$\cos \alpha \pm \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} \pm \alpha \right),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta).$$

## § 2. Уравновешивание сил инерции поступательно двигающихся масс двигателя

Сила инерции  $P_i$  поступательно двигающейся массы  $M_n$  в цилиндре мотора для любого кривошипно-шатунного механизма является периодической функцией  $\alpha$  — угла поворота коленчатого вала мотора; поэтому в самом общем случае ее можно представить в форме ряда Фурье

$$P_i = \sum_{k=1}^{\infty} [A_{ik} \cos (k\alpha) + B_{ik} \sin (k\alpha)], \quad (15)$$

где  $k$  — порядок гармоники;

$A_{ik}$  и  $B_{ik}$  — амплитуды фазовых слагающих гармоники  $k$ -го порядка; величины  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  зависят от кинематических параметров кривошипно-шатунного механизма и пропорциональны произведению  $M_n R \omega^2$  — поступательно двигающейся в цилиндре массы, радиуса кривошипа и квадрата угловой скорости вращения коленчатого вала мотора.

В современных авиационных моторах оси цилиндров перпендикулярны оси коленчатого вала мотора. Поэтому для этих моторов в са-

мом общем случае силы инерции поступательно двигающихся в цилиндрах масс  $M_n$  можно привести к следующей схеме сил:

1) суммарной силе инерции  $\Sigma P_j$ , проходящей через произвольно выбранное в пространстве начало координат  $O$ ; величина силы  $\Sigma P_j$  не зависит от выбора точки  $O$  и в самом общем случае эта сила, меняясь периодически по величине и направлению в зависимости от угла  $\alpha$ , вращается около точки  $O$  в плоскости, перпендикулярной оси коленчатого вала мотора;

2) суммарной паре сил инерции  $\Sigma M_{jxy}$ ; величина момента этой пары зависит от выбора точки  $O$ ; в самом общем случае осевой момент этой пары, изменяясь периодически по величине и направлению в зависимости от угла  $\alpha$ , вращается в плоскости, перпендикулярной оси коленчатого вала мотора;

3) суммарной паре сил  $\Sigma M_{jz}$ ; величина момента этой пары тоже зависит от выбора точки  $O$  и периодически меняется в зависимости от угла  $\alpha$ ; плоскость действия этой пары перпендикулярна оси коленчатого вала мотора, а направление ее осевого момента совпадает с направлением этой оси.

Все сказанное в отношении полных сил инерции  $P_j$  остается правильным и в отношении гармонических слагающих этих сил  $P_{jk}$

$$P_{jk} = A_{jk} \cos (k\alpha) + B_{jk} \sin (k\alpha) \quad (16)$$

любого порядка  $k$ .

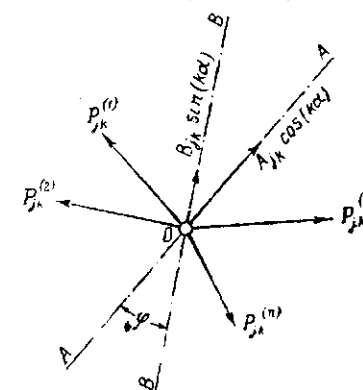
Для соотношений величин, имеющих место в авиационных моторах, силы инерции  $P_{jk}$  и соответствующие им моменты  $\Sigma M_{jxy}$  и  $\Sigma M_{jz}$  очень быстро уменьшаются с увеличением порядка  $k$ ; поэтому в авиационных моторах практическое значение имеют силы инерции и соответствующие моменты сил инерции первых порядков.

Если начало координат  $O$  взять на оси коленчатого вала в плоскости симметрии мотора, то для подавляющего большинства типов авиационных моторов моменты  $\Sigma M_{jxy}$  и  $\Sigma M_{jz}$  всех порядков обращаются в нуль; поэтому мы не будем останавливаться на вопросе уравнивания этих моментов в общем виде и рассмотрим этот вопрос для конкретных случаев в главе III. Вопрос уравнивания сил инерции различных порядков поступательно двигающихся в цилиндрах масс мы рассмотрим в общем виде. Общее выражение для силы инерции  $k$ -го порядка поступательно двигающейся массы в  $n$ -м цилиндре двигателя будет

$$P_{jk}^{(n)} = A_{jk}^{(n)} \cos (k\alpha) + B_{jk}^{(n)} \sin (k\alpha), \quad (17)$$

причем индекс  $(n)$  указывает, что соответствующая величина относится к  $n$ -му цилиндру.

Перенося (фиг. 213) силы  $P_{jk}^{(n)}$  в начало координат  $O$ , мы получим ряд векторов  $P_{jk}^{(n)}$ , расположенных, согласно сказанному выше, в плоскости, перпендикулярной оси коленчатого вала мотора; пусть плоскость фиг. 213 представляет эту плоскость; взаимное расположение этих векторов определяется углами между осями соответствующих цилиндров. Каждый из векторов  $P_{jk}^{(n)}$  можно рассматривать как состоящий из двух векторов, одинаково с ним направленных: 1) вектора  $A_{jk}^{(n)} \cos (k\alpha)$  и 2) вектора  $B_{jk}^{(n)} \sin (k\alpha)$ . Складывая в отдельности векторы всех цилиндров  $A_{jk}^{(n)} \cos (k\alpha)$  и векторы всех цилиндров  $B_{jk}^{(n)} \sin (k\alpha)$ , мы получим очевидно два вектора  $A_{jk} \cos (k\alpha)$  и  $B_{jk} \sin (k\alpha)$ , имеющих каждый вполне определенное, незави-



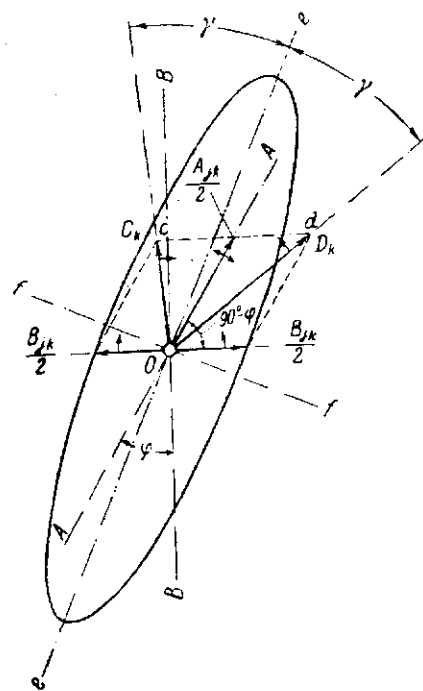
Фиг. 213. К уравновешиванию сил инерции  $k$ -го порядка поступательно двигающихся масс в цилиндрах двигателя.



симое от угла  $\alpha$ , направление. Величины амплитуд  $A_{jk}$  и  $B_k$  этих векторов и их направление определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{jk} &= \Sigma \bar{A}_{jk}^{(n)} \\ \bar{B}_{jk} &= \Sigma \bar{B}_{jk}^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

и причем суммирование распространяется на все цилиндры двигателя. Силу  $A_{jk} \cos(k\alpha)$  можно заменить (фиг. 214) двумя противоположно вращающимися с угловыми скоростями  $k\omega$  ( $\alpha = \omega t$ ) силами, равными каждая  $0,5 A_{jk}$ ; в начальный момент ( $t=0$ ,  $\alpha=0$ ) эти силы совпадают по направлению с векторами  $\bar{A}_{jk}$ . Аналогично, силу  $B_{jk} \sin(k\alpha)$  можно заменить двумя



Фиг. 214. К уравниванию сил инерции  $k$ -го порядка поступательно двигающихся масс в цилиндрах двигателя.

противоположно вращающимися с угловыми скоростями  $k\omega$  силами, равными каждая  $0,5 B_{jk}$ ; в начальный момент ( $t=0$ ,  $\alpha=0$ ) эти силы направлены перпендикулярно вектору  $\bar{B}_{jk}$ . Складывая силы  $0,5 A_{jk}$  и  $0,5 B_{jk}$ , вращающиеся по направлению вращения часовой стрелки, мы получим силу  $C_k$ , вращающуюся по часовой стрелке с угловой скоростью  $k\omega$ ; аналогично, складывая силы  $0,5 A_{jk}$  и  $0,5 B_{jk}$ , вращающиеся против направления вращения часовой стрелки, мы получим силу  $D_k$ , вращающуюся против часовой стрелки с угловой скоростью  $k\omega$ . Нетрудно видеть (фиг. 214), что силы  $C_k$  и  $D_k$  равны по величине диагоналям параллелограмма со сторонами  $0,5 A_{jk}$  и  $0,5 B_{jk}$  и углом между ними, равным  $(90^\circ - \varphi)$ , причем  $\varphi$  является углом между векторами  $\bar{A}_{jk}$  и  $\bar{B}_{jk}$ ; таким образом определение величин сил  $C_k$  и  $D_k$  не представляет трудностей.

Резюмируя все сделанное нами, мы видим, что перенесенные в начало координат  $O$  силы  $P_{jk}^{(n)}$  можно заменить двумя постоянными по величине силами  $C_k$  и  $D_k$ , вращающимися в противоположные стороны с постоянными угловыми скоростями  $k\omega$ . Очевидно, что, двигаясь

противоположно, эти силы в некоторый момент совпадут по направлению; так как на фиг. 214 векторы сил  $C_k$  и  $D_k$  соответствуют некоторому определенному моменту (именно  $t=0$ ,  $\alpha=0$ ), то моментом совпадения векторов  $C_k$  и  $D_k$  будет тот момент, когда эти векторы совпадут с направлением  $Oe$ , делящем пополам угол  $cOd$ ; в этот момент результирующая сил  $C_k$  и  $D_k$  станет по величине максимальной и будет равна

$$E_k = C_k + D_k. \quad (19)$$

Двигаясь дальше, силы  $C_k$  и  $D_k$  займут в некоторый момент положение, перпендикулярное  $Oe$ ; в этот момент силы  $C_k$  и  $D_k$  будут направлены противоположно друг другу; результирующая этих сил станет по величине минимальной и будет равна по абсолютной величине

$$F_k = |C_k - D_k|. \quad (20)$$

Нетрудно показать, что конец вектора, представляющего результирующую сил  $C_k$  и  $D_k$ , будет при своем движении описывать эллипс, оси которого совпадают по направлению (фиг. 214) с  $Oe$  и  $Of$  ( $Of \perp Oe$ ). Обозначая через  $\gamma$  угол поворота сил  $C_k$  и  $D_k$  от оси  $Oe$ , будем иметь, что про-

екция результирующей  $R_k$  этих сил на ось  $Oe$  равна

$$R_{ke} = (C_k + D_k) \cos \gamma = E_k \cos \gamma, \quad (21)$$

а проекция результирующей  $R_k$  на ось  $Of$  равна

$$R_{kf} = (C_k - D_k) \sin \gamma = F_k \sin \gamma. \quad (22)$$

Из равенств (21) и (22) вытекает, что

$$\frac{R_{ke}^2}{E_k^2} + \frac{R_{kf}^2}{F_k^2} = 1, \quad (23)$$

т. е., что конец вектора  $R_k$  действительно описывает вышеуказанный эллипс, уравнением которого и является уравнение (23).

Из изложенного становится ясным, что в самом общем случае результирующую сил инерции  $k$ -го порядка поступательно двигающихся в цилиндрах мотора масс можно уравновесить центробежными силами инерции двух противоположно вращающихся с угловыми скоростями  $k\omega$  масс; величины этих масс  $m_1$  и  $m_2$  и расстояния  $\rho_1$  и  $\rho_2$  их центров тяжести от оси их вращения должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись равенства

$$\left. \begin{aligned} m_1 \rho_1 (k\omega)^2 &= C_k \\ m_2 \rho_2 (k\omega)^2 &= D_k \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

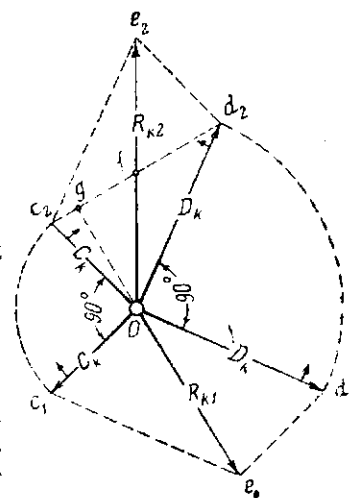
и Направление центробежных сил инерции масс  $m_1$  и  $m_2$  должно быть соответственно противоположно направлению сил  $C_k$  и  $D_k$ . Помимо общего случая, в практике могут встретиться следующие частные случаи:

1) одна из сил  $C_k$  или  $D_k$  равна нулю; в этом случае уравнивание достигается одной вращающейся массой;

2) сила  $C_k$  равна по величине силе  $D_k$ ; в этом случае результирующая сил инерции  $k$ -го порядка поступательно двигающихся в цилиндрах мотора масс имеет постоянное направление, совпадающее с направлением  $Oe$  (фиг. 214); уравнивание достигается двумя одинаковыми противоположно вращающимися массами.

Назовем эллипс, определяемый уравнением (23), эллипсом равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка. Изложенный выше метод позволяет легко определить графическим путем величины полуосей этого эллипса и их направление, т. е. позволяет полностью определить этот эллипс. При желании все графические построения могут сопровождаться элементарно простыми аналитическими подсчетами соответствующих величин и эллипс равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка может быть определен с любой степенью точности.

Векторы сил  $C_k$  и  $D_k$ , а следовательно, и эллипс равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка легко могут быть определены, если известны векторы равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка для какого-либо частного значения  $\alpha = \alpha_1$  и для  $\alpha = \alpha_1 + \frac{\pi}{2k}$  угла  $\alpha$ . Положим (фиг. 215), что вектор  $R_{k1}$  представляет результирующую сил инерции  $k$ -го порядка при  $\alpha = \alpha_1$ ; соответствующие  $R_{k1}$  векторы  $C_k$  и  $D_k$  пусть будут векторы  $\bar{Oc}_1$  и  $\bar{Od}_1$ . При повороте коленчатого вала мотора от  $\alpha = \alpha_1$  до  $\alpha = \alpha_1 + \frac{\pi}{2k}$ , т. е. на угол  $\frac{\pi}{2k}$ , векторы  $C_k$  и  $D_k$  повернутся на угол  $\frac{\pi}{2k} k = \frac{\pi}{2}$  и зай-



Фиг. 215. К определению векторов  $C_k$  и  $D_k$  по двум значениям вектора  $R_k$ .

мут положение  $\overline{Oc_2}$  и  $\overline{Od_2}$ ; вектор  $R_{k2}$  равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка при  $\alpha = \alpha_1 + \frac{\pi}{2k}$  будет представляться результирующей векторов  $\overline{Oc_2}$  и  $\overline{Od_2}$ . Нетрудно видеть, что

$$\angle c_1 Od_1 + \angle c_2 Od_2 = 180^\circ,$$

а поэтому

$$\angle c_1 Od_1 = \angle Oc_2 e_2,$$

т. е. параллелограм  $c_1 Od_1 e_1$  равен параллелограмму  $c_2 Od_2 e_2$ , а векторы  $R_{k1}$  и  $R_{k2}$  равны диагоналям этого параллелограмма. Рассматривая далее треугольники  $c_1 Oe_1$  и  $c_2 Od_2$ , мы видим, что эти треугольники равны по равенству трех сторон; так как в этих треугольниках сторона  $Oc_1 \perp Oc_2$  и  $c_1 e_1 \perp Od_2$ , то  $c_2 d_2 \perp Oe_1$ . Отсюда вытекает следующее правило определения векторов  $C_k$  и  $D_k$  по известным векторам  $R_{k1}$  и  $R_{k2}$  (фиг. 216): для того чтобы найти векторы  $C_k$  и  $D_k$ , соответствующие вектору  $R_{k2}$ , надо из точки  $f$  середины вектора  $R_{k2}$  провести прямую  $c_2 d_2$ , перпендикулярную вектору  $R_{k1}$ ; на этой прямой от точки  $f$  отложить отрезки  $fc_2$  и  $fd_2$ , равные по величине  $0,5 R_{k1}$ ; векторы  $Oc_2$  и  $Od_2$  и будут представлять соответственно векторы  $C_k$  и  $D_k$ . Аналогично могут быть найдены векторы  $C_k$  и  $D_k$ , соответствующие  $R_{k1}$ . Подчеркнем еще раз, что знание векторов  $C_k$  и  $D_k$  полностью решает вопрос о равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка поступательно двигающихся масс в цилиндрах двигателя и позволяет решить все вопросы, связанные с уравниванием этой равнодействующей.

Фиг. 216. Определение векторов  $C_k$  и  $D_k$  по двум значениям вектора  $R_k$ .

Сделаем еще одно указание. В частях I и II книги мы видели, что получение для силы инерции поступательно двигающейся в цилиндре массы выражения в форме ряда Фурье представляет большие трудности, особенно в отношении членов порядка выше второго. Поэтому при исследовании уравниваемости сил инерции поступательно двигающихся масс в цилиндрах двигателя со сложным кривошипно-шатунным механизмом мы рекомендуем в конкретных случаях следующий метод получения ряда Фурье для этих сил. Путь, проходимый поршнем в зависимости от угла поворота коленчатого вала мотора, может быть для всех типов кривошипно-шатунных механизмов подсчитан с любой точностью и соответствующая кривая  $S_p = f(\alpha)$  может быть построена тоже с любой точностью. При помощи гармонического анализатора функция, выражаемая этой кривой, может быть представлена в форме ряда Фурье. Двукратное дифференцирование по  $t$  этого ряда и даст для ускорения поршня, а следовательно, и для силы инерции поступательно двигающейся массы искомое выражение в форме ряда Фурье.

### Глава III

#### УРАВНОВЕШИВАНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ДВИГАЮЩИХСЯ МАСС КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА АВИАЦИОННЫХ МОТОРОВ РАЗНОГО ТИПА

##### § 1. Уравнивание сил инерции одноцилиндрового мотора

В моторах этого типа (фиг. 217) центробежные силы инерции вращающихся масс, к которым относятся масса кривошипа и отнесенная к оси цапфы кривошипа часть массы шатуна, уравниваются соответственно подобранными противовесами. Эти противовесы обычно представляют

собой две массы, жестко связанные с продолжением шек колен вала; такое устройство противовесов допускает свободный проход шатуна при вращении коленчатого вала. Величина и конфигурация масс противовесов подбирается согласно положениям, изложенным в главе I, а также на основе соображений о возможности размещения противовесов в картере мотора.

Силы инерции различных порядков поступательно двигающейся в цилиндре массы  $M_n$  остаются без добавочных приспособлений неуравновешенными. Для устранения вибраций одноцилиндровых установок обычно бывает достаточным уравновесить силы инерции первых двух порядков. В главе II мы подробно рассмотрели, как это может быть сделано. На фиг. 218 дана схема устройства, предложенная для этой цели Ланчестером. Положим, что необходимо уравновесить силу инерции 1-го порядка, равную

$$P_{j1} = -M_n R \omega^2 \cos \alpha. \quad (1)$$

Для этого заставляют вращаться в противоположных направлениях с угловыми скоростями  $\omega$  две одинаковых массы  $m$ , расположенные симметрично относительно оси цилиндра  $y$  таким образом, чтобы плоскость, в которой вращаются их центры тяжести, проходила через эту ось. Сила инерции  $P_{j1}$  полностью уравнивается, если величина каждой из масс  $m$  и расстояние  $\rho$  центра тяжести каждой из них до оси вращения будут подобраны такими, чтобы удовлетворялось уравнение

$$m \rho = 0,5 M_n R. \quad (2)$$

При этом массы  $m$  должны быть размещены таким образом, чтобы при  $\alpha = 0$  углы  $\gamma = \alpha = 0$ .

Аналогичным образом может быть уравновешена и сила инерции 2-го порядка массы  $M_n$ , равная

$$P_{j2} = -\frac{1}{2} M_n R \omega^2 \cos 2\alpha. \quad (3)$$

Чтобы уравновесить эту силу, заставляют массы  $m$  (фиг. 218) вращаться с угловыми скоростями, равными  $2\omega$ . Уравнивание будет иметь место при условии

$$2m \rho (2\omega)^2 = \frac{1}{2} M_n R \omega^2,$$

т. е. когда

$$m \rho = \frac{1}{8} M_n R. \quad (4)$$

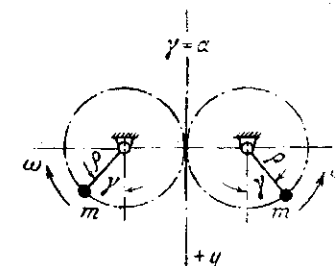
В этом случае массы  $m$  должны быть размещены тоже таким образом, чтобы при  $\alpha = 0$  углы  $\gamma = 2\alpha = 0$ .

Подобным же образом может быть уравновешена сила инерции любого  $k$ -го порядка поступательно двигающейся массы  $M_n$ , равная [см. равенства (1) главы II]

$$P_{jk} = (-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \rho M_n R \omega^2 \cos(k\alpha). \quad (5)$$



Фиг. 217. К уравниванию сил инерции одноцилиндрового мотора.



Фиг. 218. Уравнивание сил инерции первого порядка поступательно двигающихся масс одноцилиндрового мотора.



В этом случае массы  $m$  должны вращаться с угловыми скоростями  $k\omega$  и условие уравнивания будет

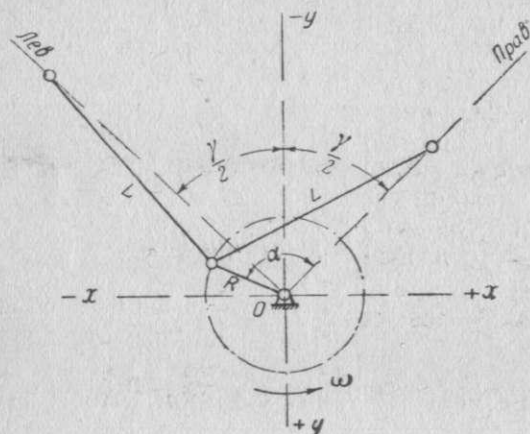
$$m\rho = 0,5\rho_k M_n R. \quad (6)$$

Массы  $m$  должны быть расположены таким образом, чтобы при  $\alpha = 0$ , для  $\frac{k}{2}$  четного  $\gamma = 180^\circ$  и для  $\frac{k}{2}$  нечетного  $\gamma = 0$ .

Если конструкция мотора не позволяет выполнить уравнивающее устройство по схеме, показанной на фиг. 218, при помощи двух масс  $m$ , то уравнивание выполняют при помощи двух пар масс  $m$ , каждая из которых аналогична схеме, приведенной на фиг. 218. Расположение этих пар масс выбирают так, чтобы результирующая центробежных сил инерции всех четырех масс  $m$  была направлена по оси цилиндра.

## § 2. Уравнивание сил инерции двухцилиндрового, V-образного мотора

Схема мотора дана на фиг. 219. Для определения уравнишенности сил инерции масс  $M_n$  воспользуемся изложенной в главе II теоремой об эллипсе равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка. Так как при  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  получается полная симметрия мотора относительно плоскости, проходящей через ось  $yy$  и ось коленчатого вала мотора, то оси эллипса равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка совпадают с координатными осями  $xx$  и  $yy$ . Величина полуоси этого эллипса, совпадающей с осью  $yy$ , определится как величина равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка при  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  и будет равна по величине сумме проекций на ось  $yy$  этих сил; величина полуоси, совпадающей с осью  $xx$ , определится как величина равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка при  $\alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2k}$  и будет равна по величине сумме проекций этих сил на ось  $xx$ . Ограничиваясь для сил инерции мас-



Фиг. 219. К уравниванию сил инерции двухцилиндрового V-образного мотора.

сы  $M_n$  гармониками 1-го и 2-го порядков, рассмотрим вопрос уравнивания сил инерции 1-го и 2-го порядков.

Силы инерции 1-го порядка. Равнодействующая сил инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс  $M_n$  направлена при  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  по оси  $yy$  и равна

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11} &= -M_n R \omega^2 \left[ \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \left( -\frac{\gamma}{2} \right) \right] \cos \frac{\gamma}{2} = \\ &= -2M_n R \omega^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Равнодействующая сил инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс  $M_n$  направлена при  $\alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2}$  по оси  $xx$  и равна

$$\begin{aligned} \bar{R}_{12} &= -M_n R \omega^2 \left[ -\cos \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left( -\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \sin \frac{\gamma}{2} = \\ &= -2M_n R \omega^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно доказанному выше, силы инерции 1-го порядка могут быть уравнишены центробежными силами инерции двух масс, равномерно вращающихся в противоположные стороны с угловыми скоростями  $\omega$ . Так как в данном случае величины  $E_1$  и  $F_1$  полуосей эллипса равнодействующей сил инерции 1-го порядка равны скалярным величинам  $R_{11}$  и  $R_{12}$  векторов сил  $\bar{R}_{11}$  и  $\bar{R}_{12}$ , то величины  $C_1$  и  $D_1$  центробежных сил инерции этих вращающихся масс найдутся из системы уравнений:

$$\text{а) при } R_{11} > R_{12} \begin{cases} C_1 + D_1 = R_{11} \\ C_1 - D_1 = R_{12} \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б) при } R_{12} > R_{11} \begin{cases} C_1 + D_1 = R_{12} \\ C_1 - D_1 = R_{11} \end{cases} \quad (9)$$

Решая эту систему уравнений и принимая во внимание равенства (7) и (8), получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} (R_{11} + R_{12}) = M_n R \omega^2 \\ D_1 &= \frac{1}{2} |R_{11} - R_{12}| = M_n R \omega^2 \left| \cos \frac{\gamma}{2} \right|. \end{aligned} \quad (10)$$

При  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  векторы сил  $\bar{C}_1$  и  $\bar{D}_1$  совпадают с осью  $yy$ . При  $\alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2}$  векторы этих сил совпадают с осью  $xx$ . Их направление при этих значениях угла  $\alpha$  и направления их вращения определяются из тех соображений, что

при  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  величина  $R_{11} = \bar{C}_1 + \bar{D}_1$  и

при  $\alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2}$  величина  $R_{12} = \bar{C}_1 + \bar{D}_1$ .

Силы инерции 2-го порядка. Для сил инерции 2-го порядка аналогично имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{21} &= -\lambda M_n R \omega^2 \left[ \cos \left( 2 \frac{\gamma}{2} \right) + \cos \left( -2 \frac{\gamma}{2} \right) \right] \cos \frac{\gamma}{2} = \\ &= -2\lambda M_n R \omega^2 \cos \gamma \cos \frac{\gamma}{2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= -\lambda M_n R \omega^2 \left[ -\cos 2 \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 2 \left( -\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \sin \frac{\gamma}{2} = \\ &= -2\lambda M_n R \omega^2 \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

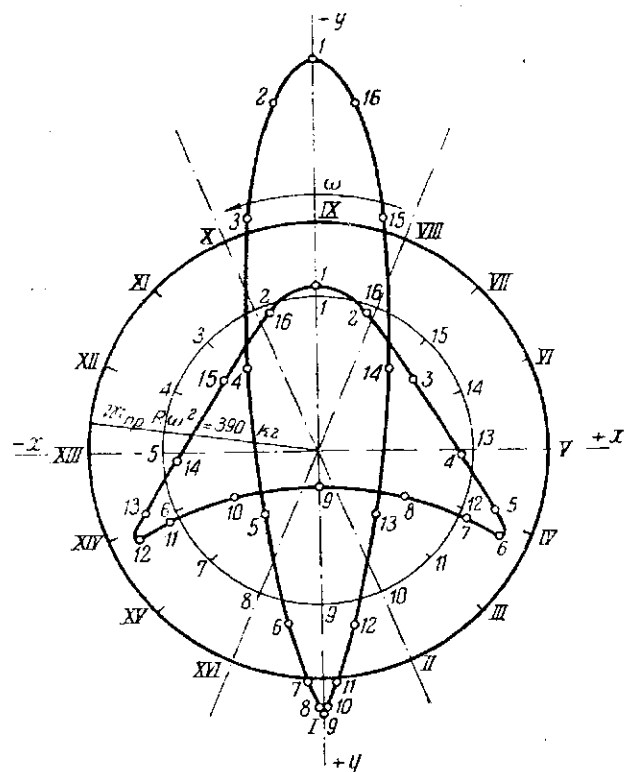
$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} (R_{21} + R_{22}) = \lambda M_n R \omega^2 \left| \cos \frac{\gamma}{2} \right| \\ D_2 &= \frac{1}{2} |R_{21} - R_{22}| = \lambda M_n R \omega^2 \left| \cos \frac{3}{2} \gamma \right|. \end{aligned} \quad (13)$$

Силы инерции 2-го порядка могут быть уравнишены центробежными силами инерции двух масс, вращающихся в противоположные стороны с угловыми скоростями  $2\omega$ ; величины этих центробежных сил равны  $C_2$  и  $D_2$ . При  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  векторы сил  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  совпадают с осью  $yy$ . При  $\alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}$  векторы этих сил совпадают с осью  $xx$ . Их направление при этих значениях угла  $\alpha$  и направления их вращения определяются из тех соображений, что

при  $\alpha = \frac{\gamma}{2}$  вектор  $\bar{R}_{21} = \bar{C}_2 + \bar{D}_2$  и

при  $\alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}$  вектор  $\bar{R}_{22} = \bar{C}_2 + \bar{D}_2$ .

Неуравновешенные силы инерции 1-го и 2-го порядков масс  $M_n$  складываясь, дают векторную диаграмму сил инерции, примерный вид которой дан на фиг. 220. Эта диаграмма сил инерции имеет каплеобразную форму и является растянутой в направлении оси  $yy$ . Если по конструктивным соображениям уравновешивание сил инерции 1-го и 2-го порядков вышеописанным способом невозможно, то для возможно большего уменьшения динамического действия этих сил инерции на подмоторную раму увеличивают массу противо-



Фиг. 220. Векторная диаграмма уравновешивания сил инерции 1-го и 2-го порядков поступательно двигающихся масс двухцилиндрового V-образного мотора с углом между осями цилиндров  $\gamma$ .

$M_n = 0.0006 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \text{ сек}^2$ ;  $n = 2500 \text{ об/мин}$ ;  $R = 5.25 \text{ см}$ ;  $\lambda = 1/4$ ;  $\gamma = 45^\circ$ .

чины добавочной массы  $M_{пр}$ , которая должна быть такой, чтобы вибрация установки была минимальной.

Рассмотрим частный случай, когда угол между осями цилиндров  $\gamma = 90^\circ$ . В этом случае для сил инерции 1-го порядка согласно равенствам (10) имеем

$$C_1 = M_n R \omega^2 \text{ и } D_1 = 0, \quad (14)$$

т. е. равнодействующая сил инерции 1-го порядка представляет постоянный по величине вектор, равномерно вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  в направлении вращения коленчатого вала мотора и направленный по радиусу кривошипа. Эта сила инерции может быть легко уравновешена путем соответствующего увеличения массы противовеса  $M_{пр}$ , уравновешивающей центробежные силы инерции вращающихся масс мотора.

Для сил инерции 2-го порядка согласно равенствам (13), имеем

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda M_n R \omega^2 \text{ и } D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda M_n R \omega^2 = C_2, \quad (15)$$

т. е. равнодействующая сил инерции 2-го порядка всегда направлена по оси  $xx$ ; максимальная ее величина равна

$$(P_{j2})_{\max} = \sqrt{2} \lambda M_n R \omega^2. \quad (16)$$

Силы инерции 2-го порядка могут быть при желании уравновешены в этом случае центробежными силами инерции двух одинаковых масс, вращающихся в противоположные стороны с угловыми скоростями  $2\omega$ .

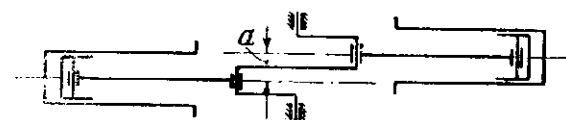
### § 3. Уравновешивание сил инерции двухцилиндрового мотора с противоположно расположенными цилиндрами и с кривошипами, расположенными под углом $180^\circ$ друг к другу

Схема мотора дана на фиг. 221. По радиусу каждого кривошипа действует центробежная сила инерции суммарной вращающейся массы  $M_k$ , приведенной к оси цапфы этого кривошипа. Каждая из этих сил равна

$$P_{кр} = -M_k R \omega^2. \quad (17)$$

Силы  $P_{кр}$  образуют пару сил с плечом  $a$  и моментом

$$M_{кр} = -M_k R \omega^2 a, \quad (18)$$



Фиг. 221. К уравновешиванию сил инерции двухцилиндрового мотора с противоположно расположенными цилиндрами и с кривошипами, расположенными под углом  $180^\circ$  друг к другу.

действующим в плоскости кривошипов коленчатого вала. Эта пара может быть уравновешена двумя соответствующими противовесами, размеры которых определяются из соотношения

$$M_{пр} R_{пр} a_{пр} = M_k R a, \quad (19)$$

где

$M_{пр}$  — масса каждого противовеса,

$R_{пр}$  — расстояние центра тяжести противовеса до оси вращения (оси коленчатого вала),

$a_{пр}$  — расстояние между плоскостями вращения центров тяжестей противовесов.

Центры тяжестей противовесов должны лежать в плоскости кривошипов.

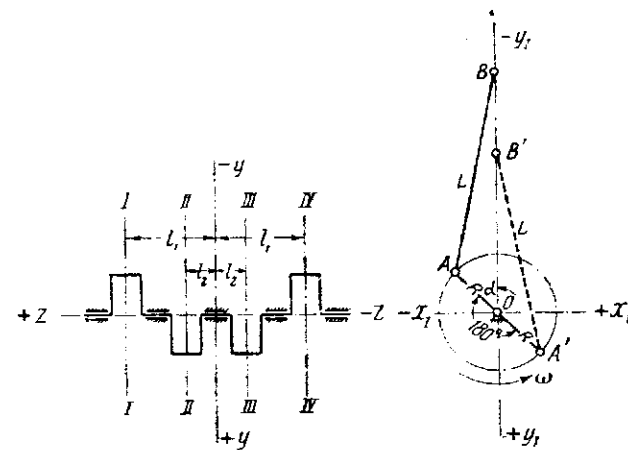
Что касается сил инерции 1-го и 2-го порядков масс  $M_n$ , то таковые остаются обычно неуравновешенными, образуя действующие в плоскости осей цилиндров пары с моментами:

$$1\text{-го порядка } M_{j1} =$$

$$= -M_n R \omega^2 a \cos \alpha \quad (20)$$

$$\text{и } 2\text{-го порядка } M_{j2} =$$

$$= -\lambda M_n R \omega^2 a \cos 2\alpha. \quad (21)$$



Фиг. 222. К уравновешиванию сил инерции четырехцилиндрового, однорядного мотора.

а) для цилиндров I и IV

$$P_{j1}^{(I)} = P_{j1}^{(IV)} = -M_n R \omega^2 \cos \alpha \quad (22)$$

и б) для цилиндров II и III

$$P_{j1}^{(II)} = P_{j1}^{(III)} = -M_n R \omega^2 \cos (\alpha + 180^\circ) = M_n R \omega^2 \cos \alpha. \quad (23)$$

Схема мотора дана на фиг. 222.

Силы инерции 1-го порядка будут:



На основании фиг. 222 и соотношений (22) и (23) имеем, что силы инерции 1-го порядка полностью уравниваются сами собой.

Силы инерции 2-го порядка будут:

а) для цилиндров I и IV

$$P_{j2}^{(I)} = P_{j2}^{(IV)} = -\lambda M_n R \omega^2 \cos 2\alpha \quad (24)$$

и б) для цилиндров II и III

$$P_{j2}^{(II)} = P_{j2}^{(III)} = -\lambda M_n R \omega^2 \cos 2(\alpha + 180^\circ) = -\lambda M_n R \omega^2 \cos 2\alpha. \quad (25)$$

На основании фиг. 222 и соотношений (24) и (25) имеем, что силы инерции 2-го порядка дают равнодействующую, направленную по оси  $yy$ , проходящей через средний опорный подшипник коленчатого вала, и равную

$$P_{j2} = -4\lambda M_n R \omega^2 \cos 2\alpha. \quad (26)$$

Максимальное значение этой силы будет

$$P_{j2} \max = \pm 4\lambda M_n R \omega^2 \quad (26')$$

и имеет место при  $\alpha = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  и  $270^\circ$ .

Сила  $P_{j2}$  остается обычно неуравновешенной, хотя и может быть уравновешена по способу Ланчестера.

Силы инерции вращающихся масс  $M_k$  в рассматриваемом двигателе полностью уравниваются сами собой.

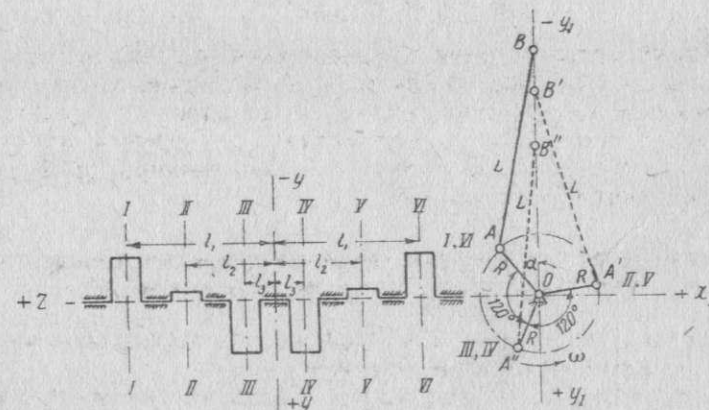
## § 5. Уравнивание сил инерции шестицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными в ряд, и с кривошипами под углом $120^\circ$

Схема мотора дана на фиг. 223.

Силы инерции 1-го порядка будут:

а) для цилиндров I и VI

$$P_{j1}^{(I)} = P_{j1}^{(VI)} = -M_n R \omega^2 \cos \alpha, \quad (27)$$



Фиг. 223. К уравниванию сил инерции шестицилиндрового, однорядного мотора.

б) для цилиндров II и V

$$P_{j1}^{(II)} = P_{j1}^{(V)} = -M_n R \omega^2 \cos (\alpha - 120^\circ) \quad (28)$$

и в) для цилиндров III и IV

$$P_{j1}^{(III)} = P_{j1}^{(IV)} = -M_n R \omega^2 \cos (\alpha - 240^\circ). \quad (29)$$

Благодаря симметричному расположению кривошипов относительно плоскости  $xu$ , результирующая сил инерции 1-го порядка будет направлена по оси  $yy$  и будет равна

$$P_{j1} = -2M_n R \omega^2 [\cos \alpha + \cos (\alpha - 120^\circ) + \cos (\alpha - 240^\circ)] = 0, \quad (30)$$

т. е. в рассматриваемом двигателе силы инерции 1-го порядка уравниваются сами собой.

Силы инерции 2-го порядка будут:

а) для цилиндров I и VI

$$P_{j2}^{(I)} = P_{j2}^{(VI)} = -\lambda M_n R \omega^2 \cos 2\alpha, \quad (31)$$

б) для цилиндров II и V

$$P_{j2}^{(II)} = P_{j2}^{(V)} = -\lambda M_n R \omega^2 \cos 2(\alpha - 120^\circ) \quad (32)$$

и в) для цилиндров III и IV

$$P_{j2}^{(III)} = P_{j2}^{(IV)} = -\lambda M_n R \omega^2 \cos 2(\alpha - 240^\circ). \quad (33)$$

Результирующая сил инерции 2-го порядка будет направлена по оси  $yy$  и будет равна

$$P_{j2} = -2\lambda M_n R \omega^2 [\cos 2\alpha + \cos 2(\alpha - 120^\circ) + \cos 2(\alpha - 240^\circ)] = 0. \quad (34)$$

Аналогично найдем, что результирующая сил инерции 4-го порядка равна нулю

$$P_{j4} = 0. \quad (35)$$

Первые по порядку из неуравновешенных сил будут силы инерции 6-го порядка. Результирующая этих сил будет направлена по оси  $yy$  и будет равна

$$P_{j6} = -2 \cdot 6^2 \rho_6 M_n R \omega^2 [\cos 6\alpha + \cos 6(\alpha - 120^\circ) + \cos 6(\alpha - 240^\circ)] = -6^3 \rho_6 M_n R \omega^2 \cos 6\alpha, \quad (36)$$

где

$$\rho_6 = \frac{1}{512} \lambda^5 + \frac{5}{2048} \lambda^7 + \dots$$

Центробежные силы инерции вращающихся масс  $M_k$  в рассматриваемом двигателе, складываясь попарно для двух симметрично расположенных относительно плоскости  $xu$  кривошипов, дадут три равных по величине вектора, расположенные в плоскости  $xu$  под углами  $120^\circ$  друг к другу; результирующая этих сил будет равна нулю, т. е. силы инерции вращающихся масс  $M_k$  уравниваются сами по себе.

## § 6. Уравнивание сил инерции восьмицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными V-образно под углом $90^\circ$

Схема мотора дана на фиг. 224. Правый ряд цилиндров имеет нормальные шатуны, а левый прицепные, причем  $\gamma \neq \gamma_l$ .

Силы инерции 1-го порядка. Согласно изложенному в § 4 результирующая сил инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс  $M$  правого ряда цилиндров равна нулю

$$P_{j1}^{(n)} = 0. \quad (37)$$

На основании равенства (8) главы II силы инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс  $M_{n1}$  в цилиндрах левого ряда равны:

а) для цилиндров I и IV

$$P_{j1}^{(I)} = P_{j1}^{(IV)} = -E M_{n1} R \omega^2 \cos (\alpha_l + \Phi) = -E M_{n1} R \omega^2 \cos (\alpha - 90^\circ + \Phi) = -E M_{n1} R \omega^2 \sin (\alpha + \Phi) \quad (38)$$



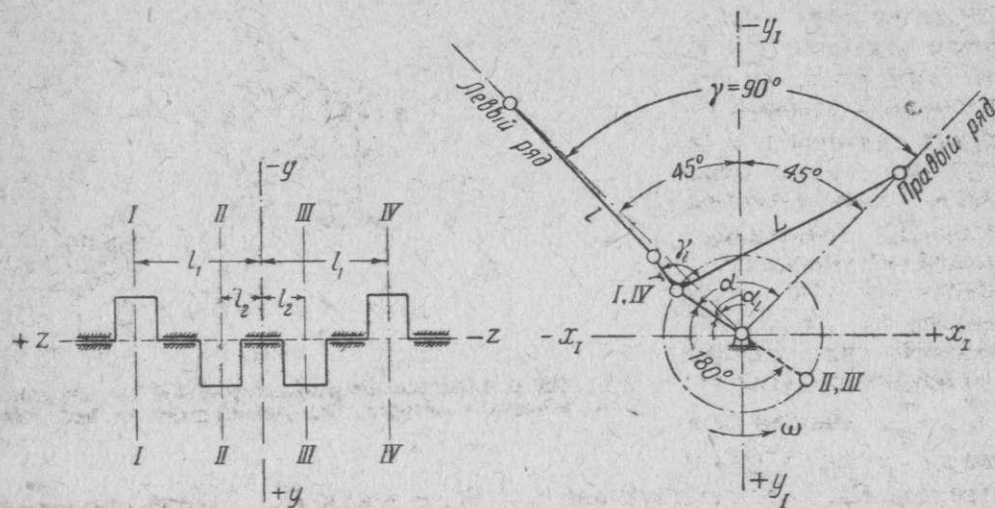
и б) для цилиндров II и III

$$P_{j1}^{(II)} = P_{j1}^{(III)} = -E\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos(\alpha - 90^\circ + 180^\circ + \Phi) = E\mathcal{M}_n R\omega^2 \sin(\alpha + \Phi). \quad (39)$$

Результирующая  $P_{j1}^{(I)}$  сил инерции 1-го порядка поступательно движущихся масс  $\mathcal{M}_n$  в цилиндрах левого ряда будет равна

$$P_{j1}^{(I)} = -2E\mathcal{M}_n R\omega^2 \sin(\alpha + \Phi) + 2E\mathcal{M}_n R\omega^2 \sin(\alpha + \Phi) = 0. \quad (40)$$

Таким образом, силы инерции 1-го порядка в рассматриваемом двигателе уравниваются сами собой.



Фиг. 224. К уравниванию сил инерции восьмицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными V-образно под углом 90°.

Силы инерции 2-го порядка. Согласно изложенному в § 4 результирующая сил инерции 2-го порядка поступательно движущихся масс  $\mathcal{M}_n$  в цилиндрах правого ряда будет направлена по оси  $yy$  этого ряда и будет равна

$$P_{j2}^{(n)} = -4\lambda\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos 2\alpha. \quad (41)$$

На основании равенства (8) главы II силы инерции 2-го порядка поступательно движущихся масс  $\mathcal{M}_n$  в цилиндрах левого ряда мотора равны а) для цилиндров I и IV

$$P_{j2}^{(I)} = P_{j2}^{(IV)} = -F\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos(2\alpha - \Theta) = -F\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos(2\alpha - 180^\circ - \Theta) = F\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos(2\alpha - \Theta) \quad (42)$$

и б) для цилиндров II и III

$$P_{j2}^{(II)} = P_{j2}^{(III)} = -F\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos[2(\alpha - 90^\circ + 180^\circ) - \Theta] = F\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos(2\alpha - \Theta). \quad (43)$$

Результирующая  $P_{j2}^{(I)}$  сил инерции 2-го порядка поступательно движущихся масс  $\mathcal{M}_n$  в цилиндрах левого ряда будет направлена по оси  $yy$  этого ряда и будет равна

$$P_{j2}^{(I)} = 4F\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos(2\alpha - \Theta). \quad (44)$$

Результирующая  $P_{j2}$  сил инерции 2-го порядка всех поступательно движущихся масс  $\mathcal{M}_n$  в цилиндрах мотора будет равна результирующей сил  $P_{j2}^{(I)}$  [равенство (41)] и  $P_{j2}^{(II)}$  [равенство (44)]. Сила  $P_{j2}$  лежит в плоскости

осей  $yy$  правого и левого рядов мотора (эта плоскость перпендикулярна оси коленчатого вала и проходит через середину его среднего опорного подшипника). Согласно теореме об эллипсе равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка, конец вектора силы  $P_{j2}$ , имея начало на оси коленчатого вала, описывает эллипс; найдем величины полуосей этого эллипса и их направления. Для этой цели воспользуемся изложенным в § 2 главы II геометрическим определением векторов  $\bar{C}_k$  и  $\bar{D}_k$  (фиг. 216). Согласно сказанному в указанном параграфе векторы  $\bar{C}_k$  и  $\bar{D}_k$  могут быть легко определены, если известны: вектор  $\bar{R}_{k1}$  — равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка для угла  $\alpha = \alpha_1$  и вектор  $\bar{R}_{k2}$  — равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка для угла  $\alpha = \alpha_1 + \frac{\pi}{2k}$ . Найдем при помощи равенств (41) и (44) вектор  $\bar{R}_{21}$ , соответствующий  $\alpha_1 = 0^\circ$ , и вектор  $\bar{R}_{22}$ , соответствующий  $\alpha = 0^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ . Имеем при  $\alpha = 0^\circ$

$$\left. \begin{aligned} P_{j2}^{(n)} &= -4\lambda\mathcal{M}_n R\omega^2 = -a \\ \text{и} \\ P_{j2}^{(I)} &= 4F\mathcal{M}_n R\omega^2 \cos \Theta = b, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

и при  $\alpha = 45^\circ$

$$\left. \begin{aligned} P_{j2}^{(n)} &= 0 \\ \text{и} \\ P_{j2}^{(I)} &= 4F\mathcal{M}_n R\omega^2 \sin \Theta = c. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Эти силы представлены на фиг. 225. Вектор  $\bar{R}_{21}$  будет равен геометрической сумме векторов  $P_{j2}^{(n)} = -a$  и  $P_{j2}^{(I)} = b$ , соответствующих углу  $\alpha = 0^\circ$ . Вектор  $\bar{R}_{22}$  будет равен по величине  $c$  и направлен по оси  $y^{(A)}$  в положительном ее направлении.

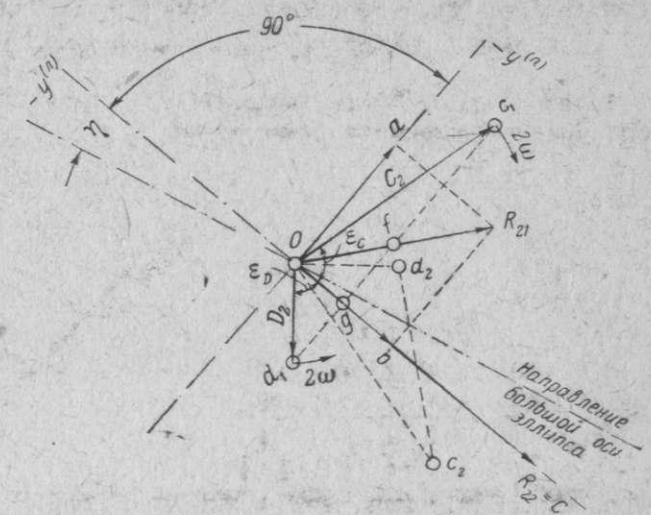
Для определения векторов  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  через середину вектора  $\bar{R}_{21}$  (точку  $f$ ) проводим прямую, перпендикулярную вектору  $\bar{R}_{22} = c$ , и откладываем на ней отрезки  $\bar{fd}_1 = \frac{a}{2}$  и  $\bar{fc}_1 = \frac{a}{2}$ ; векторы  $\bar{Oc}_1$  и  $\bar{Od}_1$  и будут представлять соответственно векторы  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$ . Из фиг. 225 нетрудно видеть, что

$$\bar{Og} = \frac{b}{2} \text{ и } \bar{gf} = \frac{a}{2},$$

а поэтому

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (c+a)^2}, \\ D_2 &= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (c-a)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\text{tg } \varepsilon_C = \frac{c+a}{b} \text{ и } \text{tg } \varepsilon_D = \frac{c-a}{b}. \quad (48)$$



Фиг. 225. К определению результирующей сил инерции 2-го порядка в моторах типа, показанного на фиг. 224.



Большая полуось эллипса равнодействующей сил инерции 2-го порядка, равная максимальному значению этой равнодействующей  $(P_{j2})_{\max}$ , будет

$$E_2 = (P_{j2})_{\max} = C_2 + D_2. \quad (49)$$

Малая полуось эллипса равнодействующей сил инерции 2-го порядка, равная минимальному значению этой равнодействующей  $(P_{j2})_{\min}$ , будет

$$F_2 = (P_{j2})_{\min} = C_2 - D_2. \quad (50)$$

Направления вращения векторов  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  легко найдутся, если определить положение векторов  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$ , соответствующее результирующей  $\bar{R}_{22}$ . Для этого (фиг. 22а) поступают совершенно так же, как при определении положения векторов  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$ , соответствующего результирующей  $\bar{R}_{21}$ . Искомое направление вращения вектора  $\bar{C}_2$  найдется из тех соображений, что

1) сдвиг фаз между вектором  $\bar{C}_2$ , соответствующим вектору  $\bar{R}_{21}$ , и вектором  $\bar{C}_2$ , соответствующим вектору  $\bar{R}_{22}$ , равен  $90^\circ$  и что

2) вектор  $\bar{C}_2$  вращается от положения, соответствующего вектору  $\bar{R}_{21}$  к положению, соответствующему вектору  $\bar{R}_{22}$ .

Направление вращения вектора  $\bar{D}_2$  обратно направлению вращения вектора  $\bar{C}_2$ . Направления вращения векторов  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  указаны на фиг. 22в стрелками. Векторы  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  вращаются с угловыми скоростями, равными  $2\omega$ .

Большая ось эллипса равнодействующей сил инерции 2-го порядка будет наклонена к оси  $y^{(a)}$  (фиг. 22б) под углом  $\eta$ , равным

$$\eta = \frac{1}{2}(\epsilon_c + \epsilon_D) - \epsilon_D = \frac{1}{2}(\epsilon_c - \epsilon_D). \quad (51)$$

Таким образом мы полностью определили эллипс равнодействующей сил инерции 2-го порядка.

В двигателях рассматриваемого типа силы инерции 2-го порядка остаются обычно неуравновешенными, хотя и достигают, как увидим ниже, значительной величины. Теоретическая возможность уравнивить эти силы имеется; соответствующий метод изложен в § 2 главы II.

Силы инерции вращающихся масс  $\mathcal{M}_k$  в рассматриваемом двигателе уравниваются сами собой.

Рассмотрим частные случаи, когда  $\gamma = \gamma_l$  и когда шатуны левого ряда цилиндров мотора тоже центральные.

Случай, когда  $\gamma = \gamma_l$ . В этом случае все вышевыведенные положения и формулы остаются в силе; следует только во всех формулах положить

$$E = 1 \text{ и } \Phi = 0, \quad (52)$$

а для кинематических параметров  $F$  и  $\Theta$  взять выражения, соответствующие случаю  $\gamma = \gamma_l$ .

Случай, когда все шатуны мотора центральные (нормальные). В этом случае во всех вышевыведенных формулах надо положить

$$E = 1, \quad \Phi = 0, \quad F = \lambda \text{ и } \Theta = 0. \quad (53)$$

Все выводы относительно уравнивания сил инерции 1-го порядка и сил инерции вращающихся масс  $\mathcal{M}_k$  остаются в силе. Что касается сил инерции 2-го порядка, то, принимая во внимание равенства (53), (45) и (46) и принимая  $\mathcal{M}_{n1} = \mathcal{M}_n$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \alpha = 0^\circ \\ \text{и} \\ \text{и при } \alpha = 45^\circ \\ \text{и} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P_{j2}^{(n)} &= -4\lambda \mathcal{M}_n R \omega^2 = -a \\ P_{j2}^{(n)} &= 4\lambda \mathcal{M}_n R \omega^2 = a \\ P_{j2}^{(n)} &= 0 \\ P_{j2}^{(n)} &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

$$(55)$$

Согласно равенствам (47) будем иметь

$$C_2 = D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a. \quad (56)$$

Последнее равенство показывает, что для случая, когда все шатуны рассматриваемого мотора центральны, эллипс равнодействующей сил инерции 2-го порядка превращается в отрезок прямой линии, совпадающей по направлению с вектором  $\bar{R}_{21}$  ( $\alpha = 0^\circ$ ). Угол  $\eta$ , который составляет эта прямая с осью  $y^{(a)}$ , определится на основании равенств (51) и (48):

$$\operatorname{tg} \epsilon_c = \frac{a}{a} = 1; \quad \epsilon_c = 45^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \epsilon_D = -\frac{a}{a} = -1; \quad \epsilon_D = -45^\circ$$

и

$$\eta = \frac{1}{2}(\epsilon_c - \epsilon_D) = 45^\circ.$$

Максимальное значение результирующей сил инерции 2-го порядка будет в этом случае равно

$$(P_{j2})_{\max} = C_2 + D_2 = \sqrt{2} a = 4 \sqrt{2} \lambda \mathcal{M}_n R \omega^2. \quad (57)$$

В виде примера определим  $(P_{j2})_{\max}$  для мотора Hispano-Suiza 8 Fb при  $n = 1800$  об/мин. Для этого мотора имеют место следующие величины:

$$R = 75 \text{ мм}; \quad L = 245 \text{ мм}; \quad \lambda = \frac{1}{3,26}; \quad \mathcal{M}_n = \frac{2,91}{9,81} = 0,296 \text{ кг см}^{-1} \text{ сек}^2;$$

$$\omega = 188 \text{ сек}^{-1}.$$

Тогда

$$(P_{j2})_{\max} = 4 \sqrt{2} \frac{1}{3,26} \cdot 0,297 \cdot 0,075 \cdot 188^2 = 1370 \text{ кг}.$$

Как видим, сила  $(P_{j2})_{\max}$  получается весьма значительной. Определив аналогичным образом силу  $(P_{j4})_{\max}$ , получим

$$\begin{aligned} (P_{j4})_{\max} &= 64 \sqrt{2} \rho_4 \mathcal{M}_n R \omega^2 = \sqrt{2} \lambda^3 \mathcal{M}_n R \omega^2 = \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{3,26} \right)^3 0,297 \cdot 0,075 \cdot 188^2 = 32,3 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Эта величина сравнительно невелика.

## § 7. Уравнивание сил инерции двенадцатицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными V-образно под углом $60^\circ$

Схема мотора дана на фиг. 226.

Силы инерции 1-го порядка. Согласно изложенному в § 5 результирующая сил инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс  $\mathcal{M}_n$  правого ряда цилиндров мотора равна нулю

$$P_{j1}^{(n)} = 0. \quad (58)$$

На основании равенства (8) главы II силы инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс  $\mathcal{M}_{n1}$  левого ряда цилиндров мотора равны:

$$\begin{aligned} \text{а) для цилиндров I и VI} \\ P_{j1}^{(n)} = P_{j1}^{(n)} &= -E \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(\alpha_i + \Phi) = \\ &= -E \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(\alpha - 60^\circ + \Phi) = \\ &= -E \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\varphi = \alpha - 60^\circ + \Phi; \quad (60)$$



б) для цилиндров II и V

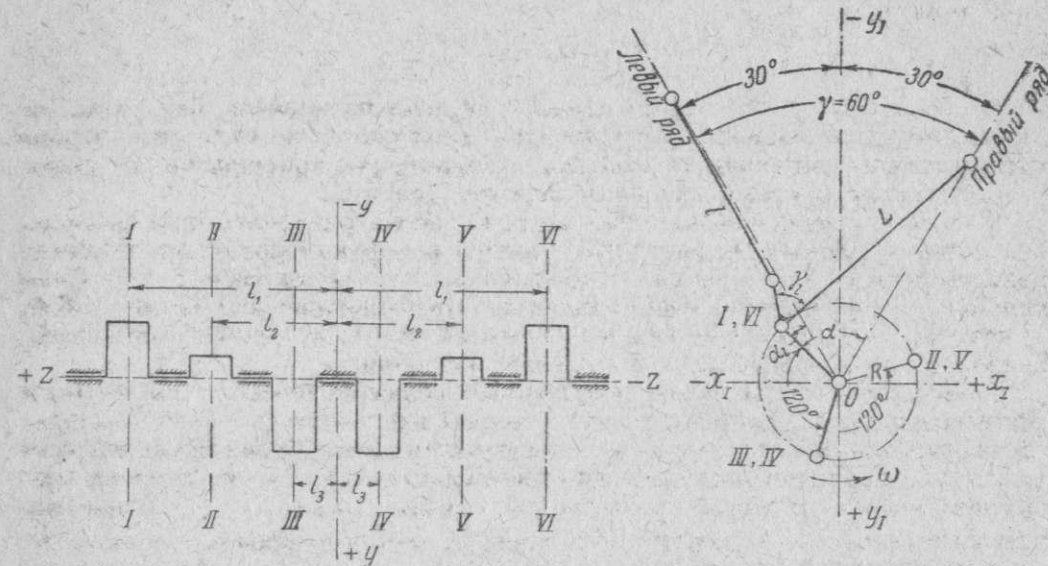
$$\begin{aligned} P_{j1}^{(II)} = P_{j1}^{(V)} &= -E \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(\alpha - 60^\circ + \Phi - 120^\circ) \\ &= -E \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(\varphi - 120^\circ) \end{aligned} \quad (61)$$

и в) для цилиндров III и IV

$$P_{j1}^{(III)} = P_{j1}^{(IV)} = -E \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(\varphi - 240^\circ). \quad (62)$$

Результирующая этих шести сил направлена по оси  $y^{(n)}$  и равна

$$P_{j1}^{(n)} = -2E \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 [\cos \varphi + \cos(\varphi - 120^\circ) + \cos(\varphi - 240^\circ)] = 0. \quad (63)$$



Фиг. 226. К уравниванию сил инерции двенадцатицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными V-образно под углом  $60^\circ$ .

Равенства (58) и (63) показывают, что результирующая сил инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс в двигателе рассматриваемого типа равна нулю

$$P_{j1} = 0. \quad (64)$$

Силы инерции 2-го порядка. Согласно изложенному в § 5 результирующая сил инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс  $\mathcal{M}_{n1}$  правого ряда цилиндров мотора равна нулю

$$P_{j2}^{(n)} = 0. \quad (65)$$

Согласно равенству (8) главы II силы инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс  $\mathcal{M}_{n1}$  левого ряда цилиндров мотора равны:

а) для цилиндров I и VI

$$\begin{aligned} P_{j2}^{(I)} = P_{j2}^{(VI)} &= -F \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(2\alpha_1 - \Theta) = \\ &= -F \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos[2(\alpha - 60^\circ) - \Theta] = \\ &= -F \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$\varphi_1 = 2(\alpha - 60^\circ) - \Theta, \quad (67)$$

б) для цилиндров II и V

$$\begin{aligned} P_{j2}^{(II)} = P_{j2}^{(V)} &= -F \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos[2(\alpha - 60^\circ - 120^\circ) - \Theta] = \\ &= -F \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(\varphi_1 + 120^\circ) \end{aligned} \quad (68)$$

и в) для цилиндров III и IV

$$\begin{aligned} P_{j2}^{(III)} = P_{j2}^{(IV)} &= -F \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos[2(\alpha - 60^\circ - 240^\circ) - \Theta] = \\ &= -F \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(\varphi_1 + 240^\circ). \end{aligned} \quad (69)$$

Складываясь, эти шесть сил дадут равнодействующую, направленную по оси  $y^{(n)}$  и равную

$$P_{j2}^{(n)} = -2F \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 [\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 + 120^\circ) + \cos(\varphi_1 + 240^\circ)] = 0. \quad (70)$$

Равенства (65) и (70) показывают, что результирующая сил инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс в двигателях рассматриваемого типа тоже равна нулю

$$P_{j2} = 0. \quad (71)$$

В двигателях этого типа первым неуравновешенным порядком является 3-й; силы инерции этого порядка получаются за счет сил инерции поступательно двигающихся масс  $\mathcal{M}_{n1}$  в цилиндрах с прицепными шатунами.

Следующий неуравновешенный порядок будет 6-й.

В существующих авиационных моторах рассматриваемого типа величины результирующей сил инерции 3-го порядка не превышают 50 кг; величины результирующей сил инерции 6-го порядка не превышают 5 кг. Силы инерции вращающихся масс двигателя уравниваются сами собой, а поэтому этот тип двигателей относится к числу типов двигателей, наиболее уравновешенных в отношении сил инерции.

Остановимся теперь более подробно на уравновешенности сил инерции частного случая рассмотренного типа двигателей, когда  $\gamma_1 = \gamma$ . Все выводы, сделанные для общего случая в отношении уравновешенности сил инерции 1, 2 и 4-го порядков поступательно двигающихся масс и сил инерции вращающихся масс, остаются в силе и для случая, когда  $\gamma_1 = \gamma$ . Определим результирующую сил инерции 6-го порядка, который является первым из неуравновешенных порядков.

Согласно сказанному в § 5 результирующая сил инерции 6-го порядка поступательно двигающихся масс  $\mathcal{M}_{n1}$  правого ряда цилиндров мотора направлена по оси  $y^{(n)}$  и равна

$$P_{j6}^{(n)} = -6^3 \rho_6 \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos 6\alpha. \quad (72)$$

На основании равенства (5) главы II силы инерции 6-го порядка поступательно двигающихся масс левого ряда цилиндров мотора равны:

а) для цилиндров I и VI

$$\begin{aligned} P_{j6}^{(I)} = P_{j6}^{(VI)} &= -\mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \left[ \frac{r}{L} 36 \rho_6 \cos 6(\alpha_1 + \gamma) + \frac{L}{L} 36 \rho_{16} \cos 6(\alpha_1 - \delta) \right] = \\ &= -36 \lambda \mathcal{M}_{n1} \omega^2 [r \rho_6 \cos 6(\alpha - 60^\circ + 60^\circ) + L \rho_{16} \cos 6(\alpha - 60^\circ - \delta)] = \\ &= -36 \lambda \mathcal{M}_{n1} \omega^2 [r \rho_6 \cos 6\alpha + \\ &+ L \rho_{16} \cos 6(\alpha - \delta)], \end{aligned} \quad (73)$$

б) для цилиндров II и V

$$\begin{aligned} P_{j6}^{(II)} = P_{j6}^{(V)} &= -36 \lambda \mathcal{M}_{n1} \omega^2 [r \rho_6 \cos 6(\alpha - 120^\circ) + L \rho_{16} \cos 6(\alpha - 120^\circ - \delta)] = \\ &= -36 \lambda \mathcal{M}_{n1} \omega^2 [r \rho_6 \cos 6\alpha + L \rho_{16} \cos 6(\alpha - \delta)] \end{aligned} \quad (74)$$

и в) для цилиндров III и IV

$$\begin{aligned} P_{j6}^{(III)} = P_{j6}^{(IV)} &= -36 \lambda \mathcal{M}_{n1} \omega^2 [r \rho_6 \cos 6(\alpha + 120^\circ) + L \rho_{16} \cos 6(\alpha + 120^\circ - \delta)] = \\ &= -36 \lambda \mathcal{M}_{n1} \omega^2 [r \rho_6 \cos 6\alpha + L \rho_{16} \cos 6(\alpha - \delta)]. \end{aligned} \quad (75)$$



Складываясь, эти шесть сил дадут равнодействующую, направленную по оси  $y^{(n)}$  и равную

$$F_{j6}^{(n)} = -6^3 \lambda \mathcal{M}_n l \omega^2 [r \rho_6 \cos 6\alpha + L \rho_{16} \cos 6(\alpha - \delta)]. \quad (76)$$

Чтобы определить эллипс равнодействующей сил инерции 6-го порядка, опять воспользуемся изложенным в § 2 главы II геометрическим определением векторов  $\bar{C}_6$  и  $\bar{D}_6$  (фиг. 216). Для этого найдем вектор  $\bar{R}_{61}$  равнодействующей сил инерции 6-го порядка при  $\alpha = 0^\circ$  и вектор  $\bar{R}_{62}$  равнодействующей этих сил при  $\alpha = 0 + \frac{\pi}{2 \cdot 6} = 15^\circ$ . Заметим, что угол  $\alpha$ , которому соответствует вектор  $\bar{R}_{61}$ , может быть выбран произвольно; мы его взяли равным 0 для удобства дальнейших выводов.

Векторы  $\bar{R}_{61}$  и  $\bar{R}_{62}$  найдутся как суммы векторов  $P_{j6}^{(n)}$  и  $P_{j6}^{(a)}$ , определяемых равенствами (72) и (76).

Для  $\alpha = 0$  имеем

$$P_{j6}^{(n)} = -6^3 \rho_6 \mathcal{M}_n R \omega^2 = -a$$

и

$$P_{j6}^{(a)} = -6^3 \lambda \mathcal{M}_n l \omega^2 (r \rho_6 + L \rho_{16} \cos 6\delta) = -b. \quad (77)$$

Для  $\alpha = 15^\circ$  имеем

$$P_{j6}^{(n)} = 0$$

и

$$P_{j6}^{(a)} = -6^3 \lambda \rho_{16} L \mathcal{M}_n l \omega^2 \sin 6\delta = -c. \quad (78)$$

На фиг. 227 дано построение векторов  $\bar{R}_{61}$  и  $\bar{R}_{62}$ . Для определения векторов  $\bar{C}_6$  и  $\bar{D}_6$ , соответствующих вектору  $\bar{R}_{61}$ , из середины вектора  $\bar{R}_{61}$  (точки  $f$ ) проводим перпендикулярную к вектору  $\bar{R}_{62}$  прямую и откладываем на ней отрезки  $fd_1$  и  $fc_1$ , равные по величине  $\frac{1}{2} \bar{R}_{62} = \frac{1}{2} c$ . Векторы  $\bar{O}c_1$  и  $\bar{O}d_1$  будут искомыми векторами  $\bar{C}_6$  и  $\bar{D}_6$ . Для определения величины и направления этих векторов, а также величины углов  $\varepsilon_c$  и  $\varepsilon_D$ , из точки  $f$  проводим прямую  $fh$ , параллельную оси  $y^{(n)}$ . Из треугольника  $gfh$  имеем

$$\bar{g}f = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a. \quad (79)$$

Отрезок  $\bar{O}g$  определится как половина проекции на ось  $y^{(n)}$  вектора  $\bar{R}_{61}$

$$\bar{O}g = \frac{1}{2} (b + a \cos 60^\circ) = \frac{1}{4} (a + 2b). \quad (80)$$

Из треугольников  $Oc_1g$  и  $Od_1g$  имеем

$$\left. \begin{aligned} C_6 &= \sqrt{(\bar{O}g)^2 + (\bar{g}c_1)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{(a + 2b)^2 + (2c - \sqrt{3}a)^2} \\ D_6 &= \sqrt{(\bar{O}g)^2 + (\bar{g}d_1)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{(a + 2b)^2 + (2c + \sqrt{3}a)^2} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_c &= \frac{\bar{g}c_1}{\bar{O}g} = \frac{2c - \sqrt{3}a}{a + 2b} \\ \operatorname{tg} \varepsilon_D &= \frac{\bar{g}d_1}{\bar{O}g} = \frac{2c + \sqrt{3}a}{a + 2b} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Большая полуось эллипса равнодействующей сил инерции 6-го порядка, равная максимальному значению этой равнодействующей  $(P_{j6})_{\max}$ , будет равна

$$E_6 = (P_{j6})_{\max} = C_6 + D_6. \quad (83)$$

Малая полуось эллипса равнодействующей сил инерции 6-го порядка, равная минимальному значению этой равнодействующей  $(P_{j6})_{\min}$ , будет равна

$$F_6 = (P_{j6})_{\min} = D_6 - C_6. \quad (84)$$

Векторы  $\bar{C}_6$  и  $\bar{D}_6$  вращаются в разные стороны с угловыми скоростями  $6\omega$ .

Направления вращения векторов  $\bar{C}_6$  и  $\bar{D}_6$  легко найдутся приемом, изложенным в § 6 для определения направления вращения векторов  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$ .

Большая ось эллипса равнодействующей сил инерции 6-го порядка будет наклонена к оси  $y^{(n)}$  под углом  $\eta$ , равным

$$\eta = \varepsilon_D - \frac{1}{2} (\varepsilon_c + \varepsilon_D) = \frac{1}{2} (\varepsilon_D - \varepsilon_c). \quad (85)$$

Для случая, когда шатуны левого ряда цилиндров мотора тоже центральные, все вышенайденные для случая  $\gamma = \gamma_l$  выводы и формулы остаются в силе, следует только положить в этих формулах

$$r = 0; \quad L = L; \quad \delta = 0; \quad l = L \quad \text{и} \quad \lambda_l = \lambda. \quad (86)$$

Полагая в этом случае  $\mathcal{M}_{n1} = \mathcal{M}_n$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a &= b = 6^3 \rho_6 \mathcal{M}_n R \omega^2, \\ c &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

$$C_6 = D_6 = \frac{1}{4} \sqrt{(3a)^2 + 3a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad (88)$$

$$(P_{j6})_{\max} = C_6 + D_6 = \sqrt{3} a = 6^3 \sqrt{3} \rho_6 \mathcal{M}_n R \omega^2, \quad (89)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_c &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} (-30^\circ), & \varepsilon_c &= -30^\circ, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_D &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} (30^\circ), & \varepsilon_D &= 30^\circ, \\ \eta &= \frac{1}{2} (\varepsilon_D - \varepsilon_c) = 30^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Равенства (88) и (90) показывают, что в рассматриваемом случае эллипс равнодействующей сил инерции 6-го порядка превращается в отрезок прямой линии, направление которой делит пополам угол между отрицательными (или положительными) направлениями осей  $y^{(n)}$  и  $y^{(n)}$ .

## § 8. Уравновешивание сил инерции двенадцатицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными W-образно

Схема мотора дана на фиг. 228.

Силы инерции 1-го порядка. Согласно выводам, полученным при рассмотрении уравновешивания сил инерции поступательно двигающихся масс восьмицилиндрового V-образного мотора, имеем, что и в рассматри-

Фиг. 227. К определению результирующей сил инерции 6-го порядка в моторах типа фиг. 226.

наемом двигателе силы инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс уравновешены

$$P_{j1} = 0. \quad (91)$$

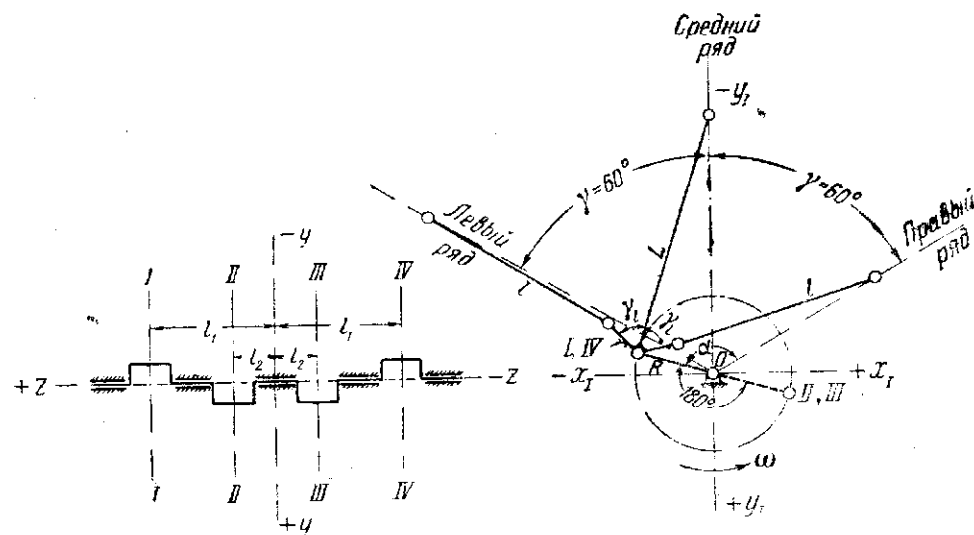
Силы инерции 2-го порядка. Согласно равенству (8) главы II силы инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс  $M_{n1}$  левого ряда цилиндров мотора равны:

а) для цилиндров I и IV

$$\begin{aligned} P_{j2}^{(I)} = P_{j2}^{(IV)} &= -F M_{n1} R \omega^2 \cos(2\alpha_1 - \Theta) = \\ &= -F M_{n1} R \omega^2 \cos[2(\alpha - 120^\circ) - \Theta] \end{aligned} \quad (92)$$

и б) для цилиндров II и III

$$\begin{aligned} P_{j2}^{(II)} = P_{j2}^{(III)} &= -F M_{n1} R \omega^2 \cos[2(\alpha - 120^\circ + 180^\circ) - \Theta] = \\ &= -F M_{n1} R \omega^2 \cos[2(\alpha - 120^\circ) - \Theta]. \end{aligned} \quad (93)$$



Фиг. 228. К уравновешиванию сил инерции двенадцатицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными W-образно.

Складываясь, эти четыре силы дадут результирующую сил инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс в цилиндрах левого ряда мотора, направленную по оси  $y^{(n)}$  и равную

$$\begin{aligned} P_{j2}^{(a)} &= -4F M_{n1} R \omega^2 \cos[2(\alpha - 120^\circ) - \Theta] = \\ &= 4F M_{n1} R \omega^2 \cos(2\alpha - 60^\circ - \Theta). \end{aligned} \quad (94)$$

Результирующая сил инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс в цилиндрах среднего ряда (шатунны нормальные) направлена по оси  $y^{(c)}$  и равна

$$P_{j2}^{(c)} = 4\lambda M_n R \omega^2 \cos 2(\alpha - 60^\circ). \quad (95)$$

Для цилиндров правого ряда имеем:

а) для цилиндров I и IV

$$\begin{aligned} P_{j2}^{(I)} = P_{j2}^{(IV)} &= -F M_{n1} R \omega^2 \cos[2(360^\circ - \alpha) - \Theta] = \\ &= -F M_{n1} R \omega^2 \cos(2\alpha + \Theta) \end{aligned} \quad (96)$$

и для цилиндров II и III

$$\begin{aligned} P_{j2}^{(II)} = P_{j2}^{(III)} &= -F M_{n1} R \omega^2 \cos[2(180^\circ - \alpha) - \Theta] = \\ &= -F M_{n1} R \omega^2 \cos(2\alpha + \Theta). \end{aligned} \quad (97)$$

Складываясь, эти четыре силы дадут результирующую сил инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс в цилиндрах правого ряда мотора, направленную по оси  $y^{(n)}$  и равную

$$P_{j2}^{(n)} = -4F M_{n1} R \omega^2 \cos(2\alpha + \Theta). \quad (98)$$

Все три силы  $P_{j2}^{(a)}$ ,  $P_{j2}^{(c)}$  и  $P_{j2}^{(n)}$  лежат в одной плоскости, проходящей через середину средней опоры коленчатого вала и перпендикулярной к оси последнего.

Так как при угле  $\alpha = 60^\circ$  кривошипно-шатунный механизм мотора симметричен относительно плоскости осей среднего ряда цилиндров, то одна из осей эллипса равнодействующей сил инерции 2-го порядка будет лежать в этой плоскости, а другая будет ей перпендикулярна. Полуось эллипса  $E_{21}$ , совпадающая с плоскостью осей цилиндров среднего ряда, будет равна по величине равнодействующей  $R_{21}$  сил инерции 2-го порядка всех поступательно двигающихся масс мотора при  $\alpha = 60^\circ$ ; эта равнодействующая найдется как сумма проекций на ось  $yy$  результирующих сил инерции 2-го порядка  $P_{j2}^{(a)}$ ,  $P_{j2}^{(c)}$  и  $P_{j2}^{(n)}$  при  $\alpha = 60^\circ$  и будет направлена по оси  $yy$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{21} &= 4F M_{n1} R \omega^2 \cos(60^\circ - \Theta) \cos 60^\circ - 4\lambda M_n R \omega^2 - \\ &- 4F M_{n1} R \omega^2 \cos(120^\circ + \Theta) \cos 60^\circ = \\ &= -4R \omega^2 [\lambda M_n - F M_{n1} \cos(60^\circ - \Theta)]. \end{aligned} \quad (99)$$

Полуось эллипса  $F_2$ , перпендикулярная плоскости осей цилиндров среднего ряда, будет равна по величине равнодействующей  $\bar{R}_{22}$  сил инерции 2-го порядка всех поступательно двигающихся масс мотора при  $\alpha = 60^\circ + \frac{180^\circ}{2.2} = 105^\circ$ ; эта равнодействующая найдется как сумма проекций на ось  $xx$  результирующих сил инерции 2-го порядка  $P_{j2}^{(a)}$ ,  $P_{j2}^{(c)}$  и  $P_{j2}^{(n)}$  при  $\alpha = 105^\circ$  и будет направлена по оси  $xx$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{22} &= 4F M_{n1} R \omega^2 \cos(210^\circ - 60^\circ - \Theta) \cos 30^\circ + \\ &+ 4F M_{n1} R \omega^2 \cos(210^\circ + \Theta) \cos 30^\circ = \\ &= -4\sqrt{3} F M_{n1} R \omega^2 \cos(30^\circ + \Theta). \end{aligned} \quad (100)$$

Если  $R_{21}$  и  $R_{22}$  — скалярные величины соответственно векторов сил  $\bar{R}_{21}$  и  $\bar{R}_{22}$ , то скалярные величины  $C_2$  и  $D_2$  векторов сил  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$ , образующих эллипс равнодействующей сил инерции 2-го порядка, найдутся из системы уравнений

$$\text{при } R_{21} > R_{22} \begin{cases} C_2 + D_2 = R_{21} \\ C_2 - D_2 = R_{22} \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{при } R_{22} > R_{21} \begin{cases} C_2 + D_2 = R_{22} \\ C_2 - D_2 = R_{21} \end{cases} \quad (101)$$

При  $\alpha = 60^\circ$  векторы сил  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  совпадают с осью  $yy$ . При  $\alpha = 105^\circ$  векторы этих сил совпадают с осью  $xx$ . Их направление при этих значениях угла  $\alpha$  и направления их вращения определяются из тех соображений, что

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha = 60^\circ \text{ вектор } \bar{R}_{21} &= \bar{C}_2 + \bar{D}_2 \\ \text{и при } \alpha = 105^\circ \text{ вектор } \bar{R}_{22} &= \bar{C}_2 + \bar{D}_2. \end{aligned} \quad (102)$$

Силы инерции 2-го порядка остаются обычно неуравновешенными.

Силы инерции вращающихся масс в рассматриваемом типе двигателей уравновешиваются сами собой.



В частном случае, когда  $\gamma_1 = \gamma$ , все выводы и формулы общего случая остаются в силе; входящие в формулы величины  $F$  и  $\Theta$  берутся по формулам для случая  $\gamma_1 = \gamma$ . Определим для этого случая эллипс равнодействующей сил инерции 4-го порядка. Все выводы ведутся аналогично тому, как это делалось в общем случае для сил инерции 2-го порядка. Имеем

$$P_{j4}^{(a)} = 4M_{n1}R\omega^2 \left[ 16\rho_4 \frac{r}{L} \cos 4(\alpha - 120^\circ + 60^\circ) + 16\rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4(\alpha - 120^\circ - \delta) \right] =$$

$$= 4^3 M_{n1} R \omega^2 \left[ \rho_4 \frac{r}{L} \cos 4(\alpha + 30^\circ) + \rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4(\alpha - 30^\circ - \delta) \right], \quad (103)$$

$$P_{j4}^{(c)} = 4^3 M_{n1} R \omega^2 \rho_4 \cos 4(\alpha - 60^\circ), \quad (104)$$

$$P_{j4}^{(n)} = 4^3 M_{n1} R \omega^2 \left[ \rho_4 \frac{r}{L} \cos 4(360^\circ - \alpha + 60^\circ) + \rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4(360^\circ - \alpha - \delta) \right] =$$

$$= 4^3 M_{n1} R \omega^2 \left[ \rho_4 \frac{r}{L} \cos 4(\alpha + 30^\circ) + \rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4(\alpha + \delta) \right]. \quad (105)$$

Оси эллипса будут расположены по осям  $yy$  и  $xx$ . Полуось эллипса, совпадающая с осью  $yy$ , будет равна скалярной величине равнодействующей сил инерции 4-го порядка при  $\alpha = 60^\circ$ , равной

$$\bar{R}_{41} = 4^3 R \omega^2 \left\{ \rho_4 M_{n1} + \cos 60^\circ M_{n1} \left[ \rho_4 \frac{r}{L} \cos 360^\circ + \rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4(30^\circ - \delta) \right] + \right.$$

$$\left. + \cos 60^\circ M_{n1} \left[ \rho_4 \frac{r}{L} \cos 360^\circ + \rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4(60^\circ + \delta) \right] \right\} =$$

$$= 4^3 R \omega^2 \left\{ \rho_4 M_{n1} + M_{n1} \left[ \rho_4 \frac{r}{L} + \rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4(30^\circ - \delta) \right] \right\}. \quad (106)$$

Полуось эллипса, совпадающая с осью  $xx$ , будет равна скалярной величине равнодействующей сил инерции 4-го порядка при  $\alpha = 60^\circ + \frac{180^\circ}{2 \cdot 4} = 82,5^\circ$ , равной

$$\bar{R}_{42} = 4^3 M_{n1} R \omega^2 \cos 30^\circ \left[ \rho_4 \frac{r}{L} \cos 4\left(60^\circ + \frac{90^\circ}{4} + 30^\circ\right) + \right.$$

$$\left. + \rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4\left(60^\circ + \frac{90^\circ}{4} - 30^\circ - \delta\right) - \rho_4 \frac{r}{L} \cos 4\left(60^\circ + \frac{90^\circ}{4} + 30^\circ\right) - \right.$$

$$\left. - \rho_{14} \frac{J}{L} \cos 4\left(60^\circ + \frac{90^\circ}{4} + \delta\right) \right] = -4^3 \sqrt{3} M_{n1} R \omega^2 \rho_{14} \frac{J}{L} \sin(60^\circ + 4\delta). \quad (107)$$

Образующие эллипс равнодействующей сил инерции 4-го порядка векторы  $\bar{C}_4$  и  $D_4$  найдутся совершенно так же, как векторы  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  для случая  $\gamma_1 \neq \gamma$ .

Частный пример. Рассмотрим уравнивание 12-цилиндрового W-образного мотора „Непир“ Х1а при  $n = 2350$  об/мин. Основные данные мотора следующие:

радиус кривошипа	$R = 65,085$ мм,
длина главного шатуна	$L = 249,6$ мм,
длина прицепного шатуна	$l = 190,2$ мм,
расстояние оси пальца прицепного шатуна от оси кривошипной шейки вала	$r = 61,1$ мм.

Масса поступательно двигающихся частей в цилиндре с главным шатуном равна  $M_n = 0,2726$  кг  $\text{м}^{-1} \text{сек}^2$ .

Масса поступательно двигающихся частей в цилиндре с прицепным шатуном равна  $M_{n1} = 0,238$  кг  $\text{м}^{-1} \text{сек}^2$ .

$$\gamma_1 = \gamma = 60^\circ; \delta = 13^\circ 15'; L = 225,35 \text{ мм}; \lambda = \frac{R}{L} = \frac{1}{3,85};$$

$$\lambda_1 = \lambda \frac{J}{l} = \frac{1}{3,235}; R\omega^2 = 3941 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}; \rho_2 = \frac{1}{4} \lambda = 0,06494;$$

$$\rho_{12} = \frac{1}{4} \lambda_1 = 0,07728; \rho_4 = \frac{1}{64} \lambda^3 = 0,0002738; \rho_{14} = \frac{1}{64} \lambda_1^3 = 0,0004615.$$

Уравнивание сил инерции 2-го порядка.

Заметим, что если в формулы (99) и (100) подставить вместо  $F$  и  $\Theta$  их точные выражения через основные кинематические параметры, то для сил  $\bar{R}_{21}$  и  $\bar{R}_{22}$  получим следующие точные выражения

$$\bar{R}_{21} = -4^2 R \omega^2 \left\{ \rho_2 M_n + M_{n1} \left[ \rho_2 \frac{r}{L} - \rho_{12} \frac{J}{L} \cos 2(30^\circ - \delta) \right] \right\} \quad (99')$$

и

$$\bar{R}_{22} = -4^2 \sqrt{3} \rho_{12} \frac{J}{L} M_{n1} R \omega^2 \cos(30^\circ + 2\delta). \quad (100')$$

Эти формулы могут быть выведены и непосредственно, аналогично сделанному выше выводу формул для  $\bar{R}_{41}$  и  $\bar{R}_{42}$ .

Для рассматриваемого частного примера имеем

$$\bar{R}_{21} = -4^2 \cdot 3941 \left\{ 0,06494 \cdot 0,2726 + 0,238 \left[ 0,06494 \cdot \frac{61,1}{249,6} - \right. \right.$$

$$\left. - 0,07728 \cdot \frac{225,35}{249,6} \cos 2(30^\circ - 13^\circ 15') \right\} = -482 \text{ кг}$$

и

$$\bar{R}_{22} = -4^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,07728 \cdot \frac{225,35}{249,6} \cdot 0,238 \cdot 3941 \cos(30^\circ + 26^\circ 30') = -1001 \text{ кг}.$$

Таким образом  $(P_{j2})_{\max} = 1001$  кг;  $(P_{j2})_{\min} = 482$  кг.

Согласно равенствам (106) и (107), имеем

$$\bar{R}_{41} = 4^3 \cdot 3941 \left\{ 0,0002738 \cdot 0,2726 + 0,238 \left[ 0,0002738 \cdot \frac{61,1}{249,6} + \right. \right.$$

$$\left. + 0,0004615 \cdot \frac{225,35}{249,6} \cos 4(30^\circ - 13^\circ 15') \right\} = 32,6 \text{ кг}$$

и

$$\bar{R}_{42} = -4^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,0004615 \cdot \frac{225,35}{249,6} \cdot 0,238 \cdot 3941 \sin(60^\circ + 53^\circ) = -39,9 \text{ кг},$$

т. е.

$$(P_{j4})_{\max} = 39,9 \text{ кг} \text{ и } (P_{j4})_{\min} = 32,6 \text{ кг}.$$

Мы видим, что в моторах рассматриваемого типа неуравновешенные силы инерции 2-го порядка достигают значительной величины. С возрастанием порядка величина результирующей сил инерции быстро падает.

## § 9. Уравнивание сил инерции восемнадцатицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными W-образно

Схема мотора дана на фиг. 229.

Рассматривая каждый из рядов цилиндров мотора в отдельности, мы на основании сказанного в § 7 приходим к заключению, что в общем случае, когда  $\gamma_1 \neq \gamma$ , первыми неуравновешенными порядками сил инерции будут 3-й и 6-й. Силы инерции вращающихся масс  $M_k$  двигателя уравновешены. Найдем эллипсы равнодействующих сил инерции 3-го и 6-го порядков.



Силы инерции 3-го порядка. Общее выражение для сил инерции 3-го порядка поступательно двигающейся массы  $\mathcal{M}_n$  в цилиндре с прицепным шатуном будет

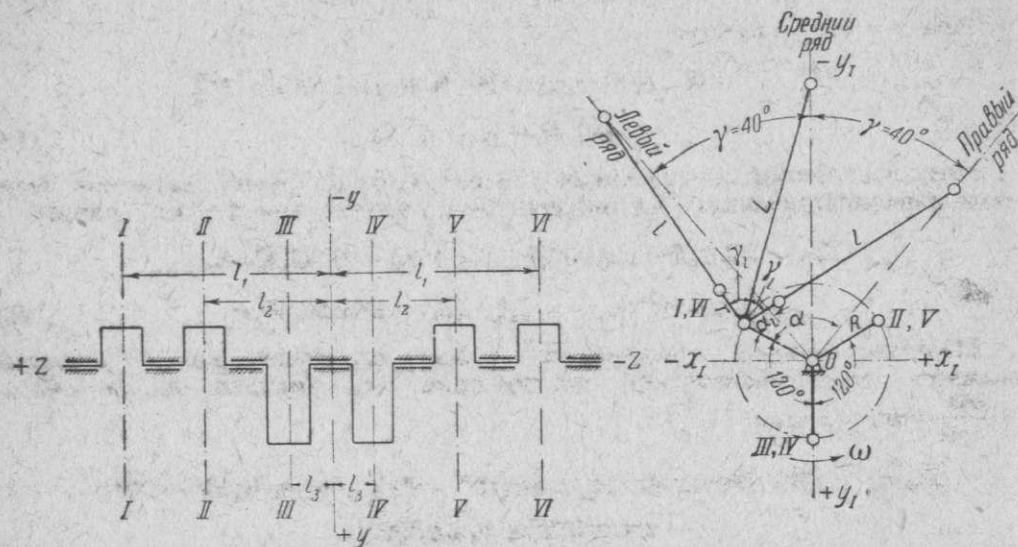
$$P_{j3} = -\mathcal{M}_n R \omega^2 (a_3 \cos 3z_l + b_3 \sin 3z_l). \quad (108)$$

Сила инерции 3-го порядка поступательно двигающейся массы  $\mathcal{M}_n$  в цилиндре с нормальным шатуном равна нулю. Поэтому

$$P_{j3}^{(a)} = -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 [a_3 \cos 3(\alpha - 80^\circ) + b_3 \sin 3(\alpha - 80^\circ)], \quad (109)$$

$$P_{j3}^{(c)} = 0, \quad (110)$$

$$P_{j3}^{(n)} = -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 [a_3 \cos 3(360^\circ - \alpha) + b_3 \sin 3(360^\circ - \alpha)] = -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 [a_3 \cos 3\alpha - b_3 \sin 3\alpha]. \quad (111)$$



Фиг. 229. К уравниванию сил инерции восемнадцатилитрового мотора с цилиндрами, расположенными W-образно.

Оси эллипса будут расположены по осям  $xx$  и  $yy$ , так как при  $\alpha = 40^\circ$

$$\begin{aligned} P_{j3}^{(n)} &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 [a_3 \cos 120^\circ - b_3 \sin 120^\circ] = P_{j3}^{(n)} = \\ &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 \left[ -\frac{1}{2} a_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_3 \right] = \\ &= 3 \mathcal{M}_n R \omega^2 (a_3 + \sqrt{3} b_3). \end{aligned} \quad (112)$$

Полуось эллипса, совпадающая с осью  $yy$ , будет равна скалярной величине равнодействующей сил инерции 3-го порядка при  $\alpha = 40^\circ$ , равной

$$\begin{aligned} \bar{R}_{31} &= 3 \mathcal{M}_n R \omega^2 (a_3 + \sqrt{3} b_3) 2 \cos 40^\circ = \\ &= 6 \cos 40^\circ (a_3 + \sqrt{3} b_3) \mathcal{M}_n R \omega^2. \end{aligned} \quad (113)$$

Полуось эллипса, совпадающая с осью  $xx$ , будет равна скалярной величине равнодействующей сил инерции 3-го порядка при  $\alpha = 40^\circ + \frac{180^\circ}{2 \cdot 3} = 70^\circ$ , равной

$$\begin{aligned} \bar{R}_{32} &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 \sin 40^\circ [a_3 \cos 30^\circ - b_3 \sin 30^\circ - a_3 \cos 210^\circ + b_3 \sin 210^\circ] = \\ &= -6 \sin 40^\circ (\sqrt{3} a_3 - b_3) \mathcal{M}_n R \omega^2. \end{aligned} \quad (114)$$

Образующие эллипс равнодействующей сил инерции 3-го порядка векторы  $\bar{C}_3$  и  $\bar{D}_3$  найдутся аналогично векторам  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  (см. § 8) для случая, когда  $\gamma_l \neq \gamma$ .

Силы инерции 6-го порядка. Для сил инерции 6-го порядка аналогично будем иметь

$$P_{j6} = -\mathcal{M}_n R \omega^2 (a_6 \cos 6z_l + b_6 \sin 6z_l), \quad (115)$$

$$\begin{aligned} P_{j6}^{(a)} &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 [a_6 \cos 6(\alpha - 80^\circ) + b_6 \sin 6(\alpha - 80^\circ)] = \\ &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 [a_6 \cos 6(\alpha - 20^\circ) + b_6 \sin 6(\alpha - 20^\circ)], \end{aligned} \quad (116)$$

$$P_{j6}^{(c)} = -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 36 \rho_6 \cos 6(\alpha - 40^\circ), \quad (117)$$

$$\begin{aligned} P_{j6}^{(n)} &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 [a_6 \cos 6(360^\circ - \alpha) + b_6 \sin 6(360^\circ - \alpha)] = \\ &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 (a_6 \cos 6\alpha - b_6 \sin 6\alpha). \end{aligned} \quad (118)$$

При  $\alpha = 40^\circ$  получим

$$\begin{aligned} P_{j6}^{(a)} &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 (a_6 \cos 120^\circ + b_6 \sin 120^\circ) = P_{j6}^{(n)} = \\ &= 3 \mathcal{M}_n R \omega^2 (a_6 - \sqrt{3} b_6). \end{aligned} \quad (119)$$

Полуось эллипса, совпадающая с осью  $yy$ , будет равна скалярной величине равнодействующей сил инерции 6-го порядка при  $\alpha = 40^\circ$ , равной

$$\begin{aligned} \bar{R}_{61} &= 6 \mathcal{M}_n R \omega^2 \cos 40^\circ (a_6 - \sqrt{3} b_6) - 6^3 \mathcal{M}_n R \omega^2 \rho_6 = \\ &= 6 [\cos 40^\circ (a_6 - \sqrt{3} b_6) \mathcal{M}_n - 36 \rho_6 \mathcal{M}_n] R \omega^2. \end{aligned} \quad (120)$$

Полуось эллипса, совпадающая с осью  $xx$ , будет равна скалярной величине равнодействующей сил инерции 6-го порядка при  $\alpha = 40^\circ + \frac{180^\circ}{2 \cdot 6} = 55^\circ$ , равной

$$\begin{aligned} \bar{R}_{62} &= -6 \mathcal{M}_n R \omega^2 \sin 40^\circ [a_6 \cos 6(55^\circ - 20^\circ) + b_6 \sin 6(55^\circ - 20^\circ) - \\ &\quad - a_6 \cos 330^\circ + b_6 \sin 330^\circ] = \\ &= -6 \sin 40^\circ (-a_6 \cos 30^\circ - b_6 \sin 30^\circ - a_6 \cos 30^\circ - b_6 \sin 30^\circ) \mathcal{M}_n R \omega^2 = \\ &= 6 \sin 40^\circ (\sqrt{3} a_6 + b_6) \mathcal{M}_n R \omega^2. \end{aligned} \quad (121)$$

Для случая, когда  $\gamma_l = \gamma$ , согласно равенству (8) главы II, имеем

$$\begin{aligned} P_{j6} &= -\mathcal{M}_n R \omega^2 (a_6 \cos 6\alpha_l + b_6 \sin 6\alpha_l) = \\ &= -\mathcal{M}_n R \omega^2 \left[ \frac{r_1}{L} 6^2 \rho_6 \cos 6(\alpha_l + \gamma) + \frac{J}{L} 6^2 \rho_{12} \cos 6(\alpha_l - \delta) \right], \end{aligned} \quad (122)$$

отсюда

$$\begin{aligned} a_6 \cos 6\alpha_l + b_6 \sin 6\alpha_l &= 6^2 \rho_6 \frac{r_1}{L} \cos 6(\alpha_l + \gamma) + 6^2 \rho_{12} \frac{J}{L} \cos 6(\alpha_l - \delta) = \\ &= \left( 6^2 \rho_6 \frac{r_1}{L} \cos 240^\circ + 6^2 \rho_{12} \frac{J}{L} \cos 6\delta \right) \cos 6\alpha_l + \\ &\quad + \left( -6^2 \rho_6 \frac{r_1}{L} \sin 240^\circ + 6^2 \rho_{12} \frac{J}{L} \sin 6\delta \right) \sin 6\alpha_l \end{aligned}$$

и

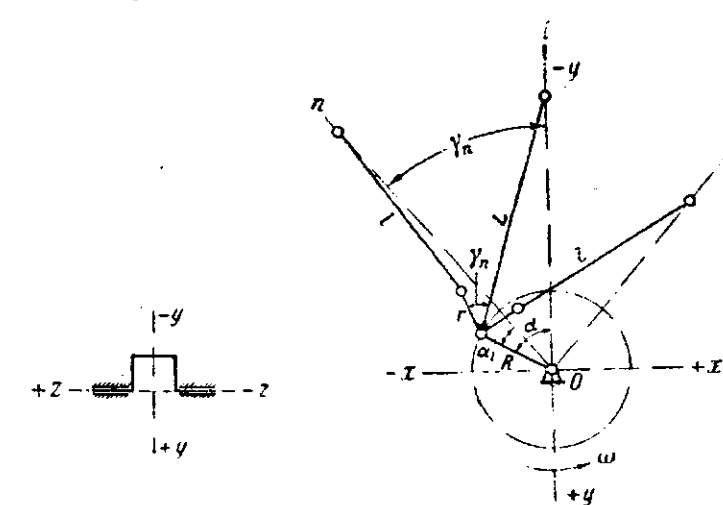
$$\begin{aligned} a_6 &= 6^2 \left( \rho_{12} \frac{J}{L} \cos 6\delta - \frac{1}{2} \rho_6 \frac{r_1}{L} \right), \\ b_6 &= 6^2 \left( \rho_{12} \frac{J}{L} \sin 6\delta + \frac{\sqrt{3}}{2} \rho_6 \frac{r_1}{L} \right). \end{aligned} \quad (123)$$



В этом случае ( $\gamma_i = \gamma$ )  $\bar{R}_{31} = \bar{R}_{32} = 0$ ; величины  $\bar{R}_{61}$  и  $\bar{R}_{62}$  определяются согласно формул (120) и (121), причем  $a_6$  и  $b_6$  подсчитываются по формулам (123). Образующие эллипса равнодействующей сил инерции 6-го порядка векторы  $\bar{C}_6$  и  $\bar{D}_6$  найдутся аналогично векторам  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  для случая  $\gamma_i \neq \gamma$  (см. § 8).

#### § 10. Уравновешивание сил инерции звездообразных моторов, у которых $\gamma_i = \gamma$

Схема мотора дана на фиг. 230. Число цилиндров  $i$  в современных звездообразных моторах типа, показанного на фиг. 230, бывает, обычно, равным 3, 5, 7 или 9.



Фиг. 230. К уравновешиванию сил инерции звездообразных моторов, у которых  $\gamma_i = \gamma$ .

Занумеруем цилиндры мотора, в порядке их расположения по направлению вращения коленчатого вала последовательно цифрами 1, 2, ...,  $n, \dots, i$ ; цифрой 1 обозначим первый от главного (центрального боковой цилиндр). При этих обозначениях угол между осью  $n$ -го цилиндра и осью главного будет равен

$$\gamma_n = \frac{360^\circ}{i} n. \quad (124)$$

В дальнейшем индекс  $n$  будет обозначать принадлежность кинематического параметра  $n$ -му цилиндру.

Согласно равенству (5) главы II, сила инерции поступательно двигающейся массы  $\mathcal{M}_{n1}$  в  $n$ -м боковом цилиндре равна

$$\begin{aligned} P_{j1}^{(n)} = & -\mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \left\{ \cos \alpha_{1n} + \frac{r_n}{L} [4\rho_2 \cos 2(\alpha_{1n} + \gamma_n) - 16\rho_4 \cos 4(\alpha_{1n} + \gamma_n) + \right. \\ & + 36\rho_6 \cos 6(\alpha_{1n} + \gamma_n) - + \dots] + \\ & + \frac{H_n}{L} [4\rho_2^{(n)} \cos 2(\alpha_{1n} - \gamma_n) - 16\rho_4^{(n)} \cos 4(\alpha_{1n} - \gamma_n) + \\ & + 36\rho_6^{(n)} \cos 6(\alpha_{1n} - \gamma_n) - + \dots] \left. \right\} = \\ = & -\mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos \alpha_{1n} + \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \left\{ \frac{r_n}{L} \sum_{k=2, 4, 6, \dots} [(-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \rho_k \cos k(\alpha_{1n} + \gamma_n)] + \right. \\ & + \frac{H_n}{L} \sum_{k=2, 4, 6, \dots} [(-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \rho_k^{(n)} \cos k(\alpha_{1n} - \gamma_n)] \left. \right\}. \quad (125) \end{aligned}$$

Согласно равенству (1) главы II сила инерции поступательно двигающейся массы  $\mathcal{M}_n$  в главном цилиндре равна

$$\begin{aligned} P_{jL} = & -\mathcal{M}_n R \omega^2 (\cos \alpha + 4\rho_2 \cos 2\alpha - 16\rho_4 \cos 4\alpha + 36\rho_6 \cos 6\alpha - + \dots) = \\ = & -\mathcal{M}_n R \omega^2 \cos \alpha + \mathcal{M}_n R \omega^2 \sum_{k=2, 4, 6, \dots} [(-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \rho_k \cos k\alpha]. \quad (126) \end{aligned}$$

Найдем эллипсы равнодействующих сил инерции 1-го и  $k$ -го порядков. Так как при  $\alpha = 0^\circ$  кривошипно-шатунный механизм двигателя полностью симметричен относительно оси  $yy$ , то оси эллипса равнодействующей сил инерции любого порядка будут совпадать с осями  $yy$  и  $xx$ .

Силы инерции 1-го порядка. Имея в виду, что

$$\alpha_{1n} = \alpha - \gamma_n, \quad (127)$$

согласно равенствам (125) и (126), находим

$$\begin{aligned} P_{j1}^{(n)} = & -\mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \cos(\alpha - \gamma_n) \\ \text{и} \quad P_{j1}^{(i)} = & -\mathcal{M}_n R \omega^2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (128)$$

Полуось эллипса, совпадающая с осью  $yy$ , будет равна скалярной величине равнодействующей  $\bar{R}_{11}$  сил инерции 1-го порядка при  $\alpha = 0^\circ$ ; равнодействующая  $\bar{R}_{11}$  в силу указанной симметричности относительно оси  $yy$  кривошипно-шатунного механизма при  $\alpha = 0$  равна сумме проекций на ось  $yy$  сил инерции 1-го порядка всех поступательно двигающихся в цилиндрах мотора масс. Поэтому согласно равенствам (128) имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11} = & -\mathcal{M}_n R \omega^2 - \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \sum_{i=1}^{i-1} \cos(-\gamma_n) \cos \gamma_n = \\ = & -R \omega^2 \left[ \mathcal{M}_n + \mathcal{M}_{n1} \sum_{i=1}^{i-1} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\gamma_n \right) \right] = \\ = & -R \omega^2 \left[ \mathcal{M}_n + \frac{1}{2} (i-1) \mathcal{M}_{n1} + \frac{1}{2} \mathcal{M}_{n1} \sum_{i=1}^{i-1} \cos \left( 2 \frac{360^\circ}{i} n \right) \right] = \\ = & -R \omega^2 \left\{ \left( \mathcal{M}_n - \frac{1}{2} \mathcal{M}_{n1} \right) + \frac{1}{2} (i-1) \mathcal{M}_{n1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \mathcal{M}_{n1} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{i-1} \cos \left( 2 \frac{360^\circ}{i} n \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

или

$$\bar{R}_{11} = - \left[ \left( \mathcal{M}_n - \frac{1}{2} \mathcal{M}_{n1} \right) + \frac{1}{2} (i-1) \mathcal{M}_{n1} \right] R \omega^2. \quad (129)$$

Полуось эллипса, совпадающая с осью  $xx$ , будет равна скалярной величине равнодействующей  $\bar{R}_{12}$  сил инерции 1-го порядка при  $\alpha = 0^\circ + \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ . Согласно свойствам эллипса равнодействующей сил инерции равнодействующая  $\bar{R}_{12}$  должна при этом угле  $\alpha$  совпадать с осью  $xx$ ; поэтому  $\bar{R}_{12}$  найдется как сумма проекций на ось  $xx$  сил инерции 1-го порядка всех поступательно двигающихся в цилиндрах мотора масс. Согласно равенств (128) при  $\alpha = 90^\circ$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{12} = & -\mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \sum_{i=1}^{i-1} \sin \gamma_n \sin \gamma_n = -\mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \sum_{i=1}^{i-1} \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\gamma_n \right) = \\ = & -\frac{1}{2} (i-1) \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \sum_{i=1}^{i-1} \cos \left( 2 \frac{360^\circ}{i} n \right) = \\ = & -\frac{1}{2} \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 + \frac{1}{2} \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \sum_{i=1}^i \cos \left( 2 \frac{360^\circ}{i} n \right) \end{aligned}$$

или

$$\bar{R}_{12} = -\frac{1}{2} i \mathcal{M}_{n1} R \omega^2. \quad (130)$$

Пренебрегая разницей между  $\mathcal{M}_n$  и  $\mathcal{M}_{n1}$ , т. е. принимая  $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n1}$ , получим

$$\bar{R}_{11} = \bar{R}_{12} = -\frac{1}{2} i \mathcal{M}_n R \omega^2. \quad (131)$$

Это равенство показывает, что для сил инерции 1-го порядка эллипс равнодействующей превращается в окружность, а сама равнодействующая представляет постоянный по величине вектор, равномерно вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  в направлении вращения коленчатого вала; так как при угле  $\alpha = 0$  этот вектор совпадает с радиусом кривошипа ( $R_{11}$  — отрицательна), то он всегда будет направлен по радиусу кривошипа и равнодействующая сил инерции 1-го порядка эквивалентна центробежной силе инерции половины всех поступательно двигающихся масс двигателя  $\frac{1}{2} i \mathcal{M}_{n1}$ , сосредоточенных на оси цапфы кривошипа. Силы инерции 1-го порядка уравниваются путем соответствующего увеличения масс противовесов, уравнивающих вращающиеся массы двигателя.

Силы инерции  $k$ -го порядка. В рассматриваемом типе двигателя, когда  $\gamma_i = \gamma$ , помимо сил инерции 1-го порядка, имеются силы инерции только четных порядков [см. равенства (125) и (126)]. Определим эллипс равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка. Согласно равенствам (125) и (126) имеем

$$\left. \begin{aligned} P_{jk}^{(n)} &= (-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \mathcal{M}_n R \omega^2 \left[ \frac{r_n}{L} \rho_k \cos k\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{J_n}{L} \rho_{ik} \cos k(\alpha - \gamma_n - \delta_n) \right] \\ P_{jk}^{(i)} &= (-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \mathcal{M}_n R \omega^2 \rho_k \cos k\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Так как при угле  $\alpha = 0^\circ$  кривошипно-шатунный механизм двигателя симметричен относительно оси  $yy$ , то оси эллипса равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка будут совпадать с осями  $yy$  и  $xx$ . Полуось этого эллипса, совпадающая с осью  $yy$ , будет равна скалярной величине равнодействующей  $\bar{R}_{k1}$  сил инерции  $k$ -го порядка при  $\alpha = 0^\circ$ . Равнодействующая  $\bar{R}_{k1}$  определяется аналогично равнодействующей  $\bar{R}_{11}$ . Согласно равенствам (132), при  $\alpha = 0$  имеем

$$\bar{R}_{k1} = (-1)^{\frac{k}{2}} k^2 R \omega^2 \left\{ \rho_k \mathcal{M}_n + \rho_k \mathcal{M}_{n1} \sum_{i=1}^{i-1} \left[ \frac{r_n}{L} \cos \gamma_n \right] + \right. \\ \left. + \mathcal{M}_{n1} \sum_{i=1}^{i-1} \left[ \frac{J_n}{L} \rho_{ik}^{(n)} \cos k(\gamma_n + \delta_n) \cos \gamma_n \right] \right\}. \quad (133)$$

Полуось эллипса, совпадающая с осью  $xx$ , будет равна скалярной величине равнодействующей  $\bar{R}_{k2}$  сил инерции  $k$ -го порядка при угле  $\alpha = 0 + \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2k}$ .

Равнодействующая  $\bar{R}_{k2}$  определяется аналогично равнодействующей  $\bar{R}_{12}$ . Согласно равенствам (132) при  $\alpha = \frac{\pi}{2k}$  имеем

$$\bar{R}_{k2} = (-1)^{\frac{k}{2}} k^2 \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \sum_{i=1}^{i-1} \left[ \frac{J_n}{L} \rho_{ik}^{(n)} \sin k(\gamma_n + \delta_n) \sin \gamma_n \right]. \quad (134)$$

Так как для любых двух боковых цилиндров, расположенных симметрично относительно главного, величины выражений

$$\frac{r_n}{L}, \frac{J_n}{L} \rho_{ik}^{(n)} \cos k(\gamma_n + \delta_n) \cos \gamma_n \quad \text{и} \quad \frac{J_n}{L} \rho_{ik}^{(n)} \sin k(\gamma_n + \delta_n) \sin \gamma_n$$

попарно одинаковы, то равенства (133) и (134) могут быть представлены в следующем виде:

$$\bar{R}_{k1} = (-1)^{\frac{k}{2}} k^2 R \omega^2 \left\{ \rho_k \mathcal{M}_n + 2 \rho_k \mathcal{M}_{n1} \sum_{i=1}^{i-1} \left[ \frac{r_n}{L} \cos \gamma_n \right] + \right. \\ \left. + 2 \mathcal{M}_{n1} \sum_{i=1}^{i-1} \left[ \frac{J_n}{L} \rho_{ik}^{(n)} \cos k(\gamma_n + \delta_n) \cos \gamma_n \right] \right\} \quad (133')$$

и

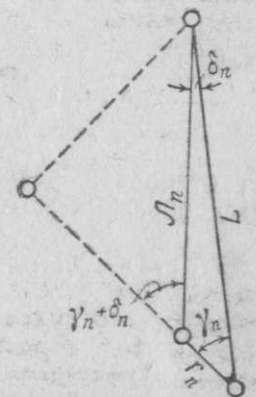
$$\bar{R}_{k2} = (-1)^{\frac{k}{2}} 2 k^2 \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \sum_{i=1}^{i-1} \left[ \frac{J_n}{L} \rho_{ik}^{(n)} \sin k(\gamma_n + \delta_n) \sin \gamma_n \right]. \quad (134')$$

В последних двух равенствах суммирование распространяется на половину  $\left(\frac{i-1}{2}\right)$  боковых цилиндров мотора, расположенных от главного в направлении вращения коленчатого вала.

Образующие эллипс равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка векторы  $\bar{C}_k$  и  $\bar{D}_k$  определяются аналогично векторам  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  (см. § 8) для случая  $\gamma_i \neq \gamma$ .

Найдем приближенные выражения для полуосей эллипса равнодействующей сил инерции 2-го порядка и определим образующие его векторы  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$ . При выводах примем

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \mathcal{M}_{n1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{4} \lambda, \quad \rho_{i2}^{(n)} = \frac{1}{4} \lambda_i^{(n)} = \frac{1}{4} \lambda \frac{J_n}{L}, \\ r_i &= L - l, \quad r = \frac{1}{i} \left( r_i + \sum_{i=1}^{i-1} r_n \right), \quad r_n = r_i = r. \end{aligned} \right\} \quad (135)$$



Фиг. 231. К выводу приближенных выражений для  $R_{21}$  и  $R_{22}$  звездобразных моторов.

Докажем предварительно два соотношения. Из фиг. 231 следует, что

$$\begin{aligned} J_n^2 \cos 2(\gamma_n + \delta_n) \cos \gamma_n &= [J_n^2 \cos^2(\gamma_n + \delta_n) - J_n^2 \sin^2(\gamma_n + \delta_n)] \cos \gamma_n = \\ &= [(L \cos \gamma_n - r)^2 - L^2 \sin^2 \gamma_n] \cos \gamma_n = (L^2 \cos 2\gamma_n + r^2 - 2rL \cos \gamma_n) \cos \gamma_n = \\ &= -rL + \left( r^2 + \frac{1}{2} L^2 \right) \cos \gamma_n - rL \cos 2\gamma_n + \frac{1}{2} L^2 \cos 3\gamma_n \end{aligned} \quad (136)$$

и

$$\begin{aligned} J_n^2 \sin 2(\gamma_n + \delta_n) \sin \gamma_n &= 2J_n \sin(\gamma_n + \delta_n) J_n \cos(\gamma_n + \delta_n) \sin \gamma_n = \\ &= 2L \sin \gamma_n (L \cos \gamma_n - r) \sin \gamma_n = L^2 \sin 2\gamma_n \sin \gamma_n - 2rL \sin^2 \gamma_n = \\ &= -rL + \frac{1}{2} L^2 \cos \gamma_n + rL \cos 2\gamma_n - \frac{1}{2} L^2 \cos 3\gamma_n. \end{aligned} \quad (137)$$

Принимая для главного,  $i$ -го цилиндра

$$L = l, \quad \delta_i = 0, \quad \gamma_i = 0$$

и имея в виду равенства (136) и (137) согласно равенствам (133) и (134) получим

$$\bar{R}_{21} = -4 \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 \left\{ \frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{4} \lambda \frac{r}{L} \sum_{i=1}^{i-1} \cos \gamma_n + \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{i-1} \left[ \frac{J_n}{L} \frac{1}{4} - \frac{J_n}{L} \cos 2(\gamma_n + \delta_n) \cos \gamma_n \right] = \\
& = -\lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \left[ 1 - \frac{r}{L} + \frac{r}{L} \sum_{i=1}^i \cos \gamma_n - \frac{l}{L} + \right. \\
& + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^i J_n^2 \cos 2(\gamma_n + \delta_n) \cos \gamma_n \left. \right] = -\lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \frac{1}{L} \sum_{i=1}^i \left[ -rL + \right. \\
& + \left( r^2 + \frac{1}{2} L^2 \right) \cos \gamma_n - rL \cos 2\gamma_n + \frac{1}{2} L^2 \cos 3\gamma_n \left. \right] \quad (138)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{22} &= -4\lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \sum_{i=1}^{i-1} \left[ \frac{J_n}{L} \frac{1}{4} - \frac{J_n}{L} \sin 2(\gamma_n + \delta_n) \sin \gamma_n \right] = \\
&= -\lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{i-1} \left[ J_n^2 \sin 2(\gamma_n + \delta_n) \sin \gamma_n \right] = \\
&= -\lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \frac{1}{L} \sum_{i=1}^i \left( -rL + \frac{1}{2} L^2 \cos \gamma_n + rL \cos 2\gamma_n - \frac{1}{2} L^2 \cos 3\gamma_n \right). \quad (139)
\end{aligned}$$

На основании равенств (138), (139) и (124) получим для 3-цилиндровых звездообразных моторов

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{21} &= -\lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \frac{1}{L} \left( -3rL + \frac{3}{2} L^2 \right) = -\frac{3}{2} \lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \left( \frac{l+r}{l} - 2 \frac{r}{l} \right) = \\
&= -\frac{3}{2} \lambda \left( 1 - \frac{r}{l} \right) \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \quad (140)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{22} &= -\lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \frac{1}{L} \left( -3rL - \frac{3}{2} L^2 \right) = \frac{3}{2} \lambda \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \left( 2 \frac{r}{l} + \frac{r+l}{l} \right) = \\
&= \frac{3}{2} \lambda \left( 1 + 3 \frac{r}{l} \right) \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2. \quad (141)
\end{aligned}$$

Скалярные величины  $C_2$  и  $D_2$  векторов сил  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$ , образующих эллипс равнодействующей сил инерции 2-го порядка, определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
C_2 + D_2 &= \frac{3}{2} \lambda \left( 1 + 3 \frac{r}{l} \right) \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \\
C_2 - D_2 &= \frac{3}{2} \lambda \left( 1 - \frac{r}{l} \right) \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2.
\end{aligned} \quad (142)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{3}{2} \lambda \left( 1 + \frac{r}{l} \right) \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{l} \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \\
D_2 &= 3 \lambda \frac{r}{l} \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2.
\end{aligned} \quad (143)$$

Так как при угле  $\alpha = 0$  равнодействующая сил инерции 2-го порядка  $\bar{R}_{21}$  направлена по оси  $yy$  и согласно равенству (140) в отрицательном направлении этой оси, а при угле  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  эта равнодействующая  $\bar{R}_{22}$  направлена по оси  $xx$  и согласно равенству (141) в положительном направлении этой

оси, то, имея в виду, что  $\bar{R}_{22} > \bar{R}_{21}$ ,  $C_2 > D_2$  и

$$\begin{aligned}
& \text{при } \alpha = 0 \quad \bar{R}_{21} = \bar{C}_2 + \bar{D}_2, \\
& \text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \bar{R}_{22} = \bar{C}_2 + \bar{D}_2,
\end{aligned} \quad (144)$$

найдем (фиг. 232), что при  $\alpha = 0^\circ$  вектор  $\bar{C}_2$  направлен по оси  $yy$  в ее отрицательном направлении, а вектор  $\bar{D}_2$  направлен по оси  $yy$  в ее положительном направлении. Оба вектора вращаются в противоположные стороны с угловыми скоростями  $2\omega$ , причем вектор  $\bar{D}_2$  вращается в направлении вращения коленчатого вала, а вектор  $\bar{C}_2$  в противоположном.

Из сказанного вытекает, что по оси  $yy$  располагается малая ось эллипса равнодействующей сил инерции 2-го порядка, а по оси  $xx$  его большая ось.

Для 5-, 7- и 9-цилиндровых звездообразных моторов аналогично имеем

$$\bar{R}_{21} = i\lambda \frac{r}{l} \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2 \quad (145)$$

и

$$\bar{R}_{22} = i\lambda \frac{r}{l} \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2. \quad (146)$$

Эти равенства показывают, что в случае 5-, 7- и 9-цилиндровых звездообразных моторов эллипс равнодействующей сил инерции 2-го порядка превращается в окружность. Сама равнодействующая представляет постоянный по величине вектор, равный

$$P_{j2} = i\lambda \frac{r}{l} \mathfrak{M}_{nI} R \omega^2. \quad (147)$$

Вектор  $\bar{P}_{j2}$  вращается с угловой скоростью  $2\omega$  в направлении вращения коленчатого вала; при угле  $\alpha = 0^\circ$  он составляет с радиусом кривошипа угол  $180^\circ$ .

В моторах рассматриваемого типа силы инерции 2-го и высших порядков остаются неуравновешенными.

Частный пример. Рассмотрим уравнивание 9-цилиндрового звездообразного мотора Curtiss-Wright „Cyclone“ при  $n = 1950$  об/мин. Основные кинематические параметры этого мотора даны в примере § 6 главы III, части I; помимо приведенных там данных имеют место следующие значения величин:

$$\mathfrak{M}_n = 0,353 \text{ кг м}^{-1} \text{ сек}^2; \quad \mathfrak{M}_{nI} = 0,333 \text{ кг м}^{-1} \text{ сек}^2;$$

$$R \omega^2 = 3643 \text{ м сек}^{-2}; \quad r = r_{cp} = 70,11 \text{ мм};$$

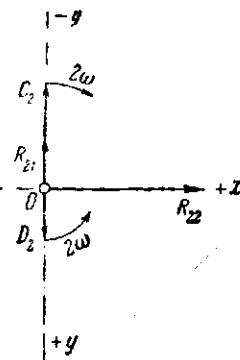
$$\rho_2 = \frac{1}{4} \lambda = 6,25 \cdot 10^{-2}; \quad \rho_4 = \frac{1}{64} \lambda^3 = 2,441 \cdot 10^{-4}; \quad \rho_6 = \frac{1}{512} \lambda^5 = 1,907 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho_{12}^{(1)} = \frac{1}{4} \lambda_{11} = 6,66 \cdot 10^{-2}; \quad \rho_{14}^{(1)} = \frac{1}{64} \lambda_{11}^3 = 2,954 \cdot 10^{-4}; \quad \rho_{16}^{(1)} = \frac{1}{512} \lambda_{11}^5 = 2,620 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho_{12}^{(2)} = \frac{1}{4} \lambda_{12} = 7,665 \cdot 10^{-2}; \quad \rho_{14}^{(2)} = \frac{1}{64} \lambda_{12}^3 = 4,500 \cdot 10^{-4}; \quad \rho_{16}^{(2)} = \frac{1}{512} \lambda_{12}^5 = 5,285 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho_{12}^{(3)} = \frac{1}{4} \lambda_{13} = 8,68 \cdot 10^{-2}; \quad \rho_{14}^{(3)} = \frac{1}{64} \lambda_{13}^3 = 6,540 \cdot 10^{-4}; \quad \rho_{16}^{(3)} = \frac{1}{512} \lambda_{13}^5 = 9,860 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho_{12}^{(4)} = \frac{1}{4} \lambda_{14} = 9,24 \cdot 10^{-2}; \quad \rho_{14}^{(4)} = \frac{1}{64} \lambda_{14}^3 = 7,890 \cdot 10^{-4}; \quad \rho_{16}^{(4)} = \frac{1}{512} \lambda_{14}^5 = 13,48 \cdot 10^{-6}.$$



Фиг. 232. К определению векторов  $\bar{C}_2$  и  $\bar{D}_2$  3-цилиндрового звездообразного мотора.

Для сил инерции 1-го порядка согласно формулам (129) и (130) имеем

$$\bar{R}_{11} = -5530 \text{ кг} \quad \text{и} \quad \bar{R}_{12} = -5460 \text{ кг},$$

Для сил инерции 2, 4 и 6-го порядков согласно формулам (133') и (134') имеем

$$\bar{R}_{21} = 656 \text{ кг} \quad \text{и} \quad \bar{R}_{22} = 691 \text{ кг},$$

$$\bar{R}_{41} = -0,71 \text{ кг} \quad \text{и} \quad \bar{R}_{42} = -1,03 \text{ кг},$$

$$\bar{R}_{61} = -0,0088 \text{ кг} \quad \text{и} \quad \bar{R}_{62} = -0,0053 \text{ кг}.$$

Согласно приближенным формулам (145) и (146) имеем

$$\bar{R}_{21} = \bar{R}_{22} = 687 \text{ кг}.$$

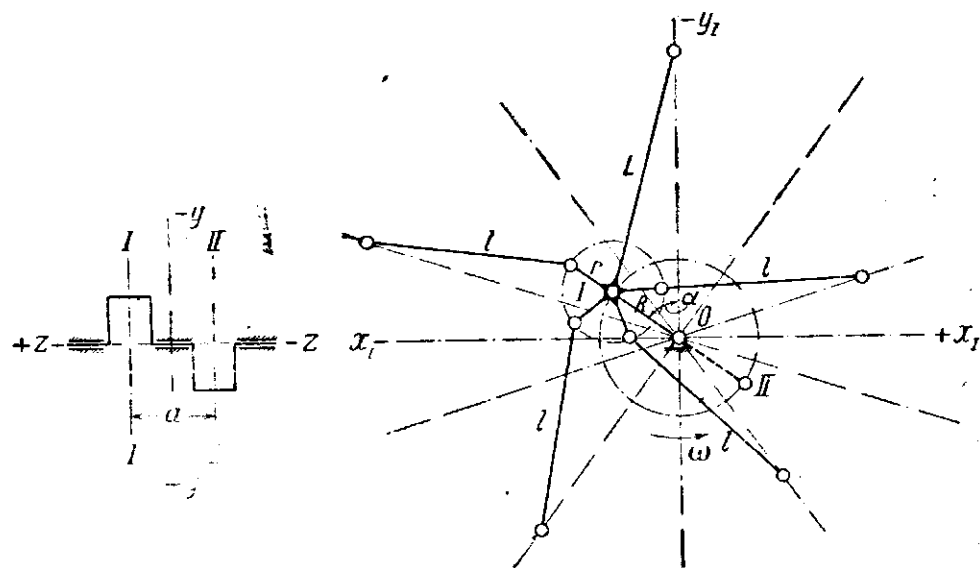
Мы видим, что в моторах рассматриваемого типа остающиеся неуравновешенными силы инерции 2-го порядка достигают значительной величины. Силы инерции 4-го, 6-го и высших порядков являются по величине ничтожными и не оказывают влияния на уравновешенность моторной установки.

Величина результирующей сил инерции 2-го порядка, подсчитанная по приближенной формуле, достаточно хорошо совпадает с ее величиной, подсчитанной по точным формулам (133') и (134').

### § 11. Уравновешивание сил инерции двоянного звездообразного мотора с кривошипами, расположенными под углом $180^\circ$ , и с $\gamma_l = \gamma$

Схема мотора дана на фиг. 233.

В двоянном звездообразном моторе цилиндры одной звезды сдвинуты, относительно цилиндров другой звезды на половину угла между осями двух соседних цилиндров звезды, т. е. на угол  $\frac{180^\circ}{i}$ , где  $i$  — число



Фиг. 233. К уравновешиванию сил инерции двоянного звездообразного мотора с кривошипами, расположенными под углом  $180^\circ$  и с  $\gamma_l = \gamma$ .

цилиндров каждой звезды. Число цилиндров  $i$  в моторах этого типа всегда больше трех. Главные цилиндры обеих звезд, также как и кривошипы коленчатого вала мотора, располагаются один относительно другого под углом  $180^\circ$ . В отношении моторов этого типа мы ограничимся рассмотрением сил инерции только 1-го и 2-го порядков, так как согласно

выводам предыдущего параграфа силы инерции высших порядков в каждой из звезд ничтожны по величине.

Силы инерции 1-го порядка. Согласно сказанному в предыдущем параграфе силы инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс, складываясь, дают для каждой звезды равнодействующую, направленную по радиусу соответствующего кривошипа и равную

$$P_{j1} = \frac{1}{2} i \mathcal{M}_{n1} R \omega^2.$$

Эта сила, слагаясь с силой инерции отнесенных к оси цапфы соответствующего кривошипа вращающихся масс шатунов и приведенной к этой оси массы самого кривошипа, равной

$$\{ P_{jk} = \mathcal{M}_k R \omega^2$$

и направленной по радиусу соответствующего кривошипа, дает для каждой звезды суммарную силу инерции, направленную по радиусу кривошипа этой звезды и равную

$$P_j = \left( \mathcal{M}_k + \frac{1}{2} i \mathcal{M}_{n1} \right) R \omega^2. \quad (148)$$

Таким образом силы инерции 1-го порядка поступательно двигающихся масс и силы инерции вращающихся масс рассматриваемого мотора приводятся к паре сил инерции с моментом

$$M_{j1} = \left( \mathcal{M}_k + \frac{1}{2} i \mathcal{M}_{n1} \right) R \omega^2 a, \quad (149)$$

где  $a$  — расстояние между плоскостями осей цилиндров звезд. Пара  $M_{j1}$  действует в плоскости кривошипов коленчатого вала и уравновешивается парой сил инерции вращающихся масс противовесов, подобранных соответствующим образом.

Силы инерции 2-го порядка. Силы инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс в цилиндрах каждой звезды, складываясь, дают равнодействующую, равную

$$P_{j2} = i \lambda \frac{r}{l} \mathcal{M}_{n1} R \omega^2.$$

Эти силы (направление их пересекается с осью коленчатого вала мотора) вращаются каждая в плоскости осей цилиндров своей звезды с двойной угловой скоростью коленчатого вала в направлении вращения последнего. Каждая из этих сил составляет с радиусом кривошипа соответствующей звезды угол в  $180^\circ$  в тот момент, когда положение этого кривошипа соответствует верхней мертвой точке поршня в главном цилиндре звезды. Таким образом силы инерции 2-го порядка приводятся в рассматриваемом моторе к паре сил инерции с моментом

$$M_{j2} = i \lambda \frac{r}{l} \mathcal{M}_{n1} R \omega^2 a. \quad (150)$$

Плоскость действия этой пары проходит через ось коленчатого вала и вращается с угловой скоростью  $2\omega$  в направлении вращения последнего. Пара  $M_{j2}$  остается неуравновешенной.

### 12. Уравновешивание сил инерции звездообразных моторов типа Румплера

Схема мотора дана на фиг. 234.

Моторы этого типа представляют собой четыре  $i$ -цилиндровых звезды, работающие на общий коленчатый вал, кривошипы которого расположены, как у коленчатого вала однорядного, 4-цилиндрового мотора. Число цилиндров  $i$  каждой звезды бывает обычно больше 3.

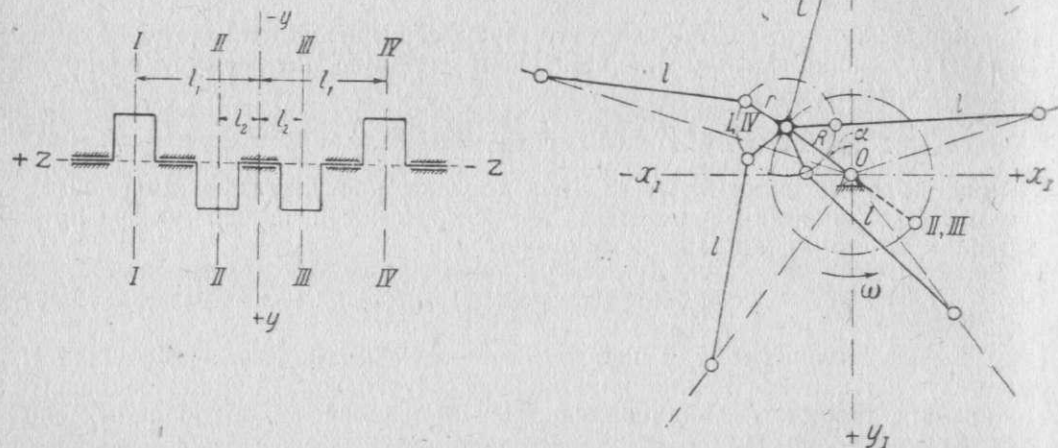
Силы инерции 1-го порядка. В каждом из четырех цилиндров мотора, расположенных вдоль оси его коленчатого вала, силы инерции 1-го по-



рядка поступательно двигающихся масс являются уравновешенными, так как эти четыре цилиндра можно рассматривать как обычный 4-цилиндровый мотор, в котором согласно изложенному в § 4 силы инерции 1-го порядка являются уравновешенными; поэтому в моторах рассматриваемого типа силы инерции 1-го порядка являются уравновешенными.

Силы инерции 2-го порядка. При числе цилиндров в каждой звезде больше трех, т. е. при  $i > 3$ , результирующая сил инерции 2-го порядка поступательно двигающихся масс в цилиндрах каждой звезды равна (см. § 10) по величине

$$P_{j2}^{(I)} = P_{j2}^{(II)} = P_{j2}^{(III)} = P_{j2}^{(IV)} = i\lambda \frac{r}{l} M_{n1} R \omega^2. \quad (151)$$



Фиг. 234. К уравновешиванию сил инерции в звездообразных моторах типа Румплера.

Вектор каждой из этих сил вращается в направлении вращения коленчатого вала с двойной угловой скоростью последнего  $2\omega$  и составляет с радиусом кривошипа соответствующей звезды угол в  $180^\circ$  в момент, когда положение этого кривошипа соответствует верхней мертвой точке поршня в главном цилиндре звезды; поэтому при расположении главных цилиндров звезд мотора в одном ряду результирующая сил инерции 2-го порядка всех поступательно двигающихся масс мотора будет равна

$$P_{j2} = 4i\lambda \frac{r}{l} M_{n1} R \omega^2. \quad (152)$$

Вектор силы  $P_{j2}$  (направление его пересекается с осью коленчатого вала) вращается в плоскости  $xu$  с угловой скоростью  $2\omega$  в направлении вращения коленчатого вала; при угле  $\alpha = 0^\circ$  этот вектор составляет угол  $180^\circ$  с кривошипом 1-й звезды.

В моторах рассматриваемого типа силы инерции 2-го порядка остаются неуравновешенными.

Силы инерции вращающихся масс рассматриваемого мотора являются уравновешенными подобно силам инерции вращающихся масс в однорядном 4-цилиндровом моторе.

На этом мы закончим рассмотрение уравновешивания сил инерции в моторах различного типа. Примененный нами метод позволяет легко решить задачу для мотора любого типа.

В табл. 36 даны величины сил инерции вращающихся и поступательно двигающихся масс в авиационных моторах разного типа. Часть данных этой таблицы взята из книги Н. Г. Бруевича и В. Н. Ширяева „Уравновешивание авиационных двигателей“.

При исследовании уравновешенности сил инерции двигающихся масс кривошипно-шатунных механизмов моторов разного типа мы принимали



Силы инерции различных порядков от поступательно движущихся масс в цилиндрах мотора

Силы инерции различных порядков от поступательно движущихся масс в цилиндрах мотора																						Моменты		
Тип мотора	Название двигателя и марка	Мощность л. с.	Число оборотов в минуту	Угловая скорость коленчатого вала 1/сек.	Суммарный вес всех приведенных к кривошипу вращающихся масс, кг	Вес суммарной поступательно движущейся массы		Центробежная сила инерции суммарной вращающейся массы кривошипа, кг	Резльтирующие сил инерции различных порядков поступательно движущихся масс в цилиндрах мотора кг														$(M_{j1})_{max}$ $(M_{j1})_{min}$	$(M_{j1})_{max}$ $(M_{j1})_{min}$
						В главном цилиндре кг	В боковом цилиндре кг		$(P_{j1})_{max}$	$(P_{j1})_{min}$	$(P_{j2})_{max}$	$(P_{j2})_{min}$	$(P_{j3})_{max}$	$(P_{j3})_{min}$	$(P_{j4})_{max}$	$(P_{j4})_{min}$	$(P_{j5})_{max}$	$(P_{j5})_{min}$	$(P_{j6})_{max}$	$(P_{j6})_{min}$				
8 V 90°	Испано-Суиза 8Fb . . . . .	300	1800	188,5	не вычисл.	2,91 *	2,91 *	не вычисл.	0	0	1 272	0	0	0	25,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12 V 60°	BMW-VI 7,3Z . . . . .	680 **	1 550 **	162,3	3,48	4,22 *	4,22 *	1 140	0	0	0	0	68	0	0	0	0	0	4,93	0,53	0	0	0	0
12 V 60°	Паккард 3A-2500 . . . . .	835 **	2 100 **	219,9	3,30	3,60 *	3,60 *	1 850	0	0	0	0	48,1	0	0	0	0	0	не вычисл.	не вычисл.	0	0	0	0
12 V 60°	Ролльс-Ройс «Кестрель» HIS . . . . .	586	2 700	282,7	3,72	1,77	1,71	2 120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,74	0	0	0	0	0
12 V 60°	Испано-Суиза Ybrs . . . . .	860	2 400	251,3	5,75	3,07	2,77	3 150	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,76	0,4	0	0	0	0
12 V 60°	Кертисс-1800 . . . . .	750	2 400	251,3	5,42	2,38 *	2,38 *	2 660	0	0	0	0	21,1	0	0	0	0	0	2,01	0,7	0	0	0	0
12 V 60°	Кертисс «Супер-Конкверор» . . . . .	730	2 400	251,3	5,23	1,94	1,79	2 680	0	0	0	0	25,1	0	0	0	0	0	1,7	0,6	0	0	0	0
12 V 60°	Лоррен «Петрель» . . . . .	600	2 600	272,1	4,70	2,39	2,16	2 570	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,69	0,03	0	0	0	0
12 W 60°	Лоррен-Дитрих 12E . . . . .	470 **	1 880 **	196	не вычисл.	1,75 *	1,75 *	не вычисл.	0	0	960	503	0	0	40,16	25,8	0	0	1,19	1,19	0	0	0	0
18 W 40°	Фарман 18WD . . . . .	820 **	1 920 **	201	не вычисл.	2,48 *	2,48 *	не вычисл.	0	0	0	0	не вычисл.	не вычисл.	0	0	0	0	1,0	0,59	0	0	0	0
3-цил. звезда	Бристоль «Люцифер» . . . . .	112	1 600	167,5	не вычисл.	1,96 *	1,96 *	не вычисл.	674	674	320	148	0	0	не вычисл.	не вычисл.	0	0	не вычисл.	не вычисл.	0	0	0	0
3-цил. »	НАМИ 65 . . . . .	70	1 630	170	не вычисл.	1,98 *	1,98 *	не вычисл.	594	594	286	118	0	0	8,95	5,2	0	0	0,552	0,176	0	0	0	0
9-цил. »	«Хорнет» А . . . . .	525	1 900	199	11	3,92	3,68	3 900	5 530	5 440	635	602	0	0	2,38	0,174	0	0	0,0112	0,00334	0	0	0	0
9-цил. »	Бристоль «Меркур» IVS2 . . . . .	490	2 250	205,5	17	2,42	2,36	8 300	5 020	4 970	754	721	0	0	1,26	1,13	0	0	0,0505	0,0205	0	0	0	0
9-цил. »	Райт «Циклон» SgR-1820 . . . . .	600	1 950	204,1	20	3,46	3,27	7 730	5 530	5 460	691	656	0	0	1,03	0,71	0	0	0,0088	0,0053	0	0	0	0
14-цил. двойная звезда	Ягуар IVS . . . . .	365	1 700	178	не вычисл.	1,96 *	1,96 *	не вычисл.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	180	180	не вычисл.	не вычисл.
14-цил. двойная звезда	Гном и Рон «Мистраль» К-14 . . . . .	800	2 400	251,3	14,8	2,62	2,37	7 730	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 040	1 000	1	1

\* Средний вес поступательно движущихся масс одного цилиндра.

\*\* Мощность и число оборотов при работе на максимальном режиме.



но двигающихся масс в цилиндрах мотора

ков поступательно двигающихся масс в цилиндрах мотора кг							Момент от сил инерции поступа- тельно двигающихся масс кгм				Уравновешенность мотора		Примечания
$(P_{i4})_{\min}$	$(P_{i4})_{\max}$	$(P_{j4})_{\min}$	$(P_{j5})_{\max}$	$(P_{j5})_{\min}$	$(P_{j6})_{\max}$	$(P_{j6})_{\min}$	$\frac{(M_{j1})_{\max}}{(M_{j1})_{\min}}$	$\frac{(M_{j2})_{\max}}{(M_{j2})_{\min}}$	$\frac{(M_{j3})_{\max}}{(M_{j3})_{\min}}$	$\frac{(M_{j4})_{\max}}{(M_{j4})_{\min}}$	Уравнове- шиваются противове- сами	Остаются неуравнове- шенными из первых шести порядков	
0	25,9	0	0	0	0	0	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	2-й, 4-й и 6-й порядки	Шатуны центральные
0	0	0	0	0	4,93	0,53	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	3-й и 6-й порядки	$\gamma_l \neq \gamma$
0	0	0	0	0	не вычисл.	не вычисл.	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	3-й и 6-й »	$\gamma_l \neq \gamma$
0	0	0	0	0	1,74	0	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	6-й порядок	Шатуны центральные
0	0	0	0	0	3,76	0,4	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	6-й »	$\gamma_l = \gamma$
0	0	0	0	0	2,01	0,7	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	3-й и 6-й порядки	$\gamma_l \neq \gamma$
0	0	0	0	0	1,7	0,6	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	3-й и 6-й »	$\gamma_l \neq \gamma$
0	0	0	0	0	1,69	0,03	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	6-й порядок	$\gamma_l = \gamma$
0	40,16	25,8	0	0	1,19	1,19	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	2-й, 4-й и 6-й порядки	$\gamma_l = \gamma$
0	0	0	0	0	1,0	0,59	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	—	3-й и 6-й порядки	$\gamma_l \neq \gamma$
0	не вычисл.	не вычисл.	0	0	не вычисл.	не вычисл.	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	1-й порядок	2-й, 4-й и 6-й порядки	—
0	8,95	5,2	0	0	0,552	0,176	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	1-й »	2-й, 4-й и 6-й »	—
0	2,38	0,174	0	0	0,0112	0,00334	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	1-й »	2-й, 4-й и 6-й »	—
0	1,26	1,13	0	0	0,0505	0,0205	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	1-й »	2-й, 4-й и 6-й »	—
0	1,03	0,71	0	0	0,0088	0,0053	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	1-й »	2-й, 4-й и 6-й »	—
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{180}{180}$	не вычл.	$\frac{0}{0}$	не вычисл.	1-й »	2-й, 4-й и 6-й »	—
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1040}{1000}$	$\frac{18}{17}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0,49}{0,34}$	1-й »	2-й, 4-й и 6-й »	—

угловую скорость  $\omega$  вращения коленчатого вала постоянной за цикл исходя из этого положения, мы брали для сил инерции выражения, соответствующие ускорениям при  $\omega = \text{const}$ . В главе V части I нами было показано, что при наличии крутильных колебаний системы коленчатого вала угловая скорость  $\omega$  является переменной за цикл и изменяется для каждого кривошипа коленчатого вала по своему закону. В этом случае угол поворота  $\alpha$  кривошипа от начального положения достаточно точно может быть выражен во всех случаях уравнением (20) главы V части I

$$\alpha = \omega_c t + \sum_{k=1}^{k=15} \Phi_k \sin \left( \frac{k}{2} \omega_c t + \gamma_k \right). \quad (153)$$

Амплитуды  $\Phi_k$  и начальные фазовые углы  $\gamma_k$ , имеющие для каждого кривошипа вала свое значение, определяются из расчета системы коленчатого вала мотора на принужденные крутильные колебания.

На основании уравнения (153) имеем для угловой скорости вращения рассматриваемого кривошипа следующее выражение:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_c + \sum_{k=1}^{k=15} \left[ \left( \frac{k}{2} \omega_c \right) \Phi_k \cos \left( \frac{k}{2} \omega_c t + \gamma_k \right) \right]. \quad (154)$$

Угловое ускорение кривошипа будет равно

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \sum_{k=1}^{k=15} \left[ - \left( \frac{k}{2} \omega_c \right)^2 \Phi_k \sin \left( \frac{k}{2} \omega_c t + \gamma_k \right) \right]. \quad (155)$$

Согласно равенствам (78), (79) и (80), приведенным в § 7 главы I части II, имеем, что силы инерции кривошипа и отнесенных к нему масс приводятся:

1. К силе инерции суммарной вращающейся массы  $M$  кривошипа, сосредоточенной в центре тяжести  $S$  и двигающейся по закону движения этого центра тяжести; эта сила инерции складывается из двух сил инерции, а именно

а) из центробежной силы инерции  $Z$ , равной

$$Z = -MR_S \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \quad (156)$$

и б) из тангенциальной силы  $T$ , равной

$$T = -MR_S \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (157)$$

где  $R_S$  есть расстояние центра тяжести  $S$  суммарной вращающейся массы  $M$  от оси вращения.

2. К паре сил инерции  $\Pi$ , равной

$$\Pi = -I_S \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (158)$$

где  $I_S$  есть момент инерции вращающейся массы  $M$  относительно оси, проходящей через ее центр тяжести  $S$  и нормальной к плоскости ее движения.

Согласно равенству (13), приведенному в главе V части I, ускорение поршня при переменной угловой скорости вращения соответствующего кривошипа будет

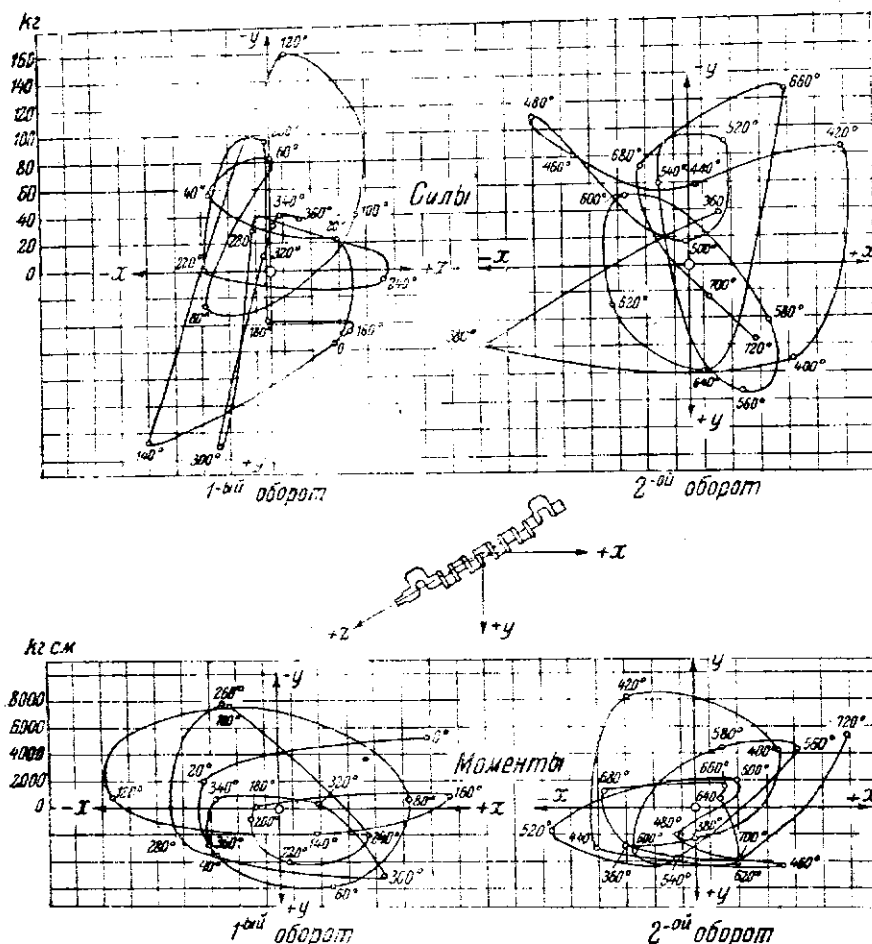
$$j_p = \frac{j_{p1}}{\omega_c^2} \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{v_{p1}}{\omega_c} \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (159)$$

Сила инерции суммарной поступательно двигающейся в цилиндре массы  $\mathcal{M}_n$  будет равна

$$P_j = -\mathcal{M}_n j_p. \quad (160)$$



При наличии крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора силы инерции вращающихся и поступательнодвигающихся масс кривошипно-шатунного механизма могут значительно отличаться по величине от сил инерции, подсчитанных без учета крутильных колебаний, принимая  $\omega = \omega_c = \text{const}$ . Особенно сильно могут различаться некоторые порядки сил инерции. Не имея возможности в настоящей работе провести анализ влияния крутильных колебаний на уравновешенность сил инерции двигающихся масс кривошипно-шатунного механизма для моторов разного типа,



Фиг. 235. К уравновешиванию сил инерции 12-цилиндрового, V-образного мотора при наличии крутильных колебаний системы коленчатого вала.

мы приведем результаты исследования в этом отношении одного 12-цилиндрового V-образного мотора. Для этого мотора при его резонансном числе оборотов  $n = 1585$  в мин. были подсчитаны, пользуясь формулами (153) — (160), силы инерции вращательно и поступательнодвигающихся масс кривошипно-шатунного механизма в зависимости от угла поворота коленчатого вала; затем были определены результирующие силы инерции и результирующие пары сил инерции этих масс. Результаты подсчетов даны в виде векторных диаграмм на фиг. 235. Две верхние диаграммы фиг. 235 представляют векторные диаграммы (за первый и второй обороты коленчатого вала 4-тактного мотора) результирующей неуравновешенных сил инерции всех порядков для всех масс кривошипно-шатунного механизма двигателя как вращающихся, так и поступательнодвигающихся. Эта результирующая, имея начало в начале координат, вращается в пло-

скости, перпендикулярной оси коленчатого вала. Максимальное значение неуравновешенной силы равно  $165 \text{ кг}$ . Эту силу надо признать незначительной, так как, например, в авиационных звездообразных моторах неуравновешенные силы инерции 2-го порядка имеют значения порядка  $700 \text{ кг}$ .

Две нижние диаграммы фиг. 235 представляют векторные диаграммы (за первый и второй обороты коленчатого вала) результирующей пары неуравновешенных сил инерции всех порядков для всех масс кривошипно-шатунного механизма. Плоскость действия этой результирующей пары проходит через ось коленчатого вала и вращается вокруг этой оси. Максимальное значение момента этой пары равно в данном случае  $12500 \text{ кг см}$ , что составляет около 50% среднего крутящего момента мотора при рассматриваемом числе оборотов его вала; этот момент создается исключительно вследствие наличия крутильных колебаний системы коленчатого вала мотора и достигает, как мы видим, значительной величины. Наличие момента такой величины может создать при соответствующих условиях нежелательную раскачку моторной установки.

## Глава IV

### ВИБРАЦИЯ МОТОРНОЙ УСТАНОВКИ

В подавляющем большинстве разобранных нами выше случаев результирующая неуравновешенных сил инерции  $k$ -го порядка поступательнодвигающихся в цилиндрах мотора масс представляла собой вектор, который, имея начало на оси коленчатого вала, вращался в плоскости, перпендикулярной этой оси, описывая своим концом эллипс. Если эту результирующую разложить на две силы — силу  $P_{jk}^{(x)}$ , направленную по оси  $xx$ , и силу  $P_{jk}^{(y)}$ , направленную по оси  $yy$ , то в самом общем случае для этих сил получим следующие выражения:

$$P_{jk}^{(x)} = A_{kx} \cos kx + B_{kx} \sin kx = A_{kx} \cos(k\theta t) + B_{kx} \sin(k\theta t) = C_{kx} \sin(k\theta t + \beta_{kx}), \quad (161)$$

где

$$C_{kx} = \sqrt{A_{kx}^2 + B_{kx}^2}; \quad \text{tg } \beta_{kx} = \frac{A_{kx}}{B_{kx}}, \quad (162)$$

и

$$P_{jk}^{(y)} = A_{ky} \cos ky + B_{ky} \sin ky = A_{ky} \cos(k\theta t) + B_{ky} \sin(k\theta t) = C_{ky} \sin(k\theta t + \beta_{ky}), \quad (163)$$

где

$$C_{ky} = \sqrt{A_{ky}^2 + B_{ky}^2}; \quad \text{tg } \beta_{ky} = \frac{A_{ky}}{B_{ky}}. \quad (164)$$

Величины  $A_{kx}$ ,  $B_{kx}$ ,  $A_{ky}$  и  $B_{ky}$  легко определяются по известным векторам  $\vec{C}_k$  и  $\vec{D}_k$ , образующим эллипс равнодействующей сил инерции  $k$ -го порядка.

Для выявления сущности процесса вибрации моторной установки, мы упростим задачу, полагая, что на нашу установку действуют только две, возбуждающие вибрацию этой установки, силы  $P_{jk}^{(x)}$  и  $P_{jk}^{(y)}$  (фиг. 236). Сама установка подвешена на упругостях таким образом, что имеет только три степени свободы, именно: она может передвигаться в направлении оси  $xx$  и в направлении оси  $yy$ , а также вращаться около оси, перпендикулярной плоскости  $xy$ . В соответствии с этими тремя видами возможных перемещений установки мы принимаем за обобщенные координаты системы: координаты  $x$  и  $y$  центра тяжести  $S$  системы и угол  $\varphi$  поворота системы около оси, проходящей через центр тяжести системы и перпендикулярной плоскости  $xy$ .

Обозначим через:

$M$  — общую подвешенную массу системы;

$J_S$  — массовый момент инерции подвешенной массы относительно оси, проходящей через центр тяжести  $S$  и перпендикулярной плоскости  $xy$ ;

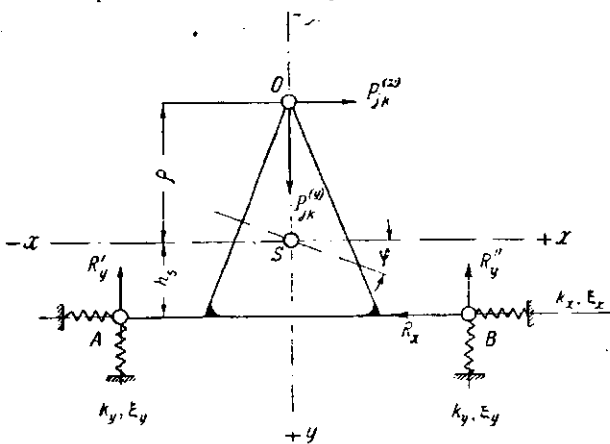
$k_x$  — жесткость системы в направлении оси  $xx$ , т. е. силу в кг, которую надо приложить к подвешенной массе в направлении оси  $xx$ , чтобы вызвать перемещение системы в этом направлении на 1 см;

$2k_y$  — жесткость системы в направлении оси  $yy$ ;

$\xi_x$  — коэффициент заглушения колебаний системы в направлении оси  $xx$ ;

$2\xi_y$  — коэффициент заглушения колебаний системы в направлении оси  $yy$ ;

$l$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$  в их среднем положении.



Фиг. 236. Схема моторной установки.

Заглушение колебаний системы создается в точках  $A$  и  $B$  силами заглушающих сопротивлений, действующих в этих точках на систему в направлениях  $xx$  и  $yy$  и пропорциональных слагающим скоростей точек  $A$  и  $B$  в этих направлениях.

Для получения дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы, воспользуемся дифференциальными уравнениями движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (165)$$

При принятых обобщенных координатах системы кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_S \dot{\varphi}^2 \quad (166)$$

Потенциальная энергия системы равна

$$V = \frac{1}{2} k_x (x - h_S \varphi)^2 + \frac{1}{2} k_y \left( y - \frac{l}{2} \varphi \right)^2 + \frac{1}{2} k_y \left( y + \frac{l}{2} \varphi \right)^2 \quad (167)$$

Для обобщенной координаты  $x$  будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M \dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = k_x (x - h_S \varphi),$$

$$Q_x = A_{kx} \cos(k\theta t) + B_{kx} \sin(k\theta t) - \xi_x (\dot{x} - h_S \dot{\varphi}).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (165), получим

$$M \ddot{x} + \xi_x (\dot{x} - h_S \dot{\varphi}) + k_x (x - h_S \varphi) = A_{kx} \cos(k\theta t) + B_{kx} \sin(k\theta t). \quad (168)$$

Для обобщенной координаты  $y$  будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = M \dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = k_y \left( y - \frac{l}{2} \varphi \right) + k_y \left( y + \frac{l}{2} \varphi \right) = 2k_y y,$$

$$Q_y = A_{ky} \cos(k\theta t) + B_{ky} \sin(k\theta t) - \xi_y \left( \dot{y} - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \right) - \xi_y \left( \dot{y} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \right) = A_{ky} \cos(k\theta t) + B_{ky} \sin(k\theta t) - 2\xi_y \dot{y}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (165), получим:

$$M \ddot{y} + 2\xi_y \dot{y} + 2k_y y = A_{ky} \cos(k\theta t) + B_{ky} \sin(k\theta t). \quad (169)$$

Для обобщенной координаты  $\varphi$  аналогично найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= J_S \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -h_S k_x (x - h_S \varphi) - \frac{l}{2} k_y \left( y - \frac{l}{2} \varphi \right) + \\ &+ \frac{l}{2} k_y \left( y + \frac{l}{2} \varphi \right) = -h_S k_x (x - h_S \varphi) + \frac{l^2}{2} k_y \varphi, \\ Q_\varphi &= \rho [A_{kx} \cos(k\theta t) + B_{kx} \sin(k\theta t)] + \xi_x h_S (\dot{x} - h_S \dot{\varphi}) - \\ &- \xi_y \frac{l}{2} \left( \dot{y} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} - \dot{y} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \right) = \rho [A_{kx} \cos(k\theta t) + B_{kx} \sin(k\theta t)] + \\ &+ \xi_x h_S (\dot{x} - h_S \dot{\varphi}) - \xi_y \frac{l^2}{2} \dot{\varphi} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J_S \ddot{\varphi} + \xi_y \frac{l^2}{2} \dot{\varphi} + k_y \frac{l^2}{2} \varphi - k_x h_S (x - h_S \varphi) - \xi_x h_S (\dot{x} - h_S \dot{\varphi}) = \\ = \rho [A_{kx} \cos(k\theta t) + B_{kx} \sin(k\theta t)]. \end{aligned} \quad (170)$$

Уравнения (168), (169) и (170) представляют собой систему уравнений, определяющую движение рассматриваемой моторной установки. Движение установки, соответствующее обобщенной координате  $y$ , найдется непосредственным решением уравнения (169)

$$M \ddot{y} + 2\xi_y \dot{y} + 2k_y y = A_{ky} \cos(k\theta t) + B_{ky} \sin(k\theta t).$$

Обозначая

$$p_y^2 = \frac{2k_y}{M}, \quad n_y = \frac{\xi_y}{M}, \quad a_{ky} = \frac{A_{ky}}{M}, \quad \text{и} \quad b_{ky} = \frac{B_{ky}}{M}, \quad (171)$$

будем иметь

$$\ddot{y} + 2n_y \dot{y} + p_y^2 y = a_{ky} \cos(k\theta t) + b_{ky} \sin(k\theta t). \quad (172)$$

Общее решение этого уравнения получим, если к решению, соответствующему однородному уравнению, добавим частное решение полного уравнения. Общее решение однородного уравнения

$$\ddot{y} + 2n_y \dot{y} + p_y^2 y = 0$$

будет

$$y = e^{-n_y t} [A \sin(p_{1y} t) + B \cos(p_{1y} t)], \quad (173)$$

где

$$p_{1y}^2 = p_y^2 - n_y^2.$$

При достаточно большом промежутке времени  $t$  от начала движения системы правая часть уравнения (173) делается очень малой по величине вследствие наличия в системе заглушающих ее колебания сопротивлений; движение системы, соответствующее обобщенной координате  $y$ , становится установившимся и определяется частным решением полного уравнения (172). Частное решение этого уравнения будет иметь вид

$$y = M_{ky} \cos(k\theta t) + N_{ky} \sin(k\theta t) = a_{ky} \sin(k\theta t + \gamma_{ky}), \quad (174)$$

где

$$a_{ky} = \sqrt{M_{ky}^2 + N_{ky}^2}; \quad \text{tg } \gamma_{ky} = \frac{M_{ky}}{N_{ky}}. \quad (175)$$

Величины  $M_{ky}$  и  $N_{ky}$  находятся обычным путем, т. е. подстановкой решения (174) в уравнение (172). Имеем

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -(k\theta) M_{ky} \sin(k\theta t) + (k\theta) N_{ky} \cos(k\theta t), \\ \ddot{y} &= -(k\theta)^2 M_{ky} \cos(k\theta t) - (k\theta)^2 N_{ky} \sin(k\theta t), \\ &- (k\theta)^2 M_{ky} \cos(k\theta t) - (k\theta)^2 N_{ky} \sin(k\theta t) - 2n_y (k\theta) M_{ky} \sin(k\theta t) + \\ &+ 2n_y (k\theta) N_{ky} \cos(k\theta t) + p_y^2 M_{ky} \cos(k\theta t) + p_y^2 N_{ky} \sin(k\theta t) = \\ &= a_{ky} \cos(k\theta t) + b_{ky} \sin(k\theta t). \end{aligned}$$



Отсюда для определения величин  $M_{ky}$  и  $N_{ky}$  получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [p_y^2 - (k\theta)^2] M_{ky} + 2n_y(k\theta) N_{ky} &= a_{ky} \\ -2n_y(k\theta) M_{ky} + [p_y^2 - (k\theta)^2] N_{ky} &= b_{ky} \end{aligned} \right\} \quad (176)$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$\left. \begin{aligned} M_{ky} &= \frac{[p_y^2 - (k\theta)^2] a_{ky} - 2n_y(k\theta) b_{ky}}{4n_y^2(k\theta)^2 + [p_y^2 - (k\theta)^2]^2} \\ N_{ky} &= \frac{2n_y(k\theta) a_{ky} + [p_y^2 - (k\theta)^2] b_{ky}}{4n_y^2(k\theta)^2 + [p_y^2 - (k\theta)^2]^2} \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Принимая во внимание равенства (175), (171) и (164), получим

$$a_{ky} = \frac{\sqrt{a_{ky}^2 + b_{ky}^2}}{\sqrt{4n_y^2(k\theta)^2 + [p_y^2 - (k\theta)^2]^2}} = \frac{C_{ky}}{\sqrt{4\xi_y^2(k\theta)^2 + [2k_y - \mathfrak{M}(k\theta)^2]^2}} \quad (178)$$

Начальный фазовый угол  $\gamma_{ky}$  колебания системы, соответствующего обобщенной координате  $y$ , определится из уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma_{ky} = \frac{M_{ky}}{N_{ky}} = \frac{[p_y^2 - (k\theta)^2] a_{ky} - 2n_y(k\theta) b_{ky}}{2n_y(k\theta) a_{ky} + [p_y^2 - (k\theta)^2] b_{ky}} \quad (179)$$

Сдвиг фаз между силой  $P_{jk}^{(y)}$ , возбуждающей колебания системы, соответствующие обобщенной координате  $y$ , и этими колебаниями определится из уравнения

$$\operatorname{tg} \psi_{ky} = \operatorname{tg} (\beta_{ky} - \gamma_{ky}) = \frac{\operatorname{tg} \beta_{ky} - \operatorname{tg} \gamma_{ky}}{1 + \operatorname{tg} \beta_{ky} \operatorname{tg} \gamma_{ky}}$$

Подставляя в это уравнение  $\operatorname{tg} \gamma_{ky}$  из равенства (179) и  $\operatorname{tg} \beta_{ky}$  из равенства

$$\operatorname{tg} \beta_{ky} = \frac{A_{ky}}{B_{ky}} = \frac{a_{ky}}{b_{ky}},$$

получим

$$\operatorname{tg} \psi_{ky} = \frac{2n_y(k\theta)}{p_y^2 - (k\theta)^2} = \frac{2\xi_y(k\theta)}{2k_y - \mathfrak{M}(k\theta)^2} \quad (180)$$

В целях дальнейшего исследования колебаний рассматриваемой системы уточним понятие о „резонансных колебаниях“ системы при наличии в последней заглушающих колебания сопротивлений. В системе без заглушающих колебания сопротивлений резонансные колебания вызывают бесконечное увеличение амплитуды колебаний системы; это явление происходит при некоторой определенной зависимости между частотой возбуждающей колебания системы силы и величинами упругостей и масс системы; назовем эту зависимость „условием резонанса“. Под резонансными колебаниями системы при наличии в последней заглушающих колебания сопротивлений мы будем понимать ее колебания при наличии условия резонанса системы без заглушающих сопротивлений.

Согласно равенству (178) резонансные колебания рассматриваемой системы, соответствующие обобщенной координате  $y$ , будут иметь место при следующем условии резонанса:

$$2k_y - \mathfrak{M}(k\theta)^2 = 0, \quad (181)$$

т. е. когда частота  $(k\theta)$  силы  $P_{jk}^{(y)}$  будет равна

$$k\theta = \sqrt{\frac{2k_y}{\mathfrak{M}}} = \theta_{cy}, \quad (182)$$

где  $\theta_{cy}$  представляет частоту собственных колебаний системы, соответствующих обобщенной координате  $y$ .

При резонансных колебаниях системы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a_{ky} &= \frac{C_{ky}}{2\xi_y(k\theta)} \\ \psi_{ky} &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

При колебаниях системы вдали от резонанса и при сравнительно малой величине коэффициента  $\xi_y$ , величины  $a_{ky}$  и  $\psi_{ky}$  найдутся практически достаточно точно, принимая  $\xi_y = 0$ . В этом случае будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a_{ky} &= \frac{C_{ky}}{2k_y - \mathfrak{M}(k\theta)^2} \\ \psi_{ky} &= 0^\circ \text{ или } \psi_{ky} = 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

Принимая во внимание равенства (180) и (182), будем иметь

$$\operatorname{tg} \psi_{ky} = \frac{2\xi_y(k\theta)}{2k_y - \mathfrak{M}(k\theta)^2} = \frac{2\xi_y(k\theta)}{\mathfrak{M}^2(k\theta)^2 - (k\theta)^2}$$

Из этого уравнения следует, что

$$\text{при } (k\theta) < \theta_{cy} : \operatorname{tg} \psi_{ky} > 0; \quad 90^\circ > \psi_{ky} > 0^\circ$$

$$\text{при } (k\theta) = \theta_{cy} : \operatorname{tg} \psi_{ky} = \infty; \quad \psi_{ky} = 90^\circ,$$

$$\text{при } (k\theta) > \theta_{cy} : \operatorname{tg} \psi_{ky} < 0; \quad 180^\circ > \psi_{ky} > 90^\circ.$$

Поэтому при  $\xi = 0$  равенство  $\psi_{ky} = 0^\circ$  будет иметь место в случае, когда  $(k\theta) < \theta_{cy}$ , т. е. когда частота возбуждающей колебания силы будет меньше частоты соответствующих собственных колебаний системы; равенство  $\psi_{ky} = 180^\circ$  будет иметь место в случае, когда  $(k\theta) > \theta_{cy}$ .

Заметим, что при наличии в системе заглушающих колебания сопротивлений резонансные колебания системы не будут теми колебаниями, при которых амплитуда колебания системы максимальна. Из равенства (178), например, следует, что условием, при котором амплитуда  $a_{ky}$  становится максимальной по величине, будет такое значение частоты  $(k\theta)$  силы  $P_{jk}^{(y)}$ , при котором имеет место минимум функции

$$z = 4\xi_y^2(k\theta)^2 + [2k_y - \mathfrak{M}(k\theta)^2]^2,$$

т. е. когда

$$8\xi_y^2(k\theta) - 2[2k_y - \mathfrak{M}(k\theta)^2]2\mathfrak{M}(k\theta) = 0$$

или когда

$$k\theta = \sqrt{\frac{2k_y}{\mathfrak{M}} - 2\left(\frac{\xi_y}{\mathfrak{M}}\right)^2} \quad (185)$$

Это значение частоты  $(k\theta)$  не равно значению, определяемому равенством (182); однако при малом  $\xi_y$  оба значения весьма близки друг к другу.

Движения моторной установки, соответствующие обобщенным координатам  $x$  и  $\varphi$ , найдутся решением системы уравнений, состоящей из уравнений (168) и (170)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}\ddot{x} + \xi_x(\dot{x} - h_s\dot{\varphi}) + k_x(x - h_s\varphi) &= A_{kx} \cos(k\theta t) + B_{kx} \sin(k\theta t) \\ J_s\ddot{\varphi} + \xi_y\frac{I^2}{2}\dot{\varphi} + k_y\frac{I^2}{2}\varphi - k_x h_s(x - h_s\varphi) - \xi_x h_s(\dot{x} - h_s\dot{\varphi}) &= \\ &= \rho [A_{kx} \cos(k\theta t) + B_{kx} \sin(k\theta t)] \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Рассматривая опять установившееся движение системы, мы получим решение системы уравнений (186) в виде

$$\begin{aligned} x &= M_{kx} \cos(k\theta t) + N_{kx} \sin(k\theta t) \\ \varphi &= M_{k\varphi} \cos(k\theta t) + N_{k\varphi} \sin(k\theta t). \end{aligned} \quad (187)$$

Величины  $M_{kx}$ ,  $N_{kx}$ ,  $M_{k\varphi}$  и  $N_{k\varphi}$  найдутся подстановкой решений (187) в систему уравнений (186). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(k\theta) M_{kx} \sin(k\theta t) + (k\theta) N_{kx} \cos(k\theta t) \\ \dot{\varphi} &= -(k\theta) M_{k\varphi} \sin(k\theta t) + (k\theta) N_{k\varphi} \cos(k\theta t) \end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -(k\theta)^2 M_{kx} \cos(k\theta t) - (k\theta)^2 N_{kx} \sin(k\theta t) \\ \ddot{\varphi} &= -(k\theta)^2 M_{k\varphi} \cos(k\theta t) - (k\theta)^2 N_{k\varphi} \sin(k\theta t). \end{aligned} \quad (189)$$

Подставляя выражения (187), (188) и (189) в систему уравнений (186), группируя в каждом уравнении члены, содержащие  $\cos(k\theta t)$ , и члены, содержащие  $\sin(k\theta t)$ , и приравнявая нулю коэффициенты при этих тригонометрических выражениях, получим следующую систему из 4 уравнений:

$$\begin{aligned} [k_x - (k\theta)^2 \mathfrak{M}] M_{kx} + (k\theta) \xi_x N_{kx} - k_x h_S M_{k\varphi} - (k\theta) h_S \xi_x N_{k\varphi} &= A_{kx}, \\ [k_x - (k\theta)^2 \mathfrak{M}] N_{kx} - (k\theta) \xi_x M_{kx} - k_x h_S N_{k\varphi} + (k\theta) h_S \xi_x M_{k\varphi} &= B_{kx}, \\ \left[ \frac{l^2}{2} k_y + k_x h_S^2 - (k\theta)^2 J_S \right] M_{k\varphi} + (k\theta) \left( \frac{l^2}{2} \xi_y + \xi_x h_S^2 \right) N_{k\varphi} - k_x h_S M_{kx} - & \\ - (k\theta) \xi_x h_S N_{kx} &= \rho A_{kx}, \\ \left[ \frac{l^2}{2} k_y + k_x h_S^2 - (k\theta)^2 J_S \right] N_{k\varphi} - (k\theta) \left( \frac{l^2}{2} \xi_y + \xi_x h_S^2 \right) M_{k\varphi} - k_x h_S N_{kx} + & \\ + (k\theta) \xi_x h_S M_{kx} &= \rho B_{kx}. \end{aligned} \quad (190)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} k_x - (k\theta)^2 \mathfrak{M} &= a, \\ k_x h_S &= b, \\ \frac{1}{2} l^2 k_y + k_x h_S^2 - (k\theta)^2 J_S &= c, \\ (k\theta) \xi_x &= d, \\ (k\theta) h_S \xi_x &= e, \\ (k\theta) \left( \frac{1}{2} l^2 \xi_y + \xi_x h_S^2 \right) &= f, \end{aligned} \quad (191)$$

приведем систему уравнений (190) к виду

$$\begin{aligned} aM_{kx} + dN_{kx} - bM_{k\varphi} - eN_{k\varphi} &= A_{kx}, \\ -dM_{kx} + aN_{kx} + eM_{k\varphi} - bN_{k\varphi} &= B_{kx}, \\ -bM_{kx} - eN_{kx} + cM_{k\varphi} + fN_{k\varphi} &= \rho A_{kx}, \\ eM_{kx} - bN_{kx} - fM_{k\varphi} + cN_{k\varphi} &= \rho B_{kx}. \end{aligned} \quad (192)$$

Решая эту систему уравнений, мы определим величины  $M_{kx}$ ,  $N_{kx}$ ,  $M_{k\varphi}$  и  $N_{k\varphi}$ , а следовательно, вынужденные колебания исследуемой моторной установки при действии на нее сил  $P_{jk}^{(x)}$  и  $P_{jk}^{(y)}$  и при наличии заглушающих колебания сопротивлений будут полностью определены.

При относительно малой величине коэффициентов заглушающих колебания сопротивления  $\xi_x$  и  $\xi_y$  колебания системы вдали от резонанса могут

быть определены достаточно точно, полагая  $\xi_x = \xi_y = 0$ ; в этом случае величины  $d$ ,  $e$  и  $f$  [см. равенства (191)] обращаются в нуль и система уравнений (192) принимает вид

$$\begin{aligned} aM_{kx} - bM_{k\varphi} &= A_{kx}, \\ aN_{kx} - bN_{k\varphi} &= B_{kx}, \\ -bM_{kx} + cM_{k\varphi} &= \rho A_{kx}, \\ -bN_{kx} + cN_{k\varphi} &= \rho B_{kx}. \end{aligned} \quad (193)$$

Решая эту систему уравнений, мы получим для  $M_{kx}$ ,  $N_{kx}$ ,  $M_{k\varphi}$  и  $N_{k\varphi}$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} M_{kx} &= \frac{c + \rho b}{ac - b^2} A_{kx}, \\ N_{kx} &= \frac{c + \rho b}{ac - b^2} B_{kx}, \\ M_{k\varphi} &= \frac{b + \rho a}{ac - b^2} A_{kx}, \\ N_{k\varphi} &= \frac{b + \rho a}{ac - b^2} B_{kx}. \end{aligned} \quad (194)$$

Амплитуды колебаний системы в этом случае, соответствующие обобщенным координатам  $x$  и  $\varphi$ , будут равны

$$\begin{aligned} a_{kx} &= \sqrt{M_{kx}^2 + N_{kx}^2} = \frac{c + \rho b}{ac - b^2} C_{kx}, \\ a_{k\varphi} &= \sqrt{M_{k\varphi}^2 + N_{k\varphi}^2} = \frac{b + \rho a}{ac - b^2} C_{kx}. \end{aligned} \quad (195)$$

Начальные фазовые углы этих колебаний определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_{kx} &= \frac{M_{kx}}{N_{kx}} = \frac{A_{kx}}{B_{kx}} \operatorname{tg} \beta_{kx}, \\ \operatorname{tg} \gamma_{k\varphi} &= \frac{M_{k\varphi}}{N_{k\varphi}} = \frac{A_{kx}}{B_{kx}} \operatorname{tg} \beta_{kx}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что колебания системы, соответствующие обобщенным координатам  $x$  и  $\varphi$ , в случае  $\xi_x = \xi_y = 0$  происходят либо в одной фазе с возбуждающей эти колебания силой  $P_{jk}^{(x)}$ , либо со сдвигом фаз на  $180^\circ$ .

Колебания в одной фазе будут иметь место в том случае, когда частота возбуждающей колебания силы будет меньше частоты соответствующих свободных колебаний системы; в противном случае колебания будут происходить со сдвигом фаз в  $180^\circ$ .

Равенства (195) показывают, что условием резонансных колебаний системы, соответствующих обобщенным координатам  $x$  и  $\varphi$ , будет

$$ac - b^2 = 0 \quad (196')$$

или, принимая во внимание обозначения (191),

$$\mathfrak{M} J_S (k\theta)^4 - \left( k_x J_S + \frac{l^2}{2} k_y \mathfrak{M} + k_x h_S^2 \mathfrak{M} \right) (k\theta)^2 + \frac{l^2}{2} k_x k_y = 0. \quad (196)$$

Из этого уравнения определяются два значения частоты  $(k\theta)$  возбуждающей колебания системы силы  $P_{jk}^{(x)}$ , при которых возникают ее резонансные колебания; эти частоты являются частотами соответствующих главных видов свободных колебаний системы.



При  $h_s = 0$  (фиг. 236) уравнение частоты (196) принимает вид

$$\mathfrak{M}J_s(k\Theta)^4 - \left(k_x J_s + \frac{l^2}{2} k_y \mathfrak{M}\right) (k\Theta)^2 + \frac{l^2}{2} k_x k_y = 0$$

$$= \left[(k\Theta)^2 - \frac{k_x}{\mathfrak{M}}\right] \left[(k\Theta)^2 - \frac{l^2}{2J_s} k_y\right] \mathfrak{M}J_s = 0. \quad (197)$$

Из этого уравнения для частоты  $(k\Theta)$  получаются следующие значения:

$$(k\Theta)_1 = \sqrt{\frac{k_x}{\mathfrak{M}}}$$

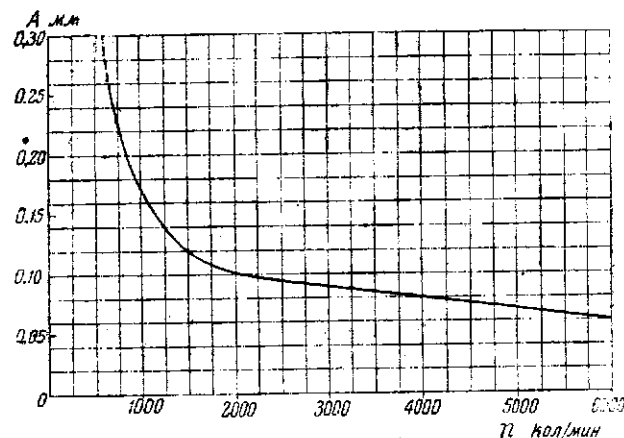
$$(k\Theta)_2 = \sqrt{\frac{l^2}{2J_s} k_y}$$
(198)

В этом случае являются возможными раздельные, независимые друг от друга колебания системы, соответствующие обобщенным координатам  $x$  и  $\varphi$ ; частота  $(k\Theta)_1$  представляет частоту свободных колебаний системы, соответствующих обобщенной координате  $x$ , а частота  $(k\Theta)_2$  — частоту свободных колебаний системы, соответствующих обобщенной координате  $\varphi$ .

Так как в уравнениях (196) и (197) коэффициенты при  $(k\Theta)^4$  и свободные члены одинаковы, то произведение частот, определяемых уравнением (196),

должно равняться произведению частот, определяемых уравнением (197), т. е. должно равняться  $(k\Theta)_1 \cdot (k\Theta)_2$ ; из этого следует, что при смещении центра тяжести системы  $S$  (фиг. 236) с оси  $AB$  одна из частот  $(k\Theta)_1$  и  $(k\Theta)_2$ , определяемых равенствами (198), увеличится во столько же раз, во сколько другая уменьшится.

Полученные нами решения легко распространить на случай, когда возбуждающие колебания системы силы  $P_j^{(y)}$  и  $P_j^{(x)}$  представляют тригонометрические полиномы и когда помимо этих сил на систему действует момент, тоже выражаемый тригонометрическим полиномом, с осевым моментом пары, перпендикулярным плоскости фиг. 236. В том случае, когда имеют место условия резонанса системы, амплитуды соответствующих обобщенных координат системы резко возрастают и последняя начинает сильно вибрировать. Резонансные колебания моторной установки самолета могут создать опасные напряжения в элементах фермы подмоторной рамы и явиться причиной вибрации самолета. Силы, передающиеся от мотора на подмоторную раму, являются одними из основных возбудителей вибраций самолета и отдельных его элементов; вибрации последних становятся особенно сильными при совпадении частот их свободных колебаний с частотами сил, вызывающих эти колебания. Сильные вибрации самолета и отдельных его элементов являются вредными для здоровья пассажиров и экипажа самолета и опасными для прочности конструкции самого самолета. Специальные экспериментальные исследования, проведенные за границей, показали, что каждой частоте колебаний соответствует определенная величина амплитуды колебаний, превышение которой вызывает у человека чрезвычайно неприятные физиологические ощущения. На фиг. 237



Фиг. 237. Зависимость амплитуд от частот, определяющая порог неприятных колебаний (по Константу).

приведена полученная экспериментальным путем зависимость амплитуд от частот, определяющая порог неприятных колебаний; кривая взята из работы Н. Constant „Aircraft vibration“, опубликованной в Reports and memoranda, № 1637.

Поломки отдельных элементов самолета от чрезмерных вибраций неоднократно имели место в практике самолетостроения. Причиной таких вибраций в основном является неудачная конструкция соответствующих элементов самолета в отношении частот их собственных колебаний. Лечение таких больных самолетов можно вести двумя путями. Во-первых, можно изменить конструкцию неудачного элемента самолета таким образом, чтобы частота его собственных колебаний не совпадала с частотой силы, возбуждающей его критические резонансные колебания; однако в большинстве случаев этот путь связан с необходимостью внесения значительных изменений в конструкцию самолета и нежелателен для производства. Другим путем является уменьшение величины силы, которая вызывает критические колебания неудачного элемента самолета. С этой целью, в том случае, когда источником возбуждающей силы является мотор, между мотором и самолетом вводят соответствующим образом подобранное упругое соединение или, другими словами, подвешивают упруго моторную установку на самолете. При такой конструкции через упругое соединение будет передаваться на самолет не вся создаваемая мотором возбуждающая сила, а только часть ее. Сущность происходящего при этом явления можно выяснить на следующем простом примере. Положим, что моторная установка самолета имеет вид, представленный на фиг. 236, и что критические резонансные колебания одного из элементов самолета возбуждаются создаваемой мотором силой  $P_{jk}^{(y)}$ . При наличии вышеуказанной упругой подвески моторной установки на самолет будет передаваться не вся сила  $P_{jk}^{(y)}$ , а только та часть ее, которая передается через вертикальные упругие подвески моторной установки при вертикальных колебаниях последней. Если [см. равенство (163)] амплитуда силы  $P_{jk}^{(y)}$  равна  $C_{ky}$ , то амплитуда силы, передаваемой через вертикальные упругие подвески моторной установки на самолет, будет  $qC_{ky}$ , причем  $q < 1$ . Величину силы  $qC_{ky}$  легко определить, зная амплитуду  $a_{ky}$  вертикальных колебаний моторной установки при действии на последнюю силы  $P_{jk}^{(y)}$ ; именно

$$qC_{ky} = 2k_y a_{ky}. \quad (199)$$

Принимая во внимание равенство (178), получим

$$qC_{ky} = \frac{2k_y C_{ky}}{\sqrt{4k_y^2 (k\Theta)^2 + [2k_y - \mathfrak{M} (k\Theta)^2]^2}}. \quad (200)$$

Если сила  $P_{jk}^{(y)}$ , возбуждая резонансные колебания вышеупомянутого элемента самолета, не вызывает резонансных колебаний самой моторной установки и частота  $(k\Theta)$  этой силы находится достаточно далеко от частоты собственных колебаний моторной установки, соответствующих обобщенной координате  $y$  [см. равенство (182)],

$$\Theta_{cy} \gg \sqrt{\frac{2k_y}{\mathfrak{M}}},$$

то в равенстве (200) можно положить  $\Xi_y = 0$ , в результате чего оно примет вид

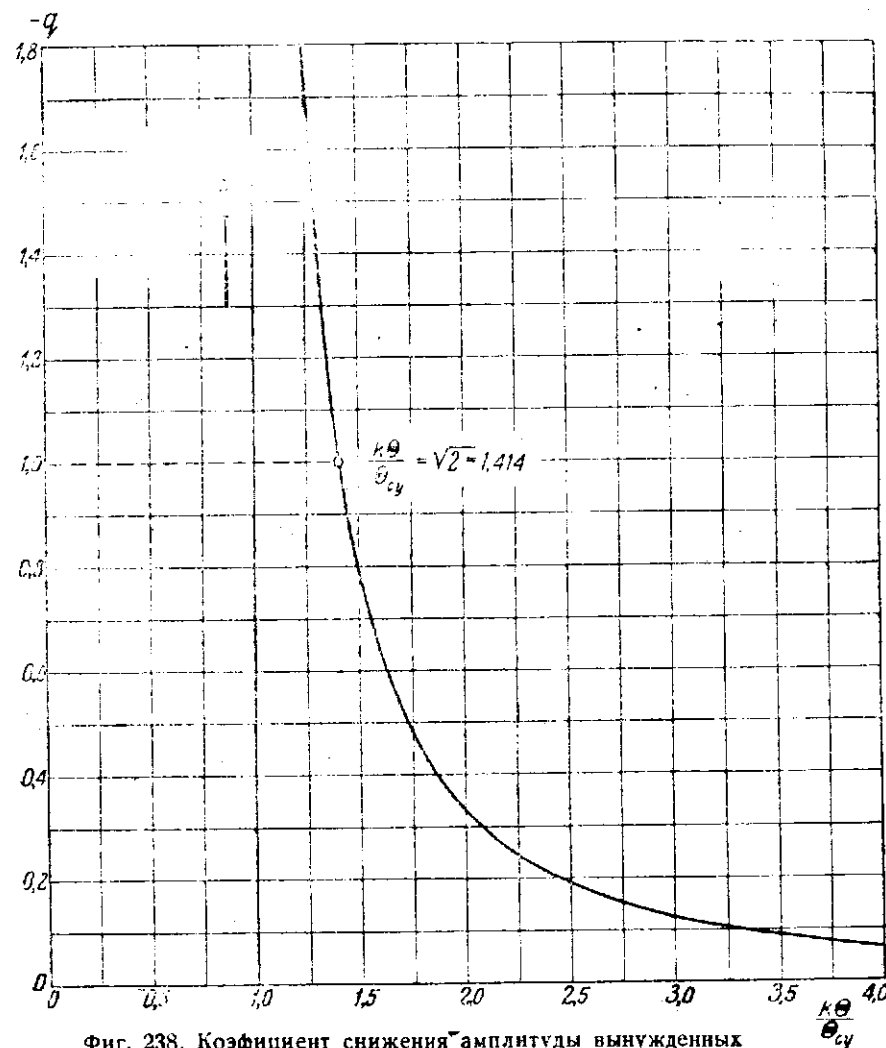
$$qC_{ky} = \frac{2k_y C_{ky}}{2k_y - \mathfrak{M} (k\Theta)^2} = \frac{C_{ky}}{1 - \left(\frac{k\Theta}{\Theta_{cy}}\right)^2}. \quad (201)$$

Отсюда для  $q$  получается следующая зависимость:

$$q = \frac{1}{1 - \left(\frac{k\Theta}{\Theta_{cy}}\right)^2}. \quad (202)$$

На фиг. 238 эта зависимость дана графически.

Соотношение (202) показывает, что чем ниже частота  $\theta_c$ , собственных колебаний моторной установки по сравнению с частотой  $(k\theta)$  силы, возбуждающей резонансные колебания элемента самолета, тем абсолютная величина  $q$  становится меньше. Достаточно упругой подвеской моторной установки можно достигнуть малых величин частоты  $\theta_c$ , и соответственно малых величин коэффициента  $q$ ; этим и достигается то снижение величины



Фиг. 238. Коэффициент снижения амплитуды вынужденных колебаний.

возбуждающей силы, передаваемой от мотора к самолету, которое необходимо для устранения опасных вибраций неблагоприятного элемента самолета. Отрицательное значение коэффициента  $q$  показывает, что колебания моторной установки отстают по фазе на  $180^\circ$  от силы, вызывающей эти колебания.

Аналогичным путем можно достигнуть и снижения действия на самолет силы  $P_{jk}^{(v)}$ .

Конструкции упругих подвесок моторных установок на самолетах получили в настоящее время широкое распространение. Одной из таких конструкций является подвеска моторной установки на резиновых упругостях. При этой конструкции удавалось снизить передаваемые от мотора к самолету силы в несколько раз и уменьшить таким образом во столько же раз амплитуды соответствующих этим силам колебаний неблагоприятного элемента самолета.

## КИНЕМАТИКА КЛАПАННЫХ МЕХАНИЗМОВ

### § 1. Выбор высоты подъема клапана и величины диаметра горловины

Распределительный механизм служит для открытия и закрытия отверстий в цилиндре, через которые происходит наполнение его свежей смесью и очистка от продуктов сгорания.

Распределительные механизмы бывают двух родов: клапанные и гильзовые. В настоящей работе мы рассмотрим только клапанные распределительные механизмы.

Проектирование распределительного механизма начинают обычно с определения площади прохода газов в клапане  $f_k$ . Величина этой площади для всасывающего клапана должна быть выбрана такой, чтобы обеспечивать получение максимального коэффициента наполнения цилиндра. Принимая во внимание, что выбор величины этой площади зависит от многих факторов, как то: от диаметра и длины трубопроводов, от геометрических размеров горловины и клапана, от числа клапанов и фаз распределения, а также, что величина этой площади ограничивается динамическими нагрузками в распределительном механизме, видна вся сложность задачи выбора проходного сечения газов в клапане.

Правда, влияние отдельных факторов на величину площади проходного сечения в клапане нам известно, но не количественно, а качественно. Так, например, при коротком трубопроводе, подводящем газы к клапану, можно тот же коэффициент наполнения двигателя получить при меньшей площади проходного сечения газов в клапане, чем при длинном трубопроводе; также известно, что при одном клапане площадь проходного сечения может быть выбрана меньшей, чем суммарная площадь проходных сечений двух клапанов.

Для упрощения задачи величину  $(f_k)_{\max}$  проходного сечения газов в клапане обычно определяют, задаваясь постоянной скоростью  $v_r$  прохода газов через клапан и допуская пропорциональность подъема клапана скорости поршня  $v_p$ . Принимая, что за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  через клапана засосется в цилиндр объем смеси, равный объему, описанному за этот промежуток времени поршнем, получим для скорости газов следующее выражение:

$$v_r = \frac{F_n v_p}{i f_k}, \quad (1)$$

где  $F_n$  — площадь поршня,

$i$  — число клапанов,

$f_k$  — площадь проходного сечения для газов в клапане, соответствующая данному моменту времени.



Авиамотора	Тип мотора	$D$	$S$	$n$
		мм	мм	об/мин.
Кертисс «Супер-Конкверор» . . . . .	V-обр., 12-цил.	130,2	158,8	2 400
Испано 12Ybrs . . . . .	V-обр., 12-цил.	150	170	2 400
Кертисс-1800 . . . . .	V-обр., 12-цил.	142,87	152,4	2 400
Лоррен «Петрель» . . . . .	V-обр., 12-цил.	145	145	2 600
Рено 12P-01 . . . . .	V-обр., 12-цил.	120	140	2 500
Изотта Фраскини «АССО»-750 . . . . .	W-обр., 18-цил.	140	170	1 700
Бристоль «Меркур» IVS2 . . . . .	Звездобр., 9-цил.	146	165	2 250
Райт «Циклон» SgR-1820 . . . . .	» 9-цил.	155,6	174,7	1 950
Армстронг «Тайгер» . . . . .	Двойная звезда, 14-цил.	139,7	152,4	2 050
Гном и Рон «Мистраль» К-14 . . . . .	Двойная звезда, 14-цил.	146	165	2 400

Полагая с достаточной для практики точностью, что максимальная скорость поршня может быть выражена следующим равенством:

$$v_{p \max} = \frac{\pi S n}{60},$$

где  $S$  ход поршня и  $n$  число оборотов коленчатого вала мотора в минуту, мы получим из равенства (1) следующее выражение для определения скорости газов:

$$v_g = \frac{F_n (v_p)_{\max}}{i (f_k)_{\max}} = \frac{F_n}{i (f_k)_{\max}} \frac{\pi S n}{60}. \quad (2)$$

В действительности подъем клапана не пропорционален скорости поршня и максимальная скорость поршня отстоит от максимального подъема клапана примерно на  $35^\circ$  по углу поворота коленчатого вала; поэтому выражение (2) для скорости  $v_g$  является в значительной степени условным.

Другой метод определения скорости газов в проходном сечении клапана основан на допущении, что скорость газов постоянна и что коэффициент наполнения равен 1. Из равенства объема воздуха, засосанного через клапан, и объема, описанного поршнем за такт всасывания, мы имеем

$$v_g \int f_k dt = v_g w = F_n S.$$

Отсюда скорость газов будет равна

$$v_g = \frac{F_n S}{w}. \quad (3)$$

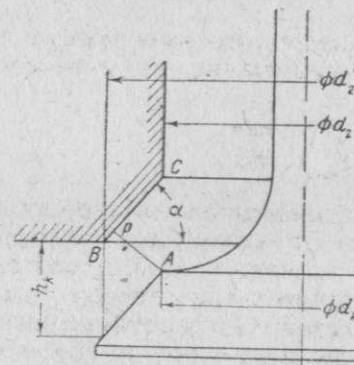
Величина  $w = \int f_k dt$  носит название время-сечения клапана.

Обе формулы (2) и (3) для определения скоростей газов являются справедливыми лишь относительно. Однако при правильно выбранной величине скорости газов они дают правильную величину площади проходного сечения газов в клапане и в этом смысле являются равноценными.

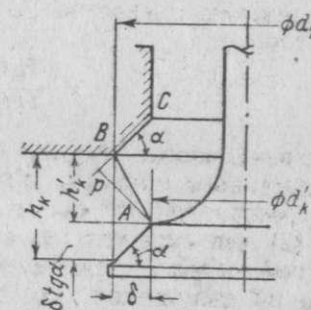
Основным преимуществом для конструктора формулы (2) по сравнению с формулой (3) является то, что по ней значительно легче определить максимальный подъем клапана и диаметр горловины. Обычно допускаемая скорость газов при пользовании этой формулой берется равной от 100 до 120 м/сек.

$\alpha$	Всасывающий клапан									Выхлопной клапан			
	$i$ —число клапанов на цилиндр	$h_k$	$\frac{d_r}{h_k}$	$(f_k)_{\max}$	Площадь горловины	$\frac{(f_k)_{\max}}{f_r}$	$w$	$v_g$	$v'_g$	$i$ —число клапанов на цилиндр	$h_k$	$\frac{d_r}{h_k}$	$v_g$
град.	—	мм	—	см <sup>2</sup>	см <sup>2</sup>	—	см <sup>2</sup> /сек	м/сек	м/сек	—	мм	—	м/сек
45	2	12,8	3,36	16,4	14,5	1,13	—	83	—	2	12,8	3,36	83
45	1	13	4,62	19,5	28,2	0,69	—	193,5	—	1	13	4,62	193,5
30	2	14,3	3,21	19,2	16,5	1,16	—	80	—	2	14,6	2,91	78
45	2	10,6	4,32	12,7	16,5	0,77	0,238	128	101	2	10,6	4,32	123
30	1	12,8	4,06	20	21,2	0,94	0,186	103	87	1	12,8	—	113
30	2	9,6	4,48	12,2	14,5	0,84	—	95	76,5	2	9,5	4,5	96
45	2	13	3,85	18,1	19,8	0,91	0,384	93	69,4	2	12,4	3,52	—
30	1	14,5	4,36	32	37,6	0,85	0,339	117	97,8	1	14,7	4,7	—
45	1	16,5	3,59	28	26,8	1,06	0,341	90	69	1	16,5	3,32	109
30	1	17,1	3,61	31,6	30,2	1,05	0,27	110	102	1	17,1	—	—

Определив согласно формуле (2) величину  $(f_k)_{\max}$ , находят максимальный подъем клапана  $h_k$  и диаметр горловины  $d_r$ . Обычно для определения зависимости между величинами подъема клапана и диаметра горловины принимают, что площадь проходного сечения клапана должна равняться



Фиг. 239. К определению проходного сечения клапана.



Фиг. 240. К определению проходного сечения клапана.

площади сечения горловины, причем диаметром штока клапана пренебрегают и полагают, что угол седла клапана равен нулю (фиг. 239). Это дает следующую зависимость:

$$h_k \pi d_r = \frac{\pi d_r^2}{4},$$

откуда имеем

$$d_r = 4h_k. \quad (4)$$

Ввиду того что написанное выше выражение справедливо лишь для момента максимального подъема клапана, а в течение всего остального времени подъема клапана площадь будет меньше, Рикардо рекомендует выбирать  $h_k > 0,25 d_r$ . Как видно из табл. 37, отношение  $\frac{d_r}{h_k}$  меняется от 3,4 до 4,5 и в среднем равно 4.



Для выхлопных клапанов величина  $h_k$  берется обычно такой же, как и для всасывающих; диаметр горловины  $d_r$  может быть выбран меньшей величины. Рикардо допускает это уменьшение на 22%, но для авиационных моторов известное нам максимальное уменьшение не превосходит примерно 10%.

При определении величины время-сечения клапана площадь  $f_{kx}$  проходного сечения газов в клапане подсчитывается как боковая поверхность усеченного конуса, образующей которого (фиг. 239) будет перпендикуляр  $Ap$ , опущенный из угла  $A$  конуса клапана на образующую  $BC$  конуса седла клапана.

Когда конец перпендикуляра (точка  $p$ ) не попадает на образующую  $BC$  (фиг. 240), образующей конуса будет прямая  $AB$ .

Предельным моментом между этими двумя случаями будет тот, когда конец  $p$  перпендикуляра  $Ap$  попадет в точку  $B$ ; это будет в том случае, когда подъем клапана достигает величины

$$h_{kx} = \frac{d'_r - d'_k}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{d'_r - d'_k}{\sin 2\alpha}.$$

Обозначая образующую усеченного конуса через  $\rho$  и средний диаметр через  $\sigma$ , будет иметь

$$f_{kx} = \pi \rho_x \sigma_x. \quad (5)$$

Индексы  $x$  у величин  $f_{kx}$ ,  $\rho_x$  и  $\sigma_x$  показывают, что эти величины текущие, соответствующие величине подъема клапана  $h_{kx}$ .

В случае, когда  $h_{kx} < \frac{d'_r - d'_k}{\sin 2\alpha}$ , величины  $\rho_x$  и  $\sigma_x$ , входящие в выражение (5), будут равны

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= h_{kx} \cos \alpha \\ \sigma_x &= d'_k + \frac{1}{2} h_{kx} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В случае, когда  $h_{kx} \geq \frac{d'_r - d'_k}{\sin 2\alpha}$ , эти величины будут равны

$$\rho_x = \sqrt{\delta^2 + h_{kx}^2} \quad \text{и} \quad \sigma_x = \frac{d'_r + d'_k}{2}, \quad (7)$$

где

$$\delta = \frac{d'_r - d'_k}{2} \quad \text{и} \quad h_{kx} = h_{kx} - \frac{d'_r - d'_k}{2} \operatorname{tg} \alpha = h_{kx} - \delta \operatorname{tg} \alpha.$$

## § 2. Фазы распределения и зазор в клапанах

Фазы распределения в двигателях внутреннего сгорания в основном должны быть подобраны таким образом, чтобы обеспечить возможно большое наполнение горючей смесью цилиндра двигателя и наиболее полное удаление из него продуктов сгорания.

Наивыгоднейшие фазы распределения могут быть определены либо опытным путем на специальной экспериментальной установке, у которой система распределения подобна системе распределения проектируемого мотора, либо на самом моторе, что значительно надежнее, хотя и сложнее.

В последнее время предложен ряд методов аналитического подбора фаз, главным образом моментов закрытия всасывающих клапанов и открытия выхлопных. Однако все эти методы недостаточно обоснованы экспериментально; поэтому предварительный выбор фаз обычно делается на основании общих соображений, базирующихся на результатах экспериментальных работ, проведенных в большинстве случаев на экспериментальных одноцилиндровых установках.

Основными факторами, влияющими на фазы распределения, являются: размеры и форма трубопроводов, число цилиндров на один карбюратор, закон подъема клапана, размеры и форма клапанов, конфигурация проходных сечений, режим мотора, высотность его, наддув, литраж, степень сжатия и т. п.

Открытие всасывающего клапана. Обычно всасывающий клапан открывается до верхней мертвой точки, когда выхлопной клапан еще открыт. Это перекрытие клапанов приобретает особо важное значение при непосредственном впрыске, так как в этом случае осуществляется частичная продувка цилиндра чистым воздухом. Перекрытие клапанов уменьшает также тепловую нагрузку выхлопного клапана.

Влияние угла опережения открытия всасывающего клапана примерно одинаково как для мотора с наддувом, так и для мотора без наддува и практически не зависит от режима мотора.

Опережение всасывания увеличивает площадь диаграммы подъема клапана и, увеличивая угол открытия клапана, позволяет работать с меньшими ускорениями клапана, что повышает надежность работы клапанного механизма.

Обычно угол опережения открытия клапана выбирается в пределах от 5 до 10° для моторов с водяным охлаждением и от 15 до 20° для моторов с воздушным охлаждением.

Закрытие всасывающего клапана. Закрывается всасывающий клапан должен тогда, когда сравниваются давления в цилиндре и всасывающем трубопроводе. Этот момент зависит от оборотов мотора, но мало зависит от того, будет ли двигатель с наддувом или без него.

Чем больше оборотность мотора, тем выравнивание давлений наступает позднее, а следовательно, и угол запаздывания должен быть сделан больше.

Угол запаздывания закрытия всасывающего клапана оказывает по сравнению с влиянием других фаз значительно большее влияние на все характеристики двигателя.

Обычно этот угол для моторов с оборотностью от 2000 до 2500 об/мин. выбирается равным от 50 до 60°.

Открытие выхлопного клапана. Момент открытия выхлопного клапана определяется в основном тем, чтобы сумма заштрихованных на фиг. 241 площадок  $a$  и  $b$  была минимальной; с достаточной для практики точностью это получается при равенстве этих площадок.

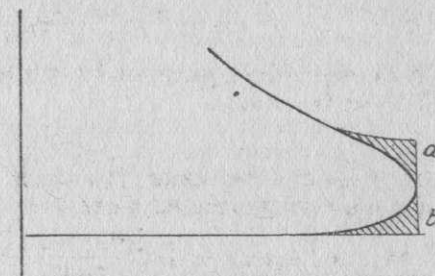
Для того чтобы к моменту прихода поршня в нижнее мертвое положение давление выхлопных газов упало до нужной величины, в многооборотных моторах опережение открытия выхлопного клапана должно быть сделано большим по сравнению с таковым для малооборотных.

Большой угол открытия выхлопного клапана по тем же соображениям, что и для всасывающего клапана, выгоден в отношении уменьшения инерционных сил клапанного механизма.

Обычно угол опережения открытия выхлопного клапана выбирается в среднем от 60 до 70°.

Закрытие выхлопного клапана. Закрывается выхлопной клапан должен несколько позже верхней мертвой точки поршня, что необходимо в целях использования кинетической энергии столба выхлопных газов для отсасывания из цилиндра остаточных газов. Позднее закрытие клапана выгодно и в отношении уменьшения инерционных сил выхлопного механизма.

Момент закрытия выхлопного клапана для двигателя без наддува имеет значительно более сильное влияние, чем для двигателя с наддувом. При



Фиг. 241. К определению начала открытия выхлопного клапана.



раннем закрытии выхлопного клапана двигателя без наддува получается недостаточная очистка цилиндра от сгоревших газов. При запаздывании конца выхлопа инертные газы могут быть втянуты обратно в камеру сгорания при ходе всасывания. В обоих случаях следствием является уменьшение весового заряда цилиндра свежей рабочей смесью.

Обычно угол запаздывания закрытия выхлопного клапана выбирается от 10 до 20° для моторов с водяным охлаждением и от 20 до 30° для моторов с воздушным охлаждением.

Общие положения для выбора фаз. 1. Наивыгоднейшие фазы распределения меняются с оборотностью мотора.

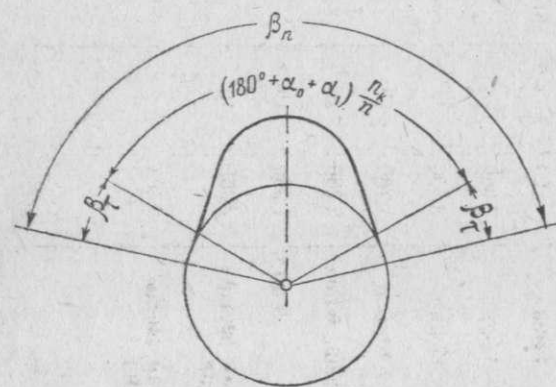
2. Наивыгоднейшие для высоких оборотов мотора фазы дают меньшие потери в мощности двигателя при работе его на низких оборотах, чем наивыгоднейшие фазы для низких чисел оборотов при работе мотора на высоких оборотах.

3. Фазы воздействуют главным образом на коэффициент наполнения двигателя.

4. Наивыгоднейшие фазы для двигателя с высотой до 5500 м и для двигателя без наддува на земле незначительно отличаются друг от друга.

5. Изменение фаз меньше влияет на высотный двигатель с наддувом, чем на двигатель без наддува.

6. Перекрытие клапанов оказывает благоприятное влияние особенно при непосредственном впрыске. Этим достигается лучшее охлаждение камеры сгорания, что особенно важно для двигателя с воздушным охлаждением.



Фиг. 242. К определению полного угла кулачка.

Зазор в клапанах. Для того чтобы определить угол по кулачку, в пределах которого надлежит строить профиль кулачка, нужно, кроме фаз распределения, знать угол поворота кулачка, соответствующий зазору в клапанном механизме. Этот зазор делается для получения плотного прилегания клапана к седлу во время работы мотора, когда клапан нагрет и поэтому удлинен. Величина указанного зазора зависит главным образом от длины клапана. Так как впускной клапан холод-

нее выпускного, то зазор у него делается меньше.

Зазоры в клапанах вновь построенного двигателя устанавливаются окончательно опытным путем. При этом избегаются излишне большие зазоры, дающие стук при работе и могущие вызвать поломку частей клапанного механизма. В табл. 38 приведены моменты распределения, данные по углу поворота кривошипа, и зазоры впускных и выхлопных клапанов ряда авиационных моторов. В отношении зазоров в клапанах звездообразных моторов необходимо иметь в виду, что эти зазоры в рабочем состоянии мотора увеличиваются по сравнению с зазорами в холодном состоянии мотора. Это увеличение зазоров заставляет конструкторов прибегать к компенсаторам, дающим возможность избежать сильного увеличения зазора. Примерная цифра зазора у звездообразных моторов воздушного охлаждения равна 1 мм.

Зная фазы распределения и углы β по кулачку, соответствующие зазору в клапанном механизме, можно определить полный угол β\_n кулачка, на котором строится его профиль (фиг. 242).

Таблица 38

Данные моментов распределения и зазоров в клапанах авиационных моторов

Авиамоторы	Тип мотора	Об/мин	Всасывание, градусы		Выхлоп, градусы		Период открытия, градусы		Зазор <sup>1</sup> у клапана, мм	
			Открытие до в. м. т.	Закрытие после н. м. т.	Открытие до н. м. т.	Закрытие после в. м. т.	Всасывание	Выхлоп	Всасывание	Выхлоп
Кертис «Супер-Конкверор» . . . . .	V-обр., 12-цил.	2 400	5	55	60	5	240	245	0,381	0,381
Кертисс-1800 . . . . .	V-обр., 12-цил.	2 400	10	60	60	20	250	260	2	2
Испано 12 Yhrs . . . . .	V-обр., 12-цил.	2 400	2-4,5	51-55	42	17-15	233-236	237-239	—	0,381
Лоррен «Петрель» . . . . .	V-обр., 12-цил.	2 600	8	55	61	8	243	249	0,25	0,35
Рено 12P-01 . . . . .	V-обр., 12-цил.	2 500	14	64	64	14	258	258	0,6	0,6
Изотта Фраскни «АССО»-750 . . . . .	W-обр., 18-цил.	1 700	5	55	50	15	240	245	0,3	0,4
Бристоль «Меркур» IV-S2 . . . . .	Звездообр., 9-цил.	2 250	29	47	76	40	256	296	0,1	0,15
Райт «Циклон» SgR-1820 . . . . .	» 9-цил.	1 950	15	44	74	25	239	279	0,5	0,5
Армстронг «Тайгер» . . . . .	Двойная звезда, 14-цил.	2 050	15	75	70	20	270	270	—	0,254
Гном и Рон «Мистраль» K-14 . . . . .	Двойная звезда, 14-цил.	2 400	9	55	64	21	244	265	0,225	0,225

<sup>1</sup> Для рядных моторов — в холодном состоянии, для звездообразных — в горячем.



Имеем:

а) для кулачка всасывающего клапана

$$\beta_n = 2\beta_c + (180^\circ + \alpha_0 + \alpha_1) \frac{n_k}{n} \quad (8)$$

и б) для кулачка выхлопного клапана

$$\beta_n = 2\beta_c + (180^\circ + \alpha_2 + \alpha_3) \frac{n_k}{n}, \quad (9)$$

где  $n$  и  $n_k$  — соответственно числа оборотов коленчатого и кулачкового валов,

$\alpha_0$  и  $\alpha_1$  — углы опережения и запаздывания всасывания (по коленчатому валу) и

$\alpha_2$  и  $\alpha_3$  — углы опережения и запаздывания выхлопа (по коленчатому валу).

### § 3. Скорость вращения кулачков

Для четырехтактных рядных моторов, в которых распределительный механизм приводится в движение от кулачковых валиков, скорость вращения последних в два раза меньше коленчатого вала.

В звездообразных моторах, с нечетным числом цилиндров в звезде, распределение производится обычно при помощи кулачковых шайб. Все кулачки, как впускные, так и выпускные, располагаются каждые по окружности своей шайбы, вращающейся вокруг своей оси, обычно совпадающей с осью коленчатого вала.

Нечетное число цилиндров в звезде позволяет осуществить при помощи кулачковых шайб равномерное чередование вспышек по цилиндрам, а именно через цилиндр. При четном числе цилиндров в звезде приходится ставить индивидуальные кулачковые валики на каждый цилиндр.

Для сдвоенной звезды с нечетным числом цилиндров в каждой звезде при угле между кривошипами в  $180^\circ$  и противоположном расположении цилиндров одной звезды по отношению к цилиндрам другой равномерное чередование вспышек по цилиндрам удастся получать тоже при помощи двух шайб: шайбы впуска и шайбы выпуска.

После этих предварительных замечаний перейдем к определению числа кулачков шайб, направлений их вращения и их угловых скоростей вращения.

А. Кулачковые шайбы однорядных звездообразных моторов. Рассмотрим сначала случай, когда передача от коленчатого вала к кулачковой шайбе осуществлена таким образом, что направление вращения шайбы одинаково с направлением вращения коленчатого вала.

Обозначим через

$i$  — число цилиндров звезды,

$k$  — число кулачков шайбы,

$\gamma$  — угол между осями соседних цилиндров

$$\gamma = \frac{2\pi}{i}, \quad (10)$$

$\gamma_k$  — угол между осями соседних кулачков шайбы

$$\gamma_k = \frac{2\pi}{k}, \quad (10')$$

порядок вспышек 1—3—5—7... 2—4—6...

$n$  — число оборотов коленчатого вала мотора в минуту,

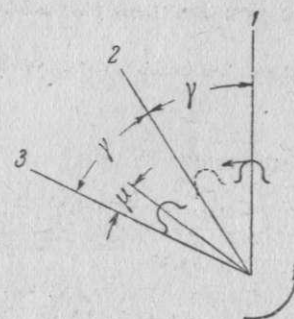
$n_k$  — число оборотов кулачковой шайбы в минуту в четырехтактном моторе.

Принимая во внимание, что в четырехтактном моторе один и тот же клапан открывается при повороте коленчатого вала на угол  $4\pi$ , что

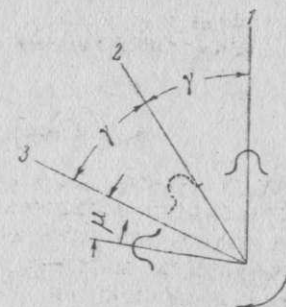
углы поворота коленчатого вала и кулачковой шайбы за любой промежуток времени пропорциональны их угловым скоростям вращения и что для правильной работы мотора кулачковая шайба должна повернуться на угол  $\gamma_k$  при повороте коленчатого вала на угол  $4\pi$ , будем иметь

$$\frac{n}{n_k} = \frac{4\pi}{\gamma_k} = \frac{4\pi}{\frac{2\pi}{k}} = 2k. \quad (11)$$

Допустим, что  $(x-1)$  представляет собой число кулачков между кулачком, открывающим в данный момент клапан в первом цилиндре, и тем кулачком, который откроет клапан в третьем цилиндре.



Фиг. 243. К определению числа кулачков шайбы при вращении ее в одном направлении с коленчатым валом.



Фиг. 244. К определению числа кулачков шайбы при вращении ее в противоположном направлении с коленчатым валом.

Так как угол поворота коленчатого вала между соседними вспышками равен  $2\gamma$ , то имея в виду, что повороту коленчатого вала на угол  $2\gamma$  будет соответствовать (фиг. 243) поворот кулачковой шайбы на угол  $\mu$ , получим

$$\mu = 2\gamma - x\gamma_k = \frac{2\gamma}{2k} = \frac{\gamma}{k}. \quad (12)$$

Отсюда, согласно равенствам (10) и (10'), получим

$$\frac{4\pi}{i} - \frac{2\pi}{k} x = \frac{2\pi}{ik}; \quad \frac{2}{i} - \frac{x}{k} = \frac{1}{ik}; \quad (13)$$

$$k = \frac{1+ix}{2}, \text{ где } x = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Для шайбы с наименьшим числом кулачков ( $x-1=0$ ) имеем

$$k = \frac{i+1}{2}. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь случай, когда направление вращения шайбы противоположно направлению вращения коленчатого вала.

В этом случае, согласно фиг. 244, имеем

$$\mu = x\gamma_k - 2\gamma = \frac{2\gamma}{2k} = \frac{\gamma}{k}; \quad (16)$$

$$ix - 2k = 1; \quad k = \frac{ix-1}{2}, \quad (17)$$

где  $x = 1, 2, 3, \dots$

Для шайбы с наименьшим числом кулачков имеем

$$k = \frac{i-1}{2}. \quad (18)$$



Б. Кулачковые шайбы сдвоенных звездообразных моторов. В сдвоенном звездообразном моторе число цилиндров каждой звезды бывает обычно больше 3, т. е. равно 5, 7 или 9; цилиндры одной звезды сдвинуты по отношению к цилиндрам другой звезды на половину угла между осями соседних цилиндров одной звезды.

Обозначим через

$i$  — число цилиндров одной звезды и

$i_k$  — число кулачков шайбы.

В этом случае равномерное чередование вспышек в цилиндрах мотора (через углы поворота коленчатого вала на  $\frac{4\pi}{2i}$ ) может быть получено только при наличии нечетного числа кулачков шайбы, так как в противном случае вспышки в моторе происходили бы одновременно в цилиндре одной звезды и в противоположно расположенном цилиндре другой звезды.

В связи с этим положением имеем:

1. При  $i = 5$  число кулачков  $k = 3$  — направление вращения кулачковой шайбы должно быть одинаково с направлением вращения коленчатого вала мотора;
2. При  $i = 7$  число кулачков  $k = 3$  — направление вращения кулачковой шайбы должно быть противоположно направлению вращения коленчатого вала мотора и
3. При  $i = 9$  число кулачков  $k = 5$  — направление вращения кулачковой шайбы должно быть одинаково с направлением вращения коленчатого вала мотора.

#### § 4. Кинематика клапана или толкателя, законы движения которого заданы

1. Закон движения клапана, или толкателя, при его ускорениях, изменяющихся по линейному закону в зависимости от времени. На участке  $AB$  (фиг. 245) подъема клапана (толкателя), соответствующем промежутку времени  $t'_h$ , ускорение является положительным и изменяется по времени по прямой  $A_1P_1$ ; скорость клапана возрастает, начиная от 0 в точке  $A$ , до своего максимального значения в точке  $B$ ; силы инерции клапана и всего клапанного механизма за этот период поднятия клапана стремятся прижать клапанный механизм к кулачку.

На участке  $BC$  подъема клапана, соответствующем промежутку времени  $t''_h$ , ускорение является отрицательным и изменяется по времени по прямой  $B_2C_1$ ; скорость клапана убывает, начиная от своего максимального значения в точке  $B$  до 0 в точке  $C$ ; силы инерции клапана и всего клапанного механизма за этот период поднятия клапана стремятся оторвать клапанный механизм от кулачка; этому отрыву препятствует включенная в клапанный механизм пружина (или несколько пружин), соответственно подсчитанная с известным запасом на уравнивание сил инерции клапанного механизма на участке  $BC$  подъема клапана.

На участке  $CC'$ , соответствующем промежутку времени  $t_r$ , клапан полностью открыт; его ускорение и скорость равняются нулю; силы инерции клапана и всего клапанного механизма за этот период равняются тоже нулю.

На участке  $C'B'$  опускания клапана, соответствующем промежутку времени  $t'_h$ , ускорение является отрицательным и изменяется по времени по прямой  $C'_1B'_2$ ; скорость клапана возрастает, начиная от 0 в точке  $C'$ , до максимального значения в точке  $B'$ ; силы инерции клапана и всего клапанного механизма за этот период опускания клапана стремятся ото-

рвать клапанный механизм от кулачка, чему препятствует указанная выше пружина. На участке  $B'A'$  опускания клапана, соответствующем промежутку времени  $t'_h$ , ускорение является положительным и изменяется по прямой  $B'_1A'_1$ ; скорость клапана убывает от своего максимального значения в точке  $B'$  до нуля в точке  $A'$ ; силы инерции клапана и всего клапанного механизма за этот период опускания клапана стремятся прижать клапанный механизм к кулачку. Знак плюс ускорения соответствует принятому за положительное направлению ускорений в пространстве.

Обозначим

$$\frac{t'_h}{t_h} = k; \quad \frac{j'_{KB}}{j'_{KA}} = p \text{ и } \frac{j_{KC}}{j_{KB}} = q. \quad (19)$$

Ускорение клапана на участке  $AB$  (фиг. 245) может быть выражено следующим уравнением

$$j_{KX} = j_{KA} - \frac{j_{KA} - j_{KB}}{t'_h} t = j_{KA} \left( 1 - \frac{1-p}{t'_h} t \right). \quad (20)$$

Скорость клапана получим, интегрируя это выражение по времени  $t$

$$v_{KX} = \int j_{KX} dt = j_{KA} \int \left( 1 - \frac{1-p}{t'_h} t \right) dt = j_{KA} \left( t - \frac{1-p}{2t'_h} t^2 \right) + A, \quad (21)$$

но так как при  $t=0$  величина  $v=0$ , то  $A=0$  и

$$v_{KX} = j_{KA} \left( t - \frac{1-p}{2t'_h} t^2 \right). \quad (22)$$

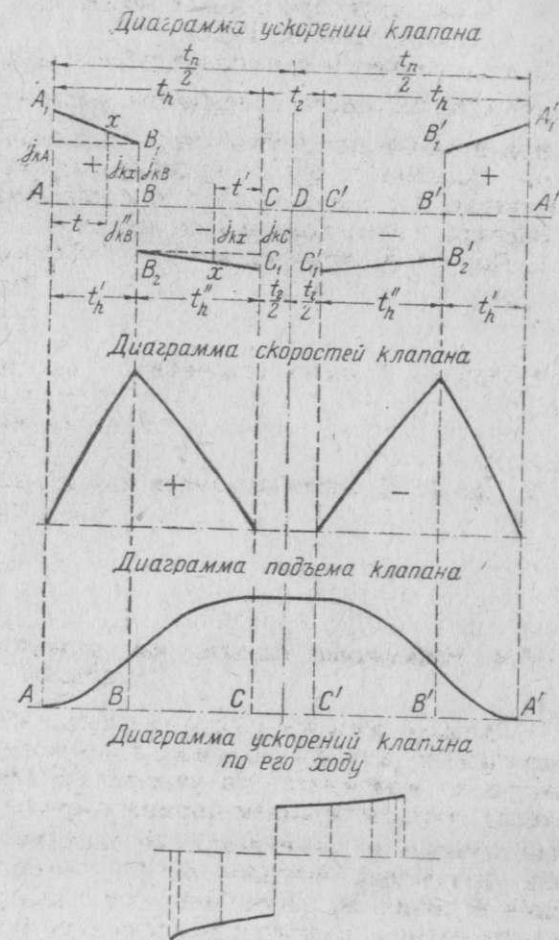
Интегрируя выражение для скорости по времени, получим путь клапана

$$h_{KX} = \int v_{KX} dt = \frac{j_{KA}}{2} \left( t^2 - \frac{1-p}{3t'_h} t^3 \right) + B, \quad (23)$$

но так как при  $t=0$  величина  $h_{KX}=0$ , то  $B=0$  и

$$h_{KX} = \frac{j_{KA}}{2} \left( t^2 - \frac{1-p}{3t'_h} t^3 \right). \quad (24)$$

Если рассматривать движение клапана на участке  $BC$ , принимая за начало координат момент максимального подъема клапана (точка  $C$ , фиг. 245), то все формулы, выведенные в общем виде для участка  $AB$ , будут справедливыми и для участка  $BC$ , так как в обоих случаях при выводе кинематических уравнений мы исходим из закона линейного из-



Фиг. 245. Скорости и пути клапана, ускорение которого изменяется линейно по времени.

менения ускорений по времени. Поэтому, заменяя в уравнениях (20), (22) и (24)

$$\left. \begin{aligned} j_{KA} & \text{ через } j_{KC}, \\ p & \text{ " } \frac{1}{q}, \\ t_h & \text{ " } t_h', \\ t & \text{ " } t' \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

и будем иметь:

а) для ускорения клапана

$$j_{KX} = j_{KC} \left( 1 - \frac{1}{q} \frac{t'}{t_h'} \right) \quad (26)$$

и б) для скорости клапана

$$v_{KX} = j_{KC} \left( t' - \frac{1}{2q} \frac{t'^2}{t_h'} \right) \quad (27)$$

Для пути клапана, который отсчитываем от его максимального подъема, имеем

$$h_{KX} = \frac{j_{KC}}{2} \left( t'^2 - \frac{1}{3q} \frac{t'^3}{t_h'} \right) \quad (28)$$

Для того чтобы определить по этим формулам пути и скорости клапана, необходимо определить  $j_{KA}$  и  $j_{KC}$ ; для этого задаемся величинами

$t_h, h_K, p, q$  и  $k$

и принимаем во внимание, что

$$\frac{t_h'}{t_h} = 1 - k. \quad (29)$$

Так как кривые путей в точках сопряжения имеют общую касательную, (потому, что в этих точках скорость клапана однозначна), то имеем:

а) из условия касания

$$\frac{j_{KA} t_h'}{2} (1+p) = -\frac{j_{KC} t_h'}{2} \left( 1 + \frac{1}{q} \right) \quad (30)$$

и б) из условия сопряжения

$$h_K = \frac{j_{KA} t_h'^2}{2} \left( 1 - \frac{1-p}{3} \right) + \frac{j_{KC} t_h'^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{3q} \right) \quad (31)$$

Из уравнения (30) получаем

$$j_{KC} = \frac{kq(1+p)}{(1-k)(1+q)} j_{KA} \quad (32)$$

Подставляя это выражение для  $j_{KC}$  в уравнение (31) и делая соответствующие преобразования, находим

$$j_{KA} = \frac{6h_K}{t_h'^2 k} \frac{1}{\left[ 1+k+p + \frac{1+p}{1+q} (1-k)q \right]} \quad (33)$$

Обозначая через

$$N = \frac{1}{\frac{k}{6} \left[ 1+k+p + \frac{1+p}{1+q} (1-k)q \right]} \quad (34)$$

будем в окончательном виде иметь

$$j_{KA} = N \frac{h_K}{t_h'^2} \quad (35)$$

и

$$j_{KB} = p j_{KA} = pN \frac{h_K}{t_h'^2} \quad (36)$$

Из уравнений (22) и (24) для участка AB имеем

$$v_{KX} = N \left[ \left( \frac{t}{t_h} \right) - \frac{1-p}{2k} \left( \frac{t}{t_h} \right)^2 \right] \frac{h_K}{t_h} \quad (37)$$

$$h_{KX} = 0,5N \left[ \left( \frac{t}{t_h} \right)^2 - \frac{1-p}{3k} \left( \frac{t}{t_h} \right)^3 \right] h_K \quad (38)$$

Для определения уравнений пути, скорости и ускорения клапана на участке BC его подъема находим величину ускорения  $j_{KC}$ . Согласно равенствам (32) и (35), имеем

$$|j_{KC}| = \frac{kq(1+p)}{(1-k)(1+q)} j_{KA} = \frac{kq(1+p)}{(1-k)(1+q)} N \frac{h_K}{t_h'^2} = N' \frac{h_K}{t_h'^2},$$

причем

$$N' = \frac{kq(1+p)}{(1-k)(1+q)} N. \quad (39)$$

Принимая во внимание найденное выражение для  $|j_{KC}|$ , будем на основании уравнений (28) и (29) иметь

$$h_{KX} = \left\{ 1 - 0,5N' \left[ \left( \frac{t'}{t_h'} \right)^2 - \frac{q-1}{3q(1-k)} \left( \frac{t'}{t_h'} \right)^3 \right] \right\} h_K, \quad (40)$$

причем путь клапана  $h_{KX}$  отсчитывается от начала его подъема, и

$$v_{KX} = N' \left[ \left( \frac{t'}{t_h'} \right) - \frac{q-1}{2q(1-k)} \left( \frac{t'}{t_h'} \right)^2 \right] \frac{h_K}{t_h'} \quad (41)$$

Принимая во внимание, что на участке BC подъема клапана его ускорения отрицательны, получим

$$j_{KC} = -N' \frac{h_K}{t_h'^2} \quad (42)$$

$$j_{KB} = \frac{1}{q} j_{KC} = -\frac{1}{q} N' \frac{h_K}{t_h'^2} \quad (43)$$

По этому закону движения толкателя построены, например, выхлопной кулачок авиадвигателя Бристоль "Меркур" IV-S2 и кулачок авиадвигателя Райт "Циклон" SgR-1820.

2. Для частного случая, когда по абсолютной величине

$$j_{KA} = j_{KB} = j_{KC},$$

имеем

$$k = \frac{1}{2}; \quad p = q = 1 \quad \text{и} \quad N = N' = 4. \quad (44)$$

На участке AB имеем

$$j_{KA} = j_{KB} = 4 \frac{h_K}{t_h'^2}, \quad (45)$$

$$v_{KX} = 4 \left( \frac{t}{t_h} \right) \frac{h_K}{t_h} \quad (46)$$



и

$$h_{kx} = 2 \left( \frac{t}{t_h} \right)^2 h_k. \quad (47)$$

На участке BC имеем

$$j_{kB} = j_{kC} = -4 \frac{h_k}{t_h^2}, \quad (48)$$

$$v_{kx} = 4 \left( \frac{t}{t_h} \right) \frac{h_k}{t_h} \quad (49)$$

и

$$h_{kx} = \left[ 1 - 2 \left( \frac{t}{t_h} \right)^2 \right] h_k. \quad (50)$$

По этому закону движения толкателя построен, например, кулачок авиамотора „Юпитер“-VI.

3. Для частного случая, когда

$$j_{kA} = j_{kB} \text{ и } j_{kB} = j_{kC},$$

имеем

$$p = q = 1, \quad N = \frac{2}{k} \text{ и } N' = \frac{2}{1-k}. \quad (51)$$

На участке AB имеем

$$j_{kA} = j_{kB} = \frac{2}{k} \frac{h_k}{t_h^2}, \quad (52)$$

$$v_{kx} = \frac{2}{k} \left( \frac{t}{t_h} \right) \frac{h_k}{t_h} \quad (53)$$

и

$$h_{kx} = \frac{1}{k} \left( \frac{t}{t_h} \right)^2 h_k. \quad (54)$$

На участке BC имеем

$$j_{kB} = j_{kC} = -\frac{2}{1-k} \frac{h_k}{t_h^2}, \quad (55)$$

$$v_{kx} = \frac{2}{1-k} \left( \frac{t}{t_h} \right) \frac{h_k}{t_h} \quad (56)$$

и

$$h_{kx} = \left[ 1 - \frac{1}{1-k} \left( \frac{t}{t_h} \right)^2 \right] h_k. \quad (57)$$

По этому закону движения толкателя построен кулачок авиамотора „Мистраль“ К-14.

4. Для частного случая, когда

$$j_{kA} = j_{kB},$$

имеем

$$p = 1, \quad N = \frac{6(1+q)}{k(2+k+4q-kq)} \text{ и } N' = \frac{12q}{(1-k)(2+k+4q-kq)}. \quad (58)$$

На участке AB имеем

$$j_{kA} = j_{kB} = N \frac{h_k}{t_h^2}, \quad (59)$$

$$v_{kx} = N \left( \frac{t}{t_h} \right) \frac{h_k}{t_h} \quad (60)$$

и

$$h_{kx} = 0,5N \left( \frac{t}{t_h} \right)^2 h_k. \quad (61)$$

На участке BC величины пути, скорости и ускорения определяются из уравнений (40), (41), (42) и (43, учитывая новое значение  $N'$ ).

По этому закону движения толкателя построен профиль всасывающего кулачка авиамотора Бристоль „Меркур“ IV-S2.

5. Законы движения клапана при его ускорениях, изменяющихся по линейному закону в зависимости от пути. Допустим, что ускорение клапана является функцией его пути

$$j_{kx} = f(h_{kx}). \quad (62)$$

Так как скорость  $v_{kx}$  и ускорение  $j_{kx}$  равны соответственно

$$v_{kx} = \frac{dh_{kx}}{dt} \quad (63)$$

и

$$j_{kx} = \frac{dv_{kx}}{dt}, \quad (64)$$

то

$$v_{kx} dv_{kx} = j_{kx} dh_{kx} = f(h_{kx}) dh_{kx} \quad (65)$$

и

$$dt = \frac{dh_{kx}}{v_{kx}}. \quad (66)$$

Интегрируя уравнение (65), получим

$$v_{kx} = \sqrt{2 \int_0^{h_{kx}} f(h_{kx}) dh_{kx}}. \quad (67)$$

Подставляя в уравнение (66)  $v_{kx}$  из равенства (67) и интегрируя его, получим для времени прохождения  $t$  пути  $h_{kx}$  следующее выражение:

$$t = \int_0^{h_{kx}} \frac{dh_{kx}}{\sqrt{2 \int_0^{h_{kx}} f(h_{kx}) dh_{kx}}}. \quad (68)$$

а. Участок положительных ускорений.

Примем, что положительные ускорения выражаются уравнением

$$j_{kx} = j_{kA} + Mh_{kx}, \quad (69)$$

где  $j_{kA}$  — начальное ускорение.

Тогда скорость на основании уравнения (67) будет

$$v_{kx} = \sqrt{2 \left( j_{kA} h_{kx} + \frac{Mh_{kx}^2}{2} \right)} \quad (70)$$

время по уравнению (68)

$$t = \int_0^{h_{kx}} \frac{dh_{kx}}{\sqrt{2 \left( j_{kA} h_{kx} + \frac{Mh_{kx}^2}{2} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \ln \left( \frac{j_{kA} + Mh_{kx} + \sqrt{M} \sqrt{2 \left( j_{kA} h_{kx} + \frac{Mh_{kx}^2}{2} \right)}}{j_{kA}} \right). \quad (71)$$

В том случае, когда ускорения на участке AB постоянны, будем иметь

$$v_{kx} = \sqrt{2j_{kA} h_{kx}} \quad (72)$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{j_{\kappa A}} h_{\kappa x}}. \quad (73)$$

б. Участок отрицательных ускорений.

Примем, что отрицательные ускорения выражаются уравнением

$$j_{\kappa x} = j_{\kappa c} - N h'_{\kappa x} = N \left( \frac{j_{\kappa c}}{N} - h'_{\kappa x} \right), \quad (74)$$

где  $j_{\kappa c}$  — ускорение в момент конца подъема клапана и

$j_{\kappa x}$  — путь клапана, отсчитываемый от максимального его подъема. Скорость клапана на основании уравнения (67) будет

$$v_{\kappa x} = \sqrt{2N \int_0^{h'_{\kappa x}} \left( \frac{j_{\kappa c}}{N} - h'_{\kappa x} \right) dh'_{\kappa x}} = \sqrt{N} \sqrt{2 \frac{j_{\kappa c}}{N} h'_{\kappa x} - h'^2_{\kappa x}}. \quad (75)$$

Время на основании уравнения (69) будет

$$t = \int_0^{h'_{\kappa x}} \frac{dh'_{\kappa x}}{\sqrt{N} \sqrt{2 \frac{j_{\kappa c}}{N} h'_{\kappa x} - h'^2_{\kappa x}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \arcsin \sqrt{\left( 2 - \frac{N}{j_{\kappa c}} h'_{\kappa x} \right) \frac{N}{j_{\kappa c}} h'_{\kappa x}} = \frac{2}{\sqrt{N}} \arcsin \sqrt{\frac{N}{2j_{\kappa c}} h'_{\kappa x}}. \quad (76)$$

Все формулы были выведены нами в функции времени. Для пользования удобнее иметь формулы в виде функций угла поворота кулачка  $\beta$  и числа его оборотов в минуту  $n_{\kappa}$ .

Из условия, что углы поворота кулачка пропорциональны времени имеем

$$\frac{\beta}{360^\circ} = \frac{t}{\frac{60}{n_{\kappa}}},$$

откуда

$$t = \frac{\beta}{6n_{\kappa}}. \quad (77)$$

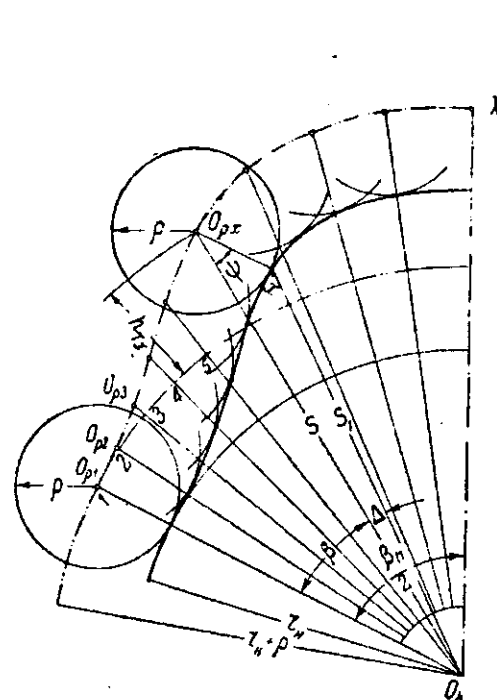
Пользуясь этим соотношением, можно во всех вышеприведенных формулах заменить время  $t$  через углы  $\beta$ .

### § 5. Построение профиля кулачка при заданном прямолинейном движении толкателя

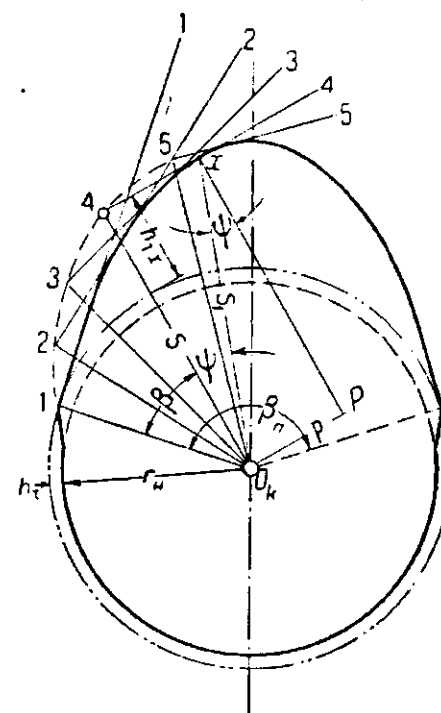
#### А. Графический метод построения профиля кулачка

Чтобы построить графически профиль кулачка, имея пути толкателя  $h_{\tau x}$  в зависимости от угла поворота кулачка  $\beta$ , поступают следующим образом (фиг. 246: проводят начальную окружность радиуса  $r_n$  и concentрическую окружность радиуса  $r_n + \rho$  (где  $\rho$  — радиус ролика), затем проводят вертикальную ось  $O_{\kappa}X$  и под углом  $\frac{\beta_n}{2}$  к ней проводят луч  $O_{\kappa}I$ ; лучи  $O_{\kappa}2$ ,  $O_{\kappa}3$  и т. д. проводятся под разными углами  $\beta$  к лучу  $O_{\kappa}I$ . На этих лучах откладывают от окружности радиуса  $(r_n + \rho)$  соответствующие пути оси ролика толкателя  $h_{\tau x}$  и из концов  $O_{\rho 1}$ ,  $O_{\rho 2}$ , ...,  $O_{\rho x}$  этих лучей, как из центр. в, описывают ряд окружностей радиуса  $\rho$ . Огибающая этих окружностей является искомым профилем кулачка. Все построение проводится в увеличенном (обычно в пять раз) масштабе.

При толкателе, соприкасающемся с кулачком плоскостью, поступают таким же образом: наносят положения плоскости толкателя при различных



Фиг. 246. Построение профиля кулачка при заданном законе движения толкателя с роликом.



Фиг. 247. Построение профиля кулачка при заданном законе движения толкателя с плоской тарелкой.

углах поворота кулачка  $\beta$  и проводят огибающую этих плоскостей, которая и является искомым профилем кулачка. Построение профиля кулачка дано на фиг. 247.

#### Б. Аналитическое определение профиля кулачка

Чтобы определить аналитически профиль кулачка, при известных законах изменения пути  $h_{\tau x}$  и скорости  $v_{\tau x}$  толкателя, находят для разных моментов положения механизма в полярных координатах точки  $x$  профиля кулачка, с которыми в эти моменты соприкасается ролик толкателя (фиг. 246).

Рассмотрим положение механизма, соответствующее нахождению оси ролика в точке  $O_{\rho x}$  (фиг. 246, полярные координаты которой будут угол  $\beta$  и

$$\overline{O_{\kappa} O_{\rho x}} = s = r_n + \rho + h_{\tau x}.$$

Из аналитической геометрии известно, что тангенс угла  $\psi$  между радиусом-вектором и нормалью к кривой будет равен

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{ds}{d\beta}, \quad (78)$$

где в нашем случае

$$\frac{ds}{d\beta} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\beta} = \frac{v_{\tau x}}{\omega_{\kappa}}, \quad (79)$$

а  $\omega_{\kappa}$  — угловая скорость вращения кулачка

$$\omega_{\kappa} = \frac{\pi n_{\kappa}}{30}. \quad (80)$$



Из треугольника  $O_k x O_{px}$  находим

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{p \sin \psi}{s - p \cos \psi} \quad (81)$$

и

$$s_1 = p^2 + s^2 - 2ps \cos \psi. \quad (82)$$

Точка  $x$  касания в рассматриваемый момент ролика и профиля кулачка вполне определяется полярными координатами  $(\beta + \Delta)$  и  $s_1$ .

Для толкателей с плоской тарелкой (фиг. 247) имеем: полюс  $P$  относительного движения толкателя и кулачка будет в точке пересечения нормали к профилю кулачка в точке касания  $x$  тарелки и перпендикуляра к оси толкателя, восстановленного из центра  $O_k$ .

Поэтому, обозначая  $PO_k = p$ , находим

$$\omega_k p = v_{tx} \text{ и } p = \frac{v_{tx}}{\omega_k},$$

а из треугольника  $O_k x P$  получаем

$$s_1 = \sqrt{s^2 + p^2} \quad (83)$$

и

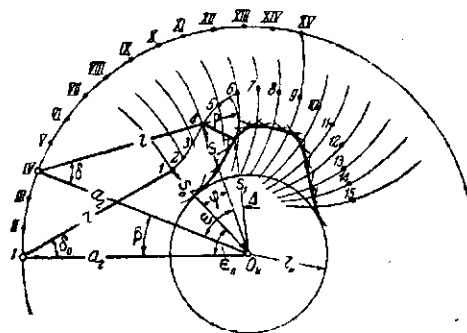
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{p}{s}. \quad (84)$$

Полярными координатами точки касания  $x$  будут в данном случае  $(\beta + \psi)$  и  $s_1$ .

## § 6. Построение профиля кулачка рычажных распределительных механизмов при заданном законе движения клапана

### А. Графический метод построения

Для того чтобы построить графически профиль кулачка рычажного механизма с роликом, сообщаем (фиг. 248) всему механизму вращательное движение около оси вращения кулачка с угловой скоростью кулачка в направлении, обратном вращению последнего; вследствие этого кулачок



Фиг. 248. Построение профиля кулачка при известном законе движения рычага с роликом.

остановится и прямая, соединяющая ось вращения рычага и кулачка, будет вращаться в сторону, обратную вращению последнего, занимая последовательно положения, соответствующие углам поворота кулачка в его необращенном движении. Ось вращения рычага займет соответственно положения  $I, II, III, \dots$ , а центр ролика положения  $1, 2, 3, \dots$ , которые легко найти по известному  $r$  и по известным углам  $\delta$ . Описывая вокруг точек  $1, 2, 3, \dots$ , как центров, ряд окружностей радиуса  $p$  и проводя огибающую семейства этих окружностей, получим искомый профиль кулачка. В зависимости от размера механизма построение это делается в увеличенном (в 5—10 раз) масштабе.

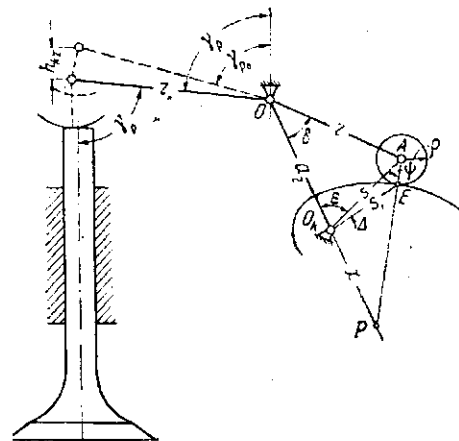
Построение лучше всего вести графо-аналитическим методом, определив аналитически расстояния между осями кулачка и ролика  $s$  и находя точки  $1, 2, 3, \dots$  пересечением двух дуг: одной с центром  $O_k$  и радиусом  $s$ , а другой с центром последовательно в точках  $I, II, III, \dots$  и радиусом  $r$ .

Для того чтобы определить  $s$ , необходимо сначала определить угол  $\delta$ . Обозначив в начальный момент углы  $\gamma_p$  и  $\delta$  (фиг. 249) через  $\gamma_{p0}$  и  $\delta_0$ , определяем, зная пути клапана  $h_{kx}$ , угол  $\gamma_p$  из уравнения

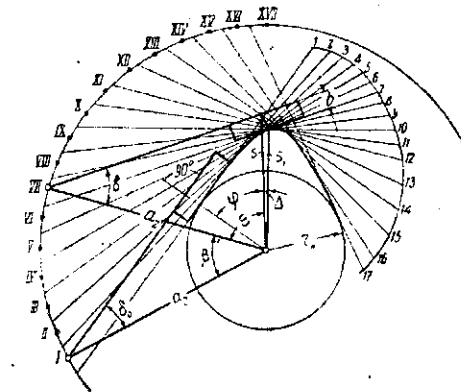
$$\cos \gamma_p = \cos \gamma_{p0} - \frac{h_{kx}}{r_k} \quad (85)$$

и, так как угловые перемещения обоих плеч рычага одинаковы, имеем

$$\delta - \delta_0 = \gamma_p - \gamma_{p0} \text{ и } \delta = \delta_0 + (\gamma_p - \gamma_{p0}). \quad (86)$$



Фиг. 249. Схема рычажного распределительного механизма при рычаге с роликом.



Фиг. 250. Построение профиля кулачка при известном законе движения рычага с плоскостью.

При построении профиля кулачка для рычага с плоскостью поступают таким же образом: наносят положения плоскости рычага при различных углах поворота кулачка и проводят огибающую этих плоскостей, которая будет искомым профилем кулачка. Построение профиля кулачка для этого случая дано на фиг. 250.

### Б. Аналитическое определение профиля кулачка

1. Рычаг с роликом. Зная, согласно теоремы Виллиса, что линия передачи силы делит расстояние центров, вокруг которых вращаются два тела, в отношении, обратном пропорциональному их угловым скоростям, мы можем написать (фиг. 249), следующее равенство:

$$(x + a_2) \frac{d\gamma_p}{dt} = x \omega_k. \quad (87)$$

Дифференцируя по  $t$  уравнение (85), получим

$$\frac{d\gamma_p}{dt} = \frac{v_{kx}}{r_k \sin \gamma_p}. \quad (88)$$

Подставляя это выражение для  $\frac{d\gamma_p}{dt}$  в уравнение (87) и принимая во внимание, что

$$v_{kx} = \frac{dh_{kx}}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = h'_{kx} \omega_k,$$

получим

$$\frac{x + a_2}{x} = \frac{r_k \sin \gamma_p}{h'_{kx}},$$

откуда

$$x = \frac{h'_{kx} a_2}{r_k \sin \gamma_p - h'_{kx}}. \quad (89)$$

Из треугольника  $PO_KA$  определяем угол  $\psi$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{x \sin \varepsilon}{s + x \cos \varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{s}{x} + \cos \varepsilon} \quad (90)$$

Из треугольника  $OO_KA$  имеем

$$\sin \varepsilon = \frac{r \sin \delta}{s}, \quad (91)$$

$$\cos \varepsilon = \frac{a_2 - r \cos \delta}{s} \quad (92)$$

и

$$s^2 = r^2 + a_2^2 - 2ra_2 \cos \delta. \quad (93)$$

Подставляя выражения  $x$ ,  $\sin \varepsilon$  и  $\cos \varepsilon$  из равенств (89), (91) и (92) в уравнение (90) и принимая во внимание уравнение (93), получим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \sin \delta}{s \left[ \frac{r_K \sin \gamma_p - h'_{Kx}}{h'_{Kx} a_2} s + \frac{a_2 - r \cos \delta}{s} \right]} = \frac{h'_{Kx} a_2 r \sin \delta}{s^2 r_K \sin \gamma_p + h'_{Kx} (-s^2 + a_2^2 - a_2 r \cos \delta)} = \frac{h'_{Kx} a_2 r \sin \delta}{s^2 r_K \sin \gamma_p + h'_{Kx} r (a_2 \cos \delta - r)} \quad (94)$$

Угол  $\varphi$  определяется согласно фиг. 248 из равенства

$$\varphi = \beta + \varepsilon - \varepsilon_0, \quad (95)$$

где  $\varepsilon_0$  — величина  $\varepsilon$  в момент начала движения ролика.

Из треугольника  $O_KA\varepsilon$  (фиг. 249) определяем  $s_1$  — радиус-вектор профиля кулачка

$$s_1^2 = s^2 + r^2 - 2sr \cos \psi \quad (96)$$

и угол  $\Delta$

$$\sin \Delta = \frac{r}{s_1} \sin \psi. \quad (97)$$

Величины  $\varphi$ ,  $s_1$  и  $\Delta$  вполне определяют точки касания ролика рычага, соответствующие подъемам клапана  $h'_{Kx}$ , а следовательно, определяют профиль кулачка в полярных координатах.

2. Рычаг с плоскостью. Принимая во внимание, что и в случае кулачка, ведущего рычаг с плоскостью, соотношение (87) остается справедливым, из подобия треугольников  $PO_KC$  и  $POA$  (фиг. 251) имеем

$$\frac{x + a_2}{x} = \frac{r_K \sin \gamma_p}{h'_{Kx}} = \frac{n}{m} \quad (98)$$

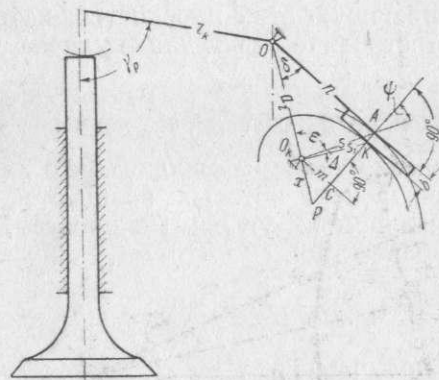
$$n = a_2 \cos \delta + m. \quad (99)$$

Подставляя выражение  $n$  из равенства (99) в уравнение (98), получим

$$\frac{r_K \sin \gamma_p}{h'_{Kx}} = \frac{a_2 \cos \delta}{m} + 1,$$

откуда

$$m = \frac{h'_{Kx} a_2 \cos \delta}{r_K \sin \gamma_p - h'_{Kx}}. \quad (100)$$



Фиг. 251. Схема рычажного распределительного механизма при рычаге с плоскостью.

и

Принимая во внимание это равенство, а также то, что  $AC = a_2 \sin \delta$ , из треугольника  $CO_KA$  имеем

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{m}{a_2 \sin \delta} = \frac{h'_{Kx} \operatorname{ctg} \delta}{r_K \sin \gamma_p - h'_{Kx}}. \quad (101)$$

Величина  $s$  определяется из треугольника  $O_KOA$

$$s = \frac{a_2 \sin \delta}{\cos \psi}. \quad (102)$$

Радиус-вектор профиля кулачка и угол  $\Delta$  определяются из уравнений (96) и (97) по замене в них  $r$  через  $b$ .

Принимая во внимание (фиг. 251), что  $\varepsilon = 90^\circ - \delta + \psi$ , будем, согласно фиг. 250, иметь

$$\varphi = \beta + \varepsilon - 90^\circ + \delta_0 = \beta - \delta + \delta_0 + \psi. \quad (103)$$

Величины  $s_1$ ,  $\Delta$  и  $\varphi$  определяют полностью профиль кулачка в полярных координатах.

## § 7. Кинематика прямолинейно движущегося толкателя, приводимого в движение кулачком, очерченным дугами кругов и прямыми

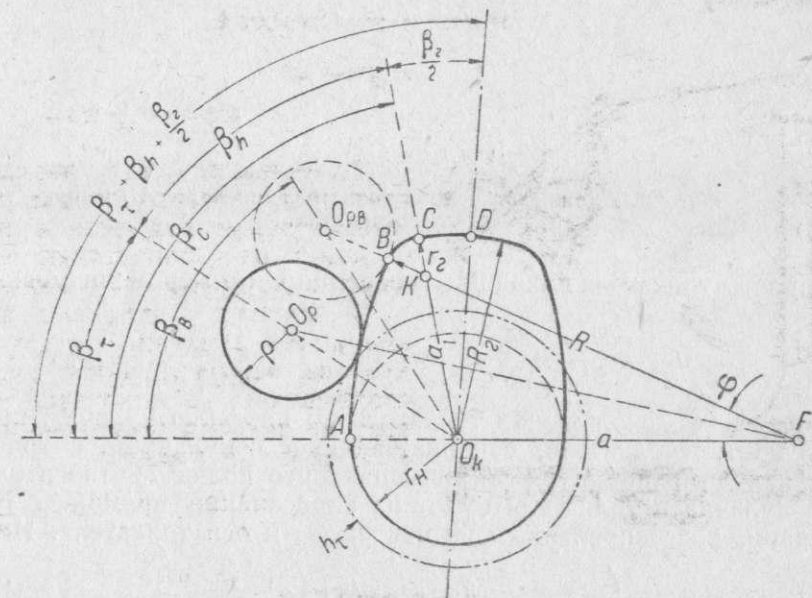
А. Выпуклый кулачок, действующий на толкатель с роликом

1. Путь, скорость и ускорение толкателя. Обозначим (фиг. 252) через

$\rho$  — радиус ролика (или грибка толкателя),

$r_n$  — радиус начальной окружности кулачка,

$R_r$  — радиус окружности головки кулачка,



Фиг. 252. К кинематике толкателя, приводимого в движение кулачком, очерченным выпуклыми дугами окружностей.

$R$  — радиус окружности части  $AB$  профиля кулачка,

$r_n$  — радиус окружности части  $BC$  профиля кулачка,

$\beta$  — угол поворота кулачка, отсчитываемый от прямой  $O_KO_p$  (ось толкателя).

$\beta_c$  — угол поворота кулачка от начала движения толкателя до момента его максимального подъема,



$\omega_k = \frac{d\beta}{dt}$  — угловую скорость вращения кулачка,

$$a = R - r_n, \quad k_1 = \frac{R + \rho}{a}, \quad a_1 = R_r - r_r \text{ и } k_2 = \frac{r_r + \rho}{a_1}. \quad (104)$$

Из треугольника  $FO_kO_p$  (фиг. 253), находим

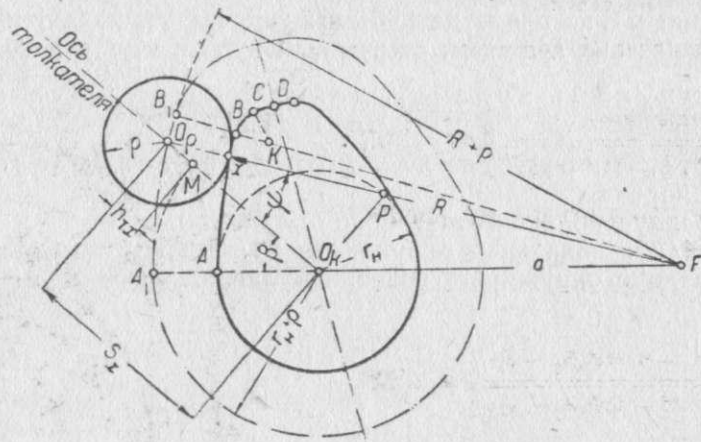
$$\sin \psi = \frac{a}{R + \rho} \sin \beta = \frac{1}{k_1} \sin \beta \text{ и } \cos \psi = \frac{1}{k_1} \sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta}. \quad (105)$$

Проектируя треугольник  $FO_kO_p$  на направление его стороны  $O_pO_k$  и принимая во внимание уравнения (105), определяем расстояние между осями кулачка и ролика

$$s_x = (R + \rho) \cos \psi - a \cos \beta = a (\sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta} - \cos \beta). \quad (106)$$

Путь толкателя при движении ролика по дуге  $AB$  будет

$$h_{tx} = \overline{O_pM} = s_x - (r_n + \rho) = a (\sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta} - \cos \beta) - (r_n + \rho). \quad (107)$$



Фиг. 253. Движение ролика толкателя по дуге  $AB$  выпуклого кулачка.

Скорость толкателя находим, дифференцируя по времени уравнение пути (107)

$$v_{tx} = \frac{dh_{tx}}{dt} = \frac{dh_{tx}}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = a \sin \beta \left( 1 - \frac{\cos \beta}{\sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta}} \right) \omega_k. \quad (108)$$

Скорость  $v_{cx}$  скольжения толкателя по профилю кулачка, когда вместо ролика контур толкателя, соприкасающийся с кулачком, очерчен по дуге круга, находим, принимая во внимание, что полюс  $P$  относительного движения кулачка и толкателя будет на пересечении прямой  $O_kF$  с перпендикуляром, восстановленным из центра  $O_k$  к оси толкателя. Имеем

$$v_{cx} = \overline{Px} \omega_k = \left( \frac{s_x}{\cos \psi} - \rho \right) \omega_k = \left[ a k_1 \left( 1 - \frac{\cos \beta}{\sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta}} \right) - \rho \right] \omega_k = \left[ R - \frac{(R + \rho) \cos \beta}{\sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta}} \right] \omega_k. \quad (109)$$

Ускорение толкателя находим, дифференцируя по  $t$  уравнение скорости (108)

$$j_{tx} = \frac{dv_{tx}}{dt} = \frac{dv_{tx}}{d\beta} \omega_k = a \left[ \cos \beta - \frac{(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta} + \frac{2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}{\sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta}}}{k_1^2 - \sin^2 \beta} \right] \omega_k^2.$$

Прибавляя  $\sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta} - \sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta}$  к выражению в скобках, в окончательном виде получим

$$j_{tx} = a \left[ \cos \beta - \sqrt{k_1^2 - \sin^2 \beta} - \frac{k_1^2 (1 - k_1^2)}{(k_1^2 - \sin^2 \beta)^{3/2}} \right] \omega_k^2. \quad (110)$$

Ускорение толкателя в начальный момент ( $\beta = 0$ ) равно

$$(j_t)_A = a \left( 1 - \frac{1}{k_1} \right) \omega_k^2 = a \frac{r_n + \rho}{R + \rho} \omega_k^2. \quad (110')$$

Аналогично, при движении ролика по дуге  $BC$ , находим (фиг. 254): а) путь толкателя

$$h_{tx} = a_1 [\cos (\beta_c - \beta) + \sqrt{k_2^2 - \sin^2 (\beta_c - \beta)}] - [r_n + \rho], \quad (111)$$

б) скорость толкателя

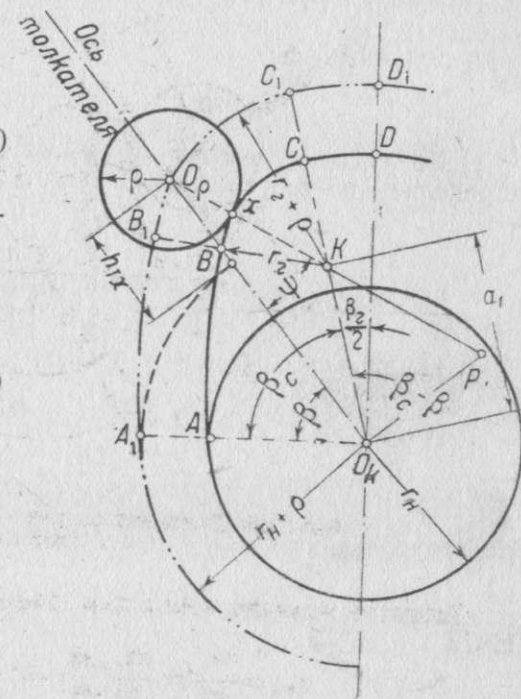
$$v_{tx} = a_1 \sin (\beta_c - \beta) \times \left[ 1 + \frac{\cos (\beta_c - \beta)}{\sqrt{k_2^2 - \sin^2 (\beta_c - \beta)}} \right] \omega_k, \quad (112)$$

в) скорость скольжения по профилю кулачка

$$v_{cx} = \left[ r_r + \frac{(r_r + \rho) \cos (\beta_c - \beta)}{\sqrt{k_2^2 - \sin^2 (\beta_c - \beta)}} \right] \omega_k \quad (113)$$

и г) ускорение толкателя

$$j_{tx} = -a_1 \left\{ \cos (\beta_c - \beta) + \sqrt{k_2^2 - \sin^2 (\beta_c - \beta)} + \frac{k_2^2 (1 - k_2^2)}{[k_2^2 - \sin^2 (\beta_c - \beta)]^{3/2}} \right\} \omega_k^2. \quad (114)$$



Фиг. 254. Движение ролика толкателя по дуге  $BC$  выпуклого кулачка.

Ускорение толкателя в момент максимального подъема клапана ( $\beta_c = \beta$ ) будет

$$(j_t)_C = -a_1 \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \omega_k^2 = -a_1 \frac{R_r + \rho}{r_r + \rho} \omega_k^2. \quad (114')$$

Для того чтобы иметь возможность производить подсчеты по этим формулам, необходимо знать величины углов  $\beta$ , в пределах которых движение толкателя будет совершаться по одному и тому же закону. Эти углы условимся называть предельными.

2. Предельные углы. а) Угол  $\beta = \beta_c$ , соответствующий началу движения клапана по дуге  $AB$  радиуса  $R$ , находим из треугольника  $O_kFO_p$  (фиг. 252)

$$\cos \beta_c = \frac{(R + \rho)^2 - a^2 - (r_n + \rho + h_c)^2}{2a(r_n + \rho + h_c)},$$







б) Угол  $\beta = \beta_B$ , соответствующий концу движения ролика по дуге  $AB$  и началу движения по дуге  $BC$ , находим из треугольника  $O_K O_{CB} F$

$$\operatorname{tg} \beta_B = \frac{k_1 \sin \varphi}{1 - k_1 \cos \varphi} \quad (128)$$

в) Угол  $\varphi$  определяем из треугольника  $O_K FK$

$$\cos \varphi = \frac{(R + r_r)^2 + (R + r_n)^2 - (R_r - r_r)^2}{2(R + r_r)(R + r_n)} \quad (129)$$

Прибавляя  $(+R_r r_n - R_r r_n)$  к числителю дроби и  $(+1-1)$  к правой части этого уравнения и делая соответствующие преобразования, в окончательном виде получим

$$\cos \varphi = 1 - \frac{(R_r - r_n)(R_r + r_n - 2r_r)}{2a(R + r_r)} \quad (130)$$

г) Угол  $\beta = \beta_C$ , соответствующий концу движения ролика по дуге  $BC$  и началу движения по дуге  $CD$ , находим из треугольника  $O_K FK$

$$\sin \beta_C = \frac{R + r_r}{a_1} \sin \varphi \quad (131)$$

### В. Тангенциальный кулачок

У тангенциального кулачка боковые стороны профиля кулачка являются прямыми, касательными к начальной окружности.

1. Путь, скорость и ускорение толкателя. Из треугольника  $O_K A_1 O_p$  (фиг. 257) находим

$$s_x = \frac{r_n + p}{\cos \beta} \quad (132)$$

Путь толкателя будет равен

$$h_{Tx} = s_x - (r_n + p) = \frac{r_n + p}{\cos \beta} -$$

$$-(r_n + p) = (r_n + p) \left( \frac{1}{\cos \beta} - 1 \right) \quad (133)$$

Скорость толкателя находим, дифференцируя по  $t$  уравнение (133) пути толкателя. Имеем

$$v_{Tx} = \frac{dh_{Tx}}{dt} = \frac{dh_{Tx}}{d\beta} \omega_K = (r_n + p) \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} \omega_K \quad (134)$$

Фиг. 257. Движение толкателя по прямолинейному участку тангенциального кулачка.

Скорость  $v_{Cx}$  скольжения толкателя с тарелкой, очерченной по дуге круга, по профилю кулачка находим, зная полюс относительного движения кулачка и толкателя — точку  $P$  (фиг. 257)

$$v_{Cx} = \bar{P}x \omega_K = \left( \frac{s_x}{\cos \beta} - p \right) \omega_K = \left( \frac{r_n + p}{\cos^2 \beta} - p \right) \omega_K \quad (135)$$

Ускорение толкателя находим, дифференцируя по  $t$  уравнение скорости (134). Получаем

$$j_{Tx} = \frac{dv_{Tx}}{dt} = \frac{dv_{Tx}}{d\beta} \omega_K = (r_n + p) \omega_K^2 \frac{\cos^3 \beta + 2 \sin^2 \beta \cos \beta}{\cos^4 \beta} = (r_n + p) \frac{2 - \cos^2 \beta}{\cos^3 \beta} \omega_K^2 \quad (136)$$

Ускорение толкателя в момент начала движения равно

$$(j_T)_A = (r_n + p) \omega_K^2 \quad (136')$$

При движении ролика по дуге  $BC$  профиля кулачка величины  $h_{Tx}$ ,  $v_{Tx}$ ,  $j_{Tx}$  определяются по формулам (111) — (114).

2. Предельные углы. а) Угол  $\beta = \beta_+$ , соответствующий началу движения клапана, находим из треугольника  $O_K A_1 O_p$  (фиг. 258)

$$\cos \beta_+ = \frac{r_n + p}{r_n + p + h_+} \quad (137)$$

Прибавляя  $(+1-1)$  к правой части этого уравнения, получим

$$\cos \beta_+ = 1 - \frac{h_+}{r_n + p + h_+} \quad (138)$$

б) Угол  $\beta = \beta_B$ , соответствующий концу движения ролика по прямой  $AB$  и началу движения по дуге  $BC$ , определяется из треугольника  $O_K A_1 O_p$

$$\operatorname{tg} \beta_B = \frac{A_1 O_p B}{O_K A_1} = \frac{Ke}{(r_n + p)} = \frac{a_1}{r_n + p} \sin \beta_C \quad (139)$$

где  $a_1 = R_r - r_r$ .

в) Угол  $\beta_C$ , соответствующий концу движения ролика по дуге  $BC$ , находим из треугольника  $O_K eK$

$$\cos \beta_C = \frac{r_n - r_r}{a_1} \quad (140)$$

### Г. Выпуклый кулачок, действующий на толкатель с плоской тарелкой

Подобные кулачки бывают двух типов.

Первый тип (фиг. 259), когда дуга радиуса  $R$  касается начальной окружности, и второй тип (фиг. 260), когда дуга радиуса  $R$  касательна окружности зазора радиуса  $(r_n + h_r)$ .

Формулы движения толкателя с плоской тарелкой при обоих типах кулачков одинаковы, если при кинематических исследованиях положить, что радиус начальной окружности  $r_n$  во втором типе кулачка равен  $r_n + h_r$ , и в соответствии с этим принять угол зазора равным нулю.

1. Путь, скорость и ускорение толкателя. Рассмотрим наш механизм (фиг. 259) в положении, когда кулачок повернулся на угол  $\beta$  от момента начала подъема толкателя и тарелка толкателя соприкасается с профилем кулачка в точке  $x$ .

Путь толкателя, согласно фиг. 259, будет

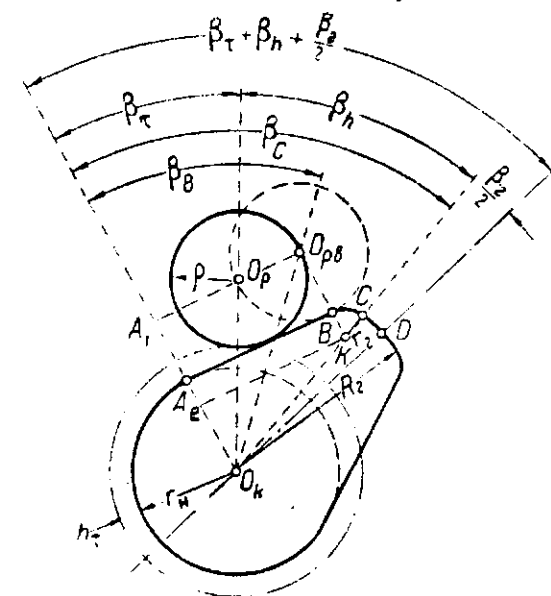
$$h_{Tx} = \overline{EO_K} - r_n = R - a \cos \beta - r_n = a(1 - \cos \beta) \quad (141)$$

Скорость толкателя находим, дифференцируя по  $t$  уравнение пути (141)

$$v_{Tx} = \frac{dh_{Tx}}{dt} = \frac{dh_{Tx}}{d\beta} \omega_K = \omega_K a \sin \beta \quad (142)$$

Ускорение толкателя получаем, дифференцируя по  $t$  уравнение скорости толкателя (142)

$$j_{Tx} = \frac{dv_{Tx}}{dt} = \frac{dv_{Tx}}{d\beta} \omega_K = \omega_K^2 a \cos \beta \quad (143)$$



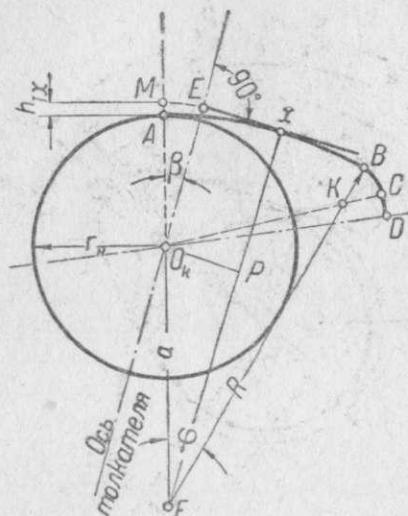
Фиг. 258. К определению предельных углов тангенциального кулачка.

Ускорение толкателя в момент начала движения равно

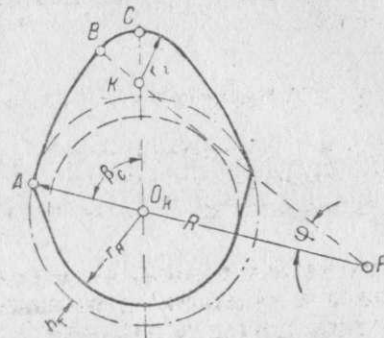
$$(j_T)_A = a\omega_k^2. \quad (143')$$

Так как точка  $P$  (фиг. 261) является полюсом относительного движения толкателя и кулачка, то скорость скольжения толкателя по кулачку будет равна

$$v_{сх} = \overline{Px} \omega_k = (R - a \cos \beta) \omega_k. \quad (144)$$



Фиг. 259. Движение толкателя с плоской тарелкой по дуге AB кулачка.



Фиг. 260. Профиль выпуклого кулачка, у которого боковые дуги профиля касательны окружности зазора.

При движении тарелки толкателя по дуге BC путь толкателя, согласно фиг. 261, будет равен

$$h_{Tx} = \overline{O_k E} - r_h = a_1 \cos(\beta_c - \beta) + r_r - r_h = (r_r - r_h) + a_1 \cos(\beta_c - \beta). \quad (145)$$

Скорость толкателя находим, дифференцируя по  $t$  уравнение пути толкателя (145)

$$v_{Tx} = \frac{dh_{Tx}}{dt} = \frac{dh_{Tx}}{d\beta} \omega_k = \omega_k a_1 \sin(\beta_c - \beta). \quad (146)$$

Скорость  $v_{сх}$  скольжения тарелки толкателя по кулачку будет

$$v_{сх} = \overline{Px} \omega_k = [r_r + a_1 \cos(\beta_c - \beta)] \omega_k. \quad (147)$$

Ускорение толкателя находим, дифференцируя по  $t$  уравнение (146) скорости толкателя

$$j_{Tx} = \frac{dv_{Tx}}{dt} = \frac{dv_{Tx}}{d\beta} \omega_k = -\omega_k^2 a_1 \cos(\beta_c - \beta). \quad (148)$$

Фиг. 261. Движение толкателя с плоской тарелкой по дуге BC кулачка.

Ускорение толкателя в момент, соответствующий касанию тарелки кулачка в точке C, равно

$$(j_T)_C = -a_1 \omega_k^2. \quad (148')$$

2. Предельные углы. а) Угол  $\beta = \beta_c$  (фиг. 262), соответствующий началу движения клапана, находим из уравнения (141)

$$h_c = a(1 - \cos \beta_c),$$

откуда

$$\cos \beta_c = 1 - \frac{h_c}{a}. \quad (149)$$

б) Угол  $\beta = \beta_B$ , соответствующий концу движения тарелки толкателя по дуге AB и началу движения по дуге BC, равен

$$\beta_B = \varphi. \quad (150)$$

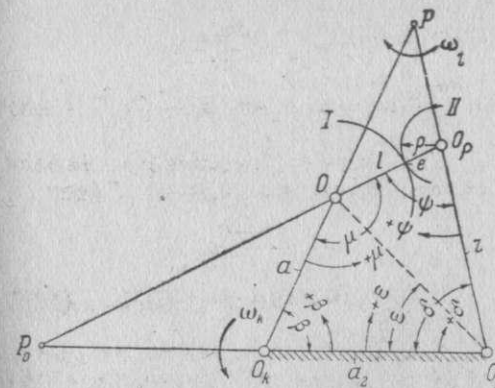
Угол  $\varphi$  определяется из уравнения (118).

в) Угол  $\beta_c$ , соответствующий концу движения тарелки толкателя по дуге BC, определяется из уравнения (119).

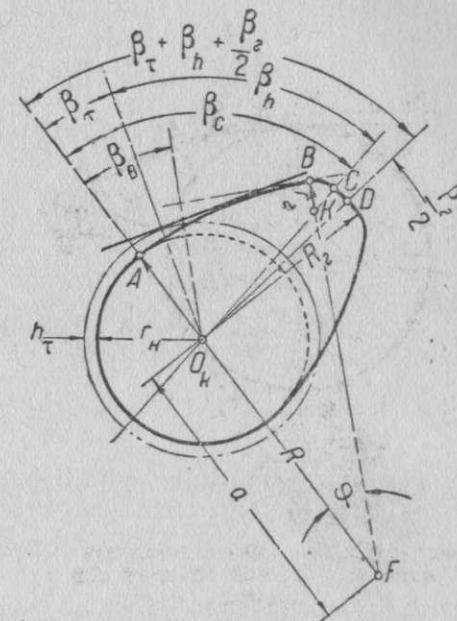
### § 8. Кинематика рычага, приводимого в движение кулачком, очерченным дугами кругов и прямыми

Общие соображения: Кинематическое исследование механизма, состоящего из рычага с роликом и кулачка, очерченного дугами окружностей, приводится к кинематическому исследованию четырехзвенного механизма; поэтому рассмотрим предварительно кинематику четырехзвенного механизма.

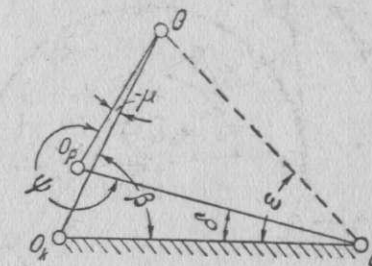
Пусть закон движения звена  $a$  четырехзвенного механизма  $O_k O O_p O_r$  (фиг. 263) будет тем же, что и кулачка, т. е. пусть это звено вращается с постоянной угловой скоростью  $\frac{d\beta}{dt} = \omega_k$ ; через тягу  $l$  движение передается ведомому звену  $r$  (в кулаково-рычажном механизме это звено является рычагом).



Фиг. 263. 1-я схема четырехзвенного механизма.



Фиг. 262. К определению предельных углов кулачка при толкателе с плоской тарелкой.



Фиг. 264. 2-я схема четырехзвенного механизма.

При данном угле поворота звена механизм может занимать два различных положения (фиг. 263 и 264), что соответствует двум возможным видам движения рассматриваемого механизма. Выводимые ниже формулы справедливы для обоих видов движения. Направление отсчета углов и знаки последних даны на фиг. 263. Для выяснения той четверти, в которой лежат углы, определяемые на основании нижеприводимых уравнений,



надежнее всего пользоваться графическим построением (в масштабе) соответствующего положения механизма.

Прежде чем определить угловые перемещения  $\delta$  звена  $r$ , найдем вспомогательные углы  $\psi$  и  $\varepsilon$ .

Угол  $\psi$  в виде функции угла  $\beta$  находим из треугольников  $OO_2O_p$  и  $OO_kO_p$ . Имеем

$$\overline{OO_p}^2 = a^2 + a_2^2 - 2aa_2 \cos \beta = l^2 + r^2 - 2lr \cos \psi. \quad (151)$$

Отсюда

$$\cos \psi = \frac{l^2 + r^2 - a^2 - a_2^2}{2lr} + \frac{a_2a}{lr} \cos \beta. \quad (152)$$

Угол  $\varepsilon$  находим из треугольника  $O_kOO_p$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a \sin \beta}{a_2 - a \cos \beta}. \quad (153)$$

Угловое перемещение ведомого звена  $r$ , выражающееся через угол  $\delta$  определяем из треугольника  $OO_pO$ .

Имеем

$$\operatorname{tg} (\delta - \varepsilon) = \frac{l \sin \psi}{r - l \cos \psi}. \quad (154)$$

Из этого уравнения определяется угол  $\delta$  по известным углам  $\varepsilon$  и  $\psi$ .

В дальнейшем нам понадобится еще один вспомогательный угол

$$\mu = 360^\circ - (\beta + \delta + \psi). \quad (155)$$

Для определения угловой скорости звена  $r$  находим мгновенный центр вращения звена  $l$  точку  $P$ .

Угловая скорость вращения звена  $l$  будет

$$\omega_l = -\omega_k \frac{a}{\overline{PO}}. \quad (156)$$

Так как линейная скорость точки  $O_p$  равна

$$v_{O_p} = \omega_l \overline{PO_p} = \frac{d\delta}{dt} r, \quad (157)$$

то угловая скорость ведомого звена  $r$  будет

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{a}{r} \frac{\overline{PO_p}}{\overline{PO}} \omega_k. \quad (158)$$

Из треугольника  $O_pPO$  имеем

$$\frac{\overline{PO_p}}{\overline{PO}} = \frac{\sin \mu}{\sin \psi},$$

что дает следующее выражение для угловой скорости звена  $r$ :

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{a}{r} \frac{\sin \mu}{\sin \psi} \omega_k. \quad (159)$$

Угловое ускорение звена  $r$  находим, дифференцируя по  $t$  уравнение угловой скорости (159)

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{a}{r} \omega_k \frac{1}{\sin^2 \psi} \left[ \cos \mu \frac{d\mu}{dt} \sin \psi - \sin \mu \cos \psi \frac{d\psi}{dt} \right]. \quad (160)$$

Дифференцируя по  $t$  уравнение (152), получаем для  $\frac{d\psi}{dt}$  следующее выражение:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{aa_2}{lr} \frac{\sin \beta}{\sin \psi} \omega_k. \quad (161)$$

Из треугольников  $O_kOO_p$  и  $O_kO_pO$  имеем

$$\cos \mu = \frac{l^2 + a^2 - a_2^2 - r^2}{2la} + \frac{a_2r}{la} \cos \delta.$$

Дифференцируя это уравнение по  $t$ , получаем для  $\frac{d\mu}{dt}$  следующее выражение:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{a_2r}{la} \frac{\sin \delta}{\sin \mu} \frac{d\delta}{dt}. \quad (162)$$

Подставляя в уравнение (160) выражения для  $\frac{d\delta}{dt}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$  и  $\frac{d\mu}{dt}$  из уравнений (159), (161) и (162), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dt^2} = & -\frac{a}{r} \frac{\omega_k}{\sin^2 \psi} \left[ -\cos \mu \sin \psi \frac{a_2r}{la} \frac{\sin \delta}{\sin \mu} \frac{a}{r} \frac{\sin \mu}{\sin \psi} \omega_k - \right. \\ & \left. - \sin \mu \cos \psi \frac{aa_2}{lr} \frac{\sin \beta}{\sin \psi} \omega_k \right]. \end{aligned} \quad (163)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d\delta}{d\beta} = -\frac{a}{r} \frac{\sin \mu}{\sin \psi} \quad (164)$$

и производя соответствующие сокращения, найдем окончательно

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{aa_2}{rt} \frac{1}{\sin^2 \psi} \left[ \cos \mu \sin \delta - \cos \psi \sin \beta \frac{d\delta}{d\beta} \right] \omega_k^2. \quad (165)$$

В том случае, когда вместо ролика рычага с кулачком соприкасается конец рычага, очерченный дугой окружности, приходится при расчете механизма на износ определять скорость скольжения рычага по кулачку.

Положим (фиг. 263), что окружность  $II$ , очерченная из точки  $O$  радиусом  $\rho$ , представляет профиль рычага, а окружность  $I$ , очерченная из точки  $O$  радиусом  $(l-\rho)$ , представляет профиль кулачка. Для определения относительной скорости  $v_{cx}$  скольжения рычага по кулачку сообщаем всему механизму вращательное движение вокруг точки  $O_p$  в направлении, обратном движению звена  $r$ , с угловой скоростью последнего  $\frac{d\delta}{dt}$ . Полусом относительного движения звена  $a$  в этом новом движении будет точка  $P_0$ , лежащая на пересечении прямых  $OO_p$  и  $O_kO_p$ , а угловая скорость вращения звена  $a$  в этом движении будет  $\omega_k + \frac{d\delta}{dt}$ . Искомая скорость  $v_{cx}$  равна

$$v_{cx} = \overline{IP_0} \left( \omega_k + \frac{d\delta}{dt} \right) = (\overline{P_0O_p} - \rho) \left( 1 + \frac{d\delta}{d\beta} \right) \omega_k \quad (166)$$

или, принимая во внимание (см. треугольник  $P_0O_pO$ ), что

$$\overline{P_0O_p} = r \frac{\sin \delta}{\sin [180^\circ - (\psi + \delta)]} = r \frac{\sin \delta}{\sin (\psi + \delta)},$$

получим

$$v_{cx} = \left[ r \frac{\sin \delta}{\sin (\psi + \delta)} - \rho \right] \left( 1 + \frac{d\delta}{d\beta} \right) \omega_k. \quad (167)$$

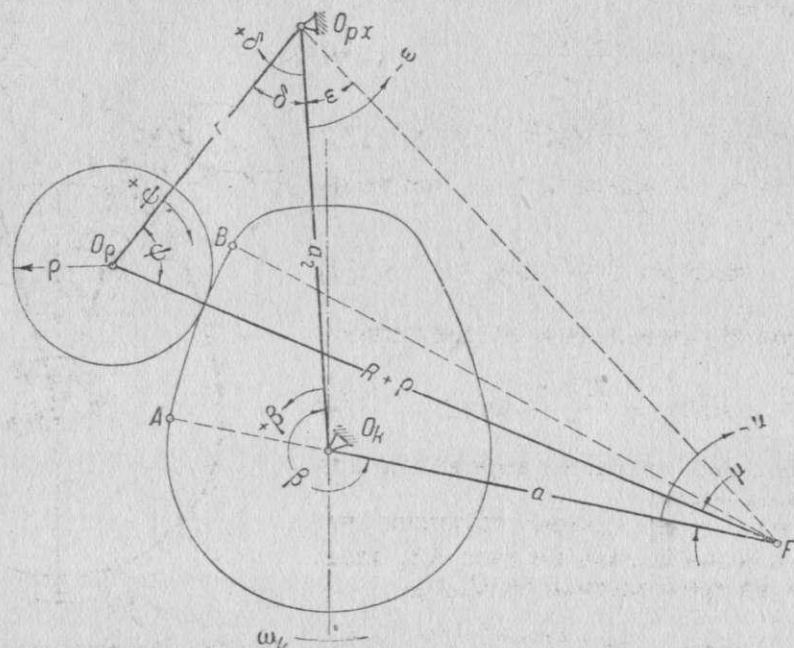
Перейдем теперь к кинематическому исследованию механизма, состоящего из рычага с роликом и кулачка, очерченного дугами окружностей.

Выпуклый кулачок. Заменим систему кулачок—рычаг эквивалентной схемой четырехзвенного механизма.

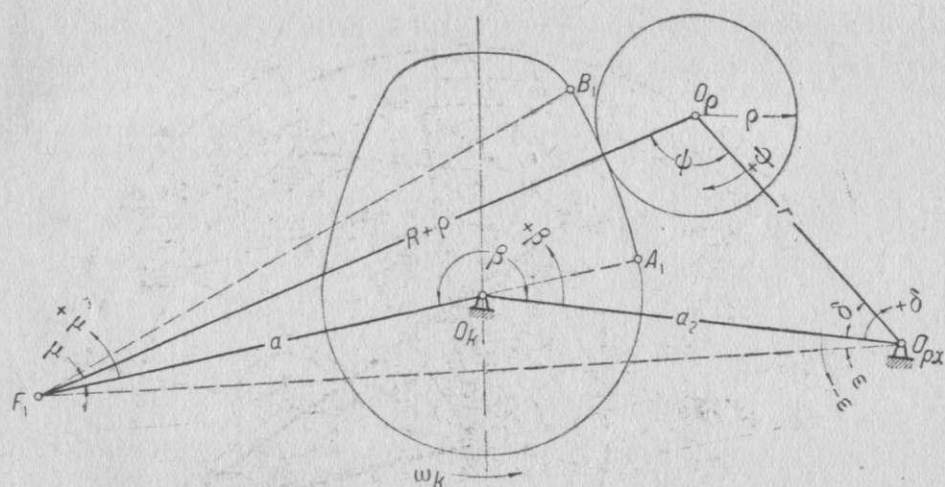
При движении ролика по дугам  $AB$  и  $B_1A_1$  (фиг. 265 и 266) звенья  $a_2$ ,  $a$ ,  $(R+\rho)$  и  $r$  соответствуют звеньям  $a_2$ ,  $a$ ,  $l$  и  $r$  четырехзвенника, представленного на фиг. 263.

При движении ролика по дугам  $BC$  и  $C_1B_1$  (фиг. 267) звенья  $a_2$ ,  $a$ ,  $(r_2+\rho)$  и  $r$  соответствуют звеньям  $a_2$ ,  $a$ ,  $l$  и  $r$  четырехзвенника, представленного на фиг. 263.

Для того чтобы пользоваться этими уравнениями, необходимо знать значения углов поворота кулачка, в пределах которых движение рычага



Фиг. 265. Движение ролика рычага по дуге АВ выпуклого кулачка.



Фиг. 266. Движение ролика рычага по дуге  $B_1 A_1$  выпуклого кулачка.

Прежде чем перейти к определению величин предельных углов  $\beta$ , определим некоторые вспомогательные углы (фиг. 268).

388

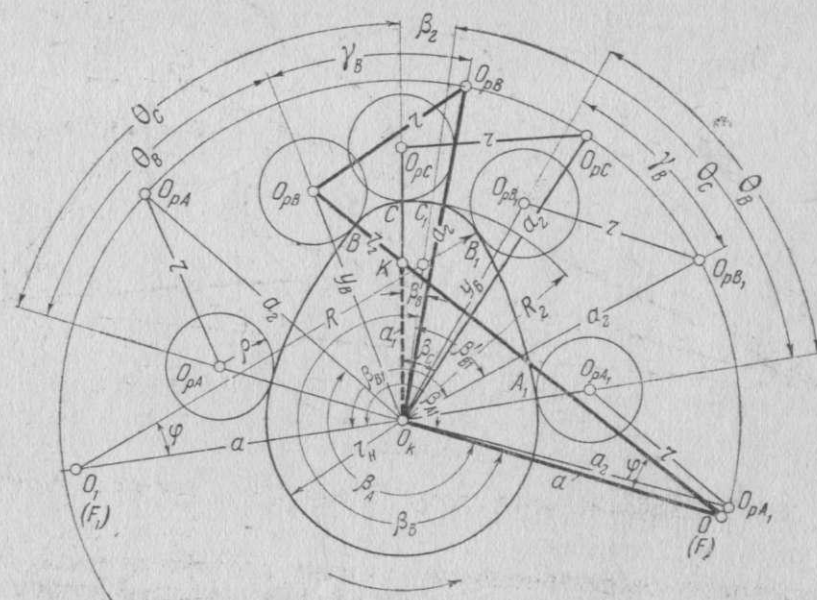
$$\cos \varphi = \frac{(R-r_r)^2 + (R-r_n)^2 - (R_r-r_r)^2}{2(R-r_n)(R-r_r)} = 1 - \frac{(R_r-r_n)(R_r+r_n-2r_r)}{2a(R-r_r)}. \quad (168)$$
$$\cos \gamma_B = \frac{a_2 + y_B^2 - r^2}{2y_B a_2}, \quad (169)$$
$$v_B^2 = (R + \rho)^2 + a_2^2 - 2a_2(R + \rho) \cos \varphi. \quad (170)$$
$$\sin \Theta_B = \frac{R + \rho}{y_B} \sin \varphi. \quad (171)$$
$$\sin \Theta_c = \frac{R - r_r}{a_1} \sin \varphi. \quad (172)$$

а) Угол  $\beta = \beta_A$ , соответствующий началу движения ролика по дуге  $AB$ , определяется из треугольника  $O_K O_{PA} O_{PA}$

$$\cos(\beta_A - 180^\circ) = \frac{(r_H + \rho)^2 + a_2^2 - r^2}{2(r_H + \rho)a_2}. \quad (173)$$

б) Угол  $\beta = \beta_B$ , соответствующий концу движения ролика по дуге  $AB$ , равен

$$\beta_B = 180^\circ + \theta_B + \gamma_B. \quad (174)$$



Фиг. 268. К определению предельных углов выпуклого кулачка, ведущего рычаг с роликом.



в) Угол  $\beta = \beta'_B$ , соответствующий началу движения ролика по дуге  $BC$  равен

$$\beta'_B = \theta_B + \gamma_B - \theta_C. \quad (175)$$

г) Угол  $\beta = \beta_C$ , соответствующий концу движения ролика по дуге  $BC$  и началу движения по дуге  $C_1B_1$ , определяем из треугольника  $O_K O_C O_{P_1}$

$$\cos \beta_C = \frac{(R + \rho)^2 + a_2^2 - r^2}{2(R + \rho)a_2}. \quad (176)$$

д) Угол  $\beta = \beta'_{B_1}$ , соответствующий концу движения ролика по дуге  $C_1B_1$ , равен

$$\beta'_{B_1} = \theta_C - \theta_B + \gamma_B. \quad (177)$$

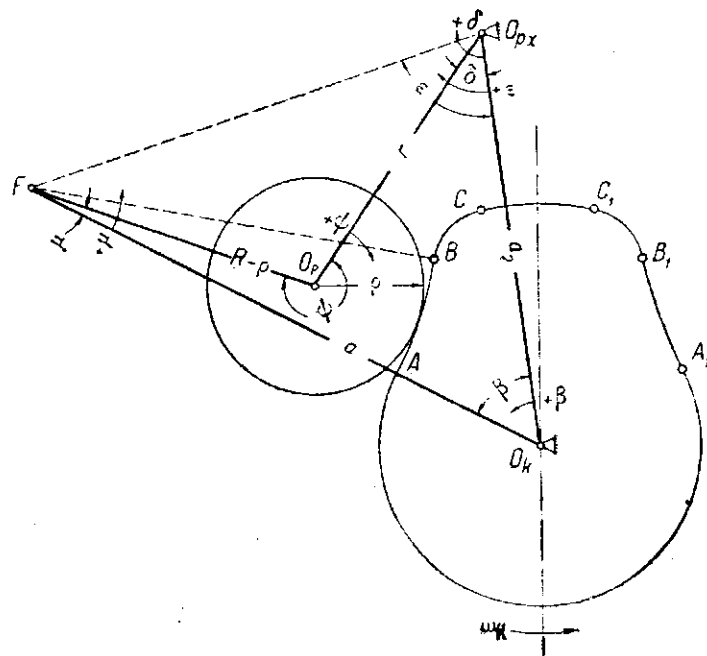
е) Угол  $\beta = \beta_{B_1}$ , соответствующий началу движения ролика по дуге  $B_1A_1$ , равен

$$\beta_{B_1} = 180^\circ - (\theta_B - \gamma_B). \quad (178)$$

ж) Угол  $\beta = \beta_{A_1}$ , соответствующий концу движения ролика по дуге  $B_1A_1$ , будет тем же, что и для начала движения по дуге  $AB$ , т. е.

$$\beta_{A_1} = \beta_A. \quad (179)$$

Вогнутый кулачок. Заменяем систему кулачок — рычаг эквивалентной схемой четырехзвенного механизма (фиг. 269).



Фиг. 269. Движение ролика рычага по дуге  $AB$  вогнутого кулачка.

шается по законам аналогичных участков выпуклого кулачка.

На определении предельных углов рассматриваемого случая останавливаться не будем; определение их ведется аналогично определению для случая выпуклого кулачка.

Относительная скорость скольжения профиля рычага по кулачку (в том случае, когда вместо ролика рычаг имеет соприкасающийся с кулачком профиль, очерченный дугой окружности) определяется согласно уравнению (167).

Тангенциальный кулачок. При движении ролика рычага (фиг. 270) по касательной  $AB$  рассматриваем механизм как механизм вращающейся кулисы.

Угловое перемещение рычага  $\delta$  определяется из треугольника  $O_K O_{P_1} P$ , в котором  $PO_K \parallel O_K O$ . Имеем

$$\delta = 180 - (\beta + \psi). \quad (180)$$

Угол  $\psi$  находим, проектируя четырехугольник  $O_K O O_{P_1} P$  на его сторону  $O_K O$

$$\cos \psi = \frac{(r_n + \rho) - a_2 \cos \beta}{r}. \quad (181)$$

Угловую скорость рычага находим, дифференцируя по  $t$  уравнение (180)

$$\frac{d\delta}{dt} = -\left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\right). \quad (182)$$

Величину  $\frac{d\psi}{dt}$  находим, дифференцируя по  $t$  уравнение (181)

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{a_2 \sin \beta}{r \sin \psi} \frac{d\beta}{dt} = -\frac{a_2 \sin \beta}{r \sin \psi} \omega_k. \quad (183)$$

Подставляя это выражение для  $\frac{d\psi}{dt}$  в уравнение (182), получим

$$\frac{d\delta}{dt} = \left(\frac{a_2 \sin \beta}{r \sin \psi} - 1\right) \omega_k. \quad (184)$$

Угловое ускорение рычага находим, дифференцируя по  $t$  уравнение (184)

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{a_2}{r} \frac{1}{\sin^2 \psi} \left[ \cos \beta \frac{d\beta}{dt} \sin \psi - \sin \beta \cos \psi \frac{d\psi}{dt} \right] \omega_k. \quad (185)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d\delta}{d\beta} = \frac{a_2 \sin \beta}{r \sin \psi} - 1 \quad (186)$$

и имея в виду уравнение (183), получим

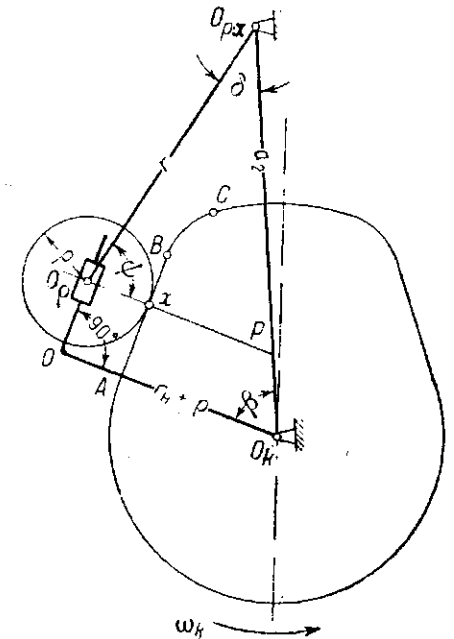
$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dt^2} &= \frac{a_2}{r} \frac{1}{\sin^2 \psi} \left( \cos \beta \sin \psi + \frac{a_2 \sin^2 \beta}{r} \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \right) \omega_k^2 = \\ &= \frac{a_2}{r} \frac{1}{\sin^2 \psi} \left( \cos \beta \sin \psi + \sin \beta \cos \psi + \sin \beta \cos \psi \frac{d\delta}{d\beta} \right) \omega_k^2 = \\ &= \frac{a_2}{r \sin^2 \psi} \left[ \sin \delta + \sin \beta \cos \psi \frac{d\delta}{d\beta} \right] \omega_k^2. \end{aligned} \quad (187)$$

Когда вместо ролика рычаг профилирован цилиндрической поверхностью, то скорость  $v_{c.k.}$  скольжения этой поверхности по профилю кулачка можно определить, зная положение полюса  $P$  относительно движения рычага и кулачка (фиг. 270). Имеем

$$v_{c.k.} = \bar{xP} \left( \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\delta}{dt} \right). \quad (188)$$

Так как из треугольника  $PO_K O_{P_1}$  получаем

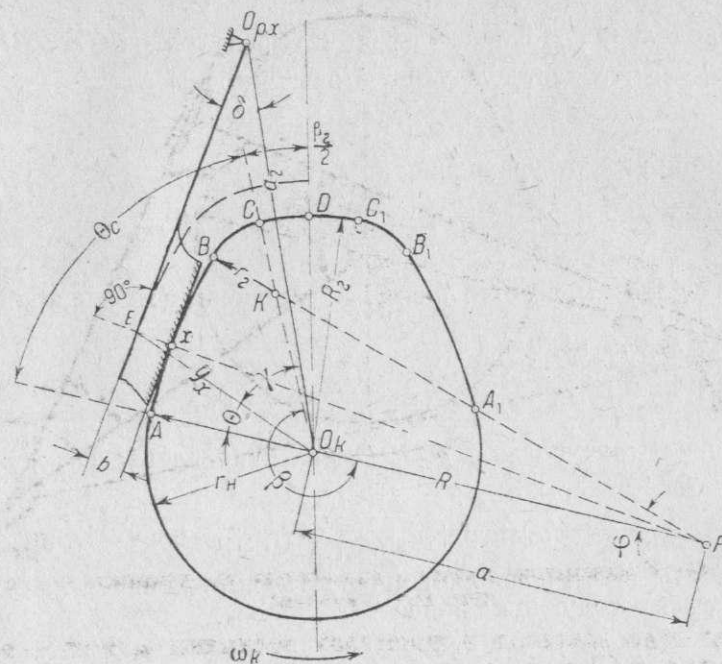
$$\bar{xP} = \bar{O_K P} - \rho = r \frac{\sin \delta}{\sin \beta} - \rho, \quad (189)$$



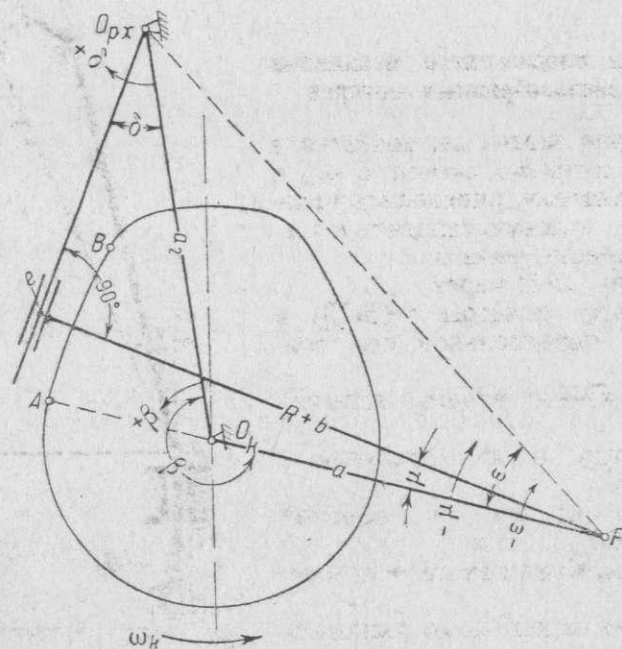
Фиг. 270. Движение ролика рычага по прямолинейному участку тангенциального кулачка.





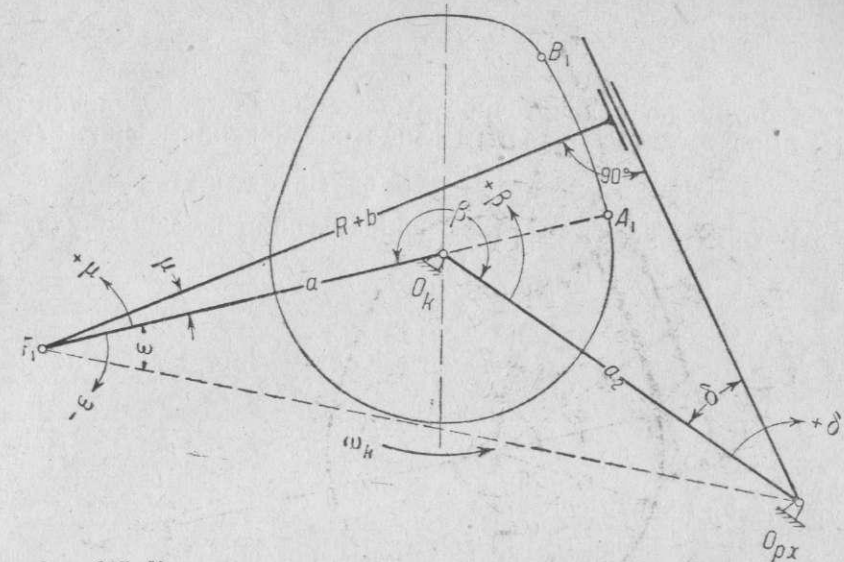


Фиг. 273. Движение плоскости рычага по дуге АВ кулачка.



Фиг. 274. К кинематике рычага с плоскостью при движении его по дуге АВ кулачка.

Уравнения, выведенные для участков профиля кулачка  $BC$  и  $C_1B_1$  применимы и для участков профиля кулачка  $AB$  и  $B_1A_1$  (фиг. 273—275).



Фиг. 275. К кинематике рычага с плоскостью при движении его по дуге  $B_1A_1$  кулачка.

В этом случае надо заменить в формулах величины  $a_1$  и  $(r + b)$  соответственно через  $a$  и  $(R + b)$  и брать углы так, как показано на этих фигурах.

Останавливаться на определении для рассматриваемого случая предельных углов не будем.

## § 9. Кинематика плоскостного механизма распределения звездообразных моторов

В данном случае задача заключается в том, чтобы, зная путь  $h_{т.х}$ , скорость  $v_{т.х}$  и ускорение  $j_{т.х}$  толкателя, определить угловое перемещение, угловую скорость и тангенциальное ускорение рычага.

Обозначим (фиг. 276) через

$\gamma_t$  — угол между рычагом  $r$  ( $BO_p$ ) и осью  $xx$ , параллельной оси толкателя,

$\gamma_{t0}$  — то же в момент начала открытия клапана,

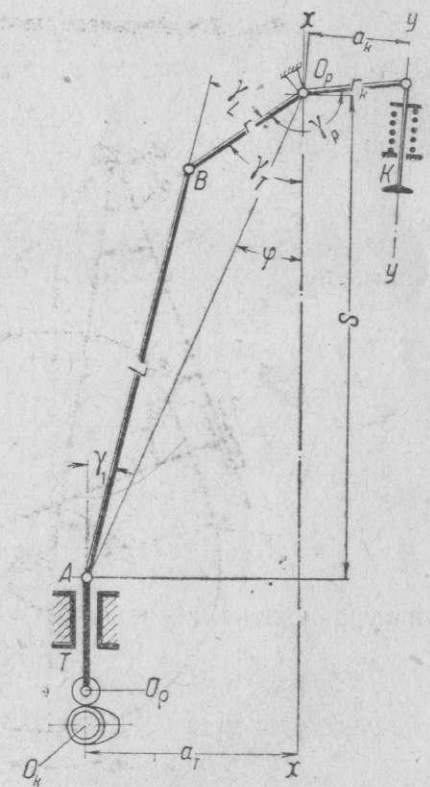
$\gamma_1$  — угол между осью толкателя и осью тяги,

$S$  — проекцию на ось  $xx$  ломаной линии  $ABO_p$ ,

$S_0$  — то же в момент начала открытия клапана,

$a_t$  — расстояние между осью толкателя и осью  $xx$ .

Угловое перемещение рычага  $\gamma_t$  находим из треугольника  $ABO_p$



Фиг. 276. Схема клапанного механизма звездообразного мотора.

$$\cos(\gamma_t - \varphi) = \frac{r^2 - L^2 + \overline{O_p A^2}}{2r O_p A} = \frac{r^2 - L^2 + \frac{S^2}{\cos^2 \varphi}}{2r S} \cos \varphi, \quad (204)$$



где согласно вышепринятым обозначениям

$$S = S_0 - h_{\tau x} \quad (205)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{\tau}}{S}. \quad (206)$$

Более простое, но менее точное выражение для определения  $\gamma_{\tau}$  можно получить, имея согласно принятым выше обозначениям (фиг. 276)

$$h_{\tau x} = S_0 - S = S_0 - (L \cos \gamma_{11} + r \cos \gamma_{\tau}). \quad (207)$$

Проектируя ломаную  $ABO_p$  на направление, перпендикулярное оси толкателя, имеем

$$r \sin \gamma_{\tau} + L \sin \gamma_{11} = a_{\tau}, \quad (208)$$

откуда

$$\sin \gamma_{11} = \frac{a_{\tau}}{L} - \frac{r}{L} \sin \gamma_{\tau} = \lambda_{\tau} - \lambda \sin \gamma_{\tau}, \quad (209)$$

где

$$\frac{a_{\tau}}{L} = \lambda_{\tau} \quad \text{и} \quad \frac{r}{L} = \lambda. \quad (210)$$

Из уравнения (209) получаем

$$\cos \gamma_{11} = \sqrt{1 - (\lambda_{\tau} - \lambda \sin \gamma_{\tau})^2}. \quad (211)$$

Раскладывая выражение  $\sqrt{1 - (\lambda_{\tau} - \lambda \sin \gamma_{\tau})^2}$  в ряд по биному Ньютона и ограничиваясь вторым членом разложения, получаем

$$\cos \gamma_{11} = 1 - \frac{1}{2} (\lambda_{\tau} - \lambda \sin \gamma_{\tau})^2 = 1 - \frac{\lambda_{\tau}^2}{2} + \lambda \lambda_{\tau} \sin \gamma_{\tau} - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \gamma_{\tau}. \quad (212)$$

Аналогично для  $\sin \gamma_{\tau} = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_{\tau}}$  получаем, ограничиваясь двумя первыми членами ряда:

$$\sin \gamma_{\tau} = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_{\tau}} = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \gamma_{\tau}. \quad (213)$$

Подставляя  $\cos \gamma_{11}$  из уравнения (212) в уравнение (207) и принимая во внимание уравнение (213) и обозначения (210), получим

$$\begin{aligned} h_{\tau x} &= S_0 - r \left[ \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{\lambda_{\tau}^2}{2} + \lambda \lambda_{\tau} - \frac{\lambda \lambda_{\tau}}{2} \cos^2 \gamma_{\tau} - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \gamma_{\tau} \right) + \cos \gamma_{\tau} \right] = \\ &= S_0 - r \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda_{\tau}^2}{2\lambda} + \lambda_{\tau} - \frac{\lambda}{2} - \left( \frac{\lambda_{\tau}}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) \cos^2 \gamma_{\tau} + \cos \gamma_{\tau} \right]. \end{aligned} \quad (214)$$

Обозначая

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda_{\tau}^2}{2\lambda} + \lambda_{\tau} - \frac{\lambda}{2} = A \quad \text{и} \quad Z = \frac{A - \frac{S_0 - h_{\tau x}}{r}}{\frac{1}{2} (\lambda_{\tau} - \lambda)},$$

из уравнения (214) получим

$$\cos^2 \gamma_{\tau} - \frac{2}{\lambda_{\tau} - \lambda} \cos \gamma_{\tau} - Z = 0. \quad (214')$$

Решая уравнение (214') относительно  $\cos \gamma_{\tau}$ , получим

$$\cos \gamma_{\tau} = \frac{1}{\lambda_{\tau} - \lambda} \left[ 1 - \sqrt{1 + Z (\lambda_{\tau} - \lambda)^2} \right]. \quad (215)$$

Перед корнем берем знак  $-$ , так как при знаке  $+$  получается  $\cos \gamma_{\tau} > 1$ , что не имеет смысла.

В случае, когда величины  $a_{\tau}$  и  $r$  мало отличаются друг от друга, можно с достаточной точностью принять  $(\lambda_{\tau} - \lambda) = 0$ . Тогда из уравнения (214)

имеем

$$\cos \gamma_{\tau} = \frac{S_0 - h_{\tau x}}{r} = A. \quad (216)$$

Дифференцируя по  $t$  уравнение (208), получаем

$$\frac{d\gamma_{11}}{dt} = -\lambda \frac{\cos \gamma_{\tau}}{\cos \gamma_{11}} \frac{d\gamma_{\tau}}{dt}. \quad (217)$$

Дифференцируя по  $t$  уравнение (207) и принимая во внимание уравнение (217), получаем

$$\frac{dh_{\tau x}}{dt} = v_{\tau x} = r \sin \gamma_{\tau} \frac{d\gamma_{\tau}}{dt} - r \sin \gamma_{11} \frac{\cos \gamma_{\tau}}{\cos \gamma_{11}} \frac{d\gamma_{\tau}}{dt} = r \frac{\sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})}{\cos \gamma_{11}} \frac{d\gamma_{\tau}}{dt}. \quad (218)$$

Отсюда получаем следующее точное выражение для угловой скорости рычага:

$$\frac{d\gamma_{\tau}}{dt} = \frac{v_{\tau x}}{r} \frac{\cos \gamma_{11}}{\sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})}. \quad (219)$$

Дифференцируя уравнение (219) по  $t$  и принимая во внимание уравнение (217), получаем следующее выражение для углового ускорения рычага:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \gamma_{\tau}}{dt^2} &= \frac{1}{r \sin^2 (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})} \left[ j_{\tau x} \cos \gamma_{11} \sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) - v_{\tau x} \sin \gamma_{11} \sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) \frac{d\gamma_{11}}{dt} - \right. \\ &\quad \left. - v_{\tau x} \cos \gamma_{11} \cos (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) \left( \frac{d\gamma_{\tau}}{dt} - \frac{d\gamma_{11}}{dt} \right) \right] = \frac{1}{r \sin^2 (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})} \left\{ j_{\tau x} \cos \gamma_{11} \sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) - \right. \\ &\quad \left. - v_{\tau x} \frac{d\gamma_{\tau}}{dt} \left[ -\sin \gamma_{11} \sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) \lambda \frac{\cos \gamma_{\tau}}{\cos \gamma_{11}} + \cos \gamma_{11} \cos (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \gamma_{11} \cos (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) \lambda \frac{\cos \gamma_{\tau}}{\cos \gamma_{11}} \right] \right\} = \frac{1}{r \sin^2 (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})} \left\{ j_{\tau x} \cos \gamma_{11} \sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) - \right. \\ &\quad \left. - v_{\tau x} \frac{d\gamma_{\tau}}{dt} \left[ \left( \cos \gamma_{11} \cos (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) - \sin \gamma_{11} \sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) \right) \lambda \frac{\cos \gamma_{\tau}}{\cos \gamma_{11}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \gamma_{11} \cos (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{r \sin^2 (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})} \left\{ j_{\tau x} \cos \gamma_{11} \sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) - \left( \frac{d\gamma_{\tau}}{dt} \right)^2 \frac{r \sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})}{\cos \gamma_{11}} \left[ \cos \gamma_{\tau} \lambda \frac{\cos \gamma_{\tau}}{\cos \gamma_{11}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \gamma_{11} \cos (\gamma_{\tau} - \gamma_{11}) \right] \right\} = \\ &= \left\{ \frac{j_{\tau x}}{r} - \left( \frac{d\gamma_{\tau}}{dt} \right)^2 \left[ \frac{\cos (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})}{\cos \gamma_{11}} + \lambda \frac{\cos^2 \gamma_{\tau}}{\cos^3 \gamma_{11}} \right] \right\} \frac{\cos \gamma_{11}}{\sin (\gamma_{\tau} - \gamma_{11})}. \end{aligned} \quad (220)$$

## § 10. Кинематика клапана, приводимого в движение рычагом

Обозначим (фиг. 277) через

$$\gamma_{p0}, \quad \frac{d\gamma_p}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 \gamma_p}{dt^2}$$

угловые перемещение, скорость и ускорение рычага, которые считаем заданными,

$\gamma_{p0}$  — угол  $\gamma_p$  в момент начала движения клапана,

$r_k$  — плечо рычага со стороны клапана, равное расстоянию от оси вращения рычага до центра шаровой поверхности ударника.

Согласно фиг. 277 путь клапана будет равен

$$h_{kx} = r_k (\cos \gamma_{p0} - \cos \gamma_p). \quad (221)$$



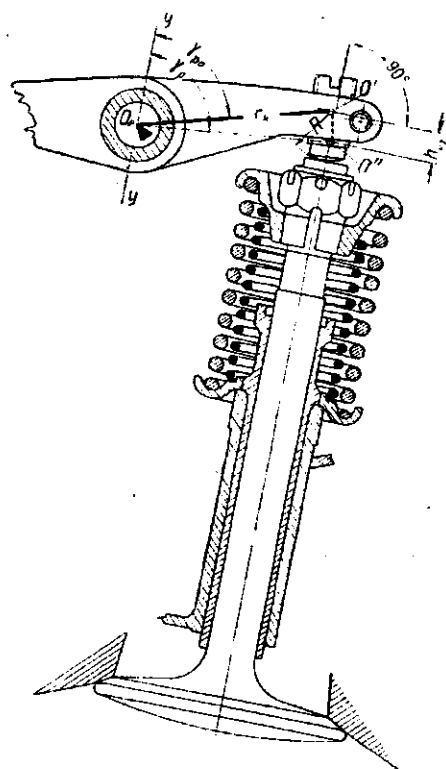
Дифференцируя уравнение (221) по  $t$ , получаем для скорости клапана следующее выражение:

$$v_{kx} = \frac{dh_{kx}}{dt} = r_k \sin \gamma_p \frac{d\gamma_p}{dt} \quad (222)$$

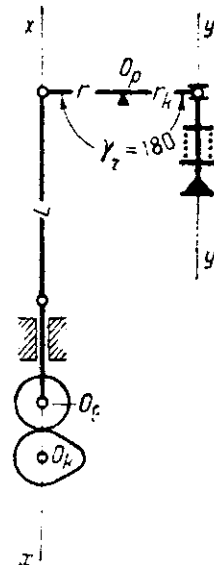
Аналогично для ускорения клапана получим выражение

$$j_{kx} = \frac{dv_{kx}}{dt} = r_k \left[ \sin \gamma_p \frac{d^2 \gamma_p}{dt^2} + \cos \gamma_p \left( \frac{d\gamma_p}{dt} \right)^2 \right] \quad (223)$$

В некоторых практически встречающихся случаях угол между осями  $xx$  и  $yy$  (фиг. 278) является малым острым углом, который при расчетах с достаточной практически точностью можно принять равным нулю. В этом случае формулы для определения закона движения клапана значительно упрощаются и будут иметь следующий вид:



Фиг. 277. Схема передачи движения клапану рычагом.



Фиг. 278. Упрощенная схема клапанного механизма звездообразного мотора.

а) для пути клапана

$$h_{kx} = \frac{r_k}{r} h_{Tx} \quad (224)$$

б) для скорости клапана

$$v_{kx} = \frac{r_k}{r} v_{Tx} \quad (225)$$

в) для ускорения клапана

$$j_{kx} = \frac{r_k}{r} j_{Tx} \quad (226)$$

г) для угловой скорости рычага

$$\frac{d\gamma_T}{dt} = \frac{v_{Tx}}{r} \quad (227)$$

$$\frac{d^2 \gamma_T}{dt^2} = \frac{j_{Tx}}{r} \quad (228)$$

## Глава II

### ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

#### § 1. Силы, действующие в клапанном механизме

Силами, действующими в клапанном механизме, являются:

- 1) силы давления газов на клапан,
- 2) силы инерции,
- 3) силы пружин,
- 4) силы трения и
- 5) веса деталей клапанного механизма.

Последними двумя видами сил обычно пренебрегают вследствие их незначительности.

В момент начала движения клапана все эти силы нагружают клапанный механизм. При дальнейшем движении клапана, когда давления газов на тарелку со стороны цилиндра и со стороны горловины клапана уравновесятся, клапанный механизм нагружают лишь силы инерции движущихся частей механизма и силы пружин.

Закон изменения силы давления газов на клапан во время их протекания через горловину является очень сложным, и надежных математических формулировок для него не имеется.

Для начального момента открытия выхлопного клапана результирующая сила давления газов на клапан равна (фиг. 279)

$$P_r = p_r f_n + p_0 f_r = \frac{\pi}{4} [p_r (d_r')^2 - p_0 d_r^2] \quad (1)$$

где  $d_r'$  и  $d_r$  — диаметры конуса горловины,

$f_n$  — площадь тарелки клапана со стороны цилиндра в  $\text{см}^2$ ,

$f_r$  — площадь тарелки клапана со стороны горловины в  $\text{см}^2$ ,

$p_r$  — давление на клапан со стороны цилиндра в  $\text{кг/см}^2$ ,

$p_0$  — давление на клапан со стороны горловины в  $\text{кг/см}^2$ .

Так как закон дальнейшего изменения неизвестен, принимаем, что давления на клапан выравниваются в н. м. т. поршня и что эти давления в интервале от начала открытия клапана до момента, соответствующего н. м. т. поршня, изменяются линейно в зависимости от угла поворота коленчатого вала.

Силу давления газов на клапан на этом участке можно подсчитывать по той же формуле (1).

Силы инерции поступательно двигающихся деталей клапанного механизма находим по обычной формуле

$$P_j = -mj, \quad (2)$$

где  $m$  — масса поступательно двигающейся детали, а  $j$  — ее ускорение. Момент сил инерции рычага относительно его оси качания будет

$$M_j = -I \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \quad (3)$$

где  $I$  — момент инерции массы рычага относительно оси качания и  $\frac{d^2 \gamma}{dt^2}$  — угловое ускорение рычага.

При определении сил инерции пружины принимаем, что перемещения витков пружины пропорциональны их расстоянию  $x$  от неподвижного конца пружины.

Ускорение элемента пружины будет

$$j_x = \frac{d^2 h_x}{dt^2} = \frac{d^2 \left( h \frac{x}{l} \right)}{dt^2} = \frac{x}{l} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{x}{l} j, \quad (4)$$

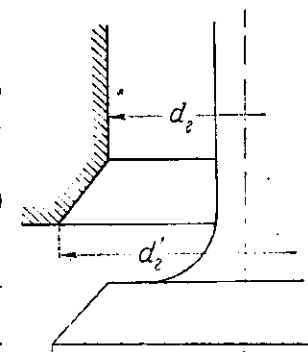
где  $l$  — длина пружины,

$h$  — путь крайнего подвижного витка пружины и

$j$  — ускорение этого витка.

Так как элементарная масса пружины равна

$$dm_{np} = \frac{m_{np}}{l} dx, \quad (5)$$

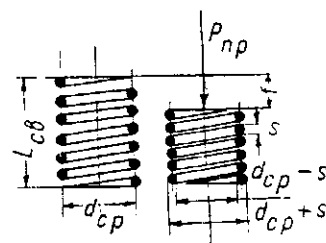


Фиг. 279. К определению силы, действующей на клапан.

где  $m_{пр}$  масса всей пружины, то суммарная сила инерции пружины равна

$$P_{j пр} = \int_0^l \frac{x}{l} j \frac{m_{пр}}{l} dx = \frac{m_{пр}}{2} j. \quad (6)$$

На основании этой зависимости можно при определении сил инерции клапанного механизма заменить массу пружины фиктивной массой, равной половине массы пружины, движущейся по закону движения крайнего подвижного витка пружины, т. е. по закону движения клапана, толкателя или тяги в зависимости от того, с чем соединен крайний подвижный виток пружины.

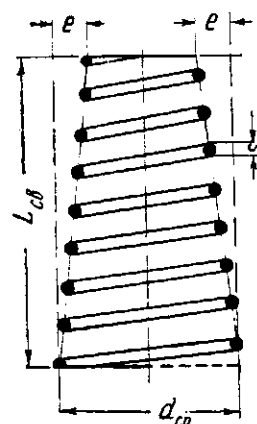


Фиг. 280. К расчету цилиндрической пружины.

$$P_{пр} = \frac{Gs^4}{8id_{ср}^3} f, \quad (7)$$

где  $s$  — диаметр проволоки пружины в см,  
 $d_{ср}$  — средний диаметр витков пружины в см,  
 $i$  — число рабочих витков пружины, которое обычно берется на 2—3 витка меньше числа действительных витков,  
 $G$  — модуль упругости второго рода материала пружины, обычно принимаемый равным 825 000 кг/см<sup>2</sup>,  
 $f$  — соответствующий силе  $P_{пр}$  прогиб пружины в см.  
 Для конической пружины (фиг. 281) имеем

$$P_{пр} = \frac{Gs^4}{8i} \frac{d_{ср}^3 - 3d_{ср}^2 e + 4d_{ср} e^2 - 2e^3}{e^3}. \quad (8)$$



Фиг. 281. К расчету конической пружины.

где  $2e$  — разница между максимальным и минимальным средними диаметрами пружины.

В случае совместной работы нескольких пружин заменяем пружины одной эквивалентной пружиной. Это делается следующим образом.

Обозначим (фиг. 282) жесткости пружин через  $b_1, b_2, \dots$ , причем

$$b_1 = \frac{P_{пр1}}{f_1}; \quad b_2 = \frac{P_{пр2}}{f_2}, \dots, b_k = \frac{P_{прk}}{f_k}, \quad (9)$$

где  $P_{прk}$  сила  $k$ -й пружины, а  $f_k$  — соответствующая деформация.

Суммарная сила пружин будет

$$\sum P_{пр} = P_{пр1} + P_{пр2} + \dots + P_{прk}. \quad (10)$$

Если деформация пружин будет меньше на величину  $x$ , то суммарная сила пружин будет

$$\sum P_{прx} = b_1(f_1 - x) + b_2(f_2 - x) + \dots + b_k(f_k - x) \quad (11)$$

или, принимая во внимание уравнение (9),

$$\sum P_{прx} = P_{пр1} + P_{пр2} + \dots + P_{прk} - x(b_1 + b_2 + \dots + b_k) = \sum P_{пр} - x(b_1 + b_2 + \dots + b_k). \quad (12)$$

Отсюда жесткость эквивалентной пружины равна

$$b = \frac{\sum P_{пр} - \sum P_{прx}}{x} = b_1 + b_2 + \dots + b_k. \quad (13)$$

Таким образом жесткость эквивалентной пружины равна сумме жесткостей составляющих пружин.

Деформация эквивалентной пружины, соответствующая нагрузке  $\sum P_{пр}$ , равна

$$f = \frac{\sum P_{пр}}{b}. \quad (14)$$

## § 2. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через траверсу или толкатель

Обозначим (фиг. 283) через

$P_{кг}$  — силу давления газов на клапан;

$m_k$  — массу комплекта клапана, включая половину массы пружин;

$m_t$  — массу траверсы или толкателя;

$\sum P_{пр}$  — суммарную силу пружин одного клапана;

$\psi$  — угол между осью траверсы и нормалью к профилю кулачка в точке соприкосновения его с дугой траверсы;

$\omega_k$  — угловую скорость вращения кулачка;

$j_{kx} = j_{tx}$  — ускорение клапана (равно ускорению траверсы или толкателя);

$v_{kx} = v_{tx}$  — скорость клапана (равна скорости траверсы или толкателя);

$c$  — плечо силы давления кулачка на траверсу относительно оси кулачка;

$P_{jk} = -m_k j_{kx}$  — силу инерции клапана;

$P_{jt} = -m_t j_{tx}$  — силу инерции траверсы.

Силу  $P_k$ , действующую на траверсу со стороны клапана, находим из равенства сил

$$\bar{P}_k = \bar{P}_{кг} + \sum \bar{P}_{пр} + \bar{P}_{jk}.$$

Отсюда, принимая во внимание направление сил и их знаки, получим

$$P_k = P_{кг} + \sum P_{пр} - P_{jk}. \quad (15)$$

Результирующая сил  $P_k$  и  $P_{jt}$  равна (фиг. 283)

$$2\bar{P}_k + P_{jt} = -\bar{S}_2,$$

где  $\bar{S}_2$  — слагающая в направлении оси траверсы силы  $S$  — давления кулачка на траверсу.

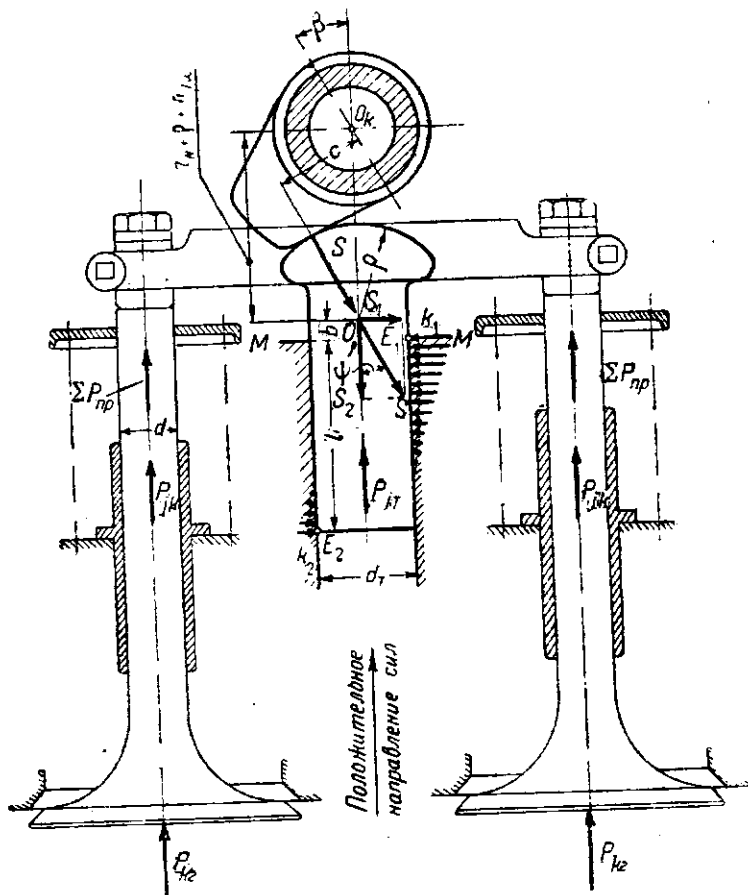
Принимая во внимание направление сил и их знаки, получим

$$S_2 = -2P_k + P_{jt} = -2P_{кг} - 2\sum P_{пр} + 2P_{jk} + P_{jt}. \quad (16)$$



Обозначив через  $S_1$  слагающую в направлении, перпендикулярном оси траверсы силы  $S$ , получаем (фиг. 283)

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{S_2}{\cos \psi} \\ S_1 &= S_2 \operatorname{tg} \psi. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



Фиг. 283. Силы, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через траверсу.

Крутящий момент на кулачковом валу от траверсы находим из равенства работ

$$M_{кр\omega_k} = S_2 v_{tx}.$$

Отсюда

$$M_{кр} = \frac{v_{tx}}{\omega_k} S_2. \quad (18)$$

При определении сил, действующих на направляющую толкателя, принимаем, что эти силы распределяются по закону треугольника (фиг. 284). Обозначая через  $k_1$  и  $k_2$  удельные силы по концам направляющей, будем иметь:

$$l_1 + l_2 = l \quad \text{и} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2}. \quad (19)$$

Так как момент действующих на траверсу сил, взятый относительно центра  $O$ , дуги траверсы, равен

нулю, то имеет место зависимость

$$\frac{k_1 l_1}{2} \left( b + \frac{l_1}{3} \right) = \frac{k_2 l_2}{2} \left( b + l - \frac{l_2}{3} \right).$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (19), получим

$$l_1 = \frac{l}{3} \frac{3b+2l}{2b+l} \quad \text{и} \quad l_2 = \frac{l}{3} \frac{3b+l}{2b+l}. \quad (20)$$

Равенство нулю суммы проекций всех действующих на траверсу сил на направление, перпендикулярное ее оси, дает зависимость

$$S_1 = \frac{1}{2} k_1 l_1 - \frac{1}{2} k_2 l_2$$

или, принимая во внимание равенства (19) и (20),

$$S_1 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{l_1} (l_1^2 - l_2^2) = \frac{1}{2} \frac{k_1}{l_1} l (l_1 - l_2) = \frac{1}{2} \frac{k_1 l^2}{3b+2l}.$$

Отсюда

$$k_1 = \frac{2S_1}{l^2} (2l+3b) \quad (21)$$

$$k_2 = \frac{2S_1}{l^2} (l+3b). \quad (22)$$

Обозначая  $l$  и  $b$  в начальный момент движения траверсы через  $l_0$  и  $b_0$  и путь траверсы через  $h_{tx}$ , имеем для направляющей, изображенной на фиг. 283,  $l = l_0 + h_{tx}$  и  $b = b_0 - h_{tx}$ . Отсюда, согласно уравнениям (21) и (22), получаем

$$k_1 = \frac{2S_1}{(l_0 + h_{tx})^2} (2l_0 + 3b_0 - h_{tx}) \quad (23)$$

$$k_2 = \frac{2S_1}{(l_0 + h_{tx})^2} (l_0 + 3b_0 - 2h_{tx}). \quad (24)$$

§ 3. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при непосредственной передаче движения от кулачка к клапану с плоской тарелкой

Оставляя те же обозначения, что и в предыдущем параграфе, находим из фиг. 285

$$S = S_2 = -P_k. \quad (25)$$

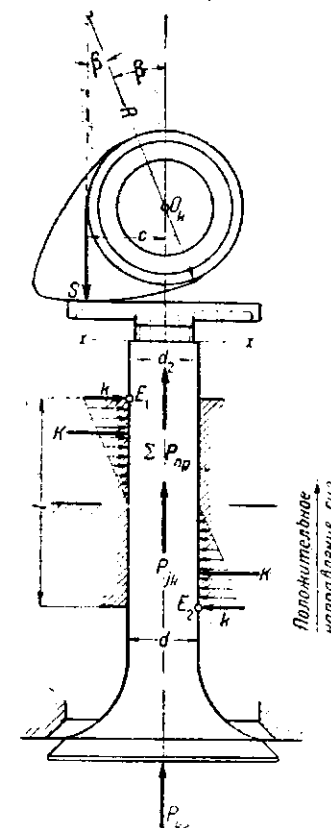
Силу  $P_k$  определяем из уравнения (15).

Крутящий момент на кулачковом валу от клапана определяем из уравнения (18).

Максимальную удельную силу давления  $k$  на направляющие клапана находим из уравнения моментов сил относительно любой точки оси клапана, принимая распределение сил по образующей направляющих клапана по треугольнику. Имеем

$$Sc - M_{кр} = \frac{l}{4} k \frac{2}{3} l \quad (26)$$

$$k = \frac{6M_{кр}}{l^2}. \quad (27)$$



Фиг. 285. Силы, действующие в клапанном механизме при непосредственной передаче движения от кулачка к клапану с тарелкой.

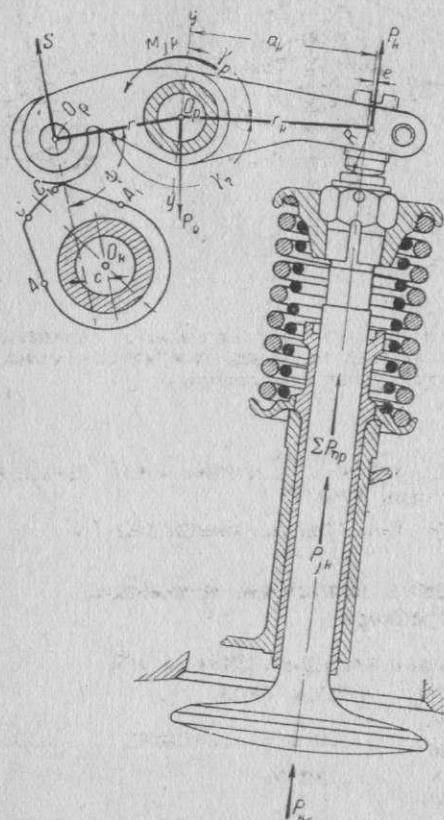
Фиг. 284. Распределение удельных сил по поверхности направляющей толкателя.

#### § 4. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через рычаг с роликом

Обозначим (фиг. 286) через

$I_p$  — момент инерции массы рычага относительно оси вращения рычага,

$M_{jp} = -I_p \frac{d^2\delta}{dt^2}$  — момент сил инерции рычага относительно той же оси.



Фиг. 286. Силы, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через рычаг с роликом.

Момент на кулачковом валу находим из равенства работ

$$M_{kr} \omega_k = -M_{jp} \frac{d\delta}{dt} + P_k v_{kx},$$

отсюда

$$M_{kr} = \frac{1}{\omega_k} \left( P_k v_{kx} - M_{jp} \frac{d\delta}{dt} \right). \quad (31)$$

#### § 5. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через рычаг с плоскостью

Пользуясь (фиг. 287) обозначениями, приведенными в предыдущих параграфах, из уравнения равенства нулю моментов относительно оси  $O_p$  сил, действующих на рычаг, определяем силу, действующую на кулачок

$$\bar{S} \bar{O}_p e + \bar{P}_k r_k \sin \gamma_p + \bar{M}_{jp} = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание направление сил и моментов и их знаки, имеем:

Остальные обозначения оставляем те же, что указаны в § 2.

Силу  $P_k$ , действующую на рычаг со стороны кулачка, находим из уравнения (15).

Силу, действующую на рычаг со стороны кулачка, находим из уравнения моментов относительно оси  $O_p$  сил, действующих на рычаг. Имеем

$$\bar{S} r \sin \psi + \bar{P}_k r_k \sin \gamma_p + \bar{M}_{jp} = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание направление сил и моментов, а также их знаки, получаем

$$S = P_k \frac{r_k \sin \gamma_p}{r \sin \psi} - M_{jp} \frac{1}{r \sin \psi}. \quad (28)$$

При расчете клапанных пружин надо знать приведенную к клапану силу инерции клапанного механизма. Эта сила равна

$${}_k P_{jk} = P_{jk} + M_{jp} \frac{1}{r_k \sin \gamma_p}. \quad (29)$$

Силу давления  $P_0$  на ось рычага для случая, когда силы  $P_k$  и  $S$  лежат в одной плоскости, находим, складывая эти силы по правилу параллелограмма

$$P_0^2 = S^2 + P_k^2 - 2SP_k \cos(\gamma_p + \gamma_r + \psi). \quad (30)$$

а) для участка  $BC$  и  $C_1 B_1$  (фиг. 273)

$$S = \frac{P_k r_k \sin \gamma_p - M_{jp}}{O_p e} = \frac{P_k r_k \sin \gamma_p - M_{jp}}{a_2 \cos \delta + a_1 \sin \mu} \quad (32)$$

и б) для участков  $AB$  и  $B_1 A_1$  (фиг. 274 и 275)

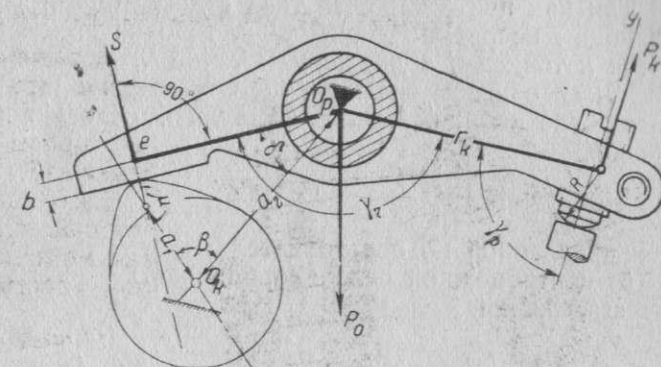
$$S = \frac{P_k r_k \sin \gamma_p - M_{jp}}{O_p e} = \frac{P_k r_k \sin \gamma_p - M_{jp}}{a_2 \cos \delta + a_1 \sin \mu}. \quad (33)$$

Силу, действующую на ось  $O_p$  рычага, для случая, когда силы  $P_k$  и  $S$  лежат в одной плоскости, находим так же, как и для рычага с роликом, а именно

$$P_0^2 = S^2 + P_k^2 - 2P_k S \sin(\gamma_r + \gamma_p). \quad (34)$$

Необходимую для расчета пружин приведенную к клапану силу инерции клапанного механизма находим из уравнения (29).

Крутящий момент на кулачковом валу находим из равенства (31).



Фиг. 287. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через рычаг с плоскостью.

#### § 6. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме звездообразного мотора

Обозначим (фиг. 288) через

$m_L$  — массу тяги,

$\frac{d\gamma_r}{dt}$  — угловую скорость рычага клапана,

$\frac{d^2\gamma_r}{dt^2}$  — угловое ускорение рычага клапана,

$P_{пр}$  — силу пружин тяги,

$\psi$  — угол между направлением силы давления ролика толкателя на кулачок  $S$  и осью толкателя,

$\gamma_1$  — угол между осями толкателя и тяги,

$\gamma_L$  — угол между осью тяги и осью плеча рычага  $r$ ,

$\gamma_r$  — угол между осью толкателя и осью плеча рычага  $r$ ,

$\gamma_r$  — угол между осями плеч рычага  $r$  и  $r_k$ ,

$\gamma_p$  — угол между осью клапана и осью плеча рычага  $r_k$ . Остальные обозначения оставляем те же, что указаны в § 2 и 4 этой главы.

Найдем силы инерции отдельных звеньев клапанного механизма.

1. Сила инерции толкателя равна

$$P_{jr} = -m_L j_{rx}. \quad (35)$$

Эта сила направлена по оси толкателя.

2. Силы инерции тяги находим следующим образом.



Фиг. 288. Силы, действующие в клапанном механизме звездообразного мотора.



На основании тех же соображений, что и при разноске массы шатуна на поступательно и вращательно движущиеся массы, заменяем массу тяги двумя массами: массой, отнесенной к точке *A* толкателя и движущейся по закону движения этой точки, и массой, отнесенной к точке *B* рычага и движущейся по закону движения этой точки.

Так как центр тяжести тяги с достаточной точностью можно принять лежащим посредине длины тяги, то одна половина всей массы тяги относится к точке *A*, а другая — к точке *B*.

Таким образом силы инерции тяги приводятся к:

а) силе инерции части массы тяги, отнесенной к точке *A* толкателя, равной

$$P'_{jL} = -\frac{m_L}{2} j_{\tau x} \quad (36)$$

и направленной по оси толкателя;

б) центробежной силе инерции части массы тяги, отнесенной к точке *B* рычага, равной

$$P''_{jLn} = -\frac{m_L}{2} \left( \frac{d\gamma_r}{dt} \right)^2 r \quad (37)$$

и направленной по плечу *r* рычага клапана, и

в) тангенциальной силе инерции части массы тяги, отнесенной к точке *B* рычага, равной

$$P''_{jLt} = -\frac{m_L}{2} \frac{d^2\gamma_r}{dt^2} r \quad (38)$$

и направленной перпендикулярно плечу рычага *r*.

3. Момент сил инерции рычага относительно оси его вращения *O<sub>p</sub>* равен

$$M_{jp} = -I_p \frac{d^2\gamma_r}{dt^2} \quad (39)$$

Центробежными силами инерции рычага ввиду их незначительной величины обычно пренебрегают.

4. Сила инерции массы *m<sub>k</sub>* комплекта клапана равна

$$P_{jk} = -m_k j_{kx} \quad (40)$$

и направлена по оси клапана.

Определим теперь результирующие силы и моменты, действующие в клапанном механизме.

Силу *P<sub>k</sub>*, действующую на рычаг со стороны клапана, находим из уравнения (15). Силу, действующую на рычаг со стороны тяги, находим из уравнения моментов относительно оси *O<sub>p</sub>* сил, действующих на рычаг

$$P_L = P_k \frac{r_k \sin \gamma_p}{r \sin \gamma_L} + M_{jp} \frac{1}{r \sin \gamma_L} \quad (41)$$

Сила, действующая в сочленении тяги с толкателем и направленная по оси тяги, равна

$$Q = P_L - P'_{jLt} \frac{1}{\sin \gamma_L} - P'_{jL} \frac{1}{\cos \gamma_L} \quad (42)$$

Сила, действующая по оси толкателя, равна

$$Q_2 = Q \cos \gamma_L \quad (43)$$

Сила, действующая перпендикулярно оси толкателя, равна

$$Q_1 = Q \sin \gamma_L \quad (44)$$

Слагающая силы *S* давления ролика на кулачок, действующая по оси толкателя, равна

$$S_2 = Q_2 - P_{j\tau} \quad (45)$$

Сила давления *S* равна

$$S = S_2 \frac{1}{\cos \psi} \quad (46)$$

Слагающая *S<sub>1</sub>* силы *S*, направленная перпендикулярно оси толкателя, будет

$$S_1 = S \sin \psi \quad (47)$$

Для случая, когда силы *P<sub>L</sub>* и *P<sub>k</sub>* лежат в одной плоскости, опорную реакцию, действующую на ось вращения рычага клапана, находим, складывая эти силы по правилу параллелограмма; имеем

$$P_0^2 = P_L^2 + P_k^2 - 2P_L P_k \cos (\gamma_r + \gamma_p - \gamma_L) \quad (48)$$

Крутящий момент на кулачковом валу находим согласно уравнению (18).

Приведенная к клапану результирующая сил инерции клапанного механизма и сил пружин на тяге равна

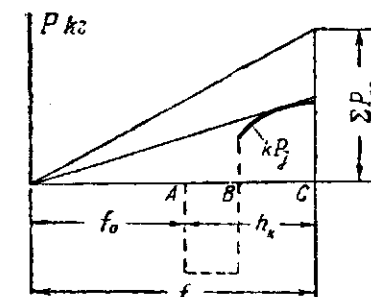
$${}_k P_j = \left\{ \left[ (P_{j\tau} + P'_{jL}) \frac{1}{\cos \gamma_L} - P'_{np} \right] r \sin \gamma_L + (P_{jLt} r + M_{jp}) \right\} \frac{1}{r_k \sin \gamma_p} + P_{jk} \quad (49)$$

В некоторых практически встречающихся случаях возможно бывает принять  $\gamma_L = 0$ ,  $\gamma_L = 90^\circ$  и  $\gamma_r = 180^\circ$ , что значительно упрощает определение сил, действующих в подобного рода клапанных механизмах.

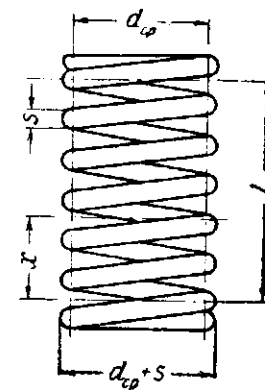
## § 7. Расчет клапанных пружин

### 1. Расчет клапанных пружин по силам инерции клапанного механизма

Силы инерции клапанного механизма на первом участке подъема клапана и на втором участке его опускания прижимают клапанный механизм к кулачку. На втором участке подъема клапана и на первом участке его опускания эти силы стремятся оторвать его от кулачка. Для того чтобы отрыв не происходил, в клапанный механизм вводятся пружины, прижимающие клапанный механизм к кулачку. Для обеспечения заданных законов движения клапана развиваемые пружинами силы теоретически должны равняться силам инерции клапанного механизма, отрывающим последний от кулачка.



Фиг. 289. Силы пружин и силы инерции.



Фиг. 290. К определению колебаний пружин.

Учитывая то, что действительные силы инерции вследствие неточности изготовления профиля кулачка и действительные силы пружин вследствие неточности принятого расчета пружин могут отличаться от расчетных, подбирают пружины так, чтобы создаваемые ими силы превышали соответствующие расчетные силы инерции процентов на 50—100.

Зная закон движения клапана и закон изменения по времени приведенных к клапану сил инерции  ${}_k P_j$  всего клапанного механизма, строят (фиг. 289) для ряда моментов, соответствующих различной высоте подъема клапана, диаграмму сил  ${}_k P_j$ . На этой же диаграмме строят диаграмму суммарных сил пружин, которая будет прямой. Определенный по этой

диаграмме минимальный запас силы пружин, который будет иметь место в точке касания кривой сил инерции  $P_i$  с прямой, проходящей через нулевую точку суммарной характеристики пружин, должен быть не меньше вышеуказанных 50—100%. Помимо этого требования размеры пружин должны удовлетворять еще требования, изложенные ниже.

## 2. Расчет пружин выхлопного клапана при закрытом клапане

Сила пружин выхлопного клапана должна быть достаточной для удержания этого клапана в закрытом состоянии во время хода всасывания. Разрежение в цилиндре может достигать<sup>1</sup> до  $0,6 \text{ кг/см}^2$ , а следовательно, пружины должны создавать при закрытом клапане такую силу, удельное давление которой, отнесенное к площади тарелки клапана, было бы равно величине не менее  $1 - 0,6 = 0,4 \text{ кг/см}^2$ . В существующих авиационных моторах, как видно из табл. 39 (стр. 415), эта величина не ниже  $0,5 \text{ кг/см}^2$  и в среднем равна  $0,8 \text{ кг/см}^2$ .

Необходимо отметить, что достаточная начальная сила пружин необходима также и для того, чтобы устранить подпрыгивание клапана на седле после его посадки; последняя обычно происходит с некоторой определенной скоростью, соответствующей зазору между клапаном и толкателем. Величина силы пружин, необходимая для указанной цели, может быть определена только экспериментальным путем.

## 3. Расчет клапанных пружин на прочность

Величина напряжения  $\tau_k$  в пружине определяется по силе  $P_{пр}$  пружины в момент максимального открытия клапана. Принимая во внимание обозначения, приведенные в § 1 этой главы, имеем (фиг. 290)

$$\tau_k = \frac{8d_{cp}}{\pi s^3} P_{пр}. \quad (50)$$

При определении размеров пружин по этой формуле величину допускаемого напряжения можно принять равной  $4000 - 4500 \text{ кг/см}^2$ . Для облегчения подбора размеров пружин в конце книги дана таблица (приложение IV).

В действительности напряжение в клапанной пружине вследствие ее вибрации при работе может достигнуть величины большей, чем определяемая по формуле (50). Учитывая возможность сильной вибрации пружин, некоторые авторы рекомендуют проверять то напряжение, которое получается в клапанной пружине при полном ее сжатии: это напряжение не должно превышать  $5000 \text{ кг/см}^2$ .

Вычисленные согласно изложенному выше напряжения дают представление лишь о статической прочности пружины. В действительности пружина подвержена действию периодически изменяющейся по величине силы; кроме того, расчет ее на прочность должен учитывать свойства материала пружины при переменной нагрузке. Поломки клапанных пружин происходят лишь после длительной их работы и носят усталостный характер. В настоящее время основными трудностями расчета клапанных пружин на усталость являются: а) недостаточность экспериментальных данных о пределах усталости пружинных сталей при кручении и б) невозможность надежного аналитического определения действительного среднего напряжения и действительной амплитуды напряжений в пружине вследствие наличия явления вибрации пружины.

Расчет пружин на усталость упрощается, если принять во внимание, что вдали от резонанса вибрация клапанных пружин не может сильно влиять на закон изменения по времени напряжений в пружине, так как даже полное сжатие пружины увеличивает максимальное напряжение в среднем лишь на 20%.

<sup>1</sup> Devillers. Le moteur à explosions, 1935.

Поэтому при расчете клапанной пружины на усталость вдали от резонанса можно исходить из ее обычной характеристики.

Обозначим через

- $\tau_s$  — предел текучести пружинной стали при сдвиге,
- $\tau_{-1}$  — предел выносливости пружинной стали при симметричном цикле при сдвиге,
- $\gamma$  — фактор вибропрочности,
- $\tau_m$  — среднее напряжение цикла,
- $\tau_a$  — амплитуду напряжения цикла,
- $k$  — коэффициент опасности,
- $n$  — запас прочности.

Согласно изложенному в § 5 главы III части III, имеем

$$k = \frac{1}{n} = \frac{\tau_s}{\tau_m} + \gamma \frac{\tau_a}{\tau_{-1}}. \quad (51)$$

Принимая для клапанных пружин фактор вибропрочности  $\gamma = 1$ , в предположении тщательной поверхностной отделки пружин и отсутствия концентраций напряжений, получим

$$k = \frac{1}{n} = \frac{\tau_s}{\tau_m} + \frac{\tau_a}{\tau_{-1}}. \quad (52)$$

Согласно испытаниям E. Lehr'a, приводимым в книге Dr. W. Herold „Die Wechselfestigkeit metallischer Werkstoffe“, для CrVa стали химического состава C = 0,54%; Si = 0,25%; Mn = 0,82%; Cr = 1,10% и V = 0,25% эта сталь по химическому составу близка к нашей пружинной стали) имеем: предел текучести при растяжении  $\tau_s = 11500 \text{ кг/см}^2$ , предел текучести при кручении  $\tau_s = 0,58 \times 11500 = 6700 \text{ кг/см}^2$ , предел выносливости  $\tau_{-1} = 3200 \text{ кг/см}^2$ .

Обозначая через

- $\tau_{max}$  — напряжение в пружине при максимальном открытии клапана,
- $f$  — соответствующую этому напряжению деформацию пружины и
- $\tau_{min}$  — напряжение в пружине при закрытом клапане, получим

$$\left. \begin{aligned} \tau_{min} &= \left(1 - \frac{h_k}{f}\right) \tau_{max}, \\ \tau_m &= \frac{1}{2} (\tau_{max} + \tau_{min}) = \tau_{max} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h_k}{f}\right) \\ \tau_a &= \frac{1}{2} (\tau_{max} - \tau_{min}) = \tau_{max} \frac{h_k}{2f}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Подставляя  $\tau_m$  и  $\tau_a$  из этих соотношений в уравнение (52), будем иметь

$$k = \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{max}}{f} \left[ \frac{h_k}{\tau_{-1}} + \frac{2f - h_k}{\tau_s} \right]. \quad (54)$$

табл. 39 (стр. 415) даны коэффициенты опасности  $k$  и соответствующие запасы прочности  $n$  для клапанных пружин ряда современных авиационных моторов, в которых не наблюдается резонансных вибраций клапанных пружин, а поэтому вышеизложенный метод определения запаса прочности является достаточно надежным. При подсчете данных для  $\tau_s$  и  $\tau_{-1}$  (табл. 39) или приняты вышеуказанные значения для CrVa стали.

## 4. Вибрация клапанных пружин

В предыдущих рассуждениях мы не учитывали явления вибрации клапанной пружины; поэтому все сделанные нами выводы в отношении развиваемых пружиной сил и возникающих в ней напряжений базировались на законе движения клапанной пружины, характеризуемом тем, что перемещения поперечных сечений пружины пропорциональны их расстоя-



нию от неподвижного конца пружины. Это с достаточной для практики точностью является справедливым лишь при условии, что частота собственных колебаний пружины и частота ее вынужденных колебаний не совпадают друг с другом или не близки друг к другу.

Для того чтобы определить действительные движения поперечных сечений пружины при ее работе, рассмотрим сначала принужденные колебания пружины, один конец которой неподвижен, а другой подвергается кинематическому воздействию таким образом, что совершает принужденное колебательное движение по закону

$$u_l = a \cos pt + b \sin pt. \quad (55)$$

Движение пружины в этом случае может быть определено при помощи следующего дифференциального уравнения движения упругого призматического тела при продольных колебаниях<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (56)$$

где  $u$  — перемещение от начального положения поперечного сечения пружины, находящегося на расстоянии  $x$  от неподвижного ее конца,  $t$  — время,

$a$  — скорость распространения волны напряжений вдоль оси пружины. Решение уравнения (56) при наличии условия (55) будет иметь вид

$$u = X (A \cos pt + B \sin pt), \quad (57)$$

причем  $X$  представляет некоторую функцию одного только  $x$  и называется нормальной функцией, а величины  $A$  и  $B$  являются произвольными постоянными интегрирования.

Подставляя решение (57) в уравнение (56), получим

$$-p^2 X = a^2 \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (58)$$

Решая уравнение (58), найдем

$$X = \cos \frac{px}{a} + D \sin \frac{px}{a}. \quad (59)$$

Подставляя это решение в уравнение (57), будем иметь

$$u = \left( C \cos \frac{px}{a} + D \sin \frac{px}{a} \right) (A \cos pt + B \sin pt). \quad (60)$$

Согласно условиям движения концов пружины, имеем

1) при  $x=0$  величина  $u=0$

и 2) при  $x=l$  величина  $u=u_l = a \cos pt + b \sin pt$ .

Чтобы удовлетворить первому из этих условий, необходимо в уравнении (60) положить  $C=0$ , что дает для  $u$  следующее выражение

$$u = D \sin \frac{px}{a} (A \cos pt + B \sin pt). \quad (60')$$

Второе условие дает зависимость

$$u_l = D \sin \frac{pl}{a} (A \cos pt + B \sin pt). \quad (61)$$

Из уравнений (60') и (61) вытекает следующее соотношение:

$$u = u_l \frac{\sin \frac{px}{a}}{\sin \frac{pl}{a}}. \quad (62)$$

В том случае, когда  $\sin \frac{pl}{a} = 0$ , величина  $u$  становится равной бесконечности; в этом случае имеется условие резонанса, которое характери-

<sup>1</sup> Интересующихся подробным выводом этого уравнения отсылаем к книге проф. С. П. Гимошенко, "Теория колебаний в инженерном деле".

зуется тем, что частота собственных колебаний пружины  $\Theta_c$  совпадает с частотой возбуждающих сил  $p$ .

Отсюда для определения круговой частоты  $\Theta_c$  собственных колебаний пружины имеем следующее соотношение:

$$\frac{\Theta_c l}{a} = k\pi, \quad (63)$$

где  $k$  — целое порядковое число.

Беря  $k=1, 2, 3, \dots$ , получаем частоты основного, второго, третьего и т. д. видов собственных колебаний пружины.

Число собственных колебаний пружины в секунду для основного вида колебаний будет

$$n'_c = \frac{\Theta_c}{2\pi} = \frac{a\pi}{2\pi l} = \frac{a}{2l}. \quad (64)$$

Принимая во внимание, что скорость распространения волны напряжений вдоль оси пружины равна

$$a = \sqrt{\frac{b l g}{q}}, \quad (65)$$

где  $b$  — жесткость пружины или сила, необходимая для того, чтобы вызвать общее удлинение пружины, равное единице,

$l$  — длина пружины,

$q$  — вес единицы рабочей длины пружины и

$g$  — ускорение силы тяжести, получим

$$n'_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b g}{l q}}.$$

Имея в виду, что  $g = 981 \text{ см/сек}^2$  и обозначая вес пружины через  $w$ , найдем для числа собственных колебаний пружины в минуту следующее выражение:

$$n_c = 60 n'_c = 940 \sqrt{\frac{b}{w}}. \quad (66)$$

Так как

$$q = \frac{\pi^2}{4l} d_{cp} s^2 i,$$

и

$$b = \frac{P}{f} = \frac{s^4 G}{8 l d_{cp}^3},$$

где  $d_{cp}$  — средний диаметр витков цилиндрической винтовой пружины в см,

$s$  — диаметр проволоки в см,

$f$  — деформация пружины в см,

$G$  — модуль упругости сдвига  $G = 825000 \text{ кг/см}^2$ ,

$\gamma$  — вес 1 см<sup>3</sup> материала пружины;  $\gamma = 7,86 \text{ г}$  и

$l$  — число активных витков пружины,

то для числа собственных колебаний пружины получаем на основании равенства (66) следующее выражение:

$$n_c = 2164000 \frac{s}{d_{cp}^2 l}. \quad (66')$$

Числа собственных колебаний высших порядков будут

$$n_{ck} = k n_c. \quad (67)$$

Положим теперь, что закон движения конца клапанной пружины, подверженной принужденному кинематическому воздействию, выражается не

уравнением (55), а следующим:

$$u_i = A_0 + \sum_{k=1}^{k=m} [a_k \cos(k\theta t) + b_k \sin(k\theta t)] = A_0 + \sum_{k=1}^{k=m} [A_k \sin(k\theta t + \gamma_k)] = A_0 + \sum_{k=1}^{k=m} h(k), \quad (68)$$

причем

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

и

$$\gamma_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}, \quad (69)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — амплитуды фазовых слагающих гармоники  $k$ -го порядка,  $\theta$  — круговая частота гармоники 1-го порядка,

$A_k$  — амплитуда гармоники  $k$ -го порядка и

$\gamma_k$  — начальный фазовый угол гармоники  $k$ -го порядка.

Уравнение (68) в применении к клапанной пружине на моторе представляет собой путь клапана, выраженный в форме тригонометрического полинома; это выражение для пути клапана может быть легко найдено путем гармонического анализа кривой пути. Решение уравнения (56) в этом случае получается суммированием решений, найденных для каждой гармоники пути в отдельности, и будет иметь, принимая во внимание решение (62), следующий вид:

$$u = A_0 \frac{x}{l} + \sum_{k=1}^{k=m} \left[ h(k) \frac{\sin(k\theta \frac{x}{a})}{\sin(k\theta \frac{l}{a})} \right] = A_0 \frac{x}{l} + \sum_{k=1}^{k=m} \left[ A_k \sin(k\theta t + \gamma_k) \frac{\sin(k\pi \frac{\theta}{\theta_c} \frac{x}{l})}{\sin(k\pi \frac{\theta}{\theta_c})} \right], \quad (70)$$

так как согласно равенства (64)

$$\theta_c = \pi \frac{a}{l}.$$

Обозначая силу предварительной затяжки пружины через  $P_0$ , а силу, действующую в поперечном элементе пружины, находящемся на расстоянии  $x$  от ее неподвижного конца, через  $P_x$ , будем иметь

$$P_x = P_0 + \xi \frac{\partial u}{\partial x} = P_0 + bl \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отсюда

$$P_x = P_0 + \frac{s^4 l G}{8 i d_{cp}^3} \frac{\partial u}{\partial x} = P_0 + \frac{s^4 l G A_0}{8 i d_{cp}^3} + \frac{s^4 l G}{8 i d_{cp}^3} \pi \frac{\theta}{\theta_c l} \sum_{k=1}^{k=m} \left[ k h(k) \frac{\cos(k \frac{\theta}{\theta_c} \frac{x}{l} \pi)}{\sin(k \frac{\theta}{\theta_c} \pi)} \right].$$

Принимая во внимание равенства (54), (55) и (56) и обозначая предварительный натяг пружины через  $f_0$ , получим

$$P_x = 103\,000 \frac{s^4}{i d_{cp}^3} (f_0 + A_0) + 1,43 \frac{s^4}{d_{cp}^3} \theta \sum_{k=1}^{k=m} \left[ k h(k) \frac{\cos(k \frac{\theta}{\theta_c} \frac{x}{l} \pi)}{\sin(k \frac{\theta}{\theta_c} \pi)} \right]. \quad (71)$$

Напряжение в этом сечении пружины будет

$$\tau_x = \frac{d_{cp}}{0,3926 s^3} P_x = 263\,000 \frac{s}{i d_{cp}^2} (f_0 + A_0) + 3,64 \theta \sum_{k=1}^{k=m} \left[ k h(k) \frac{\cos(k \frac{\theta}{\theta_c} \frac{x}{l} \pi)}{\sin(k \frac{\theta}{\theta_c} \pi)} \right]. \quad (72)$$

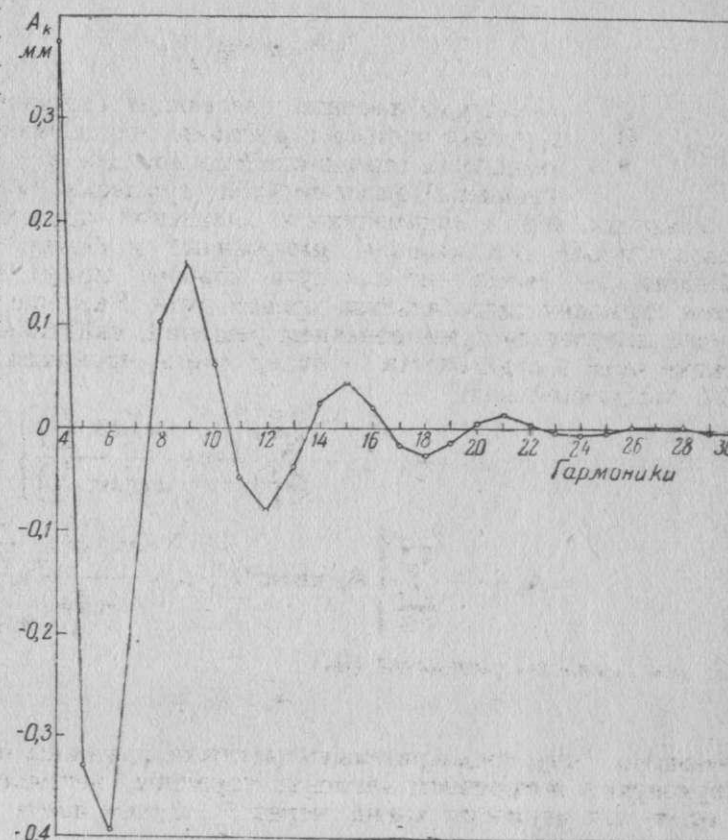
Расчет пружин по этим формулам трудоемок, а вблизи резонанса и ненадежен, так как: а) трудно определить число активных витков пружины (которое может быть не одним и тем же при закрытом клапане и в рабочем состоянии), б) сами формулы не учитывают того обстоятельства, что амплитуды колебания витков связаны расстоянием между тарелками клапанной пружины, в) при выводе формул не были приняты во внимание сопротивления, заглушающие колебания пружины.

Поэтому расчет пружины на вибрацию обычно ограничивается вышеизложенным определением коэффициентов  $\lambda$  и  $n$  и определением числа собственных колебаний пружины. Рикардо рекомендует, чтобы отношение числа собственных колебаний пружины в минуту к числу вынужденных циклов колебаний пружины за этот же промежуток времени было не менее 10. В основе этой рекомендации лежит стремление повысить порядок резонирующей гармоники пути клапана, так как амплитуды гармоник с увеличением порядка имеют тенденцию к уменьшению, чем обусловливается снижение соответствующих напряжений в клапанной пружине.

Однако, как видно из фиг. 291, на которой даны амплитуды гармоник пути клапана мотора Испано-Суиза 12 Nbr, с увеличением порядка гармоник и имеется общее

стремление к уменьшению их амплитуд, отдельные амплитуды гармоник более высоких порядков могут быть больше амплитуд гармоник более низких порядков. Таким образом выполнение при проектировании клапанной пружины правила Рикардо не гарантирует пружину от возможности возникновения при ее работе на моторе сильных резонансных колебаний. Эти колебания возникают при некоторых, вполне определенных числах оборотов вала мотора и зависят от профиля кулачка, геометрических размеров пружин и от ее материала.

Возникает вопрос, почему резонансные колебания пружины могут быть опасны для ее прочности, если, как мы указывали выше, напряжение полностью сжатой пружины не превосходит  $50\,000 \text{ кг/см}^2$ . Ответ на этот вопрос мы получим, если определим коэффициент опасности пружины (или запас прочности) при ее резонансных колебаниях и сравним его с таковым при колебаниях вне резонанса. Положим, например, что напряжение в пружине, соответствующее полному открытию клапана, равно  $\tau_{\max} = 4000 \text{ кг/см}^2$ , а напряжение, соответствующее закрытому клапану, равно  $\tau_{\min} = 4000 \cdot 0,7 = 2800 \text{ кг/см}^2$ . При колебаниях пружины вне резонанса, с практически до-



Фиг. 291. Гармоники пути клапана.



статочной точностью имеем согласно равенствам (53)

$$\tau_m = \frac{1}{2}(4000 + 2800) = 3400 \text{ кг/см}^2,$$

и

$$\tau_a = \frac{1}{2}(4000 - 2800) = 600 \text{ кг/см}^2,$$

что дает согласно равенству (52)

$$\lambda = \frac{3400}{6700} + \frac{600}{3200} = 0,696 \text{ и } n = 1,44.$$

При резонансных колебаниях пружины максимальное ее напряжение может достигнуть величины  $\tau_{\max} = 5000 \text{ кг/см}^2$ . Что касается минимального ее напряжения  $\tau_{\min}$ , то оно может стать равным нулю или даже сделаться отрицательным, так как при сильных резонансных колебаниях длина шагов некоторых витков пружины во время ее колебания при закрытом клапане может стать равной или даже большей длины шага витка пружины в ее свободном состоянии. Принимая для примера  $\tau_{\min} = 0$ , при резонансных колебаниях пружины будем иметь

$$\tau_m = \frac{1}{2} = (5000 + 0) = 2500 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau_a = \frac{1}{2} = (5000 - 0) = 2500 \text{ кг/см}^2,$$

$$\lambda = \frac{2500}{6700} + \frac{2500}{3200} = 1,15 \text{ и } n = \frac{1}{\lambda} = 0,87.$$

Таким образом запас прочности пружины, равный при ее колебаниях вне резонанса  $n = 1,43$ , становится равным  $n = 0,87$ , при ее резонансных колебаниях, т. е. делается меньшим единицы; следствием этого является поломка пружины от усталости.

Мы уже указывали выше, что по ряду причин мы не можем более или менее надежно определить расчетным путем вынужденные резонансные колебания пружины. Поэтому только экспериментальное исследование клапанной пружины в рабочем состоянии позволяет выяснить опасность вибраций клапанной пружины для ее прочности.

## § 8. Общие положения для построения профиля кулачка

Профиль кулачка распределительного механизма должен быть подобран таким образом, чтобы удовлетворялись следующие три основные требования:

- 1) Коэффициент наполнения цилиндра двигателя был максимальным.
- 2) Величина сил инерции клапанного механизма позволяла конструктивно выполнить клапанные пружины.
- 3) Силы ударов в момент открытия клапана и в момент его посадки на седло в клапанном механизме вследствие наличия в нем зазоров были минимальны.

Рассмотрим каждое из этих требований в отдельности.

На коэффициент наполнения цилиндра двигателя при данном трубопроводе и при данном числе оборотов мотора влияют фазы распределения и время-сечение клапана. На выборе фаз распределения мы останавливались в § 2 главы I. Что касается время-сечения клапана, то чем оно больше, тем коэффициент наполнения будет больше. Увеличить время-сечение клапана при данном подъеме последнего возможно приданием такого очертания профилю кулачка, при котором происходит возможно быстрое открытие клапана и возможно быстрое его закрытие при возможно большем промежутке времени полного его открытия. Однако с увеличением скорости открытия и закрытия клапана увеличиваются на соответствующих участках движения ускорения и сил инерции элементов распределительного механизма, что ведет к увеличению конструктивных размеров последнего и связано с увеличением веса механизма. Увеличение веса механизма

Таблица 39

Напряжения, числа собственных колебаний и коэффициенты опасности клапанных пружин авиационных моторов

Авиамотор	Средний диаметр $d_p$ , мм	Диаметр проволоки $s$ , мм	Число рабочих витков $i$	Длина в свободном состоянии $L_{св}$ , мм	Длина в сжатом состоянии $L_{сж}$ , мм	Длина при полном от-крытии клапана $L_{от-кр}$ , мм	Зазор между витками в сжатом состоянии $\Delta$ , мм	Сила деформации пружины на 1 см кг	Модуль сдвига $G$ , кг/см <sup>2</sup>	Максимальное напряжение $\tau_k$ , кг/см <sup>2</sup>	Максимальная сила пружины $P$ , кг	Напряжение в сжатой доотказа пружине, кг/см <sup>2</sup>	Число собственных колебаний в мин. $n_c$	Число пиков вынужденных колебаний в мин. $n_k$	$n/n_k$	Коэффициент опасности $\lambda$	Запас прочности пружины $n$	Суммарная сила пружин при зажатом клапане, кг/см <sup>2</sup>
Испано-Суйза 12 Yhrs	42,3 29,2	4,2 2,8	6 8	80,0 72,5	37 29,5	0,425 0,31	—	—	798 000	4 480 4 480	30,8 13,22	4 750 4 750	—	—	—	0,793 0,819	1,26 1,22	0,815
Кертисс-1800	48,3 37,9 29,4	4,76 3,76 2,98	4,75 6 7,5	63,6 63,1 61,7	35,2 33,6 32	0,64 1,09 0,62	0,64 0,67 0,44	9,8 6,07 3,44	810 000 810 000 765 000	3 940 4 040 3 140	28 17,9 10	4 350 4 935 3 640	9 000 9 250 9 250	1 200	7,5 7,7 7,7	0,751 0,762 0,595	1,33 1,31 1,68	1,3
Лоррен «Петрель»	35,25 25	3,96 2,98	6 8,5	63 61	39,9 39,4	1,03 0,77	10 6,1	10 14,45	850 000 830 000	3 360 3 180	19,2 19,2	4 260 4 140	11 500 11 800	1 300	8,9 9,05	0,630 0,599	1,59 1,67	0,79
Рено-12Р	37,54 23,85	4,25 2,9	4,17 7,06	50 48	30,7 28,7	1,04 0,35	14,45 7,36	14,45 7,36	790 000 800 000	3 510 3 550	28,1 14,3	4 310 4 010	16 000 16 250	1 250	12,8 13	0,712 0,723	1,40 1,38	0,565
Изотта Фраскини «АССО»	38,25 28,25	3,75 3,25	7,5 7,5	78,3 68,6	37,9 37,9	—	—	4,87	820 000 700 000	3 640 3 670	19,7 17,4	3 990 4 450	7 500 10 800	850	8,8 12,7	0,615 0,641	1,63 1,56	1,49
Бристоль «Меркур» IV-S2	43 32,3 22,86	4,1 3,7 2,54	5 6 8,5	66,2 56,3 58,2	34,2 34,2 32,2	1,093 0,76 0,496	6,8 8,6 4,48	6,8 8,6 4,48	770 000 744 000 878 000	3 020 3 100 4 160	21,9 19,1 11,7	3 560 3 730 4 820	9 430 12 280 12 100	1 124	8,4 10,9 10,76	0,551 0,613 0,789	1,81 1,63 1,27	1,31
Райт «Циклон» SgR-1820	49,61 37,57 30	4,8 3,75 3	5 7 9	72,8 73,5 74,8	34,5 38,5 36,5	0,186 0,633 0,392	8,8 5,4 3,35	8,8 5,4 3,35	804 000 798 000 804 000	3 880 3 450 3 685	33,6 18,79 12,86	3 980 3 890 4 020	8 420 8 160 7 950	980	8,63 8,37 8,15	0,760 0,631 0,663	1,43 1,58 1,51	0,79
Армстронг «Тайгер»	45,3 34,6	5,3 3,5	6 8	68,9 72	43,7 38,2	0,22 0,39	15,9 5,17	15,9 5,17	898 000 898 000	3 100 3 570	40 17,4	3 260 3 910	10 000 8 120	1 025	9,75 7,9	0,629 0,677	1,59 1,48	0,57
Гном и Рон «Мистраль» K-14	53,6 40,1 29,55	6 4,5 3,2	4,25 5,5 6,75	60 56 50,5	37 34 28	1 0,8 0,65	—	—	878 000 874 000 825 000	3 160 3 140 3 260	50 28 14,2	3 750 3 760 3 750	11 400 11 900 12 450	1 200	9,5 9,58 10,05	0,668 0,668 0,692	1,50 1,50 1,44	0,51

крайне нежелательно, так как требует усиления клапанных пружин, а последние при проектировании распределительного механизма создают известные затруднения с точки зрения габаритов.

Помимо этого увеличение быстроты открытия и закрытия клапана увеличивает скорость удара в момент начала открытия клапана и в момент его посадки на седло, что увеличивает силу удара со всеми вытекающими отсюда последствиями. Поэтому увеличивать быстроту открытия и закрытия клапана можно только до известного предела, который в основном и лимитирует величину время-сечения клапана.

Перейдем к рассмотрению второго требования. Величины сил инерции, определяющие размеры клапанных пружин, соответствуют ускорениям на тех участках движения распределительного механизма, на которых эти силы стремятся оторвать механизм от кулачка. Потребная мощность (в смысле силы) клапанной пружины будет тем меньше, чем меньше эти силы инерции и чем благоприятнее в этом отношении закон протекания их в зависимости от пути клапана. Так как силы инерции элементов клапанного механизма пропорциональны произведению их массы на ускорение, то в многооборотных двигателях для получения конструктивно выполнимых клапанных пружин приходится по возможности уменьшать вес клапанного механизма и соответствующие ускорения его звеньев. Пропорциональность сил инерции звеньев распределительного механизма квадрату чисел оборотов мотора показывает и соответствующие расчеты это подтверждают, что возможны такие обороты мотора, при которых пружина любой мощности сможет уравновесить только силы инерции ее собственной массы. Отсюда следует, что для высокооборотных моторов, начиная с некоторого числа оборотов мотора в минуту, клапанное распределение уже не может быть конструктивно осуществлено и должно быть заменено гильзовым распределением.

В § 1 этой главы мы рассмотрели вопрос о расчете клапанной пружины и указали на необходимость в силу ряда обстоятельств иметь известный запас мощности пружины.

Очевидно, что и с точки зрения наименьших размеров пружины, и с точки зрения наибольшего время-сечения клапана, кулачок на участках отрицательных ускорений (те участки, на которых силы инерции стремятся оторвать механизм от кулачка) должен быть профилирован таким образом, чтобы запас мощности клапанной пружины для всех точек этих участков был одинаков.

Ряд вышеприведенных соображений показывает, что наилучшим профилем кулачка будет профиль, полученный при соблюдении следующих условий:

1. Положительные ускорения клапана (ускорения клапана, соответствующие тем участкам его движения, на которых силы инерции прижимают механизм к кулачку) должны быть по величине постоянными и максимально возможными.

2. Отрицательные ускорения клапана (ускорения клапана, соответствующие тем участкам его движения, на которых силы инерции отрывают механизм от кулачка) должны изменяться по линейному закону в зависимости от пути клапана.

Эти условия позволяют получить максимально возможное время-сечение клапана при данной постоянной величине запаса мощности клапанной пружины.

Вышеуказанный закон изменения ускорения клапана по его пути дан на фиг. 292. Чтобы полностью определить этот закон, необходимо знать следующие величины:

1. Ускорение  $j_A$  клапана на участке  $AB$  его подъема; этим ускорением задаются, исходя их вышеизложенных соображений выбора величин положительных ускорений.

2. Величину  $h_1$  участка  $AB$  подъема клапана.

3. Ускорение  $j_B$  клапана, соответствующее точке  $B$  его подъема.

4. Ускорение  $j_C$  клапана, соответствующее точке  $C$  полного подъема  $h_k$  клапана.

Таким образом неизвестными величинами являются три величины:  $h_1$ ,  $j_B$  и  $j_C$ . Для их определения мы имеем только два условия, а именно:

а) величину полного подъема клапана  $h_k$ , причем (фиг. 292)

$$h_k = h_1 + h_2 \quad (73)$$

и б) время, необходимое для полного открытия клапана  $t_k$ , причем

$$t_k = t'_h + t''_h, \quad (74)$$

где  $t'_h$  — время прохождения клапаном пути  $h_1$ , а

$t''_h$  — время прохождения клапаном пути  $h_2$ .

Поэтому для решения задачи поступают следующим образом:

1. Задаются значением величины  $h_1$  и, пользуясь условиями (73) и (74), определяют соответствующие значения ускорений  $j_B$  и  $j_C$  (как именно это делается, будет указано ниже).

2. Строят диаграмму время-сечение клапана и определяют ее площадь.

3. Строят характеристику суммарной силы клапанных пружин, принимая во внимание заданный запас мощности пружин. Эта характеристика будет представлять собой (фиг. 292) прямую линию  $FED$ , проходящую через точку  $D$  пересечения прямой  $B_1C_1$  ускорений с осью абсцисс  $h$ . Наклон прямой  $FED$  определяется заданным запасом мощности пружин и прямой ускорений  $B_1C_1$ .

4. Согласно полученной характеристике суммарной силы пружин подбирают пружины.

Сделав такие просчеты для ряда значений  $h_1$ , останавливаются на том значении  $h_1$ , при котором получается достаточное время-сечение клапана и удовлетворительные конструктивные размеры клапанных пружин.

Нам остается теперь рассмотреть, как определяются при данном  $h_1$  ускорения  $j_B$  и  $j_C$  и как находится закон изменения пути клапана по времени. Если при движении клапана по участку  $AB$  обозначить через

$t$  — время от начала подъема клапана,

$h$  — соответствующий времени  $t$  путь клапана и

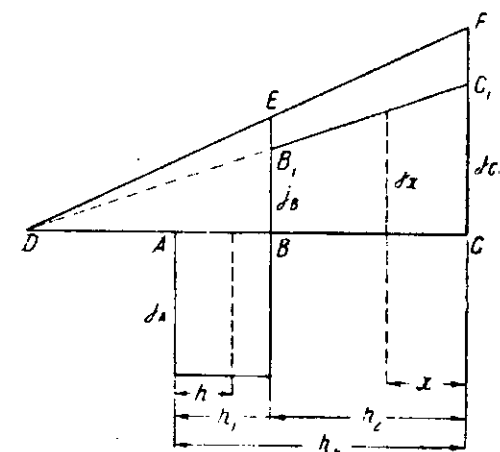
$v$  — соответствующую времени  $t$  скорость клапана,

то

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{a^2 h}{dt^2} dh &= \int_0^h \frac{a^2 h}{dt^2} \frac{dh}{dt} dt = \int_0^v \frac{dv}{dt} v dt = \\ &= \int_0^v v dv = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} v^2. \end{aligned}$$

Так как на участке  $AB$

$$\frac{a^2 h}{dt^2} = j_A = \text{const}, \quad (75)$$



Фиг. 292. К определению наилучшего профиля кулачка.



Для точки В получаем

$$j_A = \frac{1}{2} v^2.$$

Из уравнения (75) имеем

$$j_A = \frac{1}{2} v_B^2.$$

$$\frac{1}{v} = \frac{dt}{dh} = \frac{1}{\sqrt{2j_A h}},$$

откуда

$$t = \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{2j_A h}} = \sqrt{\frac{2h}{j_A}} \quad (77)$$

или

$$h = \frac{1}{2} j_A t^2. \quad (78)$$

Для точки В получим

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{j_A}} \quad (79)$$

При движении клапана по участку BC координату процесса будем вести от точки С. Обозначая через  $x$  расстояние клапана от точки С, а через  $t$  время, потребное клапану для прохождения пути  $x$ , будем иметь (фиг. 292)

$$j_x = a - bx, \quad (80)$$

причем

$$a = j_C, \quad b = \frac{j_C - j_B}{h_2}. \quad (81)$$

Аналогично предыдущему получим

$$\int_0^x j_x dx = \int_0^x (a - bx) dx = ax - \frac{1}{2} bx^2 = \frac{1}{2} v^2. \quad (82)$$

Для точки В находим

$$ah_2 - \frac{1}{2} bh_2^2 = \frac{1}{2} v_B^2$$

или, принимая во внимание обозначения (81), получим

$$j_C h_2 - \frac{1}{2} \frac{j_C - j_B}{h_2} h_2^2 = \frac{1}{2} h_2 (j_C + j_B) = \frac{1}{2} v_B^2. \quad (83)$$

Из уравнения (82) имеем

$$\frac{1}{v} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2ax - bx^2}},$$

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2ax - bx^2}} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \frac{a - bx}{a},$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \frac{a - bx}{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2\sqrt{b}} - \arcsin \frac{a - bx}{a}$$

$$\arcsin \frac{a - bx}{a} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{b} t,$$

$$\frac{a - bx}{a} = \cos(\sqrt{b} t),$$

$$x = \frac{a}{b} [1 - \cos(\sqrt{b} t)]. \quad (84)$$

Для точки В получим

$$h_2 = \frac{a}{b} [1 - \cos(\sqrt{b} t_h)]$$

или, принимая во внимание обозначения (81),

$$h_2 = h_1 \frac{j_C}{j_C - j_B} \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{j_C - j_B}{h_2}} t_h \right) \right],$$

откуда

$$\frac{j_B}{j_C} = \cos \left( \sqrt{\frac{j_C - j_B}{h_2}} t_h \right). \quad (85)$$

Согласно равенствам (76) и (83), имеет место следующая зависимость

$$j_B h_1 = \frac{1}{2} h_2 (j_C + j_B). \quad (86)$$

Уравнения (86) и (85) позволяют определить ускорения  $j_C$  и  $j_B$ , соответствующие взятому значению  $h_1$ . В самом деле, при выбранном  $h_1$ , из уравнения (73) находим  $h_2$ , из уравнения (79) —  $t_h$ , а из уравнения (74) —  $t_h$ . Таким образом в уравнениях (86) и (85) остаются неизвестными только ускорения  $j_B$  и  $j_C$ . Решить эту систему из двух уравнений непосредственно не представляется возможным, а поэтому, определяя из уравнения (86) одно из неизвестных через другое и делая соответствующую подстановку в уравнение (85), решаем последнее графическим путем.

Закон изменения пути клапана по времени определяется на участке АВ уравнением (78), а на участке ВС — уравнением (84).

Определив на основании вышеизложенных соображений закон движения клапана, можно по § 5 главы I построить профиль кулачка. В том случае, если для упрощения производства желают получить кулачок, очерченный дугами окружностей и прямыми, нужно отдельные участки найденного сложного профиля заменить наиболее приближающимися к ним дугами окружностей и прямыми; при этом надо иметь в виду, что отдельные участки профиля кулачка должны быть касательны друг к другу, так как в противном случае в точках сопряжения этих участков скорости механизма будут меняться скачкообразно и создадут в механизме удары. Заметим, что такая замена сложного профиля кулачка возможна лишь для кулачковых валиков; для кулачковых шайб, где радиусы начальных окружностей достигают величин порядка 100 мм, такая замена малым количеством дуг окружностей не удастся в силу специфичности очертания кулачка.

Последующий после замены профиля пересчет законов движения клапана надо считать обязательным; этот пересчет дает возможность оценить правильность замены, главным образом, с точки зрения сохранения запаса мощности клапанных пружин.

Рассмотрим, наконец, третье требование к профилю кулачка, касающееся сил ударов в клапанном механизме в момент открытия клапана и в момент его посадки на седло. Эти удары возникают вследствие наличия в клапанном механизме зазора, предусматривающего температурное расширение звеньев механизма, и являются крайне нежелательными как из-за производимого ими шума, так и из-за износа и наклепов в стыках звеньев клапанного механизма. Поэтому силы ударов должны быть сведены к возможно малым величинам.

Определить величину этих сил расчетным путем не представляется возможным; поэтому ограничиваются тем, что задаются возможно малой величиной скорости удара. Обычно величину этой скорости берут порядка 0,6—1 м/сек в зависимости от массы движущихся частей распределительного механизма (при больших массах выбирается меньшая скорость).

В тех случаях, когда расчетный профиль заменяется дугами окружностей и прямыми, не всегда удается выдержать скорость удара в указанных пределах. Чтобы избежать в этих случаях сильных ударов, участок профиля кулачка, соответствующий зазору, очерчивается иногда (например, кулачок мотора Curtiss) выпуклой дугой такого радиуса, который позволяет осуществить выбранную скорость удара.

Допустим, что на фиг. 293 изображен кулачковый механизм в момент начала движения клапана.

Найдя полюс  $p$  относительного движения толкателя и кулачка, будем для скорости движения толкателя иметь

$$v_z = \overline{O_k p} \omega_k. \quad (87)$$

Ввиду того, что угол  $pO_k a$  обычно не превосходит  $5^\circ$ , можно с достаточной для практики точностью принять

$$\overline{O_k p} \approx \overline{O_k a},$$

Фиг. 293. К определению радиуса дуги начала профиля кулачка, обеспечивающего заданную скорость удара.

а следовательно,

$$\overline{O_k a} = \frac{v_z}{\omega_k}.$$

Из треугольников  $FaO_k$  и  $O_p a O_k$  имеем

$$\overline{Fa}^2 = (R - r_n)^2 - \overline{O_k a}^2$$

и

$$\overline{O_p a}^2 = (r_n + \rho + h_z)^2 - \overline{O_k a}^2;$$

откуда

$$\begin{aligned} R + \rho &= \sqrt{[(R + \rho) - (r_n + \rho)]^2 - \overline{O_k a}^2} + \sqrt{(r_n + \rho + h_z)^2 - \overline{O_k a}^2}, \\ (R + \rho)^2 - 2(R + \rho) \sqrt{(r_n + \rho + h_z)^2 - \overline{O_k a}^2} + (r_n + \rho + h_z)^2 - \overline{O_k a}^2 &= \\ &= (R + \rho)^2 - 2(R + \rho)(r_n + \rho) + (r_n + \rho)^2 - \overline{O_k a}^2 \end{aligned}$$

или

$$R + \rho = \frac{1}{2} \frac{(r_n + \rho + h_z)^2 - (r_n + \rho)^2}{\sqrt{(r_n + \rho + h_z)^2 - \overline{O_k a}^2} - (r_n + \rho)}$$

и

$$R = \frac{h_z}{2} \frac{2(r_n + \rho) + h_z}{\sqrt{(r_n + \rho + h_z)^2 - \frac{v_z^2}{\omega_k^2}} - (r_n + \rho)}. \quad (88)$$

Эта формула дает возможность при заданных величинах  $v_z$ ,  $\rho$ ,  $r_n$  и  $h_z$  определить радиус дуги профиля кулачка на участке зазора. При дальнейшей профилировке кулачка нужно предусмотреть, чтобы следующая дуга профиля кулачка была касательна подобранной дуге зазора. Уменьшение таким способом скорости удара имеет тот недостаток, что уменьшает величину время-сечение клапана, однако с этим недостатком в случаях необходимости приходится мириться.

В распределительных механизмах звездообразных моторов, не имеющих специальных компенсаторов для сохранения зазора постоянным в холодном и горячем состояниях мотора, для того чтобы не увеличивать ударных нагрузок (так как в горячем состоянии зазор, а следовательно, начальная

и конечная скорости движения клапана увеличиваются), употребляются корригированные шайбы.

В этих шайбах участок профиля, соответствующий началу движения, очерчивается по архимедовой спирали, уравнение которой в полярных координатах в нашем случае будет

$$s = at,$$

где  $s$  — расстояние между осями кулачковой шайбы и роликом толкателя,

$t$  — время, соответствующее  $s$ ,

$a$  — постоянный коэффициент.

Путь толкателя согласно этой формуле будет

$$h_{tx} = s - (r_n + \rho) = at - (r_n + \rho). \quad (89)$$

Скорость, постоянная на всем участке профиля кулачка, очерченном по этому закону, будет равна

$$v_{tx} = a. \quad (90)$$

Ускорение будет равно 0.

Участок профиля кулачка, очерчиваемый по этому закону, обычно делается на угле поворота кулачковой шайбы несколько большем, чем тот, который соответствует возможному наибольшему зазору клапана в горячем состоянии.

Архимедова спираль сопрягается обычно с начальной окружностью кулачковой шайбы дугой несколько большего радиуса, чем радиус ролика толкателя. Основным недостатком корригированной шайбы является то, что она уменьшает величину время-сечение клапана.



ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ПОДСЧЕТА КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ НОРМАЛЬНОГО КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

№ таблицы	Наименование таблицы
1	Угловые скорости коленчатого вала и их квадраты
2	Величины $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$ , $\sin 2\alpha$ , $\cos 2\alpha$ , $\sin 3\alpha$ , $\cos 3\alpha$ , $\sin 4\alpha$ , $\cos 4\alpha$ при изменении $\alpha$ от $0^\circ$ до $360^\circ$ .
3	Углы $\beta$ в зависимости от $\alpha$ и $\lambda$
4	Сумма углов $(\alpha + \beta)$ в зависимости от $\alpha$ и $\lambda$
5	Величины $\sin \beta$ " " " $\alpha$ " $\lambda$
6	Величины $\cos \beta$ " " " $\alpha$ " $\lambda$
7	Величины $\tan \beta$ " " " $\alpha$ " $\lambda$
8	Величины $\sin(\alpha + \beta)$ " " " $\alpha$ " $\lambda$
9	Величины $\cos(\alpha + \beta)$ " " " $\alpha$ " $\lambda$
10	Величины $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$ " " " $\alpha$ " $\lambda$
11	Величины $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$ " " " $\alpha$ " $\lambda$
12	Значений $\frac{S_p}{R}$ для определения расстояний поршня от верхнего мертвого положения (путей, проходимых поршнем). $\frac{S_p}{R} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) - \left(\cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \cos \beta\right)$
13	Значения $\frac{j_p}{R\omega^2}$ для определения ускорений поршня. $\frac{j_p}{R\omega^2} = \frac{1}{\cos \beta} \left[ \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 \right]$
14	Значения $\frac{1}{\omega} \frac{d\Phi}{dt}$ для определения относительных угловых скоростей вращения шатуна вокруг оси цапфы кривошипа. $\frac{1}{\omega} \frac{d\Phi}{dt} = 1 + \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$
15	Значения $\frac{T_j}{M_{II} R \omega^2}$ для определения тангенциальных сил $T_j$ от инерции поступательно движущихся масс. $\frac{T_j}{M_{II} R \omega^2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta} \left[ \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 \right]$
16	Значения $\frac{Z_j}{M_{II} R \omega^2}$ для определения радиальных сил $Z_j$ от инерции поступательно движущих масс. $\frac{Z_j}{M_{II} R \omega^2} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta} \left[ \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 \right]$
17	Значения $\frac{\omega_L}{\omega}$ для определения угловых скоростей шатуна. $\frac{\omega_L}{\omega} = \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$
18	Значения $\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2$ для определения квадратов угловых скоростей шатуна $\omega_L^2$
19	Значения $\frac{\theta_L}{\omega^2}$ для определения угловых ускорений шатуна. $\frac{\theta_L}{\omega^2} = -\lambda(1 - \lambda^2) \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \beta}$

Угловые скорости коленчатого вала и их квадраты

$n$	$\omega$	$\omega^2$	$n$	$\omega$	$\omega^2$
1 000	104,72	10 966	2 300	240,86	58 012
1 050	109,96	12 090	2 350	246,09	60 561
1 100	115,19	13 269	2 400	251,33	63 166
1 150	120,43	14 503	2 450	256,56	65 827
1 200	125,66	15 793	2 500	261,80	68 540
1 250	130,90	17 135	2 550	267,04	71 308
1 300	136,14	18 535	2 600	272,27	74 131
1 350	141,37	19 986	2 650	277,51	77 010
1 400	146,61	21 494	2 700	282,74	79 944
1 450	151,84	23 059	2 750	287,98	82 932
1 500	157,08	24 674	2 800	293,22	85 975
1 550	162,32	26 346	2 850	298,45	89 073
1 600	167,55	28 074	2 900	303,69	92 226
1 650	172,79	29 855	2 950	308,92	95 433
1 700	178,02	31 693	3 000	314,16	98 696
1 750	183,26	33 585	3 050	319,40	102 013
1 800	188,50	35 530	3 100	324,63	105 385
1 850	193,73	37 532	3 150	329,87	108 812
1 900	198,97	39 587	3 200	335,10	112 293
1 950	204,20	41 698	3 250	340,34	115 830
2 000	209,44	43 865	3 300	345,57	119 421
2 050	214,68	46 085	3 350	350,81	123 068
2 100	219,91	48 361	3 400	356,05	126 769
2 150	225,15	50 692	3 450	361,28	130 525
2 200	230,38	53 076	3 500	366,52	134 335
2 250	235,62	55 516			

Таблица 2  
Величины  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\sin 3\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\sin 4\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$  при изменении  $\alpha$  от  $0^\circ$  до  $360^\circ$

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\sin 3\alpha$	$\cos 3\alpha$	$\sin 4\alpha$	$\cos 4\alpha$
0	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
5	0,0872	0,9962	0,1736	0,9848	0,2588	0,9659	0,3420	0,9397
10	0,1736	0,9848	0,3420	0,9397	0,5000	0,8660	0,6428	0,7660
15	0,2588	0,9659	0,5000	0,8660	0,7071	0,7071	0,8660	0,5000
20	0,3420	0,9397	0,6428	0,7660	0,8660	0,5000	0,9848	0,1736
25	0,4226	0,9063	0,7660	0,6428	0,9659	0,2588	0,9848	-0,1736
30	0,5000	0,8660	0,8660	0,5000	1,0000	0,0000	0,8660	-0,5000
35	0,5736	0,8192	0,9397	0,3420	0,9659	-0,2588	0,6428	-0,7660
40	0,6428	0,7660	0,9848	0,1736	0,8660	-0,5000	0,3420	-0,9397
45	0,7071	0,7071	1,0000	0,0000	0,7071	-0,7071	0,0000	-1,0000
50	0,7660	0,6428	0,9848	-0,1736	0,5000	-0,8660	-0,3420	-0,9397
55	0,8192	0,5736	0,9397	-0,3420	0,2588	-0,9659	-0,6428	-0,7660
60	0,8660	0,5000	0,8660	-0,5000	0,0000	-1,0000	-0,8660	-0,5000
65	0,9063	0,4226	0,7660	-0,6428	-0,2588	-0,9659	-0,9848	-0,1736
70	0,9397	0,3420	0,6428	-0,7660	-0,5000	-0,8660	-0,9848	0,1736
75	0,9659	0,2588	0,5000	-0,8660	-0,7071	-0,7071	-0,8660	0,5000
80	0,9848	0,1736	0,3420	-0,9397	-0,8660	-0,5000	-0,6428	0,7660
85	0,9962	0,0872	0,1736	-0,9848	-0,9659	-0,2588	-0,3420	0,9397
90	1,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	-1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
95	0,9962	-0,0872	-0,1736	-0,9848	-0,9659	0,2588	0,3420	0,9397
100	0,9848	-0,1736	-0,3420	-0,9397	-0,8660	0,5000	0,6428	0,7660
105	0,9659	-0,2588	-0,5000	-0,8660	-0,7071	0,7071	0,8660	0,5000
110	0,9397	-0,3420	-0,6428	-0,7660	-0,5000	0,8660	0,9848	0,1736
115	0,9063	-0,4226	-0,7660	-0,6428	-0,2588	0,9659	0,9848	-0,1736
120	0,8660	-0,5000	-0,8660	-0,5000	-0,0000	1,0000	0,8660	-0,5000



Продолжение табл. 2

$\alpha^\circ$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\sin 3\alpha$	$\cos 3\alpha$	$\sin 4\alpha$	$\cos 4\alpha$
125	0,8192	-0,5736	-0,9397	-0,3420	0,2588	0,9659	0,6428	-0,7660
130	0,7660	-0,6428	-0,9848	-0,1736	0,5000	0,8660	0,3420	-0,9397
135	0,7071	-0,7071	-1,0000	0,0000	0,7071	0,7071	0,0000	-1,0000
140	0,6428	-0,7660	-0,9848	0,1736	0,8660	0,5000	0,3420	-0,9397
145	0,5736	-0,8192	-0,9397	0,3420	0,9659	0,2588	0,6428	-0,7660
150	0,5000	-0,8660	-0,8660	0,5000	1,0000	0,0000	0,8660	-0,5000
155	0,4226	-0,9063	-0,7660	0,6428	0,9659	-0,2588	0,9848	-0,1736
160	0,3420	-0,9397	-0,6428	0,7660	0,8660	-0,5000	-0,9848	0,1736
165	0,2588	-0,9659	-0,5000	0,8660	0,7071	-0,7071	-0,8660	0,5000
170	0,1736	-0,9848	-0,3420	0,9397	0,5000	-0,8660	-0,6428	0,7660
175	0,0872	-0,9962	-0,1736	0,9848	0,2588	-0,9659	-0,3420	0,9397
180	0,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	-1,0000	-0,0000	1,0000
185	-0,0872	-0,9962	0,1736	0,9848	-0,2588	-0,9659	0,3420	0,9397
190	-0,1736	-0,9848	0,3420	0,9397	-0,5000	-0,8660	0,6428	0,7660
195	-0,2588	-0,9659	0,5000	0,8660	-0,7071	-0,7071	0,8660	0,5000
200	-0,3420	-0,9397	0,6428	0,7660	-0,8660	-0,5000	0,9848	0,1736
205	-0,4226	-0,9063	0,7660	0,6428	-0,9659	-0,2588	0,9848	-0,1736
210	-0,5000	-0,8660	0,8660	0,5000	-1,0000	0,0000	0,8660	-0,5000
215	-0,5736	-0,8192	0,9397	0,3420	-0,9659	0,2588	0,6428	-0,7660
220	-0,6428	-0,7660	0,9848	0,1736	-0,8660	0,5000	0,3420	-0,9397
225	-0,7071	-0,7071	1,0000	0,0000	-0,7071	0,7071	0,0000	-1,0000
230	-0,7660	-0,6428	0,9848	-0,1736	-0,5000	0,8660	-0,3420	-0,9397
235	-0,8192	-0,5736	0,9397	-0,3420	-0,2588	0,9659	-0,6428	-0,7660
240	-0,8660	-0,5000	0,8660	-0,5000	0,0000	1,0000	-0,8660	-0,5000
245	-0,9063	-0,4226	0,7660	-0,6428	0,2588	0,9659	-0,9848	-0,1736
250	-0,9397	-0,3420	0,6428	-0,7660	0,5000	0,8660	-0,9848	0,1736
255	-0,9659	-0,2588	0,5000	-0,8660	0,7071	0,7071	-0,8660	0,5000
260	-0,9848	-0,1736	0,3420	-0,9397	0,8660	0,5000	-0,6428	0,7660
265	-0,9962	-0,0872	0,1736	-0,9848	0,9659	0,2588	-0,3420	0,9397
270	-1,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
275	-0,9962	0,0872	-0,1736	-0,9848	0,9659	-0,2588	0,3420	0,9397
280	-0,9848	0,1736	-0,3420	-0,9397	0,8660	-0,5000	0,6428	0,7660
285	-0,9659	0,2588	-0,5000	-0,8660	0,7071	-0,7071	0,8660	0,5000
290	-0,9397	0,3420	-0,6428	-0,7660	0,5000	-0,8660	0,9848	0,1736
295	-0,9063	0,4226	-0,7660	-0,6428	0,2588	-0,9659	0,9848	-0,1736
300	-0,8660	0,5000	-0,8660	-0,5000	0,0000	-1,0000	0,8660	-0,5000
305	-0,8192	0,5736	-0,9397	-0,3420	-0,2588	-0,9659	0,6428	-0,7660
310	-0,7660	0,6428	-0,9848	-0,1736	-0,5000	-0,8660	0,3420	-0,9397
315	-0,7071	0,7071	-1,0000	0,0000	-0,7071	-0,7071	0,0000	-1,0000
320	-0,6428	0,7660	-0,9848	0,1736	-0,8660	-0,5000	-0,3420	-0,9397
325	-0,5736	0,8192	-0,9397	0,3420	-0,9659	-0,2588	-0,6428	-0,7660
330	-0,5000	0,8660	-0,8660	0,5000	-1,0000	0,0000	-0,8660	-0,5000
335	-0,4226	0,9063	-0,7660	0,6428	-0,9659	0,2588	-0,9848	-0,1736
340	-0,3420	0,9397	-0,6428	0,7660	-0,8660	0,5000	-0,9848	0,1736
345	-0,2588	0,9659	-0,5000	0,8660	-0,7071	0,7071	-0,8660	0,5000
350	-0,1736	0,9848	-0,3420	0,9397	-0,5000	0,8660	-0,6428	0,7660
355	-0,0872	0,9962	-0,1736	0,9848	-0,2588	0,9659	-0,3420	0,9397
360	-0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000

Углы  $\beta^\circ$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\lambda$ .

$\alpha^\circ$	$\lambda$ Знак	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	—	360
5	+	137	134	131	128	126	123	121	119	117	115	113	111	110	—	355
10	+	313	438	301	256	251	246	241	237	233	229	226	222	219	—	350
15	+	447	438	430	422	414	407	401	354	348	343	337	327	327	—	345
20	+	620	608	557	546	536	527	518	510	502	454	447	440	434	—	340
25	+	750	735	722	708	656	645	634	623	613	604	555	546	538	—	335
30	+	917	859	843	827	813	759	746	734	722	711	700	650	641	—	330
35	+	1040	1020	1001	943	926	910	855	841	827	815	803	751	740	—	325
40	+	1158	1135	1114	1054	1035	1017	1000	944	929	915	901	848	836	—	320
45	+	1311	1246	1222	1200	1139	1120	1101	1044	1027	1011	956	942	928	—	315
50	+	1418	1351	1325	1301	1239	1217	1157	1138	1120	1102	1046	1031	1016	—	310
55	+	1519	1450	1422	1356	1332	1309	1247	1227	1207	1149	1131	1115	1059	—	305
60	+	1613	1542	1513	1445	1420	1355	1332	1310	1250	1230	1212	1154	1137	—	300
65	+	1700	1627	1556	1528	1500	1435	1411	1348	1326	1306	1246	1228	1210	—	295
70	+	1739	1705	1633	1603	1534	1508	1443	1419	1357	1335	1275	1256	1237	—	290
75	+	1809	1734	1701	1630	1601	1534	1508	1444	1420	1358	1338	1318	1259	—	285
80	+	1831	1755	1722	1650	1621	1553	1526	1501	1438	1415	1354	1334	1280	—	280
85	+	1845	1808	1734	1702	1632	1604	1537	1512	1448	1425	1404	1343	1324	—	275
90	+	1849	1813	1738	1706	1636	1608	1541	1515	1451	1429	1407	1347	1327	—	270
95	+	1845	1808	1734	1702	1632	1604	1537	1512	1448	1425	1404	1343	1324	—	265
100	+	1831	1755	1722	1650	1621	1553	1526	1501	1438	1415	1354	1334	1314	—	260
105	+	1809	1734	1701	1630	1601	1534	1508	1444	1420	1358	1338	1318	1259	—	255
110	+	1739	1705	1633	1603	1534	1508	1443	1419	1357	1335	1315	1256	1237	—	250
115	+	1700	1627	1556	1528	1500	1435	1411	1348	1326	1306	1246	1228	1210	—	245
120	+	1613	1542	1513	1445	1420	1355	1332	1310	1250	1230	1212	1154	1137	—	240
125	+	1519	1450	1422	1356	1332	1309	1247	1227	1207	1149	1131	1115	1059	—	235
130	+	1418	1351	1325	1301	1239	1217	1157	1138	1120	1102	1046	1031	1016	—	230
135	+	1311	1246	1222	1200	1139	1120	1101	1044	1027	1011	956	942	928	—	225
140	+	1158	1135	1114	1054	1035	1017	1000	944	929	915	901	848	836	—	220
145	+	1040	1020	1001	943	926	910	855	841	827	815	803	751	740	—	215
150	+	917	859	843	827	813	759	746	734	722	711	700	650	641	—	210
155	+	750	735	722	708	656	645	634	623	613	604	555	546	538	—	205
160	+	620	608	557	546	536	527	518	510	502	454	447	440	434	—	200
165	+	447	438	430	422	414	407	401	354	348	343	337	332	327	—	195
170	+	313	307	301	256	251	246	241	237	233	229	226	222	219	—	190
175	+	137	134	131	128	126	123	121	119	117	115	113	111	110	—	185
180	+	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	—	180



$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3
0	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'	0°00'
5	6 37	6 34	6 31	6 28	6 26	6 23	6 21	6 19	6 17	6 15	6 13	6 11	6 10
10	13 13	13 07	13 01	12 56	12 51	12 46	12 41	12 37	12 33	12 29	12 26	12 22	12 19
15	19 47	19 38	19 30	19 22	19 14	19 07	19 01	18 54	18 48	18 43	18 37	18 32	18 27
20	26 20	26 08	25 57	25 46	25 36	25 27	25 18	25 10	25 02	24 54	24 47	24 40	24 34
25	32 50	32 35	32 22	32 08	31 56	31 45	31 34	31 23	31 13	31 04	30 55	30 46	30 38
30	39 17	38 59	38 43	38 27	38 13	37 59	37 46	37 34	37 22	37 11	37 00	36 50	36 41
35	45 40	45 20	45 01	44 43	44 26	44 10	43 55	43 41	43 27	43 15	43 03	42 51	42 40
40	51 58	51 35	51 14	50 54	50 35	50 17	50 00	49 44	49 29	49 15	49 01	48 48	48 36
45	58 11	57 46	57 22	57 00	56 39	56 20	56 01	55 44	55 27	55 11	54 56	54 42	54 28
50	64 18	63 51	63 25	63 01	62 39	62 17	61 57	61 38	61 20	61 02	60 46	60 31	60 16
55	70 19	69 50	69 22	68 56	68 32	68 09	67 47	67 27	67 07	66 49	66 31	66 15	65 59
60	76 13	75 42	75 13	74 45	74 20	73 55	73 32	73 10	72 50	72 30	72 12	71 54	71 37
65	82 00	81 27	80 56	80 28	80 00	79 35	79 11	78 48	78 26	78 06	77 46	77 28	77 10
70	87 39	87 05	86 33	86 03	85 34	85 08	84 43	84 19	83 57	83 35	83 15	82 56	82 37
75	93 09	92 34	92 01	91 30	91 01	90 34	90 08	89 44	89 20	88 58	88 38	88 18	87 59
80	98 31	97 55	97 22	96 50	96 21	95 53	95 26	95 01	94 38	94 15	93 54	93 34	93 14
85	103 45	103 08	102 34	102 02	101 32	101 04	100 37	100 12	99 48	99 25	99 04	98 43	98 24
90	108 49	108 13	107 38	107 06	106 36	106 08	105 41	105 15	104 51	104 29	104 07	103 47	103 27
95	113 45	113 08	112 34	112 02	111 32	111 04	110 37	110 12	109 48	109 25	109 04	108 43	108 24
100	118 31	117 55	117 22	116 50	116 21	115 53	115 26	115 01	114 38	114 15	113 54	113 34	113 14
105	123 09	122 34	122 01	121 30	121 01	120 34	120 08	119 44	119 20	118 58	118 38	118 18	117 59
110	127 39	127 05	126 33	126 03	125 34	125 08	124 43	124 19	123 57	123 35	123 15	122 56	122 37
115	132 00	131 27	130 56	130 28	130 00	129 35	129 11	128 48	128 26	128 06	127 46	127 28	127 10
120	136 13	135 42	135 13	134 45	134 20	133 55	133 32	133 10	132 50	132 30	132 12	131 54	131 37
125	140 19	139 50	139 22	138 56	138 32	138 09	137 47	137 27	137 07	136 49	136 31	136 15	135 59
130	144 18	143 51	143 25	143 01	142 39	142 17	141 57	141 38	141 20	141 02	140 46	140 31	140 16

Продолжение табл. 4

$\lambda \backslash \alpha^\circ$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3
185	183 23	183 26	183 29	183 32	183 34	183 37	183 39	183 41	183 43	183 45	183 47	183 49	183 50
190	186 47	186 53	186 59	187 04	187 09	187 14	187 19	187 23	187 27	187 31	187 34	187 38	187 41
195	190 13	190 22	190 30	190 38	190 46	190 53	190 59	191 06	191 12	191 17	191 23	191 28	191 33
200	193 40	193 52	194 03	194 14	194 24	194 33	194 42	194 50	194 58	195 06	195 13	195 20	195 26
205	197 10	197 25	197 38	197 52	198 04	198 15	198 26	198 37	198 47	198 56	199 05	199 14	199 22
210	200 43	201 01	201 17	201 33	201 47	202 01	202 14	202 26	202 38	202 49	203 00	203 10	203 19
215	204 20	204 40	204 59	205 17	205 34	205 50	206 05	206 19	206 33	206 45	206 57	207 09	207 20
220	208 02	208 25	208 46	209 06	209 25	209 43	210 00	210 16	210 31	210 45	210 59	211 12	211 24
225	211 39	212 14	212 38	213 00	213 21	213 40	213 59	214 16	214 33	214 49	215 06	215 18	215 32
230	215 42	216 09	216 35	216 59	217 21	217 43	218 03	218 22	218 40	218 58	219 14	219 29	219 44
235	219 41	220 10	220 38	221 04	221 28	221 51	222 13	222 33	222 53	223 11	223 29	223 45	224 01
240	223 47	224 18	224 47	225 15	225 40	226 05	226 28	226 50	227 10	227 30	227 48	228 06	228 23
245	228 00	228 33	229 04	229 32	230 00	230 25	230 49	231 12	231 34	231 54	232 14	232 32	232 50
250	232 21	232 55	233 27	233 57	234 26	234 52	235 17	235 41	236 03	236 25	236 45	237 04	237 23
255	236 51	237 26	237 59	238 30	238 59	239 26	239 52	240 16	240 40	241 02	241 22	241 42	242 01
260	241 29	242 05	242 38	243 10	243 39	244 07	244 34	244 59	245 22	245 45	246 06	246 26	246 46
265	246 15	246 52	247 26	247 58	248 28	248 56	249 23	249 48	250 12	250 35	250 56	251 17	251 36
270	251 11	251 47	252 22	252 54	253 24	253 52	254 19	254 45	255 09	255 31	255 53	256 13	256 33
275	256 15	256 52	257 26	257 58	258 28	258 56	259 23	259 48	260 12	260 35	260 56	261 17	261 36
280	261 29	262 05	262 38	263 10	263 39	264 07	264 34	264 59	265 22	265 45	266 06	266 26	266 46
285	266 51	267 26	267 59	268 30	268 59	269 26	269 52	270 16	270 40	271 02	271 22	271 42	272 01
290	272 21	272 55	273 27	273 57	274 26	274 52	275 17	275 41	276 03	276 25	276 45	277 04	277 23
295	277 00	278 33	279 04	279 32	280 00	280 25	280 49	281 12	281 34	281 54	282 14	282 32	282 50
300	283 47	284 18	284 47	285 15	285 40	286 05	286 28	286 50	287 10	287 30	287 48	288 06	288 23
305	289 41	290 10	290 38	291 04	291 28	291 51	292 13	292 33	292 53	293 11	293 29	293 45	294 01
310	295 42	296 09	296 35	296 59	297 21	297 43	298 03	298 22	298 40	298 58	299 14	299 29	299 44
315	301 49	302 14	302 38	303 00	303 21	303 40	303 59	304 16	304 33	304 49	305 04	305 18	305 32
320	308 02	308 25	308 46	309 06	309 25	309 43	310 00	310 16	310 31	310 45	310 59	311 12	311 24
325	314 20	314 40	314 59	315 17	315 34	315 50	316 05	316 19	316 33	316 45	316 57	317 09	317 20
330	320 43	321 01	321 17	321 33	321 47	322 01	322 14	322 26	322 38	322 49	323 00	323 10	323 19
335	327 10	327 25	327 38	327 52	328 04	328 15	328 26	328 37	328 47	328 56	329 05	329 14	329 22
340	333 40	333 52	334 03	334 14	334 24	334 33	334 42	334 50	334 58	335 06	335 13	335 20	335 26
345	340 13	340 22	340 30	340 38	340 46	340 53	340 59	341 06	341 12	341 17	341 23	341 28	341 33
350	346 47	346 53	346 59	347 04	347 09	347 14	347 19	347 23	347 27	347 31	347 34	347 38	347 41
355	353 23	351 26	353 29	353 32	353 34	353 37	353 39	353 41	353 43	353 45	353 47	353 49	353 50
360	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00	360 00



Величины  $\sin \beta$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\lambda$ 

Таблица 5

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	360
5	+	0,0281	0,0272	0,0264	0,0256	0,0249	0,0242	0,0236	0,0229	0,0224	0,0218	0,0213	0,0208	0,0203	—	355
10	+	0,0560	0,0543	0,0526	0,0511	0,0496	0,0482	0,0469	0,0457	0,0445	0,0434	0,0424	0,0413	0,0404	—	350
15	+	0,0835	0,0809	0,0784	0,0761	0,0740	0,0719	0,0700	0,0681	0,0664	0,0647	0,0631	0,0616	0,0602	—	345
20	+	0,1103	0,1069	0,1036	0,1006	0,0977	0,0950	0,0924	0,0900	0,0877	0,0855	0,0834	0,0814	0,0795	—	340
25	+	0,1363	0,1321	0,1281	0,1243	0,1208	0,1174	0,1142	0,1112	0,1084	0,1057	0,1031	0,1006	0,0983	—	335
30	+	0,1613	0,1563	0,1515	0,1471	0,1429	0,1389	0,1351	0,1316	0,1282	0,1250	0,1220	0,1191	0,1163	—	330
35	+	0,1850	0,1792	0,1738	0,1687	0,1639	0,1593	0,1550	0,1509	0,1471	0,1434	0,1399	0,1366	0,1334	—	325
40	+	0,2074	0,2009	0,1948	0,1891	0,1837	0,1786	0,1737	0,1692	0,1648	0,1607	0,1568	0,1530	0,1495	—	320
45	+	0,2281	0,2210	0,2143	0,2080	0,2020	0,1964	0,1911	0,1861	0,1813	0,1768	0,1725	0,1684	0,1644	—	315
50	+	0,2471	0,2394	0,2321	0,2253	0,2189	0,2128	0,2070	0,2016	0,1964	0,1915	0,1868	0,1824	0,1781	—	310
55	+	0,2642	0,2560	0,2482	0,2409	0,2340	0,2275	0,2214	0,2156	0,2100	0,2048	0,1998	0,1950	0,1905	—	305
60	+	0,2794	0,2706	0,2624	0,2547	0,2474	0,2406	0,2341	0,2279	0,2221	0,2165	0,2112	0,2062	0,2014	—	300
65	+	0,2924	0,2832	0,2746	0,2666	0,2589	0,2518	0,2450	0,2385	0,2324	0,2266	0,2211	0,2158	0,2108	—	295
70	+	0,3031	0,2937	0,2848	0,2764	0,2685	0,2610	0,2540	0,2473	0,2410	0,2349	0,2292	0,2237	0,2185	—	290
75	+	0,3116	0,3019	0,2927	0,2841	0,2760	0,2683	0,2611	0,2542	0,2477	0,2415	0,2356	0,2300	0,2246	—	285
80	+	0,3177	0,3078	0,2984	0,2897	0,2814	0,2736	0,2662	0,2592	0,2525	0,2462	0,2402	0,2345	0,2290	—	280
85	+	0,3214	0,3113	0,3019	0,2930	0,2846	0,2767	0,2692	0,2622	0,2554	0,2491	0,2430	0,2372	0,2317	—	275
90	+	0,3226	0,3125	0,3030	0,2941	0,2857	0,2778	0,2703	0,2632	0,2564	0,2500	0,2439	0,2381	0,2326	—	270
95	+	0,3214	0,3113	0,3019	0,2930	0,2846	0,2767	0,2692	0,2622	0,2554	0,2491	0,2430	0,2372	0,2317	—	265
100	+	0,3177	0,3078	0,2984	0,2897	0,2814	0,2736	0,2662	0,2592	0,2525	0,2462	0,2402	0,2345	0,2290	—	260
105	+	0,3116	0,3019	0,2927	0,2841	0,2760	0,2683	0,2611	0,2542	0,2477	0,2415	0,2356	0,2300	0,2246	—	255
110	+	0,3031	0,2937	0,2848	0,2764	0,2685	0,2610	0,2540	0,2473	0,2410	0,2349	0,2292	0,2237	0,2185	—	250
115	+	0,2924	0,2832	0,2746	0,2666	0,2589	0,2518	0,2450	0,2385	0,2324	0,2266	0,2211	0,2158	0,2108	—	245
120	+	0,2794	0,2706	0,2624	0,2547	0,2474	0,2406	0,2341	0,2279	0,2221	0,2165	0,2112	0,2062	0,2014	—	240
125	+	0,2642	0,2560	0,2482	0,2409	0,2340	0,2275	0,2214	0,2156	0,2100	0,2048	0,1998	0,1950	0,1905	—	235
130	+	0,2471	0,2394	0,2321	0,2253	0,2189	0,2128	0,2070	0,2016	0,1964	0,1915	0,1868	0,1824	0,1781	—	230
135	+	0,2281	0,2210	0,2143	0,2080	0,2020	0,1964	0,1911	0,1861	0,1813	0,1768	0,1725	0,1684	0,1644	—	225
140	+	0,2074	0,2009	0,1948	0,1891	0,1837	0,1786	0,1737	0,1692	0,1648	0,1607	0,1568	0,1530	0,1495	—	220
145	+	0,1850	0,1792	0,1738	0,1687	0,1639	0,1593	0,1550	0,1509	0,1471	0,1434	0,1399	0,1366	0,1334	—	215
150	+	0,1613	0,1563	0,1515	0,1471	0,1429	0,1389	0,1351	0,1316	0,1282	0,1250	0,1220	0,1191	0,1163	—	210
155	+	0,1363	0,1321	0,1281	0,1243	0,1208	0,1174	0,1142	0,1112	0,1084	0,1057	0,1031	0,1006	0,0983	—	205
160	+	0,1103	0,1069	0,1036	0,1006	0,0977	0,0950	0,0924	0,0900	0,0877	0,0855	0,0834	0,0814	0,0795	—	200
165	+	0,0835	0,0809	0,0784	0,0761	0,0740	0,0719	0,0700	0,0681	0,0664	0,0647	0,0631	0,0616	0,0602	—	195
170	+	0,0560	0,0543	0,0526	0,0511	0,0496	0,0482	0,0469	0,0457	0,0445	0,0434	0,0424	0,0413	0,0404	—	190
175	+	0,0281	0,0272	0,0264	0,0256	0,0249	0,0242	0,0236	0,0229	0,0224	0,0218	0,0213	0,0208	0,0203	—	185
180	+	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	180

Величины  $\cos \beta$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\lambda$ 

Таблица 6

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
	Знак															
0	+	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	+	360
5	+	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	+	355
10	+	0,9984	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	+	350
15	+	0,9965	0,9967	0,9969	0,9971	0,9973	0,9974	0,9975	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	+	345
20	+	0,9939	0,9943	0,9946	0,9949	0,9952	0,9955	0,9957	0,9959	0,9962	0,9963	0,9965	0,9967	0,9968	+	340
25	+	0,9907	0,9913	0,9918	0,9923	0,9927	0,9931	0,9934	0,9938	0,9941	0,9944	0,9947	0,9949	0,9952	+	335
30	+	0,9869	0,9877	0,9885	0,9891	0,9897	0,9903	0,9908	0,9913	0,9918	0,9922	0,9925	0,9929	0,9933	+	330
35	+	0,9827	0,9838	0,9848	0,9857	0,9865	0,9872	0,9879	0,9885	0,9891	0,9897	0,9902	0,9906	0,9911	+	325
40	+	0,9783	0,9796	0,9809	0,9820	0,9830	0,9839	0,9848	0,9856	0,9863	0,9870	0,9876	0,9882	0,9888	+	320
45	+	0,9737	0,9753	0,9768	0,9782	0,9794	0,9805	0,9816	0,9825	0,9834	0,9843	0,9850	0,9857	0,9864	+	315
50	+	0,9690	0,9709	0,9727	0,9743	0,9758	0,9771	0,9783	0,9795	0,9805	0,9815	0,9824	0,9832	0,9840	+	310
55	+	0,9645	0,9667	0,9687	0,9706	0,9722	0,9738	0,9752	0,9765	0,9777	0,9788	0,9799	0,9808	0,9817	+	305
60	+	0,9602	0,9627	0,9649	0,9670	0,9689	0,9706	0,9722	0,9737	0,9750	0,9763	0,9774	0,9785	0,9795	+	300
65	+	0,9563	0,9591	0,9616	0,9638	0,9659	0,9678	0,9695	0,9711	0,9726	0,9740	0,9753	0,9764	0,9775	+	295
70	+	0,9529	0,9559	0,9586	0,9611	0,9633	0,9653	0,9672	0,9689	0,9705	0,9720	0,9734	0,9746	0,9759	+	290
75	+	0,9502	0,9534	0,9562	0,9588	0,9612	0,9633	0,9653	0,9671	0,9689	0,9704	0,9718	0,9732	0,9744	+	285
80	+	0,9482	0,9515	0,9544	0,9571	0,9596	0,9619	0,9639	0,9658	0,9676	0,9692	0,9707	0,9721	0,9735	+	280
85	+	0,9469	0,9503	0,9534	0,9561	0,9587	0,9609	0,9631	0,9650	0,9668	0,9685	0,9700	0,9715	0,9728	+	275
90	+	0,9466	0,9499	0,9530	0,9558	0,9583	0,9606	0,9628	0,9648	0,9666	0,9683	0,9698	0,9712	0,9726	+	270
95	+	0,9469	0,9503	0,9534	0,9561	0,9587	0,9609	0,9631	0,9650	0,9668	0,9685	0,9700	0,9715	0,9728	+	265
100	+	0,9482	0,9515	0,9544	0,9571	0,9596	0,9619	0,9639	0,9658	0,9676	0,9692	0,9707	0,9721	0,9735	+	260
105	+	0,9502	0,9534	0,9562	0,9588	0,9612	0,9633	0,9653	0,9671	0,9689	0,9704	0,9718	0,9732	0,9744	+	255
110	+	0,9529	0,9559	0,9586	0,9611	0,9633	0,9653	0,9672	0,9689	0,9705	0,9720	0,9734	0,9746	0,9759	+	250
115	+	0,9563	0,9591	0,9616	0,9638	0,9659	0,9678	0,9695	0,9711	0,9726	0,9740	0,9753	0,9764	0,9775	+	245
120	+	0,9602	0,9627	0,9649	0,9670	0,9689	0,9706	0,9722	0,9737	0,9750	0,9763	0,9774	0,9785	0,9795	+	240
125	+	0,9645	0,9667	0,9687	0,9706	0,9722	0,9738	0,9752	0,9765	0,9777	0,9788	0,9799	0,9808	0,9817	+	235
130	+	0,9690	0,9709	0,9727	0,9743	0,9758	0,9771	0,9783	0,9795	0,9805	0,9815	0,9824	0,9832	0,9840	+	230
135	+	0,9737	0,9753	0,9768	0,9782	0,9794	0,9805	0,9816	0,9825	0,9834	0,9843	0,9850	0,9857	0,9864	+	225
140	+	0,9783	0,9796	0,9809	0,9820	0,9830	0,9839	0,9848	0,9856	0,9863	0,9870	0,9876	0,9882	0,9888	+	220
145	+	0,9827	0,9838	0,9848	0,9857	0,9865	0,9872	0,9879	0,9885	0,9891	0,9897	0,9902	0,9906	0,9911	+	215
150	+	0,9869	0,9877	0,9885	0,9891	0,9897	0,9903	0,9908	0,9913	0,9918	0,9922	0,9925	0,9929	0,9933	+	210
155	+	0,9907	0,9913	0,9918	0,9923	0,9927	0,9931	0,9934	0,9938	0,9941	0,9944	0,9947	0,9949	0,9952	+	205
160	+	0,9939	0,9943	0,9946	0,9949	0,9952	0,9955	0,9957	0,9959	0,9962	0,9963	0,9965	0,9967	0,9968	+	200
165	+	0,9965	0,9967	0,9969	0,9971	0,9973	0,9974	0,9975	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	+	195
170	+	0,9984	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	+	190
175	+	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	+	185
180	+	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	+	180



Величины  $\operatorname{tg} \beta$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\lambda$ .

Таблица 7

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	360
5	+	0,0282	0,0274	0,0265	0,0256	0,0250	0,0242	0,0236	0,0230	0,0224	0,0218	0,0212	0,0207	0,0204	—	355
10	+	0,0562	0,0545	0,0527	0,0511	0,0497	0,0483	0,0470	0,0457	0,0445	0,0435	0,0424	0,0413	0,0405	—	350
15	+	0,0837	0,0810	0,0787	0,0764	0,0740	0,0720	0,0702	0,0682	0,0664	0,0650	0,0632	0,0618	0,0603	—	345
20	+	0,1110	0,1075	0,1042	0,1011	0,0982	0,0954	0,0928	0,0904	0,0880	0,0858	0,0837	0,0816	0,0799	—	340
25	+	0,1376	0,1331	0,1293	0,1252	0,1216	0,1184	0,1151	0,1119	0,1089	0,1063	0,1036	0,1013	0,0986	—	335
30	+	0,1635	0,1581	0,1533	0,1487	0,1443	0,1403	0,1364	0,1327	0,1293	0,1260	0,1229	0,1198	0,1172	—	330
35	+	0,1884	0,1823	0,1766	0,1712	0,1662	0,1614	0,1569	0,1527	0,1486	0,1450	0,1414	0,1379	0,1346	—	325
40	+	0,2120	0,2050	0,1986	0,1925	0,1868	0,1815	0,1764	0,1716	0,1671	0,1628	0,1587	0,1548	0,1512	—	320
45	+	0,2342	0,2266	0,2193	0,2126	0,2062	0,2004	0,1947	0,1896	0,1844	0,1796	0,1751	0,1709	0,1667	—	315
50	+	0,2549	0,2465	0,2386	0,2313	0,2243	0,2178	0,2116	0,2058	0,2003	0,1951	0,1902	0,1856	0,1811	—	310
55	+	0,2739	0,2648	0,2561	0,2481	0,2407	0,2336	0,2269	0,2208	0,2147	0,2092	0,2038	0,1989	0,1941	—	305
60	+	0,2908	0,2811	0,2719	0,2634	0,2554	0,2478	0,2407	0,2341	0,2277	0,2218	0,2161	0,2107	0,2056	—	300
65	+	0,3057	0,2953	0,2855	0,2767	0,2680	0,2602	0,2527	0,2456	0,2389	0,2327	0,2266	0,2211	0,2156	—	295
70	+	0,3182	0,3073	0,2970	0,2876	0,2787	0,2704	0,2626	0,2552	0,2483	0,2417	0,2355	0,2296	0,2238	—	290
75	+	0,3278	0,3166	0,3061	0,2962	0,2871	0,2786	0,2704	0,2630	0,2552	0,2487	0,2425	0,2364	0,2306	—	285
80	+	0,3349	0,3233	0,3127	0,3026	0,2932	0,2844	0,2761	0,2683	0,2610	0,2540	0,2474	0,2413	0,2352	—	280
85	+	0,3395	0,3275	0,3166	0,3064	0,2969	0,2880	0,2795	0,2717	0,2642	0,2571	0,2506	0,2441	0,2382	—	275
90	+	0,3408	0,3291	0,3180	0,3077	0,2981	0,2891	0,2807	0,2728	0,2653	0,2582	0,2515	0,2453	0,2392	—	270
95	+	0,3395	0,3275	0,3166	0,3064	0,2969	0,2880	0,2795	0,2717	0,2642	0,2571	0,2506	0,2441	0,2382	—	265
100	+	0,3349	0,3233	0,3127	0,3026	0,2932	0,2844	0,2761	0,2683	0,2610	0,2540	0,2474	0,2413	0,2352	—	260
105	+	0,3278	0,3166	0,3061	0,2962	0,2871	0,2786	0,2704	0,2630	0,2552	0,2487	0,2425	0,2364	0,2306	—	255
110	+	0,3182	0,3073	0,2970	0,2876	0,2787	0,2704	0,2626	0,2552	0,2483	0,2417	0,2355	0,2296	0,2238	—	250
115	+	0,3057	0,2953	0,2855	0,2767	0,2680	0,2602	0,2527	0,2456	0,2389	0,2327	0,2266	0,2211	0,2156	—	245
120	+	0,2908	0,2811	0,2719	0,2634	0,2554	0,2478	0,2407	0,2341	0,2277	0,2218	0,2161	0,2107	0,2056	—	240
125	+	0,2739	0,2648	0,2561	0,2481	0,2407	0,2336	0,2269	0,2208	0,2147	0,2092	0,2038	0,1989	0,1941	—	235
130	+	0,2549	0,2465	0,2386	0,2313	0,2243	0,2178	0,2116	0,2058	0,2003	0,1951	0,1902	0,1856	0,1811	—	230
135	+	0,2342	0,2266	0,2193	0,2126	0,2062	0,2004	0,1947	0,1896	0,1844	0,1796	0,1751	0,1709	0,1667	—	225
140	+	0,2120	0,2050	0,1986	0,1925	0,1868	0,1815	0,1764	0,1716	0,1671	0,1628	0,1587	0,1548	0,1512	—	220
145	+	0,1884	0,1823	0,1766	0,1712	0,1662	0,1614	0,1569	0,1527	0,1486	0,1450	0,1414	0,1379	0,1346	—	215
150	+	0,1635	0,1581	0,1533	0,1487	0,1443	0,1403	0,1364	0,1327	0,1293	0,1260	0,1229	0,1198	0,1172	—	210
155	+	0,1376	0,1331	0,1293	0,1252	0,1216	0,1184	0,1151	0,1119	0,1089	0,1063	0,1036	0,1013	0,0986	—	205
160	+	0,1110	0,1075	0,1042	0,1011	0,0982	0,0954	0,0928	0,0904	0,0880	0,0858	0,0837	0,0816	0,0799	—	200
165	+	0,0837	0,0810	0,0787	0,0764	0,0740	0,0720	0,0702	0,0682	0,0664	0,0650	0,0632	0,0618	0,0603	—	195
170	+	0,0562	0,0545	0,0527	0,0511	0,0497	0,0483	0,0470	0,0457	0,0445	0,0435	0,0424	0,0413	0,0405	—	190
175	+	0,0282	0,0274	0,0265	0,0256	0,0250	0,0242	0,0236	0,0230	0,0224	0,0218	0,0212	0,0207	0,0204	—	185
180	+	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	180

Величины  $\sin(\alpha + \beta)$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\lambda$ .

Таблица 8

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—	360
5	+	0,1152	0,1144	0,1135	0,1126	0,1120	0,1112	0,1106	0,1100	0,1095	0,1089	0,1083	0,1077	0,1074	—	355
10	+	0,2286	0,2269	0,2252	0,2238	0,2224	0,2210	0,2196	0,2184	0,2173	0,2162	0,2153	0,2142	0,2133	—	350
15	+	0,3385	0,3360	0,3338	0,3316	0,3294	0,3275	0,3258	0,3239	0,3223	0,3209	0,3192	0,3179	0,3165	—	345
20	+	0,4436	0,4405	0,4376	0,4347	0,4321	0,4297	0,4274	0,4253	0,4231	0,4210	0,4192	0,4173	0,4158	—	340
25	+	0,5422	0,5385	0,5353	0,5319	0,5289	0,5262	0,5235	0,5208	0,5183	0,5160	0,5138	0,5115	0,5095	—	335
30	+	0,6332	0,6291	0,6255	0,6218	0,6186	0,6154	0,6124	0,6097	0,6069	0,6044	0,6018	0,5995	0,5974	—	330
35	+	0,7153	0,7112	0,7073	0,7036	0,7001	0,6968	0,6936	0,6907	0,6877	0,6852	0,6826	0,6801	0,6777	—	325
40	+	0,7877	0,7835	0,7797	0,7760	0,7725	0,7692	0,7660	0,7630	0,7602	0,7576	0,7549	0,7524	0,7501	—	320
45	+	0,8497	0,8459	0,8421	0,8387	0,8353	0,8323	0,8292	0,8264	0,8236	0,8210	0,8185	0,8161	0,8138	—	315
50	+	0,9011	0,8976	0,8943	0,8911	0,8882	0,8853	0,8825	0,8799	0,8774	0,8749	0,8726	0,8705	0,8683	—	310
55	+	0,9416	0,9387	0,9359	0,9332	0,9306	0,9282	0,9258	0,9236	0,9213	0,9193	0,9172	0,9153	0,9134	—	305
60	+	0,9712	0,9690	0,9669	0,9648	0,9628	0,9609	0,9590	0,9572	0,9555	0,9537	0,9521	0,9505	0,9490	—	300
65	+	0,9903	0,9889	0,9876	0,9862	0,9848	0,9835	0,9822	0,9810	0,9797	0,9785	0,9773	0,9762	0,9750	—	295
70	+	0,9992	0,9987	0,9982	0,9976	0,9970	0,9964	0,9958	0,9951	0,9944	0,9937	0,9931	0,9924	0,9917	—	290
75	+	0,9985	0,9990	0,9994	0,9997	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9994	—	285
80	+	0,9890	0,9905	0,9917	0,9929	0,9939	0,9947	0,9955	0,9962	0,9967	0,9973	0,9977	0,9981	0,9984	—	280
85	+	0,9713	0,9738	0,9760	0,9780	0,9798	0,9814	0,9829	0,9842	0,9854	0,9865	0,9875	0,9885	0,9888	—	275
90	+	0,9466	0,9499	0,9530	0,9558	0,9583	0,9606	0,9628	0,9648	0,9666	0,9682	0,9698	0,9712	0,9726	—	270
95	+	0,9153	0,9196	0,9234	0,9270	0,9302	0,9332	0,9360	0,9385	0,9409	0,9431	0,9451	0,9471	0,9489	—	265
100	+	0,8787	0,8836	0,8881	0,8923	0,8961	0,8997	0,9031	0,9062	0,9090	0,9118	0,9143	0,9166	0,9189	—	260
105	+	0,8372	0,8428	0,8479	0,8526	0,8570	0,8610	0,8649	0,8683	0,8718	0,8749	0,8777	0,8805	0,8831	—	255
110	+	0,7918	0,7978	0,8033	0,8085	0,8134	0,8178	0,8220	0,8259	0,8295	0,8331	0,8363	0,8393	0,8423	—	250
115	+	0,7431	0,7495	0,7555	0,7608	0,7660	0,7707	0,7751	0,7793	0,7833	0,7869	0,7905	0,7937	0,7969	—	245
120	+	0,6919	0,6984	0,7044	0,7102	0,7153	0,7203	0,7250	0,7292	0,7333	0,7373	0,7408	0,7443	0,7476	—	240
125	+	0,6385	0,6450	0,6512	0,6569	0,6622	0,6672	0,6719	0,6762	0,6805	0,6843	0,6881	0,6915	0,6949	—	235
130	+	0,5835	0,5899	0,5960	0,6016	0,6067	0,6118	0,6163	0,6207	0,6248	0,6289	0,6325	0,6359	0,6392	—	230
135	+	0,5272	0,5334	0,5393	0,5446	0,5498	0,5544	0,5590	0,5634	0,5671	0,5710	0,5745	0,5779	0,5812	—	225
140	+	0,4700	0,4759	0,4812	0,4863	0,4912	0,4957	0,5000	0,5040	0,5078	0,5113	0,5148	0,5180	0,5210	—	220
145	+	0,4120	0,4173	0,4224	0,4271	0,4316	0,4358	0,4397	0,4433	0,4470	0,4501	0,4532	0,4563	0,4592	—	21



Величины  $\cos(\alpha + \beta)$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\lambda$ .

Таблица 9

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	+	360
5	+	0,9933	0,9934	0,9935	0,9936	0,9937	0,9938	0,9939	0,9939	0,9940	0,9941	0,9941	0,9942	0,9942	+	355
10	+	0,9735	0,9739	0,9743	0,9746	0,9750	0,9753	0,9756	0,9759	0,9761	0,9764	0,9765	0,9768	0,9770	+	350
15	+	0,9410	0,9419	0,9426	0,9434	0,9442	0,9449	0,9454	0,9461	0,9467	0,9471	0,9477	0,9481	0,9486	+	345
20	+	0,8962	0,8978	0,8992	0,9006	0,9018	0,9030	0,9041	0,9051	0,9061	0,9070	0,9079	0,9088	0,9095	+	340
25	+	0,8403	0,8426	0,8445	0,8468	0,8487	0,8504	0,8520	0,8537	0,8552	0,8566	0,8579	0,8593	0,8605	+	335
30	+	0,7740	0,7773	0,7802	0,7832	0,7857	0,7882	0,7905	0,7926	0,7948	0,7967	0,7986	0,8004	0,8020	+	330
35	+	0,6988	0,7030	0,7069	0,7106	0,7141	0,7173	0,7204	0,7232	0,7260	0,7284	0,7308	0,7331	0,7353	+	325
40	+	0,6161	0,6214	0,6262	0,6307	0,6350	0,6390	0,6428	0,6463	0,6497	0,6528	0,6558	0,6587	0,6613	+	320
45	+	0,5272	0,5334	0,5393	0,5446	0,5498	0,5544	0,5590	0,5631	0,5671	0,5710	0,5745	0,5779	0,5812	+	315
50	+	0,4337	0,4407	0,4475	0,4537	0,4594	0,4651	0,4702	0,4751	0,4797	0,4843	0,4884	0,4922	0,4960	+	310
55	+	0,3368	0,3448	0,3524	0,3595	0,3660	0,3722	0,3781	0,3835	0,3889	0,3937	0,3985	0,4028	0,4070	+	305
60	+	0,2383	0,2470	0,2552	0,2630	0,2700	0,2770	0,2835	0,2896	0,2952	0,3007	0,3057	0,3107	0,3154	+	300
65	+	0,1392	0,1487	0,1576	0,1656	0,1737	0,1808	0,1877	0,1942	0,2005	0,2062	0,2119	0,2170	0,2221	+	295
70	+	0,0410	0,0509	0,0602	0,0689	0,0773	0,0848	0,0921	0,0990	0,1054	0,1118	0,1175	0,1230	0,1285	+	290
75	+	0,0550	0,0448	0,0352	0,0262	0,0177	0,0099	0,0023	0,0047 <sup>1)</sup>	0,0116 <sup>1)</sup>	0,0180 <sup>1)</sup>	0,0239 <sup>1)</sup>	0,0297 <sup>1)</sup>	0,0352 <sup>1)</sup>	—	285
80	—	0,1481	0,1377	0,1282	0,1190	0,1106	0,1025	0,0947	0,0874	0,0808	0,0741	0,0680	0,0622	0,0564	—	280
85	—	0,2377	0,2272	0,2176	0,2085	0,1999	0,1920	0,1842	0,1771	0,1702	0,1636	0,1576	0,1516	0,1455	—	275
90	—	0,3225	0,3126	0,3030	0,2941	0,2857	0,2778	0,2702	0,2631	0,2564	0,2501	0,2439	0,2383	0,2326	—	270
95	—	0,4028	0,3929	0,3838	0,3752	0,3670	0,3595	0,3521	0,3453	0,3387	0,3324	0,3267	0,3209	0,3157	—	265
100	—	0,4774	0,4682	0,4597	0,4514	0,4439	0,4365	0,4295	0,4229	0,4168	0,4107	0,4051	0,3998	0,3945	—	260
105	—	0,5468	0,5383	0,5302	0,5225	0,5153	0,5085	0,5020	0,4960	0,4899	0,4843	0,4792	0,4741	0,4692	—	255
110	—	0,6108	0,6030	0,5955	0,5885	0,5816	0,5755	0,5695	0,5638	0,5585	0,5531	0,5483	0,5437	0,5390	—	250
115	—	0,6691	0,6620	0,6552	0,6490	0,6428	0,6372	0,6318	0,6266	0,6216	0,6170	0,6125	0,6083	0,6041	—	245
120	—	0,7220	0,7157	0,7098	0,7040	0,6988	0,6936	0,6888	0,6843	0,6799	0,6756	0,6717	0,6678	0,6641	—	240
125	—	0,7696	0,7642	0,7589	0,7540	0,7493	0,7449	0,7406	0,7367	0,7327	0,7292	0,7256	0,7224	0,7191	—	235
130	—	0,8121	0,8075	0,8030	0,7988	0,7949	0,7910	0,7875	0,7841	0,7808	0,7775	0,7746	0,7718	0,7690	—	230
135	—	0,8497	0,8459	0,8421	0,8387	0,8353	0,8323	0,8292	0,8264	0,8236	0,8210	0,8185	0,8161	0,8138	—	225
140	—	0,8827	0,8795	0,8766	0,8738	0,8711	0,8685	0,8660	0,8637	0,8615	0,8594	0,8573	0,8554	0,8536	—	220
145	—	0,9112	0,9088	0,9064	0,9042	0,9021	0,9001	0,8982	0,8964	0,8945	0,8930	0,8914	0,8898	0,8884	—	215
150	—	0,9353	0,9335	0,9318	0,9301	0,9286	0,9271	0,9257	0,9243	0,9230	0,9218	0,9205	0,9194	0,9183	—	210
155	—	0,9555	0,9542	0,9530	0,9518	0,9507	0,9497	0,9487	0,9477	0,9467	0,9459	0,9450	0,9442	0,9434	—	205
160	—	0,9717	0,9709	0,9701	0,9693	0,9686	0,9679	0,9673	0,9667	0,9661	0,9655	0,9649	0,9644	0,9639	—	200
165	—	0,9841	0,9837	0,9833	0,9828	0,9824	0,9820	0,9817	0,9813	0,9810	0,9807	0,9803	0,9800	0,9798	—	195
170	—	0,9930	0,9928	0,9926	0,9924	0,9922	0,9920	0,9919	0,9917	0,9916	0,9914	0,9913	0,9911	0,9910	—	190
175	—	0,9983	0,9982	0,9982	0,9981	0,9981	0,9980	0,9980	0,9979	0,9979	0,9979	0,9978	0,9978	0,9978	—	185
180	—	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	—	180

Величины  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\lambda$ .

Таблица 10

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	+	360
5	+	0,1153	0,1144	0,1135	0,1126	0,1120	0,1112	0,1106	0,1100	0,1095	0,1089	0,1083	0,1077	0,1074	+	355
10	+	0,2290	0,2273	0,2255	0,2240	0,2226	0,2212	0,2199	0,2187	0,2175	0,2164	0,2154	0,2144	0,2135	+	350
15	+	0,3396	0,3371	0,3348	0,3326	0,3303	0,3284	0,3266	0,3246	0,3230	0,3216	0,3199	0,3185	0,3171	+	345
20	+	0,4463	0,4430	0,4399	0,4370	0,4343	0,4317	0,4293	0,4269	0,4247	0,4227	0,4207	0,4187	0,4171	+	340
25	+	0,5473	0,5433	0,5400	0,5360	0,5328	0,5299	0,5270	0,5240	0,5214	0,5189	0,5165	0,5141	0,5120	+	335
30	+	0,6416	0,6369	0,6327	0,6288	0,6250	0,6215	0,6181	0,6150	0,6120	0,6091	0,6064	0,6038	0,5978	+	330
35	+	0,7279	0,7229	0,7182	0,7138	0,7097	0,7058	0,7024	0,6987	0,6953	0,6923	0,6894	0,6865	0,6838	+	325
40	+	0,8051	0,7998	0,7949	0,7903	0,7859	0,7818	0,7779	0,7743	0,7708	0,7675	0,7644	0,7614	0,7586	+	320
45	+	0,8727	0,8673	0,8621	0,8574	0,8529	0,8489	0,8447	0,8411	0,8375	0,8341	0,8310	0,8280	0,8250	+	315
50	+	0,9299	0,9245	0,9194	0,9147	0,9102	0,9060	0,9021	0,8983	0,8948	0,8915	0,8883	0,8854	0,8825	+	310
55	+	0,9762	0,9711	0,9661	0,9615	0,9572	0,9532	0,9493	0,9458	0,9423	0,9392	0,9360	0,9332	0,9305	+	305
60	+	1,0115	1,0066	1,0020	0,9977	0,9937	0,9899	0,9864	0,9831	0,9799	0,9769	0,9741	0,9714	0,9688	+	300
65	+	1,0354	1,0311	1,0269	1,0232	1,0196	1,0162	1,0131	1,0102	1,0073	1,0046	1,0021	0,9996	0,9974	+	295
70	+	1,0485	1,0448	1,0413	1,0381	1,0350	1,0322	1,0295	1,0270	1,0246	1,0224	1,0202	1,0182	1,0163	+	290
75	+	1,0508	1,0479	1,0452	1,0430	1,0402	1,0381	1,0359	1,0340	1,0320	1,0303	1,0287	1,0271	1,0256	+	285
80	+	1,0430	1,0409	1,0391	1,0374	1,0357	1,0342	1,0328	1,0314	1,0301	1,0289	1,0278	1,0267	1,0256	+	280
85	+	1,0258	1,0247	1,0237	1,0229	1,0220	1,0213	1,0206	1,0199	1,0192	1,0186	1,0180	1,0175	1,0164	+	275
90	+	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	+	270
95	+	0,9666	0,9677	0,9685	0,9696	0,9703	0,9712	0,9719	0,9725	0,9732	0,9738	0,9743	0,9749	0,9754	+	265
100	+	0,9267	0,9287	0,9305	0,9323	0,9339	0,9354	0,9369	0,9382	0,9395	0,9407	0,9419	0,9429	0,9440	+	260
105	+	0,8811	0,8840	0,8867	0,8892	0,8916	0,8938	0,8960	0,8978	0,8998	0,9016	0,9032	0,9047	0,9063	+	255
110	+	0,8308	0,8346	0,8381	0,8413	0,8444	0,8472	0,8499	0,8524	0,8548	0,8570	0,8592	0,8611	0,8631	+	250
115	+	0,7771	0,7815	0,7857	0,7894	0,7930	0,7963	0,7995	0,8025	0,8054	0,8079	0,8105	0,8129	0,8152	+	245
120	+	0,7206	0,7255	0,7301	0,7343	0,7383	0,7421	0,7457	0,7490	0,7522	0,7551	0,7580	0,7607	0,7632	+	240
125	+	0,6621	0,6672	0,6722	0,6768	0,6811	0,6852	0,6890	0,6925	0,6960	0,6991	0,7022	0,7051	0,7078	+	235
130	+	0,6022	0,6076	0,6126	0,6174	0,6219	0,6261	0,6300	0,6337	0,6373	0,6406	0,6438	0,6467	0,6496	+	230
135	+	0,5415	0,5469	0,5521	0,5567	0,5613	0,5654	0,5695	0,5731	0,5767	0,5801	0,5832	0,5862	0,5892	+	225
140	+	0,4804	0,4858	0,4907	0,4953	0,4997	0,5038	0,5077	0,5113	0,5148	0,5181	0,5212	0,5242	0,5269	+	220
145	+	0,4193	0,4242	0,4289	0,4333	0,4375	0,4415	0,4451	0,4485	0,4519	0,4548	0,4577	0,4606	0,4633	+	215
150	+	0,3584	0,3631	0,3673	0,3713	0,3750	0,3785	0,3819	0,3851	0,3881	0,3909	0,3936	0,3962	0,3961	+	210
155	+	0,2979	0,3020	0,3054	0,3092	0,3124	0,3154	0,3183	0,3212	0,3239	0,3263	0,3287	0,3311	0,3332	+	205
160	+	0,2377	0,2410	0,2441	0,2470	0,2498	0,2523	0,2548	0,2571	0,2593	0,2614	0,2634	0,2653	0,2670	+	200
165	+	0,1780	0,1805	0,1828	0,1850	0,1873	0,1893	0,1910	0,1929	0,1946	0,1961	0,1978	0,1992	0,2006	+	195
170	+	0,1183	0,1200	0,1218	0,1233	0,1247	0,1261	0,1274	0,1286	0,1298	0,1309	0,1319	0,1329	0,1338	+	190
175	+	0,0590	0,0599	0,0608	0,0616	0,0622	0,0631	0,0637	0,0642	0,0648	0,0654	0,0660	0,0666	0,0669	+	185
180	+	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	+	180



Величины  $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\lambda$

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	+	360
5	+	0,9937	0,9938	0,9938	0,9939	0,9940	0,9941	0,9942	0,9942	0,9942	0,9943	0,9943	0,9944	0,9944	+	355
10	+	0,9751	0,9754	0,9757	0,9759	0,9762	0,9764	0,9767	0,9769	0,9771	0,9773	0,9775	0,9776	0,9778	+	350
15	+	0,9443	0,9449	0,9455	0,9461	0,9468	0,9474	0,9478	0,9483	0,9488	0,9494	0,9495	0,9499	0,9503	+	345
20	+	0,9017	0,9029	0,9041	0,9051	0,9061	0,9070	0,9079	0,9086	0,9096	0,9103	0,9111	0,9118	0,9124	+	340
25	+	0,8482	0,8500	0,8515	0,8534	0,8549	0,8563	0,8577	0,8590	0,8603	0,8614	0,8625	0,8636	0,8643	+	335
30	+	0,7843	0,7870	0,7894	0,7917	0,7939	0,7958	0,7978	0,7997	0,8014	0,8030	0,8046	0,8061	0,8075	+	330
35	+	0,7111	0,7146	0,7178	0,7209	0,7239	0,7266	0,7292	0,7316	0,7340	0,7360	0,7380	0,7401	0,7419	+	325
40	+	0,6298	0,6343	0,6384	0,6423	0,6460	0,6494	0,6527	0,6557	0,6586	0,6614	0,6640	0,6665	0,6688	+	320
45	+	0,5413	0,5469	0,5521	0,5567	0,5614	0,5654	0,5695	0,5731	0,5767	0,5801	0,5832	0,5862	0,5892	+	315
50	+	0,4473	0,4539	0,4600	0,4656	0,4710	0,4760	0,4807	0,4851	0,4893	0,4933	0,4971	0,5006	0,5040	+	310
55	+	0,3492	0,3566	0,3638	0,3704	0,3765	0,3822	0,3877	0,3927	0,3978	0,4022	0,4067	0,4106	0,4146	+	305
60	+	0,2481	0,2566	0,2645	0,2719	0,2789	0,2854	0,2915	0,2973	0,3028	0,3079	0,3129	0,3175	0,3220	+	300
65	+	0,1455	0,1550	0,1639	0,1718	0,1798	0,1868	0,1936	0,2000	0,2061	0,2117	0,2173	0,2223	0,2272	+	295
70	+	0,0430	0,0532	0,0629	0,0718	0,0801	0,0879	0,0955	0,1022	0,1087	0,1149	0,1208	0,1261	0,1317	+	290
75	+	0,0578	0,0470	0,0368	0,0273	0,0184	0,0103	0,0024	0,0049	0,0120	0,0185	0,0246	0,0305	0,0361	+	285
80	+	0,1562	0,1447	0,1343	0,1244	0,1151	0,1064	0,0983	0,0906	0,0834	0,0765	0,0700	0,0640	0,0579	+	280
85	+	0,2510	0,2391	0,2282	0,2181	0,2085	0,1998	0,1913	0,1835	0,1760	0,1689	0,1625	0,1560	0,1507	+	275
90	+	0,3407	0,3291	0,3180	0,3077	0,2981	0,2891	0,2807	0,2728	0,2653	0,2582	0,2515	0,2453	0,2392	+	270
95	+	0,4253	0,4134	0,4026	0,3924	0,3828	0,3741	0,3656	0,3578	0,3503	0,3432	0,3368	0,3303	0,3245	+	265
100	+	0,5035	0,4920	0,4816	0,4717	0,4624	0,4537	0,4456	0,4379	0,4307	0,4238	0,4173	0,4113	0,4052	+	260
105	+	0,5755	0,5646	0,5545	0,5450	0,5361	0,5279	0,5200	0,5129	0,5066	0,4991	0,4931	0,4872	0,4815	+	255
110	+	0,6410	0,6307	0,6211	0,6123	0,6039	0,5961	0,5888	0,5819	0,5753	0,5691	0,5633	0,5578	0,5524	+	250
115	+	0,6997	0,6902	0,6814	0,6734	0,6655	0,6584	0,6517	0,6452	0,6391	0,6335	0,6280	0,6230	0,6180	+	245
120	+	0,7519	0,7434	0,7355	0,7281	0,7212	0,7146	0,7085	0,7027	0,6972	0,6921	0,6871	0,6825	0,6780	+	240
125	+	0,7979	0,7905	0,7834	0,7768	0,7707	0,7649	0,7594	0,7544	0,7495	0,7450	0,7405	0,7365	0,7325	+	235
130	+	0,8380	0,8317	0,8256	0,8199	0,8146	0,8096	0,8049	0,8004	0,7962	0,7923	0,7885	0,7850	0,7815	+	230
135	+	0,8727	0,8673	0,8621	0,8574	0,8529	0,8489	0,8447	0,8411	0,8375	0,8341	0,8310	0,8280	0,8250	+	225
140	+	0,9023	0,8978	0,8937	0,8898	0,8861	0,8827	0,8794	0,8764	0,8735	0,8707	0,8681	0,8655	0,8633	+	220
145	+	0,9272	0,9237	0,9204	0,9173	0,9144	0,9118	0,9092	0,9068	0,9044	0,9023	0,9002	0,8982	0,8964	+	215
150	+	0,9478	0,9451	0,9427	0,9404	0,9382	0,9362	0,9342	0,9324	0,9307	0,9290	0,9275	0,9259	0,9245	+	210
155	+	0,9644	0,9626	0,9609	0,9592	0,9577	0,9563	0,9550	0,9536	0,9523	0,9512	0,9500	0,9490	0,9480	+	205
160	+	0,9777	0,9764	0,9753	0,9743	0,9733	0,9723	0,9714	0,9706	0,9698	0,9690	0,9683	0,9676	0,9670	+	200
165	+	0,9876	0,9869	0,9864	0,9857	0,9851	0,9846	0,9842	0,9836	0,9832	0,9828	0,9823	0,9819	0,9815	+	195
170	+	0,9946	0,9943	0,9940	0,9937	0,9934	0,9932	0,9930	0,9928	0,9928	0,9924	0,9922	0,9920	0,9918	+	190
175	+	0,9987	0,9986	0,9985	0,9984	0,9984	0,9983	0,9983	0,9982	0,9981	0,9981	0,9980	0,9980	0,9980	+	185
180	+	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	+	180

1) Со знаком +

Значения  $\frac{Sp}{R}$  для определения расстояний поршня от верхнего мертвого положения (путей, проходимых поршнем)

Таблица 12

$$\frac{Sp}{R} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) - \left(\cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \cos \beta\right)$$

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
	ЗНАК															
0	+	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	+	360
5	+	0,0050	0,0050	0,0050	0,0049	0,0049	0,0049	0,0048	0,0048	0,0048	0,0048	0,0047	0,0047	0,0047	+	355
10	+	0,0201	0,0199	0,0198	0,0196	0,0195	0,0194	0,0193	0,0192	0,0191	0,0190	0,0189	0,0188	0,0187	+	350
15	+	0,0449	0,0446	0,0443	0,0439	0,0437	0,0434	0,0431	0,0429	0,0427	0,0425	0,0423	0,0421	0,0419	+	345
20	+	0,0792	0,0787	0,0781	0,0775	0,0771	0,0766	0,0762	0,0758	0,0754	0,0750	0,0746	0,0743	0,0739	+	340
25	+	0,1226	0,1218	0,1209	0,1200	0,1193	0,1186	0,1179	0,1173	0,1167	0,1161	0,1156	0,1150	0,1145	+	335
30	+	0,1746	0,1733	0,1721	0,1709	0,1699	0,1689	0,1679	0,1671	0,1662	0,1653	0,1646	0,1639	0,1631	+	330
35	+	0,2344	0,2328	0,2312	0,2296	0,2282	0,2269	0,2256	0,2244	0,2233	0,2222	0,2212	0,2202	0,2193	+	325
40	+	0,3013	0,2993	0,2973	0,2953	0,2936	0,2919	0,2902	0,2888	0,2874	0,2859	0,2847	0,2835	0,2823	+	320
45	+	0,3746	0,3722	0,3697	0,3672	0,3652	0,3631	0,3611	0,3594	0,3576	0,3559	0,3544	0,3529	0,3514	+	315
50	+	0,4533	0,4504	0,4475	0,4447	0,4422	0,4398	0,4374	0,4353	0,4333	0,4313	0,4295	0,4277	0,4260	+	310
55	+	0,5366	0,5333	0,5299	0,5266	0,5238	0,5210	0,5183	0,5159	0,5135	0,5112	0,5092	0,5072	0,5052	+	305
60	+	0,6234	0,6197	0,6159	0,6121	0,6090	0,6059	0,6028	0,6001	0,5975	0,5949	0,5926	0,5904	0,5881	+	300
65	+	0,7128	0,7087	0,7045	0,7004	0,6969	0,6935	0,6901	0,6872	0,6843	0,6814	0,6789	0,6765	0,6740	+	295
70	+	0,8038	0,7993	0,7949	0,7904	0,7867	0,7830	0,7793	0,7762	0,7730	0,7699	0,7672	0,7646	0,7619	+	290
75	+	0,8955	0,8908	0,8860	0,8813	0,8774	0,8734	0,8695	0,8662	0,8629	0,8596	0,8568	0,8539	0,8511	+	285
80	+	0,9869	0,9820	0,9770	0,9721	0,9680	0,9639	0,9598	0,9564	0,9529	0,9495	0,9465	0,9436	0,9406	+	280
85	+	1,0773	1,0722	1,0671	1,0620	1,0577	1,0537	1,0495	1,0460	1,0424	1,0389	1,0359	1,0328	1,0298	+	275
90	+	1,1657	1,1606	1,1555	1,1504	1,1419	1,1419	1,1377	1,1341	1,1306	1,1270	1,1240	1,1209	1,1179	+	270
95	+	1,25'6	1,2465	1,2414	1,2363	1,2280	1,2280	1,2238	1,2203	1,2167	1,2132	1,2102	1,2072	1,2041	+	265
100	+	1,3342	1,3293	1,3243	1,3194	1,3112	1,3112	1,3071	1,3037	1,3002	1,2968	1,2938	1,2909	1,2879	+	260
105	+	1,4132	1,4084	1,4037	1,3989	1,3950	1,3911	1,3871	1,3838	1,3805	1,3772	1,3745	1,3716	1,3687	+	255
110	+	1,4879	1,4834	1,4789	1,4745	1,4707	1,4670	1,4634	1,4602	1,4571	1,4539	1,4513	1,4486	1,4459	+	250
115	+	1,5581	1,5539	1,5498	1,5456	1,5422	1,5388	1,5353	1,5324	1,5296	1,5267	1,5242	1,5217	1,5192	+	245
120	+	1,6234	1,6197	1,6159	1,6121	1,6090	1,6059	1,6028	1,6000	1,5973	1,5949	1,5926	1,5904	1,5881	+	240
125	+	1,6878	1,6830	1,6771	1,6737	1,6710	1,6682	1,6654	1,6631	1,6607	1,6582	1,6563	1,6543	1,6523	+	235
130	+	1,7389	1,7360	1,7331	1,7302	1,7278	1,7254	1,7229	1,7209	1,7189	1,7168	1,7151	1,7133	1,7112	+	230
135	+	1,7888	1,7864	1,7839	1,7814	1,7794	1,7773	1,7753	1,7736	1,7718	1,7701	1,7686	1,7671	1,7656	+	225
140	+	1,8334	1,8314	1,8294	1,8274	1,8257	1,8240	1,8223	1,8209	1,8195	1,8180	1,8168	1,8156	1,8144	+	220
145	+	1,8727	1,8711	1,8695	1,8679	1,8665	1,8652	1,8639	1,8627	1,8616	1,8605	1,8595	1,8585	1,8576	+	215
150	+	1,9066	1,9054	1,9042	1,9030	1,8920	1,8910	1,9000	1,8991	1,8983	1,8974	1,8967	1,8959	1,8952	+	210
155	+	1,9353	1,9344	1,9335	1,9327	1,9320	1,9312	1,9305	1,9299	1,9293	1,9287	1,9282	1,9277	1,9271	+	205
160	+	1,9586	1,9581	1,9575	1,9569	1,9565	1,9560	1,9556	1,9552	1,9548	1,9544	1,9540	1,9537	1,9533	+	200
165	+	1,9767	1,9764	1,9761	1,9758	1,9756	1,9753	1,9750	1,9748	1,9745	1,9743	1,9741	1,9739	1,9737	+	195
170	+	1,9897	1,9895	1,9894	1,9892	1,9891	1,9890	1,9888	1,9888	1,9887	1,9886	1,9885	1,9884	1,9883	+	190
175	+	1,9974	1,9974	1,9973	1,9973	1,9973	1,9973	1,9972	1,9972	1,9972	1,9971	1,9971	1,9971	1,9971	+	185
180	+	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	+	180



Значения  $\frac{J_p}{R\omega^2}$  для определения ускорений поршня

$$\frac{J_p}{R\omega^2} = \frac{1}{\cos \varphi} \left[ \cos(\alpha + \varphi) + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\omega_L}{\omega} \right)^2 \right]$$

Таблица 13

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	1,3226	1,3131	1,3036	1,2941	1,2862	1,2782	1,2703	1,2635	1,2568	1,2500	1,2442	1,2384	1,2325	+	360
5	+	1,3142	1,3049	1,2955	1,2861	1,2783	1,2704	1,2626	1,2559	1,2493	1,2426	1,2368	1,2314	1,2253	+	355
10	+	1,2894	1,2804	1,2713	1,2623	1,2548	1,2472	1,2397	1,2333	1,2268	1,2204	1,2149	1,2094	1,2039	+	350
15	+	1,2484	1,2399	1,2314	1,2229	1,2159	1,2088	1,2018	1,1958	1,1898	1,1838	1,1786	1,1735	1,1684	+	345
20	+	1,1918	1,1842	1,1765	1,1688	1,1624	1,1561	1,1497	1,1443	1,1389	1,1335	1,1289	1,1243	1,1198	+	340
25	+	1,1207	1,1140	0,1074	1,1007	1,0952	1,0896	1,0841	1,0795	1,0749	1,0703	1,0660	1,0621	1,0581	+	335
30	+	1,0360	1,0305	0,0251	1,0196	1,0151	1,0107	1,0062	1,0024	0,9987	0,9949	0,9917	0,9886	0,9854	+	330
35	+	0,9392	0,9352	0,9311	0,9270	0,9238	0,9205	0,9173	0,9146	0,9118	0,9091	0,9068	0,9045	0,9022	+	325
40	+	0,8320	0,8295	0,8271	0,8246	0,8225	0,8203	0,8182	0,8168	0,8153	0,8139	0,8126	0,8113	0,8100	+	320
45	+	0,7162	0,7154	0,7146	0,7138	0,7133	0,7129	0,7124	0,7120	0,7116	0,7112	0,7109	0,7107	0,7104	+	315
50	+	0,5940	0,5950	0,5960	0,5970	0,5980	0,5989	0,5999	0,6008	0,6017	0,6026	0,6033	0,6041	0,6049	+	310
55	+	0,4675	0,4703	0,4733	0,4762	0,4787	0,4811	0,4836	0,4857	0,4878	0,4899	0,4917	0,4936	0,4955	+	305
60	+	0,3392	0,3438	0,3485	0,3532	0,3571	0,3611	0,3650	0,3684	0,3717	0,3751	0,3780	0,3809	0,3839	+	300
65	+	0,2114	0,2178	0,2241	0,2305	0,2359	0,2412	0,2466	0,2511	0,2555	0,2600	0,2639	0,2678	0,2717	+	295
70	+	0,0866	0,0946	0,1026	0,1105	0,1171	0,1236	0,1302	0,1357	0,1413	0,1468	0,1515	0,1562	0,1610	+	290
75	+	0,0326	0,0193	0,0143	0,0050	0,0026	0,0101	0,0177	0,0241	0,0304	0,0368	0,0422	0,0476	0,0530	+	285
80	+	0,1448	0,1347	0,1245	0,1143	0,1059	0,0976	0,0892	0,0822	0,0752	0,0682	0,0622	0,0563	0,0503	+	280
85	+	0,2481	0,2372	0,2263	0,2155	0,2067	0,1978	0,1890	0,1816	0,1742	0,1668	0,1606	0,1545	0,1485	+	275
90	+	0,3407	0,3298	0,3187	0,3077	0,2987	0,2897	0,2807	0,2732	0,2657	0,2582	0,2519	0,2455	0,2392	+	270
95	+	0,4224	0,4115	0,4006	0,3898	0,3810	0,3721	0,3633	0,3559	0,3485	0,3411	0,3349	0,3288	0,3226	+	265
100	+	0,4921	0,4820	0,4718	0,4616	0,4532	0,4449	0,4365	0,4297	0,4226	0,4155	0,4095	0,4036	0,3976	+	260
105	+	0,5503	0,5412	0,5320	0,5227	0,5150	0,5075	0,4999	0,4935	0,4872	0,4808	0,4754	0,4700	0,4646	+	255
110	+	0,5974	0,5895	0,5815	0,5736	0,5670	0,5605	0,5539	0,5484	0,5428	0,5373	0,5326	0,5279	0,5231	+	250
115	+	0,6338	0,6274	0,6211	0,6147	0,6094	0,6041	0,5987	0,5941	0,5897	0,5852	0,5813	0,5774	0,5735	+	245
120	+	0,6608	0,6563	0,6516	0,6469	0,6429	0,6389	0,6350	0,6317	0,6284	0,6250	0,6220	0,6191	0,6161	+	240
125	+	0,6796	0,6769	0,6739	0,6710	0,6684	0,6660	0,6635	0,6615	0,6594	0,6573	0,6554	0,6535	0,6516	+	235
130	+	0,6915	0,6905	0,6895	0,6885	0,6876	0,6867	0,6857	0,6848	0,6839	0,6830	0,6822	0,6814	0,6807	+	230
135	+	0,6980	0,6987	0,6995	0,7003	0,7009	0,7013	0,7018	0,7022	0,7026	0,7030	0,7034	0,7036	0,7038	+	225
140	+	0,7001	0,7026	0,7050	0,7075	0,7096	0,7118	0,7139	0,7153	0,7168	0,7182	0,7195	0,7208	0,7221	+	220
145	+	0,6991	0,7030	0,7071	0,7112	0,7146	0,7179	0,7211	0,7237	0,7265	0,7292	0,7315	0,7338	0,7361	+	215
150	+	0,6961	0,7158	0,7070	0,7125	0,7169	0,7213	0,7258	0,7296	0,7333	0,7371	0,7402	0,7433	0,7465	+	210
155	+	0,6919	0,6986	0,7053	0,7119	0,7175	0,7231	0,7286	0,7332	0,7378	0,7424	0,7463	0,7502	0,7542	+	205
160	+	0,6876	0,6952	0,7029	0,7106	0,7170	0,7233	0,7297	0,7350	0,7404	0,7458	0,7505	0,7551	0,7597	+	200
165	+	0,6835	0,6919	0,7004	0,7089	0,7161	0,7232	0,7302	0,7361	0,7421	0,7481	0,7532	0,7583	0,7634	+	195
170	+	0,6803	0,6892	0,6983	0,7073	0,7149	0,7225	0,7300	0,7364	0,7429	0,7493	0,7547	0,7602	0,7657	+	190
175	+	0,6782	0,6874	0,6968	0,7062	0,7142	0,7221	0,7299	0,7366	0,7432	0,7499	0,7556	0,7613	0,7671	+	185
180	+	0,6774	0,6869	0,6964	0,7059	0,7138	0,7218	0,7297	0,7365	0,7432	0,7500	0,7558	0,7616	0,7675	+	180

1) Со знаком +.

Значения  $\frac{1}{\omega} \frac{d\Phi}{dt}$  для определения относительных угловых скоростей вращения шатуна вокруг оси цапфы кривошипа

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\Phi}{dt} = 1 + \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Таблица 14

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
	Знак															
0	+	1,3226	1,3125	1,3030	1,2941	1,2857	1,2778	1,2703	1,2632	1,2564	1,2500	1,2439	1,2381	1,2326	+	360
5	+	1,3215	1,3114	1,3020	1,2931	1,2847	1,2768	1,2693	1,2622	1,2555	1,2491	1,2430	1,2372	1,2317	+	355
10	+	1,3182	1,3082	1,2988	1,2900	1,2817	1,2739	1,2665	1,2594	1,2528	1,2464	1,2404	1,2347	1,2292	+	350
15	+	1,3127	1,3028	1,2936	1,2849	1,2767	1,2690	1,2617	1,2548	1,2482	1,2420	1,2361	1,2304	1,2250	+	345
20	+	1,3050	1,2953	1,2863	1,2778	1,2698	1,2622	1,2551	1,2483	1,2419	1,2358	1,2300	1,2245	1,2192	+	340
25	+	1,2951	1,2743	1,2769	1,2686	1,2609	1,2535	1,2466	1,2400	1,2338	1,2279	1,2222	1,2169	1,2118	+	335
30	+	1,2831	1,2740	1,2655	1,2575	1,2500	1,2429	1,2362	1,2299	1,2239	1,2182	1,2128	1,2077	1,2015	+	330
35	+	1,2689	1,2602	1,2521	1,2444	1,2372	1,2305	1,2241	1,2181	1,2123	1,2069	1,2018	1,1969	1,1922	+	325
40	+	1,2526	1,2444	1,2367	1,2295	1,2227	1,2163	1,2102	1,2045	1,1991	1,1940	1,1892	1,1846	1,1802	+	320
45	+	1,2343	1,2266	1,2194	1,2126	1,2063	1,2003	1,1947	1,1894	1,1844	1,1796	1,1751	1,1708	1,1667	+	315
50	+	1,2140	1,2069	1,2003	1,1941	1,1882	1,1827	1,1776	1,1727	1,1681	1,1637	1,1596	1,1557	1,1519	+	310
55	+	1,1918	1,1854	1,1794	1,1738	1,1686	1,1636	1,1590	1,1546	1,1504	1,1465	1,1428	1,1392	1,1359	+	305
60	+	1,1680	1,1623	1,1570	1,1521	1,1474	1,1431	1,1390	1,1351	1,1315	1,1280	1,1248	1,1217	1,1187	+	300
65	+	1,1426	1,1377	1,1332	1,1290	1,1250	1,1213	1,1178	1,1145	1,1114	1,1085	1,1057	1,1031	1,1005	+	295
70	+	1,1158	1,1118	1,1081	1,1047	1,1014	1,0984	1,0956	1,0929	1,0903	1,0880	1,0857	1,0836	1,0815	+	290
75	+	1,0879	1,0848	1,0820	1,0794	1,0769	1,0746	1,0725	1,0704	1,0685	1,0667	1,0650	1,0633	1,0618	+	285
80	+	1,0591	1,0570	1,0551	1,0534	1,0517	1,0502	1,0487	1,0473	1,0460	1,0448	1,0436	1,0425	1,0415	+	280
85	+	1,0297	1,0287	1,0277	1,0268	1,0260	1,0252	1,0245	1,0238	1,0231	1,0225	1,0219	1,0214	1,0208	+	275
90	+	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	+	270
95	+	0,9703	0,9713	0,9723	0,9732	0,9740	0,9748	0,9755	0,9762	0,9769	0,9775	0,9781	0,9786	0,9792	+	265
100	+	0,9409	0,9430	0,9449	0,9466	0,9483	0,9498	0,9513	0,9527	0,9540	0,9552	0,9564	0,9575	0,9585	+	260
105	+	0,9121	0,9152	0,9180	0,9206	0,9231	0,9254	0,9275	0,9296	0,9315	0,9333	0,9350	0,9367	0,9382	+	255
110	+	0,8842	0,8882	0,8919	0,8953	0,8986	0,9016	0,9044	0,9071	0,9097	0,9120	0,9143	0,9165	0,9185	+	250
115	+	0,8574	0,8623	0,8668	0,8710	0,8750	0,8787	0,8822	0,8855	0,8886	0,8915	0,8943	0,8970	0,8995	+	245
120	+	0,8320	0,8377	0,8430	0,8479	0,8526	0,8569	0,8610	0,8649	0,8685	0,8720	0,8752	0,8783	0,8813	+	240
125	+	0,8082	0,8146	0,8206	0,8262	0,8314	0,8364	0,8410	0,8454	0,8496	0,8535	0,8572	0,8608	0,8641	+	235
130	+	0,7860	0,7931	0,7997	0,8059	0,8118	0,8173	0,8224	0,8273	0,8319	0,8363	0,8404	0,8443	0,8481	+	230
135	+	0,7657	0,7734	0,7806	0,7874	0,7937	0,7997	0,8053	0,8106	0,8156	0,8204	0,8249	0,8292	0,8333	+	225
140	+	0,7474	0,7556	0,7633	0,7705	0,7773	0,7837	0,7898	0,7955	0,8009	0,8060	0,8108	0,8154	0,8198	+	220
145	+	0,7311	0,7398	0,7479	0,7556	0,7628	0,7695	0,7759	0,7819	0,7877	0,7931	0,7982	0,8031	0,8078	+	215
150	+	0,7169	0,7260	0,7345	0,7425	0,7500	0,7571	0,7638	0,7701	0,7761	0,7818	0,7872	0,7923	0,7985	+	210
155	+	0,7049	0,7257	0,7231	0,7314	0,7391	0,7465	0,7534	0,7600	0,7662	0,7721	0,7778	0,7831	0,7882	+	205
160	+	0,6950	0,7047	0,7137	0,7222	0,7302	0,7378	0,7449	0,7517	0,7581	0,7642	0,7700	0,7755	0,7808	+	200
165	+	0,6873	0,6972	0,7064	0,7151	0,7233	0,7310	0,7383	0,7452	0,7518	0,7580	0,7639	0,7696	0,7750	+	195
170	+	0,6818	0,6918	0,7012	0,7100	0,7183	0,7261	0,7335	0,7406	0,7472	0,7536	0,7596	0,7653	0,7708	+	190
175	+	0,6785	0,6886	0,6980	0,7069	0,7153	0,7232	0,7307	0,7378	0,7445	0,7509	0,7570	0,7628	0,7683	+	185
180	+	0,6774	0,6875	0,6970	0,7059	0,7143	0,7222	0,7297	0,7368	0,7436	0,7500	0,7561	0,7619	0,7675	+	180



Значения  $\frac{T_j}{M_n R \omega^2}$  для определения тангенциальных сил  $T_j$  от инерции поступательно двигающихся масс

$$\frac{T_j}{M_n R \omega^2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta} \left[ \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\omega_L}{\omega} \right)^2 \right]$$

Таблица 15

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	—	360
5	+	0,1515	0,1493	0,1471	0,1448	0,1431	0,1414	0,1396	0,1382	0,1368	0,1353	0,1341	0,1329	0,1316	—	355
10	+	0,2953	0,2911	0,2869	0,2828	0,2794	0,2760	0,2726	0,2698	0,2670	0,2641	0,2617	0,2593	0,2570	—	350
15	+	0,4240	0,4182	0,4124	0,4067	0,4020	0,3973	0,3925	0,3886	0,3847	0,3807	0,3773	0,3739	0,3705	—	345
20	+	0,5319	0,5249	0,5179	0,5108	0,5051	0,4994	0,4936	0,4888	0,4840	0,4791	0,4751	0,4711	0,4671	—	340
25	+	0,6134	0,6056	0,5978	0,5900	0,5838	0,5776	0,5713	0,5660	0,5607	0,5554	0,5508	0,5462	0,5417	—	335
30	+	0,6647	0,6568	0,6489	0,6411	0,6347	0,6283	0,6219	0,6166	0,6113	0,6060	0,6004	0,5948	0,5891	—	330
35	+	0,6836	0,6763	0,6690	0,6617	0,6558	0,6499	0,6440	0,6391	0,6342	0,6294	0,6252	0,6210	0,6169	—	325
40	+	0,6698	0,6638	0,6578	0,6517	0,6466	0,6415	0,6365	0,6326	0,6287	0,6247	0,6213	0,6179	0,6144	—	320
45	+	0,6250	0,6207	0,6164	0,6120	0,6086	0,6052	0,6018	0,5989	0,5960	0,5932	0,5908	0,5884	0,5861	—	315
50	+	0,5524	0,5503	0,5482	0,5461	0,5445	0,5429	0,5412	0,5399	0,5386	0,5372	0,5361	0,5350	0,5338	—	310
55	+	0,4564	0,4569	0,4574	0,4579	0,4583	0,4587	0,4591	0,4594	0,4597	0,4601	0,4604	0,4607	0,4610	—	305
60	+	0,3431	0,3462	0,3493	0,3524	0,3549	0,3574	0,3600	0,3621	0,3642	0,3664	0,3682	0,3700	0,3719	—	300
65	+	0,2189	0,2245	0,2301	0,2358	0,2405	0,2452	0,2498	0,2536	0,2574	0,2612	0,2645	0,2678	0,2710	—	295
70	+	0,0908	0,0988	0,1068	0,1147	0,1211	0,1275	0,1340	0,1394	0,1448	0,1501	0,1546	0,1591	0,1636	—	290
75	—	0,0343	0,0211	0,0079	0,0052	0,0026 <sup>1)</sup>	0,0104 <sup>1)</sup>	0,0183 <sup>1)</sup>	0,0248 <sup>1)</sup>	0,0313 <sup>1)</sup>	0,0379 <sup>1)</sup>	0,0434 <sup>1)</sup>	0,0489 <sup>1)</sup>	0,0543 <sup>1)</sup>	+	285
80	—	0,1510	0,1402	0,1294	0,1186	0,1098	0,1010	0,0921	0,0848	0,0775	0,0702	0,0640	0,0578	0,0516	+	280
85	—	0,2545	0,2431	0,2317	0,2204	0,2112	0,2020	0,1929	0,1852	0,1775	0,1699	0,1635	0,1571	0,1508	+	275
90	—	0,3407	0,3297	0,3187	0,3077	0,2987	0,2897	0,2807	0,2732	0,2657	0,2582	0,2519	0,2456	0,2392	+	270
95	—	0,4083	0,3982	0,3881	0,3780	0,3697	0,3614	0,3531	0,3461	0,3391	0,3322	0,3264	0,3206	0,3147	+	265
100	—	0,4560	0,4474	0,4388	0,4303	0,4232	0,4161	0,4090	0,4030	0,3970	0,3909	0,3857	0,3805	0,3753	+	260
105	—	0,4849	0,4782	0,4715	0,4648	0,4592	0,4536	0,4479	0,4431	0,4383	0,4335	0,4294	0,4253	0,4211	+	255
110	—	0,4963	0,4917	0,4871	0,4826	0,4787	0,4748	0,4708	0,4674	0,4640	0,4605	0,4575	0,4545	0,4515	+	250
115	—	0,4925	0,4901	0,4877	0,4852	0,4830	0,4808	0,4787	0,4767	0,4747	0,4728	0,4710	0,4692	0,4675	+	245
120	—	0,4762	0,4758	0,4754	0,4750	0,4745	0,4740	0,4735	0,4730	0,4725	0,4719	0,4713	0,4707	0,4702	+	240
125	—	0,4500	0,4514	0,4528	0,4541	0,4551	0,4561	0,4572	0,4580	0,4588	0,4595	0,4601	0,4607	0,4612	+	235
130	—	0,4164	0,4193	0,4222	0,4251	0,4274	0,4297	0,4320	0,4338	0,4356	0,4375	0,4391	0,4407	0,4422	+	230
135	—	0,3780	0,3820	0,3860	0,3899	0,3932	0,3965	0,3997	0,4024	0,4051	0,4078	0,4101	0,4124	0,4147	+	225
140	—	0,3363	0,3410	0,3457	0,3504	0,3544	0,3584	0,3624	0,3656	0,3688	0,3721	0,3749	0,3777	0,3805	+	220
145	—	0,2931	0,2981	0,3031	0,3082	0,3125	0,3168	0,3210	0,3245	0,3280	0,3316	0,3347	0,3378	0,3410	+	215
150	—	0,2495	0,2545	0,2595	0,2646	0,2688	0,2730	0,2772	0,2808	0,2844	0,2881	0,2906	0,2931	0,2957	+	210
155	—	0,2061	0,2108	0,2155	0,2201	0,2240	0,2279	0,2319	0,2353	0,2387	0,2422	0,2452	0,2482	0,2513	+	205
160	—	0,1634	0,1674	0,1714	0,1755	0,1790	0,1825	0,1859	0,1889	0,1919	0,1950	0,1976	0,2002	0,2028	+	200
165	—	0,1217	0,1248	0,1279	0,1311	0,1339	0,1367	0,1395	0,1419	0,1443	0,1467	0,1488	0,1509	0,1531	+	195
170	—	0,0805	0,0827	0,0849	0,0872	0,0891	0,0910	0,0930	0,0947	0,0964	0,0981	0,0996	0,1011	0,1025	+	190
175	—	0,0400	0,0412	0,0424	0,0435	0,0445	0,0455	0,0465	0,0473	0,0481	0,0490	0,0498	0,0506	0,0513	+	185
180	—	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+	180

1) Со знаком +

Значения  $\frac{Z_j}{M_n R \omega^2}$  для определения радиальных сил  $Z_j$  от инерции поступательно двигающихся масс

$$\frac{Z_j}{M_n R \omega^2} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta} \left[ \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\omega_L}{\omega} \right)^2 \right]$$

Таблица 16

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
	ЗНАК															
0	+	1,3226	1,3131	1,3036	1,2941	1,2862	1,2783	1,2703	1,2635	1,2567	1,2500	1,2442	1,2384	1,2325	+	360
5	+	1,3059	1,2967	1,2875	1,2783	1,2706	1,2629	1,2553	1,2487	1,2421	1,2355	1,2298	1,2241	1,2184	+	355
10	+	1,2573	1,2488	1,2403	1,2319	1,2249	1,2179	1,2108	1,2048	1,1988	1,1927	1,1875	1,1823	1,1772	+	350
15	+	1,1789	1,1716	1,1643	1,1570	1,1510	1,1450	1,1391	1,1339	1,1287	1,1235	1,1191	1,1147	1,1104	+	345
20	+	1,0746	1,0690	1,0634	1,0579	1,0532	1,0485	1,0438	1,0398	1,0358	1,0318	1,0284	1,0250	1,0217	+	340
25	+	0,9506	0,9468	0,9430	0,9393	0,9361	0,9329	0,9298	0,9272	0,9246	0,9220	0,9195	0,9170	0,9145	+	335
30	+	0,8125	0,8107	0,8089	0,8072	0,8057	0,8042	0,8027	0,8014	0,8001	0,7989	0,7978	0,7967	0,7956	+	330
35	+	0,6679	0,6680	0,6681	0,6683	0,6685	0,6687	0,6689	0,6690	0,6691	0,6691	0,6692	0,6693	0,6693	+	325
40	+	0,5240	0,5259	0,5278	0,5296	0,5311	0,5326	0,5340	0,5354	0,5368	0,5383	0,5394	0,5405	0,5417	+	320
45	+	0,3878	0,3910	0,3942	0,3974	0,4002	0,4030	0,4057	0,4080	0,4103	0,4126	0,4146	0,4166	0,4186	+	315
50	+	0,2658	0,2699	0,2740	0,2780	0,2815	0,2850	0,2884	0,2914	0,2944	0,2973	0,2998	0,3023	0,3048	+	310
55	+	0,1633	0,1677	0,1721	0,1764	0,1801	0,1838	0,1875	0,1907	0,1939	0,1970	0,1998	0,2026	0,2054	+	305
60	+	0,0842	0,0881	0,0920	0,0960	0,0995	0,1030	0,1064	0,1094	0,1124	0,1155	0,1182	0,1209	0,1236	+	300
65	+	0,0308	0,0337	0,0366	0,0396	0,0423	0,0450	0,0477	0,0501	0,0525	0,0550	0,0572	0,0594	0,0617	+	295
70	+	0,0037	0,0051	0,0065	0,0079	0,0094	0,0109	0,0124	0,0139	0,0154	0,0169	0,0184	0,0197	0,0212	+	290
75	+	0,0019	0,0013	0,0007	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0002	0,0004	0,0007	0,0011	0,0015	0,0019	+	285
80	+	0,0226	0,0198	0,0170	0,0142	0,0124	0,0106	0,0088	0,0076	0,0064	0,0052	0,0044	0,0036	0,0029	+	280
85	+	0,0623	0,0572	0,0521	0,0470	0,0434	0,0398	0,0362	0,0335	0,0308	0,0282	0,0262	0,0242	0,0223	+	275
90	+	0,1161	0,1090	0,1019	0,0947	0,0894	0,0841	0,0788	0,0748	0,0708	0,0667	0,0635	0,0603	0,0572	+	270
95	+	0,1796	0,1707	0,1618	0,1530	0,1463	0,1396	0,1328	0,1276	0,1224	0,1171	0,1130	0,1089	0,1047	+	265
100	+	0,2478	0,2378	0,2278	0,2177	0,2100	0,2023	0,1945	0,1884	0,1823	0,1761	0,1711	0,1661	0,1611	+	260
105	+	0,3167	0,3061	0,2955	0,2849	0,2766	0,2683	0,2599	0,2533	0,2467	0,2400	0,2346	0,2292	0,2237	+	255
110	+	0,3829	0,3723	0,3617	0,3512	0,3428	0,3344	0,3261	0,3193	0,3125	0,3058	0,3002	0,2946	0,2890	+	250
115	+	0,4435	0,4336	0,4237	0,4139	0,4060	0,3981	0,3902	0,3837	0,3772	0,3707	0,3653	0,3599	0,3544	+	245
120	+	0,4969	0,4883	0,4797	0,4710	0,4640	0,4570	0,4499	0,4441	0,4383	0,4326	0,4276	0,4226	0,4177	+	240
125	+	0,5423	0,5353	0,5283	0,5212	0,5154	0,5096	0,5039	0,4992	0,4945	0,4897	0,4856	0,4815	0,4773	+	235
130	+	0,5795	0,5745	0,5695	0,5645	0,5603	0,5561	0,5519	0,5483	0,5447	0,5411	0,5380	0,5349	0,5319	+	230
135	+	0,6091	0,6062	0,6033	0,6004	0,5979	0,5954	0,5928	0,5907	0,5886	0,5864	0,5845	0,5826	0,5806	+	225
140	+	0,6317	0,6310	0,6303	0,6295	0,6289	0,6283	0,6278	0,6270	0,6262	0,6253	0,6247	0,6241	0,6234	+	220
145	+	0,6482	0,6496	0,6510	0,6524	0,6535	0,6546	0,6556	0,6564	0,6572	0,6580	0,6586	0,6592	0,6598	+	215
150	+	0,6598	0,6632	0,6666	0,6700	0,6727	0,6754	0,6780	0,6803	0,6826	0,6848	0,6866	0,6884	0,6902	+	210
155	+	0,6673	0,6725	0,6777	0,6829	0,6872	0,6915	0,6958	0,6993	0,7028	0,7062	0,7091	0,7120	0,7150	+	205
160	+	0,6723	0,6790	0,6857	0,6923	0,6978	0,7033	0,7088	0,7134	0,7180	0,7227	0,7267	0,7307	0,7346	+	200
165	+	0,6750	0,6829	0,6908	0,6988	0,7054	0,7120	0,7187	0,7242	0,7297	0,7352	0,7399	0,7446	0,7492	+	195
170	+	0,6766	0,6853	0,6940	0,7028	0,7102	0,7176	0,7249	0,7311	0,7373	0,7436	0,7489	0,7542	0,7594	+	190
175	+	0,6773	0,6866	0,6959	0,7051	0,7130	0,7209	0,7287	0,7353	0,7419	0,7485	0,7542	0,7599	0,7656	+	185
180	+	0,6774	0,6869	0,6964	0,7059	0,7138	0,7217	0,7297	0,7365	0,7433	0,7500	0,7558	0,7616	0,7675	+	180



Значения  $\frac{\omega L}{\omega}$  для определения угловых скоростей шатуна

$$\frac{\omega L}{\omega} = \lambda \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Таблица 17

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	+	0,3226	0,3125	0,3030	0,2941	0,2857	0,2778	0,2703	0,2632	0,2564	0,2500	0,2439	0,2381	0,2326	+	360
5	+	0,3215	0,3114	0,3020	0,2931	0,2847	0,2768	0,2693	0,2622	0,2555	0,2491	0,2430	0,2372	0,2317	+	355
10	+	0,3181	0,3082	0,2988	0,2900	0,2817	0,2739	0,2665	0,2594	0,2528	0,2464	0,2404	0,2347	0,2292	+	350
15	+	0,3127	0,3028	0,2936	0,2849	0,2767	0,2690	0,2617	0,2548	0,2482	0,2420	0,2361	0,2304	0,2250	+	345
20	+	0,3050	0,2953	0,2864	0,2778	0,2698	0,2622	0,2551	0,2483	0,2419	0,2358	0,2300	0,2245	0,2192	+	340
25	+	0,2951	0,2857	0,2769	0,2686	0,2608	0,2535	0,2466	0,2400	0,2338	0,2279	0,2222	0,2169	0,2118	+	335
30	+	0,2831	0,2740	0,2655	0,2575	0,2500	0,2429	0,2362	0,2299	0,2239	0,2182	0,2128	0,2077	0,2028	+	330
35	+	0,2689	0,2602	0,2521	0,2444	0,2373	0,2305	0,2241	0,2181	0,2124	0,2069	0,2018	0,1969	0,1922	+	325
40	+	0,2526	0,2444	0,2366	0,2294	0,2226	0,2163	0,2102	0,2045	0,1991	0,1940	0,1892	0,1846	0,1802	+	320
45	+	0,2343	0,2266	0,2194	0,2126	0,2063	0,2003	0,1947	0,1894	0,1844	0,1796	0,1751	0,1708	0,1667	+	315
50	+	0,2140	0,2069	0,2003	0,1941	0,1882	0,1827	0,1776	0,1727	0,1681	0,1637	0,1596	0,1557	0,1519	+	310
55	+	0,1918	0,1854	0,1794	0,1738	0,1686	0,1636	0,1590	0,1546	0,1504	0,1465	0,1428	0,1393	0,1359	+	305
60	+	0,1680	0,1623	0,1570	0,1521	0,1474	0,1431	0,1390	0,1351	0,1315	0,1280	0,1248	0,1217	0,1187	+	300
65	+	0,1430	0,1377	0,1332	0,1290	0,1250	0,1213	0,1178	0,1145	0,1114	0,1085	0,1057	0,1031	0,1005	+	295
70	+	0,1158	0,1118	0,1081	0,1047	0,1014	0,0984	0,0956	0,0929	0,0904	0,0880	0,0857	0,0836	0,0815	+	290
75	+	0,0879	0,0848	0,0820	0,0794	0,0769	0,0746	0,0725	0,0704	0,0685	0,0667	0,0650	0,0633	0,0618	+	285
80	+	0,0591	0,0570	0,0551	0,0534	0,0517	0,0502	0,0487	0,0473	0,0460	0,0448	0,0436	0,0425	0,0415	+	280
85	+	0,0297	0,0287	0,0277	0,0268	0,0260	0,0252	0,0245	0,0238	0,0231	0,0225	0,0219	0,0214	0,0209	+	275
90	—	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	—	270
95	—	0,0297	0,0287	0,0277	0,0268	0,0260	0,0252	0,0245	0,0238	0,0231	0,0225	0,0219	0,0214	0,0209	—	265
100	—	0,0591	0,0570	0,0551	0,0534	0,0517	0,0502	0,0487	0,0473	0,0460	0,0448	0,0436	0,0425	0,0415	—	260
105	—	0,0879	0,0848	0,0820	0,0794	0,0769	0,0746	0,0725	0,0704	0,0685	0,0667	0,0650	0,0633	0,0618	—	255
110	—	0,1158	0,1118	0,1081	0,1047	0,1014	0,0984	0,0956	0,0929	0,0904	0,0880	0,0857	0,0836	0,0815	—	250
115	—	0,1430	0,1377	0,1332	0,1290	0,1250	0,1213	0,1178	0,1145	0,1114	0,1085	0,1057	0,1031	0,1005	—	245
120	—	0,1680	0,1623	0,1570	0,1521	0,1474	0,1431	0,1390	0,1351	0,1315	0,1280	0,1248	0,1217	0,1187	—	240
125	—	0,1918	0,1854	0,1794	0,1738	0,1686	0,1636	0,1590	0,1546	0,1504	0,1465	0,1428	0,1393	0,1359	—	235
130	—	0,2140	0,2069	0,2003	0,1941	0,1882	0,1827	0,1776	0,1727	0,1681	0,1637	0,1596	0,1557	0,1519	—	230
135	—	0,2343	0,2266	0,2194	0,2126	0,2063	0,2003	0,1947	0,1894	0,1844	0,1796	0,1751	0,1708	0,1667	—	225
140	—	0,2526	0,2444	0,2366	0,2294	0,2226	0,2163	0,2102	0,2045	0,1991	0,1940	0,1892	0,1846	0,1802	—	220
145	—	0,2689	0,2602	0,2521	0,2444	0,2373	0,2305	0,2241	0,2181	0,2124	0,2069	0,2018	0,1969	0,1922	—	215
150	—	0,2831	0,2740	0,2655	0,2575	0,2500	0,2429	0,2362	0,2299	0,2239	0,2182	0,2128	0,2077	0,2028	—	210
155	—	0,2951	0,2857	0,2769	0,2686	0,2608	0,2535	0,2466	0,2400	0,2338	0,2279	0,2222	0,2169	0,2118	—	205
160	—	0,3050	0,2953	0,2864	0,2778	0,2698	0,2622	0,2551	0,2483	0,2419	0,2358	0,2300	0,2245	0,2192	—	200
165	—	0,3127	0,3028	0,2936	0,2849	0,2767	0,2690	0,2617	0,2548	0,2482	0,2420	0,2361	0,2304	0,2250	—	195
170	—	0,3181	0,3082	0,2988	0,2900	0,2817	0,2739	0,2665	0,2594	0,2528	0,2464	0,2404	0,2347	0,2292	—	190
175	—	0,3215	0,3114	0,3020	0,2931	0,2847	0,2768	0,2693	0,2622	0,2555	0,2491	0,2430	0,2372	0,2317	—	185
180	—	0,3226	0,3125	0,3030	0,2941	0,2857	0,2778	0,2703	0,2632	0,2564	0,2500	0,2439	0,2381	0,2326	—	180

Значения  $\left(\frac{\omega L}{\omega}\right)^2$  для определения квадратов угловых скоростей шатуна  $\omega_L^2$ 

Таблица 18

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
	Знак															
0	+	0,1041	0,0977	0,0918	0,0865	0,0816	0,0772	0,0731	0,0693	0,0658	0,0625	0,0595	0,0567	0,0541	+	360
5	+	0,1034	0,0970	0,0912	0,0859	0,0811	0,0766	0,0725	0,0688	0,0653	0,0621	0,0591	0,0563	0,0537	+	355
10	+	0,1012	0,0950	0,0893	0,0841	0,0794	0,0750	0,0710	0,0673	0,0639	0,0607	0,0578	0,0551	0,0525	+	350
15	+	0,0978	0,0917	0,0862	0,0812	0,0766	0,0724	0,0685	0,0649	0,0616	0,0586	0,0557	0,0531	0,0506	+	345
20	+	0,0930	0,0872	0,0820	0,0772	0,0728	0,0688	0,0651	0,0617	0,0585	0,0556	0,0529	0,0504	0,0481	+	340
25	+	0,0871	0,0816	0,0767	0,0722	0,0680	0,0643	0,0608	0,0576	0,0546	0,0519	0,0494	0,0471	0,0449	+	335
30	+	0,0801	0,0751	0,0705	0,0663	0,0625	0,0590	0,0558	0,0529	0,0501	0,0476	0,0453	0,0431	0,0411	+	330
35	+	0,0723	0,0677	0,0635	0,0598	0,0563	0,0531	0,0502	0,0476	0,0451	0,0428	0,0407	0,0388	0,0370	+	325
40	+	0,0638	0,0597	0,0560	0,0526	0,0496	0,0468	0,0442	0,0418	0,0397	0,0376	0,0358	0,0341	0,0325	+	320
45	+	0,0549	0,0513	0,0481	0,0452	0,0426	0,0401	0,0379	0,0359	0,0340	0,0323	0,0307	0,0292	0,0278	+	315
50	+	0,0458	0,0428	0,0401	0,0377	0,0354	0,0334	0,0315	0,0298	0,0283	0,0268	0,0255	0,0242	0,0231	+	310
55	+	0,0368	0,0344	0,0322	0,0302	0,0284	0,0268	0,0253	0,0239	0,0226	0,0215	0,0204	0,0194	0,0185	+	305
60	+	0,0282	0,0263	0,0247	0,0231	0,0217	0,0205	0,0193	0,0183	0,0173	0,0164	0,0156	0,0148	0,0141	+	300
65	+	0,0203	0,0190	0,0177	0,0166	0,0156	0,0147	0,0139	0,0131	0,0124	0,0118	0,0112	0,0106	0,0101	+	295
70	+	0,0134	0,0125	0,0117	0,0110	0,0103	0,0097	0,0091	0,0086	0,0082	0,0077	0,0073	0,0070	0,0066	+	290
75	+	0,0077	0,0072	0,0067	0,0063	0,0059	0,0056	0,0053	0,0050	0,0047	0,0044	0,0042	0,0040	0,0038	+	285
80	+	0,0035	0,0033	0,0030	0,0029	0,0027	0,0025	0,0024	0,0022	0,0021	0,0020	0,0019	0,0018	0,0017	+	280
85	+	0,0009	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	+	275
90	—	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	—	270
95	—	0,0009	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	—	265
100	—	0,0035	0,0033	0,0030	0,0029	0,0027	0,0025	0,0024	0,0022	0,0021	0,0020	0,0019	0,0018	0,0017	—	260
105	—	0,0077	0,0072	0,0067	0,0063	0,0059	0,0056	0,0053	0,0050	0,0047	0,0044	0,0042	0,0040	0,0038	—	255
110	—	0,0134	0,0125	0,0117	0,0110	0,0103	0,0097	0,0091	0,0086	0,0082	0,0077	0,0073	0,0070	0,0066	—	250
115	—	0,0203	0,0190	0,0177	0,0166	0,0156	0,0147	0,0139	0,0131	0,0124	0,0118	0,0112	0,0106	0,0101	—	245
120	—	0,0282	0,0263	0,0247	0,0231	0,0217	0,0205	0,0193	0,0183	0,0173	0,0164	0,0156	0,0148	0,0141	—	240
125	—	0,0368	0,0344	0,0322	0,0302	0,0284	0,0268	0,0253	0,0239	0,0226	0,0215	0,0204	0,0194	0,0185	—	235
130	—	0,0458	0,0428	0,0401	0,0377	0,0354	0,0334	0,0315	0,0298	0,0283	0,0268	0,0255	0,0242	0,0231	—	230
135	—	0,0549	0,0513	0,0481	0,0452	0,0426	0,0401	0,0379	0,0359	0,0340	0,0323	0,0307	0,0292	0,0278	—	225
140	—	0,0638	0,0597	0,0560	0,0526	0,0496	0,0468	0,0442	0,0418	0,0397	0,0376	0,0358	0,0341	0,0325	—	220
145	—	0,0723	0,0677	0,0635	0,0598	0,0563	0,0531	0,0502	0,0476	0,0451	0,0428	0,0407	0,0388	0,0370	—	215
150	—	0,0801	0,0751	0,0705	0,0663	0,0625	0,0590	0,0558	0,0529	0,0501	0,0476	0,0453	0,0431	0,0411	—	210
155	—	0,0871	0,0816	0,0767	0,0722	0,0680	0,0643	0,0608	0,0576	0,0546	0,0519	0,0494	0,0471	0,0449	—	205
160	—	0,0930	0,0872	0,0820	0,0772	0,0728	0,0688	0,0651	0,0617	0,0585	0,0556	0,0529	0,0504	0,0481	—	200
165	—	0,0978	0,0917	0,0862	0,0812	0,0766	0,0724	0,0685	0,0649	0,0616	0,0586	0,0557	0,0531	0,0506	—	195
170	—	0,1012	0,0950	0,0893	0,0841	0,0794	0,0750	0,0710	0,0673	0,0639	0,0607	0,0578	0,0551	0,0525	—	190
175	—	0,1034	0,0970	0,0912	0,0859	0,0811	0,0766	0,0725	0,0688	0,0653	0,0621	0,0591	0,0563	0,0537	—	185
180	—	0,1041	0,0977	0,0918	0,0865	0,0816	0,0772	0,0731	0,0693	0,0658	0,0625	0,0595	0,0567	0,0541	—	180



Значения  $\frac{\theta_L}{\omega^2}$  для определения угловых ускорений шатуна  $\theta_L$

$$\frac{\theta_L}{\omega^2} = -\lambda (1 - \lambda^2) \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$$

Таблица 19

$\alpha^\circ$	$\lambda$	1/3,1	1/3,2	1/3,3	1/3,4	1/3,5	1/3,6	1/3,7	1/3,8	1/3,9	1/4,0	1/4,1	1/4,2	1/4,3	Знак	$\alpha^\circ$
0	—	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+	360
5	—	0,0252	0,0246	0,0240	0,0234	0,0229	0,0224	0,0219	0,0214	0,0209	0,0204	0,0200	0,0196	0,0192	+	355
10	—	0,0504	0,0492	0,0480	0,0468	0,0458	0,0447	0,0436	0,0427	0,0418	0,0408	0,0400	0,0391	0,0383	+	350
15	—	0,0756	0,0738	0,0720	0,0701	0,0685	0,0669	0,0653	0,0639	0,0625	0,0610	0,0598	0,0585	0,0572	+	345
20	—	0,1007	0,0982	0,0958	0,0933	0,0911	0,0890	0,0868	0,0849	0,0830	0,0811	0,0794	0,0777	0,0760	+	340
25	—	0,1256	0,1225	0,1194	0,1162	0,1135	0,1107	0,1080	0,1056	0,1032	0,1007	0,0986	0,0965	0,0943	+	335
30	—	0,1503	0,1465	0,1427	0,1388	0,1355	0,1321	0,1288	0,1258	0,1229	0,1200	0,1174	0,1148	0,1123	+	330
35	—	0,1747	0,1701	0,1655	0,1609	0,1570	0,1530	0,1490	0,1456	0,1421	0,1387	0,1357	0,1326	0,1296	+	325
40	—	0,1984	0,1931	0,1877	0,1824	0,1773	0,1722	0,1671	0,1636	0,1602	0,1567	0,1532	0,1497	0,1463	+	320
45	—	0,2214	0,2153	0,2091	0,2030	0,1978	0,1925	0,1873	0,1828	0,1783	0,1738	0,1699	0,1660	0,1621	+	315
50	—	0,2433	0,2364	0,2295	0,2225	0,2167	0,2108	0,2049	0,1999	0,1949	0,1899	0,1856	0,1812	0,1769	+	310
55	—	0,2639	0,2562	0,2485	0,2407	0,2343	0,2278	0,2213	0,2158	0,2103	0,2047	0,1998	0,1952	0,1905	+	305
60	—	0,2827	0,2743	0,2658	0,2573	0,2502	0,2432	0,2361	0,2301	0,2241	0,2181	0,2130	0,2079	0,2027	+	300
65	—	0,2995	0,2903	0,2811	0,2720	0,2644	0,2567	0,2491	0,2427	0,2363	0,2299	0,2244	0,2189	0,2134	+	295
70	—	0,3138	0,3040	0,2942	0,2844	0,2764	0,2683	0,2602	0,2534	0,2466	0,2398	0,2340	0,2282	0,2225	+	290
75	—	0,3254	0,3151	0,3048	0,2944	0,2860	0,2775	0,2690	0,2619	0,2548	0,2477	0,2417	0,2357	0,2296	+	285
80	—	0,3339	0,3232	0,3125	0,3018	0,2930	0,2842	0,2755	0,2682	0,2608	0,2535	0,2473	0,2411	0,2349	+	280
85	—	0,3391	0,3281	0,3172	0,3062	0,2973	0,2883	0,2794	0,2704	0,2645	0,2570	0,2507	0,2444	0,2380	+	275
90	—	0,3408	0,3298	0,3188	0,3077	0,2987	0,2897	0,2807	0,2732	0,2657	0,2582	0,2518	0,2455	0,2391	+	270
95	—	0,3391	0,3281	0,3172	0,3062	0,2973	0,2883	0,2794	0,2704	0,2645	0,2570	0,2507	0,2444	0,2380	+	265
100	—	0,3339	0,3232	0,3125	0,3018	0,2930	0,2842	0,2755	0,2682	0,2608	0,2535	0,2473	0,2411	0,2349	+	260
105	—	0,3254	0,3151	0,3048	0,2944	0,2860	0,2775	0,2690	0,2619	0,2548	0,2477	0,2417	0,2357	0,2296	+	255
110	—	0,3138	0,3040	0,2942	0,2844	0,2764	0,2683	0,2602	0,2534	0,2466	0,2398	0,2340	0,2282	0,2225	+	250
115	—	0,2995	0,2903	0,2811	0,2720	0,2644	0,2567	0,2491	0,2427	0,2363	0,2299	0,2244	0,2189	0,2134	+	245
120	—	0,2827	0,2743	0,2658	0,2573	0,2502	0,2432	0,2361	0,2301	0,2241	0,2181	0,2130	0,2079	0,2027	+	240
125	—	0,2639	0,2562	0,2485	0,2407	0,2343	0,2278	0,2213	0,2158	0,2103	0,2047	0,1998	0,1952	0,1905	+	235
130	—	0,2433	0,2364	0,2295	0,2225	0,2167	0,2108	0,2049	0,1999	0,1949	0,1899	0,1856	0,1812	0,1769	+	230
135	—	0,2214	0,2153	0,2091	0,2030	0,1978	0,1925	0,1873	0,1828	0,1783	0,1738	0,1699	0,1660	0,1621	+	225
140	—	0,1984	0,1931	0,1877	0,1824	0,1773	0,1722	0,1671	0,1636	0,1602	0,1567	0,1532	0,1497	0,1463	+	220
145	—	0,1747	0,1701	0,1655	0,1609	0,1570	0,1530	0,1490	0,1456	0,1421	0,1387	0,1357	0,1326	0,1296	+	215
150	—	0,1503	0,1465	0,1427	0,1388	0,1355	0,1321	0,1288	0,1258	0,1229	0,1200	0,1174	0,1148	0,1123	+	210
155	—	0,1256	0,1225	0,1194	0,1162	0,1135	0,1107	0,1080	0,1056	0,1032	0,1007	0,0986	0,0965	0,0943	+	205
160	—	0,1007	0,0982	0,0958	0,0933	0,0911	0,0890	0,0868	0,0849	0,0830	0,0811	0,0794	0,0777	0,0760	+	200
165	—	0,0756	0,0738	0,0720	0,0701	0,0685	0,0669	0,0653	0,0639	0,0625	0,0610	0,0598	0,0585	0,0572	+	195
170	—	0,0504	0,0492	0,0480	0,0468	0,0458	0,0447	0,0436	0,0427	0,0418	0,0408	0,0400	0,0391	0,0383	+	190
175	—	0,0252	0,0246	0,0240	0,0234	0,0229	0,0224	0,0219	0,0214	0,0209	0,0204	0,0200	0,0196	0,0192	+	185
180	—	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+	180

ТАБЛИЦЫ КОЭФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ ОТ ГАЗОВ

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Таблица 1

$$\varepsilon = 5; \lambda = \frac{1}{3,2}$$

Таблица 2

$$\varepsilon = 5; \lambda = \frac{1}{3,4}$$

Коэффициенты Фурье

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	—0,08084	0,04624	—0,08600	0,05143
2	—0,04239	0,06802	—0,04252	0,07469
3	—0,00764	0,06224	—0,00407	0,06659
4	0,00951	0,04474	—0,01368	0,04589
5	0,01336	0,03074	—0,01632	0,03015
6	0,01389	0,02290	—0,01581	0,02201
7	0,01473	0,01693	—0,01627	0,01603
8	0,01418	0,01112	—0,01542	0,01001
9	0,01190	0,00710	—0,01269	0,00593
10	0,00985	0,00528	—0,01035	0,00429
11	0,00887	0,00400	—0,00931	0,00317
12	0,00792	0,00246	—0,00832	0,00161
13	0,00649	0,00139	—0,00674	0,00051
14	0,00531	0,00113	—0,00545	0,00035
15	0,00478	0,00098	—0,00491	0,00027
16	0,00433	0,00052	—0,00443	—0,00021
17	0,00360	0,00018	—0,00362	—0,00054
18	0,00300	0,00024	—0,00294	—0,00044

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	—0,08067	0,04647	—0,08580	0,05168
2	—0,04190	0,06818	—0,04197	0,07485
3	—0,00705	0,06205	—0,00343	0,06635
4	0,00990	0,04428	—0,01407	0,04534
5	0,01346	0,03025	—0,01639	0,02960
6	0,01384	0,02254	—0,01572	0,02165
7	0,01467	0,01667	—0,01618	0,01577
8	0,01411	0,01089	—0,01533	0,00979
9	0,01179	0,00691	—0,01258	0,00574
10	0,00973	0,00514	—0,01021	0,00416
11	0,00876	0,00391	—0,00919	0,00308
12	0,00783	0,00238	—0,00821	0,00153
13	0,00639	0,00132	—0,00665	0,00045
14	0,00522	0,00109	—0,00536	0,00031
15	0,00471	0,00096	—0,00482	0,00025
16	0,00427	0,00050	—0,00437	—0,00023
17	0,00354	0,00016	—0,00354	—0,00056
18	0,00295	0,00023	—0,00288	—0,00045



Таблица 3

$$\varepsilon = 5; \lambda = \frac{1}{3,6}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,08051	0,04668	0,08563	0,05191
2	-0,04146	0,06831	0,04149	0,07498
3	-0,00653	0,06188	0,00287	0,06615
4	0,01024	0,04387	-0,01442	0,04487
5	0,01355	0,02982	-0,01643	0,02914
6	0,01381	0,02223	-0,01565	0,02132
7	0,01461	0,01644	-0,01610	0,01554
8	0,01405	0,01069	-0,01527	0,00959
9	0,01170	0,00673	-0,01247	0,00556
10	0,00962	0,00502	-0,01008	0,00405
11	0,00867	0,00383	-0,00908	0,00299
12	0,00775	0,00231	-0,00813	0,00145
13	0,00631	0,00126	-0,00656	0,00039
14	0,00514	0,00105	-0,00528	0,00027
15	0,00464	0,00094	-0,00475	0,00023
16	0,00421	0,00048	-0,00431	0,00024
17	0,00349	0,00014	-0,00349	0,00058
18	0,00290	0,00021	-0,00282	0,00045

Таблица 4

$$\varepsilon = 5; \lambda = \frac{1}{3,8}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,08038	0,04687	0,08546	0,05212
2	-0,04107	0,06844	0,04105	0,07511
3	-0,00606	0,06174	0,00235	0,06596
4	0,01055	0,04350	-0,01473	0,04444
5	0,01364	0,02944	-0,01649	0,02871
6	0,01378	0,02195	-0,01558	0,02103
7	0,01457	0,01624	-0,01602	0,01534
8	0,01400	0,01050	-0,01521	0,00941
9	0,01162	0,00657	-0,01237	0,00540
10	0,00952	0,00491	-0,00997	0,00394
11	0,00858	0,00375	-0,00899	0,00292
12	0,00767	0,00225	-0,00805	0,00139
13	0,00624	0,00121	-0,00648	0,00034
14	0,00507	0,00010	-0,00520	0,00024
15	0,00457	0,00091	-0,00469	0,00023
16	0,00417	0,00046	-0,00426	0,00026
17	0,00344	0,00012	-0,00345	0,00059
18	0,00285	0,00021	-0,00277	0,00045

Таблица 5

$$\varepsilon = 5; \lambda = \frac{1}{4,0}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,08025	0,04704	0,08533	0,05230
2	-0,04072	0,06855	0,04066	0,07522
3	-0,00563	0,06160	0,00187	0,06580
4	0,01083	0,04317	-0,01502	0,04406
5	0,01371	0,02909	-0,01654	0,02833
6	0,01374	0,02169	-0,01551	0,02077
7	0,01452	0,01605	-0,01597	0,01515
8	0,01395	0,01034	-0,01514	0,00925
9	0,01154	0,00643	-0,01228	0,00526
10	0,00943	0,00481	-0,00987	0,00384
11	0,00850	0,00369	-0,00891	0,00286
12	0,00761	0,00220	-0,00799	0,00134
13	0,00617	0,00116	-0,00640	0,00030
14	0,00500	0,00099	-0,00513	0,00021
15	0,00453	0,00090	-0,00464	0,00020
16	0,00412	0,00044	-0,00421	0,00027
17	0,00340	0,00011	-0,00340	0,00061
18	0,00281	0,00020	-0,00273	0,00046

Таблица 6

$$\varepsilon = 5; \lambda = \frac{1}{4,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,08014	0,04719	0,08520	0,05247
2	-0,04040	0,06865	0,04030	0,07532
3	-0,00324	0,06148	0,00146	0,06564
4	0,01109	0,04287	-0,01528	0,04370
5	0,01378	0,02877	-0,01659	0,02797
6	0,01372	0,02146	-0,01545	0,02052
7	0,01448	0,01588	-0,01591	0,01499
8	0,01390	0,01019	-0,01508	0,00910
9	0,01147	0,00631	-0,01219	0,00514
10	0,00935	0,00472	-0,00977	0,00375
11	0,00843	0,00363	-0,00883	0,00281
12	0,00754	0,00215	-0,00794	0,00129
13	0,00611	0,00112	-0,00633	0,00026
14	0,00494	0,00097	-0,00506	0,00019
15	0,00448	0,00089	-0,00457	0,00019
16	0,00408	0,00043	-0,00416	0,00029
17	0,00336	0,00010	-0,00336	0,00062
18	0,00278	0,00019	-0,00268	0,00046



Таблица 7

$$\varepsilon = 5,1; \lambda = \frac{1}{3,2}$$

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07549	0,04208	0,08066	0,04711
2	-0,04085	0,06234	0,04119	0,06886
3	-0,00920	0,05787	0,00593	0,06225
4	0,00697	0,04262	-0,01091	0,04395
5	0,01124	0,03009	-0,01412	0,02972
6	0,01235	0,02281	-0,01427	0,02211
7	0,01349	0,01711	-0,01504	0,01634
8	0,01325	0,01158	-0,01450	0,01058
9	0,01135	0,00767	-0,01217	0,00659
10	0,00958	0,00574	-0,01010	0,00483
11	0,00869	0,00436	-0,00916	0,00358
12	0,00780	0,00280	-0,00822	0,00200
13	0,00647	0,00169	-0,00675	0,00089
14	0,00536	0,00135	-0,00553	0,00062
15	0,00482	0,00112	-0,00498	0,00046
16	0,00436	0,00064	-0,00451	-0,00002
17	0,00365	0,00029	-0,00371	-0,00038
18	0,00307	0,00031	-0,00306	-0,00032

Таблица 8

$$\varepsilon = 5,5; \lambda = \frac{1}{3,4}$$

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07533	0,04229	0,08048	0,04734
2	-0,04040	0,06249	0,04070	0,06902
3	-0,00865	0,05772	0,00534	0,06205
4	0,00734	0,04221	-0,01128	0,04347
5	0,01136	0,02965	-0,01420	0,02924
6	0,01233	0,02248	-0,01421	0,02176
7	0,01345	0,01687	-0,01498	0,01609
8	0,01320	0,01136	-0,01443	0,01036
9	0,01126	0,00747	-0,01207	0,00640
10	0,00947	0,00560	-0,00997	0,00469
11	0,00859	0,00426	-0,00905	0,00348
12	0,00772	0,00271	-0,00813	0,00192
13	0,00638	0,00162	-0,00665	0,00082
14	0,00528	0,00130	-0,00543	0,00058
15	0,00475	0,00109	-0,00490	0,00044
16	0,00430	0,00062	-0,00444	-0,00004
17	0,00360	0,00027	-0,00365	-0,00040
18	0,00302	0,00029	-0,00300	-0,00032

Таблица 9

$$\varepsilon = 5,5; \lambda = \frac{1}{3,6}$$

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07519	0,04248	0,08032	0,04755
2	-0,04000	0,06262	0,04025	0,06915
3	-0,00817	0,05758	0,00480	0,06187
4	0,00767	0,04185	-0,01162	0,04304
5	0,01146	0,02926	-0,01428	0,02881
6	0,01232	0,02218	-0,01416	0,02145
7	0,01342	0,01665	-0,01492	0,01587
8	0,01315	0,01116	-0,01437	0,01016
9	0,01118	0,00730	-0,01197	0,00622
10	0,00937	0,00548	-0,00987	0,00457
11	0,00851	0,00417	-0,00895	0,00340
12	0,00764	0,00264	-0,00805	0,00185
13	0,00631	0,00156	-0,00657	0,00075
14	0,00520	0,00126	-0,00535	0,00054
15	0,00469	0,00107	-0,00483	0,00042
16	0,00424	0,00060	-0,00438	-0,00006
17	0,00355	0,00025	-0,00360	-0,00042
18	0,00297	0,00028	-0,00295	-0,00034

Таблица 10

$$\varepsilon = 5,5; \lambda = \frac{1}{3,8}$$

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07506	0,04266	0,08018	0,04774
2	-0,03965	0,06274	0,03985	0,06996
3	-0,00773	0,05745	0,00433	0,06171
4	0,00796	0,04152	-0,01192	0,04266
5	0,01156	0,02892	-0,01435	0,02842
6	0,01230	0,02192	-0,01412	0,02118
7	0,01339	0,01645	-0,01487	0,01568
8	0,01311	0,01098	-0,01432	0,00998
9	0,01111	0,00714	-0,01189	0,00607
10	0,00929	0,00536	-0,00977	0,00446
11	0,00843	0,00409	-0,00886	0,00333
12	0,00757	0,00257	-0,00797	0,00179
13	0,00623	0,00150	-0,00649	0,00070
14	0,00513	0,00122	-0,00528	0,00051
15	0,00463	0,00104	-0,00477	0,00040
16	0,00419	0,00058	-0,00433	-0,00008
17	0,00350	0,00023	-0,00355	-0,00044
18	0,00292	0,00027	-0,00290	-0,00034



Таблица 11

$$\varepsilon = 5,5; \lambda = \frac{1}{4,0}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07495	0,04281	0,08005	0,04791
2	-0,03933	0,06284	0,03949	0,06937
3	-0,00734	0,05734	0,00390	0,06156
4	0,00823	0,04123	-0,01220	0,04232
5	0,01165	0,02860	-0,01441	0,02807
6	0,01229	0,02168	-0,01408	0,02092
7	0,01336	0,01627	-0,01482	0,01550
8	0,01307	0,01082	-0,01427	0,00982
9	0,01105	0,00700	-0,01181	0,00593
10	0,00921	0,00526	-0,00968	0,00436
11	0,00836	0,00402	-0,00878	0,00326
12	0,00751	0,00251	-0,00790	0,00173
13	0,00617	0,00145	-0,00642	0,00065
14	0,00507	0,00119	-0,00521	0,00048
15	0,00458	0,00102	-0,00471	0,00039
16	0,00415	0,00056	-0,00428	0,00010
17	0,00346	0,00022	-0,00350	0,00045
18	0,00288	0,00026	-0,00285	0,00035

Таблица 12

$$\varepsilon = 5,5; \lambda = \frac{1}{4,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07485	0,04295	0,07994	0,04808
2	-0,03904	0,06294	0,03917	0,06947
3	-0,00699	0,05724	0,00351	0,06144
4	0,00847	0,04096	-0,01244	0,04201
5	0,01172	0,02832	-0,01447	0,02775
6	0,01228	0,02146	-0,01404	0,02070
7	0,01334	0,01610	-0,01478	0,01533
8	0,01304	0,01067	-0,01422	0,00967
9	0,01099	0,00688	-0,01174	0,00580
10	0,00913	0,00517	-0,00960	0,00427
11	0,00829	0,00396	-0,00872	0,00320
12	0,00745	0,00246	-0,00784	0,00168
13	0,00611	0,00141	-0,00636	0,00061
14	0,00501	0,00116	-0,00514	0,00045
15	0,00453	0,00100	-0,00466	0,00037
16	0,00411	0,00054	-0,00424	0,00011
17	0,00342	0,00020	-0,00346	0,00046
18	0,00285	0,00025	-0,00281	0,00036

Таблица 13

$$\varepsilon = 6,0; \lambda = \frac{1}{3,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07086	0,03858	0,07602	0,04345
2	-0,03939	0,05752	0,03992	0,06388
3	-0,01036	0,05407	0,00736	0,05845
4	0,00490	0,04065	-0,00863	0,04214
5	0,00944	0,02937	-0,01223	0,02921
6	0,01097	0,02261	-0,01289	0,02206
7	0,01236	0,01720	-0,01393	0,01652
8	0,01237	0,01192	-0,01364	0,01102
9	0,01081	0,00813	-0,01165	0,00713
10	0,00928	0,00614	-0,00983	0,00528
11	0,00849	0,00468	-0,00897	0,00395
12	0,00766	0,00311	-0,00809	0,00236
13	0,00643	0,00198	-0,00672	0,00122
14	0,00539	0,00155	-0,00557	0,00088
15	0,00485	0,00126	-0,00502	0,00066
16	0,00438	0,00077	-0,00454	0,00015
17	0,00370	0,00041	-0,00379	0,00022
18	0,00313	0,00038	-0,00315	0,00020

Таблица 14

$$\varepsilon = 6,0; \lambda = \frac{1}{3,4}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07072	0,03878	0,07586	0,04367
2	-0,03898	0,05766	0,03946	0,06403
3	-0,00986	0,05894	0,00681	0,05828
4	0,00525	0,04029	-0,00899	0,04171
5	0,00957	0,02898	-0,01233	0,02876
6	0,01098	0,02230	-0,01285	0,02173
7	0,01234	0,01696	-0,01388	0,01629
8	0,01234	0,01171	-0,01359	0,01080
9	0,01074	0,00794	-0,01156	0,00694
10	0,00919	0,00600	-0,00972	0,00515
11	0,00840	0,00458	-0,00887	0,00385
12	0,00758	0,00302	-0,00801	0,00227
13	0,00635	0,00190	-0,00663	0,00115
14	0,00531	0,00150	-0,00548	0,00083
15	0,00478	0,00123	-0,00496	0,00063
16	0,00431	0,00074	-0,00447	0,00013
17	0,00364	0,00038	-0,00373	0,00024
18	0,00308	0,00036	-0,00310	0,00021



Таблица 15

$$\varepsilon = 6,0; \lambda = \frac{1}{3,6}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07059	0,03896	0,07572	0,04386
2	-0,03862	0,05778	0,03905	0,06416
3	-0,00941	0,05382	0,00632	0,05812
4	0,00557	0,03997	-0,00931	0,04133
5	0,00968	0,02860	-0,01241	0,02836
6	0,01098	0,02203	-0,01283	0,02144
7	0,01233	0,01675	-0,01384	0,01608
8	0,01231	0,01151	-0,01354	0,01061
9	0,01067	0,00776	-0,01148	0,00677
10	0,00910	0,00587	-0,00962	0,00502
11	0,00832	0,00448	-0,00878	0,00376
12	0,00751	0,00294	-0,00793	0,00220
13	0,00627	0,00185	-0,00655	0,00108
14	0,00523	0,00146	-0,00540	0,00079
15	0,00472	0,00120	-0,00488	0,00060
16	0,00426	0,00071	-0,00442	0,00010
17	0,00359	0,00036	-0,00368	-0,00026
18	0,00303	0,00035	-0,00305	-0,00022

Таблица 16

$$\varepsilon = 6,0; \lambda = \frac{1}{3,8}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07048	0,03912	0,07558	0,04404
2	-0,03829	0,05790	0,03868	0,06427
3	-0,00901	0,05372	0,00588	0,05798
4	0,00585	0,03968	-0,00960	0,04099
5	0,00979	0,02831	-0,01250	0,02801
6	0,01099	0,02178	-0,01280	0,02118
7	0,01231	0,01655	-0,01380	0,01588
8	0,01228	0,01134	-0,01350	0,01043
9	0,01061	0,00761	-0,01141	0,00661
10	0,00902	0,00575	-0,00953	0,00491
11	0,00825	0,00440	-0,00870	0,00369
12	0,00745	0,00287	-0,00786	0,00213
13	0,00621	0,00178	-0,00648	0,00103
14	0,00516	0,00141	-0,00534	0,00075
15	0,00466	0,00117	-0,00482	0,00057
16	0,00421	0,00069	-0,00437	0,00008
17	0,00354	0,00034	-0,00362	-0,00028
18	0,00298	0,00034	-0,00300	-0,00024

Таблица 17

$$\varepsilon = 6,0; \lambda = \frac{1}{4,0}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07037	0,03926	0,07547	0,04420
2	-0,03800	0,05800	0,03835	0,06438
3	-0,00865	0,05862	0,00548	0,05786
4	0,00610	0,03942	-0,00986	0,04068
5	0,00988	0,02802	-0,01257	0,02769
6	0,01100	0,02156	-0,01278	0,02095
7	0,01230	0,01638	-0,01377	0,01571
8	0,01225	0,01118	-0,01346	0,01027
9	0,01056	0,00747	-0,01134	0,00647
10	0,00895	0,00565	-0,00945	0,00481
11	0,00818	0,00432	-0,00862	0,00362
12	0,00739	0,00281	-0,00780	0,00207
13	0,00614	0,00172	-0,00641	0,00099
14	0,00510	0,00138	-0,00527	0,00072
15	0,00461	0,00115	-0,00477	0,00056
16	0,00417	0,00067	-0,00432	0,00006
17	0,00350	0,00032	-0,00358	-0,00030
18	0,00294	0,00032	-0,00295	-0,00024

Таблица 18

$$\varepsilon = 6,0; \lambda = \frac{1}{4,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,07028	0,03939	0,07536	0,04434
2	-0,03774	0,05809	0,03805	0,06447
3	-0,00832	0,05354	0,00512	0,05774
4	0,00633	0,03918	-0,01010	0,04040
5	0,00997	0,02776	-0,01264	0,02740
6	0,01100	0,02135	-0,01271	0,02073
7	0,01229	0,01622	-0,01374	0,01555
8	0,01222	0,01104	-0,01342	0,01013
9	0,01050	0,00735	-0,01128	0,00635
10	0,00889	0,00556	-0,00938	0,00472
11	0,00812	0,00426	-0,00855	0,00355
12	0,00733	0,00275	-0,00774	0,00202
13	0,00609	0,00168	-0,00635	0,00093
14	0,00505	0,00134	-0,00521	0,00069
15	0,00456	0,00112	-0,00472	0,00054
16	0,00413	0,00065	-0,00428	0,00005
17	0,00346	0,00031	-0,00354	-0,00031
18	0,00291	0,00031	-0,00291	-0,00025



Таблица 19

$$\varepsilon = 6,5; \lambda = \frac{1}{3,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармо- ники	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06681	0,03560	0,07195	0,04031
2	-0,03803	0,05337	0,03870	0,05960
3	-0,01124	0,05074	0,00849	0,05509
4	0,00319	0,03884	-0,00672	0,04046
5	0,00790	0,02863	-0,01060	0,02863
6	0,00976	0,02232	-0,01165	0,02193
7	0,01134	0,01719	-0,01290	0,01662
8	0,01156	0,01217	-0,01284	0,01136
9	0,01028	0,00850	-0,01114	0,00757
10	0,00897	0,00648	-0,00954	0,00568
11	0,00827	0,00497	-0,00876	0,00428
12	0,00751	0,00339	-0,00795	0,00268
13	0,00637	0,00224	-0,00667	0,00152
14	0,00539	0,00175	-0,00559	0,00112
15	0,00486	0,00141	-0,00505	0,00084
16	0,00438	0,00090	-0,00457	0,00032
17	0,00373	0,00052	-0,00384	-0,00006
18	0,00318	0,00046	-0,00323	-0,00008

Таблица 20

$$\varepsilon = 6,5; \lambda = \frac{1}{3,4}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармо- ники	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06668	0,03578	0,07179	0,04052
2	-0,03765	0,05350	0,03827	0,05972
3	-0,01078	0,05062	0,00798	0,05494
4	0,00353	0,03852	-0,00707	0,04005
5	0,00804	0,02827	-0,01071	0,02822
6	0,00078	0,02204	-0,01164	0,02161
7	0,01133	0,01697	-0,01287	0,01640
8	0,01154	0,01197	-0,01280	0,01114
9	0,01022	0,00831	-0,01107	0,00739
10	0,00888	0,00633	-0,00945	0,00554
11	0,00819	0,00486	-0,00867	0,00417
12	0,00744	0,00330	-0,00787	0,00259
13	0,00629	0,00216	-0,00659	0,00145
14	0,00531	0,00169	-0,00551	0,00107
15	0,00479	0,00137	-0,00498	0,00081
16	0,00432	0,00086	-0,00451	0,00029
17	0,00367	0,00049	-0,00378	-0,00009
18	0,00312	0,00044	-0,00317	-0,00010

Таблица 21

$$\varepsilon = 6,5; \lambda = \frac{1}{3,6}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармо- ники	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06657	0,03595	0,07166	0,04070
2	-0,03732	0,05362	0,03789	0,05986
3	-0,01036	0,05052	0,00752	0,05481
4	0,00283	0,03823	-0,00738	0,03972
5	0,00816	0,02794	-0,01081	0,02785
6	0,00980	0,02179	-0,01163	0,02134
7	0,01133	0,01676	-0,01285	0,01619
8	0,01152	0,01178	-0,01276	0,01096
9	0,01017	0,00814	-0,01100	0,00722
10	0,00881	0,00620	-0,00936	0,00541
11	0,00811	0,00476	-0,00859	0,00408
12	0,00737	0,00321	-0,00780	0,00251
13	0,00622	0,00209	-0,00651	0,00138
14	0,00524	0,00164	-0,00543	0,00102
15	0,00473	0,00133	-0,00491	0,00078
16	0,00427	0,00083	-0,00445	0,00027
17	0,00362	0,00047	-0,00372	-0,00071
18	0,00308	0,00042	-0,00312	-0,00011

Таблица 22

$$\varepsilon = 6,5; \lambda = \frac{1}{3,8}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармо- ники	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06646	0,03609	0,07154	0,04086
2	-0,03702	0,05373	0,03755	0,05995
3	-0,00999	0,05044	0,00711	0,05469
4	0,00410	0,03797	-0,00766	0,03940
5	0,00827	0,02766	-0,01089	0,02752
6	0,00982	0,02156	-0,01162	0,02109
7	0,01133	0,01658	-0,01282	0,01601
8	0,01150	0,01161	-0,01273	0,01079
9	0,01012	0,00799	-0,01094	0,00707
10	0,00874	0,00609	-0,00927	0,00530
11	0,00805	0,00468	-0,00852	0,00400
12	0,00731	0,00314	-0,00773	0,00244
13	0,00616	0,00203	-0,00644	0,00132
14	0,00518	0,00160	-0,00536	0,00098
15	0,00467	0,00130	-0,00485	0,00075
16	0,00422	0,00081	-0,00440	0,00024
17	0,00357	0,00044	-0,00367	-0,00013
18	0,00303	0,00040	-0,00307	-0,00013



Таблица 23

$$\varepsilon = 6,5; \lambda = \frac{1}{4,0}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06637	0,03623	0,07143	0,04101
2	-0,03675	0,05383	0,03724	0,06007
3	-0,00965	0,05036	0,00673	0,05458
4	0,00434	0,03773	-0,00791	0,03913
5	0,00837	0,02740	-0,01097	0,02723
6	0,00984	0,02135	-0,01161	0,02087
7	0,01132	0,01641	-0,01280	0,01584
8	0,01148	0,01145	-0,01270	0,01063
9	0,01007	0,00786	-0,01088	0,00692
10	0,00868	0,00598	-0,00919	0,00520
11	0,00799	0,00460	-0,00845	0,00393
12	0,00725	0,00307	-0,00767	0,00238
13	0,00610	0,00197	-0,00638	0,00127
14	0,00512	0,00156	-0,00530	0,00094
15	0,00462	0,00127	-0,00480	0,00072
16	0,00418	0,00079	-0,00435	0,00022
17	0,00353	0,00043	-0,00363	-0,00015
18	0,00299	0,00039	-0,00302	-0,00014

Таблица 24

$$\varepsilon = 6,5; \lambda = \frac{1}{4,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06628	0,03635	0,07233	0,04115
2	-0,03650	0,05392	0,03697	0,06014
3	-0,00934	0,05028	0,00639	0,05449
4	0,00456	0,03752	-0,00814	0,03887
5	0,00846	0,02716	-0,01104	0,02696
6	0,00985	0,02116	-0,01160	0,02064
7	0,01132	0,01626	-0,01278	0,01568
8	0,01146	0,01131	-0,01267	0,01048
9	0,01003	0,00773	-0,01083	0,00680
10	0,00862	0,00589	-0,00912	0,00511
11	0,00794	0,00453	-0,00839	0,00386
12	0,00720	0,00301	-0,00762	0,00232
13	0,00605	0,00192	-0,00632	0,00122
14	0,00506	0,00152	-0,00524	0,00090
15	0,00458	0,00125	-0,00475	0,00070
16	0,00414	0,00076	-0,00431	0,00020
17	0,00350	0,00041	-0,00359	-0,00017
18	0,00296	0,00038	-0,00299	-0,00015

Таблица 25

$$\varepsilon = 7; \lambda = \frac{1}{3,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06325	0,03303	0,06834	0,03758
2	-0,03675	0,04976	0,03755	0,05582
3	-0,01191	0,04778	0,00939	0,05211
4	0,00177	0,03717	-0,00511	0,03887
5	0,00657	0,02787	-0,00918	0,02805
6	0,00867	0,02200	-0,01055	0,02170
7	0,01040	0,01713	-0,01197	0,01665
8	0,01080	0,01235	-0,01209	0,01160
9	0,00977	0,00880	-0,01064	0,00796
10	0,00864	0,00676	-0,00923	0,00601
11	0,00803	0,00522	-0,00854	0,00457
12	0,00734	0,00364	-0,00779	0,00297
13	0,00629	0,00248	-0,00659	0,00180
14	0,00537	0,00194	-0,00558	0,00131
15	0,00485	0,00154	-0,00505	0,00101
16	0,00438	0,00102	-0,00457	0,00048
17	0,00375	0,00063	-0,00388	0,00009
18	0,00322	0,00053	-0,00330	0,00003

Таблица 26

$$\varepsilon = 7; \lambda = \frac{1}{3,4}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06313	0,03320	0,06819	0,03778
2	-0,03640	0,04989	0,03715	0,05595
3	-0,01148	0,04769	0,00890	0,05197
4	0,00209	0,03687	-0,00545	0,03851
5	0,00671	0,02754	-0,00930	0,02764
6	0,00871	0,02173	-0,01055	0,02142
7	0,01041	0,01691	-0,01195	0,01643
8	0,01079	0,01215	-0,01206	0,01140
9	0,00972	0,00862	-0,01058	0,00776
10	0,00857	0,00662	-0,00914	0,00587
11	0,00796	0,00511	-0,00846	0,00446
12	0,00727	0,00355	-0,00772	0,00288
13	0,00622	0,00240	-0,00652	0,00172
14	0,00530	0,00188	-0,00550	0,00128
15	0,00479	0,00150	-0,00498	0,00097
16	0,00433	0,00099	-0,00451	0,00044
17	0,00370	0,00060	-0,00382	0,00006
18	0,00316	0,00051	-0,00325	0,00001

Таблица 27

$$\varepsilon = 7; \lambda = \frac{1}{3,6}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06302	0,03335	0,06808	0,03795
2	-0,03609	0,05001	0,03680	0,05606
3	-0,01109	0,04760	0,00847	0,05186
4	0,00238	0,03661	-0,00574	0,03820
5	0,00684	0,02725	-0,00940	0,02730
6	0,00874	0,02150	-0,01056	0,02116
7	0,01042	0,01672	-0,01194	0,01623
8	0,01078	0,01197	-0,01203	0,01121
9	0,00968	0,00845	-0,01052	0,00759
10	0,00850	0,00649	-0,00907	0,00575
11	0,00790	0,00501	-0,00838	0,00436
12	0,00721	0,00346	-0,00765	0,00280
13	0,00615	0,00232	-0,00645	0,00165
14	0,00523	0,00182	-0,00543	0,00123
15	0,00473	0,00146	-0,00492	0,00094
16	0,00427	0,00095	-0,00445	0,00041
17	0,00365	0,00074	-0,00377	0,00003
18	0,00312	0,00050	-0,00320	-0,00001

Таблица 28

$$\varepsilon = 7; \lambda = \frac{1}{3,8}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06292	0,03349	0,06796	0,03810
2	-0,03582	0,05011	0,03648	0,05617
3	-0,01074	0,04753	0,00808	0,05176
4	0,00264	0,03638	-0,00602	0,03792
5	0,00695	0,02698	-0,00950	0,02700
6	0,00877	0,02128	-0,01056	0,02093
7	0,01042	0,01654	-0,01193	0,01605
8	0,01077	0,01180	-0,01201	0,01105
9	0,00963	0,00830	-0,01047	0,00743
10	0,00845	0,00638	-0,00900	0,00563
11	0,00784	0,00492	-0,00832	0,00428
12	0,00716	0,00339	-0,00759	0,00272
13	0,00609	0,00226	-0,00639	0,00160
14	0,00517	0,00178	-0,00536	0,00119
15	0,00467	0,00143	-0,00486	0,00091
16	0,00423	0,00092	-0,00439	0,00039
17	0,00360	0,00055	-0,00372	0,00001
18	0,00307	0,00048	-0,00314	-0,00002

Таблица 29

$$\varepsilon = 7; \lambda = \frac{1}{4,0}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06283	0,03361	0,06786	0,03824
2	-0,03557	0,05020	0,03620	0,05627
3	-0,01042	0,04746	0,00772	0,05167
4	0,00287	0,03617	-0,00626	0,03767
5	0,00705	0,02674	-0,00958	0,02673
6	0,00880	0,02108	-0,01054	0,02072
7	0,01043	0,01638	-0,01192	0,01589
8	0,01076	0,01165	-0,01199	0,01090
9	0,00960	0,00817	-0,01042	0,00730
10	0,00839	0,00627	-0,00893	0,00552
11	0,00778	0,00484	-0,00826	0,00420
12	0,00711	0,00332	-0,00753	0,00266
13	0,00604	0,00220	-0,00633	0,00153
14	0,00511	0,00173	-0,00530	0,00115
15	0,00463	0,00140	-0,00481	0,00088
16	0,00418	0,00090	-0,00435	0,00037
17	0,00356	0,00053	-0,00367	0,00001
18	0,00303	0,00046	-0,00310	0,00004

Таблица 30

$$\varepsilon = 7; \lambda = \frac{1}{4,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06276	0,03373	0,06777	0,03837
2	-0,03534	0,05029	0,03594	0,05636
3	-0,01014	0,04740	0,00741	0,05158
4	0,00308	0,03598	-0,00648	0,03744
5	0,00715	0,02653	-0,01966	0,02648
6	0,00882	0,02090	-0,01056	0,02053
7	0,01044	0,01623	-0,01191	0,01574
8	0,01075	0,01152	-0,01197	0,01076
9	0,00956	0,00805	-0,01038	0,00718
10	0,00834	0,00618	-0,00887	0,00543
11	0,00774	0,00477	-0,00820	0,00413
12	0,00706	0,00326	-0,00749	0,00260
13	0,00599	0,00215	-0,00627	0,00148
14	0,00506	0,00170	-0,00525	0,00111
15	0,00458	0,00137	-0,00476	0,00086
16	0,00415	0,00088	-0,00431	0,00035
17	0,00352	0,00051	-0,00363	-0,00003
18	0,00300	0,00045	-0,00306	-0,00005



Таблица 31

$$\varepsilon = 7,5; \lambda = \frac{1}{3,2}$$

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,06007	0,03079	0,06510	0,03521
2	-0,03555	0,04660	0,03646	0,05250
3	-0,01242	0,04515	0,01008	0,04944
4	0,00058	0,03562	-0,00375	0,03741
5	0,00542	0,02713	-0,00795	0,02740
6	0,00770	0,02164	-0,00955	0,02146
7	0,00955	0,01702	-0,01110	0,01663
8	0,01010	0,01247	-0,01139	0,01180
9	0,00928	0,00904	-0,01017	0,00824
10	0,00832	0,00701	-0,00893	0,00630
11	0,00780	0,00544	-0,00832	0,00483
12	0,00717	0,00387	-0,00763	0,00323
13	0,00620	0,00270	-0,00652	0,00205
14	0,00534	0,00211	-0,00556	0,00155
15	0,00484	0,00168	-0,00505	0,00117
16	0,00438	0,00114	-0,00458	0,00063
17	0,00377	0,00074	-0,00390	0,00022
18	0,00325	0,00061	-0,00334	0,00014

Таблица 32

$$\varepsilon = 7,5; \lambda = \frac{1}{3,4}$$

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05996	0,03095	0,06497	0,03538
2	-0,03523	0,04672	0,03606	0,05263
3	-0,01201	0,04507	0,00963	0,04932
4	0,00089	0,03535	-0,00407	0,03708
5	0,00556	0,02682	-0,00807	0,02704
6	0,00775	0,02139	-0,00956	0,02119
7	0,00957	0,01681	-0,01110	0,01642
8	0,01010	0,01228	-0,01137	0,01159
9	0,00924	0,00886	-0,01012	0,00806
10	0,00826	0,00686	-0,00886	0,00616
11	0,00773	0,00533	-0,00824	0,00472
12	0,00711	0,00377	-0,00756	0,00313
13	0,00613	0,00261	-0,00645	0,00197
14	0,00527	0,00205	-0,00549	0,00148
15	0,00477	0,00163	-0,00498	0,00113
16	0,00432	0,00110	-0,00451	0,00059
17	0,00371	0,00071	-0,00385	0,00019
18	0,00320	0,00059	-0,00328	0,00012

Таблица 33

$$\varepsilon = 7,5; \lambda = \frac{1}{3,6}$$

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05986	0,03109	0,06486	0,03555
2	-0,03494	0,04683	0,03578	0,05274
3	-0,01164	0,04500	0,00922	0,04922
4	0,00116	0,03512	-0,00436	0,03679
5	0,00569	0,02655	-0,00818	0,02673
6	0,00779	0,02117	-0,00957	0,02095
7	0,00958	0,01663	-0,01110	0,01622
8	0,01010	0,01210	-0,01134	0,01141
9	0,00920	0,00870	-0,01007	0,00790
10	0,00820	0,00673	-0,00879	0,00603
11	0,00767	0,00523	-0,00818	0,00462
12	0,00705	0,00368	-0,00750	0,00305
13	0,00607	0,00254	-0,00638	0,00189
14	0,00520	0,00199	-0,00542	0,00143
15	0,00471	0,00159	-0,00492	0,00109
16	0,00427	0,00107	-0,00446	0,00056
17	0,00360	0,00068	-0,00379	0,00016
18	0,00315	0,00057	-0,00322	0,00010

Таблица 34

$$\varepsilon = 7,5; \lambda = \frac{1}{3,8}$$

Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05977	0,03122	0,06475	0,03569
2	-0,03468	0,04694	0,03546	0,05284
3	-0,01132	0,04494	0,00886	0,04913
4	0,00141	0,03491	-0,00462	0,03653
5	0,00580	0,02630	-0,00828	0,02645
6	0,00783	0,02096	-0,00959	0,02073
7	0,00960	0,01646	-0,01110	0,01605
8	0,01009	0,01194	-0,01134	0,01126
9	0,00917	0,00855	-0,01002	0,00774
10	0,00815	0,00662	-0,00872	0,00592
11	0,00762	0,00514	-0,00812	0,00453
12	0,00700	0,00361	-0,00744	0,00298
13	0,00601	0,00247	-0,00632	0,00183
14	0,00514	0,00194	-0,00535	0,00138
15	0,00466	0,00156	-0,00486	0,00106
16	0,00422	0,00104	-0,00441	0,00056
17	0,00362	0,00065	-0,00375	0,00014
18	0,00310	0,00055	-0,00318	0,00008



Таблица 35

$$\varepsilon = 7,5; \lambda = \frac{1}{4,0}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармо- ники	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05969	0,03134	0,06466	0,03583
2	-0,03445	0,04703	0,03520	0,05294
3	-0,01102	0,04488	0,00853	0,04904
4	0,00163	0,03472	-0,00485	0,03630
5	0,00591	0,02608	-0,00836	0,02620
6	0,00786	0,02078	-0,00960	0,02053
7	0,00961	0,01630	-0,01109	0,01590
8	0,01009	0,01179	-0,01133	0,01111
9	0,00914	0,00842	-0,00998	0,00761
10	0,00810	0,00652	-0,00866	0,00581
11	0,00757	0,00506	-0,00806	0,00446
12	0,00695	0,00354	-0,00739	0,00291
13	0,00596	0,00241	-0,00626	0,00178
14	0,00509	0,00190	-0,00529	0,00134
15	0,00462	0,00152	-0,00481	0,00103
16	0,00418	0,00101	-0,00437	0,00051
17	0,00358	0,00063	-0,00370	0,00012
18	0,00307	0,00053	-0,00314	0,00007

Таблица 36

$$\varepsilon = 7,5; \lambda = \frac{1}{4,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармо- ники	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05962	0,03144	0,06457	0,03594
2	-0,03424	0,04711	0,03496	0,05302
3	-0,01075	0,04482	0,00823	0,04897
4	0,00183	0,03454	-0,00506	0,03609
5	0,00600	0,02588	-0,00845	0,02597
6	0,00789	0,02061	-0,00962	0,02035
7	0,00963	0,01616	-0,01109	0,01575
8	0,01009	0,01166	-0,01131	0,01097
9	0,00911	0,00830	-0,00994	0,00749
10	0,00806	0,00642	-0,00861	0,00572
11	0,00753	0,00498	-0,00801	0,00439
12	0,00691	0,00348	-0,00734	0,00285
13	0,00591	0,00236	-0,00621	0,00173
14	0,00504	0,00186	-0,00524	0,00130
15	0,00457	0,00149	-0,00476	0,00100
16	0,00414	0,00099	-0,00433	0,00048
17	0,00354	0,00061	-0,00366	0,00010
18	0,00303	0,00052	-0,00310	0,00005

Таблица 37

$$\varepsilon = 8; \lambda = \frac{1}{3,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармо- ники	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05722	0,02882	0,06219	0,03310
2	-0,03444	0,04380	0,03543	0,04955
3	-0,01280	0,04279	0,01064	0,04703
4	-0,00043	0,03419	-0,00259	0,03603
5	0,00441	0,02639	-0,00685	0,02677
6	0,00683	0,02126	-0,00863	0,02118
7	0,00877	0,01688	-0,01032	0,01656
8	0,00945	0,01254	-0,01073	0,01198
9	0,00881	0,00923	-0,00971	0,00848
10	0,00800	0,00721	-0,00863	0,00654
11	0,00756	0,00564	-0,00809	0,00504
12	0,00700	0,00407	-0,00746	0,00346
13	0,00610	0,00290	-0,00643	0,00228
14	0,00529	0,00227	-0,00552	0,00173
15	0,00481	0,00181	-0,00502	0,00132
16	0,00436	0,00126	-0,00456	0,00077
17	0,00378	0,00084	-0,00392	0,00035
18	0,00327	0,00069	-0,00336	0,00024

Таблица 38

$$\varepsilon = 8; \lambda = \frac{1}{3,4}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармо- ники	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05712	0,02897	0,06207	0,03327
2	-0,03413	0,04392	0,03508	0,04967
3	-0,01241	0,04272	0,01021	0,04693
4	-0,00013	0,03395	-0,00291	0,03574
5	0,00456	0,02611	-0,00698	0,02644
6	0,00688	0,02103	-0,00868	0,02092
7	0,00880	0,01668	-0,01032	0,01636
8	0,00946	0,01235	-0,01072	0,01174
9	0,00878	0,00905	-0,00967	0,00831
10	0,00795	0,00707	-0,00856	0,00640
11	0,00750	0,00552	-0,00802	0,00494
12	0,00694	0,00397	-0,00739	0,00336
13	0,00603	0,00281	-0,00636	0,00220
14	0,00522	0,00221	-0,00545	0,00167
15	0,00475	0,00176	-0,00496	0,00128
16	0,00430	0,00122	-0,00450	0,00073
17	0,00372	0,00081	-0,00386	0,00032
18	0,00322	0,00067	-0,00330	0,00022



Таблица 39

$$\epsilon = 8; \lambda = \frac{1}{3,6}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05703	0,02910	0,06197	0,03342
2	-0,03387	0,04403	0,03477	0,04978
3	-0,01207	0,04266	0,00983	0,04684
4	0,00013	0,03373	-0,00318	0,03548
5	0,00469	0,02586	-0,00710	0,02615
6	0,00693	0,02082	-0,00870	0,02069
7	0,00882	0,01650	-0,01033	0,01617
8	0,00946	0,01218	-0,01072	0,01156
9	0,00875	0,00890	-0,00963	0,00815
10	0,00790	0,00694	-0,00850	0,00627
11	0,00745	0,00542	-0,00796	0,00484
12	0,00688	0,00389	-0,00734	0,00328
13	0,00597	0,00274	-0,00630	0,00212
14	0,00516	0,00215	-0,00538	0,00162
15	0,00469	0,00172	-0,00490	0,00124
16	0,00426	0,00118	-0,00445	0,00070
17	0,00367	0,00078	-0,00381	0,00029
18	0,00317	0,00064	-0,00326	0,00020

Таблица 40

$$\epsilon = 8; \lambda = \frac{1}{3,8}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05694	0,02923	0,06187	0,03356
2	-0,03363	0,04413	0,03449	0,04988
3	-0,01176	0,04260	0,00948	0,04675
4	0,00036	0,03354	-0,00342	0,03524
5	0,00480	0,02563	-0,00719	0,02589
6	0,00698	0,02063	-0,00872	0,02048
7	0,00884	0,01634	-0,01034	0,01600
8	0,00946	0,01203	-0,01071	0,01140
9	0,00873	0,00876	-0,00959	0,00801
10	0,00785	0,00683	-0,00845	0,00616
11	0,00740	0,00533	-0,00791	0,00475
12	0,00684	0,00381	-0,00728	0,00320
13	0,00592	0,00267	-0,00624	0,00206
14	0,00511	0,00210	-0,00532	0,00157
15	0,00464	0,00168	-0,00485	0,00120
16	0,00421	0,00115	-0,00441	0,00067
17	0,00363	0,00075	-0,00376	0,00026
18	0,00313	0,00062	-0,00321	0,00018

Таблица 41

$$\epsilon = 8; \lambda = \frac{1}{4,0}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05687	0,02934	0,06178	0,03368
2	-0,03341	0,04421	0,03424	0,04998
3	-0,01148	0,04256	0,00917	0,04668
4	0,00058	0,03336	-0,00365	0,03502
5	0,00491	0,02543	-0,00728	0,02565
6	0,00702	0,02046	-0,00874	0,02031
7	0,00886	0,01619	-0,01034	0,01585
8	0,00947	0,01189	-0,01070	0,01126
9	0,00870	0,00863	-0,00955	0,00787
10	0,00781	0,00672	-0,00839	0,00606
11	0,00736	0,00525	-0,00786	0,00467
12	0,00679	0,00374	-0,00724	0,00313
13	0,00587	0,00261	-0,00618	0,00200
14	0,00506	0,00205	-0,00527	0,00152
15	0,00460	0,00164	-0,00480	0,00117
16	0,00417	0,00112	-0,00436	0,00064
17	0,00359	0,00072	-0,00372	0,00024
18	0,00309	0,00060	-0,00317	0,00016

Таблица 42

$$\epsilon = 8; \lambda = \frac{1}{4,2}$$

## Коэффициенты Фурье

Порядок гармоник	Линия сжатия		Линия расширения	
	$A_{с\kappa}$	$B_{с\kappa}$	$A_{р\kappa}$	$B_{р\kappa}$
1	-0,05680	0,02944	0,06170	0,03379
2	-0,03321	0,04429	0,03402	0,05006
3	-0,01123	0,04251	0,00889	0,04662
4	-0,00077	0,03321	-0,00385	0,03483
5	0,00500	0,02524	-0,00737	0,02544
6	0,00706	0,02030	-0,00876	0,02012
7	0,00888	0,01606	-0,01034	0,01571
8	0,00947	0,01176	-0,01069	0,01113
9	0,00868	0,00851	-0,00952	0,00775
10	0,00778	0,00663	-0,00834	0,00597
11	0,00732	0,00518	-0,00781	0,00460
12	0,00675	0,00367	-0,00719	0,00307
13	0,00583	0,00255	-0,00614	0,00195
14	0,00501	0,00201	-0,00522	0,00148
15	0,00456	0,00161	-0,00476	0,00114
16	0,00413	0,00109	-0,00432	0,00061
17	0,00355	0,00070	-0,00369	0,00022
18	0,00306	0,00059	-0,00314	0,00014



Коэффициенты Фурье  $B_k$  тангенциальной силы от атмосферного противодействия на поршень

Порядок гармоник	$\lambda = \frac{1}{3,2}$	$\lambda = \frac{1}{3,4}$	$\lambda = \frac{1}{3,6}$	$\lambda = \frac{1}{3,8}$	$\lambda = \frac{1}{4,0}$	$\lambda = \frac{1}{4,2}$
1	— 0,3974	— 0,3990	— 0,4005	— 0,4018	— 0,4029	— 0,4040
2	— 0,5000	— 0,5000	— 0,5000	— 0,5000	— 0,5000	— 0,5000
3	— 0,3128	— 0,3092	— 0,3061	— 0,3033	— 0,3008	— 0,2985
4	— 0,08012	— 0,07519	— 0,07038	— 0,06696	— 0,06351	— 0,06039
5	0,01502	0,01786	0,02036	0,02258	0,02456	0,02634
6	0	0	0	0	0	0
7	— 0,01523	— 0,01612	— 0,01688	— 0,01755	— 0,01815	— 0,01868
8	0,00103	0,00086	0,00071	0,00060	0,00051	0,00044
9	0,01087	0,01115	0,01141	0,01165	0,01187	0,01207
10	0	0	0	0	0	0
11	— 0,00719	— 0,00740	— 0,00758	— 0,00775	— 0,00790	— 0,00805
12	— 0,00002	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001
13	0,00514	0,00529	0,00542	0,00554	0,00565	0,00575
14	0	0	0	0	0	0
15	— 0,00387	— 0,00398	— 0,00408	— 0,00417	— 0,00424	— 0,00432
16	0	0	0	0	0	0
17	0,00302	0,00310	0,00318	0,00325	0,00331	0,00336
18	0	0	0	0	0	0

ТАБЛИЦА ДЛЯ ПОДБОРА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КЛАПАННЫХ ПРУЖИН

## Обозначения

 $d_{\text{ср}}$  — средний диаметр пружины, $s$  — толщина проволоки, $i$  — рабочее число витков, $G$  — модуль упругости сдвига в  $\text{кг/см}^2$ , $\tau$  — допустимое напряжение в  $\text{кг/см}^2$ , $P$  — максимальная допускаемая нагрузка на пружину в  $\text{кг}$ , $f$  — деформация пружины, соответствующая силе  $P$ , в  $\text{мм}$ , $C$  — усилие, требующееся для сообщения 1 витку пружины деформации в 1  $\text{мм}$ , в  $\text{кг}$ .

Расчетные формулы:

$$P = \frac{\pi}{8} \frac{s^3}{d_{\text{ср}}} \tau,$$

$$f = \frac{8id_{\text{ср}}^3}{s^4} \frac{P}{G} = \frac{\pi \cdot id_{\text{ср}}^2}{s} \frac{\tau}{G},$$

$$C = \frac{P}{f} i.$$

Таблица просчитана для значений:

$$G = 825\,000 \text{ кг/см}^2,$$

$$\tau = 4000 \text{ кг/см}^2,$$

$$i = 10.$$



Таблица для подбора цилиндрических винтовых

Средний диаметр пружины в мм	Толщина про					
		1,6	2	2,2	2,5	2,8
12	$P$ $C$ $f_{10}$	5,36 3,92 13,7				
14	$P$ $C$ $f_{10}$	4,60 2,46 18,7	8,97 6,01 14,9			
16	$P$ $C$ $f_{10}$	4,01 1,64 24,4	7,85 4,03 19,5	10,45 5,90 17,7	15,33 9,89 15,5	
18	$P$ $C$ $f_{10}$	3,57 1,16 30,8	6,97 2,82 24,7	9,30 4,15 22,4	13,63 6,95 19,6	19,20 10,91 17,6
20	$P$ $C$ $f_{10}$	3,21 0,842 38,1	6,28 2,06 30,5	8,36 3,02 27,7	12,27 5,07 24,2	17,28 7,94 21,7
22	$P$ $C$ $f_{10}$		5,70 1,55 36,8	7,6 2,27 33,5	11,15 3,81 29,3	15,68 5,97 26,8
25	$P$ $C$ $f_{10}$			6,69 1,54 43,3	9,81 2,60 37,8	13,84 4,06 34
30	$P$ $C$ $f_{10}$				8,17 1,49 54,8	11,52 2,35 48,9
35	$P$ $C$ $f_{10}$					
40	$P$ $C$ $f_{10}$					
45	$P$ $C$ $f_{10}$					
50	$P$ $C$ $f_{10}$					
60	$P$ $C$ $f_{10}$					
70	$P$ $C$ $f_{10}$					

клапанных пружин из круглой проволоки

Волоки в мм						
3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
21,2 10,43	20,3 17,90	33,7	17,4			
19,3 7,85	24,6 14,50	30,6 21,1	45,6 18,4 24,30	65,0 16,4 39,62		
16,97 5,34	31,8 9,93	26,9 27,1	40,2 23,8 15,3	57,2 21,1 27,13	78,5 18,9 41,60	
14,14 3,09	45,7 5,71	22,4 39,2	33,5 34,3 9,78	47,7 30,4 15,69	65,3 27,4 23,85	87,1 24,9 34,98
12,11 1,95	62,2 3,60	19,2 53,3	28,7 46,7 6,14	40,9 41,4 9,88	56,0 37,3 15,00	74,6 33,9 22,01
10,60 1,31	81,2 2,41	16,8 69,6	25,1 60,9 4,13	35,8 54,0 6,63	4,91 48,7 10,08	65,3 44,3 14,74
	15,0 1,70	88,0 22,5	77,2 31,8 4,65	68,4 43,6 7,05	58,0 56,1 10,34	75,4 51,4 14,67
	13,4 1,23	108,8 20,1	95,2 28,6 3,38	84,5 39,2 5,15	76,1 52,2 7,54	63,5 67,8 10,68
				35,7 92,2 3,88	43,5 99,7 4,36	56,5 91,4 6,18
				28,1 149,4 1,37	37,3 135,7 2,75	48,4 124,5 3,89

## БИБЛИОГРАФИЯ

При составлении библиографии по вопросам кинематики и динамики авиационных моторов мы ограничились указанием только монографий. Дать здесь подробную библиографию журнальных статей по этим вопросам не представляется возможным в виду большого количества этих статей. Содержание большинства последних нашло отражение в перечисленных ниже трудах, которые, как правило, содержат и обширный библиографический материал. Наиболее интересные статьи, появившиеся за последнее время, указаны нами в тексте книги.

### I. Математика

1. Э. Гурса, Курс математического анализа, ОНТИ, 1933—1934 г.
2. Д. Егоров, Интегрирование дифференциальных уравнений, издание 1-го МГУ, 1933 г.
3. А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики имеющих приложение в технических вопросах, издание Академии наук СССР.
4. Р. Курант, Курс дифференциального и интегрального исчисления, ГНТИ, 1931 г.
5. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, ГТТИ, 1933 г.
6. О. Ю. Шмидт, Высшая алгебра, ГТТИ, 1933 г.

### II. Механика

1. П. Аппель, Руководство теоретической механики.
2. Н. Н. Бухгольц, Основной курс теоретической механики, ОНТИ, 1937 г.
3. Е. Л. Николаи, Лекции по теоретической механике, ГТТИ, 1933 г.
4. Е. Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937 г.
5. Г. Г. Баранов, Кинематика и динамика механизмов, МАИ, 1937 г.
6. В. В. Добровольский, Теория механизмов.
7. В. В. Добровольский, Динамика кинематической цепи, часть II, ВВА, 1931 г.
8. Л. Б. Левенсон, Статика и динамика машин, ОНТИ, 1934 г.
9. Л. Б. Левенсон, Кинематика механизмов, ГНТИ, 1933 г.
10. Е. Л. Николаи, Регулирование машин, ГИЗ, 1930 г.
11. Л. П. Смирнов, Кинематика механизмов и машин, 1927 г.
12. M. Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, Berlin, 1921 г.
13. Н. А. Яковлев, Кинематика механизмов, части I и II, 1933 г.

### III. Общая теория колебаний в инженерном деле

1. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ОНТИ, 1937 г.
2. J. P. Den Hartog, Mechanical vibrations, New-York and London, 1934 г.
3. Föppl, Grundzüge der technischen Schwingungslehre, Berlin, 1931 г.
4. Geiger, Mechanische Schwingungen, Berlin, 1927 г.
5. W. Hort, Technische Schwingungslehre, Berlin, 1922 г.
6. A. L. Kimball, Vibration Prevention in Engineering, New-York, 1932 г.
7. Lehr, Schwingungstechnik, Berlin, 1930 г.
8. J. Morris, The strenght of shafts in vibration, London, 1929 г.
9. С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, ГНТИ, 1932 г.
10. Schneider, Mathematische Schwingungslehre, Berlin, 1924 г.
11. Ю. Фрити Ф. Баккингем, Вибрация в технике, ГИЗ, 1931 г.

## IV. Крутильные колебания валов

1. H. Holzer, Die Berechnung der Drehschwingungen, Berlin, 1921 г.
2. Под ред. И. Ш. Неймана, Крутильные колебания коленчатых валов, Сборник переводных работ, издание ВВА и ЦИАМ, 1935 г.
3. Основные вопросы развития быстроходных двигателей внутреннего сгорания, Сборник переводных статей, ОНТИ, 1932 г.
4. Н. М. Урванцов, Критические числа оборотов в дизельных установках, ГНТИ, 1931 г.
5. W. C. Wilson, Practical Solution of Torsional Vibration Problems, London, 1935 г.
6. H. Wydler, Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen und das Gesetz ihres Ausgleiches, Berlin, 1922 г.

## V. Прочность при переменной нагрузке

1. Arbeitsblatt VDI, № 1, 1934 г.
2. Гаф, Усталость металлов, ОНТИ, 1935 г.
3. А. И. Дымов, Строительная механика машин, ГТТИ, 1933 г.
4. E. Lehr, Spannungsverteilung in Konstruktionselementen, Berlin, 1934 г.
5. С. В. Серенсен, Прочность металла и расчет деталей машин, ОНТИ, 1937 г.
6. С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, ГТТИ, 1932 г.
7. O. Föppl, E. Becker und G. Heyderkampff, Dauerprüfung der Werkstoffe, Berlin, 1929 г.
8. W. Herold, Wechselfestigkeit metallischer Werkstoffe, Wien, 1934 г.

## VI. Уравновешивание двигателей

1. Ф. Брикс, Кинематика, динамика и уравновешивание массовых сил мотылевых машин, ГНТИ, 1931 г.
2. Н. Г. Брусевич и В. Н. Ширяев, Уравновешивание авиационных двигателей, изд. ВВА, 1933 г.
3. В. К. Вильсон, Уравновешивание двигателей внутреннего сгорания, ОНТИ, 1935 г.
4. Дельби, Уравновешивание машин, ГНТИ, 1932 г.
5. Kölsch, Gleichgang und Massenkkräfte bei Fahr- und Flugzeugmaschinen, Berlin, 1941 г.

## VII. Кинематика и динамика поршневых двигателей внутреннего сгорания

1. René de-Villieres, Le moteur à explosions.
2. Л. В. Клименко и С. И. Струковский, Проектирование автотракторных двигателей карбюраторного типа, Гострансиздат, 1937 г.
3. Л. И. Кириченко, Курс кинематики и динамики авиадвигателей, часть II, Динамика авиадвигателей, изд. ЛИИГВФ, 1933 г.
4. Е. Д. Львов, Динамика поршневых двигателей, ОНТИ, 1936 г.
5. И. Ш. Нейман, Динамика и расчет на прочность авиационных моторов, части I и II, ОНТИ, 1933 г.
6. А. П. Островский, Курс конструкций и расчетов авиационных моторов, ОНТИ, 1934 г.
7. К. Ридль, Конструирование и расчет современных автомобильных двигателей, ОНТИ, 1934 г.
8. Н. К. Смольянинов, Расчет кривошипного механизма звездообразного авиамотора „Хорнет“-А, изд. ВВА, 1933 г.
9. А. В. Страхов, Динамика легких двигателей внутреннего сгорания, ОНТИ, 1935 г.
10. В. Н. Ширяев, Кинематика, динамика и расчет на прочность кривошипного механизма авиамотора „Кертисс-Конкверор“, НКВМ, 1933 г.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора . . . . .	Стр. 3
---------------------	-----------

### ЧАСТЬ I

#### КИНЕМАТИКА КРИВОШИПНО-ШАТУННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Глава I. Кинематика нормального кривошипно-шатунного механизма . . .	5
§ 1. Основные понятия и обозначения . . . . .	5
§ 2. Угловые перемещение, скорость и ускорение шатуна . . . . .	6
§ 3. Относительная угловая скорость вращения шатуна вокруг шатунной шейки коленчатого вала . . . . .	7
§ 4. Расстояние поршня от верхнего мертвого положения . . . . .	7
§ 5. Скорость поршня . . . . .	10
§ 6. Ускорение поршня . . . . .	13
§ 7. Определение основных размеров нормального кривошипно-шатунного механизма . . . . .	16
 Глава II. Кинематика дезаксиального кривошипно-шатунного механизма . .	 17
§ 1. Основные понятия и обозначения . . . . .	17
§ 2. Угловые перемещение, скорость и ускорение шатуна . . . . .	18
§ 3. Расстояние поршня от верхнего мертвого положения. Ход поршня . . . . .	19
§ 4. Скорость и ускорение поршня . . . . .	19
 Глава III. Кинематика кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном. Случай, когда $\gamma_1 = \gamma$ . . . . .	 20
§ 1. Основные понятия и обозначения . . . . .	20
§ 2. Угловые перемещение, скорость и ускорение прицепного шатуна . . . . .	21
§ 3. Расстояние поршня в боковом цилиндре от верхнего мертвого положения . .	23
§ 4. Скорость поршня бокового цилиндра . . . . .	27
§ 5. Ускорение поршня бокового цилиндра . . . . .	28
§ 6. Определение основных размеров кривошипно-шатунного механизма . . . . .	29
 Глава IV. Кинематика кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном. Случай, когда $\gamma_1 \neq \gamma$ . . . . .	 34
§ 1. Угловые перемещение, скорость и ускорение прицепного шатуна . . . . .	34
§ 2. Расстояние поршня бокового цилиндра от верхнего мертвого положения . . .	35
§ 3. Скорость и ускорение поршня бокового цилиндра . . . . .	39
§ 4. Определение основных размеров кривошипно-шатунного механизма . . . . .	40
 Глава V. Кинематика кривошипно-шатунных механизмов при переменной угловой скорости вращения коленчатого вала мотора . . . . .	 47

## ЧАСТЬ II

### СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В КРИВОШИПНО-ШАТУННОМ МЕХАНИЗМЕ

Глава I. Силы от инерции двигающихся масс кривошипно-шатунного механизма . . . . .	53
§ 1. Силы инерции шатуна . . . . .	53
§ 2. Определение центра тяжести и момента инерции шатуна . . . . .	57
§ 3. Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме от сил инерции поступательно двигающихся масс в главном цилиндре . . . . .	59
§ 4. Выражения для $P_j$ , $T_j$ , $M_{sj}$ и $M_{fj}$ в форме рядов Фурье для случая нормального кривошипно-шатунного механизма при $\omega = \text{const}$ . . . . .	61
§ 5. Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме, от сил инерции поступательно двигающихся масс в боковом цилиндре . . . . .	63
§ 6. Выражения для $P_{jl}$ , $T_{jl}$ , $M_{sjl}$ и $M_{fjl}$ в форме полиномов для случая кривошипно-шатунного механизма с прицепным шатуном при $\omega = \text{const}$ . . . . .	65
§ 7. Силы инерции вращательно двигающихся масс . . . . .	67
Глава II. Силы от рабочих газов в цилиндрах двигателя . . . . .	69
§ 1. Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме, от рабочих газов в главном цилиндре . . . . .	70
§ 2. Силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме, от рабочих газов в боковом цилиндре . . . . .	—
§ 3. Гармонический анализ тангенциальных сил от газов . . . . .	72
§ 4. Определение коэффициентов $A_{T_k}$ и $B_{T_k}$ тангенциальной силы $T_T$ от газов с помощью таблиц . . . . .	77
§ 5. Гармонический анализатор Mader-Ott . . . . .	80
Глава III. Суммарные силы от газов и инерции двигающихся масс, действующие в кривошипно-шатунном механизме двигателя . . . . .	88
§ 1. Суммарные силы, действующие в кривошипно-шатунном механизме, от рабочих газов и инерции поступательно двигающихся масс одного цилиндра. Случай нормального кривошипно-шатунного механизма и случай механизма с прицепным шатуном. Примеры . . . . .	88
§ 2. Порядок вспышек в моторах разного типа . . . . .	97
§ 3. Суммарные силы от всех цилиндров, действующих на данную кривошипную шейку. Примеры . . . . .	98
§ 4. Векторные диаграммы результирующих сил, действующих на шатунную шейку и шатунный подшипник. Примеры. Средняя сила, действующая на шатунную шейку. Примеры. Графики для определения средних сил, действующих на шатунную шейку в моторах разного типа . . . . .	102
§ 5. Результирующая сил, действующих нормально к стенке главного цилиндра и создаваемых работой цилиндров, действующих на данную шатунную шейку, при наличии кривошипно-шатунного механизма с прицепными шатунами. Примеры . . . . .	111
§ 6. Крутящие моменты, передающиеся через опорные шейки коленчатого вала; случай мотора с нагнетателем. Суммарный крутящий момент на валу двигателя от работы всех его цилиндров. Примеры . . . . .	112
§ 7. Гармонический анализ суммарной тангенциальной силы на шатунной шейке от газов и инерции поступательно двигающихся масс в цилиндрах, действующих на эту шейку . . . . .	115
Глава IV. Определение опорных реакций коленчатого вала . . . . .	122
Общие положения . . . . .	122
§ 1. Определение опорных реакций коленчатого вала, считая последний разрезным . . . . .	123
§ 2. Определение опорных реакций коленчатого вала, считая последний прямолинейной многоопорной балкой . . . . .	124
§ 3. Сравнение результатов, полученных различными методами расчета . . . . .	137

## ЧАСТЬ III

### КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ АВИАЦИОННЫХ МОТОРОВ

Общие положения . . . . .	136
Глава I. Свободные крутильные колебания систем . . . . .	139
§ 1. Свободные крутильные колебания системы с $n$ степенями свободы . . . . .	139
§ 2. Определение главных видов свободных крутильных колебаний систем . . . . .	146
§ 3. Определение главных видов свободных крутильных колебаний разветвленных систем . . . . .	163
§ 4. Определение главных видов свободных крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов, имеющих редуктор, с учетом упругой связи мотора с подмоторной рамой . . . . .	172
§ 5. Определение свободных крутильных колебаний системы из двух масс, соединенных переменной крутильной жесткостью . . . . .	179
Глава II. Приведение действительной крутильной системы к теоретической схеме . . . . .	189
§ 1. Определение крутильных жесткостей . . . . .	189
§ 2. Определение эквивалентных полярных моментов инерции масс . . . . .	210
Глава III. Принужденные крутильные колебания систем коленчатых валов авиационных моторов . . . . .	215
§ 1. Моменты, возбуждающие, и моменты, заглушающие крутильные колебания . . . . .	215
§ 2. Принужденные крутильные колебания 1-массовой и 2-массовой систем . . . . .	222
§ 3. Принужденные крутильные колебания многомассовой системы . . . . .	232
§ 4. Получение расчетных торсиограмм для резонансных чисел оборотов мотора . . . . .	237
§ 5. Определение сил, действующих в системе коленчатого вала авиационного мотора, и оценка надежности его конструкции при наличии крутильных колебаний системы . . . . .	251
Глава IV. Аппаратура для экспериментального исследования крутильных колебаний систем коленчатых валов авиационных моторов . . . . .	256
§ 1. Торсиографы и торсиондикаторы . . . . .	256
§ 2. Обработка торсиограмм и построение экспериментальной резонансной кривой . . . . .	262
§ 3. Анализ торсиограмм, соответствующих критическим резонансным числам оборотов мотора. Выделение резонирующей гармоник колебаний и определение эквивалентного коэффициента заглушения $\xi$ . . . . .	265
Глава V. Средства для уменьшения опасных крутильных колебаний в системах коленчатых валов авиационных моторов . . . . .	265
§ 1. Демпферы трения крутильных колебаний . . . . .	265
§ 2. Динамические демпферы крутильных колебаний . . . . .	273
Глава VI. Неравномерность хода мотора . . . . .	290
§ 1. Неравномерность хода мотора . . . . .	290
§ 2. Неравномерность момента внешнего сопротивления $M_{\text{вн}}$ . . . . .	295

## ЧАСТЬ IV

### УРАВНОВЕШИВАНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

Глава I. Уравновешивание сил инерции вращающихся масс двигателя . . . . .	294
§ 1. Уравновешивание сил инерции вращающихся масс . . . . .	299
§ 2. Общий признак полной уравновешенности равномерно вращающегося тела . . . . .	300
§ 3. Машины для динамической балансировки вращающихся деталей . . . . .	301



Глава II. Уравновешивание сил инерции поступательно двигающихся масс двигателя . . . . .	307
§ 1. Сводка основных формул . . . . .	307
§ 2. Уравновешивание сил инерции поступательно двигающихся масс двигателя . . . . .	310
Глава III. Уравновешивание сил инерции двигающихся масс кривошипно-шатунного механизма авиационных моторов разного типа . . . . .	314
§ 1. Уравновешивание сил инерции одноцилиндрового мотора . . . . .	314
§ 2. Уравновешивание сил инерции двухцилиндрового V-образного мотора . . . . .	316
§ 3. Уравновешивание сил инерции двухцилиндрового мотора с противоположно расположенными цилиндрами и с кривошипами, расположенными под углом $180^\circ$ друг к другу . . . . .	319
§ 4. Уравновешивание сил инерции четырехцилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными в ряд . . . . .	319
§ 5. Уравновешивание сил инерции шестицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными в ряд, и с кривошипами под углом $120^\circ$ . . . . .	320
§ 6. Уравновешивание сил инерции восьмицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными V-образно под углом $90^\circ$ . . . . .	321
§ 7. Уравновешивание сил инерции двенадцатицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными V-образно под углом $60^\circ$ . . . . .	325
§ 8. Уравновешивание сил инерции двенадцатицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными W-образно . . . . .	329
§ 9. Уравновешивание сил инерции восемнадцатицилиндрового мотора с цилиндрами, расположенными W-образно . . . . .	333
§ 10. Уравновешивание сил инерции звездообразных моторов, у которых $\gamma_i = \gamma$ . . . . .	336
§ 11. Уравновешивание сил инерции сдвоенного звездообразного мотора с кривошипами, расположенными под углом $180^\circ$ , и с $\gamma_i = \gamma$ . . . . .	342
§ 12. Уравновешивание сил инерции звездообразных моторов типа Румплера . . . . .	343
Глава IV. Вибрация моторной установки . . . . .	347

## ЧАСТЬ V

### КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Глава I. Кинематика клапанных механизмов . . . . .	357
§ 1. Выбор высоты подъема клапана и величины диаметра горловины . . . . .	357
§ 2. Фазы распределения и зазор в клапанах . . . . .	360
§ 3. Скорость вращения кулачков . . . . .	364
§ 4. Кинематика клапана или толкателя, законы движения которого заданы . . . . .	366
§ 5. Построение профиля кулачка при заданном прямолинейном движении толкателя . . . . .	372
§ 6. Построение профиля кулачка рычажных распределительных механизмов при заданном законе движения клапана . . . . .	374
§ 7. Кинематика прямолинейно движущегося толкателя, приводимого в движение кулачком, очерченным дугами кругов и прямыми . . . . .	377
§ 8. Кинематика рычага, приводимого в движение кулачком, очерченным дугами кругов и прямыми . . . . .	385
§ 9. Кинематика плоскостного механизма распределения звездообразных моторов . . . . .	395
§ 10. Кинематика клапана, приводимого в движение рычагом . . . . .	397
Глава II. Динамика распределительных механизмов . . . . .	398
§ 1. Силы, действующие в клапанном механизме . . . . .	398
§ 2. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через траверсу или толкатель . . . . .	401
§ 3. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при непосредственной передаче движения от кулачка к клапану с плоской тарелкой . . . . .	403
§ 4. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через рычаг с роликом . . . . .	404

§ 5. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме при передаче движения от кулачка к клапану через рычаг с плоскостью . . . . .	404
§ 6. Силы и моменты, действующие в клапанном механизме звездообразного мотора . . . . .	405
§ 7. Расчет клапанных пружин . . . . .	407
§ 8. Общие положения для построения профиля кулачка . . . . .	414
Приложение I. Таблицы для подсчета кинематики и динамики нормального кривошипно-шатунного механизма . . . . .	422
Приложение II. Таблицы коэффициентов Фурье тангенциальных сил от газов . . . . .	443
Приложение III. Значения величин $\cos(n\alpha)$ и $\sin(n\alpha)$ . . . . .	464
Приложение IV. Таблица для подбора цилиндрических клапанных пружин . . . . .	465
Библиография . . . . .	468

Г л  
/ /  
Г  
/ /  
/ /  
/ /

# ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Стр ока	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
49	1 снизу	$+\frac{k}{16}$	$+\frac{k^2}{16}$	ред.
63	табл. 9, графы 5 и 6, строка 3 сверху	$ -0,203  - 0,209 $	$ -0,209  - 0,203 $	ред.
104 и 105	Фиг. 81 и 82	Ось главного шатуна	Плоскость кривошипа	авт.
128	10 сверху	$2(1 - q)$	$2(1 + q)$	ред.
179	Фиг. 139	Фигура ошибочно перевернута на $180^\circ$		ред.
196	1 и 2 снизу	Слова „из-за скручиваний“ поместить после слов „деформация щек“		авт.
221	Табл. 32, графа 1, строки 3 и 4	$Y$ "	$Y$ "	ред.
245	4 сверху	$M_i = M_i \sin(k\theta_i + \beta_i)$	$M_i = M_i \sin(k\theta_i + \beta_i)$	ред.
245	13 снизу	$M_i$	$M_i$	ред.
275	15 сверху	фиг. 194	фиг. 193	ред.
286	13 сверху	точки подвеса $O$	точки подвеса $O_1$	ред.
329	15 снизу, формула (88)	$\sqrt{(3a)^2 + 3a^2}$	$\sqrt{(3a)^2 + 3a^2}$	тип.
353	18 и 20 снизу	$\frac{A_{kx}}{B_{kx}} \operatorname{tg} \operatorname{tg} \beta_{kx}$	$\frac{A_{kx}}{B_{kx}} = \operatorname{tg} \beta_{kx}$	ред.
380	4 снизу	(фиг. 255)	(фиг. 256)	ред.
412	3 сверху	$A_k + \sum_{k=1}^{k=m} h(k)$	$A_0 + \sum_{k=1}^{k=m} h(k)$	корр.
415	Табл. 39, заголовоч посылой графы	Сила деформации пружин на 1 см кг	Сила деформации пружин в кг/см	ред.
420	12 снизу формула (88)	$v_\tau$	$v_\tau^2$	ред.

И. III. Пейман, Динамика авиационных двигателей. Зак. № 1035.

Редактор В. А. Пивовар

Тех. редактор И. М. Зудакин

Сдано в набор 3/IX 1939 г. Подп. к печати 19/XI 1939 г. Индекс А-50-5-2. Тираж 5000.  
Печ. листов  $29\frac{3}{4} + 4$  вкл. Формат бумаги  $70 \times 108\frac{1}{16}$  Уполн. Главлита А 21779. Учетн.-  
авт. л. 45,39. Учетн. № 303. Зак. № 1035.

Типография Оборонгиза. Киев, Крещатик, 42.