

# ПРОЧНОСТЬ • УСТОЙЧИВОСТЬ • КОЛЕБАНИЯ

---

1



# **ПРОЧНОСТЬ • УСТОЙЧИВОСТЬ • КОЛЕБАНИЯ**

**Том 1**

---

**СПРАВОЧНИК В ТРЕХ ТОМАХ**

**ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ:**

**И. А. Биргера и Я. Г. Пановко**



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

**С. А. Амбарцумян, В. Л. Бидерман,  
И. А. Биргер, В. В. Болотин, А. С. Вольмир,  
Л. М. Качанов, Я. Г. Пановко, В. И. Феодосьев**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО „МАШИНОСТРОЕНИЕ“**

**Москва • 1968**

**Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1.** Под ред. д-ра техн. наук проф. И. А. Биргера и чл.-кор. АН Латвийской ССР Я. Г. Пановко.

В первом томе приведены основные уравнения деформируемых сред, справочные сведения по теории упругости, пластичности, ползучести, усталости и надежности механических систем, по термоупругости и термопластичности, по определению напряжений и деформаций при растяжении, изгибе и кручении прямых и кривых стержней, прямоугольных и круглых пластинок, оболочек.

Книга предназначена для инженеров-конструкторов, расчетчиков — прочнистов машиностроительных заводов, проектных организаций, научно-исследовательских институтов. Она может быть полезна также студентам и преподавателям вузов.

Рис. 733. Табл. 155. Библ. 449 названий.

#### АВТОРЫ ТОМА:

**Абрамян Б. Л.**, д-р физ.-мат. наук; **Арутюнян Н. Х.**, академик АН Армянской ССР; **Биргер И. А.**, д-р техн. наук, проф.; **Болотин В. В.**, д-р техн. наук, проф.; **Вольмир А. С.**, д-р техн. наук, проф.; **Демьянушко И. В.**, канд. техн. наук; **Калинин Н. Г.**, проф.; **Качанов Л. М.**, д-р физ.-мат. наук, проф.; **Кильдибеков И. Г.**, инж.; **Пановко Я. Г.**, чл.-кор. АН Латвийской ССР; **Савин Г. Н.**, академик АН УССР; **Федоров Н. А.**, канд. техн. наук; **Черных К. Ф.**, д-р физ.-мат. наук; **Шорр Б. Ф.**, д-р техн. наук.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	9
<b>ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ</b>	
<b>Г л а в а 1. Напряжения и деформации в сплошных средах (Л. М. Качанов)</b> . . . . .	11
Напряжения . . . . .	11
Деформация . . . . .	16
Скорость деформации . . . . .	20
Литература . . . . .	21
<b>Г л а в а 2. Теория упругости</b> . . . . .	22
Закон Гука (Л. М. Качанов) . . . . .	22
Уравнения теории упругости в перемещениях (Л. М. Качанов) . . . . .	26
Уравнения теории упругости в напряжениях (Л. М. Качанов) . . . . .	27
Граничные условия. Принцип Сен-Венана. Начальные условия (Л. М. Качанов) . . . . .	29
Общие теоремы. Вариационные методы решения (Л. М. Качанов) . . . . .	30
Плоская задача (Л. М. Качанов) . . . . .	32
Осесимметричные задачи (Л. М. Качанов) . . . . .	42
Дополнительные сведения по плоской задаче (Г. Н. Савин) . . . . .	47
Литература . . . . .	56
<b>Г л а в а 3. Теория пластичности (Л. М. Качанов)</b> . . . . .	58
Механические свойства твердых тел . . . . .	58
Уравнения пластического состояния . . . . .	61
Некоторые осесимметричные упруго-пластические задачи . . . . .	65
Общие теоремы и методы решения . . . . .	68
Плоская деформация . . . . .	75
Плоское напряженное состояние . . . . .	84
Осесимметричная деформация . . . . .	87
Литература . . . . .	88
<b>Г л а в а 4. Теория ползучести (Л. М. Качанов)</b> . . . . .	89
Ползучесть металлов . . . . .	89
Уравнения ползучести при одноосном напряженном состоянии . . . . .	92
Уравнения ползучести при сложном напряженном состоянии . . . . .	96
Система уравнений ползучести. Вариационные уравнения . . . . .	98
Установившаяся ползучесть . . . . .	100
Задачи неустановившейся ползучести . . . . .	104
Ползучесть труб . . . . .	106
Время разрушения (длительная прочность) . . . . .	109
Литература . . . . .	112
<b>Г л а в а 5. Термоупругость и термопластичность (Л. М. Качанов)</b> . . . . .	114
Уравнения термоупругости . . . . .	114
Плоская задача термоупругости . . . . .	116
Осесимметричная задача термоупругости . . . . .	122
О задачах термоупругости при зависящих от температуры упругих постоянных . . . . .	124
Неустановившиеся температурные напряжения . . . . .	125



Температурные напряжения при упруго-пластических деформациях . . . . .	125
Влияние ползучести на температурные напряжения . . . . .	130
Литература . . . . .	130
<b>Глава 6. Теория упруго-вязких тел (Л. М. Качанов) . . . . .</b>	<b>132</b>
Простые тела . . . . .	132
Сложные линейные тела (линейная вязко-упругость) . . . . .	134
Сложные нелинейные тела . . . . .	144
Литература . . . . .	147
<b>Глава 7. Элементы теории усталости (В. В. Болотин) . . . . .</b>	<b>149</b>
Основные понятия . . . . .	149
Факторы, влияющие на сопротивление усталостному разрушению	153
Усталостное разрушение как случайный марковский процесс . . . . .	154
Статистическая теория усталостного разрушения . . . . .	156
Применение статистической теории усталостного разрушения	158
Накопление усталостных повреждений при неоднородном циклическом нагружении . . . . .	160
Литература . . . . .	162
<b>Глава 8. Основы теории надежности механических систем (В. В. Болотин) . . . . .</b>	<b>164</b>
Основные понятия . . . . .	164
Особенности приложения теории надежности к вопросам прочности . . . . .	168
Определение статистических характеристик прочности . . . . .	169
Определение статистических характеристик внешних нагрузок	171
Определение средней долговечности при действии циклических напряжений . . . . .	175
Вычисление надежности и коэффициента запаса . . . . .	178
Литература . . . . .	181
<b>НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ</b>	
<b>Глава 9. Растяжение и изгиб стержней (И. А. Биргер) . . . . .</b>	<b>183</b>
Растяжение стержней . . . . .	183
Гибкие нити . . . . .	187
Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня . . . . .	197
Касательные напряжения в поперечном сечении стержня . . . . .	208
Прогибы стержня при изгибе . . . . .	212
Изгиб стержней на упругом основании . . . . .	223
Продольно-поперечный изгиб стержней . . . . .	229
Литература . . . . .	238
<b>Глава 10. Кручение стержней (Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян) . . . . .</b>	<b>239</b>
Постановка задачи . . . . .	239
Общее решение основных уравнений при помощи функции напряжений и граничные условия . . . . .	242
Определение перемещений . . . . .	244
Теорема Бредта о циркуляции касательного напряжения . . . . .	245
Жесткость призматического стержня . . . . .	247
Максимальное касательное напряжение . . . . .	248
Функция перемещения . . . . .	248
Касательные напряжения в вершинах выступающих и входящих углов контура поперечного сечения стержня . . . . .	251
Мембранная аналогия . . . . .	253
Другие аналогии . . . . .	254
Кручение прямоугольного стержня . . . . .	255
Кручение круглого вала с полукруглой канавкой . . . . .	258
Кручение некоторых прокатных и простых профилей . . . . .	260
Приближенная формула Сен-Венана для жесткости . . . . .	268
Кручение тонкостенных стержней с криволинейным открытым профилем . . . . .	268
Кручение тонкостенных стержней открытого профиля из прямоугольных и трапециевидных полосок . . . . .	272

Кручение тонкостенных трубчатых профилей . . . . .	276
Кручение тонкостенных стержней с многосвязными профилями . . . . .	281
Концентрация напряжений во входящих углах тонкостенных стержней . . . . .	283
Литература . . . . .	286
<b>Глава 11. Расчет круговых колец и кольцевых систем (И. А. Биргер, Н. А. Федоров) . . . . .</b>	<b>287</b>
Круговой стержень . . . . .	287
Обозначения . . . . .	287
Дифференциальные уравнения изгиба . . . . .	288
Стержни постоянного сечения, нагруженные в их плоскости . . . . .	300
Стержни постоянного сечения, нагруженные перпендикулярно их плоскости . . . . .	309
Замкнутое круговое кольцо . . . . .	309
Основные соотношения . . . . .	309
Элементарные нагрузки на кольцо . . . . .	312
Усилия и перемещения при простейших нагрузках в плоскости кольца . . . . .	320
Кольца переменной жесткости. Составные кольца . . . . .	335
Гибкие брус и кольцо . . . . .	340
Влияние нормальных сил . . . . .	340
Влияние начального прогиба . . . . .	344
Тонкостенные стержень и кольцо . . . . .	346
Плоский изгиб . . . . .	346
Нагрузка, перпендикулярная плоскости стержня . . . . .	346
Кольца с произвольным расположением осей инерции . . . . .	358
Кольцо с присоединенной цилиндрической оболочкой . . . . .	361
Кольцевые системы с малым числом спиц . . . . .	365
Шарнирное соединение спиц с кольцами . . . . .	365
Жесткое соединение спиц с кольцами . . . . .	382
Кольцевые системы с большим числом спиц . . . . .	396
Внутреннее кольцо абсолютно жесткое . . . . .	399
Шарнирное соединение спиц с кольцами . . . . .	402
Литература . . . . .	415
<b>Глава 12. Тонкостенные и кривые стержни . . . . .</b>	<b>417</b>
Тонкостенные стержни (Я. Г. Пановко) . . . . .	417
Общие сведения . . . . .	417
Стесненное кручение под действием скручивающих моментов . . . . .	418
Стесненное кручение при действии внешних бимоментов и продольной нагрузки . . . . .	426
Кривые стержни (И. А. Биргер) . . . . .	430
Общие сведения. Нормальные напряжения . . . . .	430
Условия равновесия, касательные напряжения и перемещения . . . . .	437
<b>Глава 13. Естественно закрученные стержни (Б. Ф. Шорр) . . . . .</b>	<b>440</b>
Основные положения . . . . .	440
Теория Кирхгофа—Клебша . . . . .	443
Общая теория закрученных стержней . . . . .	446
Техническая теория закрученных стержней удлиненного профиля . . . . .	454
Нелинейные задачи . . . . .	462
Литература . . . . .	465
<b>Глава 14. Составные стержни (Н. Г. Калинин) . . . . .</b>	<b>466</b>
Балки со стенкой, работающей на сдвиг, и поясами, воспринимающими только осевые усилия . . . . .	466
Многослойные составные стержни . . . . .	467
Двухслойная балка с упругими поперечными связями и без связей сдвига . . . . .	471
Учет сил трения и конструктивное демпфирование . . . . .	474
Литература . . . . .	479

<b>Глава 15. Статически неопределимые стержневые системы (Н. Г. Калинин)</b>	<b>480</b>
Метод сил	480
Канонические уравнения метода сил	480
Статически неопределимые балки	485
Плоские статически неопределимые рамы	487
Плоскопространственные статически неопределимые рамы	490
Статически неопределимые фермы	491
Метод перемещений	494
Общие сведения	494
Основные зависимости для одного стержня	494
Канонические уравнения метода перемещений	495
Расчет рам с вертикальными стойками	495
Расчет рамной эстакады	501
Смешанный метод	501
Литература	502
 <b>Глава 16. Расчет стержней с учетом пластичности и ползучести (Л. М. Качанов)</b>	 <b>504</b>
Расчет стержней при упруго-пластических деформациях	504
Кривые деформации при растяжении и сжатии	504
Шарнирные стержневые системы (решетки)	505
Изгиб балок	505
Изгиб кривых стержней	511
Кручение	513
Расчет стержней в условиях ползучести	517
Стержневые решетки	517
Изгиб	519
Кручение	524
Литература	525
 <b>НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИНОК</b>	
 <b>Глава 17. Изгиб и осесимметричное растяжение пластинок</b>	 <b>526</b>
Основные определения	526
Прямоугольные пластинки (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков)	526
Расчет прямоугольных пластинок	532
Круглые пластинки при осесимметричной деформации (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков)	563
Основные уравнения и граничные условия	563
Расчет круглых пластинок	566
Расчет пластинок различного очертания (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков)	573
Изгиб пластинок на упругом основании (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков)	579
Изгиб толстых плит (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков)	586
Осесимметричное растяжение пластинок (И. А. Биргер, И. В. Демьянушко)	586
Основные уравнения	586
Точные решения	590
Напряжения и деформации в дисках с произвольным изменением толщины	593
Литература	596
 <b>Глава 18. Гибкие пластинки и мембраны (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков)</b>	 <b>597</b>
Прямоугольные гибкие пластинки и мембраны	596
Основные зависимости	597
Граничные условия	600
Расчет	602

Круглые гибкие пластинки и мембраны при осесимметричном изгибе	608
Основные зависимости и граничные условия	608
Расчет	612
Литература	614
<b>Глава 19. Расчет пластинок с учетом пластичности и ползучести (Л. М. Качанов)</b>	<b>615</b>
Расчет пластинок при упруго-пластических деформациях	615
Основные положения	615
Идеально-пластические пластины. Предельная нагрузка	616
Упруго-пластический изгиб пластинок	620
Изгиб пластинок из упрочняющегося материала	621
Расчет пластинок при деформациях ползучести	623
Уравнения ползучести изгибаемых пластинок	623
Ползучесть осесимметричных пластинок	624
Литература	628
<b>НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ОБОЛОЧКАХ</b>	
<b>Глава 20. Общие уравнения теории тонких оболочек (К. Ф. Черных)</b>	<b>629</b>
Геометрия оболочки	629
Деформация оболочки	631
Уравнения равновесия. Статические граничные величины	635
Связь между усилиями-моментами и деформацией	639
Граничные условия	640
Метод смещений	641
Метод сил. Статико-геометрическая аналогия	641
Комплексный вариант теории оболочек	642
Уравнения пологих оболочек Власова	646
Безмоментная теория	648
Краевой эффект	651
Термоупругие напряжения	651
Методы решения	652
Литература	653
<b>Глава 21. Общий случай деформации оболочек вращения (К. Ф. Черных)</b>	<b>654</b>
Геометрия оболочки	654
Деформация срединной поверхности	655
Равновесие оболочки. Определение напряжений	657
Обобщенный закон Гука	659
Граничные условия	659
Метод разделения переменных	660
Самоуравновешенные нагрузки ( $k \geq 2$ )	662
Осесимметричные случаи	664
Обратносимметричный случай ( $k = 1$ )	681
Литература	688
<b>Глава 22. Расчет круговых цилиндрических оболочек (К. Ф. Черных)</b>	<b>689</b>
Осесимметричный изгиб	691
Осесимметричное кручение	697
Обратносимметричный случай	697
Примеры расчета	704
Литература	710
<b>Глава 23. Расчет конических оболочек (К. Ф. Черных)</b>	<b>711</b>
Осесимметричный изгиб	713
Осесимметричное кручение	720
Обратносимметричный случай	721
Примеры расчета	729
Литература	736

---

Г л а в а 24. Расчет сферических оболочек (К. Ф. Черных) . . . . .	737
Осесимметричный изгиб . . . . .	739
Осесимметричное кручение . . . . .	746
Обратносимметричный случай . . . . .	747
Случай малого центрального отверстия . . . . .	755
Примеры расчета . . . . .	766
Литература . . . . .	774
 Г л а в а 25. Расчет торообразных оболочек (К. Ф. Черных) . . . . .	 776
Осесимметричный изгиб . . . . .	778
Осесимметричное кручение . . . . .	793
Обратносимметричный случай . . . . .	794
Примеры расчета . . . . .	802
Литература . . . . .	810
 Предметный алфавитный указатель (М. З. Рафес, К. М. Хась- минская) . . . . .	 812

---

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие современного машиностроения тесно связано с проблемами прочности и динамики. Интенсификация рабочих процессов, повышение нагрузок, скоростей, давлений, температур, уменьшение веса и габаритов конструкций, увеличение надежности и ресурса приводят к необходимости расширения теоретических и экспериментальных исследований в области прочности, устойчивости и колебаний.

При создании современных машин важным этапом является расчет на прочность. Однако в практической работе при проведении расчетов на прочность конструктор и расчетчик сталкивались с большими трудностями, так как не было достаточно полной справочной литературы.

Отсутствие такой литературы затрудняло практическое использование многих важных результатов, полученных отечественными и зарубежными учеными в теории упругости, пластичности и ползучести, в расчетах на прочность стержней, пластинок и оболочек.

Основная цель предлагаемого справочника — дать инженерам-машиностроителям достаточно полное и доступное изложение основных результатов современной науки о прочности и динамике.

Материал справочника разбит на три тома.

В первом томе изложены необходимые сведения из теории упругости, пластичности и ползучести, рассмотрены вопросы термоупругости и термопластичности. Специальная глава посвящена теории упруговязких тел, представляющей интерес для расчета на прочность стеклопластиков и других полимерных материалов. В этом же томе приведены основы теории усталости и надежности механических систем, даны нужные сведения из теории стержней, пластинок и оболочек.

Дополнительные сведения из теории пластинок и оболочек изложены во втором томе. В нем указаны методы расчета на прочность составных, анизотропных и трехслойных оболочек, круглых пластинок, оболочек вращения переменной толщины. В этом же томе приведены справочные сведения о концентрации напряжений в пластинках и оболочках, расчете контактных деформаций и толстостенных цилиндров.



Последний — т р е т и й — том посвящен вопросам устойчивости и колебаний. В нем рассмотрены устойчивость и колебания стержней, пластинок и оболочек, аэроупругость, действие случайных нагрузок и др.

Материал справочника может служить основой для разработки методов расчета на прочность, устойчивость и колебания деталей и узлов конструкций. Расчетную схему, условия закрепления и другие конкретные данные выбирают в процессе расчета с учетом особенностей работы конструкции.

Замечания и пожелания по содержанию справочника просьба направлять по адресу: *Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3, Издательство «Машиностроение»*

# ● ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

## Глава 1

### НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

#### НАПРЯЖЕНИЯ

**Тензор напряжения.** В сечении тела на произвольно ориентированной площадке с нормалью  $n$  действует *вектор напряжения*  $S_n$  (рис. 1). Нормальную составляющую  $\sigma_n$  вектора напряжения называют нормальным напряжением, касательную —  $\tau_n$  — касательным напряжением на данной площадке.

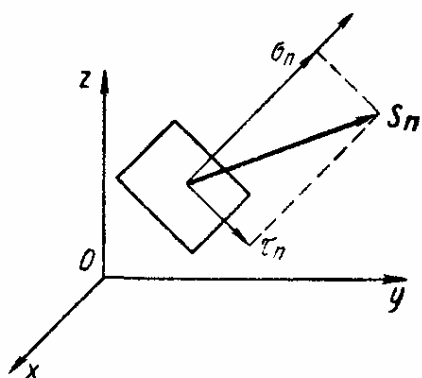


Рис. 1. Вектор напряжения на произвольной площадке

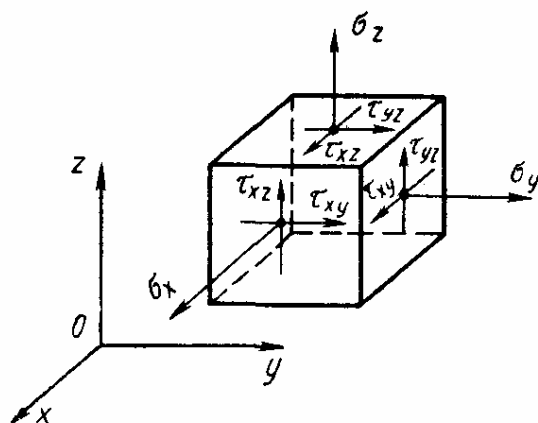


Рис. 2. Компоненты напряжения

Напряжение  $S_n$  может быть охарактеризовано тремя проекциями  $S_{nx}$ ,  $S_{ny}$ ,  $S_{nz}$  на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и зависит от направления площадки в данной точке тела. Первый индекс указывает на направление площадки, второй — на ось проектирования.

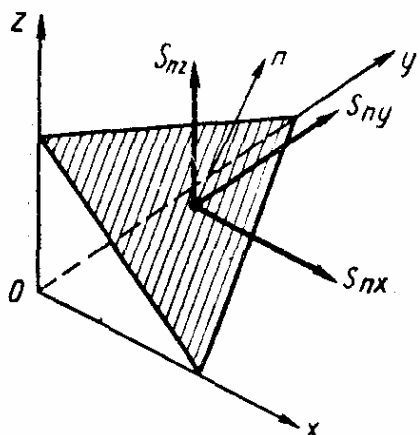
На площадках, соответственно перпендикулярных к осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , напряжения имеют компоненты (рис. 2), которые образуют *тензор напряжения*

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Напряжение на произвольно ориентированной площадке вычисляется по компонентам напряжения (формулы Коши):

$$\left. \begin{aligned} S_{nx} &= \sigma_x \cos \widehat{nx} + \tau_{xy} \cos \widehat{ny} + \tau_{xz} \cos \widehat{nz}; \\ S_{ny} &= \tau_{yx} \cos \widehat{nx} + \sigma_y \cos \widehat{ny} + \tau_{yz} \cos \widehat{nz}; \\ S_{nz} &= \tau_{zx} \cos \widehat{nx} + \tau_{zy} \cos \widehat{ny} + \sigma_z \cos \widehat{nz}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти формулы вытекают из условий равновесия элементарного тетраэдра (рис. 3);  $\widehat{nx}$ ,  $\widehat{ny}$ ,  $\widehat{nz}$  — углы между нормалью к косо́й площадке и соответственно осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .



Если к элементам тела не приложены внешние объемные моменты (например, магнитные моменты), то тензор напряжения симметричен, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только этот случай; несимметричную механику сплошной среды, см., например, в работе [8].

Нормальное напряжение на данной площадке

Рис. 3. Элементарный тетраэдр

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \widehat{nx} + \sigma_y \cos^2 \widehat{ny} + \\ &+ \sigma_z \cos^2 \widehat{nz} + 2\tau_{xy} \cos \widehat{nx} \cos \widehat{ny} + \\ &+ 2\tau_{yz} \cos \widehat{ny} \cos \widehat{nz} + 2\tau_{xz} \cos \widehat{nx} \cos \widehat{nz}. \end{aligned} \quad (2)$$

При рассмотрении общих вопросов удобно обозначать оси прямоугольных координат через  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тогда компоненты напряжения будут обозначены через  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). При переходе к другой, прямоугольной координатной системе  $x'_i$  компоненты напряжения преобразуют по формуле

$$\sigma_{i'j'} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sigma_{kl} \alpha_{ik} \alpha_{jl}, \quad (3)$$

где  $\alpha_{ik}$  — косинус угла между старой осью  $x_i$  и новой осью  $x'_k$ .

**Главные напряжения.** В каждой точке тела существуют, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называют *главными*, а направления нормалей к этим площадкам называют *главными направлениями* (или главными осями) тензора напряжения. На главных площадках действуют *главные нормальные напряжения*  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Если главные напряжения различны, имеется только три главных направления. Если два главных напряжения равны (например,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ), напряженное состояние характеризуется осевой симметрией; любая площадка, содержащая ось 1 — главная. Если все главные напряжения равны

( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), напряженное состояние характеризуется центральной симметрией, любая площадка в данной точке является главной (случай гидростатического напряженного состояния).

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

или (в развернутой форме)

$$-\lambda^3 + I_1(T_\sigma)\lambda^2 + I_2(T_\sigma)\lambda + I_3(T_\sigma) = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты этого уравнения

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \equiv 3\sigma; \\ I_2(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

не зависят от выбора координатной системы и называются соответственно *линейным*, *квадратичным* и *кубическим* инвариантами тензора напряжения. Величину  $\sigma$  называют *средним давлением*.

В сечениях, делящих пополам углы между главными плоскостями, действуют *главные касательные напряжения*

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

*Максимальным касательным напряжением* называют величину

$$\tau_{\max} = \max \{ |\tau_1|, |\tau_2|, |\tau_3| \}. \quad (7)$$

Если главные оси нумерованы так, что

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

то

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Не существует площадки, на которой бы действовало касательное напряжение, превосходящее  $\tau_{\max}$ .

**Деватор напряжения.** Так как тела по-разному сопротивляются равномерному всестороннему давлению и касательным напряжениям, то удобно представить тензор напряжения в виде суммы

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma,$$

$$\text{где } \sigma T_1 = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} \text{ — шаровой тензор, соответствующий среднему}$$

давлению, а

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \quad \text{— тензор, характеризующий нап-}$$

ряжения сдвига в данной точке и называемый *девиатором напряжения*. Главные направления девиатора напряжения и тензора напряжения совпадают. Линейный инвариант девиатора напряжения  $I_1(D_{\sigma})$  равен, очевидно, нулю. С квадратичным инвариантом  $I_2(D_{\sigma})$  связана *интенсивность касательных напряжений*:

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}. \quad (8)$$

В случае чистого сдвига (напряжение сдвига  $\tau$ )  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$ ; тогда  $\tau_i = \tau$ . При одноосном растяжении (сжатии)  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\tau_i = \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{3}}$ .

Иногда рассматривают *интенсивность напряжений* (или приведенное напряжение), равную  $\sigma_i = \sqrt{3}\tau_i$ . Очевидно, что при одноосном растяжении (сжатии)  $\sigma_i = |\sigma_1|$ .

Отметим важное неравенство

$$1 \leq \frac{\tau_i}{\tau_{\max}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (9)$$

из которого вытекает приближенное соотношение

$$\tau_i \approx 1,08\tau_{\max} \quad (10)$$

с наибольшей погрешностью около 7%.

Компоненты девиатора напряжений будем обозначать через  $s_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ); заметим, что

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ).

В плоском напряженном состоянии компоненты напряжения

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Главные напряжения равны

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = 0.$$

Угол  $\widehat{1, x}$ , образуемый первым главным направлением с осью  $x$ , определяют из соотношения

$$\operatorname{tg} 2(\widehat{1, x}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}.$$

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ , если  $\sigma_1, \sigma_2$  — разных знаков;  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_1|$ , если  $\sigma_1, \sigma_2$  — одинакового знака.

Диаграмма Мора (рис. 4) дает наглядное представление о распределении нормальных и касательных напряжений в различных сечениях, проходящих через данную точку. Значения  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  лежат в заштрихованной области.

Форма диаграммы Мора характеризуется коэффициентом Лоде и Надаи

$$\mu_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, \quad (11)$$

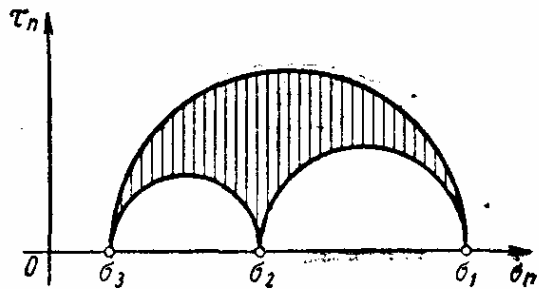


Рис. 4. Диаграмма Мора

изменяющимся в пределах от  $-1$  до  $+1$ . При фиксированном  $\mu_\sigma$  и фиксированных главных осях напряженное состояние определено с точностью до общего множителя (пропорционального интенсивности  $\sigma_i$ ) и аддитивного среднего давления  $\sigma$ . Коэффициент  $\mu_\sigma$  является характеристикой «вида напряженного состояния».

**Дифференциальные уравнения равновесия.** Компоненты напряжения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $X, Y, Z$  — компоненты объемной силы. В случае движения в правых частях уравнения (12) будут инерционные силы, соответственно равные  $\rho\omega_x, \rho\omega_y, \rho\omega_z$ , где  $\rho$  — плотность тела;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции ускорения частицы тела.

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  (рис. 5) уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + X_r &= 0; \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + X_\varphi &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + X_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



В сферических координатах, показанных на рис. 6, уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) + X_r = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] + X_\theta = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) + X_\varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

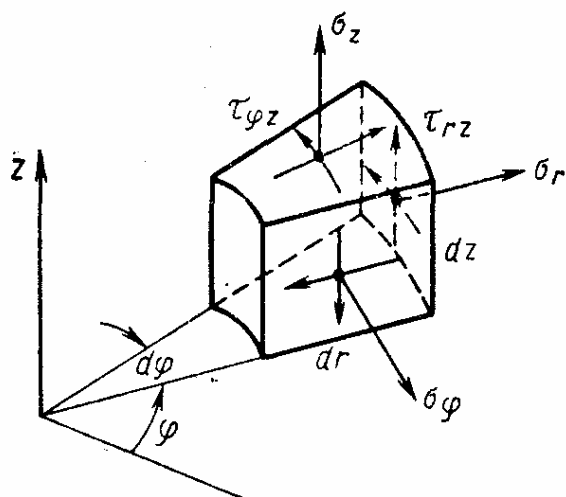


Рис. 5. Элемент в цилиндрических координатах

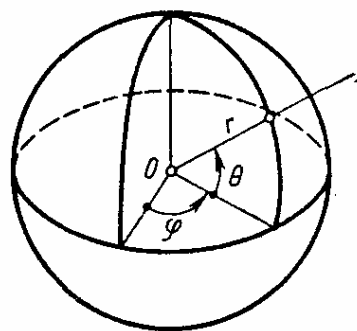


Рис. 6. Сферические координаты

Уравнения равновесия в произвольной криволинейной ортогональной системе координат см. в работах [2, 4].

## ДЕФОРМАЦИЯ

**Тензор деформации.** Деформацией называют изменение расстояния между точками тела. Пусть  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — составляющие смещения, испытываемого точками тела (рис. 7). Квадрат элемента длины

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

после деформации будет равен

$$\begin{aligned} ds_1^2 = & (1 + 2\varepsilon_x) dx^2 + (1 + 2\varepsilon_y) dy^2 + (1 + 2\varepsilon_z) dz^2 + \\ & + 2\gamma_{xy} dx dy + 2\gamma_{yz} dy dz + 2\gamma_{xz} dx dz, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Остальные компоненты имеют аналогичную структуру и получаются круговой перестановкой индексов. Совокупность величин  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ ,  $\frac{1}{2} \gamma_{yz}$ ,  $\frac{1}{2} \gamma_{xz}$  образует

симметричный тензор второго ранга — тензор деформации  $T_\epsilon$ .

Всякая деформация может быть осуществлена простыми растяжениями  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  (главными удлинениями) в трех взаимно перпендикулярных направлениях (главных направлениях).

**Малая деформация.** В случае малой деформации компоненты тензора деформации  $\epsilon_x$ ,

$\epsilon_y$ , ...,  $\frac{1}{2} \gamma_{xz}$  малы по сравнению с единицей. Если при этом малы и углы поворота, то в формулах (16) можно отбросить квадратичные слагаемые [3].

Тогда имеют место формулы Коши

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Здесь  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  — относительные удлинения соответственно в направлениях осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$  — относительные сдвиги (изменения первоначально прямых углов между направлениями  $x$ ,  $y$ ;  $y$ ,  $z$ ;  $x$ ,  $z$  соответственно).

Относительное изменение объема

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (18)$$

Следует иметь в виду, что даже при малых удлинениях и сдвигах формулы (17) часто являются недостаточными при анализе деформаций и устойчивости гибких тел (стержней, пластинок, оболочек) вследствие того, что элементы таких тел могут испытывать значительные перемещения и повороты [3].

Главные удлинения являются корнями кубического уравнения

$$-\lambda^3 + I_1(T_\epsilon) \lambda^2 + I_2(T_\epsilon) \lambda + I_3(T_\epsilon) = 0.$$

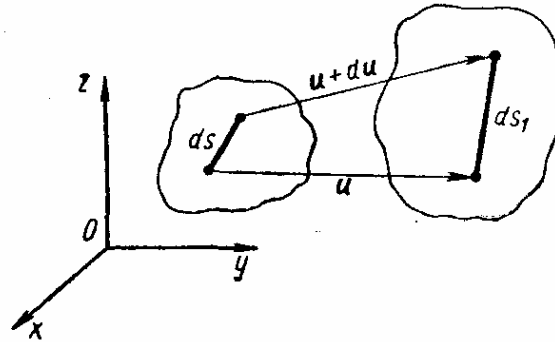


Рис. 7. Элемент длины до и после деформации;  $u$  — вектор смещения

Коэффициенты этого уравнения — соответственно линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора деформации; заметим, что  $I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon$ .

Тензор деформации удобно представить в виде суммы

$$T_\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon T_1 + D_\varepsilon,$$

где  $D_\varepsilon$  — *девиатор деформации*, характеризующий изменение формы элемента тела, а  $\frac{1}{3} \varepsilon T_1$  — шаровой тензор объемного расширения. Компоненты девиатора деформаций будем обозначать через  $e_{ij}$ ; очевидно, что

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}.$$

Положительную величину, пропорциональную квадратному корню из квадратичного инварианта

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}, \quad (19)$$

называют *интенсивностью деформаций сдвига*.

Иногда рассматривают *интенсивность деформаций* (или приведенную деформацию)  $\varepsilon_l = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_i$ .

Компоненты деформации не могут быть вполне произвольными функциями. Для возможности определения перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  по деформациям, последние должны удовлетворять шести *условиям сплошности* (или неразрывности) *Сен-Венана*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

При интегрировании уравнений (17) необходимо вычислить ряд криволинейных интегралов [2, 3]. Условия сплошности гарантируют независимость этих интегралов от пути, т. е. однозначность смещений (для односвязной области — с точностью до жесткого перемещения).

Компоненты деформации в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; & \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}; & \gamma_{\varphi z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

здесь  $u, v, w$  — составляющие вектора смещения по осям цилиндрической системы координат.

Компоненты деформации в сферической системе координат  $r, \varphi, \theta$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; & \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}; & \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \\ \gamma_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

здесь  $u, v, w$  — составляющие вектора смещения по осям сферической системы координат.

Формулы для компонентов деформации в произвольной криволинейной ортогональной системе координат и соответствующие условия сплошности см. в работе [2].

**Натуральные деформации.** Пусть главные оси деформации  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) не вращаются,  $l_j$  — текущая (мгновенная) длина элемента в направлении  $x_j$ ,  $dl_j$  — приращение длины. Тогда приращения деформации  $d\varepsilon_j = \frac{dl_j}{l_j}$ . Суммирование приводит к *натуральным деформациям*

$$e_j = \int_{l_{j0}}^{l_j} \frac{dl_j}{l_j} = \ln \frac{l_j}{l_{j0}},$$

где  $l_{j0}$  — начальная длина элемента.

Натуральные деформации обладают групповыми свойствами (сумма двух последовательных натуральных деформаций также является натуральной деформацией) и при больших деформациях, но не образуют тензора, в связи с чем использование натуральных деформаций в расчетах ограничено отмеченными выше условиями.

### СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ

При изучении неупругих деформаций необходимо вводить скорости деформации.

**Тензор скорости деформации.** Пусть частицы тела движутся со скоростью  $v$ , проекции которой

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t); & v_y &= v_y(x, y, z, t); \\ v_z &= v_z(x, y, z, t). \end{aligned}$$

При этом тело испытывает деформацию, скорость которой характеризуется компонентами тензора скорости деформации

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \xi_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \xi_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \eta_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}; & \eta_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}; \\ \eta_{xz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Величины  $\xi_x, \xi_y, \xi_z$  определяют скорости относительных удлинений элементарного объема в направлениях координатных осей  $x, y, z$ ;  $\eta_{xy}, \eta_{yz}, \eta_{xz}$  определяют угловые скорости скашивания первоначально прямых углов.

Главные значения (*главные скорости удлинения*) симметричного тензора скорости деформации

$$T_{\xi} = \begin{vmatrix} \xi_x & \frac{1}{2} \eta_{xy} & \frac{1}{2} \eta_{xz} \\ \frac{1}{2} \eta_{xy} & \xi_y & \frac{1}{2} \eta_{yz} \\ \frac{1}{2} \eta_{xz} & \frac{1}{2} \eta_{yz} & \xi_z \end{vmatrix}$$

определяют так же, как и на стр. 17. Скорость относительного объемного расширения

$$\xi = \xi_x + \xi_y + \xi_z = \operatorname{div} v \quad (24)$$

и является линейным инвариантом тензора  $T_{\xi}$ .

Аналогично предыдущему вводят *девиатор скорости деформации*

$$T_{\xi} = \frac{1}{3} \xi T_1 + D_{\xi}$$

который характеризует скорость формоизменения.

Интенсивность скоростей деформаций сдвига

$$\eta_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2} (\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{xz}^2)}. \quad (25)$$

Интенсивность скоростей деформаций  $\xi_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_i$ .

В случае малой деформации справедливы простые соотношения

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_x; \dots \\ \eta_{xy} &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{xy}; \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Компоненты скорости деформации не могут быть вполне произвольными функциями (см. стр. 18) и должны удовлетворять *шести условиям сплошности*, которые получаются из равенств (20) при замене компонентов деформации компонентами скорости деформации.

Компоненты скорости деформации в цилиндрических и сферических координатах легко получить, заменив в формулах (21) и (22) составляющие смещения  $u, v, w$  составляющими скорости  $v_x, v_y, v_z$ .

Компоненты тензоров деформации и скорости деформации в произвольной прямоугольной системе координат  $x_j$  будем обозначать соответственно через  $\varepsilon_{ij}$  и  $\xi_{ij}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кац А. М. Теория упругости. М., ГИТТЛ, 1956.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., ИЛ, 1954.
4. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
5. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М., ИЛ, 1963.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
8. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps déformables. Paris, 1909.







причем из независимости потенциальной энергии элемента от порядка приложения напряжений следует, что

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}; \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}; \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}; \quad (7)$$

здесь  $E_1, E_2, E_3$  — модули упругости;  $G_{12}, G_{23}, G_{13}$  — модули сдвига;  $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$  — коэффициенты Пуассона.

Трансверсально-изотропное тело характеризуется наличием плоскости упругой изотропии, т. е. имеется ось симметрии  $z$ , расположенная так, что все направления, перпендикулярные к ней, эквивалентны. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y) - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x) - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z; \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_2} \sigma_z; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_1} \tau_{xy}; \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_2} \tau_{xz}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2} \tau_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Криволинейная анизотропия имеет место в тех случаях, когда материал обладает какой-либо симметрией, но оси симметрии в различных точках тела имеют разные направления. Наибольший практический интерес представляют цилиндрическая и сферическая анизотропия [6, 8, 12].

Изотропное тело характеризуется эквивалентностью всех направлений. Число независимых упругих постоянных равно двум. Закон Гука принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Относительное изменение объема пропорционально среднему давлению

$$\varepsilon = 3k\sigma; \quad \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (10)$$

где  $k = \frac{1-2\nu}{E}$  — коэффициент объемного сжатия.

Решая равенства (9) относительно напряжений, получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_y; \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_z; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz}; \\ \tau_{xz} &= \mu \gamma_{xz}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\lambda$  и  $\mu = G$  — упругие постоянные Ламе. От одних постоянных к другим переходят по формулам табл. 1.

1. Упругие постоянные

Постоянные	Формулы перехода для систем	
	$E; \nu$	$\lambda; \mu$
Модуль упругости $E$	$E$	$\frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$
Коэффициент Пуассона $\nu$	$\nu$	$\frac{\lambda}{2 (\lambda + \mu)}$
Модуль сдвига $G = \mu$	$\frac{E}{2 (1 + \nu)}$	$\mu$
Постоянная Ламе $\lambda$	$\frac{E\nu}{(1 + \nu) (1 - 2\nu)}$	$\lambda$
Коэффициент объемного сжатия $k$	$\frac{1 - 2\nu}{E}$	$\frac{1}{3\lambda + 2\mu}$

Упругие постоянные положительны, причем для реальных материалов  $0 < \nu < 0,5$ .

Для упругого *несжимаемого* тела  $\nu = 0,5$ .

Упругую потенциальную энергию единицы объема изотропного тела определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \right. \\ &\quad \left. + 2 (1 + \nu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]; \\ W &= G \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \right]; \\ W &= \frac{3}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{2G} \tau_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Среднее давление  $\sigma$  и интенсивность касательных напряжений  $\tau_i$  определены в гл. 1, формулы (6), (8).

В последней формуле первое слагаемое — упругая энергия изменения объема, второе слагаемое — упругая энергия изменения формы. Если тело испытало нагрев до температуры  $T$ , то к первым трем соотношениям (9) следует добавить тепловые расширения  $\alpha T$ , где  $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения.

Первая группа уравнений (11) будет дополнена слагаемыми  $-\frac{\alpha}{k} T$  (см. гл. 5).

## УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Так как по закону Гука напряжения можно выразить через деформации (а следовательно, через перемещения  $u, v, w$ ) и, наоборот, деформации можно выразить через напряжения, то в теории упругости одну и ту же задачу можно решать либо в перемещениях, либо в напряжениях, рассматривая соответствующую систему дифференциальных уравнений. Этим двум подходам отвечают и различные вариационные принципы (принцип минимума потенциальной энергии и принцип Кастильяно). Заметим, что можно исходить из смешанной системы уравнений, но это не всегда удобно.

**Уравнения Ламе.** Внося в дифференциальные уравнения равновесия [(12) гл. 1] компоненты напряжения согласно (11) гл. 1 и заменяя компоненты деформации по формулам Коши [(17) гл. 1], находим дифференциальные уравнения динамики упругого тела

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \Delta u + X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mu \Delta v + Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mu \Delta w + Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Здесь  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  — относительное изменение объема;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа;  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  — составляющие ускорения;  $\rho$  — плотность;  $X, Y, Z$  — составляющие объемной силы.

В задачах статики упругого тела ускорение равно нулю; при отсутствии объемных сил уравнения статики имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \Delta u &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mu \Delta v &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mu \Delta w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

**Некоторые следствия.** Из уравнений (14) вытекает, что объемное расширение  $\varepsilon$  является гармонической функцией

$$\Delta \varepsilon = 0,$$

а составляющие перемещения  $u, v, w$  — бигармоническими функциями

$$\Delta \Delta u = 0; \quad \Delta \Delta v = 0; \quad \Delta \Delta w = 0.$$

Но тогда с помощью соотношений (11) легко установить, что среднее давление — гармоническая функция

$$\Delta \sigma = 0,$$

а компоненты напряжения — бигармонические функции

$$\Delta \Delta \sigma_x = 0; \dots; \Delta \Delta \tau_{xz} = 0.$$

**Решение Папковича—Нейбера.** Решение уравнений Ламе (14) может быть представлено через гармонические функции  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= \Phi_1 - \frac{1}{4(1-\nu)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 + \Phi_0); \\ v &= \Phi_2 - \frac{1}{4(1-\nu)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 + \Phi_0); \\ w &= \Phi_3 - \frac{1}{4(1-\nu)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 + \Phi_0). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Через эти функции по формулам (11) можно выразить компоненты напряжения. Имеются также другие формы общего решения уравнений Ламе (решения Кельвина, Бусинеска-Галеркина и т. д.).

**Уравнения Ламе в цилиндрических координатах**

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} - \mu \left( \frac{u}{r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \mu \Delta u &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{r \partial \varphi} - \mu \left( \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \mu \Delta v &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \mu \Delta w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $u, v, w$  — проекции перемещения на оси  $r, \varphi, z$ ; оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Уравнения Ламе в ортогональных криволинейных координатах см. работу [8].

## УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

**Уравнения Бельтрами—Митчелла.** Внося компоненты деформации по закону Гука (9) в условие сплошности (20) гл. 1, получаем с помощью дифференциальных уравнений равновесия уравнения Бельтрами—Митчелла

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_x + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\ \Delta \sigma_y + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \sigma_z + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\
 \Delta \tau_{xy} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} &= - \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right); \\
 \Delta \tau_{yz} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} &= - \left( \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right); \\
 \Delta \tau_{xz} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} &= - \left( \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \right\} (17)$$

При отсутствии объемных сил правые части этих уравнений равны нулю; напомним, что  $3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ . Для получения полной системы уравнений в напряжениях к уравнениям (17) следует присоединить дифференциальные уравнения равновесия (12) гл. 1. Этой системе уравнений можно удовлетворить с помощью тензора функций напряжения [7].

Уравнения Бельтрами—Митчелла в цилиндрических координатах (при отсутствии объемных сил):

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \sigma_r + \frac{2(\sigma_\varphi - \sigma_r)}{r^2} - \frac{4}{r^2} \cdot \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} &= 0; \\
 \Delta \sigma_\varphi - \frac{2(\sigma_\varphi - \sigma_r)}{r^2} + \frac{4}{r^2} \cdot \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\
 + \frac{3}{1+\nu} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2} \right) &= 0; \\
 \Delta \sigma_z + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0; \\
 \Delta \tau_{r\varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sigma_\varphi - \sigma_r) - \frac{4}{r^2} \tau_{r\varphi} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right) &= 0; \\
 \Delta \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} &= 0; \\
 \Delta \tau_{\varphi z} - \frac{\tau_{\varphi z}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \varphi} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi \partial z} &= 0.
 \end{aligned} \right\} (18)$$

Уравнения Бельтрами—Митчелла в криволинейных ортогональных координатах см. в работах [7, 8].

### ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

**Первая основная задача.** На поверхности тела  $S$  заданы нагрузки  $(X_n, Y_n, Z_n)$ ; тогда на этой поверхности должны выполняться условия

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos \hat{nx} + \tau_{xy} \cos \hat{ny} + \tau_{xz} \cos \hat{nz} &= X_n; \\ \tau_{xy} \cos \hat{nx} + \sigma_y \cos \hat{ny} + \tau_{yz} \cos \hat{nz} &= Y_n; \\ \tau_{xz} \cos \hat{nx} + \tau_{yz} \cos \hat{ny} + \sigma_z \cos \hat{nz} &= Z_n. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В качестве примера приведем задачу о толстостенной трубе под действием внутреннего давления  $p$ . Тогда на наружной поверхности трубы нагрузки  $X_n = Y_n = Z_n = 0$ , а на внутренней поверхности они сводятся к внутреннему давлению.

**Вторая основная задача.** Заданы смещения  $u_s, v_s, w_s$  точек поверхности тела; тогда на  $S$  должно быть

$$u = u_s, \quad v = v_s, \quad w = w_s. \quad (20)$$

В чистом виде эта задача встречается значительно реже.

В качестве примера приведем задачу о сплошном упругом круглом диске, запрессованном в жесткое очко. Здесь на контуре диска задано радиальное перемещение.

**Основная смешанная задача.** На части поверхности  $S_F$  заданы нагрузки, а точкам остальной части  $S_u$  поверхности тела предписаны смещения.

Примером может служить круглый диск с отверстием, запрессованный на жесткий вал. На внутреннем контуре ( $S_u$ ) задано радиальное перемещение, на внешнем контуре ( $S_F$ ) заданы нагрузки (напряжения равны нулю).

Кроме основной смешанной задачи встречаются более сложные смешанные задачи, когда на одной и той же части поверхности тела заданы частично смещения (например, нормальное перемещение), частично напряжения (например, касательное напряжение).

**Принцип Сен-Венана.** Решение граничных задач связано с математическими трудностями. Большое значение имеет возможность некоторого изменения (ослабления) граничных условий, определяемая принципом Сен-Венана: *статически эквивалентные системы нагрузок, действующие на небольшой части поверхности тела, в некотором отдалении от последней (на расстоянии, сопоставимом с ее поперечным размером) приводят к практически одинаковым напряженным состояниям.*

Статически эквивалентные системы нагрузок имеют одинаковые главные вектор и момент. Предполагается, что поперечные размеры рассматриваемой небольшой части поверхности тела малы по сравнению с характерными размерами всего тела. Строгое доказательство принципа Сен-Венана отсутствует. Однако принцип Сен-Венана хорошо подтверждается имеющимися точными решениями частных задач и экспериментальными данными.

**Начальные условия.** При рассмотрении динамических задач необходимо задать в начальный момент времени  $t = 0$  смещения и скорости.

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

**Теорема Клапейрона.** *Потенциальная энергия тела равна половине произведения внешних сил на вызванные ими перемещения, т. е.*

$$\int_V W dV = \frac{1}{2} \left[ \int_V (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS \right]. \quad (21)$$

### Теорема взаимности работ (теорема Бетти)

Пусть на тело действуют две системы нагрузок:

- 1)  $X'_n, Y'_n, Z'_n; X', Y', Z'$  (соответствующие им смещения равны  $u', v', w'$ );
- 2)  $X''_n, Y''_n, Z''_n; X'', Y'', Z''$  (соответствующие им смещения равны  $u'', v'', w''$ ).

Из независимости потенциальной энергии тела от порядка прохождения нагрузок следует, что *работа сил первого состояния на смещениях второго состояния равна работе сил второго состояния на смещениях первого:*

$$\begin{aligned} & \int_V (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') dV + \int_S (X'_n u'' + Y'_n v'' + Z'_n w'') dS = \\ & = \int_V (X'' u' + Y'' v' + Z'' w') dV + \int_S (X''_n u' + Y''_n v' + Z''_n w') dS. \end{aligned} \quad (22)$$

**Теорема единственности.** Решение уравнений теории упругости [уравнений Ламе (14) или уравнений в напряжениях (12) гл. 1, (17)] для рассмотренных выше основных задач является единственным (с точностью до перемещений твердого тела). Эта теорема верна при не слишком больших нагрузках — пока можно не учитывать изменений в конфигурации тела при составлении уравнений равновесия. Для гибких тел возникновение новых форм равновесия при достаточной интенсивности нагрузок является весьма важным для решения вопросов прочности.

Помимо общего значения, теорему единственности широко используют при решении конкретных задач. Иногда удается частично «угадать» форму решения (см., например, полуобратный метод решения задач кручения, изгиба и т. д.). Если при этом можно удовлетворить всем дифференциальным уравнениям и граничным условиям задачи, то, в силу теоремы единственности, тем самым найдено искомое решение.

**Принцип минимума потенциальной энергии системы** (принцип минимума для смещений). *Из всех кинематически возможных систем перемещений, принимающих заданные значения на поверхности тела,*

только действительные перемещения сообщают минимум потенциальной энергии системы

$$\begin{aligned} \Pi \equiv \int_V W dV - \int_V (Xu + Yv + Zw) dV - \\ - \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS = \min. \end{aligned} \quad (23)$$

Кинематически возможные перемещения непрерывны и удовлетворяют заданным граничным геометрическим условиям.

Здесь имеет место абсолютный минимум.

Это вариационное уравнение эквивалентно дифференциальным уравнениям равновесия [(12) гл. 1] и условиям равновесия (19) на поверхности тела. Это уравнение является следствием начала возможных перемещений.

**Принцип Кастильяно** (принцип минимума для напряжений). Из всех систем напряжений, находящихся в равновесии с заданными объемными и поверхностными силами, только действительная система напряжений сообщает минимум дополнительной работе

$$\int_V W dV - \int_{S_u} (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS = \min. \quad (24)$$

Поверхностный интеграл берут по той части поверхности, на которой заданы перемещения. Если рассматривают первую основную задачу ( $S_u = 0$ ) или на  $S_u$  смещения равны нулю (опоры), то реализуется минимум потенциальной энергии тела

$$\bar{W} \equiv \int_V W dV = \min. \quad (25)$$

Вариационное уравнение Кастильяно эквивалентно условиям сплошности.

**Теорема Кастильяно.** Если на тело действуют обобщенные сосредоточенные нагрузки  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), а на  $S_u$  смещения равны нулю (опоры), то

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial Q_i} = q_i, \quad (26)$$

где  $q_i$  — обобщенные перемещения.

**Принцип Гамильтона.** Пусть упругое тело находится в состоянии движения; его действительное движение характеризуется перемещениями  $u, v, w$ . Сравнивая это поле перемещений с близким кинематически возможным полем  $u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w$  таким, что  $\delta u = \delta v = \delta w = 0$  для заданных моментов времени  $t_0$  и  $t_1$ , можно показать, что для действительного движения интеграл  $\int_{t_0}^{t_1} (\bar{T} - A + \bar{W}) dt$  принимает экстремальное значение, т. е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\bar{T} - A + \bar{W}) dt = 0, \quad (27)$$

здесь  $\bar{W}$  — упругий потенциал тела;  $\bar{T}$  — кинетическая энергия тела;  $A$  — работа внешних сил:

$$A = \int_V (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS. \quad (28)$$

Вариационные методы решения задач теории упругости (Ритца, Галеркина, Трефца) см. в работах [5, 9].

### ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

В теории упругости к плоской задаче относят задачу о плоской деформации и задачу о плоском напряженном состоянии. Обе задачи приводят к одной и той же математической проблеме.

**Плоская деформация** имеет место в длинном прямом цилиндре (с осью  $z$ ) при условии, что составляющая смещения  $w = 0$ , а внешние нагрузки не зависят от  $z$ , причем  $Z_n = 0$ ,  $Z = 0$ . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0; \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0; \\ \sigma_z &= \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

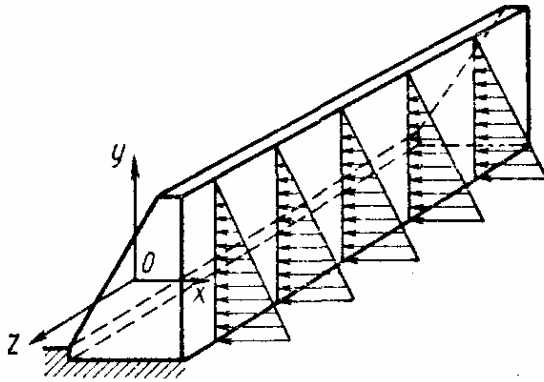


Рис. 1. Плоская деформация плотины

Длинная плотина, работающая в условиях плоской деформации, схематически показана на рис. 1.

Если закрепления концов таковы, что условие  $w = 0$  не выполняется (например, концы свободны), то рассматриваемую задачу можно решать в условиях плоской деформации, вычислить согласно равенствам (29) осевое усилие  $P$  и затем наложить на это решение состояние надлежаще выбранного одноосного растяжения (например, для свободных концов — растяжение силой  $P$ ). Суммарное решение по принципу Сен-Венана будет справедливо в некотором отдалении от концов.

Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (30)$$

Соотношения закона Гука также упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \sigma_y &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Уравнения плоской деформации в цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  имеют вид

$$\sigma_z = \frac{v}{1-v} (\sigma_r + \sigma_\varphi); \quad (29a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + X_r &= 0; \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + X_\varphi &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \sigma_\varphi &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + 2\mu \left( \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right); \\ \tau_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31a)$$

**Плоское напряженное состояние** реализуется в тонких пластинах со свободными от нагрузки основаниями; пластина деформируется нагрузками, параллельными основаниям и симметричными относительно срединной плоскости (рис. 2).

Принимая срединную плоскость за плоскость  $xy$ , имеем на основаниях (т. е. при  $z = \pm h/2$ )

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Усредняя все величины по толщине пластины, получим уравнения равновесия (30) и соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda' \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \sigma_y &= \lambda' \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где положено

$$\lambda' = \frac{1-2v}{1-v} \lambda, \quad (33)$$

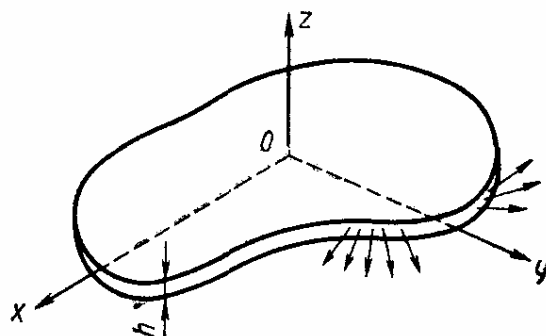


Рис. 2. Плоское напряженное состояние

а знаки усреднения опущены. Если объемные силы распределены равномерно по толщине, то уже на небольших расстояниях от контура средние значения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и смещений  $u$ ,  $v$  в силу принципа Сен-Венана мало отличаются от истинных.

Уравнения плоского напряженного состояния имеют тот же вид, что и уравнения плоской деформации, лишь в уравнениях (32) стоит коэффициент  $\lambda'$  (вместо  $\lambda$ ). В дальнейшем рассматривается система уравнений плоской деформации. Для перехода к плоскому напряженному состоянию необходимо заменить  $\lambda$  на  $\lambda'$  и учесть, что в плоском напряженном состоянии  $\sigma_z = 0$ .

**Уравнения плоской задачи в смещениях** следуют из уравнений Ламе (13):

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \Delta u + X &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mu \Delta v + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа для двух переменных

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

В полярных координатах  $r$ ,  $\varphi$  уравнения в смещениях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \mu \left( \frac{u}{r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \mu \Delta u + X_r &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \varphi} - \mu \left( \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \mu \Delta v + X_\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}$ ;  $X_r$ ,  $X_\varphi$  — составляющие объемной силы по осям  $r$  и  $\varphi$ , а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

**Уравнения плоской задачи в напряжениях.** К уравнениям равновесия (30) следует присоединить условие сплошности

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right), \quad (36)$$

вытекающее из уравнений Бельтрами—Митчелла (17).

К случаю отсутствия объемных сил приводят подысканием какого-нибудь частного решения  $u^{(0)}$ ,  $v^{(0)}$  уравнений Ламе

(34), если задача решается в смещениях, или какого-нибудь частного решения  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  уравнений (30) и (36), если задача решается в напряжениях. Разыскивая общее решение в виде

$$u = u^{(1)} + u^{(0)}; \quad v = v^{(1)} + v^{(0)}; \quad w = w^{(1)} + w^{(0)}$$

или соответственно

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(0)}; \quad \dots; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(0)},$$

получим для величин со штрихом однородные уравнения Ламе (в смещениях) или однородные уравнения (30), (36). При этом несколько усложняются граничные условия.

С л у ч а й с и л ы т я ж е с т и:  $X = 0$ ,  $Y = -\rho g$ , где  $\rho$  — плотность;  $g$  — ускорение силы тяжести. Частное решение уравнений в напряжениях

$$\sigma_x^{(0)} = \tau_{xy}^{(0)} = 0; \quad \sigma_y^{(0)} = \rho g y.$$

С л у ч а й ц е н т р о б е ж н о й с и л ы:  $X = \rho \omega^2 x$ ,  $Y = \rho \omega^2 y$ , где  $\omega$  — угловая скорость; осью вращения является ось  $z$ . Тогда

$$u^{(0)} = -\frac{\rho \omega^2}{8(\lambda + 2\mu)}(x^2 + y^2)x; \quad v^{(0)} = -\frac{\rho \omega^2}{8(\lambda + 2\mu)}(x^2 + y^2)y.$$

**Функция напряжений (функция Эри).** Дифференциальные уравнения равновесия (30) при отсутствии объемных сил удовлетворяются при подстановке

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Из условия сплошности вытекает, что функция напряжений  $\Phi$  удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta \Delta \Phi = 0$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (37)$$

В полярных координатах  $r$ ,  $\varphi$  имеем

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2};$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi},$$

причем

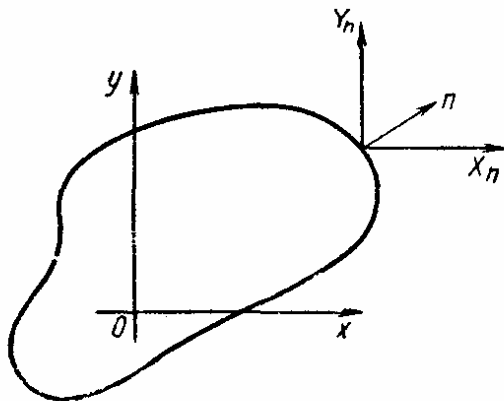
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (38)$$



**О граничных условиях.** В случае первой основной граничной задачи на контуре тела заданы поверхностные усилия  $X_n$ ,  $Y_n$  (рис. 3); тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \hat{n}x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \hat{n}y &= X_n; \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \hat{n}x + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos \hat{n}y &= Y_n. \end{aligned}$$

Интегрирование этих соотношений вдоль дуги контура приводит к формулам для значений производных функции напряжений в произвольной точке контура  $s = s_1$



$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_1 &= \int_0^{s_1} X_n ds = R_x; \\ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_1 &= - \int_0^{s_1} Y_n ds = -R_y, \end{aligned} \right\} (39)$$

Рис. 3. Граничные условия

где  $s_1$  — длина дуги контура, отсчитываемая от некоторой точки, а  $R_x$ ,  $R_y$  — проекции главного вектора внешней нагрузки, приложенной к участку дуги  $(O, s_1)$ . Повторное интегрирование позволяет найти значение функции напряжений на контуре

$$(\Phi)_1 = - \int_0^{s_1} [(x_1 - x) Y_n - (y_1 - y) X_n] ds. \quad (40)$$

Это значение, следовательно, равно моменту нагрузки, приложенной на участке контура  $(O, s_1)$ , относительно конечной точки  $s_1$  рассматриваемого участка.

Приняв за оси  $x$ ,  $y$  направления нормали  $n$  и касательной  $s$  к контуру в точке  $s = s_1$ , можно переписать формулы (39) в такой форме

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)_1 = R_n; \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_1 = -R_s, \quad (41)$$

т. е. можно считать известными производные функции напряжений по нормали и дуге;  $R_n$ ,  $R_s$  — нормальная и касательная составляющие главного вектора внешней нагрузки, приложенной к участку  $(O, s_1)$ . Так как из формулы для  $(\Phi)_1$  вытекает первое из соотношений (41), то независимыми граничными значениями будут значения  $\Phi$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ .

Для односвязного контура эти значения однозначны. Для многосвязного контура эти значения однозначны только в том случае, когда главный вектор и главный момент по каждому из контуров равны нулю [12].

**О зависимости напряженного состояния от упругих постоянных.** В случае первой основной задачи (на контуре тела заданы напряжения  $X_n, Y_n$ ) напряженное состояние не зависит от упругих постоянных (т. е. от материала), если тело занимает конечную односвязную область.

В случае многосвязной области необходимы дополнительные условия: на каждом контуре главный вектор внешних нагрузок  $X_n, Y_n$  должен равняться нулю.

Приведенные результаты (иногда называемые теоремой Леви-Митчелла) лежат в основе использования оптического метода исследования напряжений.

**Простейшие решения в полиномах.** Если функцию напряжений брать в виде целого полинома  $x, y$  и подбирать его коэффициенты так, чтобы удовлетворялось бигармоническое уравнение (37) и в той или иной мере граничные условия, то можно построить много интересных решений для более или менее длинных прямоугольных полос. При этом на торцах полосы удовлетворяются, как правило, «подходящие» граничные условия [15, 19].

**Решения для полосы в рядах Фурье.** Если нагрузки на гранях полосы  $y = \pm h$  разрывны (или вообще достаточно сложны), решение

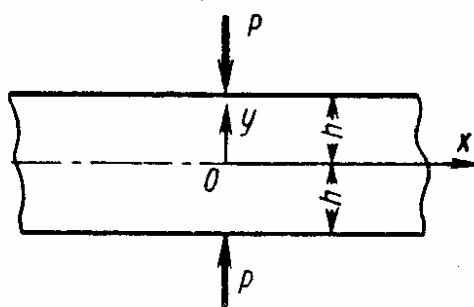


Рис. 4. Сжатие сосредоточенными силами узкой полосы

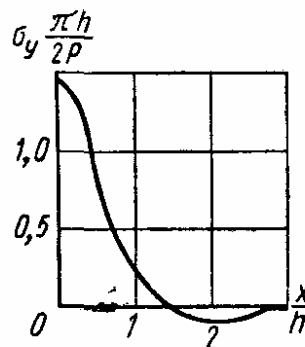


Рис. 5. График напряжения  $\sigma_y$  в сечении  $y = 0$

задачи часто можно построить в рядах Фурье. Для этого нагрузки разлагаем в ряды Фурье и ищем решения бигармонического уравнения (37) в форме

$$\Phi = \varphi(y) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

(если нагрузка четная). Функция  $\varphi(y)$  имеет вид

$$\varphi(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y,$$

где  $\alpha = \frac{n\pi}{l}$ ;  $n$  — целое число;  $C_1, \dots, C_4$  — произвольные постоянные. Подробное изложение см. в работах [15, 19].

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих «рассасывание» действия сосредоточенных нагрузок.

**Сжатие сосредоточенными силами узкой полосы** (рис. 4)  $l \gg h$ . Напряжение  $\sigma_y$  быстро убывает по мере удаления от сечения  $x = 0$ . На рис. 5 показан график напряжения  $\sigma_y$  при  $y = 0$  [19].

Сжатие сосредоточенными силами высокой полосы (рис. 6)  $l \ll h$ . По мере удаления от точки приложения сосредоточенной силы распределение напряжения  $\sigma_y$  будет все более равномерным. На рис. 7 показаны графики  $\sigma_y$  в сечениях  $y = h - \frac{l}{2}$ ,  $y = h - l$ ,  $y = h - 2l$ . Этот пример характеризует условия применимости принципа Сен-Венана.

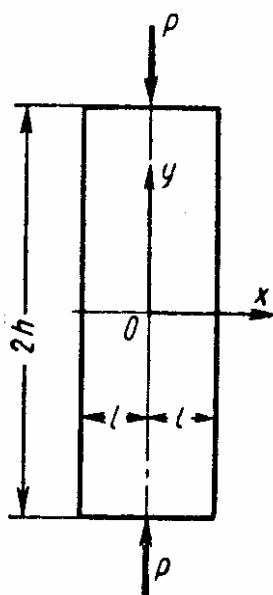


Рис. 6. Сжатие сосредоточенными силами высокой полосы

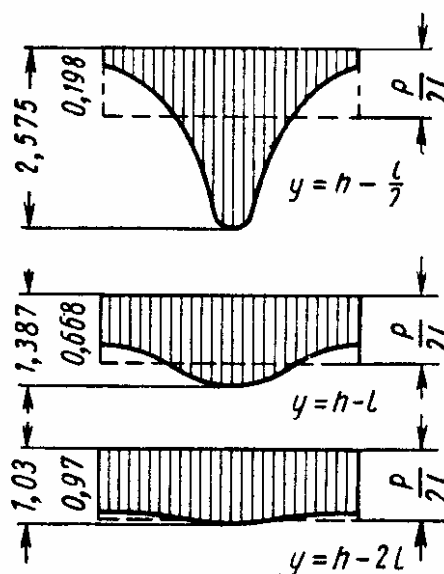


Рис. 7. Графики напряжения  $\sigma_y$  в различных сечениях; цифры указывают отношение минимального и максимального напряжения к среднему напряжению

**Функция напряжений в полярных координатах.** Осесимметричное напряженное состояние. В этом случае

$$\Phi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D,$$

где  $A, B, C, D$  — произвольные постоянные.

**Задача Ламе о полый трубе.** Применяя приведенное решение к задаче о равновесии трубы (диаметры  $2a, 2b$ ), испытывающей действие внутреннего давления  $p$  и внешнего давления  $q$ , получим

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (q - p)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{a^2 p - b^2 q}{b^2 - a^2};$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{a^2 b^2 (q - p)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{a^2 p - b^2 q}{b^2 - a^2}.$$

**Радиальное перемещение**

$$u = \frac{1 + \nu}{E(b^2 - a^2)} \left[ \frac{a^2 b^2 (p - q)}{r} + (1 + 2\nu)(a^2 p - b^2 q)r \right].$$

Чистый изгиб кривого бруса (рис. 8).  
Используя то же решение, получаем

$$\sigma_r = -\frac{4M}{\Delta} \left( b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right);$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{4M}{\Delta} \left( b^2 - a^2 + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} \right);$$

$$\tau_{r\varphi} = 0,$$

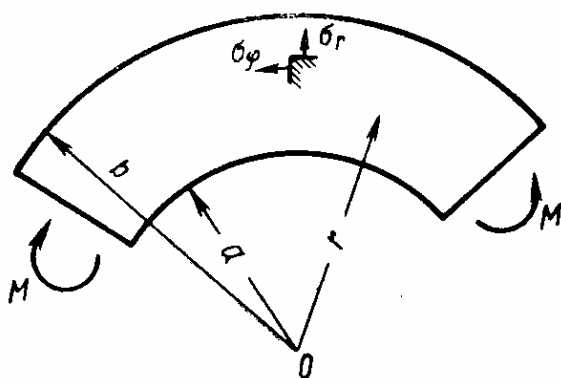


Рис. 8. Чистый изгиб кривого бруса

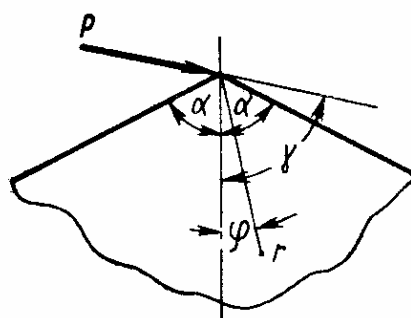


Рис. 9. Клин под действием сосредоточенной силы

где

$$\Delta = (b^2 - a^2) - 4a^2 b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Клин под действием сосредоточенной силы, приложенной в вершине (рис. 9). Здесь напряжения будут

$$\sigma_r = -\frac{2P}{r} \left( \frac{\sin \gamma \sin \varphi}{2\alpha - \sin 2\alpha} + \frac{\cos \gamma \cos \varphi}{2\alpha + \sin 2\alpha} \right);$$

$$\sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0.$$

Полагая  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma = 0$ , получаем решение задачи о действии на упругую полуплоскость сосредоточенной силы, перпендикулярной к границе (задача Фламана):

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \cos \varphi.$$

Сжатие круглого диска сосредоточенными силами можно получить, опираясь на решение задачи Фламана [19]. При действии вдоль диаметра двух равных сил (рис. 10) в сечении  $y = 0$  напряжение

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[ 1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right].$$

**Решение плоской задачи с помощью функций комплексного переменного.** При решении плоской задачи теории упругости широко применяют методы теории функций комплексного переменного [10, 18, 19].

Бигармоническая функция может быть представлена в форме

$$\Phi = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi(z) + \chi(z)], \quad (42)$$

где  $z = x + iy$ , а  $\bar{z} = x - iy$  — сопряженное комплексное переменное;  $\operatorname{Re}$  — символ вещественной части;  $\varphi(z)$  и  $\chi(z)$  — некоторые аналитические функции переменного  $z$ .

В дальнейшем необходима формула

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \psi(z), \quad (43)$$

где черта сверху означает сопряженную функцию [т. е.  $\overline{\varphi'(z)}$  — сопряженная функция по отношению к  $\varphi'(z)$  и т. д.], а

$$\psi(z) = \frac{d\chi}{dz}.$$

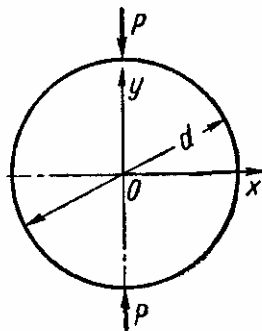


Рис. 10. Сжатие круглого диска сосредоточенными силами;  $d$  — диаметр

Смещения через введенные функции представляют так:

$$2\mu(u + iv) = \kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (44)$$

где  $\kappa = 3 - 4\nu$  — для плоской деформации;  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  — для плоского напряженного состояния.

Компоненты напряженного состояния определяют по формулам Колосова-Мусхелишвили

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]; \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

В случае первой основной задачи производные  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  согласно формулам (39) известны на контуре области, т. е. имеем граничную задачу

$$\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + \text{const}, \quad (46)$$

где  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  — известные на контуре функции.

В случае второй основной задачи на основании формулы (44) имеем граничную задачу

$$\kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(g_1 + ig_2), \quad (47)$$

где  $g_1, g_2$  — заданные на контуре функции.

Необходимо определить аналитические функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , удовлетворяющие на контуре области условию (46) или (47).

Для решения указанных граничных задач широко используют методы теории функций комплексного переменного (см. Дополнительные сведения по плоской задаче и работы [10, 14, 16, 18]).

**Плоская задача для бесконечной полосы.** Решение строится при помощи интегралов Фурье. Функцию Эри разыскивают в форме

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\lambda y) \cos \lambda x d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\lambda y) \sin \lambda x d\lambda.$$

Ось  $x$  направлена по оси полосы, начало координаты — посередине (см. рис. 4). Если полоса нагружена симметрично относительно оси  $y$ , второй интеграл можно опустить; при кососимметричной нагрузке можно опустить первый интеграл. Функции  $\varphi_1(\lambda y)$ ,  $\varphi_2(\lambda y)$  являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 \varphi}{dy^4} + 2\lambda^2 \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \lambda^4 \varphi = 0,$$

т. е. ( $j = 1, 2$ )

$$\varphi_j = A_j \operatorname{ch} \lambda y + B_j \operatorname{sh} \lambda y + C_j \lambda y \operatorname{ch} \lambda y + D_j \lambda y \operatorname{sh} \lambda y,$$

где  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$  — вообще говоря, функции  $\lambda$ . Если напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  симметричны относительно оси  $x$ , то  $B_j = 0$ ,  $C_j = 0$ .

Вычисляя напряжения

$$\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \varphi_1}{dy^2} \cos \lambda x d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \varphi_2}{dy^2} \sin \lambda x d\lambda \text{ и т. д.}$$

и сопоставляя их на краях полосы  $y = \pm h$  с заданными граничными значениями напряжений (записанными при помощи интеграла Фурье), определяем величины  $A_j(\lambda)$ , ...,  $D_j(\lambda)$ .

**Плоская задача для анизотропного тела.** В длинном цилиндре при нагрузках, перпендикулярных к образующей цилиндра и не меняющихся вдоль нее, в случае, когда имеется в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальная к оси цилиндра, реализуется плоская деформация. Функция напряжений удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \beta_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0, \end{aligned}$$

где  $\beta_{22}$ , ...,  $\beta_{11}$  — упругие константы.

В однородной анизотропной пластине, имеющей в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости, при краевых нагрузках, лежащих в срединной плоскости, реализуется обобщенное плоское напряженное состояние. Функция напряжений удовлетворяет приведенному выше дифференциальному уравнению при несколько иных значениях коэффициентов.

Методы решения и различные частные задачи рассмотрены в работе [6].

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

**Основные уравнения в цилиндрических координатах.** Рассматриваем тело вращения, осью которого является ось  $Oz$  цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$ . Предположим, что нагрузки также симметричны относительно оси  $Oz$ . Из рассмотрения исключается случай кручения круглого вала переменного диаметра, тогда смещение  $v = 0$ , а

$$u = u(r, z); \quad w = w(r, z).$$

Компоненты деформации

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; & \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{r\varphi} &= 0; & \gamma_{\varphi z} &= 0; & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Дифференциальные уравнения равновесия (13) гл. 1 принимают более простой вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Условия сплошности Бельтрами—Митчелла в рассматриваемом случае таковы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} &= 0; \\ \Delta \sigma_\varphi + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial r} &= 0; \\ \Delta \sigma_z + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0; \\ \Delta \tau_{rz} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются с помощью функции напряжения  $\Phi(r, z)$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right); \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right); \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]; \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Уравнения сплошности (50) будут удовлетворены, если функция напряжений — бигармоническая

$$\Delta \Delta \Phi = 0. \quad (52)$$

Компоненты смещения выражают через функцию напряжения по формулам

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}; \\ w &= \frac{1 + \nu}{E} \left[ (1 - 2\nu) \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Здесь приведена формулировка осесимметричной задачи в напряжениях. При формулировке задачи в смещениях общее решение может быть представлено через гармонические функции согласно решению Папковича—Нейбера (15), см. работы [7, 15].

**Уравнения в сферических координатах.** Иногда удобно исходить из уравнений осесимметричной задачи в сферических координатах  $r, \varphi, \theta$ ; при этом напряжения, деформации и смещения не зависят от угла  $\varphi$ ; ось симметрии характеризуется значением  $\theta = 0$ . Функция напряжений удовлетворяет бигармоническому уравнению, причем оператор Лапласа имеет теперь вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

**Связь с плоской задачей.** Решение первой и второй основных задач для осесимметричного тела можно привести к задаче определения двух аналитических функций для плоской задачи (для области, образованной диаметральной сечением) при соответствующих граничных условиях [1]. Граничные значения этих аналитических функций находят из системы интегральных уравнений.

**Полый шар под действием внутреннего и внешнего давления.** Пусть  $a, b$  обозначают соответственно внутренний и наружный радиусы



шара,  $p, q$  — внутреннее и наружное равномерное давление. Напряжения будут

$$\sigma_r = \frac{pa^3}{a^3 - b^3} \left( \frac{b^3}{r^3} - 1 \right) + \frac{qb^3}{a^3 - b^3} \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right);$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = -\frac{pa^3}{a^3 - b^3} \left( 1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) + \frac{qb^3}{a^3 - b^3} \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right).$$

Если внешнее давление отсутствует ( $q = 0$ ), то наибольшее растягивающее напряжение будет на внутренней поверхности

$$(\sigma_\varphi)_{\max} = \frac{p}{2} \cdot \frac{2a^3 + b^3}{b^3 - a^3}.$$

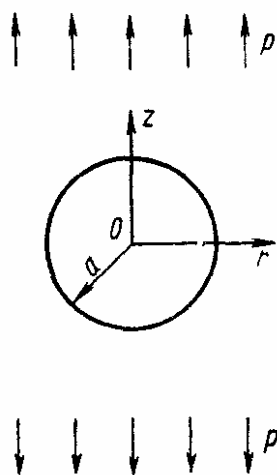


Рис. 11. Сферическая полость в растягиваемом теле

**Местные напряжения вокруг сферической полости в поле растяжения** (рис. 11). Пусть в пространстве, испытывающем одноосное растяжение в направлении оси  $z$ , имеется сферическая полость, свободная от нагрузок; тогда вблизи полости возникнет концентрация напряжений. Аналогичное состояние будет иметь место в растягиваемом стержне с малой сферической полостью. Равномерное одноосное напряжение в достаточном удалении от полости обозначим через  $p$ .

Нормальное напряжение в плоскости  $z = 0$

$$(\sigma_z)_{z=0} = \left[ 1 + \frac{4 - 5\nu}{2(7 - 5\nu)} \cdot \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7 - 5\nu)} \cdot \frac{a^5}{r^5} \right] p.$$

Наибольшее значение  $(\sigma_z)_{z=0}$  имеет на контуре  $r = a$ :

$$(\sigma_{z, \max})_{z=0} = \frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} p.$$

Нормальное напряжение  $\sigma_\varphi$  при  $z = 0$  и  $r = a$  также является растягивающим:

$$(\sigma_\varphi)_{z=0, r=a} = \frac{15\nu - 3}{2(7 - 5\nu)} p.$$

На полюсах полости ( $z = \pm a$ ) реализуется сжатие

$$(\sigma_\varphi)_{z=\pm a, r=a} = -\frac{3 + 15\nu}{2(7 - 5\nu)} p.$$

**Сосредоточенная сила в упругом пространстве.** Сосредоточенная сила  $P$ , приложенная в начале координат и направленная по оси  $z$ , вызывает в теле бесконечных размеров следующие напряжения:

$$\sigma_r = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} [(1-2\nu) zR^{-3} - 3r^2 zR^{-5}];$$

$$\sigma_\varphi = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} [(1-2\nu) zR^{-3}];$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{8\pi(1-\nu)} [(1-2\nu) zR^{-3} + 3z^3 R^{-5}];$$

$$\tau_{rz} = \frac{-P}{8\pi(1-\nu)} [(1-2\nu) rR^{-3} + 3rz^2 R^{-5}],$$

где введено обозначение  $R^2 = r^2 + z^2$ .

В плоскости  $z = 0$  действует только касательное напряжение  $\tau_{rz}$ .

**Действие сосредоточенной силы на полупространство** (рис. 12). На границе тела  $z = 0$  в начале координат ( $r = 0$ ) приложена сосредоточенная сила  $P$ , направленная по оси  $z$ . Напряжения определяются формулами

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{1}{r^2} - \frac{z^2}{r^2} R^{-1} \right) - 3r^2 z R^{-1} \right];$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} z^3 R^{-5};$$

$$\sigma_\varphi = \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left[ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} R^{-1} + zR^{-3} \right];$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3P}{2\pi} rz^2 R^{-5}.$$

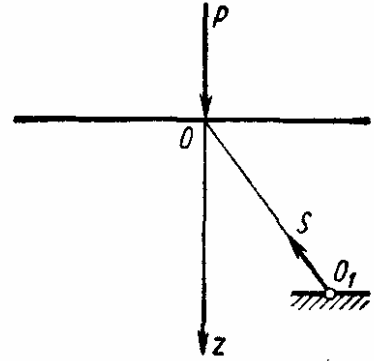


Рис. 12. Действие сосредоточенной силы на полупространство

Напряжение, действующее по любой горизонтальной площадке, направлено по линии  $OO_1$ , проходящей через начало координат, и по величине равно

$$s = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^2}{R^4}.$$

Перемещения, возникающие в полубесконечном теле под действием силы  $P$ :

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E r} P \left[ zR^{-1} - 1 + \frac{1}{1-2\nu} r^2 z R^{-3} \right];$$

$$w = \frac{1+\nu}{2\pi E} P [z^2 R^{-3} + 2(1-\nu) R^{-1}].$$

Для точек граничной плоскости  $z = 0$  имеем

$$u = - \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{2\pi E r} P; \quad w = \frac{1 - \nu^2}{\pi E r} P$$

**Действие распределенной нагрузки на полупространство.** Используя решение для сосредоточенной силы, можно, на основании принципа сложения действия сил, получить решение задачи о действии распределенной нагрузки на полупространство.

Для частного случая равномерной нагрузки  $p$ , распределенной по площади круга радиуса  $a$ , имеют место следующие результаты.

Вертикальное смещение в центре круга ( $z = 0, r = 0$ ) определяется формулой

$$w_0 = \frac{2(1 - \nu^2)pa}{E},$$

а на окружности ( $z = 0, r = a$ ) оно будет

$$w_a = \frac{2}{\pi} w_0.$$

Напряжения в точках, лежащих на оси  $z$ ,

$$\sigma_z = p \left( -1 + \frac{z^3}{A^3} \right);$$

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{p}{2} \left[ -(1 + 2\nu) + \frac{2(1 + \nu)z}{A} - \frac{z^3}{A^3} \right],$$

где  $A^2 = a^2 + z^2$ .

Максимальное касательное напряжение имеет место в точке  $z = a \sqrt{\frac{2(1 + \nu)}{7 - 2\nu}}$ , его величину определяют по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{p}{2} \left[ \frac{1 - 2\nu}{2} + \frac{2}{9}(1 + \nu) \sqrt{2(1 + \nu)} \right].$$

В случае равномерного давления  $p$ , распределенного по прямоугольнику (стороны  $a, b$ ), среднее вертикальное перемещение (по площади прямоугольника)

$$w_{cp} = m \frac{P(1 - \nu^2)}{E \sqrt{F}},$$

где  $P = pF$  — нагрузка;  $F$  — площадь, на которую действует давление. Значения коэффициента  $m$  приведены в табл. 2.

2. Значения коэффициента  $m$ 

Круг	Прямоугольник при $\frac{a}{b}$						
	1	1,5	2,0	3,0	5	10	100
0,96	0,96	0,94	0,92	0,88	0,82	0,71	0,37

Давление круглого жесткого штампа на полупространство (рис. 13). Давление не будет постоянным, его определяют по формуле

$$p = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}},$$

где  $P$  — полная нагрузка;  $a$  — радиус штампа.

Вертикальное перемещение под штампом постоянно

$$w = \frac{P(1 - \nu^2)}{2aE}.$$

**Пространственные задачи для анизотропных тел.** В трансверсально-изотропном теле вращения при осесимметричных нагрузках возникает осесимметричное напряженное состояние. Функция напряжений  $\Phi$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

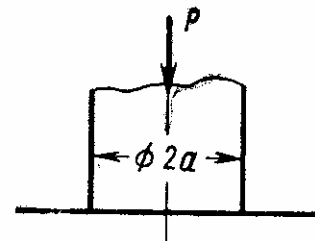


Рис. 13. Круглый штамп

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{c}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + d \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0,$$

где  $a$ ,  $c$ ,  $d$  — упругие постоянные.

Это уравнение для изотропного тела переходит в бигармоническое уравнение (52).

Имеются решения [6] различных задач для анизотропного тела (равновесие полого цилиндра, полый сферы, полупространства и т. д.).

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ

**Односвязная область.** Для односвязной области (внутренняя задача) функция  $\varphi(z)$  определена с точностью до слагаемого  $Ciz + \gamma$ , функция  $\psi(z)$  — с точностью до слагаемого  $\gamma'$ , где  $C$  — действительная, а  $\gamma$ ,  $\gamma'$  — комплексные произвольные постоянные.

Произвольным постоянным, входящим в функции  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$ , можно придавать, в зависимости от удобства, те или иные определенные значения.

Считая для определенности, что начало координат находится в области  $S$ , можно выбрать эти постоянные следующим образом [10].

Первая основная задача

$$\varphi(0) = 0; \quad Jm\varphi'(0) = 0; \quad \psi(0) = 0.$$

Первое достигается подходящим выбором  $\gamma$ , второе — подходящим выбором  $C$ , третье — подходящим выбором  $\gamma'$ .

Вторая основная задача

В этом случае  $C = 0$ ;  $\kappa\gamma - \bar{\gamma}' = 0$ . Поэтому для удобства можно принять  $\varphi(0) = 0$  или  $\psi(0) = 0$ .

**Многосвязная область.** Рассмотрим случай, когда  $S$  — многосвязная конечная область.

Будем предполагать, что область  $S$  ограничена несколькими простыми замкнутыми контурами  $L_1, L_2, \dots, L_m, L_{m+1}$ , из которых последний охватывает все предыдущие (пластинка с отверстиями).

Предполагаем также, что эти контуры не имеют общих точек.

В рассматриваемом случае функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=1}^m (X_k + iY_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z); \\ \psi(z) &= \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=1}^m (X_k - iY_k) \ln(z - z_k) + \psi^*(z). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где  $\varphi^*(z), \psi^*(z)$  — функции однозначные и регулярные в области  $S$ ;  $z_k (k = 1, 2, \dots, m)$  — постоянные точки, произвольно выбранные внутри контуров  $L_1, L_2, \dots, L_m$ ;  $X_k, Y_k$  — компоненты главного вектора усилий, приложенных к контуру  $L_k (k = 1, 2, \dots, m)$ .

Рассмотрим случай, когда  $S$  — бесконечная область (бесконечная плоскость с отверстиями). Этот случай получается из предыдущего, когда контур  $L_{m+1}$  целиком уходит в бесконечность.

Функции напряжений  $\varphi(z), \psi(z)$  в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X + iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \Gamma z + \varphi_0(z); \\ \psi(z) &= \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \Gamma' z + \psi_0(z). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где  $X = \sum_{k=1}^m X_k, Y = \sum_{k=1}^m Y_k, \Gamma = B + iC, \Gamma' = B' + iC'$  — постоянные;  $\varphi_0(z), \psi_0(z)$  — функции, имеющие при достаточно больших  $|z|$  разложение вида  $\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \psi_0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \dots$

Напряженное состояние не изменится, если принять  $a_0 = a'_0 = 0$ , т. е.  $\varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = 0$  и  $C = 0$ .

Действительные постоянные  $B$ ,  $B'$ ,  $C'$  имеют простой физический смысл и выражаются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \Gamma = B &= \frac{1}{4} (N_1 + N_2); \\ \Gamma' = B' + iC' &= -\frac{1}{2} (N_1 - N_2) e^{-2ia}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где  $N_1$ ,  $N_2$  — значение главных напряжений на бесконечности;  $\alpha$  — угол, который главная ось, соответствующая  $N_1$ , составляет с осью  $Ox$ .

**Конформное отображение. Преобразование основных формул.** Рассмотрим конечную или бесконечную односвязную область, ограниченную одним простым контуром  $L$ .

Отобразим с помощью функции  $z = \omega(\zeta)$  область  $S$  на внутренность (внешность) единичного круга.

Идея конформного отображения на единичный круг состоит в том, что фактически решение рассматриваемой двумерной задачи сводится к решению некоторой одномерной задачи, что значительно упрощает исследование [10, 16].

Граничное условие первой основной задачи в этом случае примет [10]

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2 + \text{const}, \quad (57)$$

где  $\sigma = e^{i\theta}$  — произвольная точка на окружности  $\gamma$ . Граничное условие второй основной задачи [47] соответственно примет вид [10]

$$\kappa \varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2). \quad (58)$$

Компоненты напряжений  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $X_y$  и компоненты смещений  $u$ ,  $v$  будут выражаться следующими соотношениями [10]:

$$\left. \begin{aligned} X_x + Y_y &= 4\operatorname{Re}\{\Phi(\zeta)\}; \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2\left\{\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)\right\}; \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa \varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Легко также найти [10] компоненты  $v_\rho$ ,  $v_\theta$  смещения и компоненты  $\widehat{\rho\rho}$ ,  $\widehat{\theta\theta}$ ,  $\widehat{\rho\theta}$  напряжения относительно криволинейных координат  $(\rho, \theta)$ , которые определяют из формул

$$\left. \begin{aligned} 2\mu|\omega'(\zeta)|(\vartheta_\rho + i\vartheta_\theta) &= \\ = \frac{\bar{\zeta}}{\rho} \overline{\omega'(\zeta)} \left\{ \kappa \varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right\}; \\ \widehat{\rho\rho} + \widehat{\theta\theta} &= 4\operatorname{Re}\{\Phi(\zeta)\}; \\ \widehat{\theta\theta} - \widehat{\rho\rho} + 2i\widehat{\rho\theta} &= \frac{2\bar{\zeta}^2}{\rho^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \left\{ \overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

В формулах (53) и (54)

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

Приведение основных задач к интегральным уравнениям. Важным методом исследования плоской задачи теории упругости, особенно для многосвязных областей, является приведение основных задач к интегральным уравнениям.

Не останавливаясь на различных типах интегральных уравнений [10], приведем лишь интегральные уравнения Шермана—Лауричелла [20, 21], которые являются наиболее эффективными, поскольку их можно легко решать приближенными методами с помощью электронных вычислительных машин.

Рассмотрим многосвязную область  $S$ , где  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_{m+1}$  — полная граница области. Предполагаем, что каждый из контуров  $L_j$  имеет кривизну, удовлетворяющую условию Гельдера [10].

В случае первой основной задачи [20, 21] решение представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t) dt}{t-z} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{z-z_j}, \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(t)} dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t) d\bar{t}}{t-z} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega(t) dt}{(t-z)^2} + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{z-z_j}, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

где  $\omega(t)$  — функция точки контура, подлежащая определению;  $z_j$  — произвольно зафиксированные точки областей  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  (конечные области, ограниченные контурами  $L_j$ ), а  $b_j$  — действительные постоянные, связанные с  $\omega(t)$  следующей зависимостью

$$b_j = i \int_L \{ \omega(t) d\bar{t} - \overline{\omega(t)} dt \} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Исследование рассматриваемой плоской задачи сводится к решению интегрального уравнения Шермана

$$\begin{aligned} \omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} \rightarrow \\ \rightarrow \sum_{j=1}^{m+1} \left\{ \frac{b_j}{t_0-z_j} + \frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j} \left( 1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_j} \right) \right\} - \\ - C_k = f(t_0) \text{ на } L_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (62)$$

где  $z_{m+1} = 0$ , а неизвестные постоянные  $C_k$  связаны с искомой функцией  $\omega(t)$  соотношением

$$C_k = - \int_{L_k} \omega(t) ds, \quad (k = 1, 2, \dots, m); \quad (63)$$

$ds$  — дифференциал дуги  $L_k$ .

Условие (63) будет всегда выполняться, если будет соблюдено условие равенства нулю главного момента внешних усилий.

В случае второй основной задачи функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  разыскиваются в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t) dt}{t-z} + \sum_{j=1}^m A_j \ln(z - z_j); \\ \psi(z) &= - \frac{\kappa}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(t)} dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t) d\bar{t}}{t-z} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega(t) dt}{(t-z)^2} - \sum_{j=1}^m \kappa \bar{A}_j \ln(z - z_j), \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

где  $A_j$  — постоянные.

При этом  $A_j$  связаны с искомой функцией  $\omega(t)$  соотношениями

$$A_j = \int_{L_j} \omega(t) ds. \quad (65)$$

Предполагается, что  $\omega(t)$  имеет производную  $\omega'(t)$ , удовлетворяющую условию Гельдера [10].

Исследование поставленной задачи сводится к решению интегрального уравнения

$$\begin{aligned} &\kappa \omega(t_0) + \frac{\kappa}{2\pi i} \int_L \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \kappa \left\{ \ln(t_0 - z_j) + \ln(\bar{t}_0 - \bar{z}_j) \int_{L_j} \omega(t) ds = g(t_0) \text{ на } L, \right. \quad (66) \end{aligned}$$

где  $\ln(t_0 - z_j) + \ln(\bar{t}_0 - \bar{z}_j)$  — однозначная функция, равная  $2 \ln |t - z_j|$ .

Предполагаем, что заданная функция  $g(t)$  имеет производную  $g'(t)$ , удовлетворяющую условию Гельдера.

Показано, что интегральные уравнения (62) и (66) имеют единственное решение.



**Основные уравнения и соотношения плоской задачи моментной теории упругости.** В основе классической теории упругости лежит модель среды, между частицами которой предполагается одно лишь центральное взаимодействие.

Фойгт ввел новую модель среды, между элементами которой предполагалось кроме обычного центрального еще и вращательное взаимодействие.

Эта модель была положена в основу теории упругости с несимметричным тензором напряжений, первое изложение которой дано в монографии Коссера.

На каждой грани элементарного параллелепипеда, выделенного из среды Коссера, действуют кроме обычных напряжений еще и моментные напряжения. В общем случае на пространственный элемент действуют еще объемные силы и моменты (пары сил).

В плоском случае уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x &= 0; & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0; \\ \frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} + M_z &= \tau_{yx} - \tau_{xy}, & (\tau_{xy} &\neq \tau_{yx}). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

где  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \sigma_y$  — силовые напряжения;  $\mu_x, \mu_y$  — моментные напряжения;  $F_x, F_y$  — компоненты объемных сил;  $M_z$  — объемный момент относительно оси, перпендикулярной плоскости  $xOy$ .

Моментная теория упругости развивается в основном в двух направлениях-вариантах:

в первом варианте малые жесткие вращения среды  $\vec{\omega}$  полностью описываются вектором перемещений  $\vec{u}$ , ибо принимается, что вектор  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}$ ;

во втором варианте наряду с полем перемещений  $\vec{u}$ , вводят кинематически независимое поле векторов  $\vec{\Omega}$ , характеризующих малые вращения среды.

В первом варианте соотношения между компонентами напряжений для упругой изотропной среды принимают в виде [11]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_x; & \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_y; \\ \tau_{xy}^s &= \frac{1}{2} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) = \mu \gamma_{xy}; \\ \mu_x &= 4\eta \kappa_x, & \mu_y &= 4\eta \kappa_y. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ляме;  $\eta$  — новая упругая константа материала (изгибно-крутильный модуль)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \kappa_x &= \frac{\partial \omega_z}{\partial x}; & \kappa_y &= \frac{\partial \omega_z}{\partial y}; & \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Условия совместности деформаций и кривизн находим из выражений (69), исключая в последних перемещения  $u$ ,  $v$  и вращение  $\omega_z$ . В напряжениях и моментных напряжениях эти условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}); \quad (70)$$

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu_y}{\partial x}; \quad (71)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_x &= 2l^2 \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}^s}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_x - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \right\}; \\ \mu_y &= 2l^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] - \frac{\partial \tau_{xy}^s}{\partial y} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Здесь  $l^2 = \frac{\eta}{\mu}$  (константа  $l$  имеет размерность длины).

Отметим, что только три из условий совместности (70)–(72) являются независимыми, так как, например, уравнения (70) и (72) содержат в себе условие (78).

Если ввести две функции напряжений  $U$  и  $F$  соотношениями [11]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; & \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; & \tau_{yx} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \\ \mu_x &= \frac{\partial F}{\partial x}; & \mu_y &= \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

то плоская задача моментной теории упругости (при отсутствии объемных сил и моментов) сводится к решению уравнений

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0; \quad \nabla^2 (F - l^2 \nabla^2 F) = 0, \quad (74)$$

дополненных соответствующими граничными условиями. Функции  $U$  и  $F$  кроме уравнений (74) должны удовлетворять еще условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (F - l^2 \nabla^2 F) &= -2(1 - \nu) l^2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 U, \\ \frac{\partial}{\partial y} (F - l^2 \nabla^2 F) &= 2(1 - \nu) l^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 U. \end{aligned} \quad (75)$$

При таком выборе функций напряжений уравнения равновесия (67) и условия совместности (70)–(72) удовлетворяются тождественно.

Основные граничные задачи. При решении плоской задачи моментной теории упругости возникают три основные граничные задачи.

1. Найти упругое равновесие среды по заданным усилиям (напряжениям  $X_n$ ,  $Y_n$  и моментным напряжениям  $\mu_n$ ), действующим на границе рассматриваемой среды, т. е.

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y); \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y); \\ M_n &= \mu_x \cos(n, x) + \mu_y \cos(n, y). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

При решении задач о концентрации напряжений около отверстий на контуре отверстия задаются в полярных координатах нормальные  $\sigma_r$ , касательные  $\tau_{r\theta}$  и моментные  $\mu_r$  напряжения.

2. Определить напряженное или деформированное состояние тела по заданным на его границе компонентам  $u$ ,  $v$ , вектора перемещений  $\vec{u}$  и компоненте  $\omega_z$  вектора вращений  $\vec{\omega}$ .

В полярных координатах на контуре отверстия задают радиальное  $v_r$  и тангенциальное  $v_\theta$  перемещения и вращение  $\omega_{r\theta}$ .

3. Смешанная задача. Найти упругое равновесие тела, если на одной части его поверхности заданы усилия  $X_n$ ,  $Y_n$  и  $\mu_n$ , а на остальной части перемещения  $u$ ,  $v$  и вращение  $\omega_z$ .

Возможна постановка и других смешанных задач [17], например различных «контактных задач».

Приближенный метод решения задач о концентрации напряжений около произвольных криволинейных отверстий. Известны точные решения задач о концентрации напряжений около кругового отверстия (как свободного, так и подкрепленного), находящегося в однородном напряженном поле (простое растяжение, чистый сдвиг, чистый изгиб). Для отверстий некругового очертания переменные в решении уравнения Гельмгольца не разделяются и задача допускает лишь приближенное решение. Наиболее эффективным оказался «метод возмущения формы границы».

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = R [\zeta + \varepsilon f(\zeta)] \quad (77)$$

осуществляет конформное отображение плоскости  $\zeta$  с отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость  $z$  с отверстием заданной формы.

Здесь  $R$ ,  $\varepsilon$  и  $f(\zeta)$  характеризуют размеры и формы отверстий.

Из выражения (77) следует

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = R \sqrt{\rho^2 + \varepsilon [\bar{\zeta} f(\zeta) + \zeta \bar{f}(\bar{\zeta})] + \varepsilon^2 f(\zeta) \bar{f}(\bar{\zeta})}; \\ \theta &= \arctg \frac{y}{x} = \frac{\sin \vartheta + \varepsilon \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{2i\rho}}{\cos \vartheta + \varepsilon \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{2\rho}}; \end{aligned} \quad (78)$$

$$e^{i\beta} = \frac{\zeta \omega'(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)}}{|\zeta| |\omega'(\zeta)| |\omega(\zeta)|},$$

где  $\beta$  — угол между радиальным направлением и нормалью к контуру на плоскости  $z$ .

На основании соотношений (78) предполагается, что все величины, зависящие от  $r$ ,  $\theta$  и  $\beta$ , можно разложить в ряд по степеням  $\varepsilon$ . Следовательно, компоненты напряженного состояния в естественных криволинейных ортогональных координатах представимы в виде

$$\sigma_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_\rho^{(k)}, \dots, \mu_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu_\theta^{(k)}. \quad (79)$$

Для  $k$ -го приближения имеют место формулы

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho^{(k)} &= \tilde{\sigma}_\rho^k + \sum_{m=0}^{k-1} \left[ L_1^{(k-m)} \tilde{\sigma}_\rho^{(m)} + L_2^{(k-m)} (\tilde{\sigma}_\theta^{(m)} - \tilde{\sigma}_\rho^{(m)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} L_3^{(k-m)} (\tilde{\tau}_{\rho\theta}^{(m)} + \tilde{\tau}_{\theta\rho}^{(m)}) \right]; \\ \mu_\theta^{(k)} &= \tilde{\mu}_\theta^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} [L_5^{(k-m)} \tilde{\mu}_\theta^{(m)} - L_6^{(k-m)} \tilde{\mu}_\rho^{(m)}], \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_\rho^{(k)} &= \frac{1}{R^2} \left\{ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) U_k(\rho, \theta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \left[ \frac{1}{\rho} F_k(\rho, \theta) \right] \right\}; \\ \tilde{\sigma}_\theta^{(k)} &= \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} U_k(\rho, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \left[ \frac{1}{\rho} F_k(\rho, \theta) \right] \right\}; \\ \tilde{\tau}_{\rho\theta}^{(k)} &= -\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \left[ \frac{1}{\rho} U_k(\rho, \theta) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) F_k(\rho, \theta) \right\}; \\ \tilde{\tau}_{\theta\rho}^{(k)} &= -\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \left[ \frac{1}{\rho} U_k(\rho, \theta) \right] - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_k(\rho, \theta) \right\}, \\ \tilde{\mu}_\rho^{(k)} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} F_k(\rho, \theta), \\ \tilde{\mu}_\theta^{(k)} &= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} F_k(\rho, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Функции  $U_k$  и  $F_k$  являются  $k$ -м приближением в разложении решений уравнений (74) в ряды по степеням  $\varepsilon$ .

В формулах (80)  $L_i^{(k-m)}$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) — некоторые дифференциальные операторы, зависящие от вида функции  $f(\zeta)$  [11].

Ввиду линейности задачи компоненты напряженного состояния можно представить в виде

$$\sigma_\rho^x = \sigma_\rho^0 + \sigma_\rho, \dots; \mu_\theta^x = \mu_\theta^0 + \mu_\theta. \quad (82)$$

Здесь  $\sigma_\rho^0, \dots, \mu_\theta^0$  — компоненты основного напряженного состояния,  $\sigma_\rho, \dots, \mu_\theta$  — компоненты дополнительного напряженного состояния, вызванного наличием отверстия.

Граничные условия для первой основной плоской задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_\rho^{(k)} &= f_1(\vartheta, \varepsilon); \\ \tau_{\rho\theta}^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{\rho\theta}^{(k)} &= f_2(\vartheta, r); \\ \mu_\rho^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu_\rho^{(k)} &= f_3(\vartheta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (83)$$

Следовательно, для определения напряженного или деформированного состояния около криволинейного отверстия необходимо знать вид дифференциальных операторов  $L_i^{(k-m)}$ , входящих в формулы (80) и зависящих от формы отверстия, а также основное напряженное состояние, характеризующееся компонентами  $\sigma_\rho^0, \dots, \mu_\theta^0$ . Наконец, из граничных условий (77) определяем неизвестные коэффициенты искомых функций напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач. Доклады АН СССР. Т. 129, № 4, М., изд-во АН СССР, 1959.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
3. Кац А. М. Теория упругости. М., ГИТТЛ, 1956.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М., Гостехиздат, 1947.
5. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. М., Гостехиздат, 1943.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., ГИТТЛ, 1950.
7. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1955.
8. Ляв А. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
9. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., ГИТТЛ, 1957.
10. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд-во АН СССР, 1966.

11. Миндлин Р. Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. Сб. «Механика». М., «Мир», № 4, 1964.
  12. Най Д. Физические свойства кристаллов. М., ИЛ, 1960.
  13. Нemiш Ю. Н. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости. Прикладная механика. Т. II. Вып. 4, 1966.
  14. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
  15. Папкович П. Ф. Теория упругости. М., Оборонгиз, 1939.
  16. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., Гостехиздат, 1951.
  17. Савин Г. Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев, Изд. КГУ, 1965.
  18. Снеддон и Берри. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
  19. Тимошенко С. П. Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
  20. Шерман Д. И. ДАН СССР, т. 27, № 9, 1940.
  21. Шерман Д. И. ДАН СССР, т. 28, № 1, 1940.
  22. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М. Гостехиздат, 1949.
-

### Глава 3

## ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

При воздействии значительных нагрузок тела или хрупко разрушаются, или испытывают неупругие, пластические деформации. Пластические свойства весьма разнообразны и зависят от рассматриваемых материалов и внешних условий (температура, длительность процесса и т. д.). Обычно считают, что теория пластичности изучает напряжения и деформации в телах при условии, что пластические деформации не зависят от времени.

Задачи, в которых пластические деформации с течением времени растут, рассматриваются в теории ползучести. Более сложные материалы изучают в реологии.

### МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

**Объемное сжатие** твердых тел является упругой деформацией, причем зависимость относительного изменения объема от давления близка к линейной. При том же условии деформации сдвига для изотропных материалов мало зависят от давления [11].

**Упругая и пластическая деформация.** Кривая одноосного растяжения показана на рис. 1. Если нагрузку уменьшать, то кривая разгрузки  $CD$  близка к прямой линии, имеющей наклон упругого участка; остаточная деформация измеряется отрезком  $OD$ . Кривые деформации чистого сдвига (кручение трубы) имеют аналогичный вид.

В теории пластичности кривые деформации схематизируют (рис. 2):

	Растяжение	Чистый сдвиг
Упругий участок $OA$	$\sigma_1 = E \varepsilon_1$	$\tau = G \gamma$
Участок текучести $AB$	$\sigma_1 = \text{const} = \sigma_T$	$\tau = \text{const} = \tau_T$
Участок упрочнения $BC$	$\sigma_1 = g_{11}(\varepsilon_1) \varepsilon_1$	$\tau = g(\gamma) \gamma$

где  $E$ ,  $G$  — модули упругости и сдвига.

Для современных конструкционных металлов, применяемых в машиностроении, участок текучести обычно отсутствует.

Если кривая деформации (рис. 3) характеризуется незначительным упрочнением, ее можно аппроксимировать ломаной с горизонтальным участком текучести  $AB$ . Соответствующее напряжение в теории пластичности называют пределом текучести  $\sigma_T$  (или  $\tau_T$ ).

Функцию  $g_{11}(\varepsilon_1)$  [или  $g(\gamma)$ ] иногда называют *модулем упрочнения*. По опытным данным  $0 < g_{11}(\varepsilon_1) \leq E$ ;  $0 < g(\gamma) \leq G$ .

На кривой деформирования (см. рис. 2) могут отсутствовать те или иные участки. Металл вследствие первоначальной вытяжки повышает предел упругости (*упрочнение* или *наклеп*).

**Деформационная анизотропия. Эффект Баушингера.** Упрочнение имеет направленный характер. В результате пластической деформации материал приобретает деформационную анизотропию. Одним из проявлений такого упрочнения является эффект Баушингера: предварительная

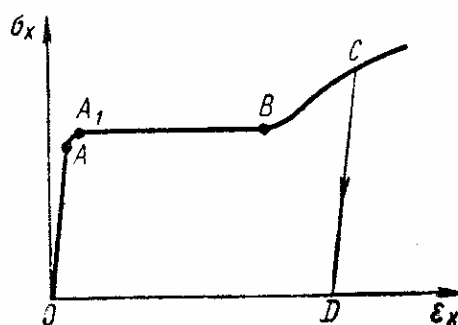


Рис. 1. Кривая одноосного растяжения

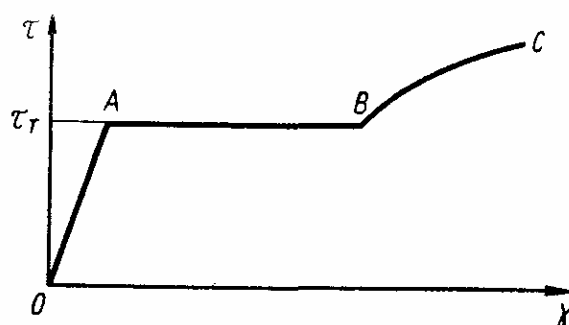


Рис. 2. Схематизированная кривая деформации

пластическая деформация одного знака ухудшает сопротивляемость материала в отношении последующей пластической деформации обратного знака.

Опыты при сложном напряженном состоянии осуществляют обычно на тонкостенных трубах. Комбинируя растяжение, кручение и внутреннее давление, можно вызвать в стенке трубы произвольное плоское напряженное состояние (см. работы [6, 14]).

Важно различать *простое* (пропорциональное) и *сложное* нагружения. В первом случае напряжения в данной точке возрастают пропорционально одному параметру; при этом форма тензора напряжения и его главные направления сохраняются.

При сложном нагружении направления главных осей и взаимоотношения главных напряжений изменяются.

**Условия текучести (пластичности).** В состоянии текучести компоненты напряжения удовлетворяют условию текучести (или пластичности). Для изотропного тела условие текучести должно быть функцией инвариантов напряжений.

Так как влияние среднего давления  $\sigma$  для большинства металлов незначительно, то условие текучести имеет вид

$$f [I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0; \quad (1)$$

здесь  $I_2(D_\sigma)$ ,  $I_3(D_\sigma)$  — квадратичный и кубический инварианты девиатора напряжения.

В пространстве главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  плоскости  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$  перпендикулярны прямой  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , называемой гидростатической осью. Уравнение (1) не содержит среднего давления,

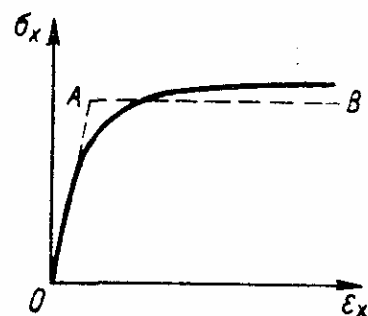


Рис. 3. Аппроксимация кривой деформации с незначительным упрочнением



поэтому оно определяет поверхность цилиндра, осью которого является гидростатическая ось. Эту поверхность называют *поверхностью текучести*. Следом поверхности текучести на плоскостях  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$  является *кривая текучести*. Из условий единственности решения вытекает, что кривая текучести должна быть *выпуклой*, т. е. должна лежать по одну сторону касательной (или опорной линии).

*Условие текучести Треска—Сен-Венана* требует, чтобы в состоянии пластического течения

$$\tau_{\max} = \text{const} = \frac{\sigma_T}{2}, \quad (2)$$

где  $\tau_{\max}$  берут согласно формуле (7) гл. 1.

Поверхность текучести — поверхность правильной шестигранной призмы, кривая текучести — правильный шестиугольник (рис. 4).

Условие текучести Треска—Сен-Венана удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

Условие текучести Мизеса:

$$2\sigma_i^2 \equiv (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2\sigma_T^2. \quad (3)$$

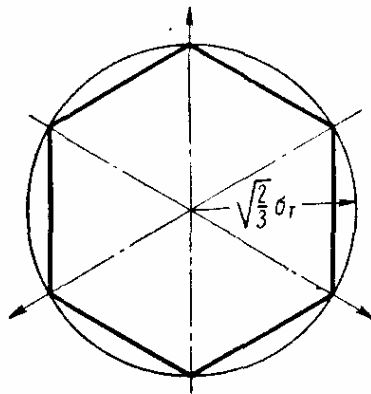


Рис. 4. Круг текучести Мизеса и шестиугольник Треска—Сен-Венана

В пространстве напряжений условие текучести Мизеса определяет круговой цилиндр, описанный вокруг призмы Треска—Сен-Венана, кривая текучести — круг, описанный вокруг шестиугольника Треска—Сен-Венана (рис. 4). Условие текучести Мизеса несколько лучше согласуется с опытными данными, чем предыдущее условие.

Более общие условия текучести. Для некоторых материалов необходимо учитывать влияние среднего давления; тогда принимают (условие Мизеса—Шлейхера)

$$\sigma_i = f(\sigma), \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4)$$

или аналогичное уравнение, основанное на использовании  $\tau_{\max}$ .

Для анизотропного материала обычно приравнивают постоянной квадратичную форму напряжений, содержащую некоторое число коэффициентов — констант пластичности [25]. Разработан также [5] вариант условия текучести, использующий понятие  $\tau_{\max}$ .

**Условия упрочнения** характеризуют связь между характеристиками напряжения и деформации, существующую в фазе упрочнения. Простейшее условие упрочнения (*гипотеза «единой кривой»*) имеет вид

$$\sigma_i = g_1(\epsilon_i) \epsilon_i \quad \text{или} \quad \tau_i = g(\gamma_i) \gamma_i, \quad (5)$$

где  $g_1(\epsilon_i)$  [или  $g(\gamma_i)$ ] — положительная функция, характерная для данного материала и не зависящая от вида напряженного состояния; поэтому ее можно определять, например, из опытов на простое растяжение или чистый сдвиг;  $g_1(\epsilon_i)$  — секущий модуль кривой  $\sigma_i, \epsilon_i$ .

Если исходными являются опыты на растяжение, то из последних известен также «коэффициент поперечного сжатия»

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m(\epsilon_1)}, \text{ тогда } \epsilon_i = \frac{2(m+1)}{3m} \epsilon_1.$$

Отсюда находят зависимость  $\epsilon_1 = \varphi(\epsilon_i)$ . Внося это соотношение в уравнение простого растяжения  $\sigma_1 = g_{11}(\epsilon_1) \epsilon_1$  и заменяя  $\sigma_1$  на  $\sigma_i$ , находим искомую зависимость (5). Функции  $g_1$  и  $g$  связаны простым соотношением

$$g(\gamma) = \frac{1}{3} g_1\left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}\right).$$

Условие (5) выполняется с практически достаточной точностью при простом нагружении или к нему близком.

Другое условие (*энергетическое условие*), справедливое для более широкого класса нагружений, имеет вид

$$A_p = \Phi(\sigma_i), \quad (6)$$

где  $\Phi(\sigma_i)$  — характерная для данного материала функция, не зависящая от вида напряженного состояния;

$$A_p = \int (\sigma_x d\epsilon_x^p + \sigma_y d\epsilon_y^p + \dots + \tau_{xz} d\gamma_{xz}^p)$$

есть работа пластической деформации,  $d\epsilon_x^p, \dots$  — приращения компонентов пластической деформации.

Реже используют другие условия упрочнения [12, 15, 25].

**Критерии нагружения и нагрузки.** Важное значение имеют критерии, позволяющие в случае сложного напряженного состояния судить о том — происходит ли дальнейшая пластическая деформация (*нагружение*) или материал стал деформироваться упруго (*разгрузка*).

Материал нагружается, если работа пластической деформации растет, т. е. если

$$dA_p > 0. \quad (7)$$

Используя это условие, получаем следующие критерии разгрузки: состояние текучести

$$d\sigma_i \leq 0;$$

состояние упрочнения

$$d\sigma_i \leq 0.$$

Разгрузка протекает по закону Гука.

## УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Для развития теории необходимы уравнения пластического состояния, связывающие напряжения и деформации. Задача построения таких уравнений в общем случае не решена вследствие сложности процесса пластического деформирования. Предложено много различных теорий [6, 8, 12, 15, 24, 25].

Здесь изложены лишь основные схемы, получившие развитие и широко применяемые в инженерных расчетах.

**Теория пластического течения** основана на следующих предположениях:

- 1) тело изотропно;
- 2) относительное изменение объема является упругой деформацией, пропорциональной среднему давлению;
- 3) компоненты полной деформации  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{xz}$  складываются из компонент упругой деформации  $\epsilon_x^e, \dots, \gamma_{xz}^e$  и компонент пластической деформации  $\epsilon_x^p, \dots, \gamma_{xz}^p$ ;
- 4) выполняется условие текучести Мизеса или условие упрочнения;
- 5) приращения компонент пластической деформации  $d\epsilon_x^p, \dots, d\gamma_{xz}^p$  пропорциональны соответствующим компонентам девиатора напряжения  $s_x, \dots, \tau_{xz}$ .

Из этих предположений вытекают уравнения Прандтля-Рейса

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon &= 3k d\sigma; \\ d\left(\epsilon_x - \frac{1}{3}\epsilon\right) &= \frac{1}{2G} ds_x + d\lambda s_x; \dots; \\ d\gamma_{xz} &= \frac{1}{G} d\tau_{xz} + 2d\lambda \tau_{xz}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $k = \frac{1-2\nu}{E}$  — коэффициент объемного сжатия;  $\nu$  — число Пуассона;  $E$  — модуль упругости;  $d\lambda$  — некоторый бесконечно малый скалярный множитель, связанный с приращением работы пластической деформации соотношением

$$dA_p = 2d\lambda \tau_i^2. \quad (9)$$

В состоянии текучести  $\tau_i^2 = \text{const} = \tau_r^2$ , тогда  $d\lambda = \frac{dA_p}{2\tau_r^2}$ . В этом случае нет однозначной зависимости приращений компонент пластической деформации от компонентов напряжения и их приращений.

В состоянии упрочнения выполняется условие (8); сопоставляя это условие с соотношением (9), находим

$$d\lambda = F(\tau_i) d\tau_i, \quad (10)$$

где

$$F(\tau_i) = \frac{\Phi'(\tau_i)}{2\tau_i^2}.$$

В случае упрочнения уравнения (8) устанавливают *однозначную* зависимость приращений компонент деформации от напряжений и их приращений. Уравнения (8) применимы при  $d\tau_i > 0$ . При  $d\tau_i \leq 0$  происходит разгрузка.

**Теория пластичности Сен-Венана—Мизеса. Жестко-пластическое тело.** Использование уравнений (8) для решения конкретных задач связано с математическими трудностями, так как эти уравнения нелинейны и имеют сложную структуру. При рассмотрении развитых пластических деформаций можно пренебрегать компонентами упругой деформации; отбрасывая последние в уравнениях (8) для состояния текучести, получим (после деления обеих частей уравнений на дифференциал времени  $dt$ )

$$\xi_x = \lambda' (\sigma_x - \sigma); \dots; \eta_{xz} = 2\lambda' \tau_{xz}, \quad (11)$$

где множитель

$$\lambda' = \frac{1}{2\tau_T^2} (\sigma_x \xi_x + \sigma_y \xi_y + \dots + \tau_{xz} \eta_{xz}) \quad (12)$$

пропорционален мощности пластической деформации. «Время»  $t$  введено в уравнения (11) для удобства;  $t$  может быть физическим временем или

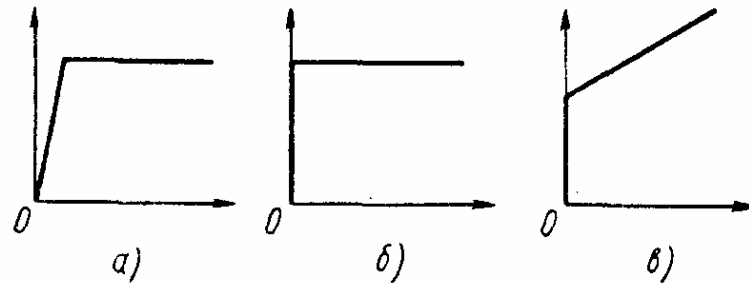


Рис. 5. Жестко-пластическая схема

каким-нибудь монотонно изменяющимся параметром (например, параметром внешней нагрузки). Исключая в  $\lambda'$  компоненты напряжения с помощью зависимостей (11), находим

$$\lambda' = \frac{\eta_i}{2\tau_T},$$

где  $\eta_i$  — интенсивность скоростей деформаций сдвига.

Следовательно, уравнения (11) можно еще представить так:

$$\frac{\xi_x}{\eta_i} = \frac{\sigma_x - \sigma}{2\tau_T}; \dots; \frac{\eta_{xz}}{\eta_i} = \frac{\tau_{xz}}{\tau_T}. \quad (13)$$

Уравнения Сен-Венана—Мизеса по сути дела исходят из схемы жестко-пластического тела, получившей в последние годы значительное развитие. В этой схеме полностью пренебрегают упругими деформациями. Вместо кривой деформации с упругим участком (рис. 5, а) рассматривают кривую деформации с одной лишь площадкой текучести (рис. 5, б).

Жестко-пластическая схема приводит к приемлемому решению, если ничто не сдерживает развития пластических деформаций.

Подобно схеме жестко-пластического тела (характеризуемого площадкой текучести), иногда вводят схему жестко-упрочняющегося тела (рис. 5, в).

Теория упруго-пластических деформаций, предложенная Генки и Надаи, использует конечные зависимости между компонентами напряжения и деформации, т. е. зависимости, аналогичные по структуре закону Гука.

Предположения 1—4 теории пластического течения сохраняются. Предположение 5 заменяется другим: компоненты пластической деформации пропорциональны соответствующим компонентам девиатора напряжения.

Тогда вместо уравнения (9) получаем уравнения Генки

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 3k\sigma; \\ \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon &= \psi (\sigma_x - \sigma); \dots; \gamma_{xz} = 2\psi \tau_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $\psi$  — некоторый скалярный множитель, причем

$$\gamma_i = 2\psi \tau_i \text{ или } \varepsilon_i = \frac{2}{3} \psi \sigma_i. \quad (15)$$

В случае упругого тела  $\psi = \frac{1}{2G}$  и уравнения Генки переходят в закон Гука; здесь  $\tau_i = G\gamma_i$ , а приращение работы деформации  $dA$  является полным дифференциалом упругого потенциала  $W$ .

В случае идеальной пластичности выполняется условие Мизеса

$$\tau_i = \text{const} = \tau_T; \quad \psi = \frac{\gamma_i}{2\tau_T} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_T}. \quad (16)$$

Здесь также существует потенциал работы деформации

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \tau_T \gamma_i, \quad (17)$$

равный сумме энергии упругого объемного сжатия и работы изменения формы  $\tau_T \gamma_i$ . Компоненты деформации не являются однозначными функциями компонентов напряжения.

Разрешая уравнения (14) относительно напряжений, находим

$$\sigma_x - \sigma = \frac{2\tau_T}{\gamma_i} \left( \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \dots; \tau_{xz} = \frac{\tau_T}{\gamma_i} \gamma_{xz}. \quad (18)$$

Заметим, что  $\frac{\tau_T}{\gamma_i} = \frac{\sigma_T}{3\varepsilon_i}$ .

Напряжения, представленные этими формулами, — однозначные функции компонентов деформации и тождественно удовлетворяют условию текучести Мизеса.

В состоянии упрочнения выполняется условие упрочнения; оно принимается в простейшей форме (5). Множитель  $\psi$  является функцией интенсивности  $\gamma_i$  (или  $\tau_i$ ). Тогда уравнения Генки (14) определяют взаимно однозначные зависимости между напряжениями и деформациями.

Потенциал деформации имеет вид

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \int g(\gamma_i) \gamma_i d\gamma_i. \quad (19)$$

Во всех случаях справедливы формулы Лагранжа

$$\sigma_x = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_x}; \quad \dots; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{xz}} \quad (20)$$

и условие разгрузки: если  $d\tau_i < 0$ , то происходит упругая деформация по закону Гука. Уравнения теории упруго-пластических деформаций — нелинейные, но благодаря относительной простоте (по сравнению с уравнениями теории течения) они нашли широкое применение, несмотря на некоторые принципиальные недостатки.

*Уравнения теории упруго-пластических деформаций являются уравнениями нелинейно упругого тела.*

Использование этих уравнений для описания пластических деформаций при сложных нагружениях может привести к неудовлетворительным результатам. Уравнения теории упруго-пластической деформации в полной мере описывают пластическую деформацию при простом нагружении и пригодны для решения практических задач при воздействии достаточно простых нагрузок.

Более общие законы пластического течения см. в работах [12, 16, 24, 25].

### НЕКОТОРЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

**Полый шар под действием внутреннего давления.** Вследствие симметрии сдвиги  $\gamma_{r\varphi}$ ,  $\gamma_{\varphi\theta}$ ,  $\gamma_{r\theta}$  и касательные напряжения  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\tau_{\varphi\theta}$ ,  $\tau_{r\theta}$  равны нулю, а  $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ ,  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ ; имеет место простое нагружение. Для давлений

$$\tilde{p} < \frac{2}{3} \left( \frac{a}{b} \right)^3 \sigma_T \equiv \tilde{p}_0; \quad \tilde{p} = p \frac{a^3}{b^3 - a^3},$$

где  $a$ ,  $b$  — радиусы шара (рис. 6);  $p$  — давление; шар деформируется упруго, и напряжения будут

$$\sigma_r = \tilde{p} \left( 1 - \frac{b^3}{r^3} \right); \quad \sigma_\varphi = \tilde{p} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^3}{r^3} \right). \quad (21)$$

При  $\tilde{p} > \tilde{p}_0$  возникает пластическая зона  $a \leq r \leq c$ .

При идеальной пластичности условие текучести имеет вид

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_T$$

и напряжения в пластической зоне

$$\tau_r = 2\sigma_T \ln \frac{r}{a} - p; \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + \sigma_T. \quad (22)$$

Радиус пластической зоны  $c$  определяют из уравнения

$$\ln \frac{c}{a} - \frac{1}{3} \left( \frac{c}{b} \right)^3 = \frac{p}{2\sigma_T} - \frac{1}{3}. \quad (23)$$

Напряжения в упругой зоне  $c \leq r \leq b$  можно получить из формул (21), заменяя  $a$  на  $c$ , а  $p$  на  $q = -2\sigma_T \ln \frac{c}{a} + p$ .

Остаточные напряжения в шаре после снятия нагрузки определяются разностями

$$\sigma_r^0 = \sigma_r^{ep} - \sigma_r^e; \quad \sigma_\phi^0 = \sigma_\phi^{ep} - \sigma_\phi^e, \quad (24)$$

где  $\sigma_r^{ep}, \sigma_\phi^{ep}$  — напряжения в упруго-пластическом шаре перед сбросом нагрузки;  $\sigma_r^e, \sigma_\phi^e$  — напряжения в упругом шаре согласно формулам (21).

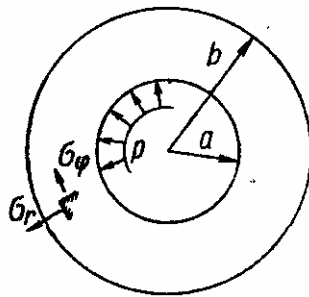


Рис. 6. Шар под действием внутреннего давления

Графики напряжений  $\sigma_\phi^e, \sigma_\phi^{ep}$  показаны на рис. 7. Предельная нагрузка достигается при  $c \rightarrow b$

$$p_* = 2\sigma_T \ln \frac{b}{a}. \quad (25)$$

По достижении предельной нагрузки внутреннее давление не может превысить  $p_*$  (при отсутствии упрочнения).

Случай упрочняющегося материала в данной задаче также рассматривается достаточно просто. При степенной зависимости  $\tau_i = \bar{B} \gamma_i^\mu$ , где  $\bar{B}, \mu \leq 1$  — постоянные, компоненты на-

пряжения будут такими же, как при установившейся ползучести.

**Цилиндрическая труба под действием внутреннего давления.** Рассматриваем длинную трубу (диаметры  $2a, 2b$ ) с доньями; осевое усилие равно  $p\pi a^2$ . Упругое состояние описывается формулами Ламе

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\tilde{p} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\phi &= \tilde{p} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \tilde{p} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} = \sigma_z. \quad (26)$$

Распределение упругих напряжений показано на рис. 7, а.

Пластическое состояние впервые появляется на внутренней поверхности трубы при давлении

$$p_0 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (27)$$

Точное решение пластической задачи (с учетом сжимаемости) требует значительных вычислений [7, 25]. Здесь приведено приближен-

ное решение, основанное на допущении, что в пластической зоне (как для упругого решения и для тонкстенной трубы)  $\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi)$ . Пластическая деформация развивается в кольце  $a \leq r \leq c$ .

В упругой зоне  $c \leq r \leq b$  распределение напряжений описывается формулами Ламе (26), если вместо  $\tilde{p}$  внести  $\tilde{q} = -\frac{qc^2}{b^2 - c^2}$ , вместо  $a$  — радиус  $c$ ;  $q$  — радиальное напряжение на линии раздела  $r = c$ .

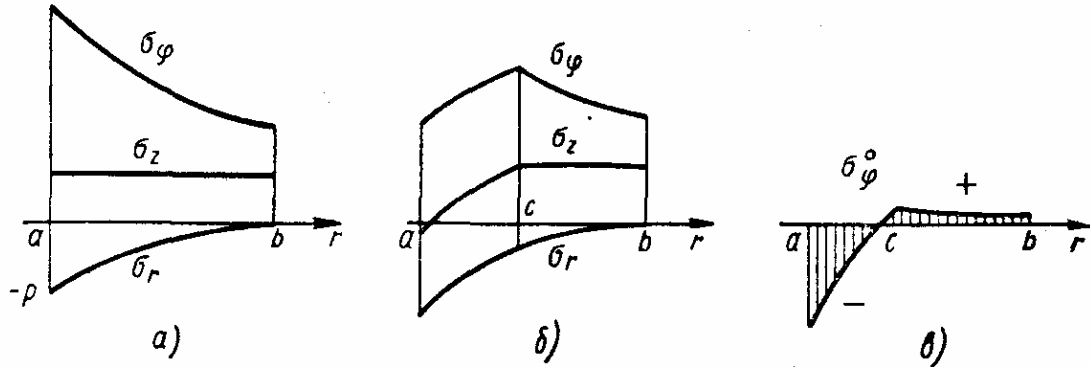


Рис. 7. Распределение напряжений в трубе: а — упругой; б — упруго-пластической; в — остаточные напряжения

При идеальной пластичности условие текучести Мизеса имеет вид

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_T,$$

а напряжения в пластической зоне

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r}{a}; \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T. \quad (28)$$

Радиус пластической зоны  $r = c$  определяют из уравнения

$$\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p}{\sigma_T}.$$

После нахождения  $c$  величину  $q$  вычисляют по формуле

$$q = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{c}{a}.$$

Радиальное смещение в упругой зоне определяют по закону Гука

$$u = r \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \nu (\sigma_r + \sigma_\varphi)],$$

а в пластической — по уравнениям теории упруго-пластических деформаций

$$u = r \left( \sigma k + \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \psi \right); \quad \psi = -k + \frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{2 - \nu}{E}.$$



Для несжимаемого материала ( $k = 0$ ) полученное решение будет точным, а осевое удлинение  $\varepsilon_z = 0$ . Распределение напряжений в упруго-пластической трубе показано на рис. 7, б.

Остаточные напряжения в трубе после сброса давления определяются разностями (24):

$$\sigma_r^0 = \sigma_r^{ep} - \sigma_r^e; \quad \sigma_\varphi^0 = \sigma_\varphi^{ep} - \sigma_\varphi^e, \quad (29)$$

где  $\sigma_r^{ep}, \sigma_\varphi^{ep}$  — напряжения в упруго-пластической трубе перед сбросом давления;  $\sigma_r^e, \sigma_\varphi^e$  — напряжения в упругой трубе по формулам Ламе. Распределение остаточных напряжений показано на рис. 7, в. Если теперь вновь поднять давление, не превышающее первоначального, то

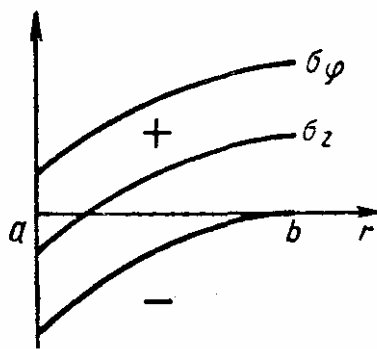


Рис. 8. Распределение напряжений в трубе в предельном состоянии

при  $\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0 < \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T$  новых пластических деформаций в трубе не будет. Произошло *упрочнение (автофретаж)* трубы. Расчеты автофретажа с учетом упрочнения металла см. в работах [7, 17].

Предельная нагрузка для трубы

$$p_* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{b}{a}. \quad (30)$$

Распределение напряжений в предельном состоянии показано на рис. 8.

Упрочняющаяся труба. Для определения напряженного состояния можно пренебрегать сжимаемостью, тогда при условии упрочнения (5) решение имеет вид

$$\sigma_r = 2 \int_a^r \tau_i \frac{dr}{r} - p; \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + 2\tau_i;$$

здесь  $\tau_i = g(\gamma_i) \gamma_i$ , причем  $\gamma_i = 2 \frac{C}{r^2}$ , где  $C$  — произвольная постоянная, определяемая по условию непрерывности напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  при  $r = c$ . Если вся труба находится в состоянии упрочнения, то  $\sigma_r = 0$  при  $r = b$ .

При степенной зависимости  $\tau_i = \bar{B} \gamma_i^\mu$  напряжения будут такими же, как в состоянии установившейся ползучести [см. формулу (29) гл. 4].

График напряжения  $\sigma_\varphi$  в зависимости от показателя степени  $\mu$  приведен на рис. 11 гл. 4.

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Экстремальные принципы для жестко-пластического тела (см. рис. 5, б) характеризуют свойства полей скорости  $v_x, v_y, v_z$  и напряжений  $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}$ . Так как в схеме жестко-пластического тела неизбежны разрывы напряжений и скоростей, формулировки экстремальных прин-

ципов охватывают разрывные поля. Тело занимает объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . На части поверхности тела  $S_F$  заданы усилия  $F_n$ , на части  $S_v$  — скорость  $\mathbf{v}$  (рис. 9). Объемные силы  $\mathbf{F}$  для простоты ниже опущены.

Минимальные свойства действительных скоростей. Рассмотрим кинематически возможные скорости  $v'_x, v'_y, v'_z$ , удовлетворяющие условиям на  $S_v$  и имеющие, вообще говоря, разрывы в касательной составляющей скорости на некоторых поверхностях разрыва  $S_j$ . Тогда *полное рассеяние достигает абсолютного минимума для действительного поля скорости*

$$\int_{S_v} (X_n v'_x + Y_n v'_y + Z_n v'_z) dS \leq \tau_r \int_V \eta'_i dV - \int_{S_F} (X_n v'_x + Y_n v'_y + Z_n v'_z) dS + \tau_r \sum_j \int_{S_j} |[v'_t]| dS; \quad (31)$$

здесь  $\eta'_i$  — интенсивность скоростей деформаций сдвига для кинематически возможной скорости  $\mathbf{v}'$ ;  $[v'_t]$  — скачок в касательной составляющей скорости  $\mathbf{v}'$ . Знак равенства будет только в том случае, когда  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$  (при  $S_v \neq 0$ ).

Правую часть неравенства (31) вычисляют при задании любого кинематически возможного поля  $\mathbf{v}'$ , так как внешняя нагрузка на  $S_F$  задана.

Максимальные свойства действительного напряженного состояния. Рассмотрим наряду с действительным напряженным состоянием  $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}$  статически возможные напряженные состояния текучести  $\sigma''_x, \dots, \tau''_{xz}$ , удовлетворяющие только дифференциальным уравнениям равновесия [(12) гл. 1], граничным условиям на части  $S_F$

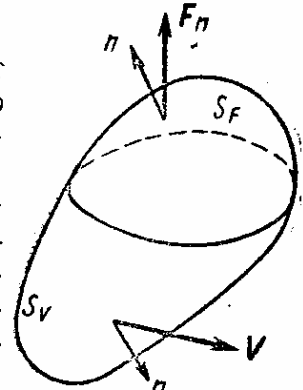


Рис. 9. Условия на поверхности тела

$$\left. \begin{aligned} \sigma''_x \cos \hat{n}x + \tau''_{xy} \cos \hat{n}y + \tau''_{xz} \cos \hat{n}z &= X_n; \\ \tau''_{xy} \cos \hat{n}x + \sigma''_y \cos \hat{n}y + \tau''_{yz} \cos \hat{n}z &= Y_n; \\ \tau''_{xz} \cos \hat{n}x + \tau''_{yz} \cos \hat{n}y + \sigma''_z \cos \hat{n}z &= Z_n \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

и не выходящие за пределы круга текучести Мизеса, т. е.

$$\tau''_i \leq \tau_r. \quad (33)$$

Через  $\tau''_i$  обозначена интенсивность касательных напряжений тензора  $\sigma''_x, \dots, \tau''_{xz}$ . Напряжения  $\sigma''_x, \dots, \tau''_{xz}$  могут иметь разрывы на некоторых поверхностях внутри тела. Тогда *мощность действительных поверхностных сил на заданных скоростях больше мощности, развязываемой*

поверхностными силами, соответствующими любой другой статически возможной системе напряжений, т. е.

$$\begin{aligned} \int_{S_v} (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z) dS &\geq \\ &\geq \int_{S_v} (X_n'' v_x + Y_n'' v_y + Z_n'' v_z) dS \end{aligned} \quad (34)$$

Знак равенства будет только в случае, когда напряжения  $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}$  и  $\sigma_x'', \dots, \tau_{xz}''$  отличаются на однородное гидростатическое давление. Неравенство (34) справедливо для непрерывных полей действительной скорости  $\mathbf{v}$ . При наличии разрывов  $[v_t]$  в касательной составляющей скорости  $\mathbf{v}$  на некоторых поверхностях  $S_i$  правую часть неравенства (34) необходимо дополнить слагаемым

$$\sum_i \int_{S_i} (\tau_t \pm \tau_t'') |[v_t]| dS;$$

здесь  $\tau_t''$  — касательная составляющая статически допустимого напряжения на поверхности  $S_i$  в направлении вектора относительной скорости; знак перед  $\tau_t''$  обратен знаку  $[v_t]$ .

Правую часть неравенства (34) вычисляют при задании любого статически возможного состояния текучести  $\sigma_x'', \dots, \tau_{xz}''$ , так как  $v_x, v_y, v_z$  на  $S_v$  заданы, а  $X_n'', Y_n'', Z_n''$  вычисляют по формулам Коши (32) через напряжения.

**Энергетический метод нахождения предельных нагрузок.** Для эффективного применения полученных неравенств необходимы некоторые ограничения. Примем:

- 1) на поверхности  $S_v$   $v_x = v_y = v_z = 0$ ;
- 2) на поверхности  $S_F$  нагрузки возрастают пропорционально одному параметру, т. е.  $X_n = mX_n^0, Y_n = mY_n^0, Z_n = mZ_n^0$ , где  $X_n^0, Y_n^0, Z_n^0$  — некоторое фиксированное распределение нагрузок на  $S_F$ .

Значение  $m = m_*$ , при котором достигается предельное состояние, называют коэффициентом предельной нагрузки.

Кинематически возможным коэффициентом называют величину

$$m_k = \tau_t \frac{\int_V \eta' dV + \sum_i \int_{S_i} |[v_t']| dS}{\int_{S_F} (X_n^0 v_x' + Y_n^0 v_y' + Z_n^0 v_z') dS}, \quad (35)$$

вычисляемую по выбранному кинематически возможному полю скорости  $v_x', v_y', v_z'$  во всем теле. Пусть, далее, во всем теле построено статически возможное напряженное состояние текучести  $\sigma_x'', \dots, \tau_{xz}''$ , удовлетворяющее следующим граничным условиям на  $S_F$ :

$$X_n'' = m_s X_n^0; \quad Y_n'' = m_s Y_n^0; \quad Z_n'' = m_s Z_n^0. \quad (36)$$

Число  $m_s$  называют *статически возможным коэффициентом*.

Из приведенных выше неравенств для жестко-пластического тела вытекает, что

$$m_s \leq m_* \leq m_k. \quad (37)$$

Подходящим выбором полей  $\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z$  и  $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}$  можно сблизить верхнюю и нижнюю оценки и получить значение предельной нагрузки с достаточной точностью.

**Пример.** Найти верхнюю и нижнюю границы предельной нагрузки для растягиваемой полосы с круговыми вырезами (рис. 10, а) в случае плоской деформации. *Верхняя граница:* от круговых границ распространяются осесим-

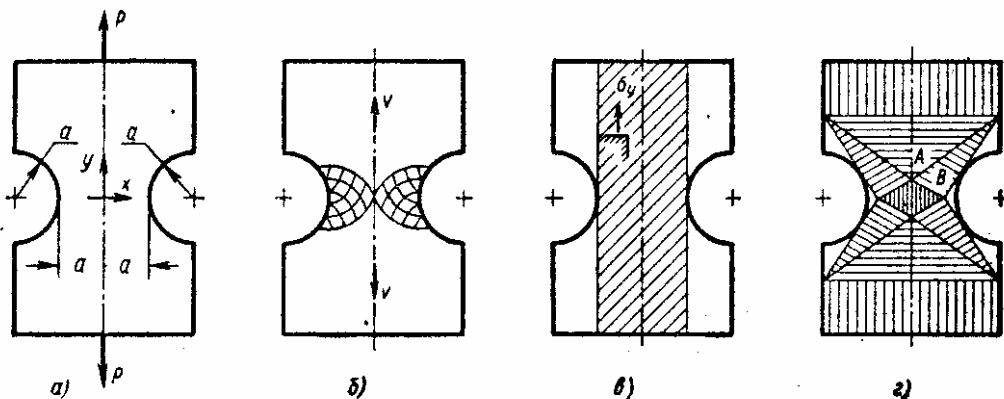


Рис. 10. Растягиваемая полоса с круговыми вырезами: а — размеры полосы; б — кинематически возможное поле; в — простейший вариант статически возможного поля; г — более сложный вариант статически возможного поля.

метричные поля скольжения (рис. 10, б). По сечению  $y = 0$  напряжение  $\sigma_\phi = 2\tau_T \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right)$ . Части полосы выше и ниже пластических зон остаются жесткими и движутся с некоторыми скоростями  $v$ ; задание  $v$  полностью определяет скорость в пластических зонах. Следовательно, во всей полосе построено кинематически возможное поле. Соответствующая нагрузка

$$P_k = 2 \int_a^{2a} \sigma_\phi dr = 5,56 a \tau_T$$

будет верхней границей. *Нижняя граница:* возьмем простейшее поле напряжений, показанное на рис. 10, в; в заштрихованной области — одноосное растяжение  $\sigma_y = 2\tau_T$ ; в незаштрихованных частях напряжения равны нулю. Отсюда нижняя граница  $P_s = 4a\tau_T$ . Для улучшения оценки возьмем статически возможное поле, изображенное на рис. 10, г. В каждой из заштрихованных зон имеет место равномерное напряженное состояние, не нарушающее условия текучести; в верхнем и нижнем прямоугольниках — одноосное растяжение. В незаштрихованных зонах, примыкающих к вырезам, напряжения равны нулю. Точки А, В произвольны; меняя их, находим наибольшее значение статически возможной нагрузки  $P_s = 5,04 a \tau_T$ . Следовательно,  $5,04 \leq \frac{P_*}{a\tau_T} \leq 5,56$ .

**Теоремы о приспособляемости упруго-пластических тел.** С рассмотренными выше экстремальными теоремами связаны теоремы о приспособляемости упруго-пластических тел. Практически важным является случай, когда нагрузки претерпевают изменения (например, циклические), а тело испытывает упруго-пластические деформации.

Хотя при этом нагрузки не достигают предельных значений, тем не менее, если их интенсивность достаточно велика, то при каждом цикле будет происходить пластическая деформация. Следует различать два случая: 1) пластические деформации с каждым циклом нарастают; 2) чередуются пластические деформации различного знака.

В первом случае происходит недопустимое накопление пластических деформаций (*прогрессирующее разрушение*). Во втором случае разрушение наступает вследствие явления усталости металла при пластических деформациях (*переменная пластичность*).

Для того чтобы указанные явления не происходили, необходимо, чтобы пластическая деформация имела место при первичных нагружениях, а происходили бы лишь упругие деформации. Это возможно, если в результате первичного нагружения образовались остаточные напряжения, частично компенсирующие напряжения от последующих воздействий, так что условие текучести больше не достигается. Говорят, что при этом тело *приспособилось* к данным воздействиям. Естественно, что нагрузки при этом должны удовлетворять некоторым ограничениям. Последние определяются теоремами о приспособляемости.

Пусть на упруго-пластическое тело действует некоторая система нагрузок, зависящих от времени. При нагружении в теле возникнут напряжения  $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}$ , а при снятии нагрузки — остаточные напряжения  $\sigma_x^0, \dots, \tau_{xz}^0$ . Обозначим через  $\sigma_x^e, \dots, \tau_{xz}^e$  напряжения при данных нагрузках в *идеально-упругом теле*. Поскольку нагрузки изменяются, компоненты напряжения являются функциями времени.

**Т е о р е м а М е л а н а** (или первая теорема о приспособляемости). Пусть удалось найти частное распределение остаточных напряжений  $\bar{\sigma}_x, \dots, \bar{\tau}_{xz}$ , не зависящее от времени. Тогда при всевозможных нагрузках, таких, что напряжения

$$\bar{\sigma}_x + \sigma_x^e, \dots, \bar{\tau}_{xz} + \tau_{xz}^e$$

не превосходят условия текучести, поведение тела будет вполне упругим, т. е. наступит состояние приспособляемости.

Поле напряжений  $\bar{\sigma}_x, \dots, \bar{\tau}_{xz}$  следует выбирать таким, чтобы область допустимых изменений нагрузок была наибольшей.

**Т е о р е м а К о й т е р а** — вторая теорема о приспособляемости, связана с рассмотрением кинематически допустимых скоростей пластической деформации и их цикла [12].

**Минимальные принципы в теории упруго-пластических деформаций** аналогичны принципу минимума потенциальной энергии и принципу Кастильяно в теории упругости.

**П р и н ц и п м и н и м у м а п о л н о й э н е р г и и.** Действительные перемещения сообщают полной энергии тела минимальное значение

$$\int_V \Pi dV - A = \min, \quad (38)$$

где  $A$  — работа внешних сил,

$$A = \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS + \int_V (X u + Y v + Z w) dV.$$

Потенциал работы деформации  $\Pi$  для упругого состояния определяется формулой (19) при  $g(\gamma_i) = \text{const} = G$ , для идеально-пластического — формулой (17), для упрочняющейся среды — формулой (19).

Если в теле имеются области различного состояния (упругого и пластического), минимальный принцип сохраняется [8].

**П р и н ц и п м и н и м у м а д о п о л н и т е л ь н о й р а б о т ы.** Действительное напряженное состояние отличается от всех статически возможных состояний тем, что оно сообщает минимум дополнительной работы тела

$$\int_V R dV = \min. \quad (39)$$

Дополнительная работа численно равна площади, заштрихованной на рис. 11 горизонтальными линиями. Функция  $\bar{g}(\tau_i) = \frac{\gamma_i}{\tau_i} = \frac{1}{g(\gamma_i)}$ . Потенциал деформации характеризуется площадью, заштрихованной вертикальными линиями. Очевидно, что  $R = \tau_i \gamma_i - \Pi$ .

Для упругой среды, подчиняющейся закону Гука,  $R = W$ , принцип (39) переходит в принцип Кастильяно.

Для идеально пластического состояния

$$R = \frac{3}{2} k \sigma^2.$$

Для состояния упрочнения

$$R = \frac{3}{2} k \sigma^2 + \int \bar{g}(\tau_i) \tau_i d\tau_i.$$

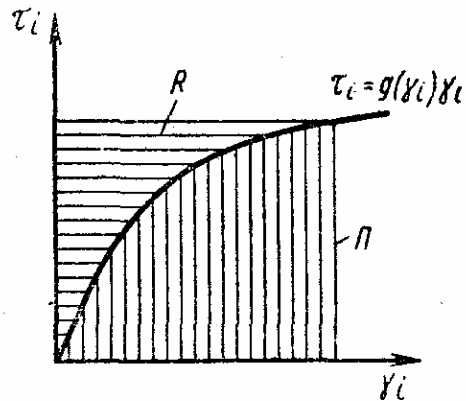


Рис. 11. Дополнительная работа  $R$  и работа деформации  $\Pi$

**Обобщение теоремы Кастильяно.** Если приложены обобщенные сосредоточенные силы  $P_i$ , то частная производная дополнительной работы по величине любой силы  $P_i$  равна обобщенному перемещению  $\Delta_i$  точки приложения силы:

$$\frac{\partial}{\partial P_i} \left[ \int_V R dV \right] = \Delta_i. \quad (40)$$

**Модифицированный метод Ритца.** Вариационные уравнения (38) (39) могут быть использованы для приближенного решения. Применение метода Ритца в обычной форме связано с большими трудностями, так как коэффициенты теперь определяют из нелинейной системы уравнений. В некоторых случаях легко найти лишь первое грубое приближение с одной произвольной постоянной.

Надежные результаты можно получить с помощью модифицированного метода Ритца [10]. Рассмотрим его применение к разысканию, например, минимума дополнительной работы (39). Решение строим последовательными приближениями в форме

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij0} + \sum_{s=1} C_{ks} \sigma_{ijs}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (41)$$



имеем задачу теории упругости с дополнительными нагрузками, отличными от нуля и вычисляемыми по  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  и т. д.

Заметим, что наличие дополнительных нагрузок по всей поверхности тела усложняет решение упругой задачи, превращая ее в объемную.

**Метод дополнительных деформаций.** Запишем уравнения Генки в форме

$$\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{2G}(\sigma_x - \sigma) + \left(\psi - \frac{1}{2G}\right)(\sigma_x - \sigma);$$

.....

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} + \left(2\psi - \frac{1}{G}\right)\tau_{xz}$$

и будем решать задачу в напряжениях. Дифференциальные уравнения равновесия [(12) гл. 1] и граничные условия (42) останутся без изменения. Уравнения же сплошности вследствие наличия подчеркнутых членов будут содержать дополнительные слагаемые, которые можно интерпретировать как дополнительные деформации и определять последовательными приближениями (см. работу [1]).

**Метод переменных параметров упругости.** Здесь систему уравнений представляют в форме уравнений теории упругости с переменными «параметрами упругости» и применяют метод последовательного их вычисления.

Метод переменных параметров упругости удобен для расчета дисков, круглых пластин, оболочек вращения. В каждом приближении решается упругая задача с переменным модулем упругости, равным текущему модулю, определяемому по деформациям (см. [1]).

**«Метод шагов» в теории пластического течения.** Задача интегрирования уравнений теории пластического течения значительно труднее, так как уравнения пластического течения содержат не только компоненты напряжения, но и их приращения («скорости»). В важных частных задачах (трубы, диски) применяют численное интегрирование, прослеживая «шаг за шагом» развитие пластических деформаций. На каждом этапе внешняя нагрузка получает небольшое приращение, затем вычисляют соответствующие приращения напряжений и деформаций в теле [25]. На каждом этапе необходимо решить некоторую задачу для упругого анизотропного тела с переменными параметрами упругости [1].

## ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

**Общие замечания.** При плоской деформации перемещения параллельны плоскости  $x, y$  и не зависят от  $z$ :

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0.$$

Плоская деформация возникает в длинных призматических телах при нагрузках, нормальных к боковой поверхности и не зависящих от  $z$ .

Хорошо разработана плоская задача для жестко-пластического тела в случае идеальной текучести. Эта схема приводит к удовлетворительной верхней границе для предельной нагрузки и дает представление о пластическом течении тела при исчерпании несущей способности.



**Основные уравнения.** В рассматриваемом случае  $\sigma_z = \sigma$ , откуда

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (43)$$

Максимальное касательное напряжение и интенсивность касательных напряжений совпадают, вследствие чего условие текучести имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (44)$$

где  $k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$  — по условию Мизеса и  $k = \frac{\sigma_T}{2}$  — по условию Треска—Сен-Венана.

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (45)$$

Скорости  $v_x, v_y$  удовлетворяют условию несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (46)$$

и связаны с напряжениями формулами Сен-Венана—Мизеса (13), которые можно записать в форме

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}. \quad (47)$$

Обычно развивается следующая схема решения этой системы пяти уравнений для пяти неизвестных функций  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, v_x, v_y$ . Вначале строится решение системы трех уравнений (44), (45) для компонентов напряжений, а затем исследуется поле скоростей.

**Интегрирование уравнений для напряжений.** Система уравнений (44), (45) — гиперболического типа. Семейства характеристик ортогональны, совпадают с *линиями скольжения* (линиями, касающимися в каждой своей точке площадки максимального касательного напряжения), и определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \theta \\ \frac{\sigma}{2k} - \theta &= \operatorname{const} = \xi \end{aligned} \right\} (\alpha); \quad \left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{ctg} \theta \\ \frac{\sigma}{2k} + \theta &= \operatorname{const} = \eta \end{aligned} \right\} (\beta). \quad (48)$$

где  $\theta$  — угол наклона касательной к линии скольжения  $\alpha$ -семейства (рис. 12). Характеристический параметр  $\xi$  постоянен вдоль  $\alpha$ -линии,  $\eta$  — вдоль  $\beta$ -линии.

Сетка линий скольжения обладает рядом простых свойств, существенно облегчающих решение конкретных задач.

Если в некоторой области одно семейство линий скольжения (например, семейство  $\alpha$ ) образовано прямыми линиями, то вдоль каждой прямой линии напряжения постоянны, а параметр  $\eta$  имеет во всей области постоянное значение (*простое напряженное состояние*).

Если в некоторой области оба семейства линий скольжения прямолинейны, то в этой области *напряжения распределены равномерно*, а параметры  $\xi$  и  $\eta$  постоянны. Приведенные простые случаи полей скольжения отвечают *интегралам плоской задачи*.

Построение решений дифференциальных уравнений для напряжений сводится к решению ряда граничных задач (задача Коши, начальная характеристическая задача, смешанная задача и т. д.). Из решения задачи Коши вытекает, что поле напряжений у границы, свободной от

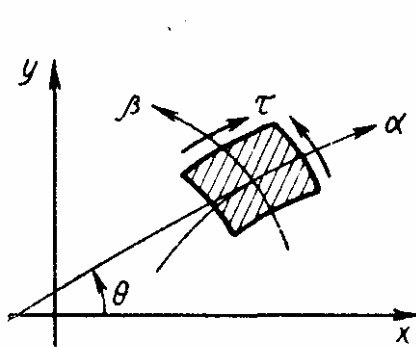


Рис. 12. Линии скольжения

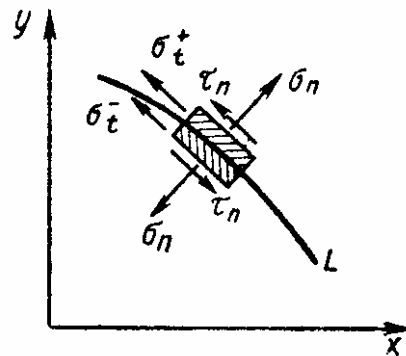


Рис. 13. Линия разрыва напряжений

усилий, определяется только формой границы. В частности, у прямолинейной свободной границы всегда будет поле равномерного одноосного растяжения или сжатия. У круговой свободной границы поле скольжения образовано логарифмическими спиралями, а напряжения даны формулами (28) при  $p = 0$ .

**Численные и графические методы решения.** Решение граничных задач достигается проще всего приближенными численными или графическими методами [8, 18, 19, 20, 24, 25].

**Линии разрыва напряжений.** Важное значение имеют решения с разрывами поля напряжений (простейший пример — пластический изгиб балки: при переходе через нейтральную плоскость напряжение меняется скачком от  $\sigma_T$  к  $-\sigma_T$ ). Вдоль линии разрыва  $L$  возможен разрыв только для нормального напряжения  $\sigma_t$  (рис. 13). По условию пластичности скачок в  $\sigma_t$  равен

$$[\sigma_t] = \sigma_t^+ - \sigma_t^- = 4 \sqrt{k^2 - \tau_n^2}, \quad (49)$$

где  $\tau_n$  — касательное напряжение.

**Определение поля скоростей.** Система оставшихся двух уравнений (46), (47) для скоростей  $v_x$ ,  $v_y$  также является гиперболической, причем ее характеристики совпадают с линиями скольжения. Вдоль  $\alpha$ - и  $\beta$ -линий скольжения выполняются соотношения Гейрингера

$$du - v d\theta = 0; \quad dv + u d\theta = 0, \quad (50)$$

где  $u$ ,  $v$  — составляющие вектора скорости соответственно в направлениях  $\alpha$ - и  $\beta$ -линий скольжения.

Линия раздела пластической и жесткой областей является линией скольжения или огибающей линий скольжения.

Поле скоростей может быть разрывным вдоль некоторых линий  $M$ , проходящих по линии скольжения. Разрыв в составляющей скорости, нормальной к линии  $M$ , невозможен (трещина). Разрывна составляющая скорости, касательная к линии  $M$ .

Поле скоростей в пластических зонах должно быть согласовано со скоростями движения жестких частей тела. Таким образом, поле скоростей строится во всем теле, а поле напряжений — лишь в пластических зонах. Следовательно, определяемая при этом предельная нагрузка является *верхней границей* (кинематически возможной нагрузкой, см. стр. 70).

Растяжение полосы с надрезами с круглым основанием (рис. 14). Отношение предельной нагрузки  $P$  к предельной нагрузке  $P^0 = 4kh$  для гладкой полосы шириной  $2h$  называют коэффициентом усиления

$$q = \frac{P^*}{P^0}.$$

Наличие материала выше и ниже выреза сдерживает пластическое течение и повышает предельную нагрузку.

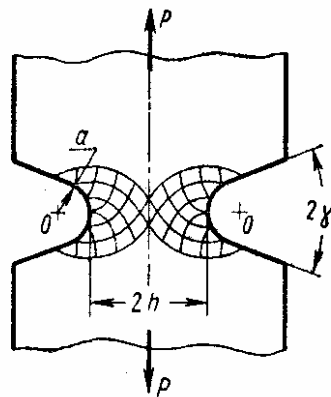


Рис. 14. Растяжение полосы с надрезами с круглым основанием

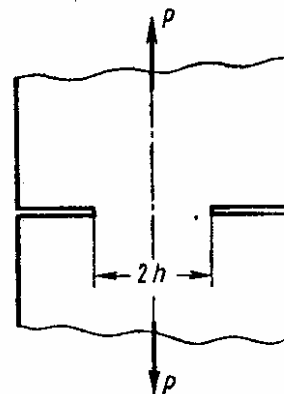


Рис. 15. Растяжение полосы с разрезами

В данной задаче при  $\frac{h}{a} \leq e^\gamma - 1$

$$q = \left(1 + \frac{a}{h}\right) \ln \left(1 + \frac{h}{a}\right);$$

при  $\frac{h}{a} \geq e^\gamma - 1$

$$q = (1 + \gamma) - \frac{a}{h} (e^\gamma - 1 - \gamma).$$

При  $a = 0$  имеем полосу с угловыми надрезами. Наибольший коэффициент усиления имеет место при  $a = 0$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , т. е. для полосы с разрезами (рис. 15), в этом случае  $q = 1 + \frac{\pi}{2}$ .

**Растяжение полосы с отверстием.** Если отверстие достаточно велико, то картина полей скольжения соответствует показанной на рис. 16. При этом  $q = 1$ .

Малое отверстие практически не сказывается на величине предельной нагрузки. Способы расчета полей вблизи отверстий другой формы см. работу [20].

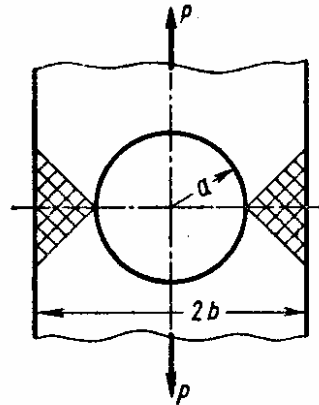


Рис. 16. Растяжение полосы с круглым отверстием

**Изгиб полосы с надрезами.** Одно-сторонний глубокий над.

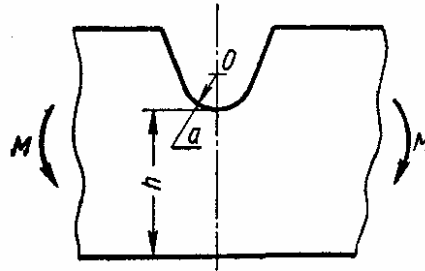


Рис. 17. Изгиб полосы с одно-сторонним надрезом

рез с круговым основанием (рис. 17). При  $\frac{h}{h+a} < 0,64$  реализуется поле скольжения с разрывом напряжения  $\sigma_x$ ; при  $\frac{h}{h+a} > 0,64$  поле имеет изолированные линии скольжения. Коэффициент усиления  $q = \frac{M_*}{M^0}$  ( $M^0 =$

$\frac{kh^2}{2}$  — предельный изгибающий момент для гладкой полосы высотой  $h$ ) определяют по графику, приведенному на рис. 18.

Двусторонние симметричные надрезы с круговым основанием (рис. 19) и глубокие одно-сторонние и двусторонние угловые надрезы (рис. 20—21). Коэффициенты усиления берут также на графиках рис. 18.

**Изгиб полосы с круговым отверстием** (см. рис. 16, но с изгибающим моментом  $M$ ). Коэффициент усиления  $q = 1$ , причем

$$M^0 = 2k(h^2 - a^2).$$

**Изгиб короткой консоли поперечной силой** (рис. 22). Для коротких балок элементарное решение

$$P_*^0 = 2k \frac{h^2}{l}$$

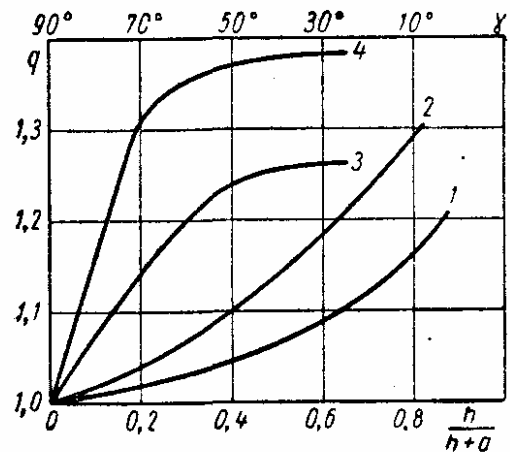


Рис. 18. Кривые коэффициентов усиления: 1 — одно-сторонний надрез с круговым основанием; 2 — двусторонние надрезы с круговым основанием; 3 — одно-сторонний угловой надрез; 4 — двусторонние угловые надрезы

приводит к заниженной предельной нагрузке. Решение, приведенное в работе [3], учитывающее влияние касательных напряжений, дает результаты, показанные сплошной линией на рис. 23.

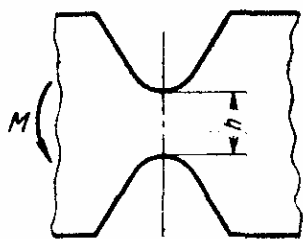


Рис. 19. Изгиб полосы с двусторонними надрезами

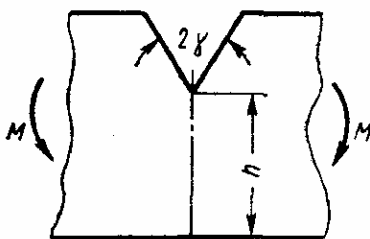


Рис. 20. Изгиб полосы с односторонним угловым надрезом

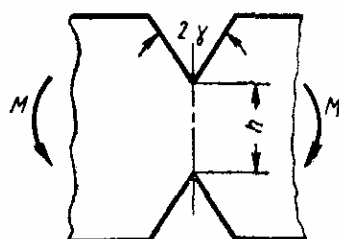


Рис. 21. Изгиб полосы с двусторонними угловыми надрезами

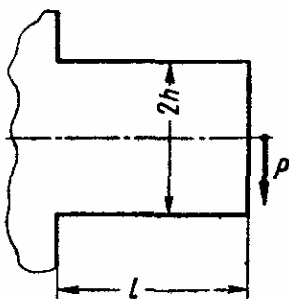


Рис. 22. Изгиб короткой консоли

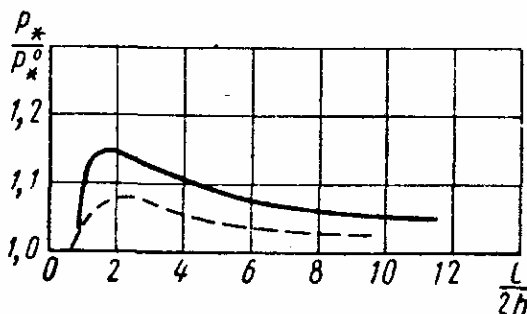


Рис. 23. Предельная нагрузка при изгибе консоли поперечной силой

Клин под действием равномерного одностороннего давления  $p$  (рис. 24). Предельное давление:

при  $2\gamma \geq \frac{\pi}{2}$

$$p_* = 2k \left( 1 + 2\gamma - \frac{\pi}{2} \right);$$

при  $2\gamma \leq \frac{\pi}{2}$

$$p_* = 2k (1 - \cos 2\gamma).$$

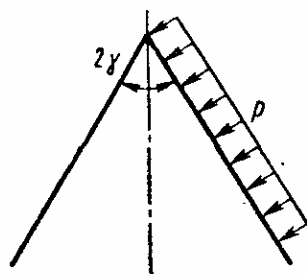


Рис. 24. Клин под действием равномерного одностороннего давления

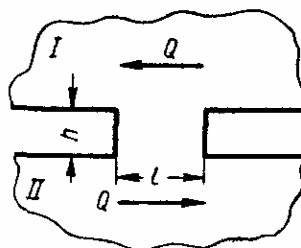


Рис. 25. Срез прямоугольного перешейка

Срез прямоугольного перешейка (рис. 25). Массивные части I и II соединены шейкой высотой  $h$  и длиной  $l$  и сдвигаются усилием  $Q$ . По

элементарному решению срезающее усилие  $Q_*^0 = kl$ . По решению Грина [4] предельная нагрузка

$$Q_* = Q_*^0 \left( 1 - 0,249 \frac{h}{l} \right).$$

Предельные нагрузки при перешейках иной формы приведены в той же работе Грина.

**Слой между жесткими плитами.** Сжатие тонкого слоя между шероховатыми плитами (рис. 26, при  $Q = 0$ ). Предполагается, что  $\frac{h}{l} \ll 1$ , а на поверхностях контакта касательные напряжения достигают максимального значения  $k$ ; последнее условие допустимо принимать при развитых пластических деформациях. Для тонкого слоя имеет место приближенное решение Прандтля

$$\frac{\sigma_x}{k} = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{h} + 2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}};$$

$$\frac{\sigma_y}{k} = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{h}; \quad \frac{\tau_{xy}}{k} = \frac{y}{h}.$$

Вдали от торца напряженное состояние приближается к состоянию большого всестороннего давления при относительно малых касательных напряжениях. Предельная нагрузка по элементарной одноосной схеме  $2P^0 = -4kl$ ; предельная нагрузка по решению Прандтля

$$2P_* = 2P_*^0 \left( \frac{l}{4h} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (51)$$

Влияние сдвигающего усилия (см. рис. 26). Добавление сдвигающей силы  $2Q$  значительно снижает несущую способность слоя [9].

Предельная кривая определяется уравнением

$$(1 - q) \left[ 2p - (1 - q) \frac{l}{h} \right] = \frac{\pi}{2} + 2(1 - 2q) \sqrt{q(1 - q)} - \arcsin(2q - 1), \quad (52)$$

где положено

$$p = \frac{P}{kl}; \quad q = \frac{Q}{kl} \leq 1.$$

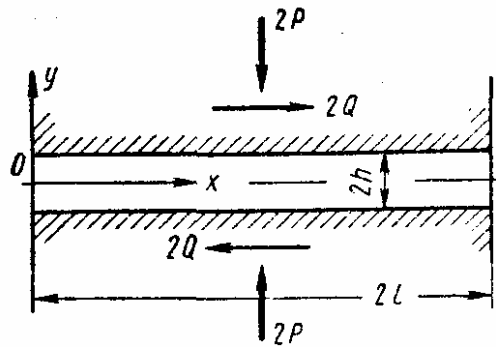


Рис. 26. Сжатие и сдвиг тонкого слоя между плитами

При  $q = 0$  отсюда получаем выражение (51). На рис. 27 показаны предельные кривые для значений  $\frac{l}{h} = 10$  и  $\frac{l}{h} = 20$ .

**Изгиб и сдвиг слоя.** Длина прослойки  $4l$ , толщина  $2h$ . Прослойка изгибается моментом  $M = 4Pl$  и срезается усилием  $4Q$ . Левая половина прослойки  $(0, 2l)$  испытывает сжатие и сдвиг, правая  $(2l, 4l)$  — растяжение и сдвиг; при этом

$$2m = p(q); \quad \left( m = \frac{M}{M_0}, \quad M_0 = 8kl^2 \right).$$

Под  $p(q)$  понимают зависимость  $p = p(q)$ , определяемую уравнением (52). При  $Q = 0$   $m = \frac{l}{4h} + \frac{\pi}{4}$ .

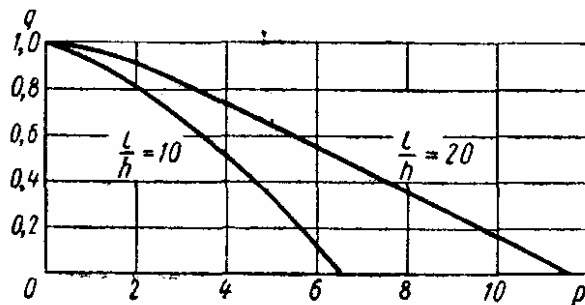


Рис. 27. Предельные кривые для сжатия и сдвига тонкого слоя

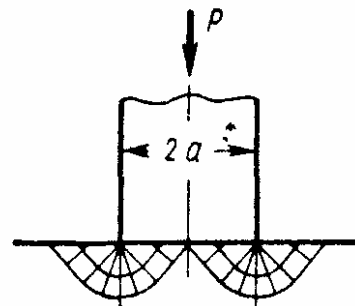


Рис. 28. Вдавливание плоского штампа

**Общий случай сжатия слоя.** Если слой не является тонким, решение строится численными или графическими методами [20, 25]. Предельная нагрузка при  $3,64 < \frac{l}{h} < 6,72$  близко следует уравнению [25]

$$2P_* = 2P_*^0 \left( \frac{l}{4h} + \frac{3}{4} \right).$$

Приведенные выше решения относятся к конечной стадии пластического течения тонкого слоя, когда касательные напряжения на линии контакта достигают максимального значения  $k$ . Развитие напряженного состояния в тонкой прослойке изложено в работе [11].

**Вдавливание плоского штампа без трения** (рис. 28). Пластическое течение наступает при нагрузке

$$P_* = 2ak(2 + \pi).$$

Штамп выпуклой формы при наличии трения и случай криволинейного очертания границы пластической среды рассмотрены В. В. Соколовским [20].

**Вдавливание жесткого клина (без трения).** Среда выдавливается по обе стороны (рис. 29). Граничная линия  $AC = l$  аппроксимируется

прямой, вдоль  $AB$  контактное давление  $p$  постоянно. Усилие вдавливания (на единицу длины клина в направлении оси  $z$ )

$$P = 2pl \sin \gamma; \quad l = \frac{h}{\cos \gamma - \sin (\gamma - \varphi)}.$$

График зависимости  $\frac{p}{2k}$  от  $\gamma$  показан на рис. 30.

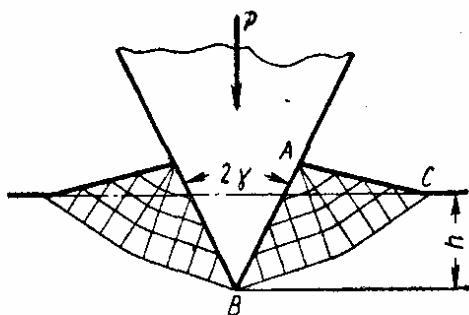


Рис. 29. Вдавливание жесткого клина

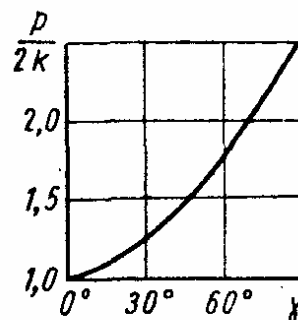


Рис. 30. Зависимость контактного давления от угла клина

Величина  $\varphi = \frac{p}{2k} - 1$  определяется по тому же графику или уравнению

$$2\gamma = \varphi + \arccos \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Нагрузку  $P$  (или внедрение  $h$ ) следует считать заданной.

**Смятие клина жесткой плоскостью** (без трения, рис. 31). Прямые  $AC = l$  характеризуют конфигурацию клина после деформации. Давление на контактной плоскости постоянно [25]

$$p = 2k(1 + \varphi); \quad P = 2pl.$$

Ширина контактной плоскости равна  $2l$ , причем

$$\frac{l}{h} = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(1 + \sin \varphi)^2}{\cos \varphi (2 + \sin \varphi)}; \quad \gamma \geq 26,6^\circ.$$

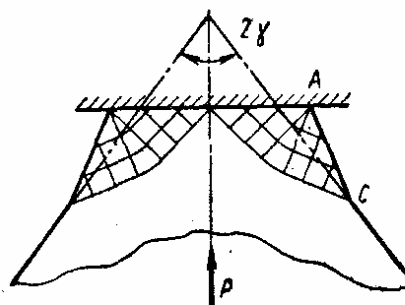


Рис. 31. Смятие клина жесткой плоскостью

Нагрузку  $P$  (или смятие  $h$ ) следует считать заданной.

**Технологические задачи теории пластичности.** Теорию пластичности широко применяют для анализа технологических процессов обработки металлов давлением — прокатки, волочения, выдавливания, резания,ковки и т. д. Методы решения этих задач приведены в работах [2, 14, 21, 23, 25].



## ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

В тонкой пластине (толщина  $h$ ), деформируемой силами, лежащими в ее срединной плоскости  $x, y$ , возникает плоское напряженное состояние. Основания пластины  $z = \pm \frac{h}{2}$  свободны от нагрузок. Можно принимать, что компоненты напряжения  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  равны нулю, а  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  распределены равномерно по толщине, т. е. являются функциями лишь координат  $x, y$ .

**Плоское напряженное состояние при условии пластичности Мизеса.** Из общего условия (3) получаем

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_T^2 \quad (53)$$

или в главных осях

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_T^2.$$

Это — уравнение эллипса (на плоскости переменных  $\sigma_1, \sigma_2$ ), наклоненного под углом  $\frac{\pi}{4}$  к координатным осям (рис. 32).

Заметим, что  $|\sigma_1| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T, \quad |\sigma_2| \leq$

$\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T$ . К уравнению (53) следует присоединить дифференциальные уравнения равновесия (45) и уравнения для скоростей  $v_x, v_y$ ,

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial x}}{2\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial y}}{2\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}{6\tau_{xy}}, \quad (54)$$

вытекающие из соотношений Сен-Венана—Мизеса (13). Скорость  $v_z$  определяется из условия несжимаемости.

Система уравнений для напряжений может быть гиперболической, параболической и эллиптической.

В случае *гиперболической системы*, отвечающей дугам эллипса  $AB, CD$ , имеются два различных вещественных семейства характеристик. Характеристики не ортогональны и образуют между собой углы, меняющиеся, вообще говоря, от точки к точке. Важное значение имеют случаи, когда одно (или оба) семейства характеристик состоит из прямых линий (*простые напряженные состояния*).

*Параболическая система* отвечает точкам  $A, B, C, D$ .

*При эллиптической системе* (дуги  $BC, AD$ ) решение уравнений связано с большими трудностями.

*Разрывные решения* играют важную роль для областей гиперболичности и параболичности. Разрывы в напряжениях и касательной составляющей скорости аналогичны разрывам, рассматриваемым в плоской деформации. В плоском напряженном состоянии существенное значение имеет новый тип разрыва — разрыв *нормальной* составляющей скорости («шейка»), приводящий к резкому утонению (или утолщению) пластинки вдоль некоторых линий.

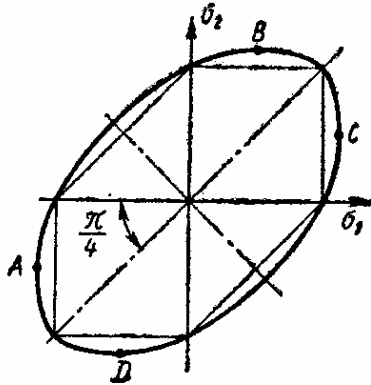


Рис. 32. Эллипс Мизеса и шестиугольник Сен-Венана

**Плоское напряженное состояние при условии пластичности Треска—Сен-Венана.** Трудности интегрирования уменьшаются при переходе к условию пластичности  $\tau_{\max} = \text{const} = \tau_s$ . В связи с этим задачи плоского напряженного состояния решают большей частью при условии пластичности Треска—Сен-Венана. На плоскости  $\sigma_1, \sigma_2$  вместо эллипса теперь будет вписанный шестиугольник (см. рис. 32).

Необходимо различать два случая:  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют разные знаки ( $\sigma_1 \sigma_2 < 0$ ) или  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют одинаковые знаки ( $\sigma_1 \sigma_2 > 0$ ).

В первом случае условие пластичности, основные уравнения и методы решения будут такими же, как в задаче о плоской деформации.

Во втором случае ( $\sigma_1 \sigma_2 > 0$ ) условие пластичности имеет вид  $\sigma_1 = \pm \sigma_T$  или  $\sigma_2 = \pm \sigma_T$  (прямые, параллельные осям координат, рис. 32); соответствующая система уравнений параболическая и имеет простое решение.

Поле скоростей определяют согласно закону ассоциированного течения.

**Уруго-пластическое равновесие пластины с отверстием под действием равномерного внутреннего давления (рис. 33).** Напряжения в пластической зоне  $r \leq c$  при условии Треска—Сен-Венана

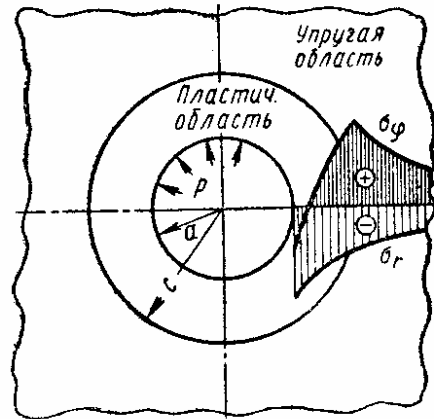


Рис. 33. Пластина с отверстием под действием внутреннего давления. Распределение напряжений  $\sigma_r, \sigma_\varphi$  в упруго-пластическом состоянии

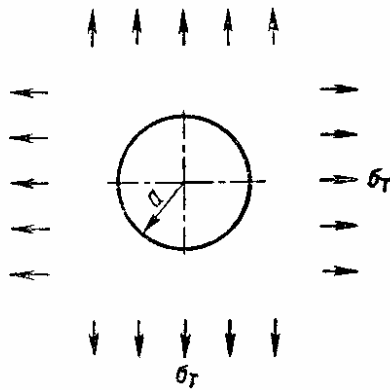


Рис. 34. Растяжение неограниченной пластины с отверстием

$$\sigma_r = -\sigma_T \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{c}{r} \right);$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_T \left( \frac{1}{2} - \ln \frac{c}{r} \right).$$

Так как напряжения по величине не превышают  $\sigma_T$ , пластическая зона может распространиться до  $\frac{c}{a} = 1,65$ . В упругой зоне  $r \geq c$  напряжения будут

$$\sigma_r = -\frac{\sigma_T}{2} \left( \frac{c}{r} \right)^2; \quad \sigma_\varphi = \frac{\sigma_T}{2} \left( \frac{c}{r} \right)^2.$$

Распределение напряжений показано на рис. 30. Давление  $p = -(\sigma_r)_{r=a}$ .

**Пластическое равновесие растягиваемой пластины с круговым отверстием (рис. 34).** По схеме Треска—Сен-Венана напряжения

$$\sigma_r = \sigma_T \left( 1 - \frac{r}{a} \right); \quad \sigma_\varphi = \sigma_T.$$

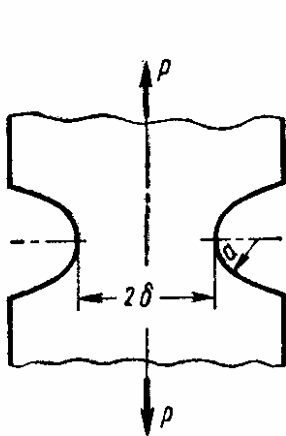


Рис. 35. Растяжение полосы, ослабленной круговыми надрезами

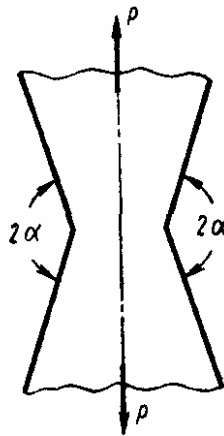


Рис. 36. Растяжение полосы с острыми надрезами

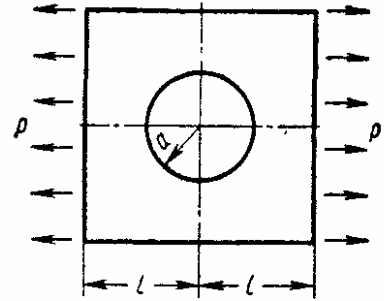


Рис. 37. Растяжение квадратной пластины с отверстием

**Растяжение полосы, ослабленной круговыми надрезами (рис. 35).**

Коэффициент усиления  $q = \frac{P_*}{P^0}$ , где  $P_*^0 = 2\delta\sigma_T h$  — элементарная предельная нагрузка ( $h$  — толщина пластины), равен [26]:  
при  $0 \leq \frac{h}{a} \leq 1,07$

$$q = 1 + 0,23 \frac{h}{h + a};$$

при  $\frac{h}{a} > 1,07$

$$q = 1,15 - 0,04 \frac{a}{h}.$$

**Растяжение полосы с острыми надрезами (рис. 36).** Коэффициент усиления [26]:

при  $70^\circ 32' \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$$q = 1 + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{0,216};$$

при  $\alpha \leq 70^\circ 32'$

$$q = 1,154.$$

**Растяжение квадратной пластинки с центральным круговым отверстием (рис. 37).** Длина стороны пластинки равна  $2l$ , растягивающее напряжение  $p$  равномерно распределено. Верхняя и нижняя границы предельной нагрузки  $\frac{P_*}{\sigma_T}$ , вычисленные энергетическим методом (см. стр. 70), приведены на рис. 38.

Растяжение бесконечной пластины, ослабленной одним рядом отверстий (рис. 39); растяжение на бесконечности равно  $p$ . Предельная нагрузка ограничена неравенствами

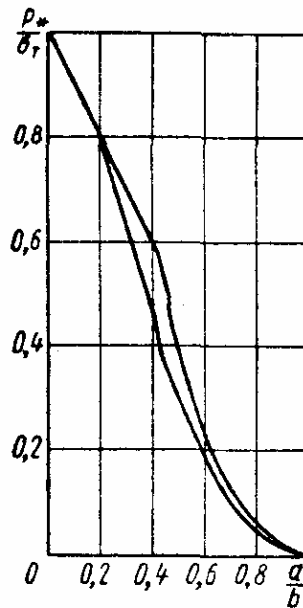


Рис. 38. Верхняя и нижняя границы предельной нагрузки для растягиваемой квадратной пластины с отверстием

$$1 \leq \frac{p_* l}{\sigma_T (l - d)} \leq 1,15.$$

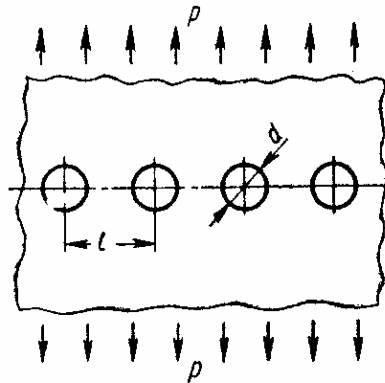


Рис. 39. Растяжение широкой пластины, ослабленной рядом отверстий

Изгиб короткой консоли поперечной силой (см. рис. 24) в случае плоского напряженного состояния. Элементарное решение  $P_*^0 = \sigma_T \frac{h^2}{l}$ .

Предельную нагрузку  $P_*$  с учетом влияния касательных напряжений определяют по штриховой кривой графика на рис. 23.

### ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

**Основные уравнения.** В системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  при осевой симметрии тела и нагрузок имеем  $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$ ,  $v_\varphi = 0$  (кручение исключается).

Компоненты напряжений и скорости деформации не зависят от  $\varphi$ . Напряжения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

и условию текучести Мезиса

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6\tau_s^2. \quad (56)$$

К этим уравнениям следует присоединить еще уравнения пластического состояния.

Приближенные результаты обычно получают в предположении, что  $\sigma_r = \sigma_\varphi$  (условие полной пластичности). Допускаемую при этом погрешность оценить трудно.

Значительного упрощения достигают также при использовании условия текучести Треска—Сен-Венана и ассоциированного закона течения [13].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. Прикладная математика и механика. Т. 15, вып. 6, 1951. См. также Изв. ОТН. Механика и машиностроение, № 1, 1963, № 2, 1965.
2. Гоффман О. и Закс Г. Введение в теорию пластичности для инженеров. М., Машгиз, 1957.
3. Грин А. Пластическое течение полос и балок при изгибе. Сб. перев. «Механика», № 4, М., ИЛ, 1955.
4. Грин А. Пластическое течение металлических соединений. Сб. перев. «Машиностроение», № 6, М., ИЛ, 1955.
5. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. Прикладная математика и механика. Т. 23. Вып. 6, 1959.
6. Ильюшин А. А. Пластичность. М., Гостехиздат, 1948.
7. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. М., изд-во МГУ, 1960.
8. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., ГИТТЛ, 1956.
9. Качанов Л. М. Сдвиг и сжатие пластичного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, Механика, № 2, 1963.
10. Качанов Л. М. О вариационных методах решения задач теории пластичности. Прикладная математика и механика. Т. 25. вып. 1, 1961.
11. Качанов Л. М. О напряженном состоянии пластичной прослойки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика, № 5, 1962.
12. Койтер В. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М., ИЛ, 1961.
13. Липпман Г. Теория главных траекторий при осесимметричной пластической деформации. Сб. перев. «Механика», № 3, М., ИЛ, 1963.
14. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., ИЛ, 1954.
15. Ольшак В., Мруз З., Пежина П. Современное состояние теории пластичности. М., «Мир», 1964.
16. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М., «Мир», 1964.
17. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М., Машгиз, 1958.
18. Прагер В. Проблемы теории пластичности. М., Физматгиз, 1958.
19. Прагер В. и Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М., ИЛ, 1956.
20. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., Госстройиздат, 1954.
20. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., Гостехиздат, 1950.
21. Тарновский И. Я. и др. Теория обработки металлов давлением. М., Metallurgizdat, 1963.
22. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
23. Томленов А. Д. Теория пластических деформаций металлов. М., Машгиз, 1951.
24. Фрейденталь А. Б. и Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
25. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956.
26. Hill R. On discontinuous plastic states. Journ. «Mech. a Phys. of Solids», t. 1, N 1, 1952.

## Глава 4

# ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Под действием нагрузки материалы обнаруживают в той или иной мере медленную текучесть. Это явление называется ползучестью (или крипом — от слова *сгеер* — ползучесть).

## ПОЛЗУЧЕСТЬ МЕТАЛЛОВ

**Кривая ползучести.** Кривая испытаний на растяжение при постоянной нагрузке и температуре показана на рис. 1. По оси абсцисс отложено время  $t$ , по оси ординат — относительное удлинение  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ , где  $\Delta l$  —

абсолютное удлинение, а  $l_0$  — первоначальная длина. При нагружении стержень получает мгновенную деформацию  $\varepsilon^0$  (отрезок  $OA$ ). Мгновенная деформация может быть упругой или упруго-пластической (имеется в виду пластическая деформация, не связанная с временем, см. гл. 3). Участок  $AB$  характеризуется убыванием скорости ползучести и называется *первым* (или *переходным*) *периодом ползучести*; длительность его относительно невелика. Скорость деформации становится практически постоянной на участке  $BC$ , называемом *вторым периодом ползучести* (или *периодом квазивязкого течения*). Испытание заканчивается либо «хрупким» изломом, в точке  $C$ , либо «вязким» разрушением, сопровождаемым образованием шейки. В последнем случае наблюдается участок ускоренной ползучести  $CD$ . Если напряжение велико, второй период может быть кратковременным.

**Кривая релаксации.** Если длина растянутого стержня все время поддерживается постоянной ( $\varepsilon = \text{const}$ ), то напряжение в стержне с течением времени убывает, происходит *релаксация напряжения*. Это явление объясняется развитием в стержне деформации ползучести, вследствие чего доля упругой деформации падает. Релаксация характеризуется резким спадом напряжения в начале процесса (рис. 2).

Релаксация затрудняет работу болтовых соединений, прессовых посадок, пружин и т. д. С другой стороны, благодаря релаксации резко уменьшаются начальные и температурные напряжения в элементах конструкций. Явление релаксации непосредственно изучается с помощью релаксационных испытательных машин [24].

**Обратная ползучесть.** Если в некоторый момент времени произошла разгрузка, то длина стержня после разгрузки медленно сокращается. Это явление называется восстановлением, или обратной ползучестью.

Восстанавливается только некоторая часть деформации, накопленной в первом периоде ползучести. Восстановление наблюдается в поликристаллических металлах и связано с неоднородностью загрузки кристаллов; в монокристаллах восстановление ничтожно.

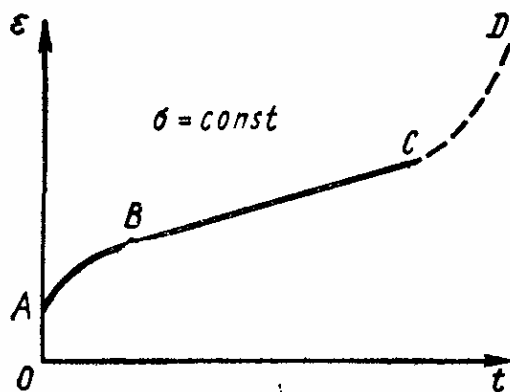


Рис. 1. Кривая ползучести

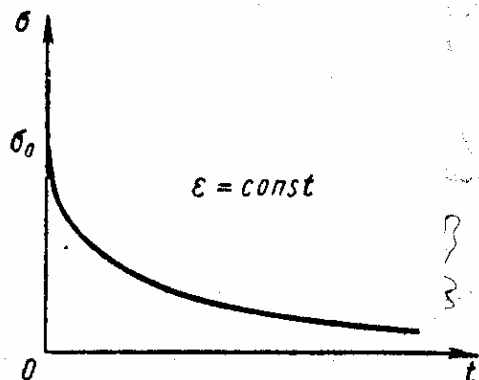


Рис. 2. Кривая релаксации

Обычно можно пренебречь эффектом обратной ползучести при медленно изменяющемся напряжении. Этот эффект может оказаться значительным при циклических изменениях напряжения.

**Ползучесть при повторном нагружении.** После сброса нагрузки материал испытывает обратную ползучесть. При повторном нагружении до прежнего уровня скорость ползучести сначала будет несколько выше

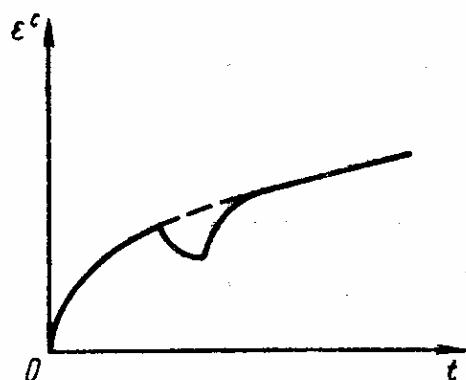


Рис. 3. Ползучесть при повторном нагружении

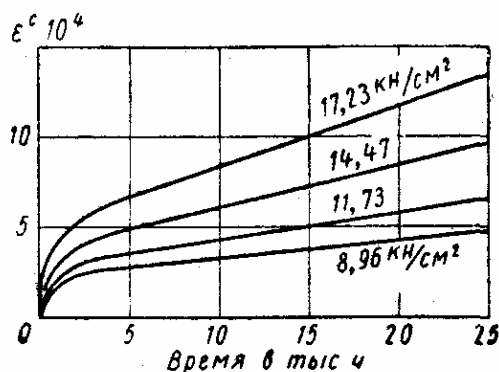


Рис. 4. Кривые ползучести стали с содержанием 0,31% С; 0,54% Мп; 0,11% Si; 2,05% Ni; 0,83% Cr; 0,45% Мо при температуре 450°С

скорости ползучести до перерыва, но затем быстро вернется к прежнему значению (рис. 3). Следовательно, деформация к некоторому моменту времени мало зависит от наличия перерывов. Иногда, впрочем, наблюдается другая картина [16], когда общая деформация при ползучести с перерывами больше, чем при отсутствии перерывов.

**Зависимость от напряжения.** Для выяснения зависимости скорости от напряжения проводятся опыты при различных нагрузках. На рис. 4 показаны результаты длительных опытов над низколегированной сталью при температуре 450°С.

Кривые кратковременных испытаний имеют в общем аналогичный вид, хотя скорость ползучести обычно продолжает уменьшаться. В этом

случае целесообразно определять среднюю скорость ползучести в выбранном интервале.

Экспериментальные данные по ползучести характеризуются значительным разбросом, в связи с чем данные по ползучести необходимо сглаживать, что обычно достигается построением экспериментальных точек в логарифмической сетке.

По опытам скорость ползучести во втором периоде  $\xi_{II}$  является монотонной, быстро возрастающей функцией напряжения  $\sigma_1$ . Экспериментальные точки на логарифмической сетке обычно группируются около некоторой прямой линии, что свидетельствует о наличии степенной зависимости

$$\xi_{II} = B_1 \sigma_1^m, \quad (1)$$

где коэффициент ползучести  $B_1$  и показатель ползучести  $m$  — постоянные, характерные для данного материала при данной температуре. Показатель ползучести, как правило, больше единицы и доходит иногда до 10—12 и выше.

При очень малых напряжениях скорость деформации пропорциональна напряжению, что не согласуется с законом (1). Этот недостаток степенной зависимости не является существенным, так как области очень малых напряжений слабо влияют на ползучесть всей детали.

**О подобии кривых ползучести.** Кривые ползучести (см. рис. 4) часто можно рассматривать как подобные; тогда при степенной зависимости их можно представить в форме

$$\epsilon_1^c = \Omega_1(t) \sigma_1^m. \quad (2)$$

Функция  $\Omega_1(t)$  пропорциональна какой-либо из кривых ползучести.

При небольших величинах времени хорошим приближением является степенная функция

$$\Omega_1(t) = At^\alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

При отсутствии подобия кривых ползучести

$$\epsilon_1^c = F(\sigma_1, t).$$

**Влияние температуры.** При фиксированном напряжении минимальная скорость ползучести с увеличением температуры возрастает по показательному закону

$$\epsilon_{II} = Ce^{-\frac{\gamma}{T}}, \quad (3)$$

где  $C$ ,  $\gamma$  — постоянные;  $T$  — абсолютная температура.

Кривые ползучести при разных температурах и одном и том же напряжении показаны на рис. 5.

Коэффициент  $B_1$  и показатель  $m$  зависят, вообще говоря, от температуры. Часто в заданном интервале температуры показатель  $m$

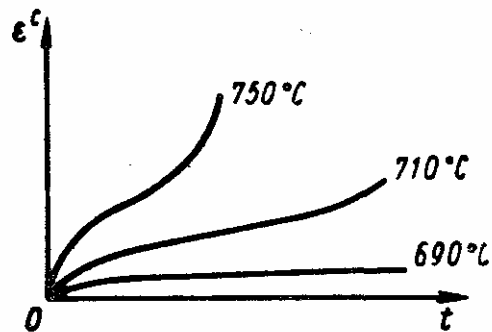


Рис. 5. Влияние температуры



практически можно считать постоянным, температура сказывается лишь на изменении коэффициента  $B_1$ . В таком случае имеет место *простая зависимость от температуры*.

**Ползучесть при сложном напряженном состоянии** изучают обычно в опытах по ползучести тонкостенных труб. Таких опытов проведено много [14, 15, 27]. Приведем основные выводы из этих опытов.

Если при данной температуре металл достаточно стабилен, т. е. в нем не разворачиваются фазовые превращения, то гидростатическое давление не влияет на ползучесть, изменение объема является упругой деформацией.

В условиях простого нагружения (см. гл. 3) главные направления тензоров напряжения и скорости деформации совпадают. Опытные данные свидетельствуют о приближенном подобии тензоров напряжения и скорости деформации. Имеется также зависимость между интенсивностями касательных напряжений  $\tau_i$  и скоростей деформации сдвига  $\dot{\eta}_i$ , характерная для данного материала при данной температуре.

При сложном нагружении ползучесть связана с развитием деформационной анизотропии и, следовательно, зависит от пути нагружения. При сложных, резко меняющихся нагружениях простые зависимости, отмеченные выше, уже не имеют места [15, 25].

### УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Для описания ползучести предложены различные (простые и более сложные) уравнения. Здесь рассматриваются уравнения ползучести (теории ползучести) и их особенности в случае одноосного напряженного состояния (растяжение, сжатие).

**Теория течения.** В случае ползучести растягиваемого стержня под действием напряжения  $\sigma_1$  полная деформация  $\epsilon_1$  может быть разложена на три составляющие

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^e + \epsilon_1^p + \epsilon_1^c,$$

где  $\epsilon_1^e$  — упругая деформация;  $\epsilon_1^p$  — пластическая деформация;  $\epsilon_1^c$  — деформация ползучести.

Дифференцирование по времени дает

$$\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_1^e + \dot{\xi}_1^p + \dot{\xi}_1^c. \quad (4)$$

Скорость упругой деформации определяют по закону Гука. Примем здесь для простоты, что напряжение не превышает предела упругости при данной температуре, тогда  $\dot{\xi}_1^p = 0$ . Деформация ползучести при наличии подобия и постоянном напряжении определяется соотношением (2). Тогда скорость ползучести (в случае степенной зависимости) будет

$$\dot{\xi}_1^c = B_1(t) \sigma_1^m,$$

где

$$B_1(t) = \frac{d}{dt} \Omega_1(t).$$

Функция  $B_1(t)$  — положительная убывающая функция времени, отсчитываемого от момента начала ползучести, асимптотически стремящаяся к предельному значению  $B_1$  (рис. 6). Условие подобия и степенной зависимости не является существенным.

Уравнение теории течения имеет вид

$$\xi_1 = B_1(t) \sigma_1^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt}. \quad (5)$$

При  $B_1(t) = \text{const}$  и  $m = 1$  получаем известное уравнение Максвелла.

Уравнение теории течения (5) справедливо при не слишком малых скоростях ползучести и при напряжениях, изменяющихся медленно и монотонно: кроме того, начало процесса ползучести должно протекать при достаточно больших напряжениях. Эти условия обычно выполняются; локальное их нарушение (например, вблизи нейтральной плоскости в задаче изгиба) несущественно.

В задаче о релаксации напряжения стержень в момент  $t = 0$  получил удлинение  $\epsilon_{10} = \frac{\sigma_{10}}{E}$ . В последующее время длина стержня остается неизменной, т. е.  $\xi_1 = 0$ .

Подобная картина имеет место, например, для болтового соединения. Полагая  $\xi_1 = 0$  в уравнении ползучести (5), получаем дифференциальное уравнение релаксации

$$B_1(t) \sigma_1^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$\rho = [1 + (m-1) t^*]^{\frac{2}{m-1}}, \quad (6)$$

где введены безразмерные величины

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{10}} = \rho; \quad E B_1(t) \sigma_{10}^{m-1} = t^*. \quad (7)$$

С течением времени напряжение в стержне падает, стремясь к нулю. Кривые релаксации для некоторых значений  $m$  приведены на рис. 7. При  $m = 1$  имеем уравнение Максвелла, тогда  $\rho = e^{-t^*}$ .

Теоретическая кривая релаксации (6) лежит несколько ниже экспериментальной, т. е. расчет по формуле (6) дает некоторый «запас» по времени до заданной величины релаксации.

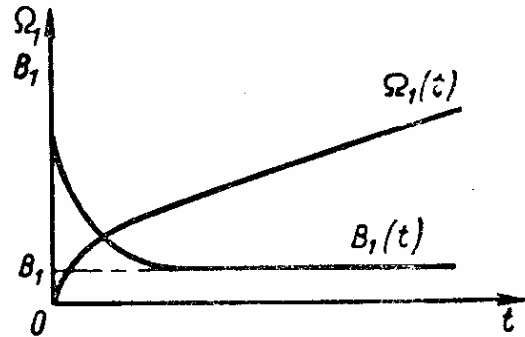


Рис. 6. Графики функций  $\Omega_1(t)$  и  $B_1(t)$

Если известны кривые ползучести (см. рис. 4) и число  $m$ , то легко построить кривую релаксации. Задаемся каким-нибудь значением  $\rho$ , и по формуле (7) или с помощью графика (рис. 7) находим  $t^*$ . Берем одну из кривых ползучести  $\sigma_1 = \text{const}$  (желательно в области напряжений, близких к  $\sigma_{10}$ ) и полагаем  $\Omega_1(t) = \frac{\varepsilon^c}{\sigma_1^m}$ . По выбранной кривой находим такое время, для которого  $\varepsilon_1^c = \frac{\sigma_{10}}{E} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{10}} \right)^m t^*$ . При дробном  $m$  значение  $t^*$  определяют интерполяцией.

Имеется удобный графический прием непосредственного построения кривой релаксации по первичным кривым ползучести [7].

**Теория старения.** В теории старения принимают, что

$$\varepsilon_1^c = f(\sigma_1, t).$$

Тогда полная деформация

$$\varepsilon_1 = f(\sigma_1, t) + \frac{\sigma_1}{E}. \quad (8)$$

При степенной зависимости и подобии кривых ползучести

$$\varepsilon_1 = \Omega_1(t) \sigma_1^m + \frac{\sigma_1}{E}. \quad (9)$$

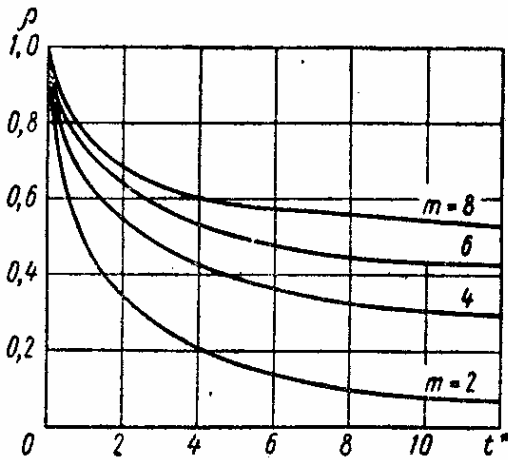


Рис. 7. Кривые релаксации по уравнению (6)

Приведенные соотношения пригодны только при постоянной или слабо изменяющейся нагрузке.

Релаксация определяется уравнением

$$\Omega_1(t) \sigma_1^m + \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_{10}}{E},$$

откуда при прежних обозначениях следует

$$t^* = \frac{1 - \rho}{\rho^m}. \quad (10)$$

Релаксация по теории старения происходит несколько медленнее, чем по теории течения.

Решение задач по теории старения связано с меньшими математическими трудностями, в связи с чем эту теорию довольно широко применяют в инженерных расчетах. Удобная для расчетов формулировка теории старения предложена Ю. Н. Работновым [17]. Исходя из кривых ползучести при постоянных напряжениях, строят изохронные кривые ползучести для моментов времени  $0, t_1, t_2, t_3, \dots$  (рис. 8). Эти кривые обычно можно приближенно рассматривать как подобные (особенно в области значительных напряжений); при этом под  $\varepsilon_1$  понимают полную деформацию.

Изохронные кривые ползучести позволяют непосредственно использовать решения теории пластичности при данной кривой  $\sigma_1 = \sigma_1(\epsilon_1)$  в задачах теории ползучести (для выбранного момента времени, независимо от того — имеется подобие или нет). В случае подобия объем расчетов значительно меньше, так как тогда  $\epsilon_1 = f(\sigma_1) \varphi(t)$  и при постоянных нагрузках распределение напряжений не изменяется, деформации же пропорциональны  $\varphi(t)$ .

К теории старения обычно относят уравнение Н. М. Беляева [7, 13]

$$\epsilon_1 = \sigma_1 \left[ \frac{1}{E} + \int_0^t B_1(t) \sigma_1^{m-1} dt \right].$$

**Теория упрочнения.** По теории упрочнения имеется зависимость вида (при заданной температуре)

$$\dot{p}_1 = \varphi(\sigma_1, p_1), \quad (11)$$

где  $p_1 = \epsilon_1^p + \epsilon_1^c$  — необратимая деформация. Эту зависимость иногда записывают в форме

$$\dot{p}_1 = \frac{f(\sigma_1)}{g(p_1)}, \quad (12)$$

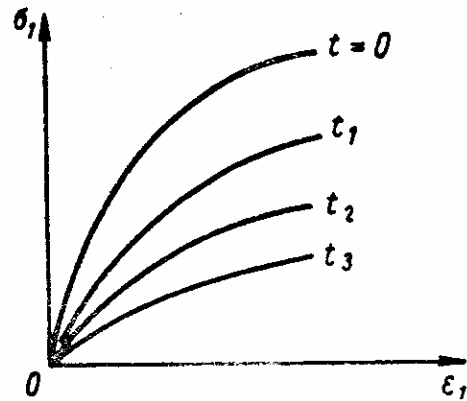


Рис. 8. Изохронные кривые ползучести

где  $f(\sigma_1)$ ,  $g(p_1)$  — монотонно возрастающие функции. С ростом необратимой деформации скорость  $\dot{p}_1$  падает, что интерпретируется как «упрочнение». Эквивалентность обеих составляющих ( $\epsilon_1^c$  и  $\epsilon_1^p$ ), как показали опыты, не имеет места. Под  $p_1$  следует понимать лишь деформацию ползучести  $\epsilon_1^c$ .

Для простоты расчетов часто принимают [19]

$$f(\sigma_1) = K \exp \frac{|\sigma_1|}{A}; \quad g(\epsilon_1^c) = (\epsilon_1^c)^\alpha; \quad K \geq 0, \quad A \geq 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Область малых напряжений исключается из рассмотрения. Если ввести безразмерные переменные

$$\frac{\sigma_1}{A} = s_1; \quad \frac{E\epsilon_1}{A} = e_1; \quad \frac{E\epsilon_1^c}{A} = p_1; \quad K \left( \frac{E}{A} \right)^{1+\alpha} t = \tau,$$

то уравнение теории упрочнения принимает вид

$$\dot{p}_1 p_1^\alpha = \exp s_1. \quad (13)$$

В случае релаксации  $\epsilon_1 = \epsilon_1^c + \frac{\sigma_1}{E} = \text{const} = \epsilon_{10}$ , откуда  $p_1 + s_1 = s_0$  и  $\dot{p}_1 + \dot{s}_1 = 0$ . Исключая с помощью этих соотношений  $p_1$

и  $\dot{p}_1$  из (13), получаем дифференциальное уравнение релаксации; решение последнего имеет вид

$$\tau = \int_{s_1}^{s_0} (s_0 - s)^\alpha e^{-s} ds. \quad (14)$$

Теория упрочнения правильно характеризует ряд особенностей течения при изменяющихся нагрузках. При не очень сложных путях нагружения теория упрочнения удовлетворительно описывает ползучесть металлургически стабильных металлов и сплавов. Применение теории упрочнения для расчетов деталей машин связано со значительными математическими трудностями.

Лучше согласуется с экспериментальными данными недавно предложенный энергетический вариант теории упрочнения

$$\dot{p}_1 = \varphi(\sigma_1, \lambda), \quad (15)$$

где  $\lambda = \int \sigma_1 dp_1$  — работа деформации ползучести.

**Теория наследственности.** Для описания ползучести используют также различные варианты теории упругого последействия Больцмана—Вольтерра [17, 23].

### УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

**Основные положения.** Опыты показывают, что при сложном напряженном состоянии ползучесть определяется касательными напряжениями и протекает в общем по законам «обычной» пластической деформации. В связи с этим принимают следующие основные положения:

- 1) изменение объема является упругой деформацией; ползучесть не зависит от гидростатического давления;
  - 2) главные направления тензоров скоростей деформации ползучести и напряжения совпадают;
  - 3) формы девиаторов напряжения и скорости деформации совпадают.
- Отсюда следуют уравнения

$$\xi_x^c = \psi(\sigma_x - \sigma); \dots; \eta_{xz}^c = 2\psi \tau_{xz}, \quad (16)$$

где скалярная функция  $\psi$  зависит, вообще говоря, от скалярных параметров, связанных с напряженным и деформированным состояниями, от времени  $t$  и температуры  $T$ . Ниже температура  $T$  считается фиксированной. Функцию  $\psi$  выбирают по-разному в различных теориях ползучести.

**Теория течения.** Здесь принимают, что интенсивность скоростей деформаций сдвига ползучести  $\eta_i^c$  является функцией интенсивности касательных напряжений  $\tau_i$ , характерной для данного материала при данной температуре:

$$\eta_i^c = f(\tau_i) \tau_i. \quad (17)$$

Рассматривая случай одноосного растяжения и сравнивая равенство (17) с опытными данными, находим вид функции  $f$ . В случае степенной зависимости

$$\eta_i^c = B\tau_i^m; \quad f(\tau_i) = B\tau_i^{m-1}, \quad (18)$$

где  $B = 3^{\frac{m+1}{2}} B_1$ . Легко видеть, что  $2\psi = f(\tau_i)$ .

Расширяя соотношение (18) на первый период ползучести так же, как при одноосном растяжении (см. стр. 92), и добавляя скорости упругой деформации, получаем полные уравнения ползучести

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{2G} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) + \frac{1}{2} f(\tau_i, t) (\sigma_x - \sigma); \\ \dots\dots\dots \\ \eta_{xz} &= \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xz} + f(\tau_i, t) \tau_{xz}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $\sigma$  — среднее давление.

В случае степенной зависимости и подобия кривых ползучести

$$f(\tau_i, t) = B(t) \tau_i^{m-1}; \quad B(t) = 3^{\frac{m+1}{2}} B_1(t).$$

Важное значение имеют уравнения *установившейся ползучести* (поля напряжения и скорости не зависят от времени)

$$\xi_x = \frac{1}{2} f(\tau_i) (\sigma_x - \sigma); \dots; \eta_{xz} = f(\tau_i) \tau_{xz}, \quad (20)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям деформационной теории пластичности (скорости деформации  $\xi_x, \dots, \eta_{xz}$  заменяют на деформации  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{xz}$ ). Отсюда следует так называемая *упругая аналогия* (см. ниже).

**Теория упрочнения.** Здесь принимают, что

$$\psi = \psi(\tau_i, \gamma_i^*), \quad (21)$$

где  $\gamma_i^*$  — накопленная деформация ползучести

$$\gamma_i^* = \int_0^t \eta_i^c dt.$$

В энергетическом варианте имеем

$$\psi = \psi(\tau_i, \lambda),$$

где  $d\lambda = \sigma_x d\varepsilon_x^c + \dots + \tau_{xz} d\gamma_{xz}^c$ .

Функция  $\psi$  определяется по опытным данным, например, по кривым ползучести при растяжении. Тогда  $\tau_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_x$ ,

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0;$$

$$\eta_i^c = \sqrt{3} \xi_x^c; \quad \gamma_i^* = \sqrt{3} \varepsilon_x^c.$$

По уравнению (16) имеем  $\xi_x^c = \frac{2}{3} \psi \sigma_x$ .

Теория старения формулируется внешне так же, как и теория упруго-пластической деформации. Второе и третье основные положения (стр. 96) заменяются более простыми. Здесь

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^c; \quad \dots; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^e + \gamma_{xz}^c.$$

Компоненты упругой деформации  $\varepsilon_x^e, \dots, \gamma_{xz}^e$  определяют по закону Гука, а компоненты деформации ползучести находят по формулам

$$\varepsilon_x^c = \frac{1}{2} f_*(\tau_i, t) (\sigma_x - \sigma); \quad \dots; \quad \gamma_{xz}^c = f_*(\tau_i, t) \tau_{xz}. \quad (22)$$

В случае степенной зависимости

$$f_*(\tau_i, t) = \Omega(t) \tau_i^{m-1}; \quad \Omega(t) = \int_0^t B(t) dt.$$

Другие теории см. в работах [5, 9, 21, 29].

### СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ. ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Система уравнений теории течения** состоит из трех дифференциальных уравнений равновесия (12) гл. 1, закона ползучести (19) и шести условий совместности для скоростей (20) гл. 1. Внося в последние условия скорости деформации согласно уравнений (19), получаем вместе с уравнениями (12) гл. 1 систему девяти дифференциальных уравнений относительно компонентов напряжения. В общем виде эта система имеет сложный вид и здесь не приведена. Уравнения системы содержат однократное дифференцирование по времени.

Обычно встречаются следующие граничные задачи:

1) *основная задача* — на поверхности тела  $S$  заданы напряжения, постоянные во времени;

2) *релаксационная задача* — часть поверхности тела  $S_F$  свободна от напряжений, на другой части  $S_v$  заданы постоянные во времени смещения (тогда на  $S_v$  скорости  $v_x = v_y = v_z = 0$ ); объемные силы отсутствуют;

*смешанная задача* — на части поверхности  $S_F$  заданы постоянные во времени напряжения, на  $S_v$  — перемещения (т. е.  $v_x = v_y = v_z = 0$ ).

В начальный момент времени  $t = 0$  распределение напряжений и смещений упругое (или, если нагрузки велики, упруго-пластическое).

Качественная картина течения такова: в основной задаче с течением времени напряженное состояние изменяется, стремясь к некоторому установившемуся состоянию (см. стр. 100); в релаксационной задаче напряжения со временем падают (релаксируют), стремясь к нулю.

*Действительное распределение напряжений сообщает минимум дополнительной мощности тела*

$$\int_V \left( \Lambda + \frac{\partial W}{\partial t} \right) dV = \min \quad (23)$$

по сравнению со всяким статическим возможным напряженным состоянием. Интегрирование в зависимости (23) проводится по всему объему тела  $V$ . Функция

$$W = \frac{3}{2} k \sigma^2 + \frac{\tau_i^2}{2G}$$

есть плотность упругой потенциальной энергии, а

$$\Lambda = \int_0^{\tau_i} f(s, t) s ds \quad (24)$$

(где  $f$  — характерная для данного металла функция;  $t$  — время) называют *плотностью дополнительного рассеяния*. При степенном законе и подобии кривых ползучести имеем

$$\Lambda = \frac{B(t)}{m+1} \tau_i^{m+1}. \quad (25)$$

Вариационный принцип (23) выражает условия сплошности и его можно рассматривать в некотором смысле как обобщение принципа Кастильяно.

При наличии пластических деформаций к потенциалу  $W$  в формуле (23) следует добавить дополнительную работу [7].

**Система уравнений теории старения** не содержит производных по времени; время  $t$  входит в качестве параметра. Для всякого фиксированного момента времени имеем задачу, вполне аналогичную соответствующей задаче теории упруго-пластических деформаций (гл. 3). Для решения последней применимы методы последовательных приближений, численные методы, вариационные методы (см. гл. 3).

В теории старения имеет место принцип минимума дополнительной работы

$$\int_V \left[ \frac{\Omega(t)}{m+1} \tau_i^{m+1} + W \right] dV = \min.$$

Здесь уравнение выписано для случая степенного закона и подобия кривых ползучести. Так как уравнения теории старения совпадают по существу с уравнениями теории упруго-пластических деформаций, то имеет место второй принцип — принцип минимума полной энергии [7], характеризующий минимальные свойства перемещений.





Рассеяние

$$L = \int_0^{\eta_i} \tau_i d\eta_i = \int_0^{\eta_i} g(\xi) \xi d\xi.$$

В случае степенной зависимости

$$L = \frac{\bar{B}}{\mu + 1} \eta_i^{\mu+1}; \quad \bar{B} = B^{-\mu}.$$

Минимум разыскивают в классе скоростей  $v_x, v_y, v_z$ , удовлетворяющих условию несжимаемости и принимающих заданные граничные значения на части поверхности  $S_v$  [7].

Второй принцип устанавливает экстремальные свойства истинных напряжений. *Из всех статически возможных напряженных состояний только истинное напряженное состояние сообщает минимум дополнительному рассеянию тела*

$$\tilde{\Lambda} = \int_V \dot{\Lambda} dV = \min. \quad (29)$$

Дополнительное рассеяние

$$\Lambda = \int_0^{\tau_i} \eta_i d\tau_i = \int_0^{\tau_i} f(\xi) \xi d\xi.$$

При степенной зависимости

$$\Lambda = \frac{B}{m + 1} \tau_i^{m+1}. \quad (30)$$

Обобщением известных теорем Кастильяно являются следующие теоремы.

1. Частная производная от дополнительного рассеяния тела по величине приложенной сосредоточенной силы  $P_j$  равна скорости точки приложения этой силы по направлению действия последней:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial P_j} = v_j. \quad (31)$$

2. Лишние неизвестные  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) определяют из системы уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial X_j} = 0. \quad (32)$$

**Упругая аналогия.** Сопоставление полученных уравнений с соответствующими уравнениями нелинейно упругого тела показывает, что распределения напряжений, скоростей деформации и скоростей

в случае установившейся ползучести будут такими же, как распределения напряжений, деформаций и перемещений в аналогичной задаче для нелинейно упругого тела (в теории упруго-пластических деформаций). Эта аналогия позволяет использовать в теории ползучести решения, полученные для нелинейно упругого тела (и обратно).

**Зависимость решения от показателя  $m$ .** Рассмотрим основную и смешанную задачи при степенном законе ползучести. В этих задачах напряжения не зависят от коэффициента  $B$ , а скорости пропорциональны ему. Показатель  $m$  существенно влияет на распределение напряжений.

При  $m = 1$  распределение напряжений совпадает с распределением напряжений в соответствующей задаче для линейно упругого тела.

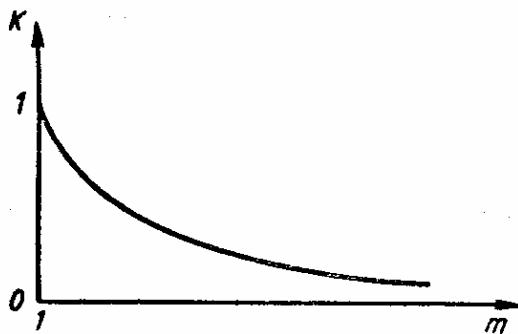


Рис. 9. График функции  $K(m)$

При  $m \rightarrow \infty$  распределение напряжений иногда аналогично распределению напряжений в идеально-пластическом теле, иногда лишь напоминает некоторые особенности этого распределения. Имеет место следующее утверждение [7]: с возрастанием  $m$  распределение напряжений стремится к идеально-пластическому распределению, если по жестко-пластической схеме данная задача допускает вполне пластическое (т. е. без жестких зон) решение.

**Приближенный метод решения задач установившейся ползучести.** Простой характер зависимости решения от показателя  $m$  позволяет указать эффективный метод приближенного решения. Решение ищем в форме [7]

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + K(\sigma'_x - \sigma_x^0); \dots; \tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + K(\tau'_{xz} - \tau_{xz}^0). \quad (33)$$

где  $\sigma'_x, \dots, \tau'_{xz}$  — упругое распределение напряжений (при  $m = 1$ );  $\sigma_x^0, \dots, \tau_{xz}^0$  — распределение напряжений при  $m \rightarrow \infty$ ; считаем, что эти решения известны и различны. Если предельное состояние  $\sigma_x^0, \dots, \tau_{xz}^0$  не совпадает с идеально-пластическим и неизвестно, то это решение можно заменить известным решением для достаточно большого  $m$  (например, для  $m = 8 \div 10$ ).

Множитель  $K$  — функцию  $m$  — определяют из условия минимума дополнительного рассеяния  $\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial K} = 0$ . Зависимость  $K(m)$  имеет, как правило, вид, показываемый на рис. 9. Различные приемы вычисления этой зависимости изложены в работе [7].

**Зависимость решения от параметра нагрузки.** Пусть усилия, заданные на поверхности  $S$  (основная задача), изменяются пропорционально одному параметру  $\lambda$ , т. е.  $F_n = \lambda F_{n0}$ , где  $F_{n0}$  зависит только от координат точек  $S$ . В общем случае зависимость напряжений и скорости от  $\lambda$  является сложной и задачу нужно решать для каждого фиксированного значения  $\lambda$ . В случае степенного закона ползучести (18) напряжения

пропорциональны параметру нагрузки  $\lambda$ , а скорость пропорциональна  $\lambda^m$ , т. е.

$$\sigma_x = \sigma_{x1}\lambda; \dots; \tau_{xz} = \tau_{xz1}\lambda; \underline{\vartheta} = \underline{\vartheta}_1\lambda^m,$$

где индекс 1 характеризует решение для  $\lambda = 1$ .

**Метод последовательных приближений.** Для решения нелинейных уравнений установившейся ползучести используются различные варианты метода последовательных приближений. Эти методы, благодаря отмеченной выше упругой аналогии, совпадают с методами последовательных приближений, применяемыми в теории упруго-пластических деформаций (см. гл. 3). Представим уравнения установившейся ползучести (26) в форме

$$\sigma_x - \sigma = 2\mu [1 - \omega(\eta_i)] \xi_x; \dots; \tau_{xz} = \mu [1 - \omega(\eta_i)] \eta_{xz},$$

где  $\omega(\eta_i) = 1 - \frac{\tau_i}{\mu\eta_i}$ ;  $\mu$  — коэффициент вязкости, соответствующий наклону кривой ползучести на начальном участке, а  $\omega(\eta_i)$  характеризует нелинейность. В дальнейшем применяют различные варианты метода последовательных приближений, вполне аналогичные приемам, используемым в теории упруго-пластических деформаций. Так, можно перенести нелинейные члены в правые части и трактовать их как дополнительные объемные и поверхностные нагрузки. Другой прием состоит в том, что множители  $\frac{\tau_i}{\eta_i}$  рассматривают как переменные коэффициенты вязкости, определяемые по данным предыдущего приближения, и т. д. (см. литературу к гл. 3).

**Модифицированный метод Ритца** позволяет строить решения прямыми методами с необходимой точностью. В частности, решения задач теории упругости, полученные вариационными методами, нетрудно распространить на соответствующие задачи теории ползучести. Рассмотрим этот метод применительно к разысканию минимума дополнительного рассеяния [7].

Решение строим последовательными приближениями в форме уравнения (52) гл. 3.

Вариационное уравнение  $k$ -го приближения записано в форме

$$\int_V \frac{1}{G_k} \cdot \frac{\tau_i^2}{2} dV = \min,$$

где  $G_k = g\left(\frac{\tau_i^{k-1}}{G_{k-1}}\right)$  является известной функцией, определяемой по  $(k-1)$ -му приближению. В нулевом приближении  $G_0$  постоянно и равно тангенсу угла наклона касательной для начального участка кривой закона ползучести  $\tau_i = g(\eta_i)\eta_i$ ; нулевое приближение  $\sigma_x^{(0)}, \dots, \tau_{xz}^{(0)}$  соответствует упругой задаче. В представлении (52) гл. 3 целесообразно удерживать число членов, обеспечивающее необходимую точность решения упругой задачи. Квадратуры удобно находить численно. При определении «секущего модуля»  $G_k$  можно непосредственно исходить

из опытной кривой. Сохранение той же формы решения в каждом приближении (изменяются лишь коэффициенты  $c_{ks}$ ) упрощает вычисления и исключает громоздкость результатов. Аналогичный метод применим и для разыскания минимума полной мощности [7].

### ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В нагруженном теле в начальный момент времени возникают упругие или упруго-пластические деформации. С течением времени напряженное состояние тела вследствие ползучести будет изменяться, стремясь (при постоянных внешних нагрузках) к состоянию установившейся ползучести. Точное решение задач неуставившейся ползучести по теории течения связано с большими математическими трудностями даже в простых случаях. Вследствие большого разброса экспериментальных данных, характерного для явления ползучести, следует отдать предпочтение простым приближенным методам.

**«Метод шагов».** Система дифференциальных уравнений неуставившейся ползучести содержит производные по времени первого порядка. Заменяя последние разностными соотношениями, находят напряженные состояния в последовательные близкие моменты времени. В этом «методе шагов» на каждом этапе необходимо решить систему линейных уравнений [11].

Процессы приближения могут быть различными. Так, в одном из них рассматриваемый интервал времени разбивают на ряд малых промежутков. В каждом из них приращения деформаций будут линейными функциями приращений напряжений с коэффициентами, не зависящими от времени, но изменяющимися от точки к точке. Связь между указанными приращениями аналогична уравнению Гука для упругого анизотропного неоднородного тела. В первом приближении для коэффициентов принимают значения, следующие из расчета на предшествующем этапе нагружения. В дальнейшем эти значения уточняют методом последовательных приближений [3].

Другая схема расчета — метод дополнительных деформаций — использует в качестве исходной модели изотропное упругое тело с постоянными коэффициентами упругости. Здесь приращения компонентов деформации представляют в виде суммы приращений упругих деформаций и дополнительных слагаемых — пластических составляющих. Последние вычисляют последовательными приближениями (см. работу [3]).

**Неуставившаяся ползучесть при заданных нагрузках.** Напряженное состояние определяют решением вариационного уравнения. Решение отыскивают в виде

$$\sigma_x = \sigma'_x + \tau(t) (\sigma''_x - \sigma'_x); \dots; \tau_{xz} = \tau'_{xz} + \tau(t) (\tau''_{xz} - \tau'_{xz}), \quad (34)$$

где  $\sigma'_x, \dots, \tau'_{xz}$  — упругое распределение напряжений в начальный момент времени;  $\sigma''_x, \dots, \tau'_{xz}$  — напряжения в состоянии установившейся ползучести;  $\tau(t)$  — искомая функция времени. Она оказывается равной

$$\tau = 1 - e^{-t^0}, \quad (35)$$

где введено безразмерное время

$$t^0 = \frac{Q(0)}{2\tilde{P}_-} \Omega(t). \quad (36)$$

В случае степенной зависимости и подобия кривых ползучести

$$Q(0) = -\frac{1}{2} \int_V \tau_i'^{m-1} N dV; \quad \tilde{P}_- = \int_V P_- dV;$$

здесь  $\tau_i'$  — интенсивность напряжений  $\sigma'_x, \dots, \tau'_{xz}$ ;  $P_-$  — плотность упругой потенциальной энергии разности напряженных состояний  $\sigma_x^- = (\sigma_x'' - \sigma'_x), \dots$ , а

$$N = \frac{1}{3} [(\sigma'_x - \sigma'_y)(\sigma_x^- - \sigma_y^-) + \dots + 6\tau'_{xz}\tau_{xz}^-].$$

Интегрирование ведут по объему тела  $V$ .

Следовательно, для решения задачи необходимо вычислить два интеграла  $Q(0)$  и  $\tilde{P}_-$  от известных функций. График зависимости (35) приведен на рис. 10 (сплошная линия).

Согласно полученному решению состояние ползучести с течением времени монотонно изменяется от начального упругого состояния к состоянию установившейся ползучести. Приведенное решение дает хорошее приближение для основных по величине составляющих напряженного состояния. Это решение легко обобщается в случае отсутствия подобия кривых ползучести и смешанных задач [7].

**Релаксационная задача.** Решение вариационного уравнения (23) ищется в виде

$$\sigma_x = \rho(t) \sigma'_x; \quad \dots; \quad \tau_{xz} = \rho(t) \tau'_{xz}. \quad (37)$$

Множитель релаксации  $\rho(t)$  равен (ниже приводятся формулы для случая степенной зависимости)

$$\rho = [1 + (m-1)t^*]^{1-m}, \quad (38)$$

где введено безразмерное время

$$t^* = \kappa \Omega(t), \quad (39)$$

причем

$$\kappa = \frac{1}{2\tilde{P}'} \int_V \tau_i'^{m+1} dV;$$

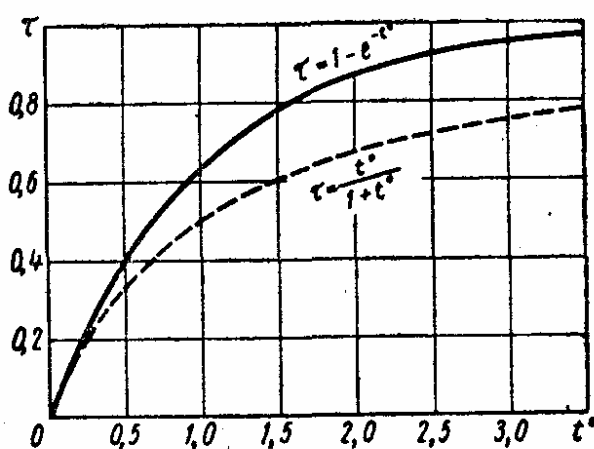


Рис. 10. График функции  $\tau$

здесь  $\tilde{P}'$  — упругая потенциальная энергия тела в начальный момент  $t = 0$ . Кривые релаксации при фиксированном  $m$  вычисляют раз навсегда для тел любой формы. Для каждой конкретной задачи меняют лишь отсчет по оси времени.

Если отдельные части системы испытывают релаксацию независимо одна от другой (*распадающиеся системы*), рассмотренный приближенный метод следует применять к каждой автономной части системы.

**Решение задач неустановившейся ползучести по теории старения** более просто, чем по теории течения. В силу приведенной ранее аналогии с задачами теории упруго-пластических деформаций (см. стр. 94—95) необходимо провести ряд расчетов упруго-пластического состояния при фиксированных значениях времени.

Расчеты значительно упрощаются при вариационном методе разыскания решения в форме (34). Тогда в основной задаче

$$\tau = \frac{t^0}{1 - t^0}.$$

Эта зависимость показана на рис. 10 штриховой линией.

В теориях упрочнения и наследственности установившиеся режимы, вообще говоря, не выделяются. Поэтому расчеты всегда связаны с рассмотрением неустановившихся течений и реализуются, как правило, численными методами.

## ПОЛЗУЧЕСТЬ ТРУБ

Рассматриваем ползучесть труб под действием внутреннего давления  $p$ , а также дополнительных нагрузок — осевой силы  $P$  и скручивающего момента  $M$ ; внутренний и внешний диаметры трубы соответственно  $2a$ ,  $2b$ ;  $\beta = \frac{b}{a}$ ;  $h = b - a$ ;  $c = \frac{1}{2}(b + a)$ .

**Ползучесть тонкостенных труб**  $\left(\frac{h}{c} \ll 1\right)$ . В тонкостенных трубах напряжения  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  по толщине трубы распределены приблизительно равномерно, а  $\sigma_r$  относительно мало.

Труба с donышками под действием внутреннего давления. В этом случае  $P = \pi a^2 p$  и  $\sigma_r = 0$ ;  $\sigma_\varphi = \frac{pa}{h}$ ,  $\sigma_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{pa}{h}$ ,  $\tau_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{pa}{h}$ .

Скорость относительного увеличения диаметра трубы  $2b\xi_\varphi$ , причем

$$\xi_\varphi = -\xi_r = \frac{1}{2} f(\tau_i, t) \tau_i; \quad \xi_z = 0.$$

Труба под действием внутреннего давления и осевой силы  $P$ .

$$\sigma_r \approx 0; \quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{h}; \quad \sigma_z = \frac{k}{2} \cdot \frac{pa}{h}; \quad k = \frac{P}{\pi a^2 p};$$

$$\xi_r = -f(\tau_i, t) \frac{2+k}{12} \sigma_\varphi; \quad \xi_\varphi = f(\tau_i, t) \frac{4-k}{12} \sigma_\varphi;$$

$$\xi_z = -\xi_r - \xi_\varphi,$$

причем

$$\tau_i = \sqrt{4-2k+k^2} \frac{\sigma_\varphi}{2\sqrt{3}}.$$

Труба с доньями под действием внутреннего давления и крутящего момента  $M$ .

$$\sigma_r \approx 0; \quad \sigma_\varphi = \frac{pa}{h}; \quad \sigma_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{pa}{h}; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0;$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M}{2\pi a^2 h}; \quad \xi_r = -\xi_\varphi = -\frac{1}{4} f(\tau_i, t) \sigma_\varphi; \quad \xi_z = 0.$$

$$\eta_{\varphi z} = f(\tau_i, t) \tau_{\varphi z}; \quad \tau_i = \frac{\sigma_\varphi}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{M}{\pi a^3 p}\right)^2}.$$

Труба под действием осевой силы и крутящего момента  $M$ .

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \tau_{rz} = \tau_{r\varphi} = 0; \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi a h}; \quad \tau_{\varphi z} = \frac{M}{2\pi a^2 h};$$

$$\xi_z = \frac{1}{3} f(\tau_i, t) \sigma_z; \quad \eta_{\varphi z} = f(\tau_i, t) \tau_{\varphi z};$$

$$\tau_i = \frac{\sigma_z}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{3M^2}{a^2 P}}.$$

Установившаяся ползучесть толстостенной трубы. По оси трубы действует сила  $P = \pi a^2 p$  (давление на донья). Ползучесть в осевом направлении отсутствует. При степенном законе ползучести

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= s'' \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu} \right]; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_r + 2\mu s'' \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu}; \\ \sigma_z &= \sigma_r + \mu s'' \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu}; \end{aligned} \right\} s'' = \frac{p}{\beta^{2\mu} - 1}. \quad (40)$$

Скорости относительного увеличения внутреннего и наружного диаметров трубы

$$(\xi_\varphi)_{r=a} = \beta^2 (\xi_\varphi)_{r=b}; \quad (\xi_\varphi)_{r=b} = \frac{1}{2} B \left( \frac{s''}{m} \right)^m.$$

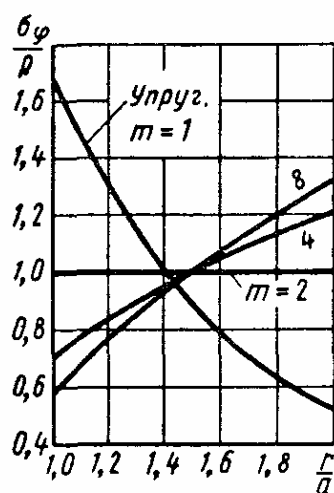


Распределение напряжения  $\sigma_\varphi$  зависит от показателя ползучести  $m$  (рис. 11);  $\sigma_\varphi = \text{const}$  при  $m = 2$ . С увеличением  $m$  распределение напряжений приближается к идеально-пластическому распределению. Радиальное напряжение  $\sigma_r$  изменяется незначительно.

При сбросе давления и снижении температуры в трубе возникнут остаточные напряжения, равные разностям напряжений (40) и напряжений в идеально-упругой трубе

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^e &= s' \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^2 \right]; \\ \sigma_\varphi^e &= \sigma_r + 2s' \left( \frac{b}{r} \right)^2; \\ \sigma_z^e &= s'; \end{aligned} \right\} s' = \frac{p}{\beta^2 - 1}. \quad (41)$$

**Неустановившаяся ползучесть толстостенной трубы.** Согласно общему методу (см. стр. 104)



$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r' + \tau(t) (\sigma_r'' - \sigma_r'); \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi' + \tau(t) (\sigma_\varphi'' - \sigma_\varphi'); \\ \sigma_z &= \sigma_z' + \tau(t) (\sigma_z'' - \sigma_z'); \end{aligned} \right\}$$

где

$$\tau(t) = 1 - e^{-t^0}.$$

Безразмерное время

$$t^0 = \frac{\varepsilon^c}{\varepsilon^e} \Psi(\beta, m),$$

где

Рис. 11. Напряжение  $\sigma_\varphi$  в трубе, испытывающей действие внутреннего давления

$$\varepsilon^c = \left( \frac{p}{\beta - 1} \right)^m \Omega_1(t); \quad \varepsilon^e = \frac{p}{\beta - 1} \cdot \frac{1}{E},$$

соответственно деформация ползучести к моменту  $t$  в растягиваемом стержне при напряжении  $\frac{p}{\beta - 1}$  (среднее тангенциальное напряжение в трубе) и упругая деформация в тех же условиях; значение  $\varepsilon^c$  можно брать прямо с кривых ползучести. Значения  $\Psi(\beta, m)$  даны в таблице.

Значения  $\Psi(\beta, m)$

$\beta$	$m$			
	3	5	7	9
1,2	0,84	1,31	1,71	2,23
1,4	1,07	2,36	4,86	9,98
1,6	1,51	5,77	23,1	97,4
1,8	1,99	12,2	83,4	617
2,0	2,52	23	241	2800

**Ползучесть неравномерно нагретых труб.** Приведенные ниже результаты относятся к случаю простой зависимости от температуры, когда показатель ползучести  $m$  можно считать постоянным, при этом

$$B(T) = B_0 e^{cT}.$$

**Тонкостенная труба.** Температура  $T$  постоянная по толщине и длине трубы, но сравнительно медленно изменяется по окружности  $T = T(\varphi)$ , где  $\varphi$  — полярный угол. Скорость относительного увеличения наружного диаметра трубы

$$\xi_\varphi = B_1^* \sigma_\varphi^m, \quad (42)$$

причем

$$\sigma_\varphi = \frac{p}{\beta - 1}; \quad B_1^* = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi B_1(T) d\varphi,$$

здесь принято, что  $T(\varphi) = T(-\varphi)$ .

**Толстостенная труба** при осесимметричном установившемся поле температуры

$$T(r) = T(a) + T_* \ln \frac{r}{a},$$

где

$$T_* = \frac{T(b) - T(a)}{\ln b - \ln a}.$$

**Напряжения в трубе**

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= s_* \left[ 1 - \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu_*} \right]; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_r + 2\mu_* s_* \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu_*}; \\ \sigma_z &= \sigma_r + \mu_* s_* \left( \frac{b}{r} \right)^{2\mu_*}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где

$$\mu_* = \mu \left( 1 + \frac{1}{2} cT_* \right); \quad s_* = \frac{p}{\beta^{2\mu_*} - 1}.$$

### ВРЕМЯ РАЗРУШЕНИЯ (ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ)

В условиях ползучести величина разрушающего напряжения зависит от длительности работы; с увеличением длительности работы прочность падает. Вместо обычных характеристик прочности используют *предел длительной прочности* (напряжение, которое при данной температуре и данной длительности работы приводит к разрушению).

В условиях ползучести различают «вязкие» и «хрупкие» разрушения. Вязкие разрушения происходят при больших удлинениях (с образованием шейки) и отличаются относительной кратковременностью. Хрупкие разрушения происходят при малых удлинениях (иногда менее 1%) и реализуются обычно при сравнительно низких напряжениях (следовательно, при длительной работе). Имеются и смешанные типы разрушений.

Продолжительность работы детали обычно определяют экспериментально. В последнее время разработаны теоретические методы определения времени разрушения деталей по данным о разрушении стандартных образцов при растяжении [7, 8].

Время вязкого разрушения можно определить как время, в течение которого деталь неограниченно «расползается» (например, растягиваемый стержень превратится в бесконечно тонкую и длинную нить). Следовательно, определение времени вязкого разрушения сводится к анализу неограниченного течения детали в условиях ползучести.

Так, рассматривая ползучесть стержня, растягиваемого силой  $P$ , получаем время вязкого разрушения

$$t_1 = \frac{1}{m\xi_0}; \quad \xi_0 = B_1\sigma_0^m, \quad (44)$$

где  $\xi_0$  есть скорость деформации при начальном напряжении  $\sigma_0$ . Опытные данные удовлетворительно согласуются с решением (44).

Тонкостенная труба под действием внутреннего давления. Анализ неограниченного расширения трубы приводит к следующей формуле:

$$t_1 = \frac{1}{2m\xi_{\varphi 0}}; \quad \xi_{\varphi 0} = \frac{B}{2} \left( \frac{pa}{2h} \right)^m, \quad (45)$$

где  $\xi_{\varphi 0}$  — начальная скорость деформации (скорость деформации по диаметру при малых смещениях).

Толстостенная труба под действием внутреннего давления. В этом случае

$$t_1 = \frac{1}{B_1 m \sigma_*^m}; \quad \sigma_* = k_1 p. \quad (46)$$

Коэффициент  $k_1$  определяют по формуле

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{m} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2m\Phi(\beta)} \right]^{\frac{1}{m}},$$

где

$$\Phi(\beta) = \int_1^\beta \left( 1 - x^{-\frac{2}{m}} \right) \frac{x dx}{x^2 - 1}.$$

Теоретическое время вязкого разрушения несколько больше наблюдаемого в опытах.

**Хрупкое (малодеформационное) разрушение** связано с накоплением повреждений в металле, в частности — с развитием трещиноватости. Уровень поврежденности можно характеризовать некоторой функцией  $\psi$ , изменяющейся в интервале  $1 \geq \psi \geq 0$  и называемой сплошностью. В начальном состоянии  $\psi = 1$ , в момент разрушения  $\psi = 0$ , функцию  $\psi$  можно интерпретировать как отношение несущей части площади сечения к первоначальной («неповрежденной») площади. Сплошность удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_{\max}}{\psi} \right)^n, \quad (47)$$

где  $A, n$  — постоянные, определяемые из опытов по растяжению образцов;  $\sigma_{\max}$  — наибольшее растягивающее напряжение.

Как показывают опытные данные, наибольшее растягивающее напряжение  $\sigma_{\max}$  является удовлетворительным критерием прочности при хрупких разрушениях в условиях ползучести. Отношение  $\frac{\sigma_{\max}}{\psi}$  можно рассматривать как истинное напряжение в поврежденном металле. Согласно уравнению (47) скорость развития повреждений пропорциональна  $n$ -й степени истинного напряжения. Степенная зависимость взята для простоты расчетов. При растяжении стержня время хрупкого разрушения

$$t' = \frac{1}{(n+1) A \sigma_0^n}. \quad (48)$$

С помощью уравнения (36) может быть изучено время хрупкого разрушения различных деталей (труб, дисков и т. д. [25]).

Уравнение (47) может быть применено к определению времени разрушения при переменных напряжениях. Тогда из этого уравнения можно вывести формулу суммирования повреждений

$$\sum_{j=1}^r \frac{t_j}{t'_j} = 1; \quad (49)$$

здесь  $t_j$  — интервал времени, в течение которого действовало постоянное напряжение  $\sigma_j$  (режим  $j$ );  $t'_j$  — время разрушения:

$$t'_j = \frac{1}{(n+1) A \sigma_j^n},$$

вычисляемое в предположении, что  $\sigma_j$  действует все время;  $r$  — число режимов. Напряжения  $\sigma_j$  должны быть найдены из решения задачи ползучести для рассматриваемой детали.

Если напряжение  $\sigma_0$  меняется во времени непрерывно, формула суммирования повреждений принимает вид

$$\int_0^{t'} \sigma_0^n(t) dt = \frac{1}{A(n+1)}.$$

Отсюда находят время разрушения  $t'$ . Напряжение  $\sigma_0(t)$  определяют из решения задачи о неустановившейся ползучести. Хрупкие разрушения в условиях ползучести происходят во многих случаях при малых деформациях ползучести, сопоставимых по величине с упругими деформациями. На условия работы детали эти деформации ползучести часто не оказывают сколько-нибудь заметного влияния. Это не означает, однако, что можно пренебрегать ползучестью, так как последняя может существенно изменить распределение напряжений в детали. Для расчета длительной прочности важно знать действительные напряжения в детали, зависящие от процесса ползучести.

Изменения, которые вносит ползучесть в напряженное состояние детали, зависят от характера нагрузок. При быстро меняющихся знакопеременных нагрузках ползучесть в ряде случаев не успевает проявиться [29].

Смешанный тип разрушения (разрушение происходит хрупко, но при заметных деформациях) анализируется, как процесс трещинообразования, развертывающийся на фоне возрастающих деформаций ползучести [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Альфрей Т. Механические свойства высокополимеров. М. Гостехиздат, 1952.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1953.
3. Биргер И. А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 2, 1965.
4. Ван-Бюрнен. Дефекты в кристаллах. М., ИЛ, 1962.
5. Вани Прагер. Влияние ползучести и нагрева в упрочняющихся упруго-пластических телах. Сб. перев. «Механика», № 2, 1955.
6. Гольденблатт И. И., Николаенко Н. А. Теория ползучести строительных материалов. М., Гостройиздат, 1960.
7. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
8. Качанов Л. М. Время разрушения в условиях ползучести. Проблемы механики сплошной среды. М., изд-во, АН 1961.
9. Качанов Л. М. К вопросу ползучести анизотропных тел. Изв. АН СССР, Механика, № 4, 1964.
10. Коттрелл А. Дислокация и пластическое течение в кристаллах. М., Металлургиздат, 1958.
11. Куратов П. С., Розенблюм В. И. Об интегрировании уравнений неустановившейся ползучести. Прикладная математика и механика. Т. 24, вып. 1, 1960.
12. Малинин Н. Н. Основы расчетов на ползучесть. М., Машгиз, 1948.
13. Малинин Н. Н. Расчеты на ползучесть. В кн. Пономарев С. Д. и др., «Расчеты на прочность в машиностроении». Т. II. М., Машгиз, 1958.
14. Наместников В. С. О ползучести при переменных нагрузках. Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 1957.
15. Наместников В. С. О ползучести при сложном напряженном состоянии. В кн. «Ползучесть и длительная прочность». Изд-во СО АН СССР, 1963.
16. Одинг И. А. и др. Теория ползучести и длительной прочности металлов. М., Металлургиздат, 1959.
17. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
18. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. Прикладная математика и механика. Т. 12. Вып. 1, 1948.
19. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1957.
20. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., Гостехиздат, 1949.

21. Розенблюм В. И. Об использовании критерия максимального касательного напряжения. Изв. АН СССР, ОТН. Механика, № 5, 1959.
  22. Розенблюм В. И. Время до разрушения вращающегося диска. Прикладная математика и механика. Т. 21. Вып. 3, 1957.
  23. Розовский М. И. О некоторых процессах деформирования материалов. Изв. АН Арм. ССР. Т. 8, № 3, Ереван, 1955.
  24. Салли А. Ползучесть металлов. М., Оборонгиз, 1953.
  25. Ползучесть и длительная прочность. Труды совещания по ползучести. Изд-во СО АН СССР, 1963.
  26. Finnie a. Heller. Creep of Eng. Materials, N. Y. London, 1959.
  27. Johnson, Henderson, Khan. Complex—stress creep, relaxation, and fracture of metallic alloys. Edinburgh, 1962.
  28. Marin J. Mechanical Behavior of Eng. Materials. Prentice—Hall, 1962.
  29. Odqvist u. Hult. Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe Springer-Verlag, 1962.
  30. Odqvist. Mathematical theory of creep and creep rupture. Oxford, 1966.
-

## Глава 5

## ТЕРМОУПРУГОСТЬ И ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТЬ

## УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Рассмотрим упругое изотропное неравномерно нагретое тело. Температурное поле  $T = T(x, y, z, t)$  предполагаем известным и независимым от напряженного состояния. Влияние изменений объема, вызываемых напряжениями, на тепловое поле крайне незначительно и в технических задачах, как правило, можно не учитывать.

**Закон Гука при тепловых расширениях.** Складывая тепловые расширения с удлинениями, обусловленными напряжениями, имеем

[illegible]

где  $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения.

Модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  являются, вообще говоря, функциями температуры. Решая уравнения (1) относительно напряжений, получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_x - \frac{\alpha}{k} T; \\ \dots\dots\dots \\ \tau_{xz} &= \mu \gamma_{xz}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где модули  $\lambda$ ,  $\mu = G$ ,  $k$  (см. гл. 2) — также функции температуры. Относительное изменение объема

$$\varepsilon = 3k\sigma + 3\alpha T, \quad (3)$$

здесь

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad k = \frac{1-2\nu}{E}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

**Уравнения термоупругости в перемещениях.** Используя принцип сложения действия сил, можно разыскивать температурные смещения и напряжения при нулевых внешних силах, а затем сложить найденные величины со смещениями и напряжениями от действия заданных нагрузок.

Внося уравнения (2) в дифференциальные уравнения равновесия (12) гл. 1 и опуская объемные силы  $X, Y, Z$  и инерционные члены, получаем уравнения термоупругости в перемещениях ( $E, \nu, \alpha$  постоянные)

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \mu \Delta u - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \mu \Delta v - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \mu \Delta w - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**Уравнения термоупругости в напряжениях.** В случае первой основной задачи на поверхности тела  $S$  заданы напряжения, и часто удобно решать такую задачу в напряжениях.

Для чисто температурных напряжений напряжения на поверхности тела равны нулю. Температурные напряжения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \text{и т. д.;} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

условиям сплошности ( $E, \nu, \alpha = \text{const}$ )

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_x + \frac{3}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\alpha E}{1 - \nu} \Delta T + \frac{\alpha E}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 \\ \text{и т. д.;} \\ \Delta \tau_{xy} + \frac{3}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha E}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \text{и т. д.;} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и условиям на поверхности тела

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos \hat{n}x + \tau_{xy} \cos \hat{n}y + \tau_{xz} \cos \hat{n}z &= 0 \\ \text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Температурные напряжения равны нулю, если температура  $T$  постоянна, или является линейной функцией координат.

**Вариационные уравнения термоупругости.** Принцип минимума потенциальной энергии системы имеет вид

$$\int_V W dV - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \int_V T \epsilon dV = \min; \quad (8)$$



здесь  $W$  — плотность упругой потенциальной энергии (12) гл. 2:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

В первой основной задаче возможные перемещения произвольны на поверхности тела.

Во второй основной задаче возможные перемещения на поверхности тела равны нулю.

В смешанной задаче на части поверхности  $S_F$  возможные перемещения произвольны, а на  $S_u$  равны нулю.

Принцип Кастильяно имеет вид

$$\int_V W dV + 3\alpha \int_V T\sigma dV = \min. \quad (9)$$

Допустимые напряжения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия (без объемных сил) и однородным граничным условиям на  $S_F$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny + \tau_{xz} \cos nz = 0 \\ \text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Плотность потенциальной энергии  $W$  определяется первой формулой (12) гл. 2.

Способы построения приближенных решений уравнений (8) и (9) аналогичны способам, изложенным в гл. 2 для случая равномерно нагретого тела.

**Теорема о взаимности работ.** На основе аналогии температурной задачи с задачей о напряженном состоянии тела под действием некоторых фиктивных объемных и поверхностных нагрузок теорема о взаимности работ (22) гл. 2 переносится на задачи термоупругости. Выбирая определенным образом силы и перемещения первого и второго состояний, имеем

$$u(M) = 3\alpha \int_V T(N) \sigma^{(x)}(N, M) dV(N). \quad (11)$$

Два аналогичных соотношения имеют место для  $v(M)$ ,  $w(M)$ . В этих формулах  $N$  — произвольная точка тела;  $\sigma^{(x)}(N, M)$  — среднее давление в точке  $N$ , вызванное единичной сосредоточенной силой, приложенной в точке  $M$  и направленной параллельно оси  $x$ . Формулы (11) дают решение задачи термоупругости, если известны функции Грина  $\sigma^{(x)}(N, M)$ ,  $\sigma^{(y)}(N, M)$ ,  $\sigma^{(z)}(N, M)$ . Этот метод развит в работах В. М. Майзеля [16].

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ

**Плоская деформация** имеет место в длинном цилиндрическом теле (с осью  $z$ ), если осевое перемещение  $w = 0$ , температура не зависит от координаты  $z$ , т. е.  $T = T(x, y)$ ; внешние нагрузки считаем отсутствующими. Тогда

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - \alpha ET; \quad \epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (12)$$

Если длинное цилиндрическое тело имеет свободные торцы, то оно может удлиняться и  $\omega \neq 0$ . Напряжения, подсчитанные согласно формуле (12), приводятся к осевому усилию  $P$  и двум моментам  $M_x$  и  $M_y$ . Случай свободных торцов можно получить, добавив к напряжению  $\sigma_z$  по формуле (12) напряжения от сжимающей силы  $P$  и напряжения от действия изгибающих моментов  $-M_x$ ,  $-M_y$ .

Функция напряжений  $\Phi$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta^2 \Phi + \frac{\alpha E}{1-\nu} \Delta T = 0. \quad (13)$$

Если поле температуры стационарное, то  $\Delta T = 0$  и тогда функция напряжений является *бигармонической*. Нагрузку по боковой поверхности можно считать отсутствующей, следовательно, граничные условия для функции напряжений будут однородными. Тогда в *односвязном* цилиндре напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  равны нулю (для любого стационарного поля). Этот результат принадлежит Н. И. Мусхелишвили [18].

В *многосвязном* цилиндре температурные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  будут совпадать с напряжениями в таком же равномерно нагретом цилиндре, подвергнутом некоторой дислокации [17, 18].

Дислокации связаны с возможными в многосвязных областях многозначными смещениями и имеют следующий смысл. Так, в двухсвязной области (рис. 1, а) можно удалить тонкую полоску и затем принудительно вновь соединить края разрыва (рис. 1, б); при этом в теле возникнут деформации и напряжения. Эти напряжения, как отмечено выше, совпадают с температурными напряжениями при надлежащем выборе характеристик дислокации.

Температурные напряжения в трубе при установившейся температуре. Распределение температуры имеет вид

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi], \quad (14)$$

где  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$  — постоянные;  $a$ ,  $b$  — соответственно внутренний и наружный диаметры трубы.

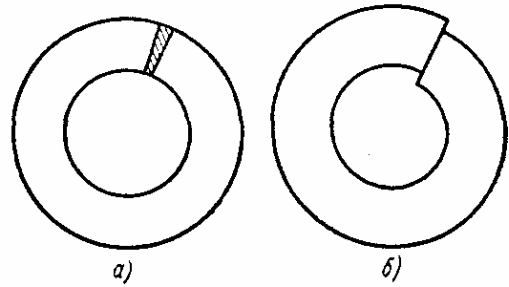


Рис. 1. Дислокации в круговом кольце

Осесимметричное поле отвечает первым двум членам разложения (14); тогда  $T_1$ ,  $T_2$  — температуры соответственно внутренней и наружной поверхностей трубы. Температурные напряжения

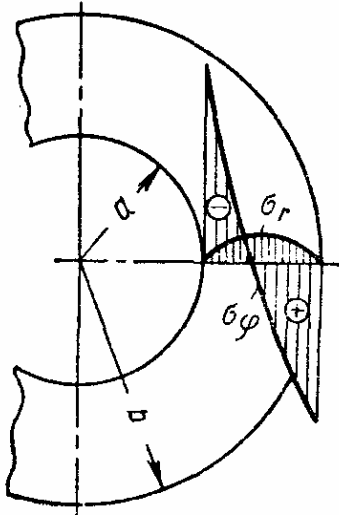


Рис. 2. Температурные напряжения в трубе

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C \left[ \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right]; \\ \sigma_\varphi &= C \left[ \frac{\ln \frac{b}{r} - 1}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right]; \\ \tau_{r\varphi} &= 0; \quad C = -\frac{E\alpha(T_1 - T_2)}{2(1 - \nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Напряжение  $\sigma_z$  определяют по формуле (12). Напряжения по формулам (15) такие же, как при чистом изгибе разрезанного кругового кольца. Соответствующая дислокация состоит в удалении радиального клина и сведении краев разреза. Распределение напряжений для случая  $T_1 > 0$ ;  $T_2 = 0$  показано на рис. 2. Для тонкостенной трубы напряжения  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  на внутренней и наружной поверхностях трубы: при  $r = a$

$$\sigma_\varphi = \sigma_z = -\frac{\alpha E T_1}{2(1 - \nu)};$$

при  $r = b$

$$\sigma_\varphi = \sigma_z = +\frac{\alpha E T_1}{2(1 - \nu)}.$$

Неосесимметричное тепловое поле соответствует в разложении (14) бесконечной сумме. Напряжения зависят только от коэффициентов  $b_1$  и  $d_1$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E\alpha}{2(1 - \nu)} \cdot \frac{r}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \times \\ &\quad \times (b_1 \cos \varphi + d_1 \sin \varphi); \\ \sigma_\varphi &= \frac{E\alpha}{2(1 - \nu)} \cdot \frac{r}{a^2 + b^2} \left( 3 - \frac{a^2 + b^2}{r^2} - \frac{a^2 b^2}{r^4} \right) \times \\ &\quad \times (b_1 \cos \varphi + d_1 \sin \varphi); \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{E\alpha}{2(1 - \nu)} \cdot \frac{r}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \times \\ &\quad \times (b_1 \sin \varphi - d_1 \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Напряжение  $\sigma_z$  вычисляется по формуле (12), причем для температуры  $T$  берут в выражении (14) только бесконечную сумму.

Напряжения по формулам (16) соответствуют напряжениям в разрезанном круговом кольце при изгибе силой. Если тепловое поле, кроме бесконечной суммы, содержит еще первые два члена, то напряжения в трубе будут складываться из напряжений согласно формулам (15) и (16).

Случай произвольного осесимметричного теплового поля  $T = T(r)$ . Формулы для напряжений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^2} \left[ \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr - \int_a^r T r dr \right]; \\ \sigma_\varphi &= \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^2} \left[ \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr + \int_a^r T r dr - T r^2 \right]; \\ \sigma_z &= -\frac{\alpha E T}{1-\nu} + \frac{2\nu\alpha E}{(1-\nu)(b^2 - a^2)} \int_a^b T r dr. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Эти формулы относятся к случаю плоской деформации ( $\epsilon_z = 0$ ). Для сплошного цилиндра следует положить  $a = 0$ . В случае свободных торцов к  $\sigma_z$  следует добавить напряжения равномерного сжатия так, чтобы равнодействующая суммарных напряжений была равна нулю. При этом формулы для  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  не изменятся, а в формуле для  $\sigma_z$  не будет множителя  $\nu$  в числителе второго слагаемого.

Для установившегося поля формулы (17) приводят к решению (15).

**Температурные напряжения в охлаждающем ребре.** К телу с температурой  $T_0$  присоединено тонкое ребро шириной  $b$  и толщиной  $h$  (рис. 3).

Поверхности  $x = \pm \frac{h}{2}$  отдают тепло

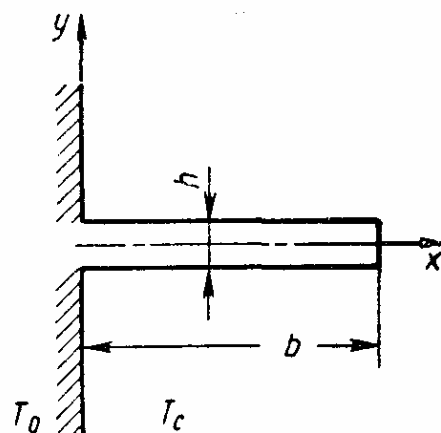


Рис. 3. Охлаждающее ребро

в окружающую среду, имеющую температуру  $T_c$ . Напряжения в ребре

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = -E\alpha(T_0 - T_c) \frac{\operatorname{ch} m(b-x)}{\operatorname{ch} mb},$$

где  $m = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}$ ;  $k$  — коэффициент теплопередачи;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

**Плоское напряженное состояние** реализуется в тонкой пластине при температурном поле, зависящем лишь от координат  $x, y$  в плоскости пластины. В этих задачах

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0,$$

а функция напряжений  $\Phi$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 \Phi + \alpha E \Delta T = 0, \quad (18)$$

отличающемся от уравнения (13) постоянным множителем перед вторым членом. Следовательно, задачи о температурных напряжениях при плоской деформации и плоском напряженном состоянии приводятся к одной и той же математической проблеме.

**Напряжения в тонком круглом диске при осесимметричном поле температуры;** тогда  $T = T(r)$ . Пусть диск имеет постоянную толщину. Напряжения в диске радиуса  $b$  при произвольном тепловом поле

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \alpha E \left( \frac{1}{b^2} \int_0^b T r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right); \\ \sigma_\varphi &= \alpha E \left( -T + \frac{1}{b^2} \int_0^b T r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Напряжения в диске переменной толщины определить более сложно [1, 3].

Для диска с отверстием напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  можно вычислять по формулам (17), предварительно вычеркнув в знаменателях множитель  $(1 - \nu)$ .

В случае установившегося поля температуры напряжения в диске (внутренний радиус  $a$ , внешний —  $b$ ) определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C_1 \left[ \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right]; \\ \sigma_\varphi &= C_1 \left[ \frac{\ln \frac{b}{r} - 1}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$C_1 = -\frac{1}{2} E \alpha (T_1 - T_2).$$

Напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  в диске меньше соответствующих напряжений в трубе в  $(1 - \nu)$  раз.

**Напряжения в круглом диске, вызванные источником тепла, находящимся в центре.** Источник тепла мощностью  $Q$ , контур  $r = b$  диска имеет постоянную температуру  $T = 0$ :

$$\sigma_r = q \ln \frac{b}{r}; \quad \sigma_\varphi = q \left( \ln \frac{b}{r} - 1 \right),$$

где положено

$$q = \frac{E\alpha Q}{4\lambda\pi h},$$

здесь  $h$  — толщина диска;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности [17].

Напряжения в круглом диске при постоянной температуре границы  $r = b$  и потере тепла через боковые поверхности  $z = \pm \frac{h}{2}$  [17]:

$$\sigma_r = q \left[ \frac{I_1(mb)}{mb} - \frac{I_1(mr)}{mr} \right];$$

$$\sigma_\varphi = q \left[ \frac{I_1(mb)}{mb} + \frac{I_1(mr)}{mr} - I_0(mr) \right],$$

где

$$q = \frac{E\alpha Q}{2\lambda\pi hmbI_1(mb)}; \quad m = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}},$$

здесь  $k$  — коэффициент теплопередачи;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $Q$  — количество тепла, подводимое к границе  $r = b$  в единицу времени;  $I_1$  — цилиндрическая функция первого порядка от мнимого аргумента.

Напряжения в бесконечной пластине с круговым отверстием при подводе тепла вдоль контура отверстия и охлаждения через боковые поверхности [17]:

$$\sigma_r = \frac{q}{r} \left[ -\frac{K_1(mr)}{K_1(ma)} + \frac{a}{r} \right];$$

$$\sigma_\varphi = \frac{q}{r} \left[ \frac{mrK_0(mr) + K_1(mr)}{K_1(ma)} - \frac{a}{r} \right],$$

где  $q = -\frac{E\alpha Q}{2\lambda\pi ham^2}$ ;  $a$  — радиус отверстия;  $K_0(mr)$ ,  $K_1(mr)$  — цилиндрические функции нулевого и первого порядка от мнимого аргумента.

Решения задач о напряжениях в осесимметричных пластинках при других граничных условиях см. в работах [4, 17].

Напряжения в длинной полосе при одномерном распределении температуры (рис. 4). Температура  $T = T(y)$ ; рассмотрим различные случаи закрепления концов пластины  $x = \pm l$ . Во всех случаях  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , отлично от нуля  $\sigma_x$ .

Концы пластины закреплены

$$\sigma_x = -E\alpha T.$$

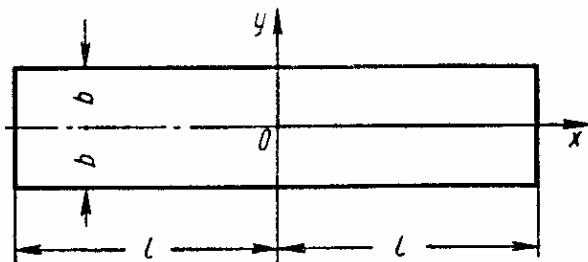


Рис. 4. Длинная полоса ( $l \gg b$ )

Концы пластины свободны  $T(y) = T(-y)$ .

$$\sigma_x = -E\alpha \left[ T - \frac{1}{2b} \int_{-b}^b T(y) dy \right]. \quad (21)$$

Концы пластины свободны, температурное поле несимметрично

$$\sigma_x = -E\alpha \left[ T - \frac{1}{2b} \int_{-b}^b T(y) dy + \frac{3y}{2b^3} \int_{-b}^b T(y) y dy \right]. \quad (22)$$

Формулы (21) и (22) справедливы на некотором расстоянии от концов.

**Напряжения в свободной пластине, симметрично нагретой по толщине.** Температура  $T = T(z)$ , причем  $T(z) = T(-z)$ .

Координату  $z$  отсчитывают от срединной плоскости  $x, y$ ; толщина пластины  $h$ , пластина тонкая. Тогда  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0$ , а

$$\sigma_x = \sigma_y. \text{ Используя формулы закона Гука (2) и условие } \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = 0,$$

получаем

$$\sigma_x = \frac{E\alpha}{1-\nu} (\bar{T} - T), \quad (23)$$

где  $\bar{T}$  — средняя температура по толщине пластины.

### ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ

**Общие уравнения.** В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  (по оси вращения) отличные от нуля компоненты деформации будут

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \epsilon_\varphi = \frac{u}{r}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right).$$

Компоненты напряжения  $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$ . Дифференциальные уравнения для перемещений имеют вид ( $\Delta$  — оператор Лапласа)

$$\left. \begin{aligned} \Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial r} &= \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial r}; \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial z} &= \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Компоненты перемещения можно представить в форме

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

причем потенциал  $\Phi(r, z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T. \quad (25)$$

Компоненты напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \Delta\Phi \right) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \Delta\Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) \right]; \\ \sigma_\varphi &= 2G \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Delta\Phi + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \Delta\Psi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right]; \\ \sigma_z &= 2G \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \Delta\Phi + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( (2-\nu) \Delta\Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \right]; \\ \tau_{rz} &= 2G \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( (1-\nu) \Delta\Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где функция Лява  $\Psi$  — бигармоническая  $\Delta\Delta\Psi = 0$ .

**Источник тепла на поверхности полупространства.** Начало координат помещено в точечном источнике. Тепловое поле определяется формулой

$$T = \frac{Q}{4\pi\lambda R}; \quad R^2 = r^2 + z^2; \quad z \geq 0,$$

где  $Q$  — мощность источника тепла. Напряжения имеют вид

$$\sigma_r = -2(1-\nu)q \frac{1}{R+z}; \quad \sigma_\varphi = 2(1-\nu)q \left( \frac{1}{R+z} - \frac{1}{R} \right),$$

здесь

$$q = G \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha Q}{4\pi\lambda}.$$

Компоненты напряжения  $\sigma_r, \tau_{rz}$  равны нулю.

**Температурные напряжения в шаре.** Начало сферической системы координат  $r, \varphi, \theta$  помещено в центре шара; температура является функцией только радиуса  $r$ . Обозначим через  $a$  и  $b$  внутренний и наружный радиусы полого шара, тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[ \frac{r^3 - a^3}{(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b T r^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_a^r T r^2 dr \right]; \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta &= \frac{2\alpha E}{1-\nu} \left[ \frac{2r^3 + a^3}{2(b^3 - a^3)r^3} \int_a^b T r^2 dr + \frac{1}{2r^3} \int_a^r T r^2 dr - \frac{1}{2} T \right]. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Для сплошного шара  $a = 0$ .



Если поле температуры — установившееся, то

$$T = \frac{aT_1}{b-a} \left( \frac{b}{r} - 1 \right),$$

где  $T_1$  — температура внутренней поверхности; температура наружной поверхности равна нулю. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= c \left[ a + b - \frac{1}{r} (a^2 + ab + b^2) + \frac{a^2 b^2}{r^3} \right]; \\ \sigma_\varphi &= c \left[ a + b - \frac{1}{2r} (a^2 + ab + b^2) - \frac{a^2 b^2}{2r^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где

$$c = \frac{\alpha E T_1}{1 - \nu} \cdot \frac{ab}{b^3 - a^3}.$$

Если шар тонкостенный, то радиальное напряжение мало, а тангенциальное у поверхностей шара

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = - \frac{\alpha E T_1}{2(1 - \nu)} \left( \frac{2}{3} \kappa \mp 1 \right),$$

знак минус берут при  $r = a$ , а знак плюс — при  $r = b$ ; величина  $\kappa = \frac{b}{a} - 1$ ;  $\kappa \ll 1$ .

### О ЗАДАЧАХ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ

Предыдущие результаты получены в предположении, что в рассматриваемом интервале температур упругие постоянные и коэффициент линейного расширения постоянны. Если же интервал температур значительный, то необходимо учитывать зависимость коэффициентов упругости от температуры, т. е.

$$E = E(T), \quad \nu = \nu(T).$$

Уравнения теории упругости становятся уравнениями с переменными коэффициентами, что существенно усложняет решение задач. Так как температура — заданная функция координат, то коэффициенты упругости являются известными функциями координат. Следовательно, рассматриваемая задача термоупругости приводится к соответствующей задаче для неоднородного равномерно нагретого упругого тела при некоторых фиктивных объемных и поверхностных нагрузках.

В осесимметричных задачах возможны некоторые аналитические решения; широко применяют численные методы [1, 2].

## НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

**Квазистатические задачи.** При изменяющихся со временем тепловых полях изменяются и поля температурных напряжений. Обычно при рассмотрении указанных задач можно пренебрегать силами инерции. При этом упрощении мы имеем квазистатические задачи. Время будет входить в решение как параметр, содержащийся в формулах, определяющих тепловое поле. Например, в формулы для напряжений в трубе (17), в диске (19), шаре (27) достаточно внести соответствующие тепловые поля  $T = T(r, t)$ .

Типичные нестационарные тепловые поля, представляющие интерес для применения:

поля при нагревании (или охлаждении); многочисленные примеры вычисленных полей напряжения приведены в книгах [4, 17, 19];

периодически изменяющиеся тепловые поля; по прошествии достаточного времени влияние начальной стадии процесса затухает и можно рассматривать чисто периодические изменения температуры, при этом напряженное состояние также будет испытывать периодические изменения; различные задачи этого типа изложены в работах [4, 17, 19];

поля движущихся источников тепла. В общем случае определение теплового поля связано с большими математическими трудностями.

В случаях, когда тепловой источник движется с постоянной скоростью в неограниченном теле (примеры: точечный источник перемещается по поверхности полупространства; линейный источник перемещается вдоль бесконечной полосы и т. д.), задача о нахождении теплового поля существенно упрощается. Вводят вспомогательную систему координат, движущихся вместе с источником; относительно этой координатной системы температурное поле не зависит от времени [4, 17, 19].

В тех случаях, когда источник перемещается с постоянной скоростью по окружности в теле вращения, температурное поле является периодическим [19].

**Динамические задачи.** Вопрос о необходимости учета сил инерции возникает при весьма быстром нагреве (тепловой удар) или при быстрых периодических изменениях температуры.

Решение ряда задач с учетом сил инерции [4, 19] показывает, что даже при очень высоких скоростях нагрева при тепловом ударе динамический эффект, как правило, не имеет практического значения. Влияние инерционных членов для оболочек и пластин растет с уменьшением толщины, но может быть заметным только для очень тонких оболочек, пластин и балок [4, 19].

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

**Общие замечания.** Расчет температурных напряжений при пластических деформациях значительно труднее, чем для упругого тела. Исходные соотношения, связывающие напряжения и деформации, становятся нелинейными, вследствие чего необходимо решать нелинейные дифференциальные уравнения. Из-за нелинейности недопустимо наложение решений, поэтому нельзя, как это делалось для упругого тела, рассматривать отдельно задачу о напряжениях в теле от внешней нагрузки и задачу о чисто температурных напряжениях. Изучены лишь

одномерные задачи (с одной независимой переменной). Решение более сложных задач может быть получено численными методами, вариационными методами или методами малого параметра [2, 3, 5, 17, 25].

**Уравнения термопластичности** состоят из общих уравнений механики сплошных сред (уравнений равновесия и сплошности) и уравнений пластического состояния, в которые необходимо включить тепловое расширение.

В теории пластического течения уравнения Прандтля—Рейса [(3) гл. 3] принимают вид

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon &= 3kd\sigma + 3\alpha dT; \\ d\varepsilon_x - \frac{1}{3} d\varepsilon &= \frac{1}{2G} ds_x + \lambda s_x; \dots; \\ d\gamma_{xz} &= \frac{1}{G} d\tau_{xz} + 2\lambda\tau_{xz}; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

здесь рассмотрен простой случай, когда механические свойства не зависят от температуры (см. работу [4]).

В теории упруго-пластических деформаций уравнения (14) гл. 3 переписываются теперь в форме

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 3k\sigma + 3\alpha T; \\ \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon &= \psi s_x; \dots; \gamma_{xz} = 2\psi\tau_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Условия текучести и упрочнения сохраняют прежний вид.

Так же, как и для равномерно нагретого тела, можно добиться в ряде задач значительных упрощений, если использовать критерий  $\tau_{\max}$  и закон ассоциированного течения.

**Вариационные уравнения для неравномерно нагретого тела.** В теории упруго-пластических деформаций для решения конкретных задач используют вариационные методы. Приведем вариационные уравнения, являющиеся обобщением уравнений (34) и (35) гл. 3.

Принцип минимума полной энергии. Действительные перемещения сообщают полной энергии тела минимальное значение

$$\int_V \Pi dV - \frac{\alpha}{k} \int_V T\varepsilon dV - A = \min, \quad (31)$$

где  $A$  — работа внешних сил;  $\Pi$  — потенциал деформации (гл. 3).

Выполняя варьирование в уравнении (31), можно показать, что в случае неравномерного нагрева определение перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  сводится к «обычной» изотермической задаче добавлением к заданным объемным силам  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  фиктивной объемной силы  $-\frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $-\frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$ ,

$-\frac{\alpha}{k} \frac{\partial T}{\partial z}$ , а к заданным поверхностным нагрузкам  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$  — фиктивного нормального растяжения  $\frac{\alpha}{k} T$  (на части поверхности  $S_F$ ).

Этот результат аналогичен соответствующему результату для упругого тела.

Принцип минимума дополнительной работы. Действительное напряженное состояние сообщает минимум дополнительной работе тела

$$\int_V R dV + 3\alpha \int_V T\sigma dV = \min, \quad (32)$$

где  $R$  — дополнительная работа (см. гл. 3).

Вариационные уравнения для упругого тела (8) и (9) являются частными случаями вариационных уравнений (31) и (32).

Напряжения в неравномерно нагретом упруго-пластическом теле можно представить в том же виде (5), причем компоненты  $\sigma'_x, \dots, \tau'_{xz}$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия и сплошности для равномерно нагретого тела при действии дополнительных к  $X, Y, Z$  фиктивных объемных сил  $-\frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, -\frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\alpha}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$  на поверхности тела, кроме заданных нагрузок  $X_n, Y_n, Z_n$ , действует фиктивное нормальное растяжение  $\frac{\alpha}{k} T$ .

**Приспособляемость неравномерно нагретых упруго-пластических тел.** При более или менее значительных циклических изменениях температурного поля возможны нарастание пластической деформации или переменные пластические деформации; последние приводят к разрушению вследствие «тепловой» усталости. Можно указать такую предельную амплитуду цикла, при которой указанные явления не возникают. При этом тело приспособляется к колебаниям температуры, благодаря появлению благоприятного поля остаточных напряжений.

Для неравномерно нагретого тела сохраняется теорема Мелана (см. гл. 3): необходимым и достаточным условием приспособляемости является существование такого поля остаточных напряжений  $\bar{\sigma}_x, \dots, \bar{\tau}_{xz}$ , что интенсивность  $\sigma_i$  суммарного напряженного состояния  $\bar{\sigma}_x + \sigma_x^e, \dots, \bar{\tau}_{xz} + \tau_{xz}^e$  (где  $\sigma_x^e, \dots, \tau_{xz}^e$  — термоупругие напряжения) не превосходит предела текучести  $\sigma_T$ .

Рассмотрим свободное тело, испытывающее лишь циклический нагрев. В случае регулярного теплового режима

$$T = T_0(t) + \rho(t) \Phi(x, y, z); \quad 0 \leq \rho \leq \rho_1,$$

где  $T_0(t), \rho(t)$  — известные функции времени; это поле отвечает медленным изменениям теплового режима. Термоупругие напряжения имеют вид  $\sigma_x^e = \rho \sigma_x^0, \dots, \tau_{xz}^e = \rho \tau_{xz}^0$ , где  $\sigma_x^0, \dots, \tau_{xz}^0$  не зависят от времени; другими словами,  $\sigma_x^0, \dots, \tau_{xz}^0$  — температурные напряжения в упругом теле для стационарного теплового поля  $T = \Phi(x, y, z)$ . Полагая  $\bar{\sigma}_x = c \sigma_x^0, \dots, \bar{\tau}_{xz} = c \tau_{xz}^0$ , где  $c$  — некоторая постоянная, находим по теореме Мелана, что приспособляемость имеет место, если интенсивность термоупругих напряжений не превышает удвоенного предела текучести.

Рассмотренная система — однопараметрическая (параметр  $p$ ). Более сложен анализ приспособляемости многопараметрических систем [7, 8, 22, 23], когда изменяются температура и нагрузки.

**Напряжения в свободной пластине, симметрично нагретой по толщине** (рис. 5). Для упругой пластины эта задача рассмотрена на стр. 122. Основные обозначения и система координат сохраняются. Пусть пластина — упруго-пластическая, причем в пластических зонах справедливо условие текучести Мизеса.

Тогда в этих зонах

$$\sigma_x = \sigma_y = \pm \sigma_T.$$

Пусть для определенности  $T = T_0 \left( \frac{2z}{h} \right)^2$ , тогда  $\bar{T} = \frac{1}{3} T_0$  и в упругой пластине

$$\sigma_x = \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \left[ \frac{1}{3} - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right].$$

Рис. 5. Пластина, симметрично нагретая по толщине

Наибольшие по величине напряжения будут вблизи оснований пластины

$$\sigma_{\max} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{E\alpha T_0}{1-\nu}.$$

Приравнивая эту величину  $-\sigma_T$ , получаем температуру  $T_0 = \frac{3}{2} \frac{1-\nu}{E\alpha} \sigma_T$ , при которой возникают пластические деформации. При дальнейшем возрастании  $T_0$  образуются две пластические зоны  $c \leq z \leq \frac{h}{2}$ , в которых  $\sigma_x = \sigma_y = \pm \sigma_T$ . Из условий равенства нулю равнодействующей напряжений  $\sigma_x$  и условия непрерывности  $\sigma_x$  при  $z = c$  находим

$$\frac{2c}{h} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{(1-\nu) \sigma_T}{E\alpha T_0}};$$

при  $|z| \leq c$  имеем

$$\sigma_x = \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \left[ \left( \frac{2c}{h} \right)^2 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] - \sigma_T.$$

При достаточно большом  $T_0$  возникает третья зона пластичности вблизи срединной плоскости. При охлаждении возникнут остаточные напряжения.

**Упруго-пластическое состояние неравномерно нагретой трубы под действием внутреннего давления.** Точное решение рассматриваемой задачи связано с математическими трудностями и требует значительных вычислений [25, 26]. Ниже приведено приближенное решение задачи для случая установившегося теплового поля.

Напряжения в упругой трубе складываются из напряжений от действия внутреннего давления

$$\sigma_r' = \frac{-pa^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right);$$

$$\sigma_\phi' = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right); \quad \sigma_z' = \sigma_r' + \sigma_\phi' \quad (33)$$

и температурных напряжений (15). Исходим из условия текучести Треска—Сен-Венана  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_T}{2}$ . Анализируя напряженное состояние в трубе, определяем согласно условию текучести давление  $p$  и перепад температур, при которых впервые возникают пластические деформации в трубе. В дальнейшем необходимо рассматривать две зоны — пластическую и упругую, строить в каждой из них решение и определить неизвестный радиус пластической зоны из условий непрерывности. Приводимое ниже простое приближенное решение основано на предположении, что  $\sigma_z$  в пластической зоне является промежуточным главным напряжением; тогда условие текучести имеет вид

$$\sigma_\phi - \sigma_r = \pm \sigma_T. \quad (34)$$

Пусть для определенности поток тепла направлен снаружи внутрь ( $T_2 > T_1$ ), тогда пластическая зона примыкает к внутренней поверхности трубы, в условии (34) следует взять знак плюс и напряжения в пластической зоне ( $a \leq r \leq c$ ) будут

$$\sigma_r = -p + \sigma_T \ln \frac{r}{a}; \quad \sigma_\phi = \sigma_T + \sigma_r, \quad (35)$$

где  $c$  — радиус пластической зоны. Напряжения в упругой зоне ( $c \leq r \leq b$ ) получим из формул (33) и (15), заменяя в них  $a$  на  $c$ ,  $p$  на  $-q$ . Из непрерывности  $\sigma_r$  следует, что

$$q = -p + \sigma_T \ln \frac{c}{a}.$$

Из непрерывности  $\sigma_\phi$  при  $r = c$  вытекает уравнение для определения  $c$

$$\frac{\ln x - 1}{\ln x} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lambda \left[ \left( -\frac{p}{\sigma_T} + \ln \frac{\beta}{x} \right) \frac{2x^2}{x^2 - 1} + 1 \right] \frac{1}{\ln x}, \quad (36)$$

где

$$x = \frac{b}{c}; \quad \beta = \frac{b}{a}; \quad \lambda = \frac{2\sigma_T(1-\nu)\ln\beta}{E\alpha(T_2 - T_1)}.$$

Уравнение (36) целесообразно решать относительно  $\lambda$  при задании  $\frac{p}{\sigma_T}$  и  $x$ .

Влияние упрочнения, несимметричности теплового поля и других факторов см. в работах [25, 26].

**Упруго-пластическое состояние неравномерно нагретого полого шара, испытывающего действие внутреннего давления.** В случае центральной симметрии, как уже отмечалось в гл. 3, имеет место простое нагружение и можно исходить из уравнений теории упруго-пластических деформаций (30).

Напряжения в упругой трубе складываются из напряжений (21) гл. 3 от действия внутреннего давления и температурных напряжений (27). Анализ этого решения покажет, когда впервые станет выполняться условие текучести. Напряжения в пластической зоне

$$\sigma_r = -p + 2\sigma_T \ln \frac{r}{a}; \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + \sigma_T. \quad (37)$$

Здесь принято, что пластическая зона примыкает к внутренней поверхности  $r = a$ , а  $\sigma_\varphi > 0$ . Радиус пластической зоны  $c$  определяется по условиям непрерывности напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  на границе раздела  $r = c$ .

Для шара можно получить решение задачи о температурных напряжениях и при упрочнении материала [11].

### ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

**Ползучесть и температурные напряжения.** При достаточно высоких температурах металлы под действием напряжений испытывают заметную текучесть (ползучесть). Это явление приводит к изменению первоначального упругого (или упруго-пластического) напряженного состояния. Наиболее существенные изменения претерпевают температурные (и вообще — собственные) напряжения, которые с течением времени релаксируют и, в зависимости от интенсивности и длительности ползучести, могут практически исчезнуть. При охлаждении возникнут соответствующие остаточные напряжения.

Температурным напряжениям соответствуют малые деформации (порядка 0,001), поэтому дополнительные деформации ползучести, развивающиеся при релаксации температурных напряжений, незначительны. Следовательно, во многих случаях (для достаточно «вязких» материалов) можно в условиях ползучести пренебрегать влиянием температурных напряжений.

**Расчеты релаксации температурных напряжений** связаны с математическими трудностями. Обычно достаточно приближенного решения задачи, поэтому удобно использовать вариационный метод.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Б и р г е р И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961.
2. Б и р г е р И. А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 2, 1965.
3. Б л а н д Д. Упруго-пластическая толстостенная труба из упрочняющегося материала, подвергнутая внутреннему и внешнему давлениям и перепаду температур. Сб. перев. «Механика», № 2, 1957.

4. Боли Б. и Уэйнер Д. Теория температурных напряжений. М., «Мир», 1964.
  5. Вейнер Д. и Ландау Г. Температурные напряжения в упруго-пластических телах. «Пластичность и термопластичность». Библ. сб. «Механика». М., ИЛ, 1962.
  6. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения. М., ИЛ, 1959.
  7. Гохфельд Д. А. О приспособляемости в условиях повторных тепловых воздействий. Сб. «Тепловые напряжения в элементах турбомашин». Вып. 1. Киев, изд-во АН УССР, 1961.
  8. Гохфельд Д. А. и Ермаков П. И. Приспособляемость толстостенных сферических сосудов в условиях повторных воздействий теплового поля. Сб. «Расчеты на прочность». Вып. 10. М., «Машиностроение», 1964.
  9. Гребер Г. и Эрк С. Основы учения о теплообмене. М., ГОНТИ, 1936.
  10. Ильюшин А. А. и Огибалов П. М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. М., изд-во МГУ, 1960.
  11. Качанов Л. М. Механика пластических сред. М., Гостехиздат, 1948.
  12. Качанов Л. М. Упруго-пластическое равновесие неравномерно нагретых толстостенных цилиндров. ЖТФ, т. 10, № 14, 1940.
  13. Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. Киев, «Наукова думка», 1965.
  14. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. М., ГТТИ, 1937.
  15. Ляв А. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
  16. Майзель В. М. Температурная задача теории упругости. Изд-во АН УССР, 1951.
  17. Мелан Э. и Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., Физматгиз, 1958.
  18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд-во АН СССР, 1966.
  19. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., изд-во. АН СССР, 1962.
  20. Папкович П. Ф. Теория упругости. М., Оборонгиз, 1939.
  21. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., Физматгиз, 1963.
  22. Розенблюм В. И. О приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел. Изв. АН СССР. ОН, № 7, 1957.
  23. Розенблюм В. И. К теории приспособляемости упруго-пластических тел. Изв. АН СССР. ОН, № 6, 1958.
  24. Тимошенко С. П. Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
  25. Фомин В. Л. Плоская деформация упрочняющихся полых цилиндров под действием внутреннего давления и стационарного теплового поля. «Исследования по упругости и пластичности». Сб. 3. Л., Изд. ЛГУ, 1964.
  26. Шорр Б. Ф. К расчету неравномерно нагретых цилиндров в упруго-пластической стадии. Изв. АН СССР. ОН. Механика, № 6, 1960.
-



## Глава 6

### ТЕОРИЯ УПРУГО-ВЯЗКИХ ТЕЛ

Новые материалы, используемые в технике (в частности, полимеры), обладают сложными механическими свойствами. Деформация этих материалов обычно является неравновесным процессом, развертывающимся во времени по определенным законам. Правильное использование новых материалов требует знания законов деформации, которым они подчиняются.

Деформация и течение различных реальных материалов изучаются в *реологии* (наука о течении).

Реология охватывает обширный круг веществ — твердых и жидких, однородных и различных смесей. Ниже рассмотрены вопросы, связанные в основном с расчетами полимерных материалов, используемых в конструкциях.

#### ПРОСТЫЕ ТЕЛА

**Линейно упругое тело.** Упругий элемент, следующий закону Гука

$$\sigma_1 = E \epsilon_1, \quad (1)$$

где  $\sigma_1$  — нормальное напряжение;  $\epsilon_1$  — относительное удлинение при одноосном растяжении, можно изобразить в виде пружины (рис. 1, а);  $E$  — модуль упругости. Линейный закон показан на рис. 2, а прямой ОА.

Если упругая среда испытывает сложное напряженное состояние, выполняется обобщенный закон Гука (см. гл. 2)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \dots; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \quad (2)$$

где  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Относительное изменение объема  $\epsilon$  пропорционально среднему давлению [см. гл. 2 формулу (10)].

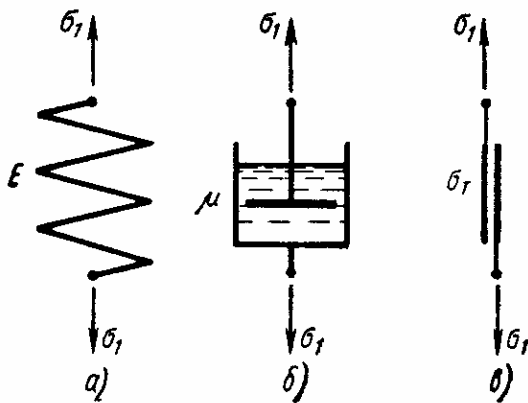


Рис. 1. Модели простых тел: а — упругий элемент; б — вязкий элемент; в — пластичный элемент

Закон Гука в форме, решенной относительно напряжений, имеет вид

$$\sigma_x = 2G \left( \epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon \right); \dots; \tau_{xz} = G\gamma_{xz}. \quad (3)$$

**Нелинейно упругое тело.** При одноосном растяжении уравнение деформирования нелинейно упругой среды имеет вид

$$\sigma_1 = f(\epsilon_1) \epsilon_1; \quad f(\epsilon_1) > 0. \quad (4)$$

Функцию  $f(\epsilon_1)$  определяют по экспериментальной кривой деформирования, показанной на рис. 2, а линией  $OB$ , эта функция численно равна тангенсу угла наклона секущей.

Подобный материал также можно представить пружиной, но с нелинейной характеристикой.

Сложное напряженное состояние нелинейно упругой среды описывается уравнениями теории упруго-пластической деформации (уравнениями Генки, см. гл. 3).

**Линейно вязкое тело** (ньютоновская жидкость). Элемент, следующий закону вязкости Ньютона

$$\sigma_1 = \mu \frac{d\epsilon_1}{dt}, \quad (5)$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости;  $\frac{d\epsilon_1}{dt} = \xi_1$  — скорость деформации (рассматривается одноосное растяжение), можно изобразить моделью, состоящей из поршня,двигающегося в цилиндре с вязкой жидкостью (рис. 1, б). Закону (5) на рис. 2, б отвечает прямая  $OA$ .

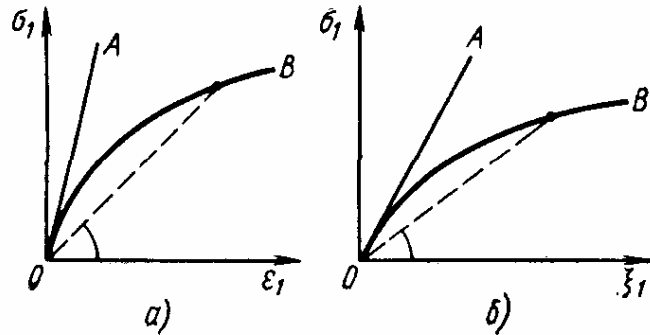


Рис. 2. Линейный и нелинейный законы: а — упругости; б — вязкости

При переходе к сложному напряженному состоянию обычно принимают, что объемная вязкость отсутствует, тогда компоненты скорости деформации (см. гл. 1) связаны с компонентами напряжения обобщенным законом Ньютона

$$\xi_x = \frac{3}{2\mu} (\sigma_x - \sigma); \dots; \eta_{xz} = \frac{3}{\mu} \tau_{xz}. \quad (6)$$

Компоненты напряжения являются линейными функциями компонентов скорости деформации

$$\sigma_x - \sigma = \frac{2\mu}{3} \xi_x; \dots; \tau_{xz} = \frac{\mu}{3} \eta_{xz}. \quad (7)$$

Вследствие несжимаемости компоненты напряжения определены компонентами скорости деформации с точностью до гидростатического давления  $\sigma$ .

**Нелинейно вязкое тело** (неньютоновская жидкость). При одноосном напряженном состоянии (растяжении, сжатии) уравнение нелинейно вязкого течения имеет вид

$$\xi_1 = \varphi(\sigma_1) \sigma_1, \quad \varphi(\sigma_1) > 0. \quad (8)$$

Функцию  $\varphi(\sigma_1)$  определяют по опытным данным; она численно равна тангенсу угла наклона секущей  $OB$  (рис. 2, б).

В сложном напряженном состоянии течение определяется уравнениями

$$\xi_x = \frac{3}{2} \varphi(\sigma_i) (\sigma_x - \sigma); \dots; \eta_{xz} = 3\varphi(\sigma_i) \tau_{xz}, \quad (9)$$

где  $\sigma_i$  — интенсивность напряжений (при одноосном растяжении  $\sigma_i = \sigma_1$ ).

Уравнения этого типа используют в теории ползучести (см. гл. 4).

**Пластичное тело** при напряжениях ниже предела текучести не деформируется. При достижении предела текучести  $\sigma_T$  развивается пластическое течение, происходящее при постоянном напряжении

$$\sigma_1 = \sigma_T. \quad (10)$$

Это соотношение называют *условием текучести* (см. гл. 3). Пластическую среду можно представить в виде элемента сухого (кулонова) трения (рис. 1, в).

### СЛОЖНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ТЕЛА (ЛИНЕЙНАЯ ВЯЗКО-УПРУГОСТЬ)

Реальные тела обладают одновременно упругостью, вязкостью, пластичностью в различных формах и соотношениях. Комбинируя рассмотренные выше простые модели, можно вводить сложные среды, соответствующие поведению тех или иных реальных материалов. Принято различать линейные и нелинейные тела в зависимости от того, являются ли законы деформации линейными или нелинейными. Решения задач для линейных тел существенно проще и обладают многими простыми свойствами. Так, распределение напряжений (или смещений) во многих случаях будет таким же, как в упругом теле (см. стр. 142).

**Упруго-вязкая среда Кельвина (или Фойхта).** Представим себе, что каждая частица тела состоит из упругого и вязкого элементов, соединенных параллельно (рис. 3). Тогда напряжение будет складываться из напряжения, определяемого упругой деформацией, и напряжения, вызываемого вязким сопротивлением, т. е.

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 + \mu \frac{d\varepsilon_1}{dt}. \quad (11)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\varepsilon_1 = e^{-\frac{t}{T}} \left( \varepsilon_{10} + \frac{1}{\mu} \int_0^t \sigma_1 e^{\frac{t}{T}} dt \right), \quad (12)$$

где  $\varepsilon_{10}$  — деформация в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $T = \frac{\mu}{E}$  — время релаксации. В состоянии покоя упруго-вязкая среда ведет себя как упругая (ибо  $\frac{d\varepsilon_1}{dt} = 0$ ). Если среде сообщить постоянную дефор-

мацию ( $\varepsilon_1 = \text{const} = \varepsilon_0$ ), то напряжение будет постоянным  $\sigma_1 = E\varepsilon_0$ ; если в момент  $t = 0$  задать постоянное напряжение  $\sigma_1 = \text{const} = \sigma_0$ , то деформация постепенно нарастает, стремясь к значению  $\frac{\sigma_0}{E}$  по показательному закону

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Эти свойства показаны на рис. 3.

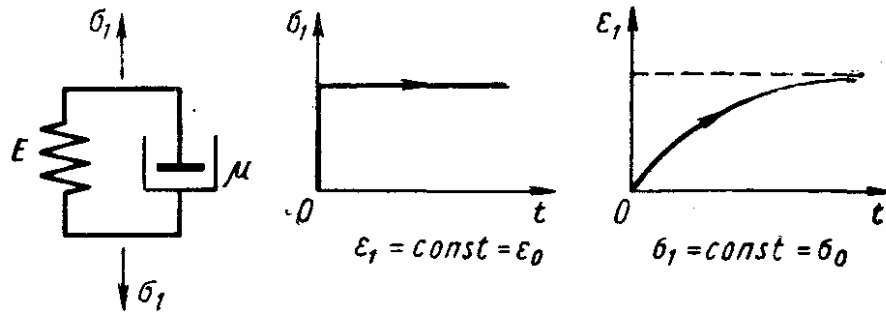


Рис. 3. Модель упруго-вязкой среды Кельвина

Если напряжение — заданная функция времени, то деформацию вычисляют по формуле (12).

Модель упруго-вязкой среды представляет интерес для анализа затухания колебаний, вызываемого внутренним трением (вязкостью).

Уравнения упруго-вязкой среды в сложном напряженном состоянии получают сложением правых частей уравнений Гука (3) и Ньютона (7); среднее давление  $\sigma$  исключается при помощи соотношения (10) гл. 2. Если ввести упругие постоянные Ламе (гл. 2).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G;$$

аналогичные коэффициенты вязкости

$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu; \quad \mu$$

и дифференциальные операторы

$$\Lambda = \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}, \quad M = G + \mu \frac{\partial}{\partial t},$$

то уравнения деформирования упруго-вязкой среды можно записать в виде

$$\sigma_x = \Lambda \varepsilon + 2M \varepsilon_x; \dots; \tau_{xz} = M \gamma_{xz}, \quad (13)$$

аналогичном закону Гука в форме Ламе (гл. 2). Тогда дифференциальные уравнения движения упруго-вязкой среды принимают вид

$$(\Lambda + M) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + M \Delta u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (14)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\rho$  — плотность;  $u, v, w$  — составляющие перемещения; два других уравнения получают круговой перестановкой. Уравнения (14) внешне аналогичны уравнениям Ламе в теории упругости (гл. 2).

Свойства колебаний, совершаемых упруго-вязким телом, можно проиллюстрировать на примере продольных колебаний упруго-вязкого стержня, описываемых уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0,$$

где

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Если вязкость значительна, то колебания невозможны, возмущение просто затухает. Если вязкость не столь велика, то продольные колебания складываются из конечного числа затухающих гармонических колебаний и «хвоста» апериодических затухающих движений. Затухание отдельных гармоник неравномерное: чем выше гармоника, тем быстрее она затухает. По истечении некоторого времени стержень будет колебаться в основном тоне.

Упруго-вязкая среда изучена Фойхтом, Томпсоном, Герасимовым и др.; см. работы [1, 6] и обзор Бленда [3].

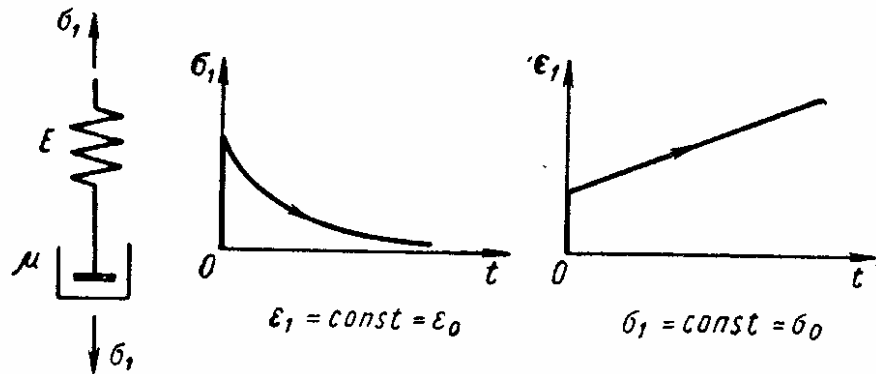


Рис. 4. Модель релаксирующей среды Максвелла

**Релаксирующая среда Максвелла.** Пусть упругий и вязкий элементы соединены последовательно (рис. 4), тогда надлежит складывать скорости деформации, отвечающие одному и тому же напряжению, т. е.

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\mu}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\sigma_1 = e^{-\frac{t}{T}} \left( \sigma_{10} + E \int_0^t \frac{d\epsilon_1}{dt} e^{\frac{t}{T}} dt \right), \quad (15)$$

где  $\sigma_{10}$  — напряжение в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $T = \frac{\mu}{E}$  — время релаксации.

Если сообщить среде постоянное напряжение  $\sigma_1 = \text{const} = \sigma_0$  в момент  $t = 0$ , то она получит мгновенную упругую деформацию  $\frac{\sigma_0}{E}$ , а затем будет течь с постоянной скоростью. При снятии напряжения скорость деформации обратится в нуль, но останется некоторая *остаточная деформация*.

Если же задана постоянная деформация (например, стержень растянут и концы его фиксированы, как в случае болтового соединения), то  $\varepsilon_1 = \text{const} = \varepsilon_0$ . Тогда из выражения (15) следует

$$\sigma_1 = \sigma_0 e^{-\frac{t}{T}}; \quad \sigma_0 = E \varepsilon_0.$$

т. е. напряжение падает с течением времени (*релаксация напряжения*).

Схема Максвелла при нелинейной вязкости лежит в основе одной из теорий ползучести — теории течения (гл. 4). Свойство релаксации напряжений является наиболее важной механической особенностью среды Максвелла.

Колебания в среде Максвелла также затухают, но декремент затухания будет одним и тем же для всех гармоник.

Для получения уравнений среды Максвелла в сложном напряженном состоянии нужно продифференцировать закон Гука (2) по времени и сложить его правую часть с правой частью обобщенного закона вязкости Ньютона (6).

**Обобщенная линейная среда.** Более сложные модели позволяют лучше приблизиться к механическим свойствам реальных материалов. Эти модели образуются сочетанием упругих и вязких элементов с различными коэффициентами упругости и вязкости. Наиболее простая из таких моделей, содержащая лишь первые производные по времени, показана на рис. 5; она содержит три параметра  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu$  и называется иногда *обобщенной линейной средой*. Закон деформации этой среды можно вывести из законов деформации простых элементов I, II, III

$$\sigma' = E_1 \varepsilon'; \quad \sigma'' = E_2 \varepsilon''; \quad \sigma''' = \mu \frac{d\varepsilon'''}{dt}$$

и условий равновесия и неразрывности

$$\sigma' + \sigma''' = \sigma_1; \quad \sigma'' = \sigma_1; \quad \varepsilon' = \varepsilon''; \quad \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon_1.$$

Исключая промежуточные величины, находим

$$E_1 \varepsilon_1 + \mu \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) \sigma_1 + \frac{\mu}{E_2} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt}. \quad (16)$$

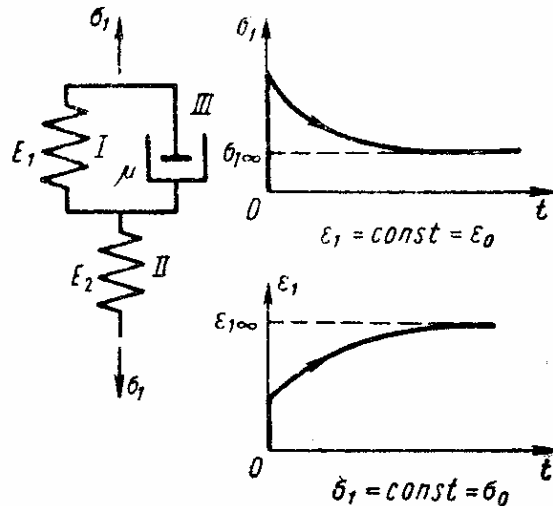


Рис. 5. Модель стандартной линейной среды

Эта среда объединяет свойства среды Максвелла и упруго-вязкой среды Кельвина. При заданной постоянной деформации  $\varepsilon_1 = \text{const} = \varepsilon_0$  напряжение

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \left[ E' + (E_2 - E') e^{-\frac{t}{\mu} (E_1 + E_2)} \right], \quad E' = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2},$$

т. е. в среде происходит релаксация, но до напряжения  $\sigma_{1\infty} = E' \varepsilon_0$  (рис. 5). При заданном постоянном напряжении  $\sigma_1 = \text{const} = \sigma_0$  деформация равна

$$\varepsilon_1 = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E'} + \frac{1}{E_1} e^{-\frac{t}{\mu} E_1} \right],$$

т. е. среда испытывает течение до деформации  $\varepsilon_{1\infty} = \frac{\sigma_0}{E'}$  (см. рис. 5).

При гармоническом изменении напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_0 \sin \omega t,$$

деформация

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \sin (\omega t + \alpha),$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_2} \sqrt{\frac{(E_1 + E_2)^2 + \mu^2 \omega^2}{E_1^2 + \mu^2 \omega^2}};$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{-\mu \omega E_2}{E_1 (E_1 + E_2) + \mu^2 \omega^2} < 0,$$

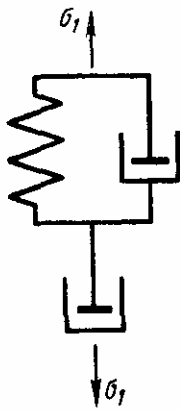


Рис. 6. Трех-элементная модель

т. е. изменения деформации запаздывают ( $\alpha < 0$ ) по отношению к изменениям напряжения.

Если задан более сложный закон изменения напряжений во времени, деформация определяется решением линейного уравнения первого порядка.

**Многоэлементные модели.** Включение в модель новых упругих и вязких элементов позволяет вводить дополнительные параметры упругости и вязкости и более полно характеризовать поведение реальных материалов. Порядок дифференциального уравнения, описывающего деформацию среды, зависит от числа элементов вязкости. Например, поведение модели, показанной на рис. 6, описывается уравнением вида

$$\sigma_1 + a \frac{d\sigma_1}{dt} = b \frac{d\varepsilon_1}{dt} + c \frac{d^2\varepsilon_1}{dt^2},$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — надлежащие значения постоянных. Способ составления уравнений деформирования сложных элементов состоит в следующем: а) выписывают уравнение деформации каждого  $n$ -го (вязкого или упругого) элемента, вводя напряжения  $\sigma_{1n}$ , деформацию  $\varepsilon_{1n}$  (или скорость деформации  $\dot{\varepsilon}_{1n}$ ) и соответствующую постоянную ( $E_n$  или  $\mu_n$ ); б) составляют уравнения равновесия и неразрывности; в) исключают из получен-

ной системы вспомогательные переменные, оставляя суммарные напряжение  $\sigma_1$  и деформацию  $\varepsilon_1$ .

Общее уравнение сред подобного типа можно записать в форме

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k \varepsilon_1}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k \sigma_1}{dt^k}, \quad (17)$$

где  $a_k, b_k$  — постоянные коэффициенты.

Соединяя последовательно  $n$  упруго-вязких элементов (рис. 7) с коэффициентами  $E_k$  и  $\mu_k$ , получим среду с теми же общими свойствами, какими обладает одиночный упруго-вязкий элемент (см. рис. 3), но с более сложной зависимостью процесса деформации от времени.

Параллельное соединение  $n$  элементов Максвелла (рис. 8) с коэффициентами  $E_k, \mu_k$  ведет себя подобно одиночному элементу Максвелла (см. рис. 2), но позволяет лучше описать релак-

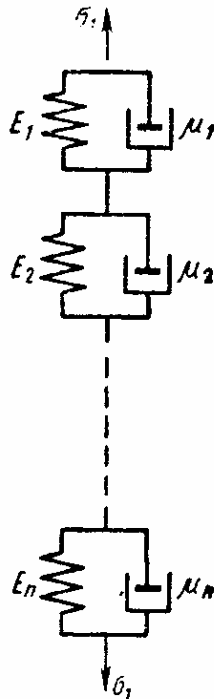


Рис. 7. Модель обобщенной среды Кельвина

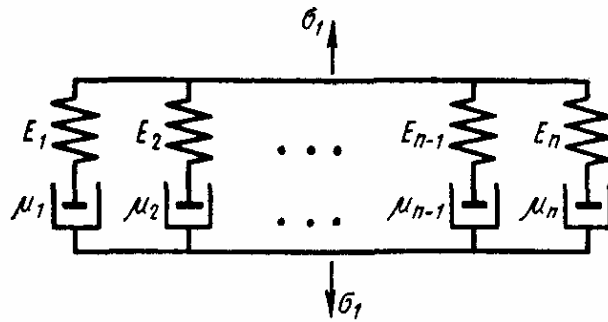


Рис. 8. Модель обобщенной среды Максвелла

сационные свойства реальных тел. Так, в задаче о релаксации, вместо (15) теперь будет

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^n E_k e^{-\frac{t}{T_k}}, \quad T_k = \frac{\mu_k}{E_k}. \quad (18)$$

Можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , заменяя константы  $E_k, T_k$  функцией распределения  $E(T)$ :

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} E(T) e^{-\frac{t}{T}} dT. \quad (19)$$

**Наследственная среда Больцмана.** Многоэлементные модели громоздки и в то же время не охватывают некоторых особенностей деформации реальных тел. Компактная форма общего линейного закона,



выражающего принцип суперпозиции воздействий и их затухание во времени, дана уравнением Больцмана

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_1(t)}{E} + \int_0^t Q(t-\tau) \sigma_1(\tau) d\tau, \quad (20)$$

где  $Q(t-\tau)$  — ядро (или коэффициент) ползучести — характерная для данного материала монотонно убывающая функция;  $E$  — мгновенный модуль упругости; время отсчитывают от момента первого нагружения.

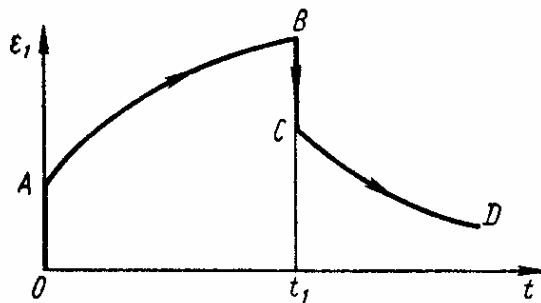


Рис. 9. Поведение наследственной среды при нагружении и разгрузке

Более общее уравнение содержит ядро вида  $Q(t, \tau)$ , однако зависимость ядра от разности  $t - \tau$  соответствует тому, что «память» материала о силовом воздействии, произведенном в момент  $\tau$ , определяется истекшим временем  $t - \tau$ . Это обстоятельство имеет важные следствия. В частности, если одна из величин (например, напряжение  $\sigma_1$ ) изменяется периодически,

то другая ( $\varepsilon_1$ ) через некоторое время также будет изменяться с тем же периодом.

Пусть в момент  $t = 0$  приложено постоянное в дальнейшем напряжение  $\sigma_1(t) = \sigma_0$ , тогда

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \sigma_0 \int_0^t Q(t-\tau) d\tau = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E} + \int_0^t Q(s) ds \right]. \quad (21)$$

Эта зависимость показана на рис. 9 линией AB.

Дифференцируя выражение (21), находим, что ядро ползучести пропорционально скорости ползучести при постоянном напряжении:

$$Q(t) = \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{dt}. \quad (22)$$

В момент нагружения ( $t = 0$ ) скорость деформации обычно очень велика и часто принимают, что  $Q(0) \rightarrow \infty$ . Характер этой особенности по опытным данным определить трудно, в связи с чем необходимо привлекать дополнительные данные.

Пусть постоянное напряжение  $\sigma_1 = \text{const} = \sigma_0$  действовало в интервале времени  $0 \leq t \leq t_1$ , а затем было снято, тогда деформация при  $t > t_1$  уменьшается (обратная ползучесть, восстановление), величина ее будет

$$\varepsilon_1(t) = \sigma_0 \int_0^{t_1} Q(t-\tau) d\tau = \sigma_0 \int_{t-t_1}^t Q(s) ds. \quad (23)$$

Эта зависимость на рис. 9 показана линией CD.

Уравнение Больцмана содержит в себе, как частные случаи, рассмотренные выше дифференциальные зависимости и приводится к ним при том или ином выборе ядра.

Если задана деформация  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(t)$ , то напряжение находят из уравнения (20), которое в этом случае будет линейным интегральным уравнением второго рода типа Вольтерра. Решение его имеет вид

$$\sigma_1(t) = E\varepsilon_1(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_1(\tau) d\tau. \quad (24)$$

где  $R(t-\tau)$  — резольвента ядра  $Q(t-\tau)$ .

Если в момент  $t=0$  стержень получает удлинение  $\varepsilon_0$ , которое при  $t>0$  остается неизменным, то

$$\sigma_1(t) = \varepsilon_0 \left[ E - \int_0^t R(t-\tau) d\tau \right] = \varepsilon_0 \left[ E - \int_0^t R(s) ds \right].$$

Дифференцируя, находим, что  $R(t)$  пропорционально скорости релаксации

$$R(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt}, \quad (25)$$

Функцию  $R(t-\tau)$  называют *ядром релаксации*.

Уравнения Больцмана можно записать в более компактной форме, если ввести линейные временные операторы

$$E_*f = Ef - \int_0^t R(t-\tau) f d\tau \equiv (E - R_*)f;$$

$$E_*^{-1}f = \frac{1}{E}f + \int_0^t Q(t-\tau) f d\tau \equiv \left( \frac{1}{E} + Q_* \right) f.$$

Тогда уравнения (20) и (24) принимают вид

$$\varepsilon_1 = E_*^{-1}\sigma_1; \quad \sigma_1 = E_*\varepsilon_1, \quad (26)$$

внешне аналогичный закону Гука.

При частных формах ядер можно получить рассмотренные ранее более простые модели.

При  $R(t-\tau) = \frac{E}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}}$  из выражения (24) следует уравнение Максвелла (15).

Если ядро представить приближенно суммой экспоненциальных функций

$$R(t-\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{T_k} e^{-\frac{t-\tau}{T_k}},$$

то материал объединяет свойства  $n$  максвелловских элементов. Релаксация в нем протекает согласно уравнению (18). При этом уравнение Больцмана (24) эквивалентно дифференциальному соотношению (17) (при некоторых дополнительных условиях).

Приведем некоторые другие виды ядер:

$$Q(t - \tau) = \frac{a}{t - \tau}, \quad a - \text{постоянная};$$

$$Q(t - \tau) = \frac{a}{(t - \tau)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ (абелево ядро)};$$

$$Q(t - \tau) = \frac{ae^{-\frac{t-\tau}{T}}}{(t - \tau)^\alpha}, \quad T, \alpha - \text{постоянные}.$$

При переходе к сложному напряженному состоянию ограничимся рассмотрением случая несжимаемого тела  $\left(\nu = \frac{1}{2}\right)$ . Тогда (вместо закона Гука) будут линейные соотношения Больцмана

$$\sigma_x - \sigma = \frac{2}{3} E_* \epsilon_x; \quad \dots; \quad \tau_{xz} = \frac{1}{3} E_* \gamma_{xz}, \quad (27)$$

или, обратно,

$$\epsilon_x = \frac{3}{2} E_*^{-1} (\sigma_x - \sigma); \quad \dots; \quad \gamma_{xz} = 3 E_*^{-1} \tau_{xz}, \quad (28)$$

здесь  $\sigma$  — среднее давление.

Приведенные формулы внешне аналогичны формулам обобщенного закона Гука, упругие константы заменены операторами (по времени)  $E_*$ ,  $E_*^{-1}$ .

**Принцип Вольтерра** [7, 8]. В теории линейных сред важное значение имеет принцип Вольтерра, позволяющий широко использовать решения задач теории упругости при разыскании решений соответствующих задач для наследственных сред.

Для получения полной системы уравнений к соотношениям (27) или (28) нужно присоединить дифференциальные уравнения равновесия и неразрывности, содержащие производные по пространственным координатам. Так как операции дифференцирования и интегрирования по пространственным координатам и времени переместительны, можно указать следующий способ решения.

Пусть на поверхности тела заданы либо поверхностные нагрузки (как функции времени и координат точек поверхности), либо перемещения. Решаем соответствующую задачу теории упругости. В конечных формулах заменяем упругие константы соответствующими операторами. В дальнейшем для наследственной среды необходимо лишь расширять полученные операторные выражения. Отсюда вытекает важное следствие.

Если решение упругой задачи или часть его (например, поле напряжений) не зависит от упругих постоянных, то это решение справедливо и для линейной наследственной среды.

Приведенные формулировки часто позволяют получить быстрый и простой ответ на вопрос о напряжениях и деформациях деталей из линейно наследственного материала.

Приведем несколько примеров.

**Пример 1. Изгиб балки.** В статически определенных упругих балках распределение напряжений не зависит от упругих постоянных

$$\sigma_1 = \frac{M}{J} y,$$

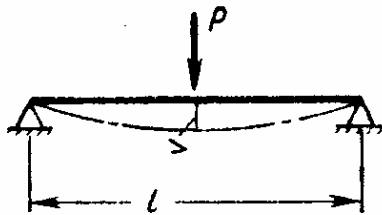


Рис. 10. Балка под заданной нагрузкой

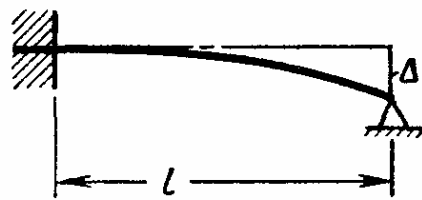


Рис. 11. Балка при заданном прогибе

где  $M$  — изгибающий момент;  $J$  — момент инерции. Следовательно, такие же напряжения будут и в балке из линейно наследственного материала. Прогиб же зависит от модуля Юнга; для неупругой балки прогиб будет расти со временем. Рассмотрим балку на двух опорах (рис. 10); прогиб под силой для упругой балки

$$v = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

Для неупругой балки

$$v = E_*^{-1} \frac{Pl^3}{48J} = \frac{Pl^3}{48J} \left[ \frac{1}{E} + \int_0^t Q(t - \tau) d\tau \right].$$

Иная картина будет при задании перемещений. Пусть, например, задано перемещение  $\Delta$  конца консоли (рис. 11), тогда упругий прогиб

$$v = \frac{3}{2} \Delta \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right),$$

т. е. не зависит от модуля упругости. Следовательно, по принципу Вольтерра, прогиб соответствующей консоли из линейно наследственного материала будет таким же (не будет зависеть от времени). Далее, реакция на конце упругой консоли  $P = E \frac{3J\Delta}{l^3}$ . Для неупругой консоли

$$P = E_* \frac{3J\Delta}{l^3} = \frac{3J\Delta}{l^3} \left[ E - \int_0^t R(t - \tau) d\tau \right],$$

т. е. происходит релаксация.

**Пример 2. Труба под действием внутреннего давления** (рис. 12). Распределение напряжений в упругой трубе описывается формулами Ламе

$$\sigma_r = s' \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right); \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + 2s' \frac{b^2}{r^2}; \quad s' = \frac{pa^2}{b^2 - a^2},$$

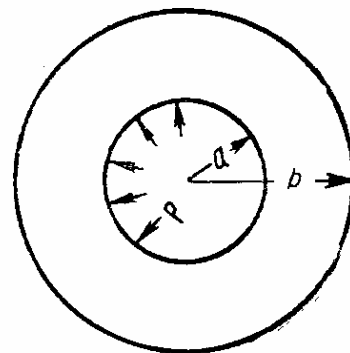


Рис. 12. Труба под действием внутреннего давления

т. е. не зависит от упругих постоянных. Для неупругой трубы эти формулы сохраняют силу. Перемещения же будут расти со временем.

**Пример 3. Вращающийся диск.** Распределение напряжений в упругом вращающемся диске из несжимаемого материала ( $\nu = \frac{1}{2}$ ) не зависит от упругих постоянных. Следовательно, такое же напряженное состояние будет и в неупругом диске; однако перемещения в последнем будут со временем нарастать.

### СЛОЖНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ТЕЛА

**Упруго-пластическое тело.** Последовательное соединение упругого и пластического элементов (рис. 13, а) приводит к модели упруго-пластического тела. До предела текучести  $\sigma_T$  тело деформируется упруго; пластическое течение происходит при постоянном напряжении. После разгрузки возникает остаточная деформация (рис. 13, б).

Модель упруго-пластического тела лежит в основе теории пластичности (см. гл. 3).

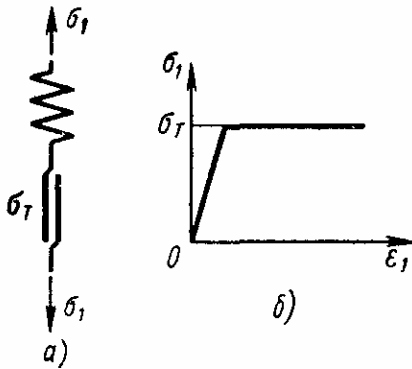


Рис. 13. Модель упруго-пластического тела

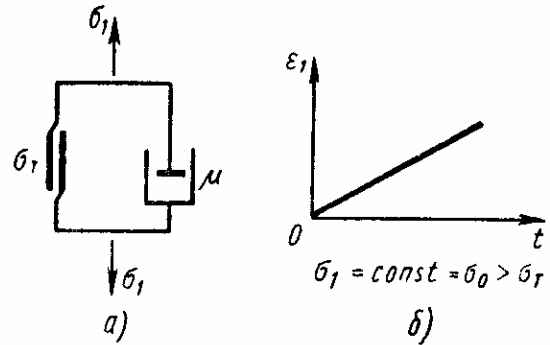


Рис. 14. Модель вязко-пластического тела

**Вязко-пластическое тело (среда Бингама).** Вязко-пластическая среда характеризуется параллельным соединением вязкого и пластического элементов (рис. 14, а). При напряжении, меньшем предела текучести  $\sigma_T$ , тело не деформируется; при  $\sigma_1 = \text{const} = \sigma_0 > \sigma_T$  скорость деформации пропорциональна избыточному напряжению  $\sigma_0 - \sigma_T$  (рис. 14, б). Эта модель соответствует таким веществам, которые обнаруживают заметную текучесть лишь при достаточно больших напряжениях (например, металлы при высокой температуре, густые смазки, краски, различные жидкие пластические массы и т. д.).

При одноосном напряженном состоянии закон деформации вязко-пластической среды имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_T + \mu \frac{d\epsilon_1}{dt}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_T. \quad (29)$$

Уравнения при сложном напряженном состоянии можно получить, складывая напряжения, отвечающие жестко-пластической среде Мизеса, с напряжениями, соответствующими течению линейно вязкой жидкости:

$$\sigma_x - \sigma = 2 \left( \frac{\sigma_T}{\sqrt{3} \eta_i} + \frac{1}{3} \mu \right) \xi_{xi}; \quad \dots; \quad \tau_{xz} = \left( \frac{\sigma_T}{\sqrt{3} \eta_i} + \frac{\mu}{3} \right) \eta_{xz}, \quad (30)$$

где  $\eta_i$  — интенсивность скоростей деформаций сдвига:

$$\eta_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2} (\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{xz}^2)}.$$

Среда считается несжимаемой. Из равенств (30) следует зависимость

$$\tau_i = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} + \frac{\mu}{3} \eta_i, \quad (31)$$

где  $\tau_i$  — интенсивность касательных напряжений.

Картина движения вязко-пластической среды своеобразна: в зонах невысоких напряжений деформации не происходят.

Течение вязко-пластической массы в круглой трубе (диаметр  $2b$ ). Движение осуществимо при условии, что градиент давления  $p = p(z)$  достаточно велик, именно

$$\frac{dp}{dz} \geq \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}b}.$$

Центральная часть массы при

$$r \leq r_0 = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3} \frac{dp}{dz}}$$

движется как твердое тело; в деформируемой кольцевой зоне  $r_0 \leq r \leq b$  скорость возрастает по параболическому закону от нулевого значения на стенке трубы ( $r = b$ ) до максимального значения при  $r = r_0$ . Профиль скоростей при течении в трубе показан на рис. 15. Касательное напряжение максимально у стенки трубы  $r = b$ , где оно равно  $\frac{b}{2} \cdot \frac{dp}{dz}$ , и сни-

жается до  $\frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$  на границе недеформируемого ядра. Масса, протекающая в единицу времени,

$$Q = \frac{3\pi}{\mu} \left[ \frac{1}{8} \cdot \frac{dp}{dz} (b^4 - r_0^4) - \frac{\sigma_T}{3\sqrt{3}} (b^3 - r_0^3) \right].$$

При  $\sigma_T = 0$  отсюда следует известная формула Пуазейля.

Последовательное соединение вязкого и пластического элементов (рис. 16) приводит к среде, обладающей следующими свойствами:

при  $\sigma_1 < \sigma_T$  среда течет подобно вязкой жидкости;

при  $\sigma_1 = \sigma_T$  наступает пластическое течение; напряжения не могут превосходить предел текучести.

**Упруго-вязко-пластическое тело.** Включение упругого элемента в вязко-пластическую схему позволяет учесть влияние упругих деформаций. Первая упруго-вязко-пластическая модель (рис. 17, а) при напряжениях ниже предела текучести ( $\sigma_1 < \sigma_T$ ) ведет себя как

упруго-вязкая среда Максвелла; при  $\sigma_1 = \sigma_T$  наступает пластическое течение — напряжения не могут превосходить предел текучести.

Вторая модель (рис. 17, б) при напряжении ниже предела текучести ( $\sigma_1 < \sigma_T$ ) является чисто упругой.

**Нелинейное упруго-вязкое тело.** Сочетание упругого элемента с нелинейно вязким приводит к схемам, обобщающим среды Кельвина и Максвелла.

В первом случае (см. рис. 3) имеем

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 + f(\dot{\varepsilon}_1) \dot{\varepsilon}_1. \quad (32)$$

Во втором случае (см. рис. 4)

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 + \varphi(\sigma_1) \sigma_1. \quad (33)$$

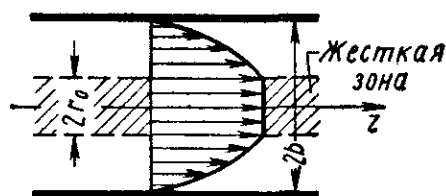


Рис. 15. Профиль скоростей вязко-пластического течения в трубе

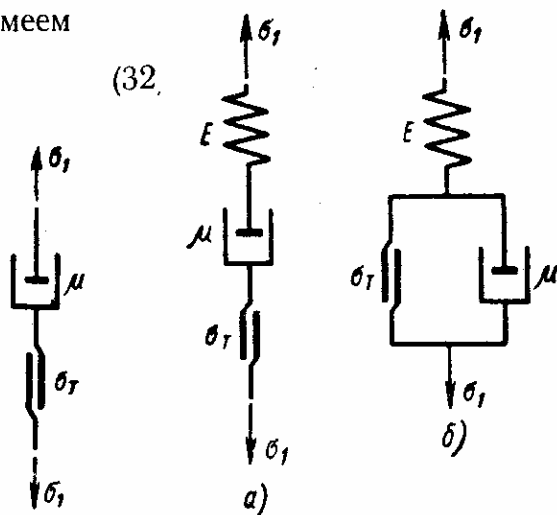


Рис. 16. Последовательное соединение вязкого и пластического элементов

Рис. 17. Модели упруго-вязко-пластической среды

Уравнения последнего типа широко используют в теории ползучести металлов (см. гл. 4).

Уравнения (32) и (33) приводят качественно к таким же картинам деформирования, что и соответственно модели Кельвина и Максвелла. Дальнейшим обобщением является переход к нелинейной упругости и добавление пластического элемента.

**Нелинейная наследственная среда.** Для многих материалов (особенно при высоких напряжениях) линейная зависимость между напряжениями и деформациями не подтверждается опытами и необходимо исходить из нелинейных уравнений.

Весьма общие уравнения нелинейной наследственной среды получил Вольтерра [18]; однако эти уравнения очень сложны. Более простое уравнение, предложенное Ю. Н. Работновым [8], имеет вид

$$\varphi(\varepsilon_1) = \sigma_1(t) + \int_0^t Q(t-\tau) \sigma_1(\tau) d\tau. \quad (34)$$

Если  $t$  мало, то деформация последствия, описываемая интегральным членом, мала и тогда

$$\sigma_1 = \varphi(\varepsilon_1), \quad (35)$$

т. е. функция  $\varphi(\varepsilon_1)$  характеризует кривую деформации при быстром испытании. По уравнению (34) около этой кривой разворачивается

процесс последействия. Следует подчеркнуть, что по отношению к функции  $\varphi(\varepsilon_1)$  уравнение (34) является линейным. Решая его относительно  $\sigma_1$ , получаем

$$\sigma_1(t) = \varphi - \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (36)$$

где  $R(t-\tau)$  — ядро релаксации.

При постоянном напряжении  $\sigma_1 = \text{const} = \sigma_0$  из уравнения (34) следует

$$\varphi(\varepsilon_1) = [1 + K(t)] \sigma_0; \quad K(t) = \int_0^t Q(t-\tau) d\tau,$$

т. е. кривые деформации при фиксированных напряжениях подобны.

В случае релаксации постоянна деформация ( $\varepsilon_1 = \text{const} = \varepsilon_0$ ); тогда из уравнения (36) находим

$$\sigma_1 = [1 - L(t)] \varphi(\varepsilon_0); \quad L(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\tau.$$

Если начальное растяжение осуществлялось быстро, то в силу равенства (35)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 1 - L(t),$$

т. е. кривые релаксации также подобны.

Уравнение (34) описывает эффект обратной ползучести. Переход к случаю сложного напряженного состояния обычно осуществляется на основе предположения о пропорциональности девиаторов напряжения и деформации.

Несколько иные формулировки уравнений нелинейной наследственности предложены Н. Х. Арутюняном и М. И. Розовским

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \int_0^t Q(t-\tau) f[\sigma_1(\tau)] d\tau; \quad (37)$$

$$\varepsilon_1 = \psi(\sigma_1) + \int_0^t Q(t-\tau) f[\sigma_1(\tau)] d\tau. \quad (38)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А л ь ф р е й Г. Механические свойства высокополимеров. М., Гостехиздат, 1952.
2. А р у т ю н я н Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1953.
3. Б л е н д Д. Теория линейной вязко-упругости. М., «Мир», 1965.
4. И л ь ю ш и н А. А. Деформация вязко-пластического тела. Ученые записки МГУ. Вып. 39. М., Изд. МГУ, 1940.



5. Ишлинский А. Ю. Уравнение деформирования не вполне упругих и вязко-пластических тел. Изв. АН СССР, ОТН, № 1—2, 1945.
  6. Качанов Л. М. Механика пластических сред. М., ГИТТЛ, 1948.
  7. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. Прикладная математика и механика. Т. 12. Вып. 1, 1948.
  8. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
  9. Рейнер М. Реология. М., «Наука», 1965.
  10. Реология. Теория и приложения. Под ред. Эйриха Ф., М., ИЛ, 1962.
  11. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., ГИТТЛ, 1949.
  12. Розовский М. И. О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов. ЖТФ. Т. 25. Вып. 13, 1955.
  13. Трелоар. Физика упругости каучука. М., ИЛ, 1953.
  14. Уилкинсон У. Неньютоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
  15. Фрейденталь и Гейрингер. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
  16. Freudenthal A. Inelastisches Verhalten von Werkstoffen. Berlin, 1955.
  17. Houwink R. Elasticity, Plasticity and the Structure of Matter. Cambridge, 1937.
  18. Volterra V. Theory of Functionals. London, 1931.
-

## Глава 7

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТАЛОСТИ

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Усталостное разрушение.** В реальных материалах под действием циклических нагрузок могут накапливаться необратимые механические изменения. Это происходит даже в тех случаях, когда максимальные макроскопические напряжения не превышают предела упругости материала. Если число циклов достаточно велико, то в результате накопления необратимых механических изменений в какой-либо точке образца или детали образуется макроскопическая трещина, постепенное развитие которой приводит к разрушению. Накопление необратимых механических изменений в материале при приложении циклических нагрузок называют *усталостью*, а разрушение в результате постепенного развития трещины — *усталостным разрушением*.

Усталостное разрушение родственно явлению разрушения в результате повторных упруго-пластических деформаций. Но последнее происходит лишь при макроскопических напряжениях, превышающих предел упругости, в то время как усталостное разрушение может иметь место при значительно меньших макроскопических напряжениях. Повторные пластические деформации развиваются в макрообъемах, сопоставимых с объемом тела. Напротив, усталостные повреждения, по крайней мере на первой стадии процесса, носят микроскопический и субмикроскопический характер, локализуясь в слабейших зернах и кристаллитах. Разрушению в результате повторных пластических деформаций предшествует число циклов порядка  $10^1$ — $10^4$ ; число циклов, предшествующих усталостному разрушению, обычно превышает  $10^4$ . Резкой границы между двумя типами разрушений провести нельзя.

**Механизм усталостного разрушения.** Вначале под действием циклической нагрузки накапливаются пластические деформации в наиболее слабых и наиболее напряженных зернах материала. На первом этапе существенную роль играют *дислокационные искажения* кристаллической структуры. Затем в этих зернах появляются *линии скольжения*. При повторных нагружениях число этих линий скольжения увеличивается и постепенно они сливаются, образуют *полосы скольжения* и *субмикроскопические трещины*. Слиянием субмикроскопических трещин и созданием условий для развития прогрессирующей *макроскопической трещины* заканчивается первая стадия усталостного разрушения. Число циклов, приходящееся на эту стадию (называемую иногда *подготовительной* или *инкубационной*) составляет 6) — 90% от полного

разрушающего числа циклов. Вторая стадия, состоящая в прогрессирующем развитии макроскопической трещины, занимает, следовательно, меньшую часть разрушающего числа циклов. Примерное распределение числа циклов по перечисленным этапам разрушения показано на рис. 1, где по вертикали отложено отношение максимального напряжения цикла к некоторому характерному напряжению (пределу выносливости).

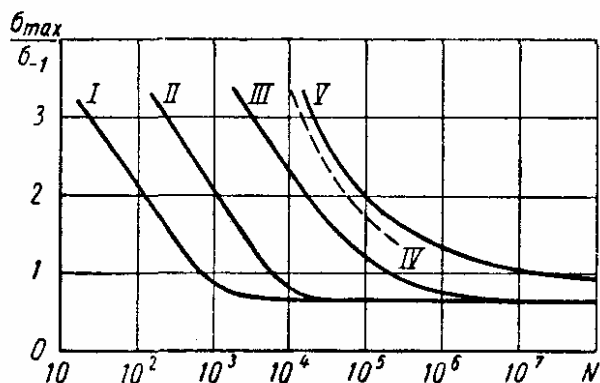


Рис. 1. Этапы усталостного разрушения: I — образование линий скольжения; II — образование первых микроскопических трещин; III — слияние микроскопических трещин с образованием видимой трещины; IV — начало ускоренного развития видимой трещины; V — излом образца

цикла к некоторому характерному напряжению (пределу выносливости).

Первая стадия усталостного разрушения носит ярко выраженный вероятностный характер. Необратимые изменения возникают в первую очередь в наиболее слабых и наиболее напряженных зернах, число и свойства которых в общей совокупности можно охарактеризовать лишь при помощи некоторого распределения вероятностей. Развитие линий скольжения и микроскопических трещин при каждом последующем цикле также подчиняется некоторому распределению и зависит от рас-

пределения вероятностей, достигаемого в результате предыдущих циклов. После того как из одного среди многих возможных зародышей начинает развиваться макроскопическая трещина, характер процесса существенно изменяется. Развитие макроскопической трещины проис-

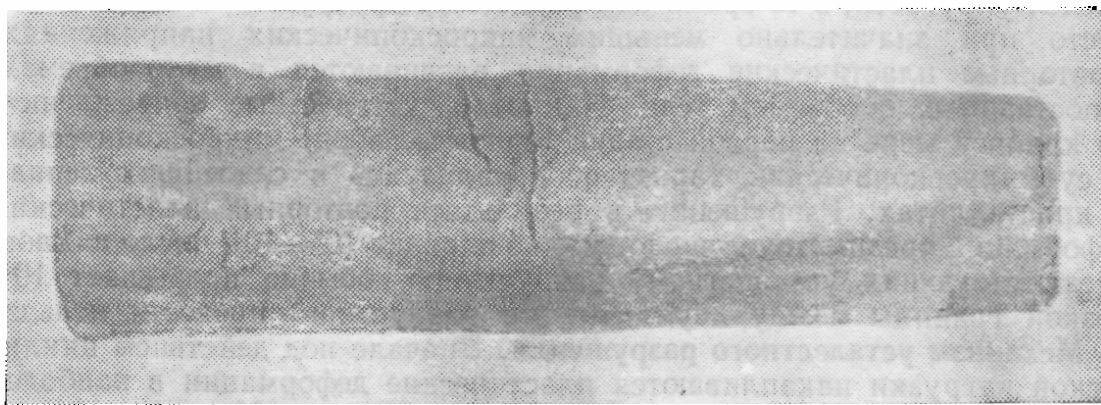


Рис. 2. Сечение образца в месте усталостного разрушения (видны линии «отдыха» и область хрупкого излома)

ходит скачками (см. линии «отдыха» на рис. 2) или непрерывно. В последнем случае оно может быть удовлетворительно описано как детерминистический процесс с применением методов теории пластичности.

**Кривая усталости.** Стандартные испытания на усталость состоят в нагружении растягиваемых, скручиваемых или изгибаемых образцов силами, периодически меняющимися во времени. При этом каждый цикл

изменения номинальных напряжений  $\sigma(t)$  может быть characterized любой парой следующих параметров:

$$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}, \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2},$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}; \quad (1)$$

здесь  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  — максимальное и минимальное напряжения цикла соответственно<sup>1</sup>;  $\sigma_m$  — среднее напряжение цикла;  $\sigma_a$  — амплитуда цикла (рис. 3); безразмерный параметр  $r$  называют коэффициентом асимметрии цикла. Самыми распространенными являются испытания при симметричном цикле напряжений, т. е. при  $r = -1$ . Испытания обычно доводят до некоторого предельного числа циклов, называемого базой испытаний. В стандартных испытаниях базу испытаний обычно принимают равной  $10^6$ — $10^7$ .

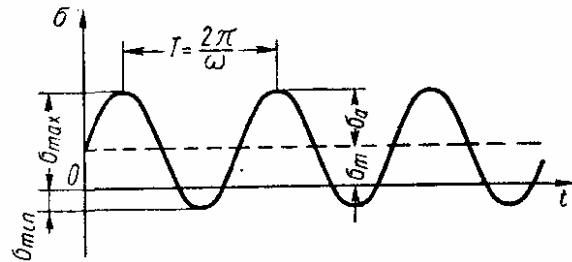


Рис. 3. Циклическое изменение напряжений во времени

Результаты испытаний представляют графически (рис. 4). По горизонтали откладывают разрушающее число циклов  $N$  (обычно по логарифмической шкале), а по вертикали — соответствующее максимальное напряжение цикла или его амплитуду. Даже при самых тщательных

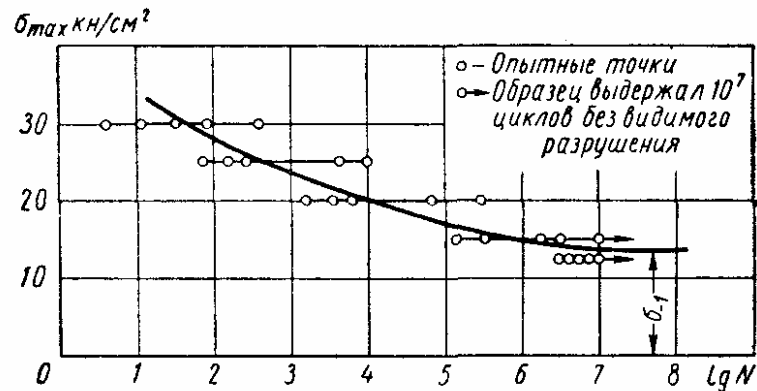


Рис. 4. Графическое представление результатов испытаний на усталость

испытаниях числа  $N$  имеют разброс, достигающий иногда трех порядков. Этот разброс является естественным следствием вероятностной природы усталостного разрушения. По найденным опытным точкам путем осреднения проводят кривую, называемую *кривой усталости* или *кривой*

<sup>1</sup> Рассуждения ведутся в терминах нормальных напряжений; их большая часть остается справедливой для касательных напряжений и эквивалентных (в смысле теорий прочности) напряжений.

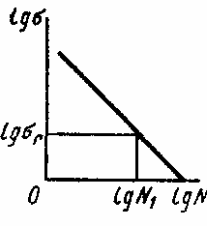
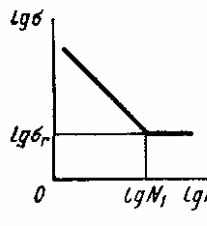
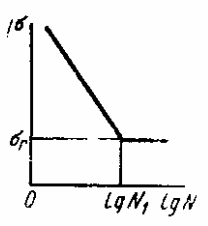
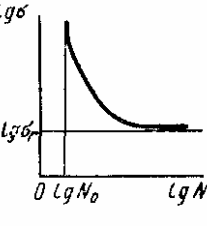
**Велера.** Грубо говоря, ординаты кривой Велера соответствуют напряжениям, вызывающим разрушения при заданном числе циклов с вероятностью, близкой к 0,5.

**Предел выносливости.** Многочисленные испытания позволяют предполагать, что кривая Велера для стали, чугуна и ряда других тяжелых металлов и сплавов имеет горизонтальную асимптоту, не совпадающую с осью абсцисс. Далее, существует напряжение  $\sigma_r > 0$ , такое, что из неравенства  $|\sigma_{\max}| < \sigma_r$  с достаточно большой вероятностью следует, что разрушающее число циклов  $N \rightarrow \infty$ . Это напряжение называют *пределом выносливости*. В учебной литературе предел выносливости определяют обычно как наибольшее напряжение цикла, которое образец может выдерживать при сколь угодно большом числе циклов. Фактически за предел выносливости принимают напряжение, соответствующее базе испытаний и некоторой малой вероятности разрушения. Для черных металлов и сплавов обычное определение предела выносливости оправдано наличием перелома кривой усталости при достаточно большом числе циклов.

Предел выносливости находится в корреляционной связи с другими прочностными характеристиками материала. Обычно предел выносливости при симметричном цикле  $\sigma_{-1} = (0,2 \div 0,4) \cdot \sigma_b$ , где  $\sigma_b$  — предел прочности. Более подробные сведения можно найти в специальной литературе [12—15, 19].

Некоторые аналитические аппроксимации для кривой усталости приведены в табл. 1.

1. Аналитическая аппроксимация кривой усталости

Формула	Степенная		Экспоненциальная	Вейбулла
Вид кривой усталости				
$\sigma \geq \sigma_r$	$N \approx N_1 \times \left(\frac{\sigma_r}{\sigma}\right)^m$	$N = N_1 \times \left(\frac{\sigma_r}{\sigma}\right)^m$	$N = N_1 \exp \times \left(-\frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_c}\right)$	$N = N_0 + N_c \times \left(\frac{\sigma_c}{\sigma - \sigma_r}\right)^m$
$\sigma < \sigma_r$		$N \rightarrow \infty$	$N \rightarrow \infty$	

**Обработка результатов усталостных испытаний.** Зависимость между максимальным напряжением цикла (в дальнейшем обозначаемым  $\sigma$ ) и разрушающим числом циклов  $N$  даже при самом строгом соблюдении

однородных условий эксперимента имеет ярко выраженный случайный характер. В связи с этим обработку результатов испытаний следует вести в строгом соответствии с методами математической статистики. Эти методы изложены в работах [8, 9, 14].

## ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТНОМУ РАЗРУШЕНИЮ

На сопротивление усталостному разрушению существенное влияние оказывают различные технологические, конструкционные и физико-химические факторы (см. работы [10, 14, 18, 19]). Ограничимся важнейшими факторами механического происхождения.

**Масштабный фактор.** Сопротивление усталостному разрушению зависит от абсолютных размеров деталей и уменьшается с увеличением размеров. Это явление называется *масштабным фактором* или *масштабным эффектом*. Оно объясняется вероятностной природой усталостного разрушения и поэтому может быть удовлетворительно описано лишь в рамках статистической теории усталостного разрушения (см. ниже).

**Влияние концентрации напряжений.** Наличие концентраторов напряжений снижает предел выносливости. Однако это снижение, как правило, оказывается не столь значительным, как это следует из сопоставления максимальных макроскопических напряжений в образце с концентратором и без концентратора. Поэтому в отличие от *теоретического коэффициента концентрации*  $k_T$  вводится *эффективный коэффициент концентрации*  $k_{эфф}$ , равный отношению предела выносливости  $\sigma_{-1}$  гладкого образца к пределу выносливости  $\sigma'_{-1}$  образца с концентратором:

$$k_{эфф} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}}.$$

Связь между  $k_{эфф}$  и  $k_T$  дается эмпирической формулой

$$k_{эфф} = 1 + q (k_T - 1), \quad (2)$$

где  $0 \leq q \leq 1$  — *коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений*. Для материалов с грубой структурой коэффициент  $q$  близок к нулю. Для металлов и сплавов с высокой степенью структурной однородности коэффициент  $q$  близок к единице.

По Нейберу [11] эффективный коэффициент концентрации можно получить осреднением макроскопических напряжений на расстоянии  $\lambda$ , имеющем порядок диаметра зерна. Так, для остроугольной выточки с углом  $\omega$  и радиусом закругления дна  $\rho$

$$k_{эфф} = 1 + \frac{k_T - 1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}}. \quad (3)$$

Сопоставляя формулы (2) и (3), видим, что по Нейберу коэффициент  $q$  не является константой материала.

**Влияние асимметрии циклов.** Большая часть экспериментальных результатов относится к симметричному циклу напряжений. Для оценки прочности при несимметричных циклах существуют различные эмпирические и полуэмпирические соотношения. Эти соотношения получают интерполяцией опытных данных, нанесенных на плоскость одной из пар параметров (1). Например, С. В. Серенсен и Р. С. Кина-сошвили предложили [12, 14, 15] линейную интерполяцию на плоскости  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$ :

$$\sigma_r = \sigma_m (1 - \psi) + \sigma_{-1}; \quad (4)$$

здесь  $\psi$  — коэффициент, зависящий от соотношения между пределами выносливости при симметричном цикле  $\sigma_{-1}$  и пульсационном цикле  $\sigma_0$ . Согласно модели Орована [21], коэффициент  $\psi$  должен быть равен нулю. Это значит, что предельное значение амплитуды напряжений не зависит от среднего напряжения цикла. Опытные значения составляют  $\psi = 0,05 \div 0,3$ .

**Влияние типа напряженного состояния.** Это влияние учитывают по полуэмпирическим формулам. Так, для нахождения предельных напряжений симметричных циклов при расчете валов на совместное действие изгиба и кручения используют формулу

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\tau^2}{\tau_{-1}^2} = 1. \quad (5)$$

Из нее следует формула для вычисления коэффициента запаса  $k$  по парциальным коэффициентам  $k_\sigma$  и  $k_\tau$ , вычисленным отдельно для изгиба и кручения:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k_\sigma^2} + \frac{1}{k_\tau^2}. \quad (6)$$

Более общие формулы для оценки усталостной прочности при сложном напряженном состоянии приведены в работах [3, 4, 12]. Отправной точкой при построении этих формул являются теории прочности для статического нагружения. Поскольку усталостное разрушение есть процесс накопления и развития местных пластических деформаций, то естественно, что наиболее удачные критерии получают обобщением критерия Сен-Венана и критерия Губера—Мизеса в теории пластичности. Подробнее об опытных данных и приемах расчета с учетом различных факторов см. в работах [12, 14, 15].

## УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ КАК СЛУЧАЙНЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Процесс накопления усталостных повреждений можно трактовать как случайный процесс марковского типа с непрерывным множеством состояний и дискретным временем. Вероятностные характеристики такого процесса к концу  $n$ -го цикла нагружения могут быть выражены через характеристики  $n - 1$ -го цикла и некоторые переходные вероятности, зависящие от механизма процесса и от нагрузки  $n$ -го цикла. Эта концепция была предложена впервые в книге [6].

**Модель процесса накопления усталостных повреждений.** Рассмотрим стержневую систему, изображенную на рис. 5 и находящуюся под действием повторных нагрузок. Механические свойства ее элементов (модули упругости и упрочнения, предел текучести, сопротивление отрыву и т. д.) предполагаются случайными величинами, что позволяет моделировать случайную структуру поликристаллического материала. При первом нагружении пластические деформации возникают в наиболее слабых и наиболее нагруженных элементах, а после снятия нагрузки возникает система остаточных напряжений. Повторные нагружения изменяют эту картину: в отдельных элементах происходит процесс упрочнения, пока местное напряжение не достигнет величины сопротивления отрыву для данного элемента. Разрыв единичных элементов соответствует появлению субмикроскопических трещин при усталостном разрушении. Процесс выхода из строя одного элемента за другим моделирует процесс развития прогрессирующей усталостной трещины. Наибольшее значение периодической нагрузки (при заданном режиме ее изменения), при котором еще имеет место упруго-пластическая приспособляемость системы, соответствует пределу выносливости для поликристаллического тела. Таким образом, модель передает наиболее существенные черты усталостного разрушения [6].

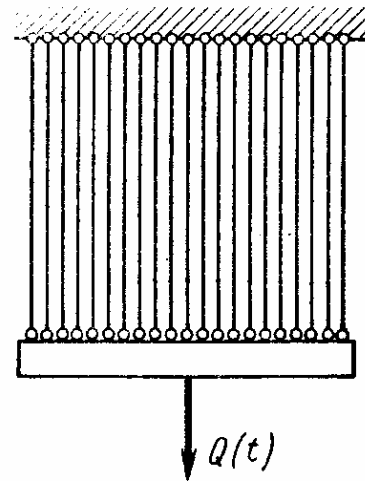


Рис. 5. Механическая модель для описания процесса накопления усталостных повреждений

**Математическое описание процесса усталостного разрушения.** Допустим, что механическое состояние каждого элемента можно охарактеризовать конечным числом параметров, которые являются случайными величинами. Общее число элементов — также случайная величина, уменьшающаяся в результате обрыва отдельных элементов. Состояние системы будем считать заданным, если известна совместная плотность вероятности для перечисленных случайных параметров, которые обозначим через  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . Допустим, что известна плотность вероятности  $p_n(q_1, q_2, \dots, q_m)$  для состояния, наступающего после  $n$ -го цикла нагружения. Плотности вероятности для  $n+1$ -го и  $n$ -го циклов связаны между собой соотношением

$$p_{n+1}(q_1, q_2, \dots, q_m) = \int \dots \int P(q_1, q_2, \dots, q_m | r_1, r_2, \dots, r_m; \sigma_{n+1}) p_n(r_1, r_2, \dots, r_m) dr_1 dr_2, \dots, dr_m; \quad (7)$$

здесь  $P(q_1, q_2, \dots, q_m | r_1, r_2, \dots, r_m; \sigma_{n+1})$  — ядро, характеризующее распределение переходных вероятностей; оно должно, очевидно, зависеть от параметра нагрузки  $n+1$ -го цикла, обозначенного через  $\sigma_{n+1}$ .

Уравнение (7) — *кинетическое уравнение*, описывающее необратимый процесс накопления усталостных повреждений [6]. Основная трудность состоит в построении ядра

$$P(q_1, q_2, \dots, q_m | r_1, r_2, \dots, r_m; \sigma_{n+1}).$$



## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

**Общая формулировка статистических свойств кривой усталости.** Эта формулировка состоит в задании совместной функции распределения  $F(\sigma, N)$ , равной вероятности усталостного разрушения при числе циклов, меньшем, чем  $N$  и характерном напряжении цикла, меньшем, чем  $\sigma$ . На плоскости  $N, \sigma$  эта вероятностная зависимость может быть представлена в виде семейства кривых  $N = N(\sigma, p)$ , каждая из которых соответствует некоторой одной и той же вероятности разрушения  $p$ . Такое семейство показано на рис. 6. Здесь  $\sigma_0$  — наименьшее напряжение, при котором еще возможно усталостное разрушение.

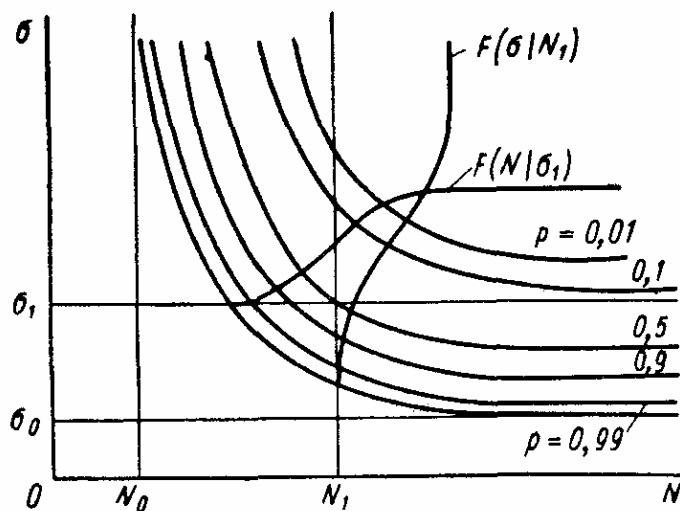


Рис. 6. Семейство кривых усталости, соответствующих равной вероятности разрушения  $p$

Вместо функции распределения  $F(\sigma, N)$  может оказаться удобнее рассматривать соответствующие условные функции распределения  $F(\sigma|N)$  и  $F(N|\sigma)$ . Первая из них равна вероятности обнаружить разрушающее напряжение, меньшее чем  $\sigma$ , если число циклов равно в точности  $N$ . Вторая функция распределения равна вероятности разрушения при числе циклов, меньшем чем  $N$ , если напряжение равно в точности  $\sigma$ .

и  $F(N|\sigma)$ . Первая из них равна вероятности обнаружить разрушающее напряжение, меньшее чем  $\sigma$ , если число циклов равно в точности  $N$ . Вторая функция распределения равна вероятности разрушения при числе циклов, меньшем чем  $N$ , если напряжение равно в точности  $\sigma$ .

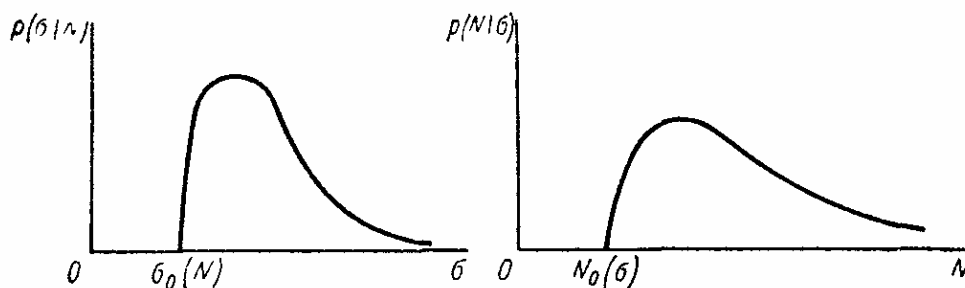


Рис. 7. Условные плотности вероятности  $p(\sigma|N)$  и  $p(N|\sigma)$

Обе кривые распределения получаются сечением поверхности  $F = F(\sigma, N)$  соответствующими плоскостями (см. рис. 6). Вид плотностей условных вероятностей  $p(\sigma|N)$  и  $p(N|\sigma)$  показан на рис. 7. Подробнее см. [1, 6, 16, 22].

**Основы статистической теории.** Изложим статистическую теорию, позволяющую предсказать время до образования прогрессирующей макроскопической трещины. Рассмотрим деталь или элемент конструкции, находящиеся в сложном напряженном состоянии. Пусть все компоненты тензора напряжений заданы с точностью до общего множителя  $\sigma$  и пусть  $\sigma f(x, y, z)$  — эквивалентное с точки зрения выбран-

ной теории прочности максимальное во времени напряжение в произвольной точке. Развитие макроскопической трещины может начаться лишь после разрушения некоторой слабейшей совокупности зерен. Предположим, что каждая такая совокупность (первичный элемент) обладает индивидуальной кривой усталости. Параметры этих кривых для статистического ансамбля первичных элементов, вообще говоря, являются случайными величинами, совместная функция распределения вероятностей для которых предполагается заданной. Далее можно вычислить вероятность события, состоящего в том, что в заданном достаточно малом макрообъеме найдется хотя бы один первичный элемент, разрушающее напряжение для которого будет меньше, чем  $\sigma f(x, y, z)$ . Однако не всякий зародыш должен превратиться в прогрессирующую трещину.

Условная вероятность образования макроскопической трещины из зародыша, расположенного в окрестности выбранной точки, очевидно, зависит от формы образца и от типа напряженного состояния. Эту вероятность можно найти из дополнительных соображений. Здесь мы будем считать ее известной.

**Пример реализации статистической теории.** Составим выражение для функции распределения  $F(\sigma, N)$  при следующих предположениях. Пусть индивидуальная кривая усталости для первичного элемента имеет вид

$$N = N_0 + N_c \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_0} \right)^m,$$

где  $N_0$ ,  $N_c$ ,  $\sigma_0$  и  $m$  — детерминированные неотрицательные константы;  $\sigma_1$  — случайная величина с функцией распределения  $F(\sigma_1)$ . Предположим, что при  $\sigma_1$ , близких к нулю, эта функция может быть аппроксимирована при помощи выражения

$$F(\sigma_1) \approx c\sigma_1^\alpha;$$

здесь  $c$  и  $\alpha$  — некоторые положительные константы. Число первичных элементов  $n$  в единице объема будем считать достаточно большим, а функцию  $f(x, y, z)$  и вероятность образования макроскопической трещины из зародыша  $P(x, y, z)$  будем считать достаточно медленно меняющимися функциями координат. Для функции распределения  $F(\sigma, N)$  получаем формулу [6]

$$F(\sigma, N) \approx 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int \left( \frac{\sigma f - \sigma_0}{\sigma_c} \right)^\alpha \left( \frac{N - N_0}{N_c} \right)^\beta \times \right. \\ \left. \times P(x, y, z) dV \right]; \quad (8)$$

здесь  $\beta = \frac{\alpha}{m}$ ;  $V_0$  — некоторый эталонный объем, например объем стандартного образца;  $\sigma_c$  — некоторое характерное напряжение (константа материала), выбираемое из условия

$$cn = \frac{1}{V_0 \sigma_c^\alpha}.$$

В формуле (8) интегрирование производят по той части объема  $V$ , в которой  $\sigma f(x, y, z) > \sigma_0$ . В случае однородного напряженного состояния и вероятности образования макроскопической трещины из зародыша, постоянной во всем объеме, из формулы (8) получаем двойное распределение Вейбулла [16].

### ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

**Среднее разрушающее напряжение.** Величину этого напряжения  $\bar{\sigma}$  при заданном числе циклов  $N$  определяют по формуле

$$\bar{\sigma} = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\partial F(\sigma | N)}{\partial \sigma} \sigma d\sigma. \quad (9)$$

Подставляя сюда выражение (8), получим

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + \int_{\sigma_0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{g(\sigma)}{V_0} \left( \frac{N - N_0}{N_c} \right)^{\beta} \right] d\sigma, \quad (10)$$

где

$$g(\sigma) = \int \left( \frac{\sigma f - \sigma_0}{\sigma_c} \right)^{\alpha} P(x, y, z) dV. \quad (11)$$

В первом приближении можно с большой достоверностью положить, что макроскопическая трещина развивается из зародыша, расположенного в точке некоторого объема  $V_1$  и не развивается, если точка лежит вне этого объема. Иначе говоря,  $P(x, y, z) = 1$ , если точка лежит в  $V_1$ ; в противном случае  $P(x, y, z) = 0$ . По-видимому, объем  $V_1$  совпадает с поверхностным слоем, глубина которого по порядку величины равна десяткам характерных размеров первичных элементов. При этих предположениях для макроскопически однородного напряженного состояния формула (10) принимает вид

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + \sigma_c \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{N_c}{N - N_0} \right)^{\frac{1}{m}} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right), \quad (12)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Для напряжений  $\sigma(p)$ , соответствующих заданной вероятности разрушения  $p$ , имеем формулу [6]

$$\sigma(p) = \sigma_0 + \sigma_c \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{N_c}{N - N_0} \right)^{\frac{1}{m}} r^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (13)$$

где  $r = -\ln(1 - p)$ . Формулы (12) и (13) описывают явную зависимость разрушающих напряжений от характерного объема детали  $V_1$ . Имея семейство эмпирических кривых усталости для различных вероятностей

разрушения и используя формулы (12) и (13), можно подобрать значения параметров  $\sigma_0$ ,  $\sigma_c$ ,  $N_c$ ,  $m$  и  $\alpha$  и  $V_1$ .

В случае, когда  $\sigma_0 = N_0 = 0$ , формулы (12) и (13) описывают семейство степенных кривых усталости (см. табл. 1). Пусть  $N_1$  — база испытаний. Предел выносливости  $\sigma_r$ , определяемый как среднее разрушающее напряжение на базе  $N_1$ , составляет

$$\sigma_r = \sigma_0 \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{N_c}{N_1} \right)^{\frac{1}{m}} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Для напряжений по формуле (13) получаем

$$\sigma(p) = \sigma_r \left( \frac{N_1}{N} \right)^{\frac{1}{m}} \varphi(\alpha, p),$$

где

$$\varphi(\alpha, p) = \frac{[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)}.$$

Разброс прочности при действии циклических напряжений. Это явление может быть охарактеризовано дисперсией  $(\sigma - \bar{\sigma})^2$ . Здесь

$$\bar{\sigma}^2 = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\partial F(\sigma | N)}{\partial \sigma} \sigma^2 d\sigma. \quad (14)$$

Подстановка сюда формулы (8) дает искомую формулу, которую мы здесь не выписываем. При предположениях, при которых была выведена формула (12), получаем

$$\begin{aligned} \overline{[(\sigma - \bar{\sigma})^2]}^{\frac{1}{2}} &= \sigma_c \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{N_c}{N - N_0} \right)^{\frac{1}{m}} \times \\ &\times \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \right) - \Gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (12), (13) и (15) остаются в силе и для неоднородного напряженного состояния, если  $\sigma_0 \ll \bar{\sigma}$ . Вместо объема в эти формулы следует подставлять *приведенный объем*

$$V_* = \int f^{\alpha} dV. \quad (16)$$

**Эффективный коэффициент концентрации.** Этот коэффициент естественно определить как отношение средних значений разрушающих напряжений для детали без концентратора  $\bar{\sigma}$  и для детали с концентратором  $\bar{\sigma}'$ .

Если  $\sigma_0 \ll \bar{\sigma}$ ,  $\sigma_0 \ll \bar{\sigma}'$ , то эффективный коэффициент концентрации  $k_{эфф}$  не зависит от числа циклов  $N$  и определяется приближенной формулой

$$k_{эфф} = \left( \frac{V_*}{V_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (17)$$

При  $V_1 = V$  формула (17) была дана Н. Н. Афанасьевым [1].

### НАКОПЛЕНИЕ УСТАЛОСТНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

**Мера усталостного повреждения.** Для расчета на прочность при неоднородных и случайных режимах изменения напряжений необходимо уметь оценивать величину повреждения на основании характеристик прочности при однородных режимах и некоторых характеристик неоднородного режима.

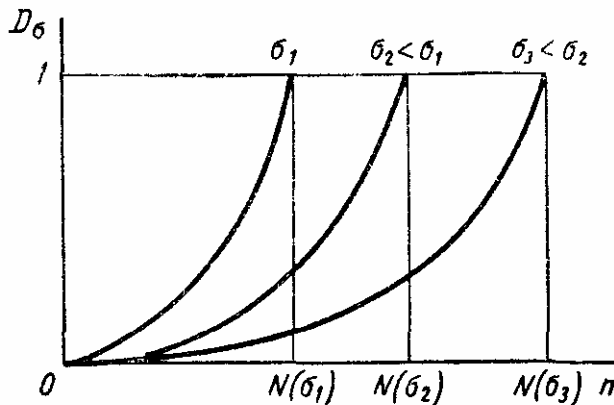


Рис. 8. Зависимость изменения меры повреждения  $D = D_\sigma(n)$  от уровня напряжений  $\sigma$

Простейшее феноменологическое описание основано на введении некоторой меры повреждения.

Рассмотрим простейший случай, когда прочность детали целиком определяется изменением номинального напряжения  $\sigma(t)$  в некоторой ее точке. Пусть процесс  $\sigma(t)$  состоит из совокупности симметричных циклов с амплитудой  $\sigma_{\max}$ , обозначаемой в дальнейшем просто через  $\sigma$ . Введем меру повреждения  $D$ , равную нулю для начального

состояния материала и единице при полном разрушении. Мера повреждения  $D$  является, очевидно, неубывающей функцией времени. Ее приращение  $\Delta D_n$  при  $n$ -м цикле напряжений зависит лишь от состояния детали, достигаемого к концу  $n-1$ -го цикла (т. е. согласно предположению, от  $D_{n-1}$ ), и от максимального напряжения  $n$ -го цикла  $\sigma_n$ . Следовательно,

$$\Delta D_n = g(D_{n-1}, \sigma_n) \\ (n = 0, 1, 2, \dots; D_0 = 0).$$

Заменяя для медленных процессов конечную разность  $\Delta D_n$  производной  $\frac{dD}{dn}$ , приходим к кинетическому уравнению

$$\frac{dD}{dn} = g(D, \sigma). \quad (18)$$

**Гипотеза суммирования усталостных повреждений.** Правая часть уравнения (18) может быть составлена бесчисленным множеством

## 2. Формулы для оценки долговечности при неоднородных циклах изменения напряжений

Гипотеза	Гипотеза линейного суммирования [2, 13, 20]	Гипотеза нелинейного суммирования [5, 6, 17]	Гипотеза двух стадий усталостного повреждения [5, 6]
Кинетические уравнения		$\frac{dD}{dn} = g(D, \sigma)$	$\frac{dD_0}{dn} = g_0(D_0, \sigma);$ $\frac{dD}{dn} = \begin{cases} 0 & \text{при } D_0 \leq 1 \\ g(D, \sigma) & \text{при } D_0 > 1 \end{cases}$
Дополнительные предположения при $\sigma = \text{const}$	$D = D_0 \left( \frac{n}{N} \right)$	$D = \left( \frac{n}{N} \right)^{\rho(\sigma)}$ *( $\rho \geq 1$ )	$D_0 = D_{0\sigma} \left( \frac{n}{N_0} \right);$ $D = D_{0\sigma} \left( \frac{n - N_0}{N - N_0} \right)$
Общий случай	$N^* \int_0^1 \frac{dn}{N(\sigma)} = 1$	Из краевой задачи: $\frac{dD}{dn} = \frac{\rho(\sigma)}{N(\sigma)} D$ $D(0) = 0, D(N^*) = 1$	$N_0^* \int_0^1 \frac{dn}{N_0(\sigma)} = 1; \int_{N_0^*}^1 \frac{dn}{N(\sigma) - N_0(\sigma)} = 1$
Две ступени нагружения	$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1$ $N_1 = N(\sigma_1),$ $N_2 = N(\sigma_2)$	$\left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{\rho_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1$	$\frac{N_1 N_{02}}{N_2 N_{01}} \cdot \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1$ при $n_1 \leq N_{01}$ $\frac{n_1}{N_1} + \frac{N_1 - N_{01}}{N_2 - N_{02}} \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{n_2}{N_2} = 1$ при $n_1 > N_{01}$ $N_{01} = N_0(\sigma_1), N_{02} = N_0(\sigma_2)$

Условия для нахождения кинетических уравнений

способов. Пусть процесс повреждения при  $\sigma = \text{const}$  является автомодельным [5] в том смысле, что мера повреждения  $D_\sigma$  зависит лишь от отношения  $\frac{n}{N(\sigma)}$  и не зависит явно от напряжения  $\sigma$  (рис. 8). Тогда из уравнения (18) вытекает весьма простая формула для нахождения предельного числа циклов  $N^*$  (табл. 2). Эта формула соответствует известной гипотезе о суммировании усталостных повреждений [2, 13, 20]. Она состоит в том, что повреждение, вызываемое данным циклом напряжения, предполагается не зависящим от состояния конструкции в данный момент и от предшествующей истории нагружения. Поэтому каждое новое повреждение просто суммируется с повреждениями, вызванными предшествующими циклами. Условие разрушения имеет вид

$$\sum \frac{n_k}{N_k} = 1; \quad (19)$$

здесь  $n_k$  — число циклов с максимальным напряжением  $\sigma_k$ ;  $N_k$  — предельное число циклов при однородном испытании с амплитудой  $\sigma_k$ .

**Некоторые другие предположения о характере накопления повреждений.** В работах [5, 17] рассмотрены модели, позволяющие описать наблюдаемое на опытах отступление от гипотезы суммирования повреждений. Некоторые формулы приведены в табл. 2. Удобный путь для уточнения и обобщения теории суммирования повреждений открывает введение двух или нескольких мер повреждения [5]. Так, разделяя усталостное разрушение на две стадии, одна из которых является инкубационной, а другая соответствует развитию макроскопической трещины, и вводя две соответствующих меры повреждения  $D$  и  $D_0$ , придем к модели, приведенной в последней графе табл. 2. В таблице даны также соотношения для случая двухступенчатого режима нагружения, часто применяемого для исследования процесса усталостного повреждения. Формулы для расчета долговечности при случайном режиме изменения напряжений приведены в гл. 8.

Дальнейшие подробности можно найти в работах [5—7, 9, 14]. В частности, в работе [7] показано, как изложенные здесь методы можно распространить на процессы, содержащие несимметричные и сложные циклы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев Н. Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов. М., Изд-во АН СССР, 1953.
2. Бахарев В. М. Об утомляемости стали при повторных перегрузках. Труды ЦИАМ, № 91. М., Оборонгиз, 1945.
3. Биргер И. А. Запасы прочности при переменных напряжениях. «Вестник машиностроения», 1948, № 6.
4. Биргер И. А. Сравнение условий усталостной прочности. «Вестник машиностроения», 1954, № 9.
5. Болотин В. В. Некоторые обобщения теории суммирования усталостных повреждений и их приложение к анализу долговечности при действии случайных сил. Известия вузов, «Машиностроение», № 8, 1959.
6. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., Стройиздат, 1961 (1-е изд.), 1965 (2-е изд.).
7. Болотин В. В. Накопление усталостных повреждений при нагружениях, представляющих собой широкополосный случайный процесс. Сб. «Расчеты на прочность», № 9, М., Машгиз, 1963.
8. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов. М., «Машиностроение», 1964.

9. Вопросы механической усталости. Под ред. С. В. Серенсена М., «Машиностроение», 1964.
  10. Иванова В. Г. Усталостное разрушение металлов. М., Металлургиздат, 1963.
  11. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М., Гостехиздат, 1947.
  12. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. III. М., Машгиз, 1953.
  13. Решетов Д. Н. Расчет деталей станков. М., Машгиз, 1947.
  14. Серенсен С. В., Кобаев В. П., Козлов Л. А., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М., Машгиз, 1954 (1-е изд.), 1963 (2-е изд.).
  15. Справочник машиностроителя. Т. III. М., Машгиз, 1962.
  16. Фрейденталь А., Гумбел Э. Явление усталости в физическом и статистическом аспектах. Сб. «Проблемы механики». М., ИЛ, 1959.
  17. Corten H. T., Dolan T. J. Cumulative fatigue damage. Proc. of the International conference on fatigue of metals. London—New York, 1956.
  18. Forrest P. J. Fatigue of metals. Pergamon Press, Oxford, 1962.
  19. Heywood R. B. Designing against fatigue of metals. Reinhold. New York, 1962.
  20. Miner M. A. Cumulative damage in fatigue, Journ. Appl. Mech., vol. 12, No 1, 1945.
  21. Orowan E. Theory of the fatigue of metals. Proc. Roy. Soc., vol. 171 A, No 944 (1939).
  22. Weibull W. A statistical representation of fatigue failures in solids. Trans. Roy. Inst. Techn., No 27. Stockholm. 1949.
-



## Глава 8

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Надежность. Отказ.** Под *надежностью* понимают способность механической (электрической и т. п.) системы выполнять заданные ей функции в заданных условиях эксплуатации в течение установленного срока. Прекращение выполнения хотя бы одной из этих функций называют *отказом*. В зависимости от характера появления, степени наносимого ущерба, возможности быстрого устранения и т. п. в теории надежности рассматривают различные типы отказов. Для простоты в дальнейшем мы не будем различать отказы по их типам, полагая, что каждый отказ означает выход детали или конструкции из строя. Такой подход естественен в задачах прочности, где отказ, как правило, означает либо разрушение, либо потерю несущей способности.

**Мера надежности.** В теории надежности отказ рассматривают как случайное событие, а надежность — как вероятностную характеристику системы. Наиболее удобной мерой надежности является *вероятность безотказной работы системы*. Для простоты эту меру будем называть *надежностью* системы. Иногда целесообразно измерять надежность в логарифмических единицах (беллах), определяя уровень надежности как

$$r = \lg \frac{1}{Q} = -\lg (1 - P), \quad (1)$$

где  $Q$  — вероятность отказа;  $P$  — надежность системы.

Применяют также гауссовские единицы надежности. Уровень надежности  $\gamma$  и надежность  $P$  связаны зависимостью

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\gamma} \exp \left( -\frac{u^2}{2} \right) du. \quad (2)$$

График для пересчета с одной меры надежности на другую приведен на рис. 1.

**Частота и интенсивность отказов.** Надежность  $P$ , очевидно, является невозрастающей функцией времени  $t$  (рис. 2). Изменение на-

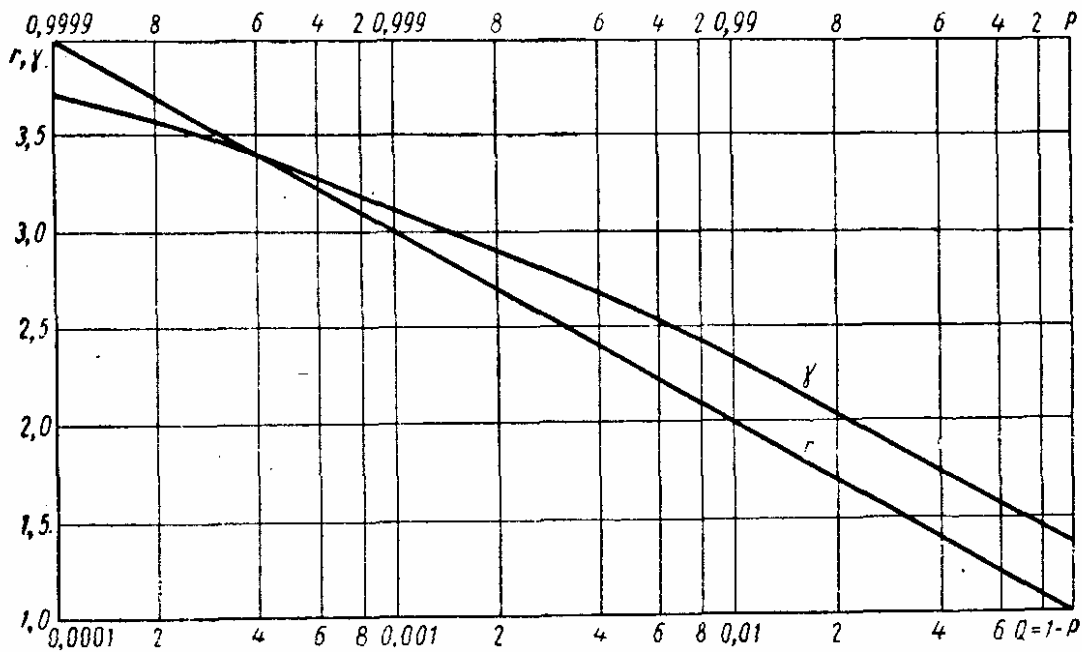


Рис. 1. Связь между надежностью  $P$ , вероятностью отказа  $Q$ , логарифмической мерой надежности  $r$  и гауссовской мерой надежности  $\gamma$

дежности во времени, помимо функции  $P(t)$ , может быть охарактеризовано частотой отказов

$$f(t) = - \frac{dP(t)}{dt} \quad (3)$$

и интенсивностью отказов

$$\lambda(t) = - \frac{P'(t)}{P(t)}. \quad (4)$$

Интенсивность отказов равна, очевидно, числу отказов в единицу времени, отнесенному к числу не отказавших к данному моменту систем.

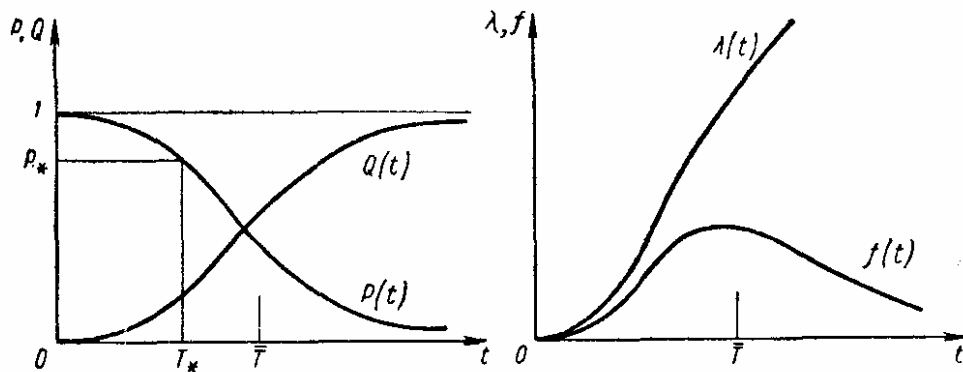


Рис. 2. Надежность  $P$ , вероятность отказа  $Q$ , частота отказов  $f$  и интенсивность отказов  $\lambda$ , рассматриваемые как функции времени  $t$

Произведение  $\lambda(t) dt$  представляет собой условную вероятность отказа в течение интервала времени  $t, t + dt$  для системы, безотказно

проработавшей время  $t$ . Надежность и интенсивность отказов связаны зависимостью

$$P(t) = \exp \left[ - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right] \quad (5)$$

Эта формула получается интегрированием соотношения (4).

Если интенсивность отказов  $\lambda$  постоянна во времени, то из формулы (5) вытекает *экспоненциальный закон распределения отказов*, широко применяемый при расчете радиоэлектронных устройств [2, 31]. Часто изменение интенсивности отказов во времени носит следующий характер: вначале интенсивность отказов относительно велика (этот период называется периодом приработки); затем интенсивность снижается и остается примерно постоянной в течение длительного интервала эксплуатации, увеличиваясь к концу его вследствие старения и износа.

**Долговечность и нормативный ресурс.** Под *долговечностью* понимают свойство системы, обеспечивающее ее длительную работоспособность в заданных условиях эксплуатации. За меру долговечности обычно принимают время работы системы от начала эксплуатации до выхода из строя. Это время обозначают через  $T$  и называют *сроком службы* или *долговечностью*.

Долговечность системы  $T$  является случайной величиной. Ее функция распределения  $F(T)$  совпадает с функцией  $Q(t)$  при замене  $t$  на  $T$ , а плотность распределения вероятности  $p(T)$  — с частотой отказов  $f(t)$  при той же замене.

Среднюю долговечность  $\bar{T}$  определяют по формуле

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (6)$$

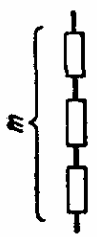
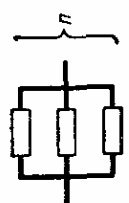
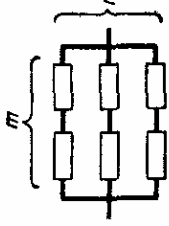
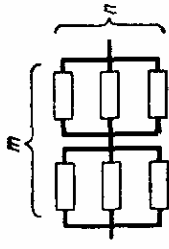
Время эксплуатации, соответствующее некоторой предельной надежности  $P_*$ , по достижении которой система должна быть снята с эксплуатации, называют ресурсом. Очевидно, ресурс  $T_*$  может быть определен из условия  $P(T_*) = P_*$  (см. рис. 2). Ресурс равен такой нижней границе для долговечности, вероятность превышения которой равна минимальной нормативной величине  $P_*$ .

**Определение надежности системы по надежностям ее элементов.** Различают *последовательное соединение* элементов системы, при котором отказ одного элемента влечет за собой отказ системы, *параллельное соединение*, при котором отказ системы наступает лишь в случае отказа всех элементов, и *смешанное соединение*. Формулы для вычисления надежности системы  $P$  по известным надежностям элементов  $p_k$  приведены в табл. 1.

Параллельное соединение элементов или их групп обеспечивает дублирование отказавших элементов запасными элементами. Такой метод повышения надежности называют *резервированием*. Формулы для расчета схемы общего резервирования и *раздельного резервирования* даны в табл. 1. При этом предполагается, что надежности  $p_k$  соответствующих дублирующих элементов одинаковы.

**Другие задачи теории надежности.** К ним относят: определение надежности системы по известным надежностям ее элементов; отыскание принципов синтеза систем, обладающих заданной надежностью; разработка методов повышения надежности, долговечности и ремонтно-

1. Формулы для вычисления надежности системы  $P$  по заданным надежностям элементов  $p_k$

Тип соединения	Последовательное	Параллельное	Смешанное	
			Общее резервирование	Раздельное резервирование
Блок-схема				
Надежность системы $P$	$\prod_{k=1}^m p_k$	$1 - \prod_{k=1}^n (1 - p_k)$	$1 - \left( 1 - \prod_{k=1}^m p_k \right)^n$	$\prod_{k=1}^m [1 - (1 - p_k)^n]$
То же для случая $p_k = p$	$p^m$	$1 - (1 - p)^n$	$1 - (1 - p^m)^n$	$[1 - (1 - p)^n]^m$

пригодности систем; определение экономически обоснованных значений надежности и долговечности; обоснование методов индикации отказов, методов контроля качества и методов испытаний, обеспечивающих заданный уровень надежности и т. д.

### ОСОБЕННОСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ К ВОПРОСАМ ПРОЧНОСТИ

**Отказы, имеющие механическое происхождение.** Эти отказы могут быть разбиты на две группы. К первой группе относят *отказы, носящие характер случайного выброса*: хрупкое разрушение, превышение предела упругости в какой-либо точке конструкции или машины, для которой остаточные деформации недопустимы, и, наконец, возникновение слишком больших упругих деформаций. Ко второй группе относят *отказы, возникающие в результате постепенного необратимого накопления повреждений* в конструкции: накопление пластических деформаций или деформаций ползучести, накопление усталостных повреждений, ведущее к развитию усталостной трещины, и, наконец, механический износ.

**Структурная схема механических аспектов теории надежности.** Решение проблемы надежности (рис. 3) предполагает изучение статисти-

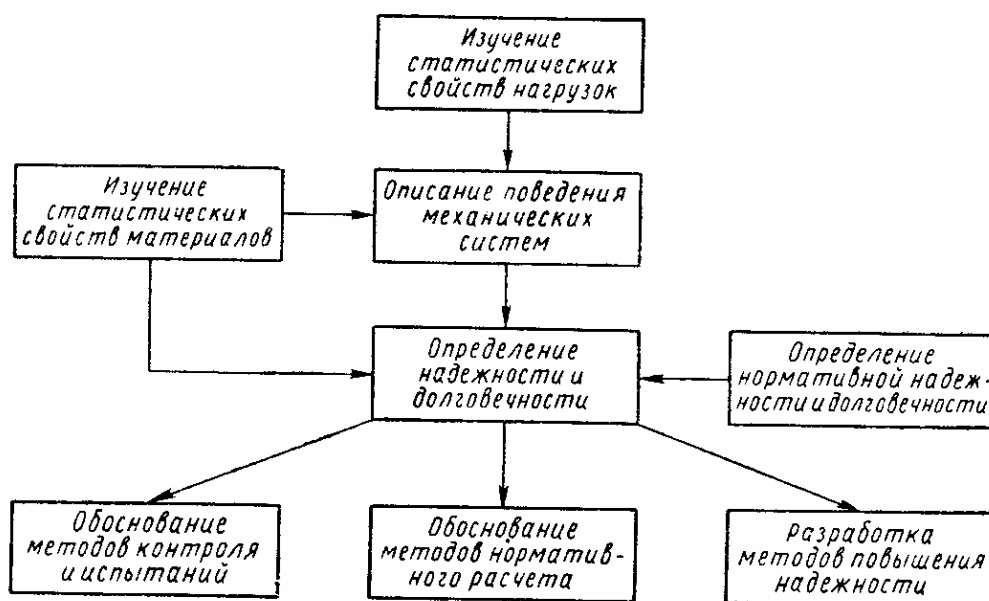


Рис. 3. Структурная схема механических аспектов теории надежности

ческих свойств внешних воздействий, изучение статистических свойств материалов и конструкций и исследование поведения конструкций при случайных воздействиях. На основе полученных результатов должна быть получена количественная оценка надежности и долговечности конструкции или машины. Для решения инженерных вопросов требуется задание нормативных значений надежности и долговечности. Отыскание этих значений требует решения задач, родственных задачам теории оптимальных конструкций. На основе общей теории могут быть далее развиты отдельные приложения — теория методов сокращенных испытаний на надежность и долговечность, теория проектирования конструкций

и деталей машин повышенной живучести, а также могут быть разработаны нормативные инженерные методы расчета, не содержащие в явной форме теоретико-вероятностных элементов.

**Особенности механических задач теории надежности.** Методы решения задач надежности существенно зависят от вида нагружения. Будем различать *дискретное* и *непрерывное* нагружения. Дискретные нагружения могут быть как *однократными*, так и *многократными*. Поведение системы при таких нагружениях может быть описано в рамках классической теории вероятностей и теории марковских цепей. Но, как правило, внешние воздействия представляют собой *стационарные* или *нестационарные* случайные процессы. Поведение системы при этих воздействиях, включая накопление повреждений в системе, также представляет собой случайный процесс. Надежность и долговечность механических систем при непрерывной эксплуатации может быть правильно понята, описана и рассчитана лишь на уровне теории случайных процессов. Понятие надежности нельзя рассматривать вне времени, в отрыве от понятия долговечности. Только опираясь на аппарат теории случайных процессов, можно получить решение задач о невыгоднейшем сочетании нагрузок, о законе распределения долговечности конструкций и т. д.

**Расчеты на надежность и закон больших чисел.** Иногда чрезмерно подчеркивают те принципиальные трудности, которые возникают при применении теории надежности к системам, осуществляемым в небольшом количестве экземпляров. Действительно, к таким системам не применим закон больших чисел и статистическое истолкование вероятности. Тем не менее, вычисляемая методами теории надежности вероятность безотказной работы и здесь сохраняет смысл объективной характеристики надежности системы.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЧНОСТИ

Характеристики прочности материалов и конструкций (предел текучести, предел прочности, разрушающая нагрузка и т. п.) являются случайными величинами; их находят из испытаний в однородных условиях достаточно большой серии образцов и обработки результатов испытаний методами математической статистики [16]. Приведем некоторые основные формулы для обработки результатов.

**Среднее арифметическое значение.** Для выборки  $R_1, R_2, \dots, R_n$  случайной величины  $R$  среднее значение  $\bar{R}$  определяют по формуле

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R_k. \quad (7)$$

**Дисперсия.** Несмещенная оценка для дисперсии (квадрата среднего квадратического отклонения) определяется как

$$s_R^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (R_k - \bar{R})^2. \quad (8)$$

Отношение

$$\omega_R = \frac{s_R}{R} \quad (9)$$

называют *коэффициентом изменчивости* случайной величины  $R$ .

Кроме того, для описания эмпирических распределений применяют и другие параметры, в частности коэффициенты асимметрии и эксцесса.

**Доверительные интервалы.** Характеристики, определяемые по формулам (7) и (8), являются эмпирическими оценками для математического ожидания  $a_R$  и среднего квадратического отклонения  $\sigma_R$ . Ширина доверительного интервала, внутри которого с заданной вероятностью  $P$  находится математическое ожидание  $a_R$ , определяют по формуле

$$P \left( \bar{R} - \frac{t_1 s_R}{\sqrt{n}} < a_R < \bar{R} + \frac{t_2 s_R}{\sqrt{n}} \right) = S_{n-1}(t_2) - S_{n-1}(-t_1); \quad (10)$$

здесь  $S_k(t)$  — функция распределения Стьюдента для  $k$  степеней свободы, таблицы которой можно найти, например, в работах [13, 16]. Ширину доверительного интервала для стандарта  $\sigma_R$  определяют по формуле

$$\begin{aligned} P \left( \frac{s_R \sqrt{n}}{\chi_1} < \sigma < \frac{s_R \sqrt{n}}{\chi_2} \right) = \\ = P(\chi_2^2, n-1) - P(\chi_1^2, n-1), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $P(\chi^2, n)$  — функция  $\chi^2$ -распределения Пирсона [13, 16]. Формулы (10) и (11) применяют также для определения минимального объема выборки, необходимого для того, чтобы оценить математическое ожидание  $a_R$  и стандарт  $\sigma_R$  с заданной надежностью.

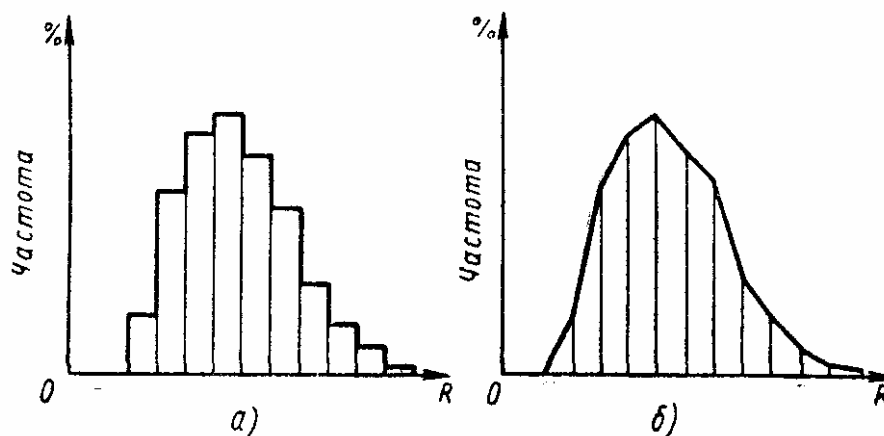


Рис. 4. Гистограмма (а) и полигон (б)

**Распределения случайных величин.** Результаты испытаний на прочность после группировки найденных значений по достаточно малым интервалам и вычисления средних относительных частот для каждого интервала можно представить графически в виде *гистограммы* или *полигона* (рис. 4). Следующая задача состоит в подборе теоретического распределения, наилучшим образом аппроксимирующего найденное эмпирическое распределение. Для расчетов обычно самым удобным является *нормальное распределение*; однако его использование для опи-

сания прочностных характеристик не корректно ввиду того, что распределение распространяется на отрицательную полуось. Более обоснованно применение *логарифмически нормального распределения, распределения Релея, распределения Вейбулла*. Последнее представляется наиболее теоретически обоснованным для описания хрупкой и усталостной прочности [9]. Для описания усталостной прочности и длительной прочности при высоких температурах часто употребляют также логарифмически нормальное распределение. Оценка близости эмпирического и теоретического распределений может быть выполнена при помощи критерия  $\chi^2$ , критерия А. Н. Колмогорова и других критериев математической статистики.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВНЕШНИХ НАГРУЗОК

Внешние нагрузки и другие внешние условия эксплуатации, как правило, представляют собой случайные процессы. Поэтому для их статистического описания следует применять методы теории случайных процессов.

**Элементарное рассмотрение.** Если силы приложены квазистатически и причиной отказа является превышение параметром нагрузки

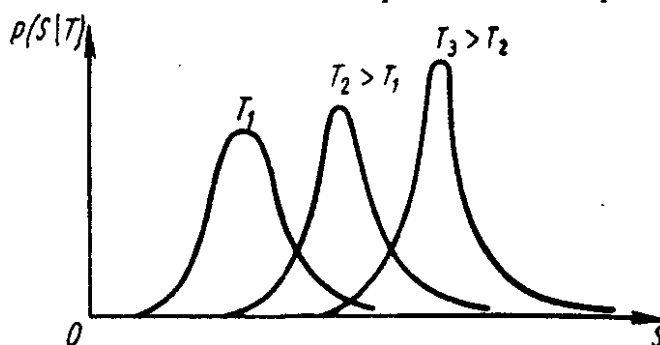


Рис. 5. Изменение плотности распределения вероятности  $p(S|T)$  для максимальных значений нагрузки с увеличением времени наблюдения  $T$

некоторого заданного уровня хотя бы один раз, то допустимо рассматривать отказ в рамках элементарной теории вероятностей. Для этого необходимо знать плотность распределения вероятности  $p(S|T)$  для максимальных значений параметра нагрузки  $s(t)$  в течение интервала времени  $T$ , равного назначенному сроку службы. Существенно, что это распределение зависит от времени (рис. 5). Продолжительность наблюдения можно сократить, если разбить время  $T$  на  $m$  равных интервалов  $\Delta T$ , каждый из которых достаточно велик, чтобы корреляция максимумов для двух соседних интервалов была пренебрежимо малой. Тогда абсолютные максимумы для каждого интервала  $\Delta T$  можно приближенно рассматривать как случайные величины в последовательности независимых испытаний. Тогда плотность вероятности  $p(S|T)$  определится по формуле

$$p(S|T) = mF^{m-1}(S|\Delta T) \frac{\partial F(S|\Delta T)}{\partial s}, \quad (12)$$

где  $F(S|\Delta T)$  — функция распределения вероятности для максимумов на базе наблюдения, равной  $\Delta T$ .



**Корреляционное описание.** Если параметр нагрузки необходимо трактовать как случайный процесс  $s(t)$ , то одной из форм его описания является описание при помощи *полной системы корреляционных функций*:

$$\left. \begin{aligned} \bar{s} &= \overline{s(t)}; \\ K_{ss}(t_1, t_2) &= \overline{s(t_1) s(t_2)}; \\ K_{sss}(t_1, t_2, t_3) &= \overline{s(t_1) s(t_2) s(t_3)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и так далее. Здесь осреднение производится по множеству реализаций случайного процесса  $s(t)$  (рис. 6). Корреляционные функции

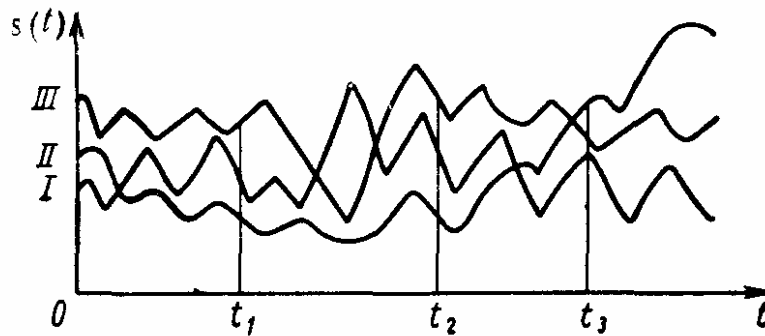


Рис. 6. Нагрузка как случайный процесс

для *стационарных случайных процессов* зависят лишь от интервалов  $t_1 - t_2$ ,  $t_1 - t_3$  и т. д. Средние значения и корреляционные функции *эргодического стационарного случайного процесса* могут быть определены путем осреднения по времени:

$$\left. \begin{aligned} \bar{s} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt; \\ K_{ss}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) s(t + \tau) dt; \\ K_{sss}(\tau_1 \tau_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) s(t + \tau_1) s(t + \tau_2) dt \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и так далее. Эмпирические оценки для средних значений и корреляционных функций определяют по формулам, вытекающим из формул (14) при замене интегралов конечными суммами. Продолжительность реализации  $T$  выбирают с учетом необходимой точности вычислений. Подробнее см. в книгах [18, 23].

2. Формулы для определения характеристик случайных процессов

Характеристика	Обозначение	Общая формула	Стационарный гауссовский случайный процесс при $\bar{s} = 0$
Среднее число превышений уровня $S \geq 0$ в единицу времени	$V_0(S)$	$\int_0^\infty p(S, \dot{s}; t) \dot{s} ds$	$\frac{\omega_{\text{эфф}}}{2\pi} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right)$
Плотность распределения максимумов $S \geq 0$	$p(S)$	$\int_0^\infty p(S, 0, \ddot{s}; t) \ddot{s} ds$	$\frac{\omega_{\text{эфф}}}{4\pi\sigma_s} \left\{ \frac{S}{\sigma_s} \left[ 1 + \operatorname{erf} \frac{S}{\sigma_s \sqrt{2(k^2 - 1)}} \right] + \sqrt{\frac{2(k^2 - 1)}{\pi}} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2 k^2 - 1}\right) \right\} \times \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right)$
Среднее число превышений уровня $S \geq 0$ за время $T$	$V(S T)$	$T \int_0^\infty dt \int_0^\infty p(S, \dot{s}; t) \dot{s} ds$	$\frac{\omega_{\text{эфф}} T}{2\pi} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right)$

Продолжение табл. 2

Характеристика	Обозначение	Общая формула	Стационарный гауссовский случайный процесс при $\bar{s} = 0$
Приближенная оценка для вероятности превышения уровня $S > S_0(T)$ за время $T$ хотя бы на один раз	$P(S T)$	$T \int_0^\infty dt \int_0^\infty p(S, \dot{s}; t) s \dot{s}$	$\frac{\omega_{\Phi\Phi} T}{2\pi} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right)$
Приближенная оценка для плотности распределения абсолютных максимумов $S > S_0(T)$ за время $T$	$p(S T)$	$-\frac{d}{dS} \int_0^T dt \int_0^\infty p(S, \dot{s}; t) s \dot{s}$	$\frac{\omega_{\Phi\Phi} T}{2\pi\sigma_s^2} S \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right)$
<p>Обозначения: <math>S_0</math> — корень уравнения <math>V(S T) = 1</math>; <math>\omega_{\Phi\Phi}^2 = \frac{\int_0^\infty \omega^2 \Phi(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega}</math>, где <math>k^2 = \frac{1}{\omega_{\Phi\Phi}^2} \frac{\int_0^\infty \omega^4 \Phi(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \Phi(\omega) d\omega}</math>, где</p> <p><math>\Phi(\omega)</math> — спектральная плотность процесса <math>s(t)</math>.</p>			

**Спектральная плотность.** Важной характеристикой эргодического стационарного случайного процесса является его *спектральная плотность*  $\Phi(\omega)$ . Если спектр процесса не содержит дискретных составляющих, то связь между корреляционной функцией второго порядка  $K_{ss}(\tau)$  и спектральной плотностью  $\Phi(\omega)$  дается формулами

$$\left. \begin{aligned} K_{ss}(\tau) &= \int_0^{\infty} \Phi(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \\ \Phi(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{ss}(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Дальнейшие подробности можно найти в третьем томе.

**Характеристики выбросов случайного процесса.** Для суждения о надежности необходимо знать некоторые характеристики выбросов

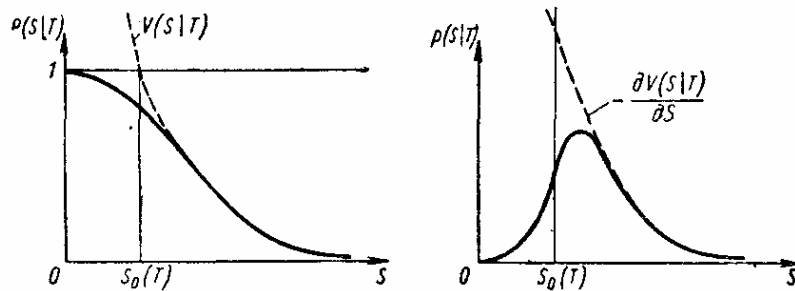


Рис. 7. Связь между средним числом  $V(S|T)$  превышений уровня  $S$  за время  $T$  и плотностью распределения абсолютных максимумов процесса  $s(t)$  за время  $T$

случайного процесса  $s(t)$ . К ним относят: среднее число  $V_0(S|t)$  превышений функцией  $s(t)$  уровня  $S$  (выбросов) в единицу времени; среднее число  $V(S|T)$  превышений уровня  $S$  за время  $T$ ; вероятность  $P(S|T)$  превышения заданного уровня  $S$  за время  $T$  хотя бы один раз; функцию распределения  $p(S)$  максимумов процесса  $s(t)$  и т. д. Формулы для некоторых характеристик даны в табл. 2. Следует иметь в виду, что формула для вероятности  $P(S|T)$  не является точной, а дает для искомой вероятности при  $S > S_0(T)$  оценку сверху (рис. 7). Поэтому приближенной является и формула для  $p(S|T)$ . Дополнительные сведения по этому вопросу содержатся в книге [9].

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

**Средняя долговечность при циклических напряжениях со случайными амплитудами.** Пусть процесс состоит из симметричных циклов, каждый из которых характеризуется максимальным напряжением  $S$ . Используем гипотезу суммирования усталостных повреждений (см. стр. 160). Если известны уравнение кривой усталости  $N = N(S)$  при однородном режиме напряжений, эффективный период изменения напряжений  $T_{эфф}$  и плотность вероятности  $p(S)$  максимальных

значений процесса  $s(t)$ , то средняя долговечность может быть оценена по формуле [9]

$$T = \frac{T_{эфф}}{\int_0^{\infty} \frac{p(S) dS}{N(S)}}. \quad (16)$$

Формулы для вычисления средней долговечности при некоторых предположениях относительно вида кривой усталости и распределения случайных амплитуд приведены в табл. 3. В этих формулах  $\Gamma(x)$  — гамма-функция;  $P(\chi^2, n)$ -функция  $\chi^2$ -распределения Пирсона, протабулированная в работах [13, 16]. Эффективный период  $T_{эфф}$  выражают через спектральную плотность  $\Phi(\omega)$  процесса  $s(t)$  согласно формуле

$$T_{эфф} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} \omega^2 \Phi(\omega) d\omega}}. \quad (17)$$

**Долговечность при широкополосных случайных процессах.** Формулы, приведенные в табл. 3, справедливы, строго говоря, для узкополосных стационарных эргодических случайных процессов. Для неузкополосных процессов формулы дают оценку снизу. Методы расчета на долговечность при широкополосных процессах изменения напряжений, а также при нестационарных процессах даны в работах [7, 10].

**Применение более общих теорий суммирования повреждений.** Если используют обобщенное уравнение для меры повреждения  $D$  (стр. 160), то среднюю долговечность определяют по формуле [9]

$$T = \int_0^1 \frac{dD}{\int_0^{\infty} \frac{p(S)}{N(S)} g(S) dS}.$$

Применение теории двух стадий усталостного повреждения дает формулу

$$T = \frac{1}{\int_0^{\infty} \frac{p(S) dS}{N(S) - N_0(S)}} + \frac{1}{\int_0^{\infty} \frac{p(S) dS}{N_0(S)}}.$$

Вычисляемая по приведенным выше формулам долговечность является условной в том смысле, что она найдена при фиксированных характеристиках прочности. Если полное число циклов до разрушения достаточно велико, то значения условной долговечности плотно группируются около среднего значения [9]. Учет разброса характеристик прочности будет освещен в следующем параграфе.

## 3. Формулы для вычисления средней долговечности при циклических напряжениях со случайными амплитудами

Распределение $p(S)$ максимумов процесса $s(t)$	Уравнение кривой усталости	Средняя долговечность $T$
Общий случай	Общий случай	$\frac{T_{эфф}}{\int_0^{\infty} \frac{p(S) dS}{N(S)}}$
$\frac{S}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_s^2}\right)$ (узкополосный гауссовский случайный процесс)	$N = N_1 \left(\frac{R}{S}\right)^m \quad \text{при } S \geq R$ $N \rightarrow \infty \quad \text{при } S < R$	$\frac{N_1 T_{эфф}}{\frac{m}{2^2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} P\left[\left(\frac{R}{\sigma_s}\right)^2, m+2\right] \left(\frac{R}{\sigma_s}\right)^m$
		$\frac{N_1 T_{эфф}}{\frac{m}{2^2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \left(\frac{R}{\sigma_s}\right)^m$ (приближенная формула при $\sigma_s \gg R$ )
		$\sqrt{\frac{\pi}{2}} N_1 T_{эфф} \exp\left(\frac{R^2}{2\sigma_s^2}\right)$ (приближенная формула при $\sigma_s \ll R$ )
	$N = N_1 \left(\frac{R}{S}\right)^m \quad \text{при } S > 0$	$\frac{N_1 T_{эфф}}{\frac{m}{2^2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \left(\frac{R}{\sigma_s}\right)^m$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА

Способ Н. С. Стрелецкого, А. Р. Ржаницына и А. М. Фрейденталя [25, 30, 33]. Предположим, что отказ наступает при нарушении неравенства

$$\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0, \quad (18)$$

где  $\Psi$  — функция от случайных параметров  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , характеризующих нагрузку, условия эксплуатации и свойства конструкции. Совместная плотность вероятности для этих параметров  $p(q_1, q_2, \dots, q_n)$  предполагается известной. Надежность  $P$  может быть определена по формуле

$$P = 1 - \int_{\Psi < 0} p(q_1, q_2, \dots, q_n) dq_1 dq_2 \dots dq_n. \quad (19)$$

Если параметры  $q_1, q_2, \dots, q_n$  подчиняются нормальному распределению и если функция  $\Psi$  является линейной функцией этих параметров

$$\Psi = \sum_{k=1}^n a_k q_k,$$

то гауссовскую меру надежности подсчитывают по формуле А. Р. Ржаницына [25, 27]

$$\gamma = \frac{\sum_{k=1}^n a_k \bar{q}_k}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k K_{q_j q_k}}}; \quad (20)$$

здесь  $K_{q_j q_k}$  — центральные корреляционные моменты параметров  $q_k$ . Если  $\Psi = R - S$ , где  $R$  — параметр прочности;  $S$  — параметр нагрузки, и параметры  $R$  и  $S$  некоррелированы, то формула (20) принимает вид

$$\gamma = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}. \quad (21)$$

Строго говоря, формулы (19)–(21) пригодны лишь для случая однократного дискретного нагружения. Используя схему независимых испытаний, их можно распространить на случай дискретных многократных нагружений. С некоторыми оговорками формулы (21) можно применить для непрерывного нагружения, если под  $R$  понимать минимальное значение случайной функции  $R(t)$ , а под  $S$  — максимальное значение случайной функции  $S(t)$  за время эксплуатации  $T$ . Для нагружений, представляющих собой непрерывные случайные процессы с накоплением повреждений, эти формулы непригодны.

**Способ В. В. Болотина.** Большинство задач механической надежности можно рассматривать по следующей схеме [4, 9]. Вначале определяют надежность внутренне детерминированной системы под действием случайных внешних нагрузок, трактуемых как случайный процесс. Эта надежность  $P_0(r_1, r_2, \dots, r_n; t)$ , называемая *условной надежностью*, зависит от параметров  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , характеризующих внутренние свойства системы (механические свойства материала, начальные дефекты и неправильности). Совместная плотность вероятностей  $p(r_1, r_2, \dots, r_n)$  для этих параметров должна быть получена путем изучения достаточно больших выборок конструкций. Надежность системы  $P(t)$  вычисляют по формуле полной вероятности.

$$P(t) = \int \dots \int P_0(r_1, r_2, \dots, r_n; t) p(r_1, r_2, \dots, r_n) dr_1 dr_2, \dots, dr_n. \quad (22)$$

Например, в случае, когда нагрузка характеризуется одним параметром  $s(t)$ , изменение которого представляет собой стационарный гауссовский процесс, а отказ наступает при нарушении неравенства  $R \geq S$ , условная надежность определяется приближенно как

$$P_0(t) \approx 1 - \frac{\omega_{эфф} t}{2\pi} \exp \left[ -\frac{(R - a_S)^2}{2\sigma_S^2} \right]. \quad (23)$$

Формула (23) дает оценку снизу, пригодную при надежности, близкой к единице. Если же причиной отказа является усталостное разрушение, то, учитывая малый разброс условной долговечности  $T_0$ , можно записать

$$P_0(t) \approx \begin{cases} 1 & \text{при } t < T_0 \\ 0 & \text{при } t \geq T_0, \end{cases} \quad (24)$$

где  $T_0$  определяют по формулам типа (16).

**Общие соображения по выбору нормативного коэффициента запаса.** Инженерный расчет носит, как правило, детерминистический характер. Условие безотказности  $R \geq S$ , которое может быть выполнено лишь с некоторой надежностью  $P$ , заменяют детерминистическими условиями

$$k = \frac{R_{расч}}{S_{расч}} \geq k_{норм}$$

или

$$S_{расч} \leq \frac{R_{расч}}{k_{норм}}. \quad (25)$$

Расчетное значение нагрузки  $S_{расч}$  и расчетное значение прочности  $R_{расч}$  выбирают до некоторой степени произвольно: это могут быть математические ожидания или наиболее вероятные значения, а также математические ожидания максимальных (минимальных) значений. После того как расчетные значения  $S_{расч}$  и  $R_{расч}$  установлены, *нормативный коэффициент запаса*  $k_{норм}$  выбирают так, чтобы из условий (25) с надежностью  $P$  вытекало условие  $R \geq S$ . Отсюда видна взаимосвязь параметров, входящих в условия (25).



Если параметр внешних сил принимает детерминированное значение, то последнее естественно принять за расчетное. Тогда нормативный коэффициент запаса определяется как

$$k_{\text{норм}} = \frac{\bar{R}_{\text{расч}}}{R(P)},$$

где  $R(P)$  — значение параметра прочности, такое, что вероятность осуществления неравенства  $R > R(P)$  равна надежности  $P$ . При нормальном распределении параметра  $R$ , принимая за  $R_{\text{расч}}$  среднее значение  $R$ , получим

$$k_{\text{норм}} = \frac{1}{1 - \gamma \omega_R}; \quad (26)$$

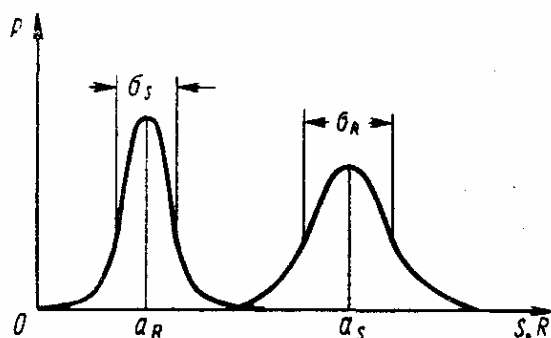


Рис. 8. Схема, иллюстрирующая связь между надежностью и коэффициентом запаса

здесь  $\gamma$  — гауссовский уровень надежности.

В общем случае, когда случайными являются как нагрузки, так и характеристики прочности, назначение нормативного коэффициента запаса становится весьма сложной задачей, требующей предварительного разрешения соответствующей задачи надежности. Для ориентировочных подсчетов можно воспользоваться формулой (25), в которой под  $\bar{R}$  и  $\bar{S}$  следует понимать соответственно минимальное значение прочности и максимальное значение нагрузки за время эксплуатации  $T$ . Определяя коэффициент запаса как отношение математических ожиданий этих параметров (рис. 8)

$$k = \frac{a_{\bar{R}}}{a_{\bar{S}}},$$

придем к следующей формуле, связывающей нормативный коэффициент запаса  $k_{\text{норм}}$  с гауссовским уровнем надежности

$$k_{\text{норм}} = \frac{1}{1 - \gamma^2 \omega_R^2} \left[ 1 + \sqrt{1 - (1 - \gamma^2 \omega_R^2)(1 - \gamma^2 \omega_S^2)} \right]. \quad (27)$$

Для ориентировки на рис. 9 дан график для нормативного коэффициента запаса при  $\omega_R = \omega_S$ . Нормативный коэффициент запаса, таким образом, существенно зависит от нормативной надежности  $P_{\text{норм}}$ , которую назначают на основании технико-экономических соображений [9, 11, 28, 34].

**Коэффициенты запаса в практических расчетах.** В инженерных нормах в качестве расчетной нагрузки принимают некоторое «максимальное» (т. е. соответствующее некоторой малой вероятности осуществления) значение, а в качестве расчетного сопротивления материала — нижнее значение из технических условий. Выбор этих значений, а также коэффициента запаса в определенной степени произволен: одной и той же

надежности могут соответствовать различные значения коэффициента запаса. Для того чтобы оценить величину надежности, предусматриваемой нормами, необходим статистический анализ нагрузок, сопротивлений и других параметров, влияющих на поведение конструкции [9].

В машиностроении обычно принимают запас прочности 1,5—2,5 при статических нагрузках или нагрузках с небольшим числом циклов и 2—4 при переменных нагрузках. Поскольку при назначении размеров деталей машин определяющими обычно являются конструктивные, технологические и эксплуатационные соображения, то тенденция к снижению запасов прочности в машиностроении невелика. В строительстве, а также в тех областях, в которых важнейшим фактором является общий вес конструкции, стремятся к обоснованному снижению запасов прочности. Это требует уточнения расчетных схем, уточнения сведений о нагрузках, условиях работы и механических свойствах материалов. В действующих ныне строительных нормах коэффициент запаса расщепляется на коэффициенты нагрузки (для каждого типа нагрузок в отдельности), коэффициент неоднородности материала и коэффициент условий работы. Сходным по характеру является предложение о таблично-дифференциальном выборе коэффициентов запаса в машиностроении.

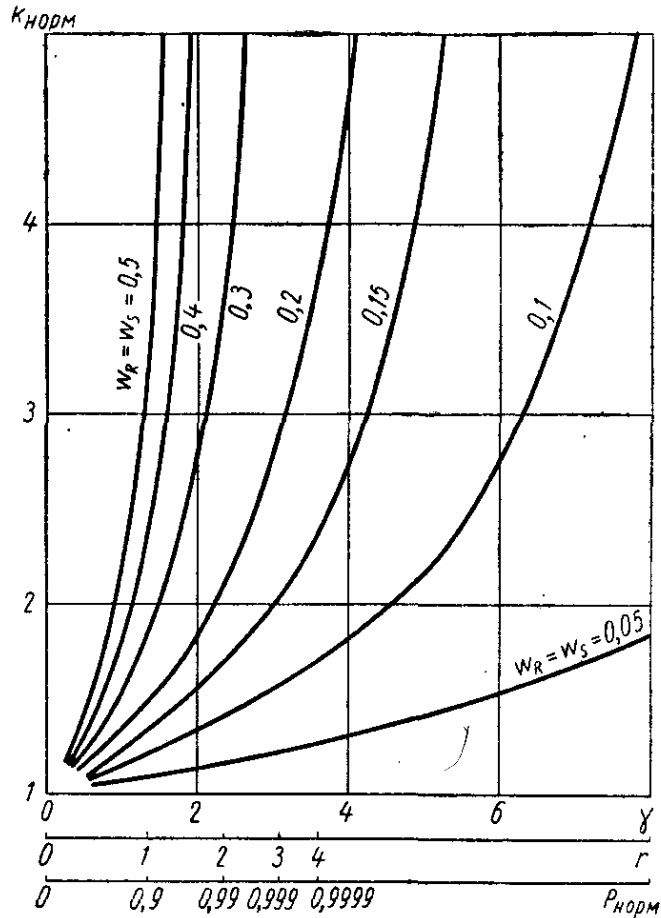


Рис. 9. Зависимость нормативного коэффициента запаса  $k_{\text{норм}}$  от нормативной надежности  $P_{\text{норм}}$  и от коэффициентов изменчивости при  $w_R = w_S$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Базовский И. Надежность. Теория и практика. М., «Мир», 1965.
2. Белов Ф. И., Соловейчик Ф. С. Вопросы надежности радиоэлектронной аппаратуры. М., Госэнергоиздат, 1961.
3. Болотин В. В. Статистические методы в нелинейной теории упругих оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1958.
4. Болотин В. В. Применение статистических методов для оценки прочности конструкций при сейсмических воздействиях. Инженерный сборник. Т. 27. Изд-во АН СССР, 1959.
5. Болотин В. В. Об оценке долговечности при стационарных случайных нагрузках. М., Известия высших учебных заведений, сер. «Машиностроение», № 9, 1959.
6. Болотин В. В. Некоторые обобщения теории суммирования усталостных повреждений и их приложения к анализу долговечности при действии

случайных сил. М., Известия высших учебных заведений, сер. «Машиностроение», № 8, 1959.

7. Болотин В. В. Долговечность конструкций при квазистационарных случайных режимах напряжений. Инженерный сборник, Т. 29. М., Изд-во АН СССР, 1960.

8. Болотин В. В. Расчеты на прочность при случайных режимах переменных напряжений, амплитуды которых подчиняются распределению Пирсона. «Вестник машиностроения», 1960, № 11.

9. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., Стройиздат, 1961 (1-е изд.), 1965 (2-е изд.).

10. Болотин В. В. Накопление усталостных повреждений при напряжениях, представляющих собой широкополосный случайный процесс. Сборник «Расчеты на прочность», № 9. М., Машгиз, 1963.

11. Болотин В. В. Механика твердого тела и теория надежности. Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Т. 3. М., «Наука», 1966.

12. Бруевич Н. Г. Вопросы надежности и точности электронных устройств в машиностроении и приборостроении. Изв. АН СССР, «Энергетика и автоматика», № 1, 1961.

13. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Гостехиздат, 1954.

14. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., «Наука», 1965.

15. Диментберг М. Ф. О нижней оценке долговечности при стационарных случайных напряжениях. Изв. АН СССР, ОТН. «Механика и машиностроение», № 3, 1962.

16. Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехиздат, 1955.

17. Кугель Р. В. Распределения долговечности машин, их деталей и агрегатов. «Вестник машиностроения», 1959, № 8.

18. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Советское радио», 1963.

19. Ллойд Д. К., Липов М. Надежность. Организация исследований, методы, математический аппарат. М., «Советское радио», 1964.

20. Макаров Б. П. Применение статистического метода для анализа экспериментальных данных по устойчивости оболочек. Изв. АН СССР, ОТН. «Механика и машиностроение», № 1, 1962.

21. Макаров Б. П. Анализ нелинейных задач устойчивости оболочек при помощи статистического метода. Инженерный журнал. Т. 3, № 1, 1963.

22. Половко А. М. Основы теории надежности. М., «Наука», 1964.

23. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Гостехиздат, 1957.

24. Решетов Д. Н. Расчет деталей станков на долговечность. Сб. «Повышение прочности деталей машин». Изд-во АН СССР, 1949.

25. Ржаницын А. Р. Определение запаса прочности сооружений. «Строительная промышленность», 1947, № 8.

26. Ржаницын А. Р. Статистические методы определения напряжений при продольном изгибе. Научные сообщения ЦНИПСа, Вып. 3. М., Госстройиздат, 1951.

27. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., Госстройиздат, 1954.

28. Ржаницын А. Р. Определение характеристики безопасности и коэффициентов запаса из экономических соображений. Сб. «Вопросы теории пластичности и прочности строительных конструкций». М., Госстройиздат, 1961.

29. Серенсен С. В., Кобаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М., Машгиз, 1963.

30. Стрелецкий Н. С. Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений. М., Госстройиздат, 1947.

31. Шишенок Н. А., Репкин В. Ф., Барвинский Л. Л. Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной техники. М., «Советское радио», 1964.

32. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Советское радио», 1962.

33. Freudenthal A. M. Safety and the probability of structural failure. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. vol. 8, No 408, 1954.

34. Johnson A. I. Strength, safety and economical dimensions of structures. Bull. of Div. Struct. Engng, Roy. Inst. Techn. Stockholm, No 12, 1953.

35. Miles M. A. On the structural fatigue under random loading. J. Aeronaut. Sci., vol. 21, No 11, 1954.

# • НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ

## Глава 9

### РАСТЯЖЕНИЕ И ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

#### РАСТЯЖЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

**Общие замечания.** Рассматриваются стержни с прямолинейной осью при действии сил, направленных вдоль оси. В соответствии с гипотезой плоских сечений напряжения распределяются равномерно по всей площади поперечного сечения. Предполагается, что при сжимающих силах стержни не теряют устойчивость.

*Различают статически определимые и статически неопределимые задачи.*

В статически определимых задачах (рис. 1, а) на основании уравнений равновесия можно определить усилие в поперечном сечении стержня.

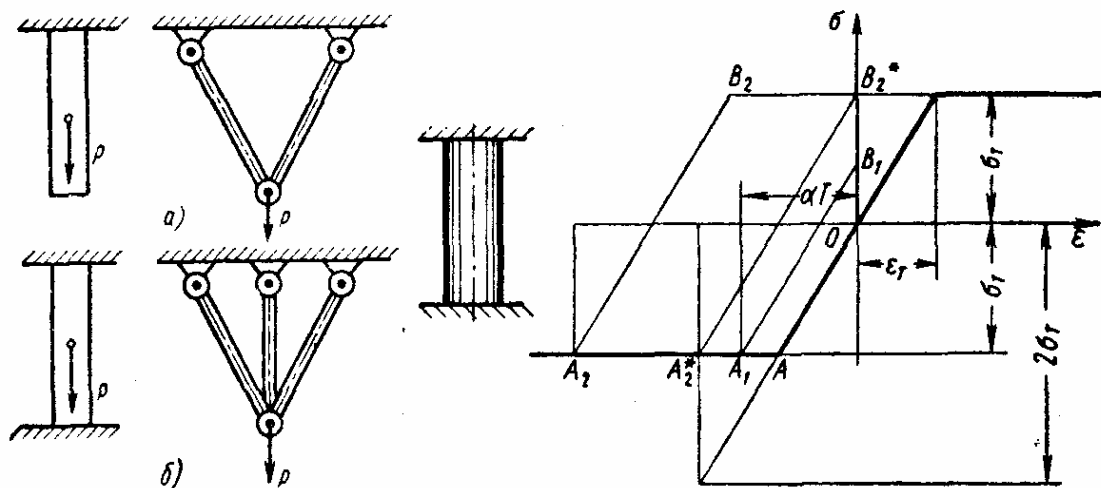


Рис. 1. Примеры статически определимых (а) и статически неопределимых задач (б)

Рис. 2. Температурные напряжения в заделанном стержне

В статически неопределимых задачах (рис. 1, б) усилия в стержнях находят из условия неразрывности деформаций и равновесия.

**Растяжение и сжатие стержней сосредоточенными силами.** Отдельный стержень. Напряжения и деформации в стержне при действии сосредоточенных осевых сил рассматриваются в курсах сопротивления материалов [1, 13, 14].

Температурные напряжения в стержне с заделанными концами (рис. 2) при нагреве его до температуры  $T$  составляют

$$\sigma = -E\alpha T, \quad (1)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Если  $\alpha T > \varepsilon_T$  (диаграмма пластичности без упрочнения), то дальнейшее возрастание температуры не приводит к увеличению напряжений ( $\sigma = -\sigma_T$ ). При охлаждении напряжение изменяется вдоль прямой  $A_1B_1$  ( $OB_1$  — остаточное напряжение после снятия нагрева). При повторном нагреве с температурной деформацией  $\alpha T$  напряжение изменяется снова от  $B_1$  к  $A_1$ ; движение вдоль прямой  $A_1B_1$  повторяется при каждом цикле нагрева, деформации оказываются упругими, наступает *приспособляемость системы*. Если  $\alpha T > 2\varepsilon_T$  (или температурные напряжения для идеально упругого материала больше  $2\sigma_T$ ), то состояние приспособляемости не наступает (напряжения изменяются по циклу  $A_2B_2B_2^*A_2^*A_2$  при наличии пластических деформаций в каждом цикле).

**Стержневые системы.** Рассмотрим плоские стержневые системы (фермы), внешние усилия к которым приложены в узловых точках (узлах).

При расчете узлы предполагают шарнирными.

Условие статической определимости стержневой системы

$$c = 2n - 3,$$

где  $n$  — число шарниров;  $c$  — число стержней.

При  $c < 2n - 3$  система является механизмом, при  $c > 2n - 3$  система статически неопределима.

В статически определимых стержневых системах усилие, приходящееся на стержень, не зависит от поперечного сечения и материала стержня.

Усилия в простейших стержневых системах приведены в табл. 1.

Расчет стержневых систем см. в работах [7, 9, 10, 11].

**Растяжение стержней распределенными силами.** Стержень под действием собственного веса и растягивающего усилия (рис. 3). Напряжение растяжения в сечении  $z$

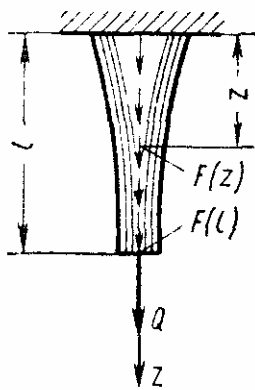


Рис. 3. Стержень под действием собственного веса и растягивающей силы

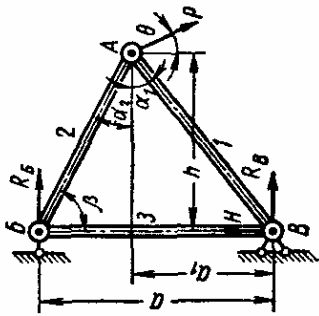
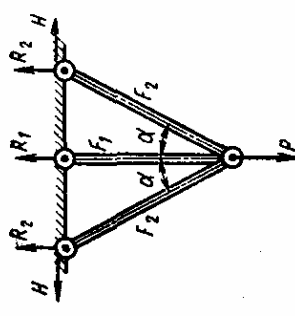
$$\sigma(z) = \frac{\int_z^l \gamma(z_1) F(z_1) dz_1}{F(z)} + \frac{Q}{F(z)}, \quad (2)$$

где  $\gamma(z)$  — удельный вес материала стержня в сечении  $z$ ;  $F(z)$  — площадь поперечного сечения стержня.

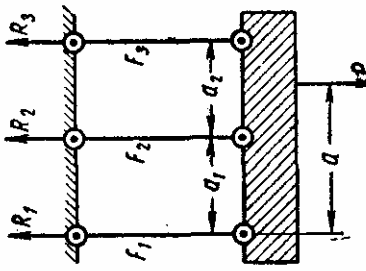
Для стержня постоянного сечения с постоянной плотностью материала

$$\sigma(z) = \gamma(l - z) + \frac{Q}{F}. \quad (3)$$

1. Усилия в простейших стержневых системах

Расчетная схема	Усилия в стержнях и реакции
	$N_1 = -P \frac{\cos(\alpha_2 + \theta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad R_B = -P \left[ \frac{h}{a} \cos \theta + \frac{a_1}{a} \sin \theta \right];$ $N_2 = P \frac{\cos(\alpha_1 - \theta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad R_B = P \left[ \frac{h}{a} \cos \theta + \left( \frac{a_1}{a} - 1 \right) \sin \theta \right];$ $N_3 = -P \frac{\cos(\alpha_1 - \theta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos \beta; \quad H = P \cos \theta$
	$N_1 = P \frac{1}{1 + 2 \frac{F_2}{F_1} \cos^3 \alpha} = R_1;$ $N_2 = P \frac{1}{2 \cos \alpha + \frac{F_1}{F_2 \cos^2 \alpha}};$ $R_2 = N_2 \cos \alpha = P \frac{1}{2 + \frac{F_1}{F_2 \cos^3 \alpha}};$ $H = N_2 \sin \alpha = P \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha + \frac{F_1}{F_2 \cos^2 \alpha}}$

Продолжение табл. 1

Расчетная схема	Усилия в стержнях и реакции
	$N_1 = P \frac{2a_1a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{F_2}{F_3}\right) + a_2^2 - aa_2 - aa_1 \left(1 + \frac{F_2}{F_3}\right)}{2a_1a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{F_2}{F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{F_2}{F_1}\right)} = R_1;$ $N_2 = P \frac{a_1a_2 \frac{F_2}{F_1} + a_2^2 \frac{F_2}{F_1} - aa_2 \frac{F_2}{F_1} + aa_1 \frac{F_2}{F_3}}{2a_1a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{F_2}{F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{F_2}{F_1}\right)} = R_2;$ $N_3 = P \frac{-a_1a_2 \frac{F_2}{F_1} + aa_2 \left(1 + \frac{F_2}{F_1}\right) + aa_1}{2a_1a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{F_2}{F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{F_2}{F_1}\right)} = R_3$
Примечание. $N$ — усилие в стержне, индекс указывает номер стержня	

Для стержня с линейным изменением площади поперечного сечения ( $Q = 0$ )

$$\sigma(z) = \frac{\gamma(l-z) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{F(0)}{F(l)} - 1 \right) \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \right]}{1 + \left( \frac{F(0)}{F(l)} - 1 \right) \left( 1 - \frac{z}{l} \right)}. \quad (4)$$

Для стержня с постоянным напряжением растяжения  $\sigma$  ( $\gamma = \text{const}$ )

$$F(z) = F(0) e^{-\frac{\gamma z}{\sigma}}. \quad (5)$$

В сечении  $z = l$  приложен груз

$$Q = \sigma F(0) e^{-\frac{\gamma l}{\sigma}}.$$

Стержень в поле центробежных сил (рис. 4). Напряжение растяжения в сечении  $z$

$$\sigma(z) = \rho \omega^2 \frac{\int_z^R z_1 F(z_1) dz_1}{F(z)} + \frac{Q}{F(z)}, \quad (6)$$

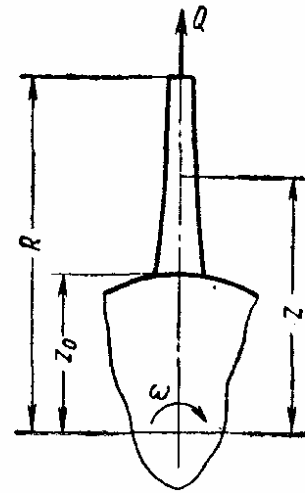


Рис. 4. Стержень в поле центробежных сил

где  $\rho = \frac{\gamma}{g}$  — плотность материала стержня;  $\omega$  — угловая скорость.

При отсутствии усилия  $Q$  напряжения растяжения не зависят от абсолютных размеров площади поперечного сечения стержня и определяются законом ее изменения вдоль радиуса.

Для стержня постоянного сечения

$$\sigma(z) = \rho \omega^2 \frac{R^2 - z^2}{2}. \quad (7)$$

## ГИБКИЕ НИТИ

**Общие сведения.** Стержень с исчезающе малой жесткостью на изгиб называют *гибкой нитью*. При расчете к гибким нитям относят тросы, шарнирные цепи, канаты, струны и т. п. [5, 6, 11].

Два основных свойства гибких нитей:

нить работает только на растяжение (отсутствие изгибной жесткости приводит к потере устойчивости при появлении сжимающих усилий);  
усилие, растягивающее нить, всегда направлено по касательной к нити (вытекает из условия равенства нулю изгибающего момента в любом сечении нити).



При заданной поперечной нагрузке обычно рассматривают два типа задач:

известен распор нити (горизонтальная составляющая усилия нити) и требуется определить ее прогибы и длину;

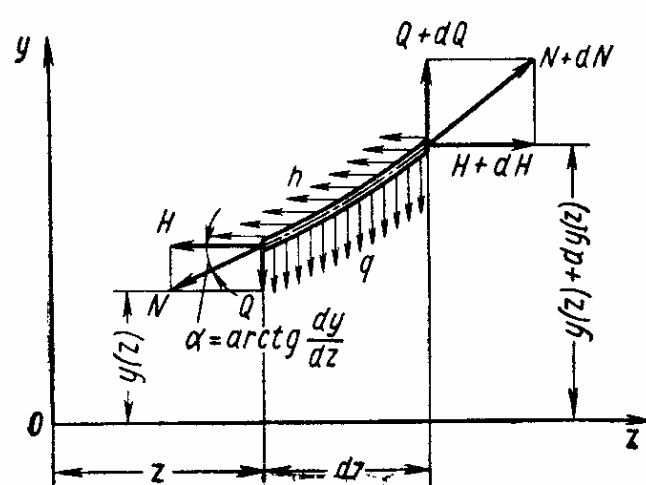
известна длина нити и необходимо найти распор и прогибы.

**Основное уравнение прогиба нити.** В сечении действует усилие  $N$  (рис. 5)

$$N = \sqrt{H^2 + Q^2}, \quad (8)$$

где  $H$  — распор;  $Q$  — перерезывающее усилие.

Тангенс угла наклона касательной к осевой линии



$$\frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{H}. \quad (9)$$

Для пологих нитей  $\frac{dy}{dz} \ll 1$  и приближенно можно принять  $N \approx H$ .

Условия равновесия элемента нити

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dH}{dz} = h, \quad (10)$$

где  $q$  и  $h$  — интенсивность вертикальной и горизонтальной нагрузки на единицу длины нити в кг/см.

Основное уравнение прогибов нити, вытекающее из условий (9) и (10),

$$\frac{d}{dz} \left( H \frac{dy}{dz} \right) = q. \quad (11)$$

При отсутствии распределенной горизонтальной нагрузки ( $h = 0$ ) величина распора  $H$  постоянна для всех сечений нити. Дифференциальное уравнение прогиба нити при  $H = \text{const}$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q}{H}. \quad (12)$$

Уравнения прогибов нити в интегральной форме

$$y(z) = \int_0^z \operatorname{tg} \alpha(z_1) dz_1 + y(0) = \int_0^z \frac{Q(z_1)}{H(z_1)} dz_1 + y(0). \quad (13)$$

При постоянном распоре

$$y(z) = \frac{1}{H} \int_0^z Q(z_1) dz_1 + y(0). \quad (14)$$

Если опоры расположены на одном уровне, то перерезывающее усилие  $Q(z)$  не зависит от распора  $H$  и прогибы нити обратно пропорциональны величине  $H$ . Если горизонтальное натяжение (распор) нити для различных случаев нагружения остается постоянным, то *прогиб от действия нескольких поперечных нагрузок равен сумме прогибов от каждой нагрузки в отдельности*.

Этот принцип справедлив по отношению к перерезывающим усилиям, но не применим к натяжению нити.

**Расчет гибких нитей без учета упругости нити и собственного веса.** Упругостью нити можно пренебречь, если отношение длины нити к расстоянию между опорами существенно больше возможной деформации нити (обычно, если  $\frac{L}{l} > 1,03$ , где  $L$  — длина нити;  $l$  — расстояние между опорами).

Собственным весом нити обычно пренебрегают, если он составляет не больше 10% от внешних нагрузок.

Отдельные расчетные случаи рассмотрены ниже.

Нить под действием поперечной сосредоточенной силы (рис. 6). *Первый вариант — распор нити известен.* Вертикальные реакции в точках  $A$  и  $B$

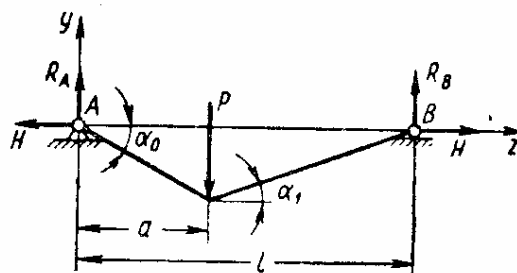


Рис. 6

$$R_A = \frac{P(l-a)}{l}, \quad R_B = \frac{Pa}{l}. \quad (15)$$

Тангенсы угла наклона нити

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_0 &= -\frac{R_A}{H} = -\frac{P(l-a)}{Hl}; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{R_B}{H} = \frac{Pa}{Hl}. \end{aligned} \quad (16)$$

Прогиб нити в точке  $a$  по уравнению (13)

$$y(a) = \frac{1}{H} \int_0^a Q dz = \int_0^a \operatorname{tg} \alpha(z) dz = a \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{P(l-a)a}{Hl}. \quad (17)$$

*Второй вариант — известна длина нити  $L$ , величину  $H$  подлежит определить.* Длина нити

$$\begin{aligned} L &= a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} + (l-a) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = \\ &= a \sqrt{1 + \frac{P^2}{H^2} \left( \frac{l-a}{l} \right)^2} + (l-a) \sqrt{1 + \frac{P^2 a^2}{H^2 l^2}}; \end{aligned} \quad (18)$$

из равенства (18) следует

$$H = P \frac{2 \frac{La}{l^2} \left(1 - \frac{a}{l}\right)}{\sqrt{\frac{L^4}{l^4} - 2 \frac{L^2}{l^2} \left(\frac{2a^2}{l^2} - \frac{2a}{l} + 1\right) + \frac{4a^2}{l^2} - \frac{4a}{l} + 1}}. \quad (19)$$

При  $a = \frac{1}{2} l$

$$H = P \frac{1}{2 \sqrt{\left(\frac{L}{l}\right)^2 - 1}}. \quad (20)$$

При  $\frac{L}{l} \rightarrow 1$  (начальное провисание отсутствует) натяжение нити  $H \rightarrow \infty$ . Однако при учете упругости нити натяжение остается конечным.

Прогиб нити при  $a = \frac{1}{2} l$

$$y_{\max} = -\frac{Pl}{4H} = -\frac{l}{2} \sqrt{\left(\frac{L}{l}\right)^2 - 1}. \quad (21)$$

Отметим, что небольшое превышение длины нити над длиной пролета вызывает значительные прогибы. Например, при  $\frac{L}{l} = 1,01$  будем иметь

$$y_{\max} = 0,07l.$$

Нить под действием двух сосредоточенных поперечных сил (рис. 7). Первый вариант — распор нити  $H$  известен. Вертикальные реакции определяют из уравнений статики

$$R_A = \frac{P_1(l-a_1)}{l} + \frac{P_2(l-a_2)}{l} - H \frac{c}{l};$$

$$R_B = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l} + H \frac{c}{l}.$$

Углы наклона нити [формула (7)]

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{R_A}{H}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-R_A + P_1}{H};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-R_A + P_1 + P_2}{H}. \quad (22)$$

Прогиб нити по уравнению (13)

$$y(z) = \frac{1}{H} \int_0^z Q(z_1) dz_1 = \int_0^z \operatorname{tg} \alpha(z_1) dz_1. \quad (23)$$

Условие  $y(l) = c$  выполняется, так как  $Q(z)$  определяется в соответствии с условиями равновесия.

Прогибы нити

$$\left. \begin{aligned} y(a_1) &= a_1 \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{P_1(l-a_1)a_1}{Hl} - \\ &\quad - \frac{P_2(l-a_2)a_1}{Hl} + c \frac{a_1}{l}; \\ y(a_2) &= a_1 \operatorname{tg} \alpha_0 + (a_2-a_1) \operatorname{tg} \alpha_1 = \\ &= -\frac{P_1(l-a_2)a_1}{Hl} - \frac{P_2(l-a_2)a_2}{Hl} + c \frac{a_2}{l}; \\ y(l) &= c. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Подъем опоры  $B$  на высоту  $c$  сообщает точкам нити дополнительный прогиб

$$y_0(z) = c \frac{z}{l}. \quad (25)$$

Второй вариант — известна длина нити  $L$ , величина  $H$  подлежит определению. Расчет ведут по уравнению

$$L = a_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} + (a_2 - a_1) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} + (l - a_2) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}, \quad (26)$$

которое, в силу равенств (15) и (16), представляет зависимость  $L = f(H)$ . Аналитическое решение задачи громоздко, поэтому применяют

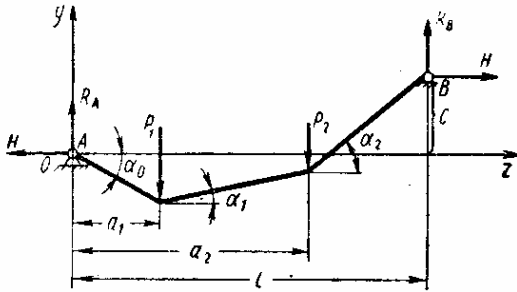


Рис. 7

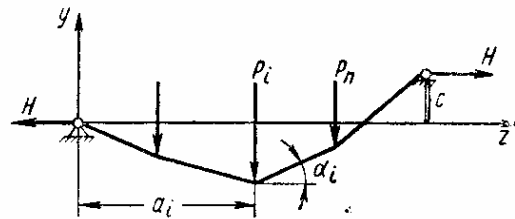


Рис. 8

приближенный метод. Задаваясь различными величинами  $H$  ( $H_1, H_2, \dots$ ), определяют из условия (26) длину нити  $L_1, L_2$  и, строя кривую  $L = f(H)$ , находят величину  $H$ , отвечающую заданному значению  $L$ .

Нить под действием  $n$  сосредоточенных сил (рис. 8). Первый вариант — известна величина  $H$ . Прогиб нити

$$y(a_i) = -\frac{1}{H} \left\{ \sum_{j=1}^i P_j \frac{(l-a_j)a_j}{l} + \sum_{j=i+1}^n P_j \frac{(l-a_j)a_l}{l} \right\} + c \frac{a_i}{l}. \quad (27)$$

Напряжение нити на участке  $i, i+1$

$$N_i = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i}; \quad (28)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y(a_{i+1}) - y(a_i)}{a_{i+1} - a_i}. \quad (29)$$

Второй вариант — известна величина  $L$ :

$$L = \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i}, \quad (30)$$

где  $\operatorname{tg} \alpha_i$  определяется равенствами (29) и (27).

Решение уравнения

$$L = f(H) \quad (31)$$

находят приближенным способом (см. стр. 191).

Нить под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 9). Первый вариант — известна величина  $H$ . Интегрируя дважды уравнение (12), находим

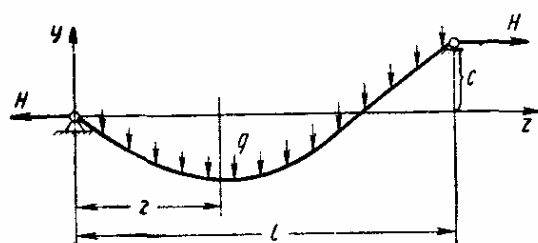


Рис. 9

$$y(z) = -\frac{q}{2H}(lz - z^2) + c \frac{z}{l}. \quad (32)$$

При расположении опор на одном уровне максимальный прогиб

$$y_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{ql^2}{8H}. \quad (33)$$

Второй вариант — известна длина нити  $L$ .

Длина нити при  $c = 0$  определяется равенством

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{ql}{2H}\right)^2 \left(1 - 2\frac{z}{l}\right)^2} dz = \\ &= \frac{l}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{ql}{2H}\right)^2} + \frac{H}{q} \operatorname{Ar sh} \frac{ql}{2H}. \end{aligned} \quad (34)$$

Для пологих нитей (прогибы нитей малы по сравнению с  $l$ ) равенство (34) можно представить в более простой форме<sup>1</sup>:

$$L = l + \frac{1}{24} \cdot \frac{q^2 l^3}{H^2}. \quad (35)$$

<sup>1</sup> Равенство (35) получается из (34), если принять для подынтегрального выражения приближенное значение.

В общем случае величина  $H$  находится из соотношения (34) указанным ранее приближенным способом. Для пологих нитей ( $\frac{y_{\max}}{l} < 0,1$ ), в силу равенства (35),

$$H = \frac{ql}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{l} - 1}}. \quad (36)$$

Максимальный прогиб нити

$$y_{\max} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} l \sqrt{\frac{L}{l} - 1}. \quad (37)$$

Нить под действием произвольной распределенной нагрузки. Прогиб нити при известной величине  $H$  определяют по формуле

$$y(z) = \frac{1}{H} \left( \frac{z}{l} \int_0^l \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 - \int_0^z \int_0^{z_1} q(z_2) dz_2 dz_1 \right) + c \frac{z}{l}. \quad (38)$$

Вторая опора поднята на высоту  $c$ .

**Расчет гибких нитей с учетом собственного веса.** Для сравнительно пологих нитей ( $\frac{y_{\max}}{l} < 0,3$ ) допустимо учитывать собственный вес с помощью введения равномерно распределенной нагрузки (на единицу длины по оси  $z$ ) интенсивностью

$$q = q_0 = \gamma F, \quad (39)$$

где  $\gamma$  — удельный вес материала нити;  $F$  — площадь поперечного сечения.

При больших прогибах нити приходится учитывать наклонное положение элемента нити (рис. 10).

В этом случае дифференциальное уравнение прогиба нити (при постоянной величине  $H$ )

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q_0}{H} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2}. \quad (40)$$

имеет следующее решение:

$$y(z) = \frac{H}{q_0} \left[ \operatorname{ch} \frac{q_0}{H} (z - a) - \operatorname{ch} \frac{q_0}{H} a \right], \quad (41)$$

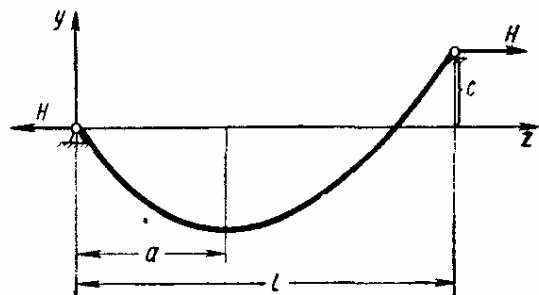


Рис. 10

содержащее неизвестный параметр  $a$  (абсциссу сечения, для которой  $\frac{dy}{dz} = 0$ ).

Величину  $a$  определяют из условия  $y(l) = c$ , что дает

$$\frac{cq_0}{H} = \operatorname{ch} \frac{q_0}{H} (l - a) - \operatorname{ch} \frac{q_0}{H} a. \quad (42)$$

Уравнение (42) решают способом подбора.  
Длина нити

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{q_0}{H} (z - a)} dz = \\ &= \frac{H}{q_0} \left[ \operatorname{sh} \frac{q_0}{H} (l - a) + \operatorname{sh} \frac{q_0}{H} a \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Это уравнение, также способом подбора, позволяет определить  $H$  при заданной величине  $L$ .

Если опоры нити на одном уровне ( $c = 0$ ,  $a = \frac{l}{2}$ ), то прогиб

$$y(z) = -\frac{H}{q_0} \left[ \operatorname{ch} \frac{q_0 l}{2H} - \operatorname{ch} \frac{q_0}{H} \left( z - \frac{l}{2} \right) \right]. \quad (44)$$

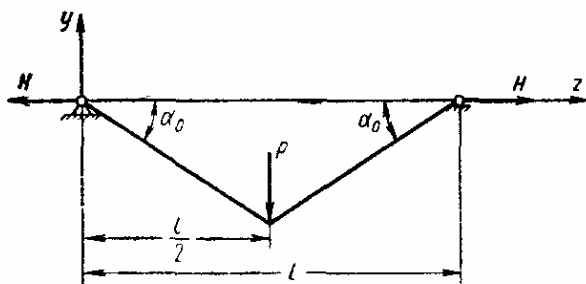


Рис. 11

При  $\frac{q_0 l}{H} \ll 1$  формулы (44)

и (32) совпадают ( $c = 0$ ).

Длина нити

$$L = \frac{2H}{q_0} \operatorname{sh} \frac{q_0 l}{2H}. \quad (45)$$

**Расчет нитей с учетом упругости материала.** Нить под действием поперечной сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета (рис. 11). Тангенс угла наклона

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{P}{2H}, \quad (46)$$

наибольший прогиб

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{Pl}{4H}. \quad (47)$$

Натяжение нити

$$N = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} = H \sqrt{1 + \frac{P^2}{4H^2}} \quad (48)$$

постоянно по ее длине.

Длина нити

$$L = l \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} = l \sqrt{1 + \frac{P^2}{4H^2}}. \quad (49)$$

Если первоначальная длина нити  $L_0$ , то длина нити под нагрузкой

$$L = L_0 (1 + \varepsilon), \quad (50)$$

где деформация

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} = \frac{H}{EF} \sqrt{1 + \frac{P^2}{4H^2}}. \quad (51)$$

В этом равенстве  $EF$  — жесткость сечения нити на растяжение. Из равенств (49)—(51) вытекает

$$P = 2H \sqrt{\frac{\left(\frac{L_0}{l}\right)^2}{\left(1 - \frac{H}{EF} \cdot \frac{L_0}{l}\right)^2} - 1}. \quad (52)$$

Прогиб нити в середине пролета

$$y_{\max} = -\frac{Pl}{4H} = -\frac{l}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{L_0}{l}\right)^2}{\left(1 - \frac{H}{EF} \cdot \frac{L_0}{l}\right)^2} - 1}. \quad (53)$$

Если первоначальная длина нити равна длине пролета  $L_0 = l$ , то из равенства (52)

$$P = 2H \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{H}{EF}\right)^2} - 1} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{EF}} \sqrt{H^3}, \quad (54)$$

так как  $\frac{H}{EF} \ll 1$ .

Прогиб в точке приложения силы

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pl}{4H} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt[3]{EF}} \sqrt[3]{P}. \quad (55)$$

Нить под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 12). Рассматриваются пологие нити. В распределенную нагрузку может быть включена нагрузка от силы веса. Усилие в нити принимается равным распору

$$N = H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \approx H.$$



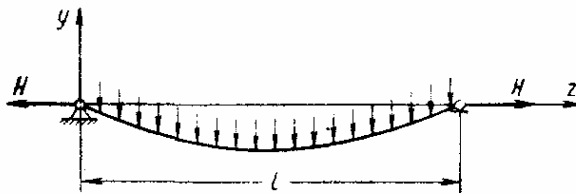
Используя уравнения (35), (50) и считая  $\varepsilon = \frac{H}{EF}$ , будем иметь

$$H = \frac{ql}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{L_0}{l} \left(1 + \frac{H}{EF}\right) - 1}}. \quad (56)$$

Максимальный прогиб

$$y_{\max} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} l \sqrt{\frac{L_0}{l} \left(1 + \frac{H}{EF}\right) - 1}. \quad (57)$$

Если первоначальная длина нити  $L_0$  равна длине пролета  $l$ , то



$$ql = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{EF}} \sqrt{H^3};$$

$$y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l}{\sqrt[3]{EF}} \sqrt[3]{ql}.$$

Рис. 12

**Расчет нитей с учетом упругости материала нити и температурных деформаций.** Нить под действием поперечной сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета (см. рис. 11). Длина нити в рабочих условиях

$$L = L_0 (1 + \varepsilon + \varepsilon_t), \quad (58)$$

где

$$\varepsilon_t = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} \alpha t \, dz;$$

здесь  $t$  — температура нити в сечении  $z$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Используя равенство (51), получаем

$$P = 2H \sqrt{\frac{\left(\frac{L_0}{l}\right)^2 (1 + \varepsilon_t)^2}{\left(1 - \frac{H}{EF} \cdot \frac{L_0}{l}\right)^2} - 1}; \quad (59)$$

$$y_{\max} = -\frac{Pl}{4H} = -\frac{l}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{L_0}{l}\right)^2 (1 + \varepsilon_t)^2}{\left(1 - \frac{H}{EF} \cdot \frac{L_0}{l}\right)^2} - 1}. \quad (60)$$

Нить под действием равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 12). В этом случае

$$H = \frac{ql}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{L_0}{l} \left(1 + \frac{H}{EF} + \varepsilon_t\right) - 1}}. \quad (61)$$

Если обозначить разность  $L_0 - l = \Delta$ , то равенство (61) можно представить в следующей форме:

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta + \Delta_\varepsilon + \Delta_t}}, \quad (62)$$

где  $H_0 = \frac{ql}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{l}}}$  — натяжение нити без учета упругости и тем-

пературных деформаций;  $\Delta_\varepsilon = \frac{HL_0}{EF}$ ,  $\Delta_t = L_0\varepsilon_t$  — удлинение нити от действия напряжений и температуры. Из формулы (62) вытекает, что учет упругих и температурных удлинений существенен, если они составляют величины того же порядка, что и разность первоначальной длины нити и расстояния между опорами.

### НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТЕРЖНЯ

**Общие сведения.** В соответствии с гипотезой плоских сечений перемещение произвольной точки сечения  $A(x, y)$  (рис. 13) вдоль оси стержня

$$w = w_0 - \varphi y + \psi x, \quad (63)$$

где  $\varphi$ ,  $\psi$  — углы поворота сечения относительно осей  $x$ ;  $y$ ;  $w_0$  — перемещение точки  $O$  (начала координат).

Относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} = \varepsilon_0 - \frac{d\varphi}{dz} y + \frac{d\psi}{dz} x, \quad (64)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{dw_0}{dz}$  — относительное удлинение в точке  $O$ .

Напряженное состояние в стержне предполагается одномерным. На основании закона упругости

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t, \quad (65)$$

где  $E$  — модуль упругости материала стержня;  $\alpha t$  — температурная деформация. Эти величины относятся к рассматриваемой точке поперечного сечения и могут изменяться по сечению.

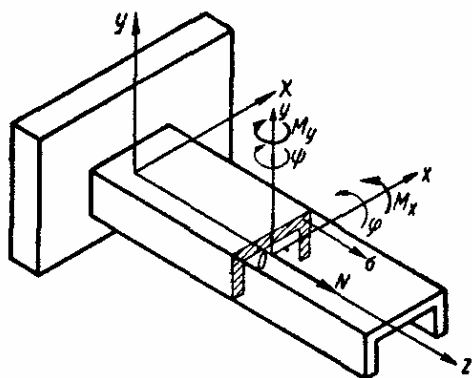
Нормальное напряжение

$$\sigma = E \left( \varepsilon_0 - \frac{d\varphi}{dz} y + \frac{d\psi}{dz} x \right) - E\alpha t. \quad (66)$$

Неизвестные параметры  $\varepsilon_0$ ,  $\frac{d\varphi}{dz}$  и  $\frac{d\psi}{dz}$  определяют из трех условий равновесия

$$\int_F \sigma dF = N; \quad \int_F \sigma y dF = -M_x; \quad \int_F \sigma x dF = M_y, \quad (67)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения;  $N$ ,  $M_x$  и  $M_y$  — растягивающее усилие и изгибающие моменты в сечении. Положительные направления силовых факторов показаны на рис. 13. Для упрощения расчетных формул выбирают положение осей  $xu$ , руководствуясь следующими соображениями. Начало системы координат (точка  $O$ ) выбирают исходя из условия



$$\int_F Ex dF = 0; \quad \int_F Ey dF = 0. \quad (68)$$

Точку  $O$  называют *приведенным центром тяжести сечения*, а оси координат — *центрными осями*.

Если направление осей выбрано так, что выполняется равенство

Рис. 13. Напряжения и силовые факторы в поперечном сечении стержня

$$\int_F Exy dF = 0, \quad (69)$$

то оси координат называют *главными центральными осями*. Параметры деформации определяются следующими формулами [2]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{N}{\int_F E dF} + \frac{\int_F E\alpha t dF}{\int_F E dF}; \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{M_x}{\int_F Ey^2 dF} - \frac{\int_F E\alpha ty dF}{\int_F Ey^2 dF}; \\ \frac{d\psi}{dz} &= \frac{M_y}{\int_F Ex^2 dF} + \frac{\int_F E\alpha tx dF}{\int_F Ex^2 dF}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня

$$\sigma = E \left( \frac{N}{\int_F E dF} - y \frac{M_x}{\int_F E y^2 dF} + x \frac{M_y}{\int_F E x^2 dF} \right) + E \left( \frac{\int_F E \alpha t dF}{\int_F E dF} + y \frac{\int_F E \alpha t y dF}{\int_F E y^2 dF} + x \frac{\int_F E \alpha t x dF}{\int_F E x^2 dF} - \alpha t \right), \quad (71)$$

где  $x, y$  — координаты точки сечения в главных центральных осях. Первая группа членов в формуле (71) выражает напряжения от внешних сил, вторая — температурные напряжения.

**Правило знаков.** Растягивающее напряжение и растягивающее усилие считаются положительными. Изгибающие моменты считаются положительными, если они стремятся осуществить поворот вокруг соответствующих осей по часовой стрелке (если смотреть с конца оси в ее начало).

Стержень с постоянным модулем упругости в различных точках поперечного сечения. Нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{N}{F} - y \frac{M_x}{J_x} + x \frac{M_y}{J_y} +$$

$$+ E \left( \frac{\int_F \alpha t dF}{F} + y \frac{\int_F \alpha t y dF}{J_x} + x \frac{\int_F \alpha t x dF}{J_y} - \alpha t \right), \quad (72)$$

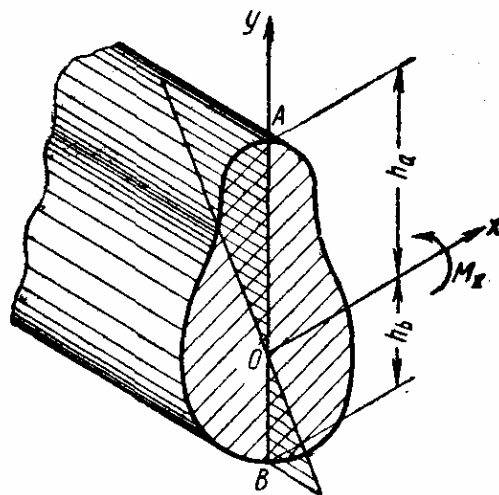


Рис. 14. Распределение напряжений при простом изгибе

где  $\frac{N}{F} = \sigma_p$  — напряжения растяжения или сжатия (равномерно распределены по поперечному сечению);  $-y \frac{M_x}{J_x} + x \frac{M_y}{J_y} = \sigma_u$  — напряжения изгиба (распределены по линейному закону);  $J_x = \int_F y^2 dF$ ,  $J_y = \int_F x^2 dF$  — главные моменты инерции поперечного сечения (см. ниже).

**Простой и сложный изгиб стержней.** Если в поперечном сечении стержня действует изгибающий момент только в одной из главных плоскостей (в плоскости  $xz$  или  $yz$ ), то изгиб называется *простым*. Распределение напряжений в этом случае показано на рис. 14. При наличии изгибающих моментов в двух плоскостях изгиб принято

называть *сложным*<sup>1</sup>. Для упругих деформаций напряжения и деформации при косом изгибе в практических задачах целесообразно рассматривать как сумму соответствующих напряжений и деформаций при прямых простых изгибах (относительно главных осей), причем прямые изгибы рассматривают совершенно независимо один от другого.

**Нейтральная линия при изгибе.** Совокупность точек поперечного сечения стержня, для которых напряжение изгиба равно нулю ( $\sigma_u = 0$ ) называют *нейтральной линией*. Нейтральная линия является прямой, проходящей через центр тяжести сечения. При простом изгибе нейтральной линией является главная ось сечения, перпендикулярная плоскости изгиба.

При сложном изгибе нейтральная линия определяется уравнением

$$-y \frac{M_x}{J_x} + x \frac{M_y}{J_y} = 0. \quad (73)$$

**Наибольшие напряжения изгиба и момент сопротивления.** Наибольшие (по абсолютной величине) напряжения изгиба имеют место в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. При изгибе относительно оси  $x$  (см. рис. 14), считая, что точка  $A$  является наиболее удаленной,

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{M_x}{J_x} y_A \right| = \left| \frac{M_x}{J_x} h_a \right|. \quad (74a)$$

Равенство (74a) часто записывают в следующей форме:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (74b)$$

где  $W_x = \frac{J_x}{h_a}$  — момент сопротивления сечения при изгибе относительно оси  $x$ .

В некоторых случаях целесообразно определять момент сопротивления для различных точек сечения. Например, для точки  $B$  (см. рис. 14)

$$\sigma_{uB} = \frac{M_x}{W_{xB}},$$

где

$$W_{xB} = \frac{J_x}{h_b}.$$

**Геометрические характеристики сечения.** При вычислении напряжений и деформаций в стержнях необходимо знать координаты центра тяжести сечения, площадь, моменты инерции и другие *геометрические характеристики сечения*.

**Координаты центра тяжести.** Для определения координат центра тяжести сечения используют вспомогательную (произвольную) систему координат  $x_2, y_2$  (рис. 15).

<sup>1</sup> Простой и сложный изгиб стержня часто называют соответственно *прямым* и *косым*.

Координаты центра тяжести определяют по формулам

$$a = \frac{1}{F} \int_F x_2 dF; \quad b = \frac{1}{F} \int_F y_2 dF. \quad (75)$$

Главные моменты инерции сечения. Оси  $(x_1, y_1)$  являются произвольными центральными осями. Главные оси сечения  $x, y$ , для которых центробежный момент инерции равен нулю

$$J_{xy} = \int_F xy dF = 0,$$

повернуты на угол  $\beta$ , причем

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \int_F x_1 y_1 dF}{\int_F x_1^2 dF - \int_F y_1^2 dF} = \frac{2J_{x_1 y_1}}{J_{y_1} - J_{x_1}}. \quad (76)$$

Моменты инерции сечения относительно главных осей называют *главными моментами инерции*.

Главные моменты инерции

$$J_x = \frac{1}{2} (J_{x_1} + J_{y_1}) + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_1} - J_{y_1})^2 + 4J_{x_1 y_1}^2}; \quad (77)$$

$$J_y = \frac{1}{2} (J_{x_1} + J_{y_1}) - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_1} - J_{y_1})^2 + 4J_{x_1 y_1}^2} \quad (78)$$

или в другой форме

$$J_x = \frac{1}{2} (J_{x_1} + J_{y_1}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{\cos 2\beta}; \quad (79)$$

$$J_y = \frac{1}{2} (J_{x_1} + J_{y_1}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{\cos 2\beta}. \quad (80)$$

Один из главных моментов инерции имеет наибольшее, а другой — наименьшее значения среди всех других моментов инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения. Если сечение имеет ось симметрии, то одна из главных осей совпадает с осью симметрии, другая — проходит через центр тяжести перпендикулярно к оси симметрии.

Значения координат центров тяжести, главных моментов инерции и моментов сопротивлений для некоторых сечений приведены в табл. 2.

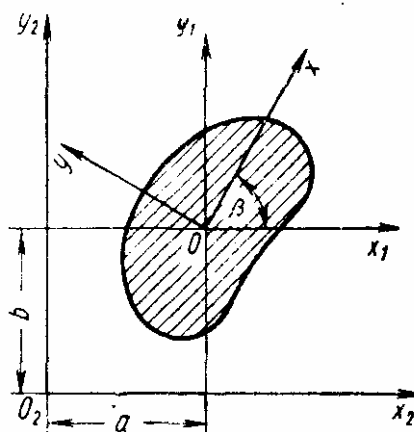
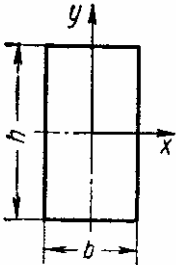
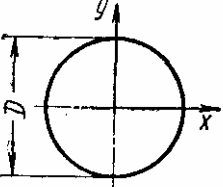
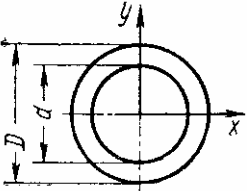
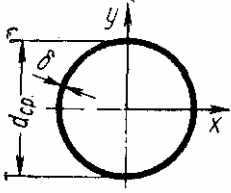
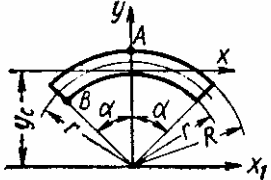
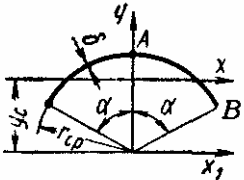
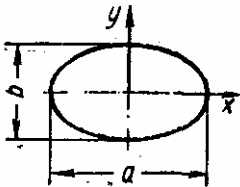


Рис. 15. Определение координат центра тяжести и главных осей сечения

2. Значения координат центров тяжести, моментов инерции и моментов сопротивления для некоторых сечений

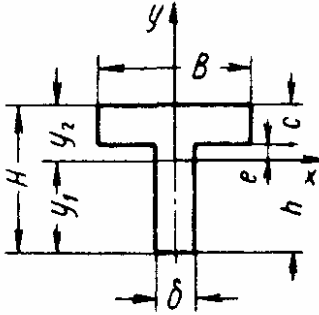
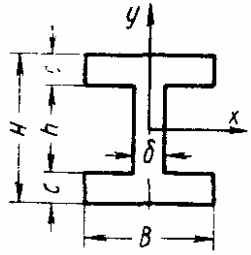
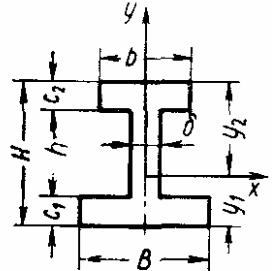
Сечение	Геометрические характеристики сечения
	$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6};$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$
	$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}; \quad W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}$
	$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right);$ $W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$
	$\delta = \frac{D - d}{2} \ll d_{cp} = \frac{D + d}{2};$ $J_x = J_y = \frac{\pi d_{cp}^3 \delta}{8}; \quad W_x = W_y = \frac{\pi d_{cp}^2 \delta}{4}$
	$J_x = (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \times$ $\times \frac{R^4 - r^4}{4} - \frac{4}{9} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \cdot \frac{(R^3 - r^3)^2}{R^2 - r^2};$ $J_y = (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \frac{R^4 - r^4}{4};$ $y_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2};$

Продолжение табл. 2

Сечение	Геометрические характеристики сечения
	$W_x = \frac{(\alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \frac{R^4 - r^4}{4} - \frac{4}{9} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \cdot \frac{(R^3 - r^3)^2}{R^2 - r^2}}{R - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}};$ $W_{xB} = \frac{(\alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \frac{R^4 - r^4}{4} - \frac{4}{9} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \cdot \frac{(R^3 - r^3)^2}{R^2 - r^2}}{-r \cos \alpha + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}};$ $W_y = \frac{(\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \frac{R^4 - r^4}{4}}{R \sin \alpha}$
	$J_x = \left( \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right) r_{cp}^3 \delta;$ $J_y = (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) r_{cp}^3 \delta;$ $y_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} r_{cp};$ $W_{xA} = \frac{\alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}} r_{cp}^2 \delta;$ $W_{xB} = \frac{\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}}{-\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha}} r_{cp}^2 \delta;$ $W_y = \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha \right) r_{cp}^2 \delta$
	$J_x = \frac{\pi a b^3}{64}; \quad I_y = \frac{\pi a^3 b}{64}; \quad W_x = \frac{\pi a b^2}{32};$ $W_y = \frac{\pi a^2 b}{32}$



Продолжение табл. 2

Сечение	Геометрические характеристики сечения
	$y_1 = \frac{\frac{\delta H^2}{2} + (B - \delta) c \left( H - \frac{c}{2} \right)}{\delta H + (B - \delta) c};$ $y_2 = \frac{\frac{\delta H^2}{2} + (B - \delta) \frac{c^2}{2}}{\delta H + (B - \delta) c}; \quad y_1 > y_2;$ $J_x = \frac{1}{3} [\delta y_1^3 + B y_2^3 - (B - \delta) (y_2 - e)^3];$ $J_y = \frac{1}{12} [h \delta^3 + c B^3];$ $W_x = \frac{J_x}{y_1}; \quad W_y = \frac{1}{6B} [h \delta^3 + c B^3]$
	$J_x = \frac{B H^3 - (B - \delta) h^3}{12}; \quad J_y = \frac{h \delta^3 + (H - h) B^3}{12};$ $W_x = \frac{B H^3 - (B - \delta) h^3}{6H}; \quad W_y = \frac{h \delta^3 + (H - h) B^3}{6B}$
	$y_1 = \frac{B \frac{c_1^2}{2} + b \frac{H^2 - (h + c_1)^2}{2} + \delta h \left( \frac{h}{2} + c_1 \right)}{B c_1 + b c_2 + \delta h};$ $J_y = \frac{c_1 B^3 + c_2 b^3 + h \delta^3}{12};$ $y_2 = H - y_1 = \frac{B \frac{H^2 - (h + c_2)^2}{2} + b \frac{c_2^2}{2} + \delta h \left( \frac{h}{2} + c_2 \right)}{B c_1 + b c_2 + \delta h};$ $J_x = \frac{1}{3} [B y_1^3 + b y_2^3 - (B - \delta) (y_1 - c_1)^3 - (b - \delta) (y_2 - c_2)^3];$ $W_y = \frac{c_1 B^3 + c_2 b^3 + h \delta^3}{6B}; \quad W_x = \frac{J_x}{y_2}$

Вспомогательные формулы при определении геометрических характеристик сечений. При определении моментов инерции сечений сложного профиля используют формулы, связывающие моменты инерции относительно двух систем координат (рис. 16).

Пусть известны моменты инерции относительно осей  $\xi, \eta$  и требуется определить их значения для осей  $x_1, y_1$ .

Учитывая зависимости

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= m + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \\ y_1 &= n + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

найдем

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = n^2 F + \sin^2 \varphi J_{\eta} + \\ &+ \cos^2 \varphi J_{\xi} + 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi J_{\xi \eta} + \\ &+ 2n (\sin \varphi S_{\eta} + \cos \varphi S_{\xi}); \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= \int_F x_1^2 dF = m^2 F + \cos^2 \varphi J_{\eta} + \sin^2 \varphi J_{\xi} - 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi J_{\xi \eta} + \\ &+ 2m (\cos \varphi S_{\eta} - \sin \varphi S_{\xi}); \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} J_{x_1 y_1} &= \int_F x_1 y_1 dF = nmF + \sin \varphi \cdot \cos \varphi (J_{\eta} - J_{\xi}) + \\ &+ (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) J_{\xi \eta} + (m \sin \varphi + n \cos \varphi) S_{\eta} + \\ &+ (m \cos \varphi - n \sin \varphi) S_{\xi}, \end{aligned} \quad (84)$$

где

$$F = \int_F dF; \quad J_{\eta} = \int_F \xi^2 dF; \quad J_{\xi} = \int_F \eta^2 dF;$$

$$J_{\xi \eta} = \int_F \xi \eta dF; \quad S_{\eta} = \int_F \xi dF; \quad S_{\xi} = \int_F \eta dF;$$

здесь  $S_{\eta}$  и  $S_{\xi}$  — статические моменты инерции.

Если оси  $\xi, \eta$  центральные, то статические моменты  $S_{\xi} = S_{\eta} = 0$ . Для главных осей  $J_{\xi \eta} = 0$ .

Упруго-геометрические характеристики сечения. Во многих случаях при сложном профиле поперечного сечения интегрирование при вычислении геометрических характеристик выполняют численно; сечение разбивают на 20—100 элементарных клеток и составляют соответствующие суммы.

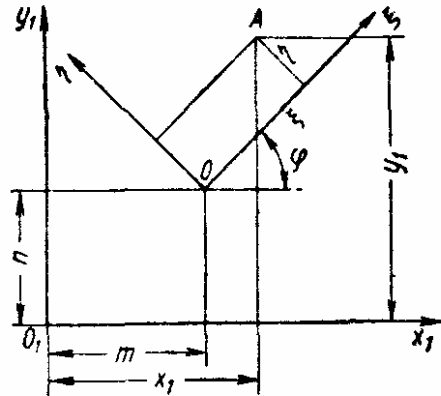


Рис. 16. Моменты инерции при замене осей координат

Если модуль упругости  $E$  не одинаковый в различных точках сечения, то для определения напряжений вычисляют упруго-геометрические характеристики. Эти характеристики находят по приведенным выше зависимостям, но каждому элементу площади условно приписывают «вес», равный  $E$ .

Например, координаты приведенного центра тяжести определяют по формулам, подобным равенствам (75):

$$a = \frac{\int_F x_2 E dF}{\int_F E dF}; \quad b = \frac{\int_F y_2 E dF}{\int_F E dF}. \quad (85)$$

Приведенные главные оси составляют угол  $\beta$  с центральными осями, причем

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \int_F x_1 y_1 E dF}{\int_F x_1^2 E dF - \int_F y_1^2 E dF}. \quad (86)$$

Температурные напряжения в стержне определяются формулой

$$\sigma_t = E \left( \frac{\int_F E \alpha t dF}{\int_F E \alpha F} + y \frac{\int_F E \alpha t y dF}{\int_F E y^2 dF} + x \frac{\int_F E \alpha t x dF}{\int_F E x^2 dF} - \alpha t \right); \quad (87)$$

при постоянном модуле упругости в сечении

$$\sigma_t = E \left( \frac{\int_F \alpha t dF}{F} + y \frac{\int_F \alpha t y dF}{J_x} + x \frac{\int_F \alpha t x dF}{J_y} - \alpha t \right). \quad (88)$$

Эти формулы пригодны только для приближенной оценки температурных напряжений, так как основаны на некоторых упрощающих предположениях:

а) напряженное состояние является одномерным (рассматриваются напряжения вдоль оси стержня). Допущение не дает большой погрешности для незамкнутых сечений. Для сечений замкнутого профиля (например, трубчатый стержень) возможно появление напряжений такого же порядка в перпендикулярных к плоскости сечения площадях;

б) на свободных торцах стержня не соблюдаются краевые условия в напряжениях; формулы (87) и (88) справедливы на некотором удалении от свободных торцов, обычно на расстоянии  $(0,3 \div 0,6) b$ , где  $b$  — наибольшая хорда сечения.

Для пластинок с постоянным по длине полем температур формулы (87) и (88) совпадают с решением методом теории упругости. Если температура (точнее, температурная деформация) изменяется по сечению по линейному закону

$$\alpha t = c_0 + c_1 x + c_2 y,$$

то (при любом распределении модуля упругости  $E$ ) температурные напряжения в стержне отсутствуют (предполагается, что общие деформации стержня не стеснены двумя заделками).

**Пример 1.** Определения температурных напряжений в стержне прямоугольного сечения (рис. 17).

Температура изменяется вдоль оси  $x$  по закону параболы  $n$ -й степени. Величины  $E$  и  $\alpha$  постоянны. По формуле (88) находим  $\sigma_t =$

$$= E \alpha t_{\max} \left[ \frac{1}{n+1} - \left( \frac{2x}{b} \right)^n \right].$$

Температурные напряжения для некоторых сечений стержней приведены в табл. 3.

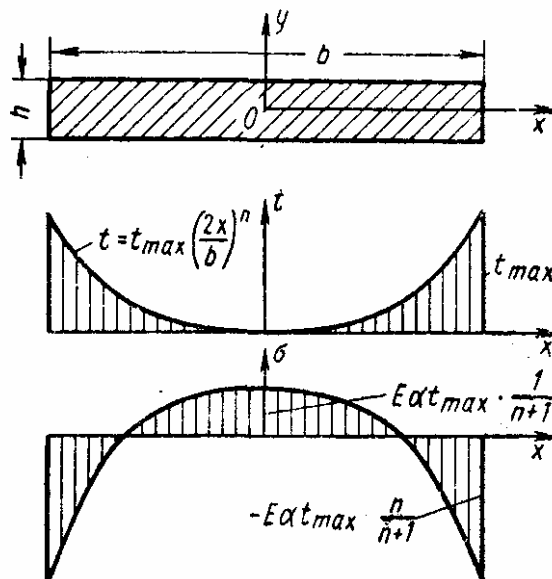
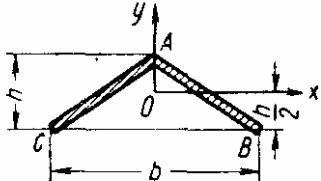

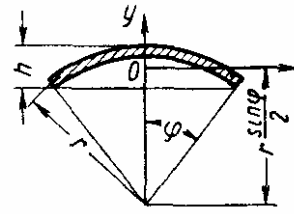


Рис. 17. Температурные напряжения в стержне прямоугольного сечения

3. Температурные напряжения в стержнях при распределении температуры по параболическому закону  $t = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Сечение	Температурное напряжение	Примерное распределение
	$E \alpha a_2 \frac{b^2}{4} \left( \frac{1}{3} - \frac{4x^2}{b^2} \right)$	
	$E \alpha a_2 b^2 \left( \frac{1}{18} + \frac{2}{15} \times \right. \\ \left. \times \frac{x}{b} - \frac{x^2}{b^2} \right)$	

Продолжение табл. 3

Сечение	Температурное напряжение	Примерное распределение
	$E\alpha a_2 b^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{y}{4h} - \frac{x^2}{b^2} \right)$	
	$E\alpha a_2 r^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} + \frac{y}{r} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin \varphi \left( \frac{2}{3} \sin^2 \varphi - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} \right)}{\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \frac{2 \sin^2 \varphi}{\varphi}} - \frac{x^2}{r^2} \right]$	

### КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТЕРЖНЯ

Основная формула для определения касательных напряжений. В приближенной теории стержней касательные напряжения определяют из условия равновесия элемента стержня, показанного на рис. 18. Предполагается, что сечение имеет ось симметрии; распределение модуля упругости  $E$  и температурной деформации  $\alpha t$  также симметрично. Распределение касательных напряжений  $\tau$  предполагается равномерным по отрезку  $b$ . Из условия равновесия элемента, при отсутствии распределенных усилий вдоль оси  $z$ , следует

$$\tau(y) = \frac{1}{b(y)} \cdot \frac{\partial N_f}{\partial z}, \quad (89)$$

где  $N_f = \int_f \sigma dF$  — нормальное усилие, действующее на площадь  $f$  отсеченной части сечения

$$N_f = N \frac{\int_f E dF}{\int_F E dF} + M_x \frac{\int_f E y dF}{\int_F E y^2 dF} + \int_r E \alpha t dF \frac{\int_f E dF}{\int_F E dF} + \\ + \int_F E \alpha t y dF \frac{\int_f E y dF}{\int_F E y^2 dF} - \int_f E \alpha t dF. \quad (90)$$

Стержень постоянного сечения. Модуль упругости и температурная деформация (по длине стержня) постоянны. В силу равенств (89) и (90)

$$\tau(y) = \frac{Q_y S_f(y)}{b(y) J_x}, \quad (91)$$

где  $Q_y = \frac{dM_x}{dz}$  — перерезывающая сила в сечении;  $S_f(y) = \int_f y dF$  — статический момент относительно оси  $x$  отсеченной части сечения.

Для стержня прямоугольного сечения (рис. 19)

$$S_f(y) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{2} - y^2 \right);$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12};$$

$$\tau_y = \frac{6Q_y}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (92)$$

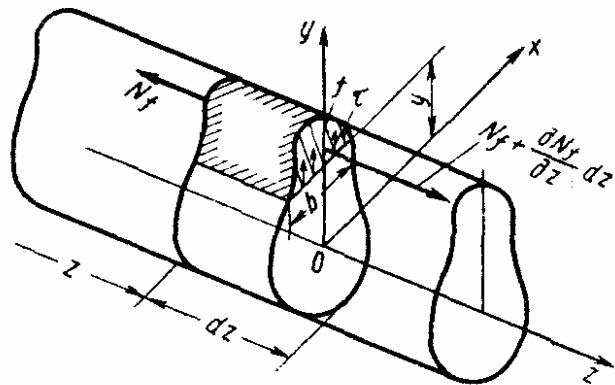


Рис. 18. Касательные напряжения при изгибе

Максимальное касательное напряжение ( $y = 0$ )

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F}, \quad (93)$$

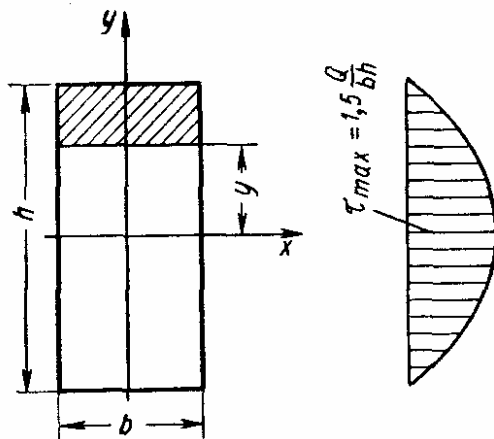


Рис. 19. Распределение касательных напряжений в стержне прямоугольного сечения

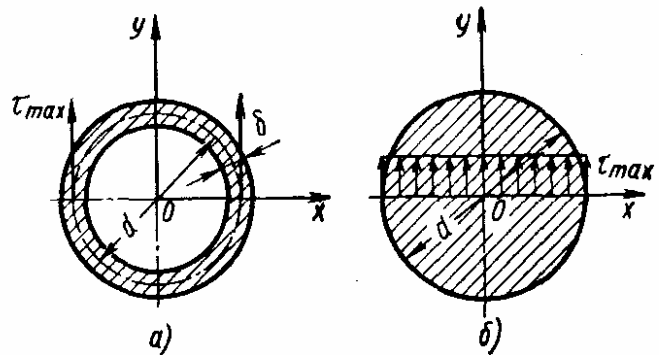
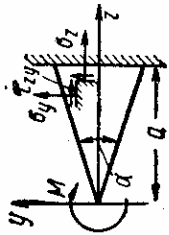
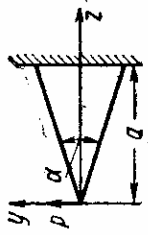


Рис. 20. Максимальные касательные напряжения в стержнях круглого сечения

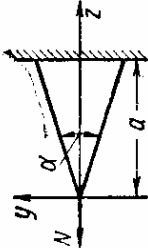
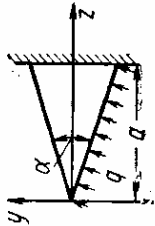
Для трубчатого стержня (рис. 20, а), сечение в виде тонкостенного кольца

$$\tau_{\max} = 2 \frac{Q_y}{\pi d \delta} = 2 \frac{Q_y}{F}.$$

## 4. Нормальные и касательные напряжения для некоторых случаев нагружения клина

Нагрузка	Точное решение	Приближенное решение
	$\sigma_z = -\frac{2My}{(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha)(z^2 + y^2)^{3/2}};$ $\sigma_y = -\frac{2My}{(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha)(z^2 + y^2)^{3/2}} \cos \alpha;$ $\tau_{zy} = -\frac{M[(z^4 - y^4) \cos \alpha - z^4 - y^4 + 6z^2 y^2]}{(\alpha \cos \alpha - \sin \alpha)(z^2 + y^2)^{5/2}};$	$\sigma_z = -\frac{3My}{2z^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}};$ $\sigma_y = 0;$ $\tau_{zy} = -\frac{3M}{4} \frac{\left(3z^2 y^2 - z^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{z^6 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}};$
	$\sigma_z = -\frac{2P}{\alpha - \sin \alpha} \frac{z^2 y}{(z^2 + y^2)^{3/2}};$ $\sigma_y = -\frac{2P}{\alpha - \sin \alpha} \frac{y^3}{(z^2 + y^2)^{3/2}};$ $\tau_{zy} = -\frac{2P}{\alpha - \sin \alpha} \frac{zy^2}{(z^2 + y^2)^{3/2}};$	$\sigma_z = -\frac{3}{2} \frac{Py}{z^2 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}};$ $\sigma_y = 0;$ $\tau_{zy} = -\frac{3}{2} \frac{Py^2}{z^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}};$

Продолжение табл. 4

Нагрузка	Точное решение	Приближенное решение
	$\sigma_z = \frac{2N}{a + \sin \alpha} \frac{z^3}{(z^2 + y^2)^2};$ $\sigma_y = -\frac{2N}{a + \sin \alpha} \frac{zy^2}{(z^2 + y^2)^2};$ $\tau_{zy} = \frac{2N}{a + \sin \alpha} \frac{z^2 y}{(z^2 + y^2)^2}$	$\sigma_z = \frac{N}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{z};$ $\sigma_y = 0;$ $\tau_{zy} = \frac{N}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \frac{y}{z^2}$
	$\sigma_z = -\frac{1}{2} q + q \frac{\cos \alpha}{a \cos \alpha - \sin \alpha} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{z} + \frac{zy}{z^2 + y^2} \right);$ $\sigma_y = -\frac{1}{2} q + q \frac{\cos \alpha}{a \cos \alpha - \sin \alpha} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{z} - \frac{zy}{z^2 + y^2} \right);$ $\tau_{zy} = \frac{q}{2 (a \cos \alpha - \sin \alpha)} - \frac{q \cos \alpha}{2 (a \cos \alpha - \sin \alpha)} \frac{z^2 - y^2}{z^2 + y^2}$	$\sigma_z = -\frac{1}{2} q + \frac{3}{4} q \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}} \frac{y}{z};$ $\sigma_y = 0;$ $\tau_{zy} = -\frac{1}{2} q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{3q}{8} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}} \frac{z^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{z^2 + y^2} + \frac{y^2}{z^2}$



Для круглого сплошного сечения (рис. 20, б)

$$\tau_{\max} = \frac{6,1Q_y}{\pi d^2} = 1,52 \frac{Q_y}{F}.$$

Распределение касательных напряжений в тонкостенных стержнях открытого профиля см. в гл. 12.

**Стержень переменного сечения с постоянным модулем упругости.** Температурные напряжения в стержне отсутствуют. Касательные напряжения определяют по формуле, вытекающей из равенств (89) и (90),

$$\tau = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{f}{F} + \frac{M_x S_f}{J_x} \right), \quad (94)$$

где  $f$  и  $S_f$  — площадь и статический момент отсеченной части сечения. При отсутствии продольной силы  $N$

$$\tau = \frac{Q_y S_f}{b J_x} + \frac{M_x}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{S_f}{J_x} \right). \quad (95)$$

Нормальные и касательные напряжения для некоторых случаев нагружения клина приведены в табл. 4. Точные решения получены методами теории упругости, приближенные решения выполнены по формулам (72) и (95).

При угле  $\alpha \rightarrow 0$  точное и приближенное решения совпадают, при  $\alpha < 45^\circ$  погрешность приближенного решения остается допустимой (при действии распределенной нагрузки можно применять приближенное решение при  $\alpha \leq 90^\circ$ ).

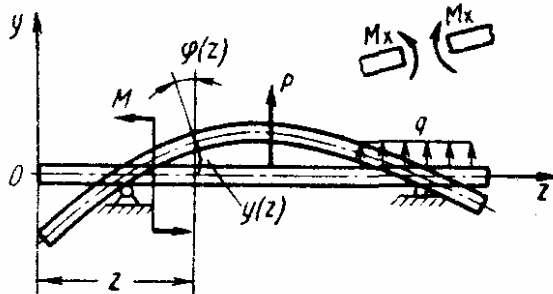


Рис. 21. Плоский изгиб стержня

### ПРОГИБЫ СТЕРЖНЯ ПРИ ИЗГИБЕ

**Основное дифференциальное уравнение упругой линии стержня.** Рассмотрим плоский изгиб равномерно нагретого стержня (изгиб в главной плоскости  $yoz$ , рис. 21).

Изменение угла поворота сечения  $\varphi(z)$  по длине стержня на основании гипотезы плоских сечений [формула (70)]

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{\int_F E y^2 dF},$$

где  $M_x$  — изгибающий момент в сечении стержня (рис. 21);  $E \int_F y^2 dF = EJ_x$  — жесткость сечения стержня на изгиб.

Так как

$$\varphi = \frac{dy}{dz}, \quad (96)$$

где  $y$  — упругое смещение центра тяжести сечения стержня вдоль оси  $z$ , то

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EJ_x(z)}. \quad (97)$$

Уравнение (97) представляет собой дифференциальное уравнение изгиба стержня (упругой линии стержня) [1, 13, 14].

В тех случаях, когда имеется связь изгибной и крутильной деформации стержня, прогибы стержня выражают смещения центра жесткости сечения. Отличие в положении центра тяжести и центра жесткости сказывается для тонкостенных стержней открытого профиля (см. гл. 12).

Если для сечения стержня

$$\frac{J_{\min}}{T} \leq 3,$$

где  $J_{\min}$  — минимальный момент инерции сечения;  $T$  — геометрическая жесткость на кручение (см. гл. 10), то можно применять обычную теорию изгиба стержней и не учитывать несовпадение центра тяжести и центра жесткости сечения.

Вторая форма дифференциального уравнения упругой линии основана на использовании условий равновесия элемента стержня (рис. 22). Если отсутствует распределенная моментная нагрузка

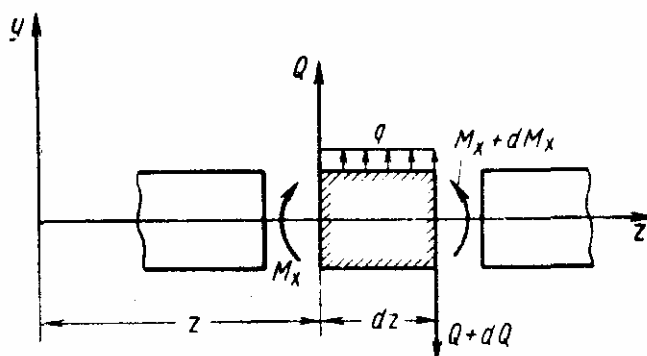


Рис. 22. Условие равновесия элементов стержня

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad (98)$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = q_y, \quad (99)$$

где  $Q_y(z)$  — составляющая перерезывающей силы в сечении по оси  $y$ ;  $q_y$  — составляющая распределенной нагрузки по оси  $y$ .

Из соотношений (97)–(99) вытекает вторая форма для дифференциального уравнения упругой линии

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EJ_x(z) \frac{d^2y}{dz^2} \right] = q_y. \quad (100)$$

Краевые условия для уравнения (100) относятся к значениям прогиба  $y$ , угла поворота  $\frac{dy}{dz}$ , изгибающего момента  $M_x(z) = EJ_x(z) \frac{d^2y}{dz^2}$  и перерезывающей силы  $Q_y(z) = \frac{d}{dz} \left( EJ_x(z) \frac{d^2y}{dz^2} \right)$ .

**Стержень постоянного сечения, интегрирование по методу начальных параметров.** Дифференциальное уравнение упругой линии стержня постоянного сечения имеет вид

$$\frac{d^4y}{dz^4} = \frac{q}{EJ_x}, \quad (101)$$

где  $q = q_y$  — интенсивность распределенной нагрузки.

Нормальные фундаментальные функции однородного уравнения

$$\frac{d^4y}{dz^4} = 0$$

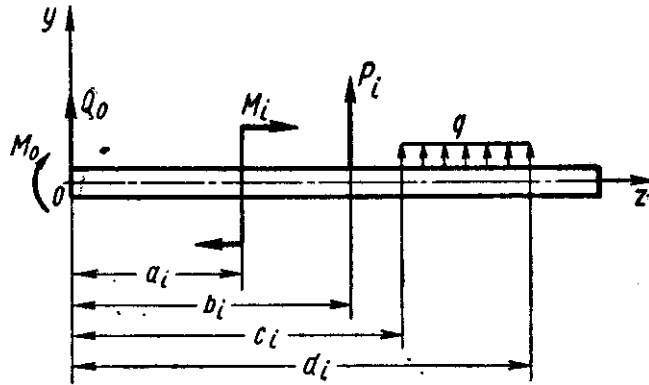


Рис. 23

будут такими

$$Y_0(z) = 1; \quad Y_1(z) = z; \quad Y_2(z) = \frac{z^2}{2!}; \quad Y_3(z) = \frac{z^3}{3!}. \quad (102)$$

Общий интеграл уравнения (100) при наличии скачков второй и третьей производной прогиба в сечениях, где приложены сосредоточенные моменты и сила (рис. 23):

$$\begin{aligned} y(z) = & y(0) Y_0(z) + \frac{dy}{dz}(0) Y_1(z) + \frac{d^2y}{dz^2}(0) Y_2(z) + \\ & + \frac{d^3y}{dz^3}(0) Y_3(z) + \sum \Delta_{2i} e(a_i) Y_2(z - a_i) + \\ & + \sum \Delta_{3i} e(b_i) Y_3(z - b_i) + \frac{1}{EJ_x} \int_0^z q(s) Y_3(z - s) ds, \end{aligned} \quad (103)$$

где  $\Delta_{2i} = \frac{M_i}{EJ_x}$  — скачок второй производной  $y(z)$  в сечении  $x = a_i$ ;

$\Delta_{3i} = \frac{P_i}{EJ_x}$  — скачок третьей производной  $y(z)$  в сечении  $x = b_i$ ;

$e(a_i)$ ,  $e(b_i)$  — единичные разрывные функции

$$e(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq a_i; \\ 1 & \text{при } z > a_i; \end{cases} \quad e(b_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq b_i; \\ 1 & \text{при } z > b_i. \end{cases} \quad (104)$$

суммирование проводят по всем сосредоточенным нагрузкам. Предполагается, что прогиб стержня  $y(z)$  и угол поворота  $\frac{dy}{dz}(z)$  изменяются плавно (без скачков).

Последний член в формуле (103) выражает действие распределенной нагрузки. Если нагрузка постоянна на участке от  $c_i \leq x \leq d_i$ , то

$$y^*(z) = \frac{1}{EJ_x} \int_0^z q(s) \frac{(z-s)^3}{3!} ds = \\ = e(c_i) \frac{q}{EJ_x} \cdot \frac{(z-c_i)^4}{4!} - e(d_i) \frac{q}{EJ_x} \frac{(z-d_i)^4}{4!}. \quad (105)$$

Положительные направления силовых факторов показаны на рис. 23. При учете связи производных прогиба и силовых факторов уравнение упругой линии стержня записывают в виде

$$y(z) = y(0) + \frac{dy}{dz}(0)z + \frac{M_0}{EJ_x} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{Q_0}{EJ_x} \cdot \frac{z^3}{3!} + \\ + \sum e(a_i) \frac{M_i}{EJ_x} \cdot \frac{(z-a_i)^2}{2!} + \sum e(b_i) \frac{P_i}{EJ_x} \frac{(z-b_i)^3}{3!} + \\ + \frac{1}{EJ_x} \int_0^z q(s) \frac{(z-s)^3}{3!} ds. \quad (106)$$

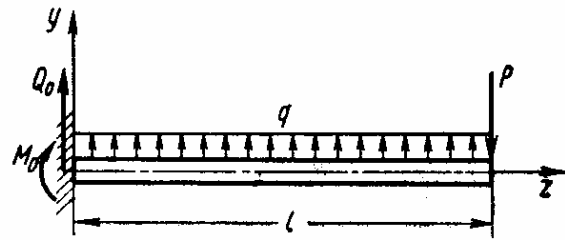


Рис. 24

Величины  $y(0)$ ,  $\frac{dy}{dz}(0)$ ,  $M_0$  и  $Q_0$  — называются *начальными параметрами* упругой линии стержня. Примеры использования уравнения упругой линии по методу начальных параметров см. в работах [9, 14].

**Пример 2.** Определить уравнение упругой линии стержня, показанного на рис. 24.

**Решение.** Определяем начальные параметры

$$y(0) = 0; \quad \frac{dy}{dz}(0) = 0;$$

$$M_0 = \frac{ql^2}{2} - Pl; \quad Q_0 = P - ql.$$

По уравнению (106), учитывая равенство (105), находим

$$y(z) = \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{ql^2}{2} - Pl \right) \frac{z^2}{2} + \frac{1}{EJ_x} (P - ql) \frac{z^3}{6} + \frac{1}{EJ_x} q \frac{z^4}{24}.$$

**Уравнение упругой линии в интегральной форме.** При определении прогибов стержней переменного сечения или при сложной нагрузке часто оказывается целесообразным использовать уравнение упругой линии в интегральной форме

$$y(z) = y(0) + \frac{dy}{dz}(0)z + \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)} dz_2 dz_1, \quad (107)$$

где  $z_1$ ,  $z_2$  — переменные интегрирования.

**Пример 3.** Стержень переменного сечения лежит на двух опорах (рис. 25). Изгибающий момент в сечении известен, требуется определить прогиб.

**Решение.** На основании уравнения (107) из условия  $y(l) = 0$  находим

$$\frac{dy}{dz}(0) = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)} dz_2 dz_1.$$

Прогиб стержня

$$y(z) = \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)} dz_2 dz_1 - \frac{z}{l} \int_0^l \int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)} dz_2 dz_1.$$

Интегралы вычисляют приближенно по правилу трапеций.

**Пространственная упругая линия.** При изгибе в двух главных плоскостях (рис. 26) на основании равенств (70) для равномерно нагретого стержня

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}; \quad \frac{d\psi}{dz} = \frac{M_y}{EJ_y}. \quad (108)$$

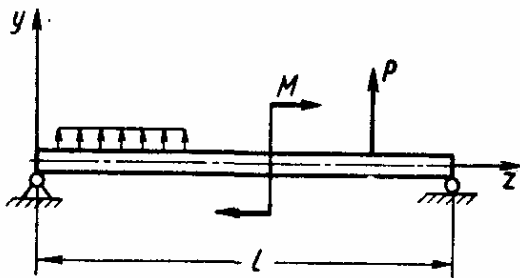


Рис. 25

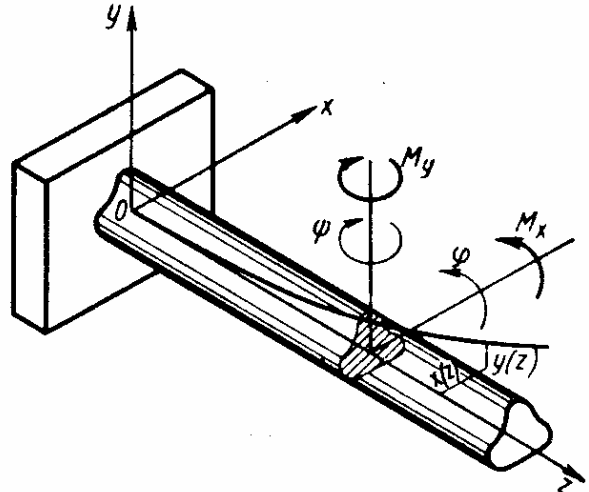


Рис. 26. Пространственная упругая линия стержня

В силу равенств  $\varphi = \frac{dy}{dz}$ ,  $\psi = -\frac{dx}{dz}$  дифференциальные уравнения пространственной упругой линии имеют вид

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}; \quad (109)$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{M_y}{EJ_y}. \quad (110)$$

Уравнение упругой линии при наличии естественной закрутки см. в гл. 13.

**Уравнение упругой линии с учетом деформации сдвига.** Рассмотрим плоский изгиб стержня. Если длина стержня соизмерима с его высотой,

то необходимо учесть влияние деформаций сдвига на его прогиб (рис. 27). В приближенной теории угол сдвига сечения принимают

$$\gamma = k(z) \frac{Q_y(z)}{GF(z)}, \quad (111)$$

где  $Q_y(z)$  — перерезывающая сила в сечении  $z$  (положительное направление показано на рис. 22);  $F(z)$  — площадь поперечного сечения стержня;  $G$  — модуль сдвига материала;  $k(z)$  — безразмерный коэффициент (коэффициент сдвига), зависящий от формы поперечного сечения.

На основании усреднения энергии сдвига можно приближенно принять

$$k = \frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{S_f^2}{b^2} dF; \quad (112)$$

обозначения — см. формулу (91).

Для стержня прямоугольного сечения  $k = \frac{6}{5}$ , для сплошного круглого сечения  $k = \frac{10}{9}$ , для сечения в виде тонкостенной трубы  $k = 2$ . Влиянием изменения сечения по длине стержня на величину  $k$  пренебрегают.

Связь дополнительного прогиба оси стержня и угла сдвига

$$\frac{dy_{cd}(z)}{dz} = -\gamma = -k \frac{Q_y(z)}{GF(z)}. \quad (113)$$

Знак минус в равенстве (113) зависит от выбора положительного направления перерезывающей силы.

Прогиб стержня  $y_m(z)$ , вызванный действием изгибающих моментов, определяется прежними соотношениями

$$\frac{d^2 y_m(z)}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EJ(z)}. \quad (114)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии стержня с учетом влияния деформаций сдвига

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EJ_x(z)} - k \frac{d}{dz} \left( \frac{Q_y(z)}{GF(z)} \right), \quad (115)$$

где  $y(z) = y_m(z) + y_{cd}(z)$  — полный прогиб стержня (смещение центра тяжести сечения по оси  $z$ ).

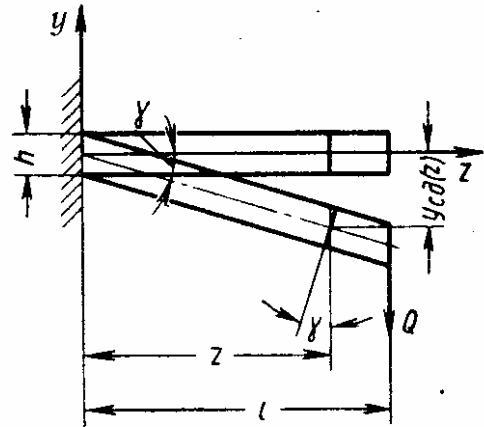


Рис. 27. Деформация сдвига в результате действия перерезывающей силы

Уравнение упругой линии стержня в интегральной форме

$$y(z) = y(0) + \frac{dy}{dz}(0)z + k \frac{Q(0)}{GF(0)}z - k \int_0^z \frac{Q_y(z_1)}{GF(z_1)} dz_1 + \\ + \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)} dz_2 dz_1. \quad (116)$$

Прогиб стержня только от действия перерезывающих сил

$$y_{cd}(z) = y_{cd}(0) - k \int_0^z \frac{Q_y(z_1)}{GF(z_1)} dz_1, \quad (117)$$

так как

$$\frac{dy_{cd}}{dz}(0) = -k \frac{Q(0)}{GF(0)}.$$

**Пример 4.** Определить прогибы консольного стержня под действием сосредоточенной силы с учетом влияния сдвига (рис. 28).

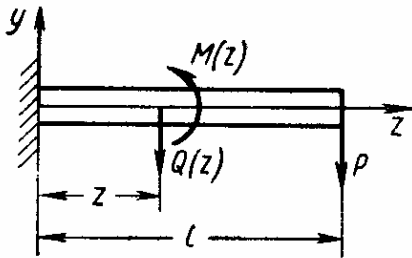


Рис. 28

**Решение.** Изгибающий момент и перерезывающая сила в сечении  $z$

$$M(z) = -P(l - z); \quad Q(z) = P.$$

Учитывая краевые условия

$$y(0) = 0; \quad \frac{dy}{dz}(0) = -k \frac{Q(0)}{GF(0)},$$

находим из уравнения (116)

$$y(z) = -k \int_0^z \frac{P}{GF} dz - \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{P(l - z_2)}{EJ_x} dz_2 dz_1 = \\ = -k \frac{Pz}{GF} - \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right).$$

Наибольший прогиб ( $z = l$ )

$$y(l) = - \left( \frac{kPl}{GF} + \frac{Pl^3}{3EJ_x} \right) = - \frac{Pl^3}{3EJ_x} (1 + \lambda),$$

где коэффициент  $\lambda$  выражает приращение прогиба при учете деформации сдвига. Для стержня прямоугольного сечения (высота сечения  $h$ )

$$\lambda = \frac{k(1 + \nu)}{2} \frac{h^2}{l^2}.$$

При  $h = l$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\lambda = 0,78$ .

**Пример 5.** Определить прогиб балки под действием распределенной нагрузки с учетом влияния перерезывающей силы (рис. 29).

**Решение.** Перерезывающая сила и изгибающий момент в сечении

$$Q(z) = \frac{ql}{2} - qz;$$

$$M(z) = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

Прогиб от действия изгибающих моментов

$$y_M(z) = y_M(0) + \frac{dy_M}{dz}(0) z + \int_0^z \int_0^{z_1} \frac{M(z_2)}{EJ_x} dz_2 dz_1 =$$

$$= \frac{dy_M}{dz}(0) \cdot z + \frac{q}{2EJ_x} \left( \frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{24} \right).$$

Из условия  $y_M(l) = 0$

$$\frac{dy_M}{dz}(0) = -\frac{ql^3}{24EJ_x};$$

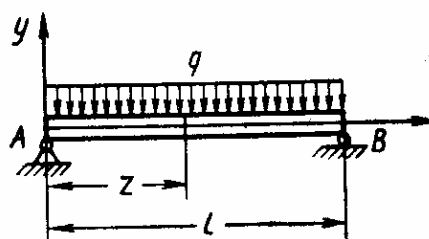


Рис. 29

$$y_M(z) = \frac{q}{2EJ_x} \left( \frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{24} \right) - \frac{ql^3}{24EJ_x} z.$$

Наибольший прогиб  $\left( z = \frac{l}{2} \right)$

$$y_M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Прогиб от действия перерезывающей силы

$$y_{сд}(z) = -\frac{k}{GF} \int_0^z \left( \frac{ql}{2} - qz_1 \right) dz_1 = -\frac{k}{GF} \cdot \frac{q}{2} (lz - z^2).$$

Наибольший прогиб

$$y_{сд}\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{kql^2}{8GF}.$$

Отношение максимальных прогибов

$$\lambda = \frac{y_{сд}\left(\frac{l}{2}\right)}{y_M\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{384}{40} k \frac{J_x}{Fl^2} \frac{E}{G}.$$

Для стержня в виде тонкостенной трубы

$$k = 2; F = \pi d\delta; J_x = \frac{1}{8} \pi d\delta^3; \nu = 0,3; \lambda = 6,24 \frac{d^2}{l^2}.$$

**Определение прогибов при помощи интеграла Мора.** Метод определения прогибов стержня, получивший широкое практическое применение, основан на использовании *интеграла Мора* [1, 9, 10, 14].



Если требуется найти прогиб стержня в сечении  $z = a$  (рис. 30, а), то в этом сечении прикладывают *единичную силу* и определяют изгибающий момент от этой силы в сечениях стержня  $M_{1x}^{(z)}$  (рис. 30, б). Рассматривая работу внутренних и внешних сил в единичной системе на дополнительных (виртуальных) прогибах, в качестве которых принимаем действительные прогибы стержня, получим

$$y(a) = \int_0^l \frac{M_x(z) M_{1x}(z)}{EJ_x(z)} dz, \quad (118)$$

где  $M_x(z)$  и  $M_{1x}(z)$  — изгибающие моменты в сечении стержня от внешних сил и единичной силы.

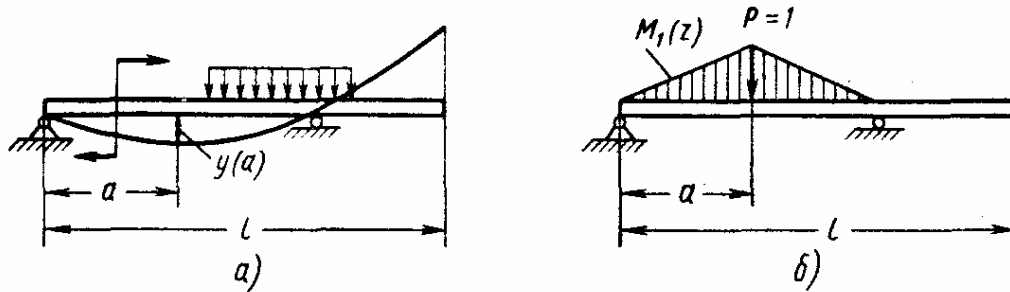


Рис. 30

Равенство (118) выражает интеграл Мора. При определении прогиба по интегралу Мора положительное значение соответствует совпадению направления прогиба и приложенной единичной силы.

Влияние перерезывающей силы на прогиб. Интеграл Мора с учетом перерезывающей силы имеет вид

$$y(a) = \int_0^l \frac{M_x(z) M_{1x}(z)}{EJ_x(z)} dz + k \int_0^l \frac{Q_y(z) Q_{1y}(z)}{GF(z)} dz, \quad (119)$$

где  $Q_y(z)$  и  $Q_{1y}(z)$  — перерезывающая сила в сечении  $z$ ;  $k$  — коэффициент сдвига [см. формулу (112)].

Интеграл Мора для неравномерно нагретого стержня. В этом случае следует учесть работу силовых факторов от единичной силы на температурных деформациях. Интеграл Мора будет

$$y(a) = \int_0^l \frac{(M_x(z) + M_{tx}(z)) M_{1x}(z)}{EJ_x(z)} dz + k \int_0^l \frac{Q_y(z) Q_{1y}(z)}{GF(z)} dz, \quad (120)$$

где  $M_{tx}(z) = -E \int_F \alpha t y dF$  — условный температурный момент.

Модули упругости и сдвига считают постоянными.

Интеграл Мора для пространственного изгиба. При изгибе стержня в двух главных плоскостях (рис. 31) перемещение точки стержня в произвольном направлении определяется следующим интегралом Мора:

$$\delta = \int_0^l \left( \frac{M_x(z) M_{1x}(z)}{EJ_x(z)} + \frac{M_y(z) M_{1y}(z)}{EJ_y(z)} + k_x \frac{Q_y(z) Q_{1y}(z)}{GF(z)} + k_y \frac{Q_x(z) Q_{1x}(z)}{GF(z)} \right) dz, \quad (121)$$

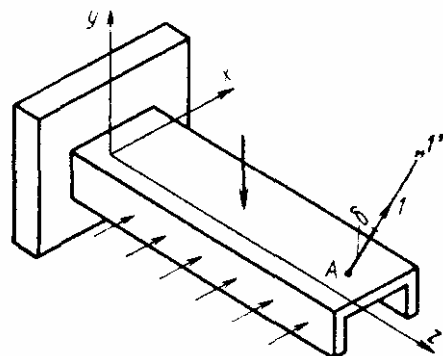


Рис. 31

где  $M_x(z)$ ,  $M_y(z)$ ,  $Q_x(z)$ ,  $Q_y(z)$  — изгибающие моменты и поперечные силы в сечении от внешних нагрузок;  $M_{1x}(z)$ ,  $M_{1y}(z)$ ,  $Q_{1x}(z)$ ,  $Q_{1y}(z)$  — то же от действия единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения. Величина  $\delta$  выражает проекцию полного перемещения точки на направление  $l$ .

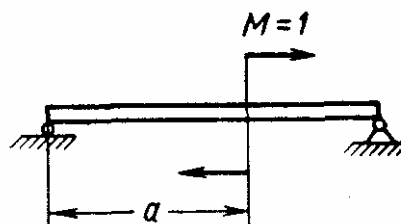
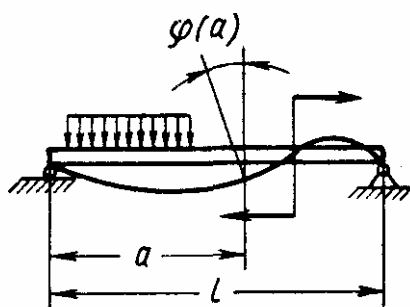


Рис. 32

**Определение углов поворота сечений с помощью интеграла Мора.** В этом случае (рис. 32) в сечении  $z = a$  прикладываем момент, равный единице (единичный момент).

Угол поворота

$$\varphi(a) = \int_0^l \frac{M_x(z) M_{1x}(z)}{EJ_x(z)} dz. \quad (122)$$

Формулы (122) и (118) совпадают, но величины  $M_{1x}(z)$  имеют разный смысл. В равенстве (122)  $M_{1x}(z)$  означает изгибающий момент в сечении  $z$  от единичного момента в сечении  $a$ .

Положительные значения угла поворота получаются в том случае, если его направление и направление приложенного единичного момента совпадают. Углы поворота с учетом влияния поперечной силы и неравномерного нагрева определяют по приведенным ранее формулам.

**Обобщение интеграла Мора.** В некоторых случаях целесообразно использовать «единичную систему сил». Например, если требуется определить прогиб  $\delta$  точки  $B$  относительно прямой, соединяющей точки  $A$  и  $C$  (рис. 33), то единичная система состоит из единичной силы

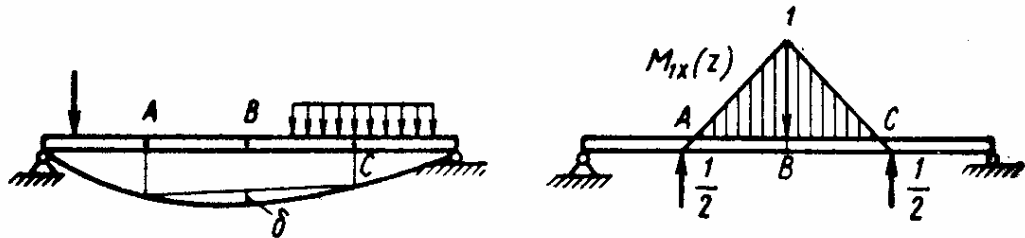


Рис. 33

в точке  $B$  и двух уравнивающих сил в сечениях  $A$  и  $C$ . Определяя  $M_{1x}(z)$  и внося его в интеграл Мора, получаем искомый прогиб. Подобным образом можно использовать различные системы, причем физический смысл результата устанавливают исходя из того, что интеграл Мора представляет работу сил единичной системы на действительных перемещениях.

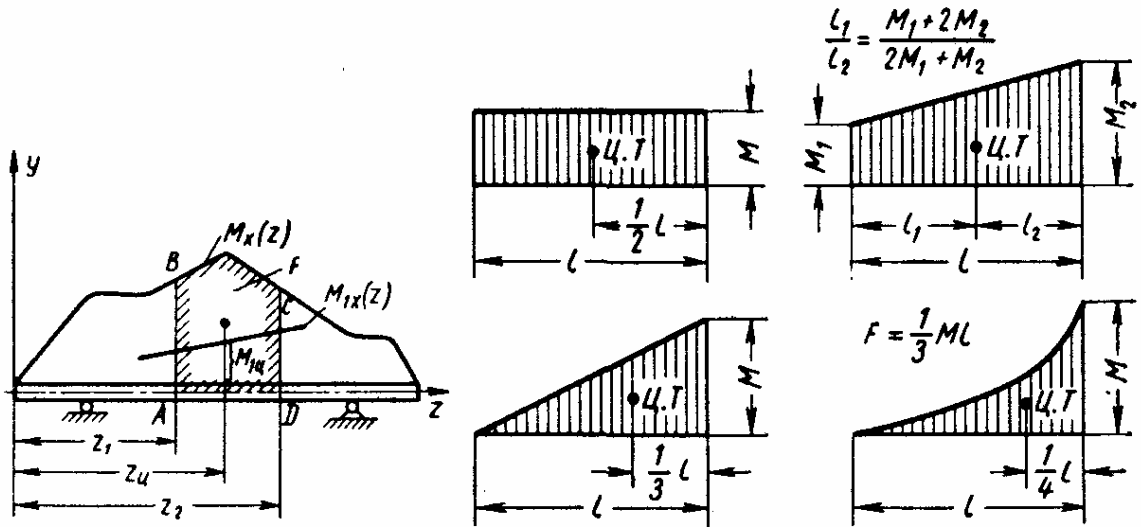


Рис. 34

Рис. 35

**Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина.** Для вычисления интеграла Мора в практических расчетах используют правило Верещагина. Это правило основано на том, что эпюра изгибающих моментов от единичной нагрузки состоит из отрезков прямых (рис. 33). Если на участке стержня от  $z_1$  до  $z_2$  (рис. 34) эпюра  $M_{1x}(z)$  — прямая линия и жесткость стержня постоянна, то интеграл Мора в пределах участка

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{M_x(z) M_{1x}(z)}{EJ_x(z)} dz = \frac{1}{EJ_x} FM_{1\alpha}, \quad (123)$$

где  $F$  — площадь эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки (площадь  $ABCD$ );  $M_{1ц}$  — ордината эпюры от единичной нагрузки в сечении, соответствующем центру тяжести площади  $F$ . Равенство (123) справедливо при условии, что изгибающий момент от внешней нагрузки  $M(z)$  в пределах участка не изменяет знака. Величина  $M_{1ц}$  считается положительной, если она совпадает по знаку с  $M(z)$ .

Абсциссы центра тяжести для часто встречающихся участков эпюр изгибающих моментов показаны на рис. 35.

**Пример 6.** Определить прогиб точки  $A$  для балки под действием двух сосредоточенных сил (рис. 36).

**Решение.** Прикладываем в сечении  $A$  единичную силу и строим эпюру изгибающих моментов от внешних сил и от единичной силы. Для удобства расчета интеграл Мора разбиваем на три участка:

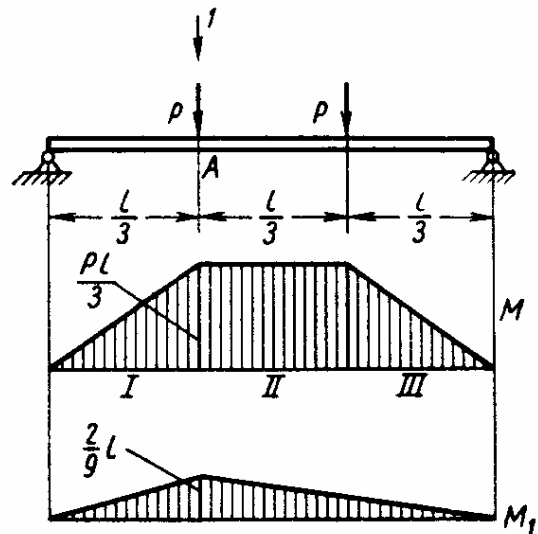


Рис. 36

$$y = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2l}{9} + \frac{Pl}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{2}{3}l} \cdot \frac{2l}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{\frac{2}{9}l}{\frac{2}{3}l} \cdot \frac{2l}{9} \right) = \frac{5Pl^3}{162EJ}.$$

## ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

**Основные уравнения.** Рассмотрим стержень, лежащий на упругом основании, которое представим в виде среды, препятствующей прогибам и углам поворота стержня (рис. 37). В общем случае (сложное упругое основание) распределенные реактивные усилия и моменты зависят от прогибов  $y(z)$  и углов поворота  $\varphi(z) = \frac{dy}{dz}$

$$q_0(z) = k_{11}y(z) + k_{12} \frac{dy}{dz}(z); \quad (124)$$

$$m_0(z) = k_{21}y(z) + k_{22} \frac{dy}{dz}(z), \quad (125)$$

где  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{21}$  и  $k_{22}$  — коэффициенты жесткости упругого основания (для реальных оснований  $k_{12} = k_{21}$ ,  $k_{11} > 0$ ,  $k_{22} > 0$ ).

Из равенств (124) и (125) следует, что величины  $q_0$  и  $m_0$  зависят только от параметров деформации в данном сечении, что отличает

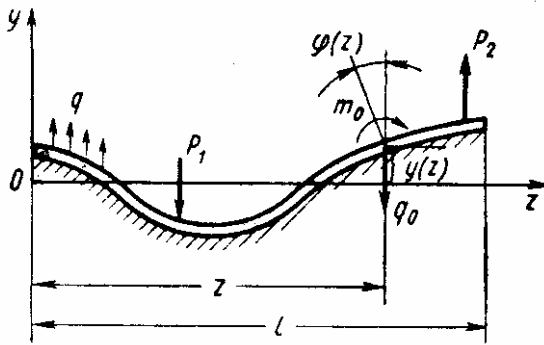


Рис. 37. Стержень на упругом основании

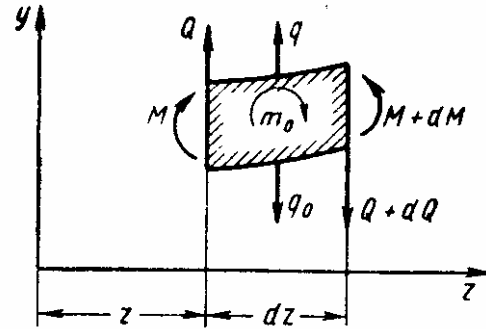


Рис. 38. Условия равновесия стержня на упругом основании

рассматриваемую модель от реального основания в виде упругого полупространства. Уравнения равновесия элемента стержня (рис. 38)

$$\frac{dQ}{dz} = q - q_0; \quad (126)$$

$$\frac{dM}{dz} = Q + m_0. \quad (127)$$

Уравнение изгиба стержня<sup>1</sup>

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EJ}. \quad (128)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии стержня на сложном упругом основании при  $k_{12} = k_{21}$  будет

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EJ(z) \frac{d^2y}{dz^2} \right) - k_{22} \frac{d^2y}{dz^2} + k_{11}y = q(z). \quad (129)$$

В большинстве расчетных схем встречается *простое упругое основание*, для которого  $k_{12} = k_{21} = 0$ ,  $k_{22} = 0$ ;  $k_{11} = k$ . Уравнение для стержня на простом упругом основании

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EJ(z) \frac{d^2y}{dz^2} \right) + ky = q(z). \quad (130)$$

Для стержня постоянного сечения на упругом основании

$$\frac{d^2y}{dz^4} + \frac{k}{EJ} y = \frac{q(z)}{EJ}. \quad (131)$$

В уравнениях (130) и (131) коэффициент  $k$  — коэффициент жесткости (в  $\text{кг/см}^2$ ) основания при данной опорной поверхности стержня.

<sup>1</sup> Для упрощения индекс  $x$  опускаем, так как рассмотрим только плоский изгиб.

Стержень бесконечной длины на упругом основании. Общее решение. Рассмотрим стержень (балку) постоянного сечения на простом упругом основании. Так как на бесконечном удалении  $y(z) \rightarrow 0$ , то общий интеграл уравнения (131) может быть представлен в виде

$$y(z) = e^{-\beta z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + y^*(z), \quad (132)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \text{ 1/см}; \quad (133)$$

$y^*(z)$  — частное решение неоднородного уравнения (131).

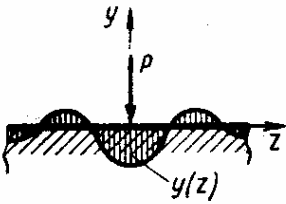
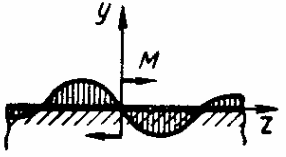
Для распределенной нагрузки постоянной интенсивности  $q(z) \doteq q$

$$y^*(z) = \frac{1}{k} q. \quad (134)$$

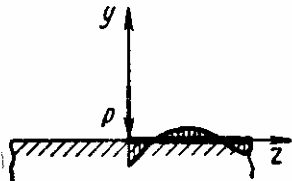
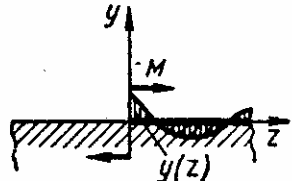
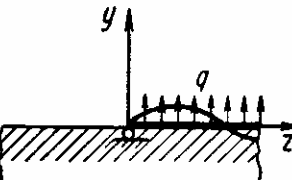
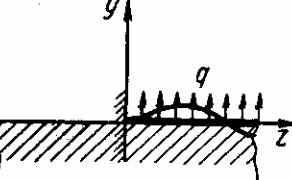
Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяют из краевых условий при  $z = 0$ .

Случаи нагружения бесконечной и полубесконечной балки на упругом основании приведены в табл. 5.

5. Прогибы, углы поворота и изгибающие моменты для некоторых случаев нагружения балок на упругом основании

Схема нагружения	Краевые условия при $z=0$	Значения прогибов, углов поворота и изгибающих моментов
	$\frac{dy}{dz} = 0$ $\frac{d^3 y}{dz^3} = -\frac{P}{2EJ}$	$y(z) = -\frac{P}{8\beta^3 EJ} e^{-\beta z} \times$ $\times (\cos \beta z + \sin \beta z);$ $y_0 = -\frac{P}{8\beta^3 EJ};$ $y'(z) = \frac{P}{4\beta^2 EJ} e^{-\beta z} \sin \beta z;$ $y'(0) = 0; M(z) = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta z} \times$ $\times (\sin \beta z - \cos \beta z); M(0) = \frac{P}{4\beta}$
	$y = 0$ $\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{2EJ}$	$y(z) = -\frac{M}{4\beta^2 EJ} e^{-\beta z} \sin \beta z;$ $y(0) = 0; y'(z) = -\frac{M}{4\beta EJ} e^{-\beta z} \times$ $\times (\cos \beta z - \sin \beta z); y'(0) = -\frac{M}{4\beta EJ};$ $M(z) = \frac{M}{2} e^{-\beta z} \cos \beta z; M(0) = \frac{M}{2}$

Продолжение табл. 5

Схема нагружения	Краевые условия при $z = 0$	Значения прогибов, углов поворота и изгибающих моментов
	$\frac{d^2 y}{dz^2} = 0$ $\frac{d^3 y}{dz^3} = -\frac{P}{EJ}$	$y(z) = -\frac{P}{2\beta^3 EJ} e^{-\beta z} \cos \beta z;$ $y(0) = -\frac{P}{2\beta^3 EJ};$ $y'(z) = \frac{P}{2\beta^2 EJ} e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z);$ $y'(0) = \frac{P}{2\beta^2 EJ}; \quad M(z) = \frac{P}{\beta} e^{-\beta z} \times$ $\times \sin \beta z; \quad M(0) = 0$
	$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{EJ}$ $\frac{d^3 y}{dz^3} = 0$	$y(z) = \frac{M}{2\beta^2 EJ} e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z);$ $y(0) = \frac{M}{2\beta^2 EJ}; \quad y'(z) = -\frac{M}{\beta EJ} \times$ $\times e^{-\beta z} \cos \beta z; \quad y'(0) = -\frac{M}{\beta EJ};$ $M(z) = M e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z);$ $M(0) = M$
	$y = 0$ $\frac{d^2 y}{dz^2} = 0$	$y(z) = \frac{q}{k} (1 - e^{-\beta z} \cos \beta z); \quad y(0) = 0;$ $y'(z) = \frac{q}{k} \beta e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z);$ $y'(0) = \beta \frac{q}{k};$ $M(z) = -\frac{q}{2\beta^2} e^{-\beta z} \sin \beta z; \quad M(0) = 0$
	$y = 0$ $\frac{dy}{dz} = 0$	$y(z) = \frac{q}{k} [1 - e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z)];$ $y(0) = 0; \quad y'(z) = 2\beta \frac{q}{k} e^{-\beta z} \sin \beta z;$ $y'(0) = 0; \quad M(z) = \frac{q}{2\beta^2} e^{-\beta z} \times$ $\times (\cos \beta z - \sin \beta z); \quad M(0) = \frac{q}{2\beta^2}$

Действие произвольной системы сил на бесконечно длинную балку. Решение для одной сосредоточенной силы может быть использовано для расчета бесконечно длинной балки под действием системы сил (рис. 39). Прогиб балки под действием  $n$  сил

$$y(z) = -\frac{1}{8\beta^3 EJ} \sum_{i=1}^n P_i e^{-\beta(z-a_i)} [\cos \beta(z-a_i) + \sin \beta(z-a_i)], \quad (135)$$

где  $a_i$  — абсцисса сечения, в котором приложена сосредоточенная сила.

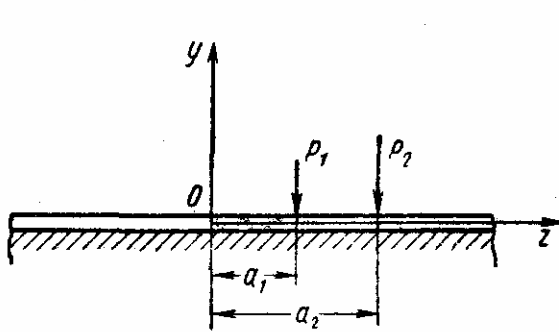


Рис. 39. Действие системы сил на бесконечно длинную балку

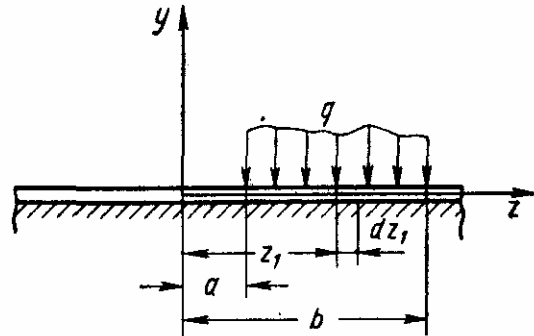


Рис. 40. Произвольная распределенная нагрузка, приложенная к бесконечно длинной балке

При действии распределенной нагрузки (рис. 40)

$$y(z) = -\frac{1}{8\beta^3 EJ} \int_a^b q(z_1) e^{-\beta(z-z_1)} \times [\cos \beta(z-z_1) + \sin \beta(z-z_1)] dz_1. \quad (135a)$$

Соответствующим образом могут быть найдены углы поворота, изгибающие моменты и т. п.

**К р а е в о й э ф ф е к т.** При расчетах на прочность балку на упругом основании можно рассматривать как бесконечно длинную, если  $\beta l > 3$ . При таком значении параметра прогибы и моменты возле одного края не зависят от условий закрепления другого края.

**Стержень конечной длины на упругом основании. Метод начальных параметров.** Общее решение. Рассмотрим стержень (балку) постоянного сечения на простом упругом основании. Общее решение уравнения (131), выраженное через нормальные фундаментальные функции (функции А. Н. Крылова), имеет вид

$$y(z) = y(0) K_0(\beta z) + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{dy}{dz}(0) K_1(\beta z) + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{d^2y}{dz^2}(0) K_2(\beta z) + \frac{1}{\beta^3} \cdot \frac{d^3y}{dz^3}(0) K_3(\beta z) + \frac{1}{\beta^3 EJ} \int_0^z q(s) K_3[\beta(z-s)] ds, \quad (136)$$

где  $y(0)$ ,  $\frac{dy}{dz}(0)$ ,  $\frac{d^2y}{dz^2}(0)$ ,  $\frac{d^3y}{dz^3}(0)$  — прогиб и производные прогиба в начальном сечении  $z = 0$ .



Функции А. Н. Крылова

$$K_0(\beta z) = \operatorname{ch} \beta z \cos \beta z; \quad (137)$$

$$K_1(\beta z) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \beta z \sin \beta z + \operatorname{sh} \beta z \cos \beta z); \quad (138)$$

$$K_2(\beta z) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \beta z \cdot \sin \beta z; \quad (139)$$

$$K_3(\beta z) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \beta z \cdot \sin \beta z - \operatorname{sh} \beta z \cos \beta z). \quad (140)$$

Значения функций Крылова приведены в табл. 2 гл. 21, а производные — в табл. 6.

6. Производные функций А. Н. Крылова

Функция	$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d}{dz} K_i(\beta z)$	$\frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} K_i(\beta z)$	$\frac{1}{\beta^3} \cdot \frac{d^3}{dz^3} K_i(\beta z)$
$K_0(\beta z)$	$-4K_3(\beta z)$	$-4K_2(\beta z)$	$-4K_1(\beta z)$
$K_1(\beta z)$	$K_0(\beta z)$	$-4K_3(\beta z)$	$-4K_2(\beta z)$
$K_2(\beta z)$	$K_1(\beta z)$	$K_0(\beta z)$	$-4K_3(\beta z)$
$K_3(\beta z)$	$K_2(\beta z)$	$K_1(\beta z)$	$K_0(\beta z)$

При выборе в качестве начальных параметров величин  $y(0)$ ,  $\frac{dy}{dz}(0)$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$  и при учете сосредоточенных воздействий (рис. 41) уравнение упругой линии имеет вид

$$\begin{aligned} y(z) = & y(0) K_0(\beta z) + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{dy}{dz}(0) K_1(\beta z) + \\ & + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{M_0}{EJ} K_2(\beta z) + \frac{1}{\beta^3} \cdot \frac{Q_0}{EJ} K_3(\beta z) + \\ & + \sum e(a_i) \frac{M_i}{\beta^2 EJ} K_2[\beta(z - a_i)] + \sum e(b_i) \frac{P_i}{\beta^3 EJ} K_3[\beta(z - b_i)] + \\ & + \frac{1}{\beta^3 EJ} \int_0^z q(s) K_3[\beta(z - s)] ds. \end{aligned} \quad (141)$$

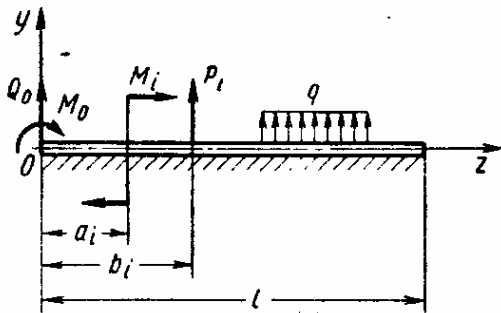


Рис. 41. Балка бесконечной длины на упругом основании

где  $e(a_i)$ ,  $e(b_i)$  — единичные разрывные функции (см. стр. 214).

Случай нагружения. Так как уравнение упругой линии балки на упругом основании совпадает с уравнением для прогиба цилиндрической оболочки, то можно воспользоваться результатами, помещенными в гл. 22 (случай осесимметричного нагружения оболочки конечной длины [4]).

Применительно к балке на упругом основании следует заменить  $D$  на  $EJ$  и  $\frac{Eh}{r^2}$  на  $k$ .

## ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

**Основные уравнения.** Изгиб стержня под действием поперечной нагрузки с учетом влияния продольных сил называют продольно-поперечным изгибом (рис. 42). Влияние продольных сил оказывается существенным, если их абсолютная величина имеет один порядок с величиной усилий, вызывающих потерю устойчивости стержня.

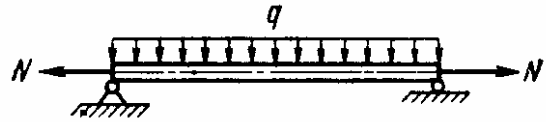


Рис. 42. Продольно-поперечный изгиб стержня

Рассмотрим плоский изгиб стержня. Условия равновесия элемента стержня (рис. 43) при малых отклонениях ( $\cos \varphi = 1$ ,  $\sin \varphi = \varphi$ )

$$\frac{dQ}{dz} = q + \frac{d}{dz} (N\varphi); \quad (142)$$

$$\frac{dM}{dz} = Q; \quad (143)$$

$$\frac{dN}{dz} = n; \quad (144)$$

$$\varphi = \frac{dy}{dz} + \frac{dy_0}{dz}, \quad (145)$$

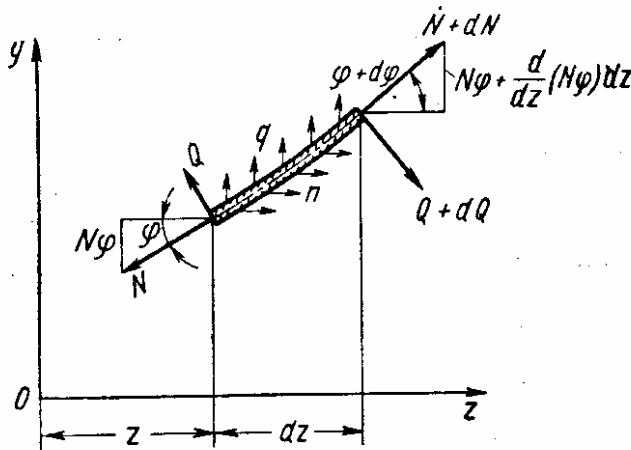


Рис. 43. Равновесие элемента стержня при действии усилия вдоль его оси

где  $y$  и  $y_0$  — упругое и первоначальное смещение оси стержня;  $q$  и  $n$  — интенсивность поперечной и продольной распределенной нагрузок;  $N$  — продольное усилие.

Существенно, что уравнение равновесия элемента стержня составляется для деформированного состояния.

Уравнение изгиба стержня имеет такой же вид, как и для обычного поперечного изгиба

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (146)$$

Из равенств (142), (143) и (145) вытекает дифференциальное уравнение изгиба стержня с учетом влияния продольных сил

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EJ_x \frac{d^2y}{dz^2} \right) = q + \frac{d}{dz} \left[ N \left( \frac{dy}{dz} + \frac{dy_0}{dz} \right) \right]. \quad (147)$$

Краевые условия для уравнения (147) при различных схемах закрепления концов стержня приведены в табл. 7.

## 7. Краевые условия уравнения (147)

Схема закрепления	Краевые условия
	$y = 0; \frac{dy}{dz} = 0$
	$y = 0; \frac{d^2y}{dz^2} = 0$
	$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EJ};$ $\frac{d}{dz} \left( EJ \frac{d^2y}{dz^2} \right) = P + N \frac{dy}{dz}$

**Продольные силы, постоянные по длине.** Общее решение. Рассмотрим продольно-поперечный изгиб стержня постоянного сечения. Дифференциальное уравнение упругой линии стержня имеет следующий вид:

$$\frac{d^4y}{dz^4} - \frac{N}{EJ_x} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q}{EJ_x} + \frac{N}{EJ_x} \cdot \frac{d^2y_0}{dz^2}. \quad (148)$$

Общее решение уравнения (148) при действии растягивающей силы ( $N > 0$ )

$$y = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{ch} kz + C_4 \operatorname{sh} kz + y^*, \quad (149)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{N}{EJ_x}}; \quad (150)$$

$y^*$  — частное решение неоднородного уравнения (148).

Произвольные постоянные  $C_i$  определяют из краевых условий. При действии сжимающей силы ( $N < 0$ ) решение имеет вид

$$y = C_1 + C_2 z + C_3 \cos kz + C_4 \sin kz + y^*. \quad (151)$$

Решение по методу начальных параметров. Решение в нормальных фундаментальных функциях (по методу начальных параметров) имеет вид:

при действии растягивающей силы ( $N > 0$ )

$$y(z) = y(0) \cdot 1 + y'(0) z + \frac{d^2 y}{dz^2}(0) \frac{1}{k^2} (\operatorname{ch} kz - 1) + \\ + \frac{d^3 y}{dz^3}(0) \frac{1}{k^3} (\operatorname{sh} kz - kz) + y^*(z);$$

при действии сжимающей силы ( $N < 0$ )

$$y(z) = y(0) \cdot 1 + y'(0) z + \frac{d^2 y}{dz^2}(0) \frac{1}{k^2} (1 - \cos kz) + \\ + \frac{d^3 y}{dz^3}(0) \frac{1}{k^3} (kz - \sin kz) + y^*(z).$$

Решения для частных случаев нагружения приведены в табл. 8.

Приближенное решение. Анализ точных решений показывает, что особенности прогибов и изгибающих моментов в задачах продольно-поперечного изгиба зависят от безразмерного параметра гибкости стержня

$$\nu = \frac{N}{N_{кр}}, \quad (152)$$

где  $N$  — осевое усилие, действующее на стержень;  $N_{кр}$  — критическая сила при потере устойчивости стержня.

Для стержня на двух шарнирных опорах параметр гибкости

$$\nu = \frac{N l^2}{\pi^2 E J}. \quad (153)$$

Для прогиба стержня от действия внешних нагрузок можно использовать приближенную формулу

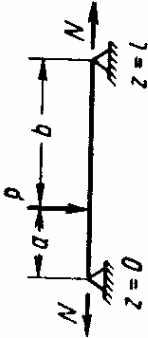
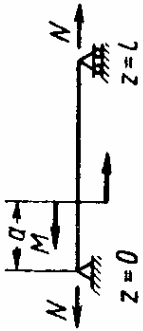
$$y(z) = \frac{\tilde{y}(z)}{1 + \nu}, \quad (154)$$

где  $\tilde{y}(z)$  — прогиб только от действия поперечной нагрузки.

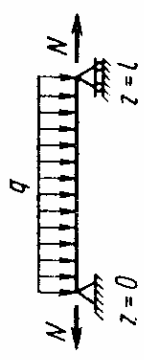
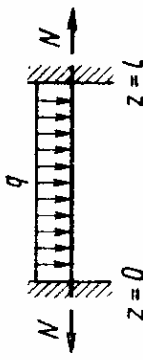
При действии растягивающей осевой силы ( $\nu > 0$ ) прогиб уменьшается, при действии сжимающей силы ( $\nu < 0$ ) прогиб увеличивается. Формулу (154) применяют при  $\nu > -1$ . При  $\nu = -1$   $y(z) \rightarrow \infty$ .

Формула (154) дает точные результаты, если прогиб от действия поперечной нагрузки совпадает (с точностью до множителя) с прогибом стержня при потере устойчивости.

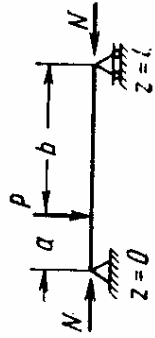

8. Некоторые случаи нагружения при продольно-поперечном изгибе

Схема нагружения	Уравнение упругой линии	Уравнение изгибающих моментов
	$y(z) = \frac{P}{EJ_x k^3} \left\{ \frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz - \left(1 - \frac{a}{l}\right) kz - e(a) [\operatorname{sh} k(z-a) - k(z-a)] \right\};$ $y(a) = \frac{P}{EJ_x k^3} \left\{ \frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} ka - \left(1 - \frac{a}{l}\right) ka \right\}$ $e(a) = 0 \text{ при } z \leq a; \quad e(a) = 1 \text{ при } z > a$	$M_x(z) = \frac{P}{k} \left\{ \frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz - e(a) \operatorname{sh} k(z-a) \right\};$ $M_x(a) = \frac{P}{k} \frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} ka$
	$y(z) = \frac{M}{EJ_x k^2} \left\{ \frac{\operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz - \frac{z}{l} - e(a) [\operatorname{ch} k(z-a) - 1] \right\};$ $y(a) = \frac{M}{EJ_x k^2} \left\{ \frac{\operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} ka - \frac{a}{l} \right\}$ $e(a) = 0 \text{ при } z \leq a; \quad e(a) = 1 \text{ при } z > a$	$M_x(z) = M \left\{ \frac{\operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz - e(a) \operatorname{ch} k(z-a) \right\};$ $M_x(a) = M \frac{\operatorname{ch} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} ka$

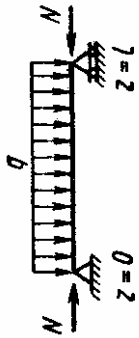
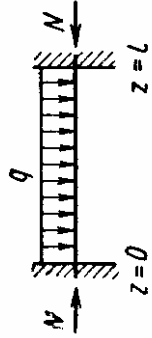
Продолжение табл. 8

Схема нагружения	Уравнение упругой линии	Уравнение изгибающих моментов
	$y(z) = \frac{q}{EJ_x k^4} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} - \frac{k^2 l z}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \right\};$ $y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJ_x k^4} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} - \frac{k^2 l^2}{8} \right\}$	$M_x(z) = \frac{q}{k^2} \left\{ - \frac{\operatorname{ch} k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} + 1 \right\};$ $M_x\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2} \left\{ - \frac{1}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} + 1 \right\}$
	$y(z) = \frac{q}{EJ_x k^4} \left\{ \frac{-\operatorname{ch} k \left( z - \frac{l}{2} \right) + \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \times \right.$ $\times \left. \frac{kl}{2} - \frac{k^2 l z}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \right\};$ $y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJ_x k^4} \left\{ \frac{kl}{2} \operatorname{th} \frac{kl}{4} - \frac{k^2 l^2}{8} \right\}$	$M_x(z) = \frac{q}{k^2} \left\{ 1 - \frac{kl}{2} \frac{\operatorname{ch} k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right\};$ $M_x\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2} \left\{ 1 - \frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right\};$ $M_x(0) = \frac{q}{k^2} \left\{ 1 - \frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{th} \frac{kl}{2}} \right\}$

Продолжение табл. 8

Схема нагружения	Уравнение упругой линии	Уравнение изгибающих моментов
	$y(z) = \frac{P}{EJ_x k^3} \left\{ -\frac{\sin k(l-a)}{\sin kl} \sin kz + \left(1 - \frac{a}{l}\right) kz + e(a) [\sin k(z-a) - k(z-a)] \right\};$ $y(a) = \frac{P}{EJ_x k^3} \left\{ -\frac{\sin k(l-a)}{\sin kl} \sin ka - \left(1 - \frac{a}{l}\right) ka \right\}$ $e(a) = 0 \text{ при } z \leq a; \quad e(a) = 1 \text{ при } z > a$	$M_x(z) = \frac{P}{k} \left\{ \frac{\sin k(l-a)}{\sin kl} \sin kz - e(a) \sin k(z-a) \right\};$ $M_x(a) = \frac{P}{k} \frac{\sin k(l-a)}{\sin kl} \sin ka$
	$y(z) = \frac{M}{EJ_x k^2} \left\{ -\frac{\cos k(l-a)}{\sin kl} \sin kz + \frac{z}{l} - e(a) [1 - \cos k(z-a)] \right\};$ $y(a) = \frac{M}{EJ_x k^2} \left\{ -\frac{\cos k(l-a)}{\sin kl} \sin ka + \frac{a}{l} \right\}$ $e(a) = 0 \text{ при } z \leq a; \quad e(a) = 1 \text{ при } z > a$	$M_x(z) = M \left\{ \frac{\cos k(l-a)}{\sin kl} \sin kz - e(a) \cos k(z-a) \right\};$ $M_x(a) = M \frac{\cos k(l-a)}{\sin kl} \sin ka$

Продолжение табл. 8

Схема нагружения	Уравнение упругой линии	Уравнение изгибающих моментов
	$y(z) = \frac{q}{EJ_x k^4} \left\{ 1 - \frac{\cos k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{kl}{2}} + \frac{k^2 l z}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \right\}$ $y \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{EJ_x k^4} \left\{ 1 - \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} + \frac{kl^2}{8} \right\}$	$M_x(z) = \frac{q}{k^2} \left\{ -1 + \frac{\cos k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{kl}{2}} \right\};$ $M_x \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{k^2} \left\{ -1 + \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \right\}$
	$y(z) = \frac{q}{EJ_x k^4} \left\{ \frac{kl}{2} \times \left[ \frac{-\cos k \left( z - \frac{l}{2} \right) + \cos \frac{kl}{2}}{\sin \frac{kl}{2}} + \frac{k^2 l z}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \right] \right\};$ $y \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{EJ_x k^4} \left\{ -\frac{kl}{2} \operatorname{tg} \frac{kl}{4} + \frac{k^2 l^2}{8} \right\}$	$M_x(z) = \frac{q}{k^2} \left\{ -1 + \frac{kl}{2} \frac{\cos k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\sin \frac{kl}{2}} \right\};$ $M_x \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{k^2} \left\{ -1 + \frac{kl}{2} \frac{kl}{\sin \frac{kl}{2}} \right\};$ $M_x(0) = \frac{q}{k^2} \left\{ -1 + \frac{kl}{2} \frac{kl}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2}} \right\}$



Изгибающий момент в сечении  $z$  (рис. 44)

$$M_x(z) = \tilde{M}_x(z) - N[y(z) + y_0(z)], \quad (155)$$

где  $\tilde{M}_x(z)$  — изгибающий момент только от действия поперечных нагрузок.

Величину  $y(z)$  в равенстве (155) при приближенных расчетах принимают по уравнению (154).

**Продольные силы, переменные по длине.** В практике расчет стержней на изгиб при действии распределенных осевых усилий применяют при проектировании вращающихся лопастей (лопасток паровых и газовых турбин, осевых компрессоров, воздушных винтов и т. п.), эти вопросы рассмотрены в работах [3, 9].

**Продольно-поперечный изгиб стержня на упругом основании.** Решение по методу начальных

параметров. Рассмотрим плоский изгиб стержня на простом упругом основании при действии продольных сил (рис. 45).

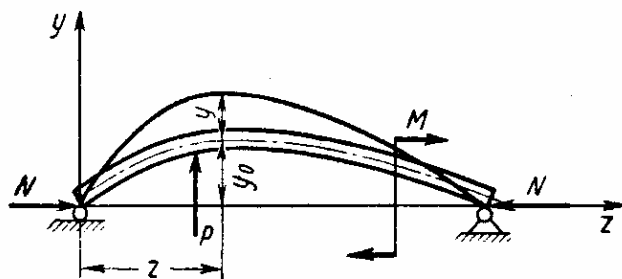


Рис. 44

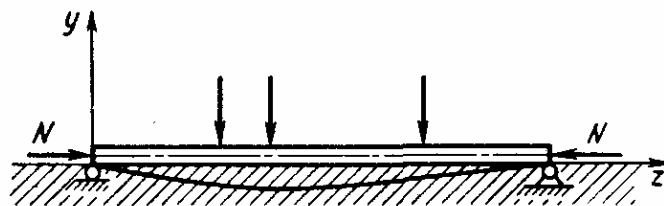


Рис. 45

Дифференциальное уравнение изгиба стержня [см. уравнение (47)]

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EJ_x \frac{d^2 y}{dz^2} \right) = q - ky + \frac{d}{dz} \left[ N \left( \frac{dy}{dz} + \frac{dy_0}{dz} \right) \right], \quad (156)$$

где  $k$  — коэффициент жесткости основания.

Для стержня постоянного сечения и постоянной по длине продольной силы дифференциальное уравнение изгиба

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + p_2 \frac{d^2 y}{dz^2} + p_4 y = f, \quad (157)$$

где

$$p_2 = -\frac{N}{EJ_x}, \quad p_4 = \frac{k}{EJ_x}, \quad f = \frac{1}{EJ_x} \left( q + N \frac{d^2 y_0}{dz^2} \right).$$

Решение уравнения (157) в нормальных фундаментальных функциях имеет вид

$$y(z) = y(0) Y_0(z) + y'(0) Y_1(z) + \frac{d^2 y}{dz^2}(0) Y_2(z) + \frac{d^3 y}{dz^3}(0) Y_3(z) + \int_0^z f(s) Y_3(z-s) ds, \quad (158)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Y_0(z) &= -\frac{1}{\mu^2 - \nu^2} (\nu^2 \operatorname{ch} \mu z - \mu^2 \operatorname{ch} \nu z); \\ Y_1(z) &= -\frac{1}{\mu^2 - \nu^2} \left( \frac{\nu^2}{\mu} \operatorname{sh} \mu z - \frac{\mu^2}{\nu} \operatorname{sh} \nu z \right); \\ Y_2(z) &= \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} (\operatorname{ch} \mu z - \operatorname{ch} \nu z); \\ Y_3(z) &= \frac{1}{\mu^3 - \nu^3} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{sh} \mu z - \frac{1}{\nu} \operatorname{sh} \nu z \right), \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sqrt{-\frac{1}{2} p_2 + \sqrt{\frac{1}{4} p_2^2 - p_4}}; \\ \nu &= \sqrt{-\frac{1}{2} p_2 - \sqrt{\frac{1}{4} p_2^2 - p_4}}. \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

Производные функций

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} Y_0(z) &= -p_4 Y_3(z); \\ \frac{d}{dz} Y_1(z) &= Y_0(z); \\ \frac{d}{dz} Y_2(z) &= Y_1(z) - p_2 Y_3(z); \\ \frac{d}{dz} Y_3(z) &= Y_2(z). \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

Случай жесткого основания или небольших осевых усилий. В этом случае

$$\frac{1}{4} \frac{N^2}{EJ_x} < k. \quad (162)$$

Так как при этом условии  $\frac{1}{2} p_2^2 < p_4$ , то значения  $\mu$  и  $\nu$  получаются комплексными. Равенства (159) удобно представить в форме

$$\left. \begin{aligned} Y_0(z) &= \frac{1}{2\beta\gamma} [2\beta\gamma \operatorname{ch} \beta z \cos \gamma z - (\beta^2 - \gamma^2) \operatorname{sh} \beta z \sin \gamma z]; \\ Y_1(z) &= \frac{1}{2\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)} [\beta(3\gamma^2 - \beta^2) \operatorname{ch} \beta z \sin \gamma z - \\ &\quad - \gamma(\gamma^2 - 3\beta^2) \operatorname{sh} \beta z \cos \gamma z]; \\ Y_2(z) &= \frac{1}{2\beta\gamma} \operatorname{sh} \beta z \sin \gamma z; \\ Y_3(z) &= \frac{1}{2\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)} [\beta \operatorname{ch} \beta z \sin \gamma z - \gamma \operatorname{sh} \beta z \cos \gamma z], \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{p_4} - \frac{1}{4} p_2}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{p_4} + \frac{1}{4} p_2}, \quad (164)$$

причем

$$\mu = \beta + i\gamma; \quad \nu = \beta - i\gamma. \quad (165)$$

При отсутствии осевых сил

$$\beta = \gamma = \sqrt[4]{\frac{p_4}{4}} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ_x}}$$

и равенства (163) выражают функции А. Н. Крылова.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М., ГИТТЛ, 1959.
2. Биргер И. А. Неравномерно нагретые стержни с перемещенными параметрами упругости. Сб. «Расчеты на прочность», № 7, М., Машгиз, 1961.
3. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956.
4. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. М., «Машиностроение», 1965.
5. Дукельский А. И. Подвесные канатные дороги и кабельные краны. М., Машгиз, 1951.
6. Качурин В. К. Гибкие нити с малыми стрелками. М., ГИТТЛ, 1956.
7. Короткин Я. И., Локшин А. З., Сиверс Н. Л. Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем. М., Машгиз, 1953.
8. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Л., изд-во «Морской транспорт», 1947.
9. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Под ред. С. Д. Пономарева. Т. I, II и III. М., Машгиз, 1956, 1959.
10. Рабинович И. М. Курс строительной механики, стержневых систем. М., Госстройиздат, 1954.
11. Справочник проектировщика. Под ред. А. А. Уманского. М., Госстройиздат, 1960.
12. Тимошенко С. П. Статика сооружений. М., Госстройиздат, 1934.
13. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. ГИТТЛ, 1946.
14. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1963.

## Глава 10

# КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругий призматический стержень с поперечным сечением произвольной формы. Пусть боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, а к торцам его приложены силы, статически эквивалентные крутящим моментам  $M$ .

Поместим начало прямоугольной системы координат в некоторой произвольной точке торцового сечения стержня и направим ось  $z$

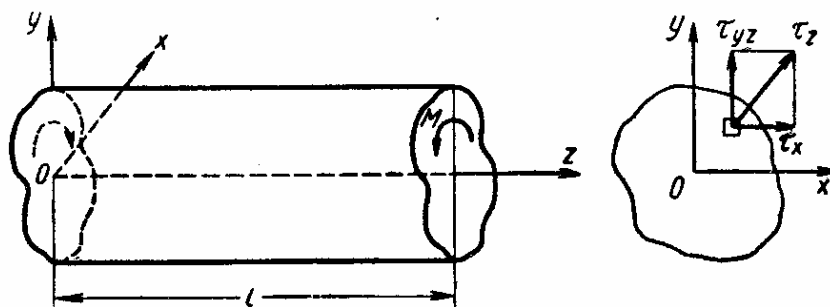


Рис. 1

параллельно образующей боковой поверхности стержня (рис. 1). Тогда граничные условия будут иметь вид:

на боковой поверхности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos \hat{n}x + \tau_{xy} \cos \hat{n}y &= 0; \\ \tau_{xy} \cos \hat{n}x + \sigma_y \cos \hat{n}y &= 0; \\ \tau_{xz} \cos \hat{n}x + \tau_{yz} \cos \hat{n}y &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

на торцах стержня ( $z = 0$  и  $z = l$ )

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega &= 0, \quad \iint_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = 0, \quad \iint_{\Omega} \sigma_z d\Omega = 0; \\ \iint_{\Omega} x\sigma_z d\Omega &= 0; \quad \iint_{\Omega} y\sigma_z d\Omega = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и

$$\iint_{\Omega} (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) d\Omega = M, \quad (3)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к боковой поверхности стержня;  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  — нормальные напряжения;  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  — касательные напряжения;  $\Omega$  — площадь поперечного сечения.

Задачу решаем непосредственным определением напряжений, пользуясь полуобратным методом Сен-Венана. Положим

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad (4)$$

определим остальные компоненты напряжений так, чтобы удовлетворить всем уравнениям теории упругости.

Согласно равенства (4) дифференциальные уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

примут вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

а дифференциальные уравнения совместности деформаций, выраженные в напряжениях

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 0; \quad \Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0; \\ \Delta \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= 0; \quad \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} = 0; \\ \Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= 0; \quad \Delta \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона, а  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа, приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} &= 0; \\ \Delta \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} &= 0; \quad \Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

так как на основании равенства (4)  $S = \sigma_z$ , а  $\Delta \sigma_x = \Delta \sigma_y = \Delta \tau_{xy} = 0$ . Из первых двух уравнений равновесия (6) следует, что напряжения  $\tau_{xz}$

и  $\tau_{yz}$  не зависят от координаты  $z$ , т. е. эти напряжения одинаковы во всех сечениях стержня.

Из уравнений совместности (8) непосредственно следует, что  $\sigma_z$  есть функция координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  вида

$$\sigma_z = Azy + Bzx + Dx + Ey + Fz + H. \quad (9)$$

Подставляя выражение (9) в торцовые условия (2), для нахождения постоянных получаем однородную систему шести линейных уравнений, из которой следует, что  $A = B = D = E = F = H = 0$ , т. е.  $\sigma_z = 0$  во всех поперечных сечениях стержня.

Тогда уравнения равновесия (6) и уравнения совместности (8) примут вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (10)$$

$$\Delta \tau_{xz} = 0; \quad \Delta \tau_{yz} = 0. \quad (11)$$

Следовательно, принимая, что три составляющие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  равны нулю, остается определить распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  по поперечному сечению скручиваемого стержня так, чтобы они удовлетворяли исходным уравнениям (10) и (11) и граничным условиям (1)–(3), так как при этом нормальные напряжения  $\sigma_z$  во всех сечениях стержня тождественно равны нулю.

Продифференцировав уравнение (10) по  $x$  и вычтя из него первое из уравнений (11), получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0 \quad (12)$$

Аналогичным способом с помощью второго из уравнений (11) найдем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0. \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = C, \quad (14)$$

где  $C$  — постоянная, подлежащая определению в дальнейшем.

Заменяя в левой части уравнения (14) напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  их выражениями через перемещения, т. е.

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (15)$$

где  $G$  — модуль сдвига материала стержня, а  $u$ ,  $v$  и  $w$  — компоненты смещения точек стержня по направлению координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим

$$C = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = G \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (16)$$

Пользуясь выражением для компонента элементарного вращения относительно оси  $z$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (17)$$

из выражения (16) получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2G\theta, \quad (18)$$

где  $\theta = \frac{\partial \omega_z}{\partial z}$  — угол закручивания на единицу длины волокон стержня, параллельных оси стержня (часто этот угол называют круткой).

Следовательно, решение задачи о кручении призматического стержня сводится к интегрированию уравнений (10) и (18).

### ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Общее решение основных уравнений (10) и (18) ищем в форме

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (19)$$

где  $U(x, y)$  — некоторая функция от переменных  $x$  и  $y$ . Эту функцию называют *функцией напряжений при кручении* или *функцией Прандтля*. При таком выборе общего решения (19) уравнение равновесия (10) удовлетворяется тождественно. Подставив выражения (19) в уравнение совместности (18), получим следующее уравнение для определения функции напряжений  $U(x, y)$ :

$$\Delta U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2. \quad (20)$$

Следовательно, функция напряжений  $U(x, y)$  в области поперечного сечения скручиваемого стержня должна удовлетворять уравнению Пуассона (20).

Рассмотрим граничные условия на боковой поверхности стержня. Первые два условия из уравнений (1) на основании равенства (4) удовлетворяются тождественно. Подставив выражения для напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  из равенств (19) в третье условие (1), получим

$$\frac{\partial U}{\partial y} \cos \hat{n}x - \frac{\partial U}{\partial x} \cos \hat{n}y = 0. \quad (21)$$

Заметив (рис. 2), что

$$\left. \begin{aligned} \cos \hat{n}x &= \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds} = \cos \hat{s}y; \\ \cos \hat{n}y &= \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds} = -\cos \hat{s}x, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

запишем условие (21) на контуре в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{\partial U}{\partial s} = 0. \quad (23)$$

Отсюда следует, что функция напряжений  $U(x, y)$  на контуре поперечного сечения стержня должна принимать постоянное значение.

В случае, когда поперечное сечение стержня представляет собой односвязную область, это постоянное значение можно выбрать произвольно. Для сплошных стержней величину этой постоянной принимают равной нулю, т. е.

$$U = 0 \text{ на } L_0, \quad (24)$$

где  $L_0$  — контур поперечного сечения сплошного стержня.

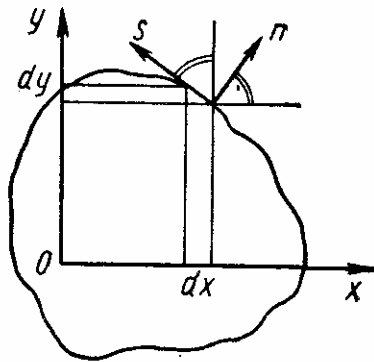


Рис. 2

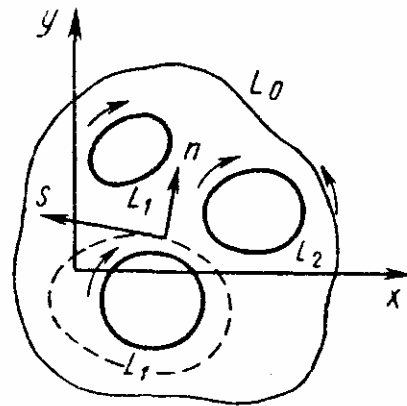


Рис. 3

Пусть поперечное сечение стержня представляет собой многосвязную область (рис. 3), т. е. контур  $L^*$ , ограничивающий поперечное сечение стержня, будет состоять из нескольких замкнутых контуров  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , охваченных внешним контуром  $L_0$ . В этом случае функция напряжений  $U(x, y)$  на контурах  $L_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) поперечного сечения будет иметь постоянные, но, вообще говоря, различные значения

$$U = U_i \text{ на } L_i \ (i = 0, 1, \dots, n), \quad (25)$$

где  $U_i$  — значение функции напряжений  $U(x, y)$  на контуре  $L_i$ .

Из всех этих постоянных  $U_i$  можно выбрать произвольно только одну, например  $U_0 = 0$ , остальные следует определить из соотношений

$$\oint_{L_i} \frac{\partial U}{\partial n} ds = -2\Omega_i \ (i = 1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

которые должны выполняться для каждого из внутренних контуров  $L_i$ . Здесь  $\Omega_i$  — площадь области, ограниченной контуром  $L_i$ . Соотношения (26) представляют собой аналитическое выражение теоремы Р. Бредта о циркуляции касательного напряжения при кручении, вывод которой см. на стр. 245.



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

На основании равенства нулю напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{xy}$ , формул (19) и из зависимостей закона Гука имеем

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = -\theta \frac{\partial U}{\partial x}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{zx} = \theta \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Интегрируя первые два уравнения (27), найдем

$$u = u(y, z), \quad v = v(x, z), \quad (28)$$

т. е. перемещение  $u$  не зависит от  $x$ , а перемещение  $v$  — от  $y$ . На основании четвертого уравнения (27) и (28) имеем

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(z) - f'(z) y; \\ v &= v_0(z) + f'(z) x, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где  $u_0(z)$ ,  $v_0(z)$  и  $f(z)$  — произвольные функции от  $z$ , подлежащие определению в дальнейшем. Подставив значения (29) в пятое и шестое уравнения (27), получим

$$\left. \begin{aligned} u'_0(z) - f'(z) y &= \theta \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v'_0(z) + f'(z) x &= -\theta \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Правые части этих уравнений не зависят от  $z$ , так как перемещение  $w$ , согласно третьему уравнению (27), и функция напряжений  $U(x, y)$  не зависят от  $z$ . Следовательно, и левые части этих уравнений не должны зависеть от  $z$ , т. е. выполняются следующие равенства:

$$u'_0(z) = C_1; \quad v'_0(z) = C_2; \quad f'(z) = C_3, \quad (31)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем.

Интегрируя уравнения (31), имеем

$$\left. \begin{aligned} u_0(z) &= C_1 z + u_0; \\ v_0(z) &= C_2 z + v_0; \\ f(z) &= C_3 z + f_0, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где  $u_0$ ,  $v_0$  и  $f_0$  — постоянные интегрирования. Подставив значения величин из уравнений (32) в выражения (29), получим

$$\left. \begin{aligned} u(y, z) &= -C_3 y z + C_1 z - f_0 y + u_0; \\ v(x, z) &= C_3 x z + C_2 z + f_0 x + v_0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Для того чтобы устранить поступательные перемещения стержня по направлениям осей  $x$  и  $y$ , положим, что некоторая произвольная точка на его торце  $z = 0$  закреплена так, что в этой точке  $u = v = 0$ . Поместим начало координат в этой точке и потребуем, чтобы в ней выполнялись еще условия  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , устраняющие возможность вращения стержня как жесткого тела вокруг осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В этом случае

$$C_1 = C_2 = f_0 = u_0 = v_0 = 0 \quad (34)$$

и выражения (33) для перемещений  $u$  и  $v$  примут вид

$$u = -C_3 yz; \quad v = C_3 xz. \quad (35)$$

Но согласно формуле (17) и выражений (35)

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = C_3 = \theta, \quad (36)$$

т. е. выражения для перемещений  $u$  и  $v$  окончательно запишем так:

$$u = -\theta yz; \quad v = \theta xz. \quad (37)$$

Подставляя значения перемещений из формул (37) в выражения (15) и учитывая соотношения (19), получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta \left( y + \frac{\partial U}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta \left( x + \frac{\partial U}{\partial x} \right). \quad (38)$$

Умножив первое из уравнений (38) на  $dx$ , а второе на  $dy$ , сложив эти произведения и учитывая выражения (22), получим

$$\begin{aligned} dw &= \theta (y dx - x dy) + \theta \left( \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} \right) ds = \\ &= \theta (y dx - x dy) - \theta \frac{\partial U}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (39)$$

Интегрируя это выражение, можем определить перемещение  $w$ , которое будет зависеть только от координат  $x$  и  $y$ .

### ТЕОРЕМА БРЕДТА О ЦИРКУЛЯЦИИ КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Пусть  $L$  — замкнутая кривая, полностью лежащая в области поперечного сечения (односвязного или многосвязного) стержня (см. рис. 3).

Циркуляцией касательного напряжения называют криволинейный интеграл

$$I = \oint_L \tau_{sz} ds, \quad (40)$$

взятый по замкнутой кривой  $L$ . Здесь  $\tau_{sz}$  — составляющая тангенциального напряжения по направлению касательной к этой кривой

$$\tau_{sz} = \tau_{xz} \cos \hat{s}\hat{x} + \tau_{yz} \cos \hat{s}\hat{y}. \quad (41)$$

Воспользуясь соотношениями (19) и (22), получим

$$\tau_{sz} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial n}. \quad (42)$$

Подставляя значение  $\tau_{sz}$  из выражений (42) в формулу (40) и учитывая равенство (39), получим

$$I = -G\theta \oint_L \frac{\partial U}{\partial n} ds = G \oint_L dw + G\theta \oint_L (x dy - y dx). \quad (43)$$

Первый интеграл в правой части этого равенства в случае замкнутого контура  $L$  ввиду однозначности перемещения  $w$  обращается в нуль. Второй интеграл в правой части равняется удвоенной площади  $\Omega$ , ограниченной контуром  $L$ :

$$\oint_L (x dy - y dx) = 2 \iint_{\Omega} dx dy = 2\Omega. \quad (44)$$

Таким образом из выражений (37) следует

$$I = 2G\theta\Omega \quad \text{или} \quad \oint_L \frac{\partial U}{\partial n} ds = -2\Omega. \quad (45)$$

Формулы (45) представляют аналитическое выражение теоремы Р. Бредта о циркуляции касательного напряжения при кручении. Они справедливы и в случае, когда замкнутый контур  $L$  охватывает полости поперечного сечения стержня. В частности, интегралы в формулах (45) могут быть взяты по замкнутым контурам  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), являющимся границами области сечения стержня, так как перемещения  $u$  и  $v$  вместе со своими частными производными непрерывны вплоть до этих границ.

Теорему Р. Бредта можно сформулировать так: *для любого замкнутого контура, целиком лежащего в пределах поперечного сечения стержня, циркуляция касательного напряжения при кручении равна площади, ограниченной этим контуром, умноженной на  $2G\theta$ .*

Значение этой теоремы при определении функции напряжений  $U(x, y)$  заключается в следующем: для сплошных стержней теорема Бредта является лишь повторением того факта, что функция напряжений  $U(x, y)$  должна во всей области сечения стержня удовлетворять уравнению Пуассона (20) и граничному условию (24). Для стержней с многосвязным сечением теорема Бредта требует дополнительно, чтобы функция напряжений  $U(x, y)$  удовлетворяла еще условиям (26) или (45), которые обеспечивают однозначность осевых перемещений  $w$  в скручиваемом стержне.

## ЖЕСТКОСТЬ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Величина крутящего момента  $M$  не входит в основные зависимости теории кручения призматических стержней (19), (20) и (23), которыми определяется функция напряжений  $U(x, y)$ . Подставив выражения (19) в соотношение (3), для крутящего момента получим

$$M = -G\theta \iint_{\Omega} \left( x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} \right) d\Omega, \quad (46)$$

или, интегрируя это выражение по частям, будем иметь

$$M = 2G\theta \iint_{\Omega} U(x, y) d\Omega - G\theta \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (xU) + \frac{\partial}{\partial y} (yU) \right] d\Omega. \quad (47)$$

Произведем преобразование второго слагаемого в выражении (47) по формуле Грина—Остроградского

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega = \sum_{i=0}^{i=n} \oint_{L_i} [Q \cos \hat{n}x + P \cos \hat{n}y] ds, \quad (48)$$

где  $\Omega$  — площадь поперечного сечения стержня, являющаяся многосвязной областью, ограниченной контурами  $L_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ); интегрирование по контурам  $L_i$  проводят всегда так, что область  $\Omega$  остается слева (см. рис. 3);  $P$  и  $Q$  — функции непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области  $\Omega_i$  вплоть до ее границы.

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (xU) + \frac{\partial}{\partial y} (yU) \right] d\Omega = \\ & = - \sum_{i=1}^{i=n} U_i \oint_{L_i} (x dy - y dx) = -2 \sum_{i=1}^{i=n} U_i \Omega_i, \end{aligned} \quad (49)$$

при этом использованы значения функции напряжений  $U(x, y)$  на внешнем контуре  $L_0$  сечения, указанного в формуле (24), и интеграла (44).

Подставляя выражение (49) в формулу (47), получим

$$M = 2G\theta \iint_{\Omega} U(x, y) d\Omega + 2G\theta \sum_{i=1}^{i=n} U_i \Omega_i. \quad (50)$$

Если поперечное сечение стержня является односвязной областью, тогда вместо выражения (50) будем иметь

$$M = 2G\theta \iint_{\Omega} U(x, y) d\Omega. \quad (51)$$

В выражениях (50) и (51) интегралы от  $U(x, y)$  следует брать по всей площади поперечного сечения стержня, занятой материалом, а суммирование по  $i$  распространяется на все внутренние контуры  $L_i$ .

Формулы для крутящего момента  $M$  (50) и (51) можно представить также в виде

$$M = C\theta = \theta GJ_T, \quad (52)$$

где  $C$  — жесткость при кручении;  $J_T$  — геометрическая жесткость при кручении.

Для полых стержней с  $n$  полостями

$$C = GJ_T = 2G \left[ \int_{\Omega} U(x, y) d\Omega + \sum_{i=1}^{i=n} U_i \Omega_i \right]; \quad (53)$$

для сплошных стержней

$$C = 2G \int_{\Omega} U(x, y) d\Omega. \quad (54)$$

Следовательно, решение задачи о кручении призматических стержней при помощи функции напряжений  $U(x, y)$  сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона (20) при граничном условии (25) на контуре сечения, причем в случае многосвязного сечения требуется еще выполнение на каждом контуре сечения дополнительных условий (26), необходимых для определения постоянных значений функции напряжений  $U_i$  на внутренних контурах сечения  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), таких условий, которые обеспечивают однозначность осевых перемещений  $w(x, y)$  стержня.

### МАКСИМАЛЬНОЕ КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Обычно максимальное касательное напряжение в сечении стержня при кручении возникает на контуре сечения на средних участках длинных сторон профиля и в закруглениях у входящих углов. Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_T}, \quad (55)$$

где  $M$  — крутящий момент;  $W_T$  — момент сопротивления сечения кручению. Как геометрическая жесткость при кручении,  $W_T$  также зависит от формы и размеров поперечного сечения стержня. Значения  $W_T$  для некоторых профилей приведены в табл. 2.

### ФУНКЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Перемещение  $w(x, y)$  представлено Сен-Венаном в виде

$$w(x, y) = \theta \varphi(x, y). \quad (56)$$

Функцию  $\varphi(x, y)$  называют *функцией кручения Сен-Венана* или *функцией перемещения*.

Если пользоваться равенствами (37) и (56), то из выражений (15) получим

$$\tau_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right); \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right). \quad (57)$$

Подставляя эти выражения для напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  в уравнение равновесия (10), мы увидим, что оно удовлетворяется, если функция  $\varphi(x, y)$  в области сечения стержня является гармонической функцией, т. е.  $\Delta \varphi = 0$ . Уравнение же совместности в напряжениях (18) при условии (57) удовлетворяется тождественно.

Подставляя выражения (57) в третье из уравнений (1), получим

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \cos \widehat{nx} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \cos \widehat{ny} = 0 \quad \text{на } L, \quad (58)$$

где  $L$  — контур области сечения.

Учитывая соотношения (22) и заметив, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \widehat{nx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \widehat{ny} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (59)$$

соотношение (58) приведем к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = y \cos \widehat{nx} - x \cos \widehat{ny} \quad \text{на } L. \quad (60)$$

Следовательно, задача о кручении стержня сводится к определению гармонической в области сечения стержня функции, когда на контуре сечения задано значение нормальной производной этой функции.

Пользуясь выражениями (3), (52) и (57), для жесткости при кручении получим формулу

$$C = G \int \int_{\Omega} \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\Omega, \quad (61)$$

или

$$C = GJ_p + G \int \int_{\Omega} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\Omega, \quad (62)$$

где  $J_p = \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega$  — полярный момент инерции поперечного сечения стержня относительно центра кручения, совпадающего с центром тяжести сечения.

Если преобразовать второе слагаемое в выражении (62) по формулам Грина—Остроградского и Грина, тогда это выражение можно привести к виду

$$C = G \left\{ J_p - \int \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega \right\}. \quad (63)$$

Эта формула показывает, что жесткость **призматического** стержня удовлетворяет неравенству

$$C \leqslant GJ_p. \quad (64)$$

Знак равенства в соотношении (64) имеет место только для круга и кругового кольца, так как в этих случаях  $\varphi = \frac{\omega}{\theta} = 0$ . Отсюда следует, что из всех сплошных призматических стержней с одинаковым полярным моментом инерции ( $J_p = \text{const}$ ), стержень кругового сечения имеет наибольшую жесткость при кручении, а из всех полых стержней при  $J_p = \text{const}$  наибольшую жесткость при кручении имеет стержень кольцевого сечения.

Е. Николаи, представляя жесткость при кручении в виде

$$C = G \left\{ \frac{4J_x J_y}{J_p} - \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega \right\}, \quad (65)$$

где  $J_x = \iint_{\Omega} y^2 dx dy$ ;  $J_y = \iint_{\Omega} x^2 dx dy$ ;  $\Omega$  — область поперечного сечения стержня;  $f(x, y)$  — некоторая гармоническая функция, связанная с функцией кручения Сен-Венана соотношением

$$f(x, y) = \varphi(x, y) - \frac{J_x - J_y}{J_x + J_y} xy, \quad (66)$$

получил для жесткости при кручении следующую оценку:

$$C \leqslant \frac{4J_x J_y}{J_p} G, \quad (67)$$

так как  $C > 0$ .

В выражении (67) знак равенства, как это следует из зависимости (66), имеет место только для эллиптического сечения (когда  $f = 0$ ) при условии, что центр кручения совпадает с центром тяжести эллипса. В самом деле, для эллиптического сечения имеем известные формулы

$$J_x = \frac{\pi ab^3}{4}; \quad J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}; \quad J_p = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2);$$

$$C = \frac{4J_x J_y G}{J_p} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G. \quad (68)$$

Следовательно, из всех цилиндрических стержней с одинаковыми жесткостями при изгибе в главных плоскостях стержень эллиптического поперечного сечения имеет наибольшую жесткость при кручении.

Из соотношения (67) при  $J_y \leqslant \frac{J_x}{2}$  можно получить для жесткости при кручении следующую оценку:

$$C < 4GJ_y, \quad (69)$$

а при  $\frac{J_x}{2} \leq J_y < J_x$  для жесткости получим еще одну оценку

$$C < 2GJ_x. \quad (70)$$

### КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ВЕРШИНАХ ВЫСТУПАЮЩИХ И ВХОДЯЩИХ УГЛОВ КОНТУРА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим некоторую угловую точку на контуре поперечного сечения скручиваемого стержня. Пусть угол, составленный касательными к контуру в этой точке  $ON$  и  $OM$  равен  $\alpha$  (рис. 4). Поместим начало координат  $O$  в этой точке и воспользуемся полярной системой координат  $r, \varphi$ , причем угол  $\varphi$  будем отсчитывать от направления одной из касательных, например  $ON$ .

При  $\alpha < \pi$  угол выступающий, при  $\alpha > \pi$  — входящий.

Функция напряжений  $U(r, \varphi)$  в окрестности данной угловой точки контура должна удовлетворять уравнению Пуассона, которое в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2, \quad (71)$$

и граничным условиям

$$U(r, 0) = U(r, \alpha) = 0; \quad (72)$$

здесь касательные напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{z\varphi}$  определяются формулами

$$\tau_{rz} = G\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad \tau_{z\varphi} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (73)$$

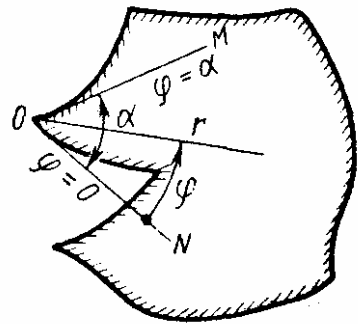


Рис. 4

Общее решение уравнения (71) можно представить в форме

$$\begin{aligned} U(r, \varphi) = & \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\cos(\alpha - 2\varphi)}{\cos \alpha} - 1 \right] + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{k\pi}{\alpha}} \left( A_k \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} + B_k \cos \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} r^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \left( C_k \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} + D_k \cos \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (74)$$

В выражении (74) первое слагаемое есть частное решение уравнения (71), а остальные члены в виде рядов являются гармоническими функциями и представляют собой общее решение соответствующего однородного уравнения. Здесь мы исключаем из рассмотрения случаи,

когда  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ .



Для того чтобы функция напряжений  $U(r, \varphi)$  в рассматриваемой области была ограниченной, в выражении (74) нужно положить

$$C_k = D_k = 0. \quad (75)$$

Чтобы удовлетворить еще и условиям (72), достаточно потребовать в выражении (74)

$$B_k = 0; \quad (76)$$

тогда выражение для функции напряжений  $U(r, \varphi)$  примет вид

$$U(r, \varphi) = \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\cos(\alpha - 2\varphi)}{\cos \alpha} - 1 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha}. \quad (77)$$

Для определения  $\tau_{rz}$ , согласно равенствам (73), получим выражение

$$\tau_{rz} = G\theta r \frac{\sin(\alpha - 2\varphi)}{\cos \alpha} + G\theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{\alpha} A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} \cos \frac{k\pi\varphi}{\alpha}. \quad (78)$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1. Пусть  $\alpha < \pi$  (выступающий угол). Тогда из формулы (78) следует, что  $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_{rz} = 0$ . Следовательно, в случае выступающих углов

в скручиваемом стержне касательные напряжения в вершине его всегда равны нулю.

2. Пусть  $\alpha > \pi$  (входящий угол). Из формулы (78) для этого случая следует, что  $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_{rz} = \infty$ . Следовательно, в случае входящих углов ка-

сательные напряжения в их вершинах бесконечно велики.

3. При  $\alpha = \pi$  (в окрестности данной точки контур сечения гладкий). Из формулы (78) получим, что  $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_{rz} = G\theta A_1 \cos \varphi$ , т. е. касательные

напряжения в таких точках всегда являются конечными.

Аналогичная картина имеет место и для компонента напряжения  $\tau_{\varphi z}$ , определяемого формулой

$$\tau_{\varphi z} = -G\theta r \left[ \frac{\cos(\alpha - 2\varphi)}{\cos \alpha} - 1 \right] - G\theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{\alpha} A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha}. \quad (79)$$

Результаты, полученные выше, свидетельствуют об очень высокой концентрации касательных напряжений в окрестностях вершин входящих углов контура поперечного сечения стержня при его кручении. Значения этих напряжений в самых вершинах этих углов получаются по формулам (78) и (79) бесконечно большими и тем самым они теряют физический смысл. Это объясняется тем, что при выводе этих формул предполагалось, что материал стержня является идеально-упругим и подчиняется закону Гука и при напряжениях, превышающих предел прочности материала  $\sigma_B$ .

Для определения величин местных напряжений в вершине входящего угла (в окрестности, где контур сечения имеет входящий излом или даже закругление, но весьма малого радиуса кривизны) методы теории упругости недостаточны, так как в этих случаях величины местных напряжений существенно будут зависеть от того, насколько деформации материала стержня в окрестности излома или закругления отклоняются от закона Гука и как изменяется в этом месте очертание самого контура сечения вследствие пластических деформаций.

### МЕМБРАННАЯ АНАЛОГИЯ

Часто решения различных задач механики приводятся к одинаковым по своей структуре математическим уравнениям.

Представим себе мембрану из однородного материала, натянутую на жесткий контур того же очертания, что и поперечное сечение скручиваемого стержня, и подвергнутую затем равномерному поперечному давлению интенсивности  $p$  кг/см<sup>2</sup>. Натяжение мембраны  $q$  кг/см на единицу длины контура будем считать настолько большим, что прогибы мембраны малы по сравнению с пролетом, т. е. мембрана имеет настолько малые прогибы  $w$ , что величины  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$  и  $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$  пренебрежимо малы по сравнению с единицей.

Составим уравнение равновесия элемента поверхности мембраны, спроектировав на вертикальную ось  $z$  все действующие на него силы (рис. 5):

$$-q \frac{\partial w}{\partial x} dy + q \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy - \\ - q \frac{\partial w}{\partial y} dx + q \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx + p dx dy = 0. \quad (80)$$

После приведения подобных членов и сокращения получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p}{q}, \quad (81)$$

причем прогибы мембраны на контуре в силу жесткости его будут равны нулю, т. е.

$$w = 0 \text{ на } L, \quad (82)$$

где  $L$  — контур мембраны.

Если положить

$$w(x, y) = \frac{p}{2n} U(x, y), \quad (83)$$

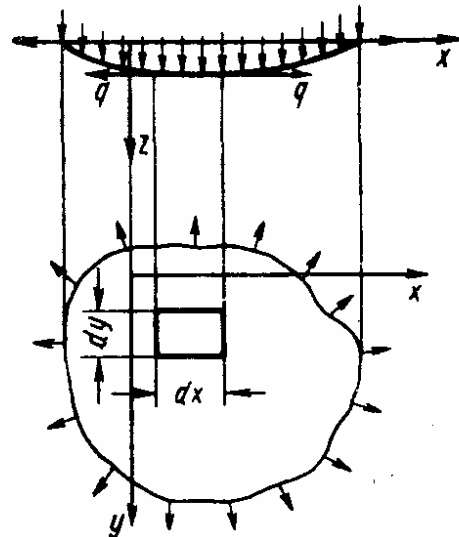


Рис. 5

то дифференциальное уравнение (81) и граничное условие (82) будут тождественно совпадать с дифференциальным уравнением (20) и граничным условием (24), определяющим функцию напряжений при кручении призматического стержня.

В этом и заключается аналогия, установленная Л. Прандтлем, между задачами о кручении призматических стержней и об изгибе мембраны.

Эту аналогию можно применить и к кручению полых призматических стержней. Для этого нужно теорему о циркуляции касательного напряжения (26) выразить, используя терминологию мембранной аналогии.

Согласно аналогии Прандтля, на соответствующих внутренних контурах мембраны должны выполняться условия

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_i = \text{const} \text{ на } L_i; \\ \oint_{L_i} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds &= -\frac{p}{q} \Omega_i, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

которые получаются из соотношения (26), если заменить в нем  $U(x, y)$  на  $\frac{2q}{p} \omega(x, y)$ .

В случае применения мембранной аналогии для стержней с многосвязным контуром поперечного сечения необходимо натянуть мембрану на контур, тождественный внешнему контуру сечения стержня. В областях мембраны, соответствующих внутренним контурам многосвязного сечения стержня, необходимо жестко прикрепить плоские невесомые диски; эти диски должны иметь возможность перемещаться только параллельно плоскости наружного контура мембраны. Вся эта сложная мембрана нагружается внешним давлением  $p$ .

### ДРУГИЕ АНАЛОГИИ

Существует несколько аналогий между задачами о кручении призматических стержней и задачами гидродинамики о движении жидкости в цилиндрических трубах.

Буссинеск установил, что дифференциальное уравнение и граничное условие, служащие для определения функции напряжений  $U(x, y)$  при кручении призматических стержней, совершенно одинаковы по виду с уравнением и граничным условием, которыми определяются скорости различных слоев вязкой жидкости при ламинарном движении жидкости по цилиндрической трубе того же поперечного сечения, что и скручиваемый стержень.

Томсон и Тэт указали, что если идеальная несжимаемая жидкость заключена в цилиндрическую трубу, вращающуюся вокруг своей оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то функция тока  $\Phi(x, y)$  для движения такой жидкости относительно осей  $x$  и  $y$ , жестко связанных с трубой (вместе с ней вращающихся), является гармонической функцией и удовлетворяет на стенках трубы такому же граничному условию, какое имеет место для гармонической функции  $\psi(x, y)$ , сопряженной с функцией кручения  $\phi(x, y)$  для призматического стержня такого же сечения, что и труба.

Гринхиль показал, что функция напряжений  $U(x, y)$  при кручении математически эквивалентна функции тока при циркуляции идеальной жидкости в рассматриваемой выше трубе с постоянной вращательной скоростью для каждой частицы жидкости.

Имеются и другие аналогии, связывающие задачу о кручении призматических стержней с некоторыми другими задачами механики, электростатики и пр.

## КРУЧЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим задачу о кручении призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением. Согласно мембранной аналогии функция напряжений  $U(x, y)$  для прямоугольного профиля будет симметричной функцией относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 6). Поэтому эту функцию достаточно определить только в четвертой части области сечения  $OABCO$ , потребовав при этом, чтобы нормальная производная функции напряжений на осях симметрии равнялась нулю:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \quad (85)$$

На остальной части контура области  $OABCO$  функция  $U(x, y)$  принимает значение

$$U\left(\frac{a}{2}, y\right) = U\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0. \quad (86)$$

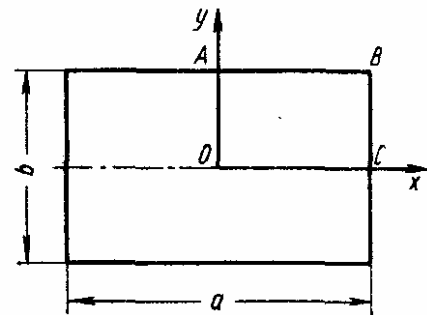


Рис. 6

Решая уравнение (20) методом разделения переменных, функцию напряжений  $U(x, y)$  представляем в виде

$$U(x, y) = A_0 - y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{b} + B_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{b} \right] \cos \frac{(2k-1)\pi y}{b}. \quad (87)$$

Легко видеть, что второе из условий (86) удовлетворяется тождественно выражением (87).

Удовлетворив первому из условий (85) и условиям (85), получим

$$A_0 = \frac{b^2}{4}, \quad B_k = 0, \quad A_k = \frac{8b^2}{\pi^3} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}}. \quad (88)$$

Подставляя эти значения в формулы (73), будем иметь

$$U(x, y) = \frac{b^2}{4} - y^2 + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{b}. \quad (89)$$

Пользуясь формулой (54) для определения жесткости при кручении сплошного стержня, которая для нашего случая принимает вид

$$C = 8G \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^{\frac{b}{2}} U(x, y) dy, \quad (90)$$

произведя интегрирования, получим

$$C = \frac{G}{3} ab^3 \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{a} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi a}{2b} \right] = Gab^3 k_1, \quad (91)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{a} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi a}{2b} \right]. \quad (92)$$

Для вычисления коэффициента  $k_1$  можно пользоваться также приближенной формулой

$$k_1 \approx \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{0,63}{\beta} + \frac{0,052}{\beta^5} \right), \quad (93)$$

где  $\beta = \frac{a}{b}$ .

Эта формула дается в курсах теории упругости и сопротивления материалов.

Некоторые значения коэффициента  $k_1$  в зависимости от отношения  $\frac{a}{b}$  приведены в табл. 1.

1. Значение коэффициентов  $k$ ,  $k_1$  и  $k_2$ 

$\frac{a}{b}$	$k$	$k_1$	$k_2$	$\frac{a}{b}$	$k$	$k_1$	$k_2$
1,0	0,6753	0,1406	0,2082	3,5	0,9930	0,2735	0,2754
1,2	0,7587	0,1661	0,2189	4,0	0,9970	0,2810	0,2818
1,4	0,8228	0,1869	0,2272	4,5	0,9985	0,2868	0,2872
1,5	0,8477	0,1960	0,2312	5,0	0,9993	0,2914	0,2916
1,6	0,8695	0,2037	0,2345	5,5	0,9997	0,2952	0,2953
1,8	0,9044	0,2174	0,2405	6,0	0,9999	0,2984	0,2984
2,0	0,9301	0,2287	0,2455	7,0	1,0	0,3035	0,3035
2,3	0,9564	0,2422	0,2532	8,0	1,0	0,3071	0,3071
2,5	0,9681	0,2494	0,2575	10,0	1,0	0,3124	0,3124
3,0	0,9855	0,2633	0,2670		1,0	0,3333	0,3333

Пользуясь обычными формулами (19) для определения напряжений и функцией напряжений (89), получим

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} = -G\theta \left\{ 2y + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \times \right. \\ \times \frac{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{b} \Bigg\}; \\ \tau_{yz} = G\theta \frac{8b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Наибольшее напряжение в прямоугольном профиле при кручении стержня возникает в точке  $x = 0$ ,  $y = b/2$  (если  $a > b$ ):

$$\begin{aligned} \left| \tau_{xz} \left( 0, \frac{b}{2} \right) \right| &= |\tau_{\max}| = \\ &= G\theta \left[ b - \frac{8b}{\pi^2} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2b}} \right] = G\theta b k, \end{aligned} \quad (95)$$

где

$$k = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2b}}. \quad (96)$$

Используя формулу

$$M = C\theta = G\theta k_1 ab^3, \quad (97)$$

можно формулу (95) привести к виду

$$|\tau_{\max}| = \frac{M}{k_2 ab^2}, \quad (98)$$

где

$$k_2 = \frac{k_1}{k}. \quad (99)$$

Для вычисления  $k_2$  можно пользоваться также и приближенной формулой

$$k_2 = \frac{1 + \beta^2}{0,35 + \beta^2} k_1. \quad (100)$$

Имея функцию напряжений  $U(x, y)$ , можно определить также деформацию сечений при кручении стержней, т. е. функцию Сен-Венана  $\varphi(x, y)$ .

Сопоставляя формулы (19) и (57), для напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x - \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (101)$$

Пользуясь теперь выражением (89), вычисляя производные  $\frac{\partial U}{\partial y}$  и  $\frac{\partial U}{\partial x}$  и по формулам (101) произведя интегрирования, для функции  $\varphi(x, y)$  найдем

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & -xy + \\ & + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{b} + C_1. \end{aligned} \quad (102)$$

Постоянную  $C_1$  определяют из условия закрепления одной из точек поперечного сечения стержня.

### КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО ВАЛА С ПОЛУКРУГЛОЙ КАНАВКОЙ

Рассмотрим задачу о кручении круглого вала с полукруглой канавкой (рис. 7). Удобно задачу решать в полярных координатах, с началом координат в центре полукруга выточки, а ось симметрии сечения принять за полярную ось.

Функция напряжений  $\Phi(\rho, \varphi)$  в области поперечного сечения вала удовлетворяет уравнению Пуассона (20). В полярных координатах это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -2. \quad (103)$$

На контуре области сечения функция напряжений принимает значение, равное нулю. Для нашего случая

$$\Phi(a, \varphi) = \Phi(2R \cos \varphi, \varphi) = 0. \quad (104)$$

Напряжения  $\tau_{\rho z}$  и  $\tau_{\varphi z}$  в полярных координатах выражаются через функцию напряжений  $\Phi(\rho, \varphi)$  соотношениями

$$\tau_{\rho z} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} G\theta, \quad \tau_{\varphi z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} G\theta. \quad (105)$$

Для этой задачи функцию напряжений  $\Phi(\rho, \varphi)$  К. Вебер представил в виде

$$\Phi(\rho, \varphi) = (2R \cos \varphi - \rho) f(\rho), \quad (106)$$

где  $f(\rho)$  — функция, подлежащая определению.

При таком выборе функции  $\Phi(\rho, \varphi)$  второе из условий (104) удовлетворяется автоматически.

Подставляя функцию  $\Phi(\rho, \varphi)$  из выражения (106) в уравнение (103), получим

$$2R \cos \varphi \left[ f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) - \frac{1}{\rho^2} f(\rho) \right] - \left[ \rho f''(\rho) + 3f'(\rho) + \frac{1}{\rho} f(\rho) \right] = -2. \quad (107)$$

Отсюда, потребовав одновременное выполнение уравнений

$$\left. \begin{aligned} f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) - \frac{1}{\rho^2} f(\rho) &= 0; \\ \rho f''(\rho) + 3f'(\rho) + \frac{1}{\rho} f(\rho) &= 2, \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

получим решение

$$f(\rho) = \frac{\rho}{2} + \frac{C}{\rho}. \quad (109)$$

Удовлетворив первому из условий (104), найдем

$$C = -\frac{a^2}{2}. \quad (110)$$

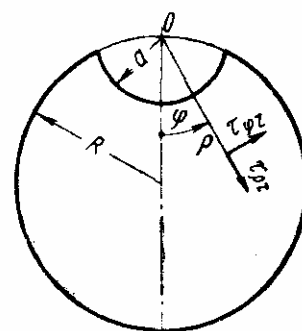


Рис. 7



Решение (106) примет вид

$$\Phi(\rho, \varphi) = (2R \cos \varphi - \rho) \left( \frac{\rho}{a} - \frac{a}{\rho} \right) \frac{a}{2}. \quad (111)$$

Для определения жесткости вала и напряжений по обычным формулам получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C &= 2G \int_{\Omega} \int \Phi(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \\ &= G \left[ \frac{\pi}{2} R^4 - \pi a^2 \left( R^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{8}{3\pi} aR \right) \right], \end{aligned} \quad (112)$$

$$\tau_{\rho z} = -R \sin \varphi \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) G\theta;$$

$$\tau_{\varphi z} = - \left[ R \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos \varphi - \rho \right] G\theta. \quad (113)$$

В точке  $\varphi = 0$ ,  $\rho = a$  напряжение  $\tau_{\varphi z}$  имеет наибольшее значение, определяемое выражением

$$|\tau_{\varphi z}|_{\max} = (2R - a) G\theta. \quad (114)$$

Перейдя в этом выражении к пределу при  $a \rightarrow 0$ , найдем

$$|\tau_{\varphi z}|_{\max} = 2RG\theta, \quad (115)$$

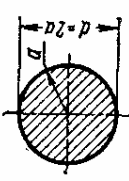
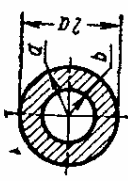
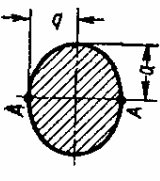
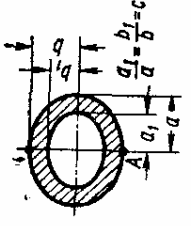
между тем, в поперечном сечении без выреза напряжение на контуре имеет значение  $RG\theta$ . Сопоставление этих результатов показывает, что наличие на круглом валу малой круглой продольной выточки приводит к удвоению максимального касательного напряжения.

### КРУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОКАТНЫХ И ПРОСТЫХ ПРОФИЛЕЙ


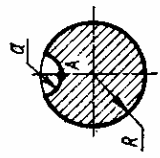
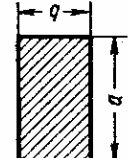
Приближенные расчетно-теоретические формулы, приведенные в табл. 2 для прокатных профилей, получены теоретическим путем на основе точных решений [1]. Эти расчетно-теоретические формулы справедливы для большого диапазона геометрических параметров профилей.

Отметим, что при точном решении задач по кручению прокатных профилей области сечений были взяты без закруглений около соединений стенок профиля с полками. Следовательно в табл. 2 в данных приближенных формулах для прокатных профилей не учтены влияния закруглений в областях соединений стенок профиля с полками. Однако имеющиеся закругления могут оказать влияние на величину жесткости прокатного профиля в сторону ее незначительного увеличения. Закругления в значительной мере ослабляют местную концентрацию напряжений у входящих углов профиля. Величина же максимального напряжения, приведенная в табл. 2 для данного профиля, не получит ощутимого изменения, если это напряжение возникает в точке в достаточном удалении от входящего угла.

2. Приближенные расчетно-теоретические формулы

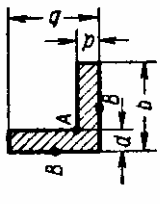
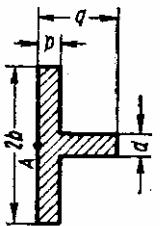
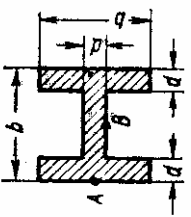
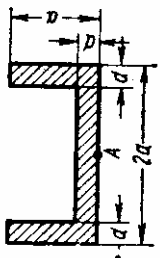
Форма поперечного сечения стержня	Геометрическая жесткость при кручении $J_T$ в $\text{см}^4$	Момент сопротивления кручению $W_T$ в $\text{см}^3$	$\tau_{\text{max}}$ в $\text{кг/см}^2$ и точка, в которой оно возникает
Круглое сечение 	$\frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{2} a^4$	$\frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{2} a^3$	$G\theta a$ в точках контура поперечного сечения
	$\frac{\pi}{2} (a^4 - b^4)$	$\frac{\pi}{2a} (a^4 - b^4)$	$G\theta a$ в точках наружного контура сечения
	$\pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi}{2} ab^3$	$2G\theta \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ в точках A сечения
	$\pi (1 - c^4) \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	$\frac{\pi}{2} (1 - c^4) ab^2$	$2G\theta \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ в точках A

Продолжение табл. 2

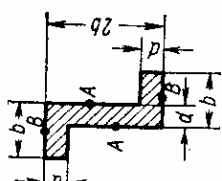
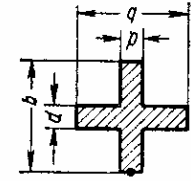
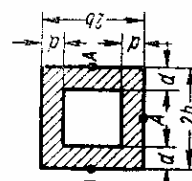
Форма поперечного сечения стержня	Геометрическая жесткость при кручении $J_T$ в $\text{см}^4$	Момент сопротивления кручению $W_T$ в $\text{см}^3$	$\tau_{\text{max}}$ в $\text{кг/см}^2$ и точка, в которой оно возникает
	$a^4 K(\alpha)$	—	$\tau_{\text{max}}$ возникает в точке $B$ и в некоторых других в зависимости от $\alpha$ различных точках на радиальных сторонах
	$\alpha$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
	$K(\alpha) = \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{\pi} - \frac{G^*}{\pi} \approx 0,0181$ $G^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} = 0,915965$	$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{\pi} \ln 2 = 0,0823$ $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} = 0,2976$	$\frac{\pi}{2} - \frac{7}{4\pi} - \frac{64}{9\pi} = 0,8781$ $\frac{3\pi}{2}$
	$\frac{\pi}{2} R^4 \left[ 1 - 2 \frac{a^2}{R^2} \left( 1 - \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{a}{R} + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R^2} \right) \right]$	$\frac{J_T}{2R - a}$	$G\theta(2R - a)$ в точке $A$
	$k_1 a b^3$	$k_2 a b^3$	$G\theta b k$ в середине длинных сторон

Значения коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k$  см. в табл. 1

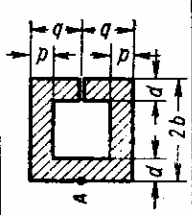
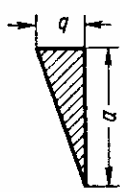
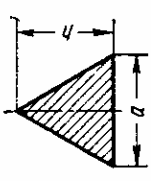
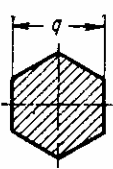
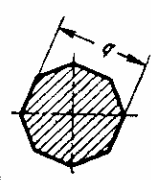
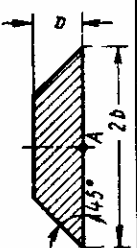
Продолжение табл. 2

Форма поперечного сечения стержня	Геометрическая жесткость при кручении $J_T$ в $\text{см}^4$	Момент сопротивления кручению $W_T$ в $\text{см}^3$	$\tau_{\text{max}}$ в $\text{кг/см}^2$ и точка, в которой оно возникает
	При $\frac{b}{d} \geq 2$ $\frac{2}{3} \left( 1 - 0,942 \frac{d}{b} \right) bd^3$	$\frac{J_T}{1,18d}$	$1,18G\theta d$ приблизительно на середине длинной стороны в точке B. Во входящем угле в точке A имеется концентрация напряжений
	При $\frac{b}{d} \geq 2$ $\left( 1 - 0,556 \frac{d}{b} \right) bd^3$	$\sim \frac{J_T}{1,13d}$	$\sim 1,13G\theta d$ в точке A. Во входящих углах профиля имеется концентрация напряжений
	При $\frac{b}{d} \geq 4$ $\left( 1 - 0,506 \frac{d}{b} \right) bd^3$	$\sim \frac{J_T}{0,267b}$	В точке A $\tau_{\text{max}} \approx 0,267G\theta b$ , в точке B $\tau_{\text{max}} \approx 0,26G\theta b$ . Во входящих углах профиля имеется концентрация напряжений
	При $\frac{a}{d} \geq 2$ $\frac{2}{3} \left( 2 - 1,081 \frac{d}{a} \right) ad^3$	$\sim \frac{J_T}{1,02d}$	$\sim 1,015G\theta d$ в точке A. Во входящих углах профиля имеется концентрация напряжений

Продолжение табл. 2

Форма поперечного сечения стержня	Геометрическая жесткость при кручении $J_T$ в $\text{см}^4$	Момент сопротивления кручению $W_T$ в $\text{см}^3$	$\tau_{\text{max}}$ в $\text{кг}/\text{см}^2$ и точка, в которой оно возникает														
	$\text{При } \frac{b}{d} \geq 2$ $\frac{2}{3} \left( 2 - 1,081 \frac{d}{b} \right) b d^3$	$\sim \frac{J_T}{1,04d}$	В точках A $\tau_{\text{max}} \approx 1,04 G \theta d$ в точках B $\tau_{\text{max}} \approx 1,0 G \theta d$ . Во входящих углах профиля имеется концентрация напряжений														
	$\frac{1}{3} \left( 2 - 0,46 \frac{a}{b} \right) b d^3 \text{ при } \frac{b}{d} \geq 3$ $\frac{1}{3} [2 + 0,4466\beta - 2,683\beta^2 + 0,1845\beta^3] b d^3$ <p>при <math>1,5 \leq \beta = \frac{b}{d} \leq 3</math></p>	$\sim \frac{J_T}{0,782d} \text{ при } \frac{b}{d} \geq 3$ $\sim \frac{J_T}{0,934d} \text{ при } 1,5 \leq \frac{b}{d} \leq 3$	В точках B $\tau_{\text{max}} \approx 0,782 G \theta d$ при $\frac{b}{d} \geq 3$ , $\tau_{\text{max}} \approx 0,934 G \theta d$ при $3 \geq \frac{b}{d} \geq 1,5$ . Во входящих углах профиля имеется концентрация напряжений														
	$8 [\beta^3 - 1,2704\beta^2 + 0,661\beta - 0,1043] d^4$ <p>при <math>\beta = \frac{b}{d} \geq 1,5</math></p> <table><tr><td><math>\beta</math></td><td>1,5</td><td>2,0</td><td>2,5</td></tr><tr><td><math>\gamma</math></td><td>1,154</td><td>1,681</td><td>2,194</td></tr></table>	$\beta$	1,5	2,0	2,5	$\gamma$	1,154	1,681	2,194	$\sim \frac{J_T}{(\gamma + 1) d}$ , при $\beta = 1,5$ погрешность 6,5%; при $\beta = 2$ погрешность 2%	( $\gamma + 1$ ) $G \theta d$ в точках A. Во входящих углах профиля имеется концентрация напряжений <table><tr><td>5,0</td><td>10,0</td><td>20,0</td></tr><tr><td>4,713</td><td>9,720</td><td>19,723</td></tr></table>	5,0	10,0	20,0	4,713	9,720	19,723
$\beta$	1,5	2,0	2,5														
$\gamma$	1,154	1,681	2,194														
5,0	10,0	20,0															
4,713	9,720	19,723															

Продолжение табл. 2

Форма поперечного сечения стержня	Геометрическая жесткость при кручении $J_T$ в $\text{см}^4$	Момент сопротивления кручению $W_T$ в $\text{см}^3$	$\tau_{\text{max}}$ в $\text{кг/см}^2$ и точка, в которой оно возникает
	$\frac{4}{3} \left( 2 \frac{b}{d} - 1 \right) d^4$ при $\frac{b}{d} \geq 3$	—	$\tau_{\text{max}}$ возникает в точке А. Во входящих углах профиля имеется концентрация напряжений
	$\left( \frac{1}{12} - 0,1144 \frac{b}{a+b} \right) ab^3$ при $a > b$	—	$\tau_{\text{max}}$ возникает на длинных сторонах в точках ближе к основанию (если $a \gg b$ )
	$\frac{ah^3}{30}$	$\frac{a^3}{20}$	$\frac{1}{2} G \theta h$ в середине сторон
	$0,115b^4$	$0,189b^3$	$\tau_{\text{max}}$ возникает в середине сторон
	$0,108b^4$	$0,185b^3$	$\tau_{\text{max}}$ возникает в середине сторон
	$\left( \frac{2}{3} \frac{b}{a} - 0,610 \right) a^4$ при $\frac{b}{a} \geq 2$	$J_T \sim \frac{1}{a}$	$\tau_{\text{max}} \leq G \theta a$ в точке А

Жесткость при кручении прокатных профилей приближенно вычисляют так же, как сумму жесткостей отдельных узких прямоугольников, составляющих прокатный профиль

$$C = G\alpha \sum \frac{bd^3}{3},$$

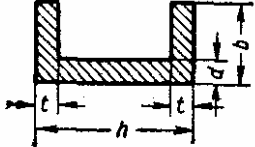
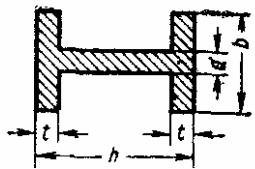
где  $b$  и  $d$  — высота (ширина) и толщина отдельных прямоугольников.

Влияние соединений отдельных прямоугольников учитывается в некотором поправочном коэффициенте  $\alpha$ . Значения этого коэффициента, зависящие от формы профиля, для различных профилей опытным путем установлены А. Фепплем, они приведены в табл. 3. Однако для определения коэффициента  $\alpha$  опыты были произведены лишь для тонкостенных стержней, и пользоваться приведенными в табл. 3 значениями  $\alpha$  для толстостенных стержней нельзя (при  $b/d \leq 2$  ошибка может оказаться более 20%).

3. Значения коэффициента  $\alpha$

Профиль	Коэффициент $\alpha$ по опытам А. Феппля		Коэффициент $\alpha$ по опытам ЦНИИПСа
	для различных образцов	средний	
Угловой . . . . .	0,86—1,10	0,99	1,0
Швеллер . . . . .	0,98—1,25	1,12	1,12
Тавр . . . . .	0,92—1,45	1,15	—
Двутавр . . . . .	1,16—1,44	1,30	1,20
Двутавр широкополочный (Грея и Пейнера) . . . . .	1,21—1,47	1,29	—
Зетовый . . . . .	1,13—1,20	—	—

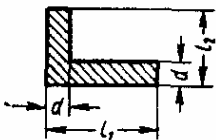
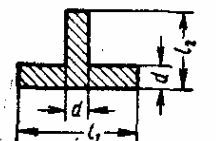
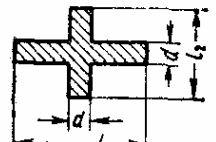
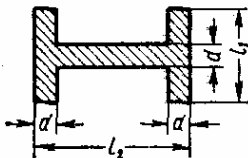
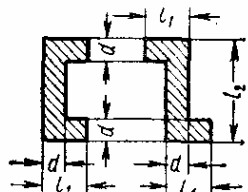
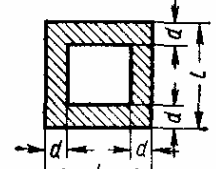
4. Значения коэффициента  $\alpha$  для швеллера и двутавра

Профиль	$J_T$ в см <sup>4</sup> по эксперименту	Размеры образца в мм				$J_T = \sum \frac{bd^3}{3}$	Поправочный коэффициент $\alpha$
		$h$	$b$	$d$	$t$		
Швеллер № 12 	4,51	119	52,9	5,5	10,0	4,08	1,10
Двутавр № 16 	12,0	159	89	7,4	10,5	8,73	1,37

Для некоторых прокатных профилей значения поправочного коэффициента  $\alpha$  установлены опытным путем в ЦНИИПСе. Эти значения приводятся в табл. 3 и 4.

Для определения жесткостей прокатных профилей даются и другие приближенные формулы (табл. 5), которые установлены опытно-теоретическим путем Вебером и Шмиденом. Эти формулы также применимы только для определения жесткостей тонкостенных профилей.

5. Приближенные формулы для определения жесткостей прокатных профилей

Профиль	Геометрическая жесткость $J_T$	
	по Веберу	по Шмидену
	$\frac{d^3}{3} (l_1 + l_2 - 1,6d)$	$\frac{d^3}{3} \sum_i l_i - 0,1444d^4$
	$\frac{d^3}{3} (l_1 + l_2 - 0,9d)$	—
	$\frac{d^3}{3} (l_1 + l_2 - 0,15d)$	—
	$\frac{d^3}{3} (2l_1 + l_2 - 1,2d)$	—
	$\frac{d^3}{3} (2l_1 + l_2 - 2,6d)$	$\frac{d^3}{3} \sum_i l_i - 0,0788d^4$
	$d (2l - d)^3$	—



### ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ

Для определения жесткости при кручении в инженерной практике иногда пользуются приближенной формулой

$$C \approx G \frac{F^4}{40J_p}, \quad (116)$$

где  $F$  — площадь сечения стержня;  $J_p$  — полярный момент инерции. Приближенная формула (116) дает хорошую точность для определения жесткости эллипса, круга.

Жесткость эллипса

$$C = G\pi \frac{a^3b^3}{a^2 + b^2}, \quad (117)$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса. Используя это выражение, нетрудно вывести формулу (116). Действительно, формулу (117) можно переписать в форме

$$C = G \frac{(\pi ab)^4}{\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) 4\pi^2} \approx G \frac{F^4}{40J_p}, \quad (118)$$

где

$$F = \pi ab; \quad J_p = \int_F r^2 dF = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2); \quad 4\pi^2 \approx 40. \quad (119)$$

Формулу (116) часто применяют для приближенного определения жесткости при кручении сплошных призматических стержней произвольного профиля. Следует отметить, что она во многих случаях может привести к неправильным результатам. Так, например, для секторного сечения приближенная формула Сен-Венана всегда дает завышенные значения для жесткости, за исключением случая весьма малых углов сектора  $\alpha$ . Для кругового сечения с радиальной трещиной, достигающей до центра круга ( $\alpha = 2\pi$ ), по приближенной формуле (116) получим  $C = 1,57Ga^4$ . Между тем точное значение жесткости в этом случае равно  $C = 0,878Ga^4$ , т. е. ошибка достигает 80%. На это впервые обратили внимание А. Феппл и Л. Феппл.

### КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТКРЫТЫМ ПРОФИЛЕМ

В современной технике, особенно в машиностроении и авиастроении, широко применяют тонкостенные конструкции. Основными элементами таких конструкций часто являются стержни с удлиненными или тонкостенными профилями. В последнем случае их называют *тонкостенными стержнями*, так как размеры их поперечного сечения в одном направлении являются малыми по сравнению с размерами в другом. Примерами тонкостенных стержней являются прокатные профили: угловой, швеллер, двутавр и др.

По форме поперечного сечения тонкостенные стержни делят на открытые (швеллер и др.) и закрытые (трубы с различной формой контура поперечного сечения). Открытые тонкостенные стержни имеют весьма малую жесткость при кручении по сравнению с изгибной жесткостью. Поэтому крутящие моменты, возникающие в элементах сооружений и деталях машин, даже очень малые по сравнению с изгибающими, могут вызвать в них большие деформации и опасные напряжения.

Поэтому развитию теории кручения стержней с удлиненными и тонкостенными профилями, а также разработке эффективных методов решения конкретных задач посвящено много исследований как теоретического, так и экспериментального характера. Главные из этих работ приведены в монографии [1]. Приближенные методы расчета на кручение стержней с удлиненными и тонкостенными профилями изложены в современных курсах по прикладной теории упругости и сопротивления материалов [6, 7, 9, 16, 17, 20, 23].

Решения многих конкретных задач получены при помощи мембранной аналогии Прандтля или гидродинамических аналогий. Решение задач кручения тонкостенных стержней при помощи аналогии Прандтля основано на допущении, что мембрана, натянутая на контур профиля стержня, составленного из длинных и узких полос, и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, провисает в каждой из этих полосок так же, как мембрана, натянутая на бесконечную длинную полосу той же ширины, что и рассматриваемая. При этом влияние закругления и ужесточения за счет соединения между собой отдельных полосок, составляющих данный профиль, учитывают введением в расчетные формулы поправочных коэффициентов, определяемых из опытов (см. стр. 266—267).

Очевидно, что такой метод расчета на кручение призматических стержней с удлиненными и тонкостенными профилями дает лишь приближенное решение задачи и является более или менее точным в зависимости от того, насколько узки или длинны те полоски, из которых составлен данный профиль.

Кроме того, при использовании метода мембранной аналогии для решения задач о кручении тонкостенных стержней с криволинейным профилем последний обычно рассматривают как совокупность прямоугольных. Следовательно, это решение не учитывает влияния кривизны средней линии скручиваемого профиля на распределение напряжений. В частности, оно не дает возможности определить величину концентрации напряжений во входящих углах скручиваемого профиля в зависимости от радиуса закругления.

Математическая сторона приближенного метода расчета призматических стержней с удлиненными и тонкостенными профилями на кручение такова.

Пусть поперечное сечение  $\Omega$  скручиваемого стержня представляет собой открытый криволинейный профиль, ограниченный контуром  $\Gamma$ . Отнесем сечение стержня к координатам  $s$  и  $n$ , где  $s$  — координата, отсчитываемая вдоль средней линии профиля, длина которой равняется  $l$ , а  $n$  — по нормали к ней (рис. 8). Ось  $z$  направлена параллельно образующим стержня.

Пусть контур профиля  $\Gamma$  относительно средней линии выражается уравнением

$$n = \pm \frac{1}{2} h(s), \quad (120)$$

т. е. профиль будет симметричным относительно его средней линии, причем  $h(0) = h(l) = 0$  и  $\max |h(s)| = h$ .

Как известно (см. стр. 242), задача кручения рассматриваемого стержня сводится к определению функции напряжений  $U(s, n)$ , удовлетворяющей внутри области  $\Omega$  поперечного сечения стержня уравнению Пуассона (20), которое в системе криволинейных координат  $s, n$  примет вид [8, 13]

$$\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + H \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{H} \right) \frac{\partial U}{\partial s} + H^2 \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + H \frac{\partial H}{\partial n} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right] = -2, \quad (121)$$

где  $H = 1 + \frac{n}{\rho}$  — коэффициент Ляме;  $\rho$  — радиус кривизны средней линии профиля.

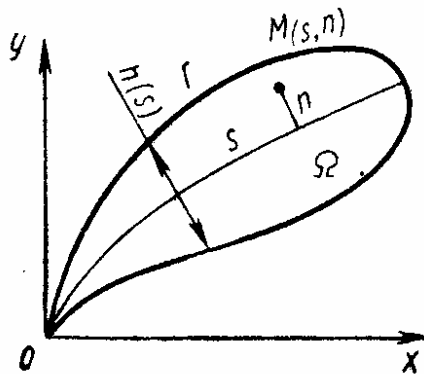


Рис. 8

На контуре, выраженном уравнением (120), функция напряжений удовлетворяет условию

$$U/\Gamma = 0. \quad (122)$$

Заметим, что в уравнении (121) фигурирует лишь один коэффициент Ляме  $H$ , остальные коэффициенты равны единице, так как длина дуги  $ds^*$  в выбранной системе координат  $(s, n, z)$  определяется равенством

$$ds^{*2} = \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-2} ds^2 + dn^2 + dz^2. \quad (123)$$

Касательные напряжения  $\tau_{sz}$  и  $\tau_{nz}$  через функцию напряжений  $U(s, n)$  выражаются следующими формулами [1]:

$$\tau_{sz} = G\theta \frac{\partial U}{\partial n}; \quad \tau_{nz} = -G\theta \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial s}, \quad (124)$$

а жесткость при кручении

$$C = 2G \int_0^l ds \int_{-\frac{h(s)}{2}}^{\frac{h(s)}{2}} U(s, n) \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right) dn, \quad (125)$$

где  $\theta$  — угол закручивания на единицу длины стержня;  $G$  — модуль сдвига.

В приближенном методе решается не точное уравнение (121) при граничном условии (122), а некоторое упрощенное, которое получается из точного, если, приняв во внимание удлиненность профиля  $(1 + \frac{h}{l} \approx 1)$ , пренебречь в нем, а также в формулах (124) и (125) производными по  $s$  и членами порядка  $\frac{n}{\rho}$  по сравнению с единицей. Сле-

довательно, в приближенном методе уравнение (121) заменится одномерным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = -2 \quad (126)$$

с граничными условиями

$$U = 0 \quad \text{при} \quad n = \pm \frac{h(s)}{2}. \quad (127)$$

Решение уравнения (126) при указанных граничных условиях имеет вид

$$U(s, n) = \frac{h^2(s)}{4} - n^2; \quad (128)$$

тогда, согласно формулам (124) и (125), получим для жесткости  $C$ , крутящего момента  $M$  и максимального касательного напряжения  $|\tau_{sz}|_{\max}$  следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} C &= 2G \int_0^l ds \int_{-\frac{h(s)}{2}}^{\frac{h(s)}{2}} \left[ \frac{h^2(s)}{4} - n^2 \right] dn = \frac{G}{3} \int_0^l h^3(s) ds; \\ M &= C\theta = \frac{\theta G}{3} \int_0^l h^3(s) ds; \quad |\tau_{zs}|_{\max} = G\theta \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right| = G\theta h = \\ &= \frac{3Mh}{\int_0^l h^3(s) ds}. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Эти приближенные формулы широко используют в инженерной практике при расчете на кручение тонкостенных стержней открытого профиля. Они впервые были получены при помощи мембранной аналогии Гриффитсом и Прескотом, а изложенным выше методом — Д. Ю. Пановым и Г. Ю. Джанелидзе. Эти формулы являются совершенно точными только для случая бесконечной полосы с постоянной шириной  $h = \text{const}$ . Во всех остальных случаях они дают лишь приближенное решение. При этом точность этого решения существенно зависит от того, насколько рассматриваемый профиль является удлиненным и искривленным, т. е. зависит от отношений  $\frac{h}{l}$  и  $\frac{h}{\rho}$ , которыми характеризуются степень тонкостенности скручиваемого профиля и искривленность (где  $h$  — максимальная толщина стенки профиля;  $\rho$  — наименьшее из значений радиуса кривизны средней линии профиля;  $l$  — длина средней линии).

Полученные формулы известны как формулы Гриффитса—Прескота для тонкостенных стержней с криволинейным открытым профилем.

Из вывода этих формул следует, что точность их есть  $1 + \frac{h}{\rho} \approx 1$  (см. работу [1] стр. 479—483).

Кроме того, при применении формул Гриффитса—Прескота к открытым профилям с криволинейной формой их средней линии мы фактически выправляем эти профили и рассматриваем их как прямолинейные.

Следовательно, формулы Гриффитса—Прескота (129) не учитывают влияние кривизны средней линии скручиваемого профиля на распределение напряжений в нем и на величину его жесткости.

### КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И ТРАПЕЦИДАЛЬНЫХ ПОЛОСОК

Анализ расчетно-теоретических формул (см. стр. 260) и вычисления показали, что с точностью, вполне достаточной для технических приложений, их можно применить при расчете стержней на кручение не только для тонкостенных, но и для стержней со средней толщиной стенок, а практически часто и для толстостенных.

Однако в современной технике зачастую применяют стержни с более сложными профилями, чем рассмотренные ранее, а также стержни,

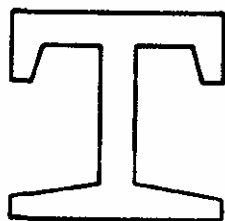


Рис. 9

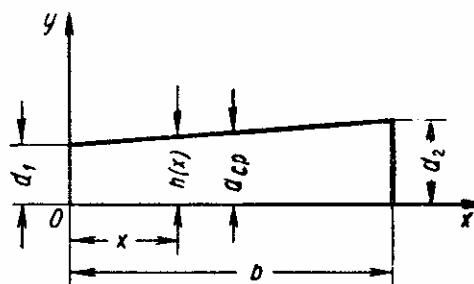


Рис. 10

составленные не только из прямоугольных, но и из трапецидальных полосок (рис. 9). В этих случаях нахождение точного решения и построение на основании его приближенных формул для расчета таких стержней на кручение связано с большими математическими трудностями. Поэтому при расчете на кручение тонкостенных стержней со сложными профилями, составленными из узких прямоугольных и трапецидальных полосок, приходится пользоваться приближенным способом, основанным на применении формул Гриффитса—Прескота.

Прежде всего рассмотрим кручение стержней, поперечные сечения которых имеют форму узкой трапецидальной полоски или вытянутого прямоугольника (рис. 10). Будем пользоваться прямоугольной системой координат  $xOy$ , как показано на рис. 10.

Тогда

$$h(x) = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b} x. \quad (130)$$

Подставляя это значение  $h(x)$  в формулу Гриффитса—Прескота (129), находим после интегрирования жесткость

$$C = \frac{G}{3} \int_0^b \left[ d_1 + \frac{(d_2 - d_1)x}{b} \right]^3 dx = \frac{Gb}{12} \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2 - d_1}. \quad (131)$$

Для максимального напряжения согласно формул (129) имеем

$$\tau_{\max} = |\tau_{xz}|_{\max} = G\theta d_2. \quad (132)$$

В частном случае при  $d_2 = d_1 = d$  (узкий прямоугольник) из выражений (131) и (132) получим

$$C = \frac{Gb d^3}{3}; \quad \tau_{\max} = G\theta d. \quad (133)$$

Эгими формулами широко пользуются в инженерной практике для приближенного расчета на кручение тонкостенных открытых профилей, составленных из узких прямоугольных и трапецеидальных полосок.

Оценим точность формулы (133) в зависимости от отношения  $\frac{d}{b}$  рассматриваемого прямоугольника ( $b$  — ширина прямоугольника,  $d$  — толщина). Для этого запишем выражение для жесткости  $C^*$  прямоугольника при его кручении в форме [см. формулу (91)]

$$C^* = G \left[ \frac{bd^3}{3} - \frac{64}{\pi^5} d^4 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} \right]; \quad (134)$$

тогда погрешность формулы (133)

$$\Delta = \frac{|C^* - C|}{C} = \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{d}{b} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} \quad (135)$$

или, заметив, что

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} < \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \approx 1,0045. \quad (136)$$

получим из соотношения (135)

$$\Delta \leq 0,630 \frac{d}{b}. \quad (137)$$

Для того чтобы погрешность формулы (133) не превосходила, например, 5% (такой процент погрешности обычно допускается в технических расчетах), необходимо

$$\frac{d}{b} \leq \frac{1}{12} \div \frac{1}{13}. \quad (138)$$

К этому заключению можно прийти, и непосредственно рассмотрев данные табл. 1. Из этой таблицы следует, что погрешность при применении формулы (133) будет не более 5%, если  $b \geq 10d$ . Из табл. 1

также видно, что при применении формулы (133) для определения максимального напряжения погрешность не будет превышать 5% уже при  $b \geq 3d$ .

Следовательно, с относительной погрешностью  $\Delta = 5\%$  формулы типа Гриффитса—Прескота можно применять лишь к удлиненным профилям, у которых максимальная толщина не превосходит 0,08—0,1 части их длины.

Следует отметить, что в некоторых курсах теории упругости ошибочно считают, что формулы типа Гриффитса—Прескота (129) при расчете стержней прямоугольного сечения на кручение практически дают высокую точность уже при отношении сторон  $b \geq 5d$ . Из соотношения (137) следует, что при таком отношении сторон прямоугольника погрешность, получаемая в результате применения формулы (129) или (133), достигает 13%.

Приближенный способ расчета на кручение открытых тонкостенных профилей, составленных из прямоугольных и трапециевидных полосок, заключается в следующем.

Допустим, что на контур профиля, показанного на рис. 9, натянута мембрана, равномерно нагруженная распределенной нагрузкой. Если отдельные полоски, из которых состоит этот профиль, достаточно узки (относительная толщина этих полосок должна удовлетворять неравенству  $\frac{d}{b} \leq \frac{1}{10} \div \frac{1}{12}$ ), то тогда провисание мембраны на большей

части длины в каждой из этих полосок будут таким же, как и у бесконечной полосы той же ширины. Напряжения в таком стержне вдали от мест сопряжения отдельных полосок будут близкими к напряжениям в соответствующих точках этих полосок, если рассматривать их как отдельные. В районах же сопряжения одной полоски с другой имеет место значительная концентрация напряжений. Однако это явление не может влиять на величину жесткости  $S$  скручиваемого стержня ввиду малости тех областей, в которых эти напряжения действуют, по сравнению со всей площадью профиля. Поэтому для каждой из этих полосок можно будет применить формулы Гриффитса—Прескота (129) или (131)—(133). Что касается определения концентрации напряжений в местах сопряжения этих полосок, то этот вопрос требует специального исследования и будет рассмотрен в конце главы.

Очевидно, что углы закручивания всех полосок, входящих в состав скручиваемого профиля, должны быть одинаковыми. Поэтому крутящий момент  $M_i$ , действующий в  $i$ -й полоске, будет пропорционален жесткости  $C_i$  этой полосы. Так как сумма всех таких моментов должна равняться моменту  $M$ , скручивающему профиль, то между этим моментом, углом закручивания  $\theta$  и жесткостями отдельных полосок  $C_i$  существует зависимость

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i = \theta \sum_{i=1}^{i=n} C_i, \quad (139)$$

откуда следует, что жесткость всего профиля  $S$  равна сумме жесткостей всех отдельных полосок, из которых составлен данный профиль:

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} C_i. \quad (140)$$

Для  $i$ -й трапецеидальной полоски (в частном случае для прямоугольной) согласно формуле (131) имеем

$$C_i = \frac{Gb_i}{12} \cdot \frac{d_{2,i}^4 - d_{1,i}^4}{d_{2,i} - d_{1,i}}, \quad (141)$$

где  $b_i$  — ширина  $i$ -й полоски;  $d_{2,i}$  и  $d_{1,i}$  — толщины  $i$ -й полоски соответственно в самом широком и самом узком местах.

Обычно в сортаменте проката дается средняя толщина полки  $d_{cp,i}$  и уклон ее  $k_i$ :

$$k_i = \frac{d_{2,i} - d_{1,i}}{b_i}. \quad (142)$$

Подставив в формулу (141) значения

$$d_{1,i} = d_{cp,i} - k_i \frac{b_i}{2}; \quad d_{2,i} = d_{cp,i} + k_i \frac{b_i}{2}, \quad (143)$$

использовав соотношения (140) и (141) и введя поправочный коэффициент  $\alpha$ , получим для определения жесткости  $C$  всего профиля следующую окончательную формулу:

$$C = \frac{1}{3} G\alpha \sum_{i=1}^{i=n} b_i d_{cp,i}^3 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_i b_i}{d_{cp,i}} \right)^2 \right]; \quad (144)$$

суммирование производится по всем полоскам, составляющим данный профиль, при этом для прямоугольных полосок принимается  $d_{cp,i} = d_i$ ,  $k_i = 0$ . Максимальное напряжение в  $i$ -й полоске определится формулой

$$|\tau_i|_{\max} = \frac{GM \{d_i\}_{\max}}{C} = \frac{3M \{d_i\}_{\max}}{\sum_{i=1}^{i=n} b_i d_{cp,i}^3 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{k_i b_i}{d_{cp,i}} \right)^2 \right]}. \quad (145)$$

Коэффициент  $\alpha$  определяют из опытов, он учитывает влияние закругления и ужесточения профиля, вызванного соединением отдельных полосок между собой. Числовые значения  $\alpha$  приведены в табл. 3.

При кручении призматических стержней узкое прямоугольное сечение является невыгодным профилем, так как его жесткость, как это следует из формулы (133), значительно меньше жесткости круглого сечения, имеющего такую же площадь, что и узкий прямоугольник (примерно в  $\frac{b}{2d}$  раз). Между тем, приняв гипотезу плоских сечений,

согласно выражения (63), и положив в этой формуле  $\varphi = \frac{\omega}{\theta} = 0$ , получим обратный результат. Отсюда ясно, насколько важен в задачах о кручении стержней учет деформации сечения стержня. Пренебрежение деформацией может привести к неправильным не только количественным, но и качественным результатам.



Из формулы (144) следует, что тонкостенные стержни открытого профиля, составленные из прямоугольных и трапециевидных полосок, столь же невыгодны при кручении, как и стержень с узким прямоугольным сечением, поскольку его жесткость значительно меньше жесткости круглого стержня с той же общей площадью поперечного сечения.

Однако было бы поспешным удовлетвориться лишь констатированием этого факта и считать вышеприведенное заключение окончательным. В действительности оказывается, что тонкостенные стержни открытого профиля обладают дополнительными ресурсами в отношении их сопротивления кручению. Как известно, две статически эквивалентные нагрузки, приложенные к торцам таких стержней, могут вызвать в них существенно различные деформации и напряженные состояния, причем эта разница будет иметь уже не местный характер. Поэтому если решить для тонкостенных стержней открытого профиля так называемую задачу о стесненном его кручении, т. е. положить, что деформации на торцах скручиваемого стержня устранены, то жесткость его  $S$  окажется гораздо большей, чем жесткость, вычисленная по формуле (144) при свободном кручении. На практике условия закрепления торцов скручиваемого стержня всегда бывают такими, что они в той или иной мере запрещают торцовые деформации.

Для нетонкостенных стержней как для сплошных, так и для полых это обстоятельство не играет существенной роли, так как для них в полной мере действует принцип Сен-Венана, и, как показывает ряд исследований, жесткости таких стержней при стесненном и свободном кручении оказываются почти одинаковыми. Что касается поведения тонкостенных стержней замкнутого профиля с деформируемым контуром, то, как показали В. В. Новожилов, М. К. Кожевникова и В. Л. Бидерман, влияние стеснения деформации торцов для таких стержней сказывается на величине их жесткости  $S$  совершенно незначительно.

Иначе обстоит дело в случае тонкостенных стержней открытого профиля. Запрещение деформаций на торцах таких стержней играет весьма существенную роль и оказывает решающее влияние на величину жесткости стержня при его кручении.

## КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБЧАТЫХ ПРОФИЛЕЙ

Тонкостенные стержни с замкнутыми или трубчатыми профилями делят на два основных класса: на стержни с двухсвязными профилями (рис. 11) и на стержни с многосвязными профилями (рис. 12). Рассмотрим сначала кручение стержней с двухсвязными профилями (рис. 11). Такие стержни обычно называют *трубчатыми* или просто *трубами*.

Приближенный способ расчета широко используемых в технических приложениях тонкостенных стержней с трубчатыми профилями основан на следующих двух гипотезах:

касательные напряжения по всей толщине стенки скручиваемого профиля направлены параллельно ее средней линии;

касательные напряжения постоянны по толщине стенки профиля.

Обе эти гипотезы следуют непосредственно из мембранной аналогии, если применить ее к стержням такого вида.

Рассмотрим кручение тонкостенной трубы с поперечным сечением произвольной формы с переменной толщиной стенок  $h(s)$  (рис. 13).

Линию, проведенную между наружным и внутренним контурами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  сечения на одинаковом расстоянии от них, назовем *средней линией профиля* и обозначим через  $\Gamma$ , а длину ее обозначим через  $l$ . Отнесем профиль скручиваемого стержня к координатам  $s$  и  $n$ , где  $s$  — координата, отсчитываемая вдоль дуги средней линии профиля  $\Gamma$  от некоторой ее точки, а  $n$  — координата, отсчитываемая по нормали к ней. Ось  $z$

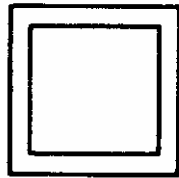
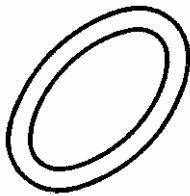


Рис. 11

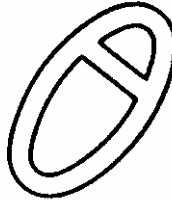


Рис. 12

направим параллельно образующим трубы. Очевидно, что профиль скручиваемого стержня будет полностью задан, если известны кривая  $\Gamma$  и толщина профиля  $h$  как функция переменной  $s$ , т. е.  $h = h(s)$ .

Согласно мембранной аналогии (см. стр. 253) для тонкостенных профилей направление наибольшего уклона в каждой точке мембраны примерно совпадает с уклоном мембраны в точках средней линии  $\Gamma$

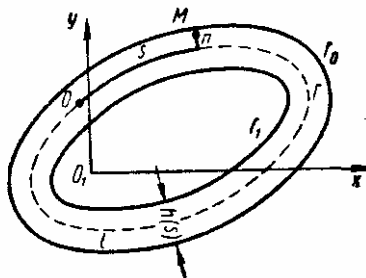


Рис. 13

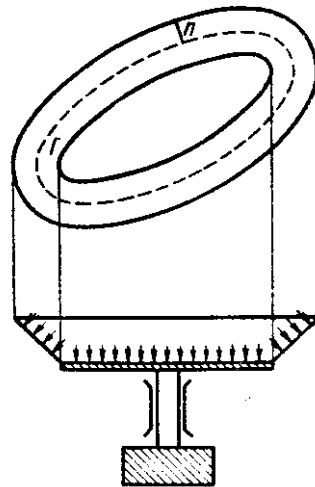


Рис. 14

профиля (рис. 14), причем этот уклон будет почти постоянным по толщине профиля.

Переводя этот результат мембранной аналогии на язык теории кручения, можно сказать, что результирующее касательное напряжение в каждой точке трубчатого профиля почти параллельно средней линии  $\Gamma$  профиля и по величине мало изменяется в пределах толщины этого профиля, а также, что при  $h(s) = \text{const}$  функция напряжений  $U$  будет зависеть только от координаты  $n$ .

Этот вывод подтверждает справедливость принятых выше гипотез о характере распределения касательных напряжений в тонкостенном замкнутом профиле и позволяет построить приближенную теорию кручения для таких стержней.

Действительно, поскольку изменением касательных напряжений в пределах толщины трубы можно пренебречь, постольку  $\tau(s, n) = \tau(s)$ . Что же касается характера зависимости  $\tau$  от  $s$ , то ее можно

установить, пользуясь граничными условиями для функции напряжений  $U$ , а именно  $U/\Gamma_0 = 0$  и  $U/\Gamma_1 = U_1$ , а также указанным выше фактом, что при  $h = \text{const}$   $U$  есть лишь функция координаты  $n$ , отсчитываемой вдоль нормали к средней линии  $\Gamma$  профиля.

Отсюда имеем

$$U(s, n) = \frac{U_1}{2} \left[ 1 - \frac{2n}{h(s)} \right], \quad (146)$$

где  $U_1$  — значение функции напряжений на внутреннем контуре сечения. Используя соотношения (146) и (126)

$$\tau_{sz} = G\theta \frac{\partial U}{\partial n}; \quad \tau_{nz} = -G\theta \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial s}, \quad (147)$$

получим для компонентов напряжений  $|\tau_{sz}|$  и  $|\tau_{nz}|$  с точностью до членов порядка  $\frac{n}{\rho}$  следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} |\tau_{sz}| &= G\theta \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right| = \frac{G\theta U_1}{h(s)}; \\ |\tau_{nz}| &= G\theta \left| \frac{\partial U}{\partial s} \right| = G\theta U_1 \frac{|nh'(s)|}{h^2(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Из соотношений (148) следует, что граничные условия задачи, выражающие, что поверхность скручиваемого стержня свободна от напряжений, не выполняются точно, так как в общем случае  $\tau_{nz}(s, \pm \frac{h(s)}{2}) \neq 0$ . Эти условия будут удовлетворены тождественно только в том случае, если  $h = h(s) = \text{const}$ . Во всех остальных случаях  $[h(s) \neq \text{const}]$  поверхностные условия будут удовлетворены приближенно, и, как нетрудно показать, ошибка, допущенная при этом, будет иметь порядок величины  $\max \frac{|h(s)|}{l}$ . Действительно, на поверхности скручиваемого стержня  $\left( n = \pm \frac{h(s)}{2} \right)$  компонент касательного напряжения  $\tau_{nz}(s)$  согласно формулам (148) выражается так:

$$|\tau_{nz}(s)| = G\theta U_1 \frac{|h'(s)|}{2h(s)}. \quad (149)$$

Заметим, что  $h(s)$  есть периодическая функция, так как при любом  $s$  имеем  $h(s+l) = h(s)$ . Допустим, далее, что функцию  $h(s)$  можно аппроксимировать тригонометрическим полиномом  $n$ -го порядка относительно  $s$ . Тогда, согласно теореме С. Н. Бернштейна [11], имеем

$$|h'(s)| \leq \frac{nh}{l}, \quad (150)$$

где  $h = \max |h(s)|$ ;  $l$  — длина средней линии трубчатого профиля. Используя формулы (148), (149) и неравенство (150), получим

$$|\tau_{nz}| \leq |\tau_{sz}| \cdot 0 \left( \frac{h}{l} \right), \quad (151)$$

где  $0 \left( \frac{h}{l} \right)$  — множитель порядка  $\frac{h}{l}$ .

Следовательно, если толщина трубчатого профиля мала по сравнению с длиной его средней линии  $\left( \frac{h}{l} \ll 1 \right)$ , касательное напряжение  $\tau_{nz}$  в таких профилях значительно меньше напряжения  $\tau_{sz}$  и с точностью до малых величин порядка  $\frac{h}{l}$  можно им пренебречь. Отсюда следует, что результирующее касательное напряжение  $\tau(s)$  в замкнутых профилях будет

$$\tau(s) = + \sqrt{\tau_{sz}^2 + \tau_{nz}^2} \approx \tau_{sz} = \frac{G\theta U_1}{h(s)}. \quad (152)$$

Для определения постоянного значения  $U_1$  воспользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения при кручении (см. стр. 245), которая в данном случае принимает вид

$$U_1 \oint_{\Gamma} \frac{ds}{h(s)} = 2\Omega, \quad (153)$$

где  $\Omega$  — площадь области, ограниченной средней линией  $\Gamma$  трубчатого профиля (см. рис. 13). На основании равенства (153) и формулы (152) находим

$$U_1 = \frac{2\Omega}{\oint_{\Gamma} \frac{ds}{h(s)}}; \quad (154)$$

$$\tau(s) = \tau_{sz}(s) = \frac{2G\theta\Omega}{h(s) \oint_{\Gamma} \frac{ds}{h(s)}}. \quad (155)$$

Далее, используя выражение (53), получим для жесткости  $C$  при кручении

$$C = \frac{M}{\theta} = 2GU_1 \left\{ \Omega + \int_0^l ds \int_{-\frac{h(s)}{2}}^{\frac{h(s)}{2}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{n}{h(s)} \right] \left( 1 + \frac{n}{\rho} \right) dn \right\}, \quad (156)$$

или, ограничившись после интегрирования точностью до членов порядка  $\frac{h}{R_0}$ , где  $h$  — толщина профиля, а  $R_0$  — наименьший из величин радиусов кривизны  $\rho$  средней линии профиля  $\Gamma$  или длины  $l$  средней линии, получим

$$\begin{aligned} C = \frac{M}{\theta} &= 2GU_1 \left[ \Omega + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} h(s) ds \right] = \\ &= 2GU_1 \Omega \left[ 1 + o\left(\frac{h}{l}\right) \right] \approx 2GU_1 \Omega, \end{aligned} \quad (157)$$

где  $o\left(\frac{h}{l}\right)$  — члены порядка  $\frac{h}{l}$ . Заметим, что под  $\Omega$  можно подразумевать как площадь, ограниченную средней линией  $\Gamma$  профиля, так и площадь  $\Omega_1$ , ограниченную внутренним контуром  $\Gamma_1$  профиля, так как погрешность, получаемая в результате такой замены, имеет такой же порядок  $\left(1 + \frac{h}{l} \approx 1\right)$ , как и погрешность приближенной теории.

Подставив в выражение (157) значение  $U_1$  из соотношения (154), получим окончательную формулу для определения жесткости  $C$  при кручении трубчатого профиля с произвольным законом изменения его толщины  $h(s)$  (формула Бредта):

$$C = \frac{M}{\theta} = G \frac{4\Omega^2}{\oint_{\Gamma} \frac{ds}{h(s)}}. \quad (158)$$

Пользуясь этим выражением, можно формуле (155) для результирующего напряжения  $\tau(s)$  придать следующий вид:

$$\tau(s) = \tau_{sz}(s) = \frac{M}{2\Omega h(s)}. \quad (159)$$

Формулами (158) и (159) полностью решается задача о кручении трубчатых стержней, поскольку эти формулы определяют напряжения в поперечных сечениях и угол закручивания при действии крутящего момента  $M$ . Пользуясь этими формулами, нетрудно показать, что из всех тонкостенных трубчатых профилей, имеющих одинаковую толщину стенок  $h$  и одинаковую длину средней линии  $l$  (т. е. имеющих одинаковые площади), наибольшей жесткостью обладает кольцевое сечение. Такое сечение наиболее выгодно, еще и в том отношении, что ему соответствуют минимальные значения наибольших касательных напряжений при кручении. Воспользуемся изопериметрическим неравенством

$$\Omega \leq \frac{l^2}{4\pi}, \quad (160)$$

где  $\Omega$  — площадь, ограниченная замкнутой кривой  $\Gamma$  заданной длины  $l$ . Неравенство (160) показывает, что из всех площадей, образованных замкнутыми плоскими кривыми, имеющими заданную длину  $l$ , наибольшей является та, которая ограничена окружностью.

Тогда на основании неравенства (160) и соотношений (158) и (159) при  $l = \text{const}$  и  $h = \text{const}$  получим

$$C \leq G \frac{hl^3}{4\pi^2} \quad \text{и} \quad \tau = \tau_{sz} \geq \frac{2M\pi}{hl^2}; \quad (161)$$

отсюда непосредственно следует справедливость приведенного выше утверждения, так как в выражениях (161) знак равенства имеет место только для случая, когда средняя линия  $\Gamma$  трубчатого профиля является окружностью.

**Х а р а к т е р н ы е о с о б е н н о с т и з а м к н у т ы х п р о - ф и л е й.** В трубчатых стержнях, согласно формуле (159), максимальное касательное напряжение получается в наиболее узком месте профиля. Это не имеет места в тонкостенных стержнях с открытым профилем, наоборот, в стержнях открытого профиля с гладким контуром, как правило, наибольшее касательное напряжение возникает на контуре в самых толстых местах профиля. При равной площади сечений и одинаковой величине крутящего момента максимальное результирующее напряжение, возникающее в тонкостенном стержне открытого профиля, будет значительно превосходить таковое в тонкостенном стержне замкнутого профиля, а жесткость при кручении стержня открытого профиля при тех же условиях будет значительно меньше жесткости стержня замкнутого профиля. Отсюда следует, что с точки зрения чистого кручения тонкостенные стержни замкнутого профиля значительно более выгодны, чем стержни открытого профиля.

### КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С МНОГОСВЯЗНЫМИ ПРОФИЛЯМИ

Тонкостенные стержни с многосвязными профилями можно рассчитывать так же, как и в случае двухсвязных профилей, рассмотренных ранее. На основании мембранной аналогии, с точностью до соотношения  $1 + \frac{h}{l} \approx 1$ , функция напряжений  $U$  будет изменяться только по толщине профиля  $h$ .

Используя это обстоятельство, а также граничные условия для  $U$  (см. стр. 242) на всех контурах, ограничивающих данный профиль, можно получить формулы, аналогичные формуле (146). Их будет в данном случае столько, сколько внутренних контуров имеет рассматриваемый профиль. Входящие в эти формулы константы  $U_1, U_2, \dots, U_n$  должны быть найдены с помощью теоремы о циркуляции касательного напряжения при кручении, для чего ее нужно применить к каждому внутреннему контуру отдельно.

**Пример 1.** Рассчитаем трехсвязный профиль, показанный на рис. 15. Положим, что  $U_1$  и  $U_2$  суть неизвестные значения функции напряжений  $U$  на внутренних контурах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  профиля, а  $U = 0$  — значение ее на внешнем контуре  $\Gamma_0$ . Пусть  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — площади, ограниченные кривыми, окружающими контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и проходящими через середины стенок этого профиля, толщины которых на участках  $BCA$ ,  $ADB$  и  $AEB$  соответственно равны  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  (рис. 15).

На основании линейного закона изменения функции напряжений  $U$  по толщине стенок скручиваемого профиля и формул (147) имеем

$$\tau = \tau_{sz} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial n} \approx -G\theta \frac{U}{n}. \quad (162)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= G\theta \frac{U_1}{\delta_1}; \quad \tau_2 = G\theta \frac{U_2}{\delta_2}; \\ \tau_3 &= G\theta \frac{U_1 - U_2}{\delta_3} = \frac{\tau_1 \delta_1 - \tau_2 \delta_2}{\delta_3}. \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Тогда крутящий момент

$$M = \int_{ACB} \tau_1 \delta_1 r ds + \int_{BEA} \tau_3 \delta_3 r ds + \int_{BDA} \tau_2 \delta_2 r ds, \quad (164)$$

где  $r$  — длина перпендикулярно опущенного из произвольной точки  $P$  (полюса) на касательную к дуге средней линии  $\Gamma$  профиля (рис. 15). Подставив значения  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  из соотношений (163) в выражение (164), получим

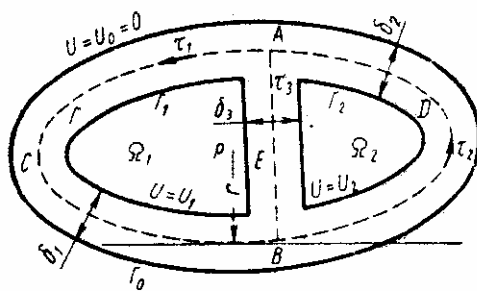


Рис. 15

$$M = \tau_1 \delta_1 \oint_{ACBEA} r ds + \tau_2 \delta_2 \oint_{BDAEB} r ds, \quad (165)$$

откуда, если использовать приближенные равенства

$$\oint_{ACBEA} r ds = 2\Omega_1 \quad \text{и} \quad \oint_{BDAEB} r ds = 2\Omega_2,$$

найдем

$$M = 2\tau_1 \delta_1 \Omega_1 + 2\tau_2 \delta_2 \Omega_2. \quad (166)$$

Пользуясь формулой Бредта о циркуляции касательного напряжения

$$\oint_{\Gamma_i} \tau_i ds = 2G\theta \Omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (167)$$

и применяя ее к каждому из внутренних контуров  $ACBEA$  и  $BDAEB$  отдельно, получаем

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 l_1 + \tau_3 l_3 &= 2G\theta \Omega_1; \\ \tau_2 l_2 - \tau_3 l_3 &= 2G\theta \Omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

где  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  — соответственно длины средней линии профиля на участках  $ACB$ ,  $ADB$  и  $AEB$ . Решив совместно уравнения (166) и (168) и используя третью формулу (163), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{M}{2G\Delta} (l_1 l_2 \delta_3 + l_2 l_3 \delta_1 + l_3 l_1 \delta_2); \\ \tau_1 &= \frac{M}{\Delta} [l_2 \delta_3 \Omega_1 + \delta_2 l_3 (\Omega_1 + \Omega_2)]; \\ \tau_2 &= \frac{M}{\Delta} [l_1 \delta_3 \Omega_2 + \delta_1 l_3 (\Omega_1 + \Omega_2)]; \\ \tau_3 &= \frac{M}{\Delta} (\delta_1 l_2 \Omega_1 - \delta_2 l_1 \Omega_2), \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

где

$$\Delta = 2 \left[ \delta_1 \delta_3 l_2 \Omega_1^2 + \delta_2 \delta_3 l_1 \Omega_2^2 + \delta_1 \delta_2 l_3 (\Omega_1 + \Omega_2)^2 \right].$$

В случае симметричного профиля ( $\delta_1 = \delta_2$ ,  $l_1 = l_2$  и  $\Omega_1 = \Omega_2$ ,  $\tau_3 = 0$ ) крутящий момент полностью передается на наружную оболочку профиля и переборка остается ненапряженной. В случае несимметричных профилей тоже можно подобрать размеры сечения так, чтобы переборка оставалась ненапряженной; для этого достаточно, как это следует из формул (169), чтобы имело место равенство  $\delta_1 l_2 \Omega_1 = \delta_2 l_1 \Omega_2$ .

Изложенный выше приближенный метод расчета не может учесть закона распределения напряжений в районах резкого изменения кривизны внутреннего контура скручиваемого профиля (например, концентрацию напряжений в углах коробчатого сечения).

### КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВХОДЯЩИХ УГЛАХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

При кручении тонкостенного стержня во входящих углах его профиля возникает значительная концентрация касательных напряжений, которая зависит от радиуса закругления входящего угла профиля. Используя мембранную аналогию, С. П. Тимошенко получил приближенную формулу для определения наибольшего касательного напряжения в окрестности входящего угла скручиваемого профиля.

Для открытых тонкостенных профилей

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0 \alpha_k, \quad (170)$$

где  $\tau_{\max}^0 = G\theta h$  — наибольшее напряжение, имеющее место вдоль длинных сторон профиля вне района входящего угла;  $\alpha_k$  — коэффициент концентрации, в данном случае

$$\alpha_k = 1 + \frac{h}{4r}, \quad (171)$$

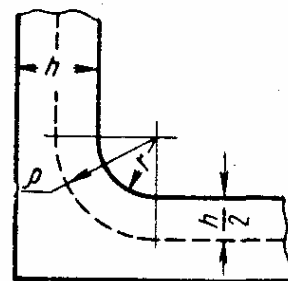


Рис. 16

здесь  $h$  — толщина стенок профиля;  $r$  — радиус закругления входящего угла профиля (рис. 16). Однако формула (170) дает лишь грубое приближенное значение наибольшего напряжения в закруглении угла и может служить только для качественной оценки явления концентрации напряжений.

А. Феппл и Л. Феппл на основе гидродинамической аналогии и теоремы о циркуляции касательного напряжения при кручении предложили более точную формулу для определения наибольшего напряжения в местах закругления углов в открытых профилях

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0 \cdot \frac{h}{4r} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{4r}{h} \right)^2} \right]. \quad (172)$$

По этой формуле можно с достаточной для практических целей точностью вычислить величину максимального напряжения в закруглении входящего угла скручиваемого стержня.

Более строгое исследование вопроса о концентрации напряжений во входящих закругленных углах скручиваемого профиля было выполнено Кеттером, Треффцем и Дассеном. Э. Треффц получил следующую формулу для определения наибольшего напряжения в закруглениях:

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0 \cdot \alpha_k = \tau_{\max}^0 \cdot 1,74 \sqrt[3]{\frac{h}{r}}, \quad (173)$$

где  $r$  — радиус закругления входящего угла профиля;  $h$  — толщина полки. Формула (173) выведена для случая, когда полки профиля имеют



одинаковую толщину. Если же полки скручиваемого профиля имеют различную толщину  $h_1$  и  $h_2$ , тогда в формуле (173) берется бóльшая из них. Отметим, что при радиусах закругления  $\frac{h}{2} \leq r \leq h$  результаты, полученные по этой формуле, хорошо согласуются с экспериментальными данными Кушмана.

Значения местных касательных напряжений в закруглениях открытых профилей при их кручении можно приближенно определить также, пользуясь решением задачи о кручении стержней с открытым профилем, найденным методом малого параметра, и ограничиваясь в этом решении точностью до членов порядка  $\frac{h^3}{\rho^3}$ . В этом случае для определения касательного напряжения  $\tau_{sz}$  получаем [1]

$$\tau_{sz} = -G\theta \left[ 2n - \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{n}{\rho} \right) \left( n^2 - \frac{h^2}{12} \right) \right]. \quad (174)$$

Касательное напряжение  $\tau_{sz}$  достигает максимума (см. рис. 16) в точке

$$n = -\frac{h}{2} \quad \text{и} \quad \rho = \rho_{\min} = r + \frac{h}{2};$$

тогда из формулы (174) получим

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0 \cdot \alpha_K = \tau_{\max}^0 \left\{ 1 + \frac{h}{3(2r+h)} \left[ 1 + \frac{h}{2r+h} \right] \right\}. \quad (175)$$

Для малых радиусов закругления, а именно когда  $r = (0,1 \div 0,5) h$ , полученные по этой формуле результаты согласуются с соответствующими результатами, полученными по формуле (173), и могут быть использованы для практических целей.

Для закрытых тонкостенных профилей (труб). Если профиль имеет входящие углы (рис. 17), в окрестности этих углов имеет место значительная концентрация напряжений. Максимальные напряжения в окрестности этих углов оказываются значительно большими по сравнению с напряжениями, определяемыми выражением (159), и зависят от радиусов закруглений входящих углов.

Использував мембранную аналогию, С. П. Тимошенко получил приближенную формулу для определения наибольших касательных напряжений в окрестности входящего угла, аналогичную формуле (170):

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0 \alpha_K, \quad (176)$$

где  $\alpha_K$  — коэффициент концентрации:

$$\alpha_K = \frac{h}{r} \cdot \frac{1 - \frac{l}{4\Omega} (2r+h)}{\ln \left( 1 + \frac{h}{r} \right)} + \frac{lr}{2\Omega}; \quad (177)$$

$\tau_{\max}^0$  — наибольшее касательное напряжение в стенках профиля в достаточном удалении от входящего угла;  $h$  — толщина стенки;  $l$  — длина средней линии профиля;  $\Omega$  — площадь области, ограниченной средней линией;  $r$  — радиус закругления внутренней грани входящего угла.

Более точную формулу можно получить при помощи решения задачи о кручении тонкостенных стержней с замкнутым профилем, найденного методом малого параметра (см. работу [1]), сохранив в этом решении члены, содержащие  $\frac{h}{\rho}$ :

$$\tau_{sz} = -2G\theta \left[ \frac{\Omega}{\rho} \left( 1 - \frac{n}{\rho} \right) + n \right]. \quad (178)$$

Касательное напряжение  $\tau_{sz}$  достигает максимума в точках (см. рис. 16)

$$n = -\frac{h}{2} \quad \text{и} \quad \rho = \rho_{\min} = r + \frac{h}{2}.$$

Тогда из формулы (178) получим

$$|\tau_{sz}|_{\max} = \tau_{\max} = 2G\theta r_0 \left[ 1 + \frac{h}{2\rho_{\min}} - \frac{h}{2r_0} \right], \quad (179)$$

где  $r_0 = \frac{\Omega}{l}$  — некоторый характерный линейный размер поперечного сечения стержня. Обозначив через  $\tau_{\max}^0 = 2G\theta \frac{\Omega}{l} = 2G\theta r_0$  — касательное напряжение на прямых участках контура скручиваемого про-

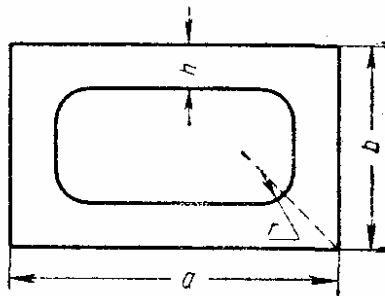


Рис. 17

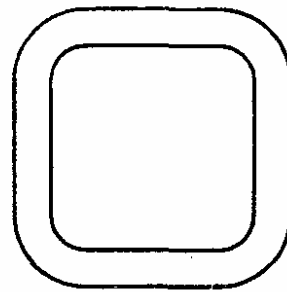


Рис. 18

филя на достаточном расстоянии от закругления, которое определяется формулой Бредта, соотношение (179) можно привести к виду

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0 \left( 1 + \frac{h}{2\rho_{\min}} - \frac{h}{2r_0} \right), \quad (180)$$

т. е.

$$\alpha_k = 1 + \frac{h}{2\rho_{\min}} - \frac{h}{2r_0}. \quad (181)$$

**Пример 2.** Пусть профиль скручиваемого стержня является коробчатым сечением (рис. 17) с размерами  $a = b = 10$  см,  $h = 1$  см.  $r = 0,5$  см,  $\rho_{\min} = r + \frac{h}{2} = 1$  см.

По формуле С. П. Тимошенко

$$\tau_{\max} = 1,54\tau_{\max}^0$$

а по формуле (180)

$$\tau_{\max} = 1,50\tau_{\max}^0$$

Из этих выражений видно, что значения напряжений, вычисленные по формулам (176) и (180), отличаются незначительно. Эти формулы дают более точные результаты, если скручиваемый профиль имеет закругленные углы с внутренней и с внешней стороны (рис. 18).

### ЛИТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н. Х. и А б р а м я н Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. Биценко К. и Граммель Р. Техническая динамика. Т. I. М., Гостехиздат, 1950.
3. Бычков Д. В., М р о щ и н с к и й А. К. Кручение металлических балок. М.—Л., Стройиздат, 1944.
4. В л а с о в В. З. Тонкостенные упругие стержни. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1959.
5. Джанелидзе Г. Ю., Паповко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. М., Гостехиздат, 1948.
6. Динник А. Н. Продольный изгиб. Кручение. М., изд-во АН СССР, 1955.
7. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. I. М., изд-во АН СССР, 1951.
8. Лурье А. И. Пространственная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд-во АН СССР, 1954.
10. Николаи Е. Л. Труды по механике. М., Гостехиздат, 1955.
11. Намансон И. П. Конструктивная теория функций. М., Гостехиздат, 1949, стр. 126.
12. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М., Гостехиздат, 1947.
13. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
14. Новожилов В. В., Кожевников М. К. Приближенная теория стесненного кручения тонкостенных стержней замкнутого профиля, учитывающая искривления поперечных сечений. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1956, 72—83.
15. Панов Д. Ю. Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН СССР, III (8), № 2 (62); 1935, 63—66.
16. Панов Д. Ю. Решение краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных для длинных и узких областей. Изв. АН СССР, серия математическая, № 1, 1937, 63—77.
17. Папкович П. Ф. Теория упругости. М., Оборонгиз, 1939.
18. Пешль Т. Сопротивление материалов. М.—Л., ОГИЗ, 1948.
19. Полиа Г. и Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М., Физматгиз, 1962.
20. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении. М., Машгиз, т. I, 1956, т. II, 1959.
21. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. Изд. МГУ, 1950.
22. Сен-Венан. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. Перев. с фр. под ред. Г. Ю. Джанелидзе. М., Физматгиз, 1961.
23. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л.—М., ОНТИ, 1937.
24. Цянь Вэй-чан, Линь Хун-сунь, Ху Хай-чан и Е. Кай-юань. Теория кручения цилиндрических тел (на китайском языке). Пекин, 1956.
25. Prandtl L. Zur Torsion von prismatischen Staben Phys. Zeitschr. 4, 1903, S. 758—759.

## Глава 11

# РАСЧЕТ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ И КОЛЬЦЕВЫХ СИСТЕМ

## КРУГОВОЙ СТЕРЖЕНЬ

Круговой стержень и кольцо рассчитывают независимо для нагрузок в плоскости стержня и из его плоскости. Участок стержня при нагру-

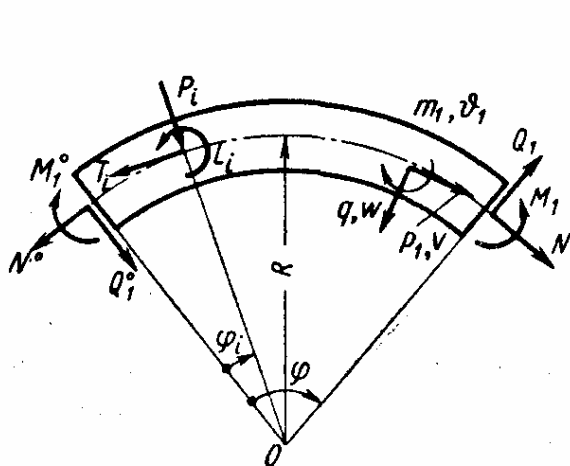


Рис. 1

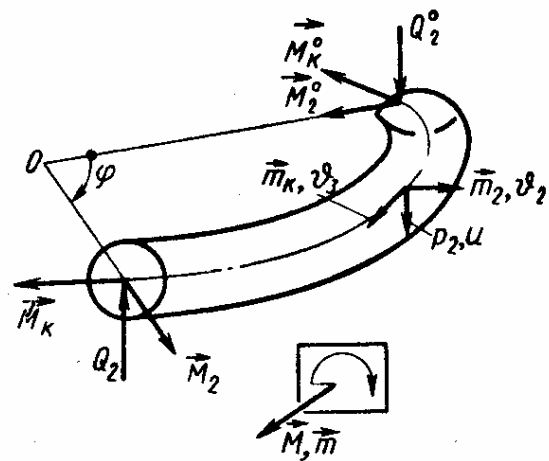


Рис. 2

жении в его плоскости показан на рис. 1, а на рис. 2 — при нагружении перпендикулярно к его плоскости.

### Обозначения

- $\varphi, \alpha$  — угловые координаты текущих сечений стержня;
- $\varphi_i, \alpha_i$  — угловые координаты сечений, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки;
- $N, Q_1, M_1$  — нормальная и перерезывающая силы и изгибающий момент в текущем сечении стержня в его плоскости;
- $Q_2, M_2, M_K$  — перерезывающая сила, изгибающий и крутящий моменты в текущем сечении из плоскости стержня;
- $P_{1i}, T_i, L_{1i}$  — внешние сосредоточенные нагрузки в плоскости стержня в  $i$ -м сечении: радиальная и касательная силы и сосредоточенный изгибающий момент;

- $P_{2i}, L_{2i}, L_{ki}$  — внешние сосредоточенные нагрузки из плоскости стержня в  $i$ -м сечении: сила по бинормали, изгибающий и крутящий моменты;  
 $q, p_1, m_1$  — внешние распределенные нагрузки в плоскости стержня, направленные по радиусу и по касательной, и погонный момент;  
 $p_2, m_2, m_k$  — внешние распределенные нагрузки, перпендикулярные плоскости стержня: усилие по бинормали и моменты изгибающий и крутящий;  
 $v, w, u$  — смещения сечений стержня в тангенциальном и радиальном направлениях и по бинормали;  
 $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_k$  — углы поворота сечений стержня в его плоскости, перпендикулярно к ней и угол закручивания;  
 $J_1, J_2, J_k, F$  — моменты инерции сечений относительно осей  $\vec{b}-\vec{b}, \vec{n}-\vec{n}$ , момент инерции кручения и площадь сечения;  
 $E, G$  — модуль упругости и модуль сдвига материала стержня;  
 $EJ, GJ_k$  — жесткости стержня на изгиб и свободное кручение;  
 $\lambda = \frac{EJ_2}{GJ_k}$  — отношение жесткостей;

$R$  — радиус оси стержня. При расчете тонкого стержня в плоскости кривизны  $R$  — радиус центров тяжести сечений; тот же смысл имеет он при рассмотрении массивного стержня, нагруженного из его плоскости.

При расчете тонкостенного стержня из его плоскости  $R$  — радиус центра изгиба сечений.

Для стержня, имеющего сечение с двумя осями симметрии, центр изгиба и центр тяжести совпадают.

Положительное направление углов поворота принято по часовой стрелке.

Векторы, перпендикулярные плоскости чертежа, изображены кружком с точкой, если они направлены к читателю (вверх), и кружком с крестиком, если они направлены вниз.

Расчет стержня (кольца) следует начинать с разложения внешних нагрузок по трем направлениям: радиальном, тангенциальном и по бинормали. Затем следует перенести все нагрузки в данном сечении на ось стержня с добавлением соответствующих изгибающих и крутящих моментов.

### Дифференциальные уравнения изгиба

Теория расчета плоского кругового стержня и замкнутого кольца основана на следующих допущениях: 1) одна из главных осей инерции сечений стержня располагается в плоскости стержня; 2) стержень является нерастяжимым; 3) применима гипотеза плоской нормали; 4) поперечное сечение стержня не деформируется при его нагружении; 5) деформации стержня малы и поэтому уравнения, написанные для недеформированного состояния, справедливы и для деформированного состояния.

Ниже приведены также решения некоторых задач при меньших ограничениях.

При  $\frac{R}{h} > 5$  стержень называют *тонким* или *стержнем малой кривизны*. При  $\frac{R}{h} < 5$  стержень относят к стержням *большой кривизны*. Здесь рассмотрены тонкие стержни.

Основные дифференциальные зависимости расчета плоского кругового стержня в соответствии с принятыми допущениями имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} + Q_1 + p_1 R &= 0; & \frac{dQ_2}{d\varphi} - p_2 R &= 0; \\ \frac{dQ_1}{d\varphi} - N - qR &= 0; & \frac{dM_2}{d\varphi} - M_\kappa + Q_2 R + m_2 R &= 0; \\ \frac{dM_1}{d\varphi} + Q_1 R - m_1 R &= 0; & \frac{dM_\kappa}{d\varphi} + M_2 + m_\kappa R &= 0; \\ M_1 &= -\frac{EJ_1}{R} \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\varphi}; & M_2 &= -\frac{EJ_2}{R} \left( \frac{d\vartheta_2}{d\varphi} - \vartheta_\kappa \right); \\ \vartheta_1 &= \frac{1}{R} \left( \frac{dw}{d\varphi} + v \right); & M_\kappa &= -\frac{GJ_\kappa}{R} \left( \frac{d\vartheta_\kappa}{d\varphi} + \vartheta_2 \right); \\ w &= \frac{dv}{d\varphi}; & \vartheta_2 &= \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{d\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Отсюда видно, что после проектирования внешней нагрузки на плоскость стержня и перпендикулярно к ней уравнения распадаются на две независимые группы: одна группа описывает изгиб стержня в его плоскости, а вторая — из его плоскости.

Разработано несколько методов расчета кругового бруса.

В первом методе для бруса постоянного сечения из уравнений (1) составляют уравнения в перемещениях

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} &= f_1(\varphi); \\ \frac{d^6 u}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 u}{d\varphi^4} + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} &= f_2(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь функции

$$\left. \begin{aligned} f_1(\varphi) &= -\frac{R^3}{EJ_1} \left[ \frac{d^2 m_1}{d\varphi^2} + m_1 - R \left( \frac{dq}{d\varphi} - p_1 \right) \right], \\ f_2 &= \frac{R^3}{EJ_2} \left\{ \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} - \lambda \right) \left( p_2 R + \frac{dm_2}{d\varphi} \right) + (1 + \lambda) \frac{d^2 m_3}{d\varphi^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

зависят только от внешней нагрузки.

Решение уравнений (2) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} v &= A_0 + A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + \\ &\quad + A_5 \varphi \cos \varphi + v^*; \\ u &= B_0 + B_1 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi + B_3 \varphi + B_4 \varphi \sin \varphi + \\ &\quad + B_5 \varphi \cos \varphi + u^*; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

звездочками отмечены частные решения неоднородных уравнений, определяемые по известным функциям  $f_i(\varphi)$  либо подбором, либо формулами

$$\left. \begin{aligned} v^* &= \int_0^\varphi \sin(\varphi - \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{\varphi_2} \int_0^{\varphi_3} f_1(\varphi_4) d\varphi_4 d\varphi_3 d\varphi_2 d\varphi_1; \\ u^* &= \int_0^\varphi \sin(\varphi - \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{\varphi_2} \int_0^{\varphi_3} f_2(\varphi_4) d\varphi_4 d\varphi_3 d\varphi_2 d\varphi_1; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$A_i$  и  $B_i$  — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий. Постоянные с индексами 0, 1, 2 характеризуют смещения стержня как жесткого целого и при отсутствии последних должны приравняться нулю. Остальные искомые величины по стержню определяются дифференцированием решений (4) в соответствии с формулами (1).

Второй, наиболее применимый, метод основывается на последовательном интегрировании уравнений (1), причем постоянные интегрирования записывают в форме начальных параметров. Это позволяет сразу записывать выражения для искомых величин в случае нагружения бруса в точках  $\varphi_i$  сосредоточенными усилиями  $F_{1i}$ ,  $T_i$ ,  $L_{1i}$ ,  $P_{2i}$ ,  $L_{2i}$ ,  $L_k$ :  
при нагружении в плоскости бруса

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_1^0 \cos \varphi + N^0 \sin \varphi + \sum P_{1i} \cos(\varphi - \varphi_i) + \\ &\quad + \sum T_i \sin(\varphi - \varphi_i) + Q_1^*; \\ N &= -Q_1^0 \sin \varphi + N^0 \cos \varphi - \sum P_{1i} \sin(\varphi - \varphi_i) + \\ &\quad + \sum T_i \cos(\varphi - \varphi_i) + N^*; \\ M_1 &= M_1^0 - Q_1^0 R \sin \varphi - N^0 R C_1(\varphi) + \sum L_{1i} - \\ &\quad - \sum P_{1i} R \sin(\varphi - \varphi_i) - \sum T_i R C_1(\varphi - \varphi_i) + M_1^*; \\ \vartheta_1 &= \vartheta_1^0 - \frac{R}{EJ_1} \left[ M_1^0 \varphi - Q_1^0 R C_1(\varphi) - N^0 R C_2(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \sum L_{1i}(\varphi - \varphi_i) - \sum P_{1i} R C_1(\varphi - \varphi_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sum T_i R C_2(\varphi - \varphi_i) \right] + \vartheta_1^*; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 v &= v^0 \cos \varphi + w^0 \sin \varphi + \vartheta_1^0 RC_1(\varphi) - \frac{R^2}{EJ_1} \times \\
 &\times [M_1^0 C_2(\varphi) - Q_1^0 RC_3(\varphi) - N^0 RC_4(\varphi) + \\
 &+ \sum L_{1i} C_2(\varphi - \varphi_i) - \sum P_{1i} RC_3(\varphi - \varphi_i) - \\
 &- \sum T_i RC_4(\varphi - \varphi_i)] + v^*; \\
 w &= v^0 \sin \varphi + w^0 \cos \varphi - \vartheta_1^0 R \sin \varphi + \frac{R^3}{EJ_1} \times \\
 &\times [M_1^0 C_1(\varphi) - Q_1^0 RC_5(\varphi) - N^0 RC_3(\varphi) + \\
 &+ \sum L_{1i} C_1(\varphi - \varphi_i) - \sum P_{1i} RC_5(\varphi - \varphi_i) - \\
 &- \sum T_i RC_3(\varphi - \varphi_i)] + w^*;
 \end{aligned} \tag{6}$$

при нагружении перпендикулярно плоскости бруса

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= Q_2^0 + \sum P_{2i} + Q_2^*; \\
 M_2 &= M_2^0 \cos \varphi + (M_\kappa^0 - RQ_2^0) \sin \varphi + \\
 &+ \sum L_{2i} \cos(\varphi - \varphi_i) + \sum L_{\kappa i} \sin(\varphi - \varphi_i) - \\
 &- \sum P_{2i} R \sin(\varphi - \varphi_i) + M_2^*; \\
 M_\kappa &= -M_2^0 \sin \varphi + M_\kappa^0 \cos \varphi + Q_2^0 RC_1(\varphi) - \\
 &- \sum L_{2i} \sin(\varphi - \varphi_i) + \sum L_{\kappa i} \cos(\varphi - \varphi_i) + \\
 &+ \sum P_{2i} RC_1(\varphi - \varphi_i) + M_\kappa^*; \\
 \vartheta_2 &= \vartheta_2^0 \cos \varphi - \vartheta_\kappa^0 \sin \varphi - \frac{R}{EJ_2} \times \\
 &\times \{Q_2^0 RD_1(\lambda, \varphi) + M_2^0 D_2(\lambda, \varphi) + M_\kappa^0 (\lambda + 1) C_6(\varphi) + \\
 &+ \sum P_{2i} RD_1(\lambda, \varphi - \varphi_i) + \sum L_{2i} D_2(\lambda, \varphi - \varphi_i) + \\
 &+ \sum (\lambda + 1) L_\kappa C_6(\varphi - \varphi_i)\} + \vartheta_2^*;
 \end{aligned} \tag{7}$$



$$\begin{aligned}
\vartheta_{\kappa} = & \vartheta_2^0 \sin \varphi + \vartheta_{\kappa}^0 \cos \varphi - \frac{R}{EJ_2} \times \\
& \times \left\{ Q_2^0 (\lambda + 1) RC_5 (\varphi) + M_2^0 (\lambda + 1) C_6 (\varphi) + \right. \\
& + M_{\kappa}^0 D_3 (\lambda, \varphi) + (\lambda + 1) \sum P_{2i} RC_5 (\varphi - \varphi_i) + \\
& + (\lambda + 1) \sum L_{2i} C_6 (\varphi - \varphi_i) + \sum L_{\kappa i} D_3 (\lambda, \varphi - \varphi_i) \left. \right\} + \vartheta_{\kappa}^*; \\
u = & u^0 + \vartheta_2^0 R \sin \varphi - \vartheta_{\kappa}^0 RC_1 (\varphi) - \frac{R^2}{EJ_2} \times \\
& \times \left\{ Q_2^0 RD_4 (\lambda, \varphi) + M_2^0 D_1 (\lambda, \varphi) + M_{\kappa}^0 (\lambda + 1) C_5 (\varphi) + \right. \\
& + \sum P_{2i} RD_4 (\lambda, \varphi - \varphi_i) + \sum L_{2i} D_1 (\lambda, \varphi - \varphi_i) + \\
& + \sum L_{\kappa i} (\lambda + 1) C_5 (\varphi - \varphi_i) \left. \right\} + u^*.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь через  $C_i (\varphi)$  и  $D_i (\lambda, \varphi)$  обозначены функции:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1 - \cos \varphi; \quad C_2 = \varphi - \sin \varphi; \\
C_3 &= 1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi; \quad C_4 = \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi + \\
&+ \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi; \quad C_5 = \frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi; \\
C_6 &= \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi; \quad C_7 = \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi; \\
D_1 (\lambda, \varphi) &= \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi - \lambda \left( 1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi \right) = \\
&= C_6 - \lambda C_3 (\varphi); \\
D_2 (\lambda, \varphi) &= \frac{1}{2} (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) - \frac{\lambda}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) = \\
&= C_7 (\varphi) - \lambda C_5 (\varphi); \\
D_3 (\lambda, \varphi) &= \frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{\lambda}{2} (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) = \\
&= C_5 (\varphi) + \lambda C_7 (\varphi); \\
D_4 (\lambda, \varphi) &= \frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) - \lambda \left( \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi \right) = C_5 (\varphi) - \lambda C_4 (\varphi).
\end{aligned} \tag{8}$$

При малых  $\varphi$  ( $\varphi < 1$ ) эти функции удобнее вычислять по следующим формулам:

$$C_1(\varphi) = \frac{\varphi^2}{2} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{12} + \frac{\varphi^4}{360} \right); \quad C_2(\varphi) = \frac{\varphi^3}{6} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{20} + \frac{\varphi^4}{840} \right);$$

$$C_3(\varphi) = \frac{\varphi^4}{240} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{15} + \frac{\varphi^4}{560} \right); \quad C_4(\varphi) = \frac{\varphi^5}{120} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{21} + \frac{\varphi^4}{1008} \right);$$

$$C_5(\varphi) = \frac{\varphi^3}{6} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{10} + \frac{\varphi^4}{280} \right);$$

$$C_6(\varphi) = \frac{\varphi^2}{2} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{6} + \frac{\varphi^4}{120} \right);$$

$$C_7(\varphi) = \varphi \left( 1 - \frac{\varphi^2}{3} + \frac{\varphi^4}{40} - \frac{\varphi^6}{1260} \right).$$

Значения этих функций приведены в табл. 1, более подробные таблицы значений этих функций можно найти в работе [15].

В формулах (6) члены со звездочкой означают частные решения неоднородных уравнений только от распределенных нагрузок. Выражение для  $Q_1^*$  находят из уравнения

$$\frac{d^2 Q_1^*}{d\varphi^2} + Q_1^* = R \left( \frac{dq}{d\varphi} - p_1 \right)$$

подбором или по формуле

$$Q_1^* = R \int_0^\varphi \left[ \frac{dq(t)}{dt} - p_1(t) \right] \sin(\varphi - t) dt, \quad (9a)$$

а остальные величины определяют согласно соотношений

$$\left. \begin{aligned} N^* &= \frac{dQ_1^*}{d\varphi}; \quad M_1^* = -R \int_0^\varphi [G_1(\varphi) - m_1] d\varphi; \\ \vartheta_1^* &= - \int_0^\varphi \frac{R}{EJ} M_1^*(\varphi) d\varphi; \\ v^* &= R \int_0^\varphi \vartheta_1^*(t) \cdot \sin(\varphi - t) dt; \quad \omega^* = \frac{dv^*}{d\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

1. Значения функций  $C_1—C_7$ 

$\varphi$ в град	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
0	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,0152	0,00053	—0,00005	0,00007	0,00086	0,01515	0,17276
20	0,0603	0,00707	—0,00061	0,00008	0,00699	0,05969	0,33502
30	0,1340	0,02360	—0,00310	0,00040	0,02328	0,13090	0,47672
40	0,2340	0,05533	—0,00962	0,00132	0,05402	0,22437	0,58879
50	0,3572	0,10666	—0,02297	0,00413	0,10253	0,33425	0,66349
60	0,5000	0,18120	—0,04656	0,01000	0,17120	0,45345	0,69481
70	0,6580	0,28203	—0,08406	0,02110	0,26094	0,57403	0,67877
80	0,8264	0,41146	—0,13888	0,04101	0,37120	0,68752	0,61363
90	1,0000	0,57080	—0,21560	0,07080	0,50000	0,78540	0,50000
100	1,1736	0,76053	—0,31420	0,11664	0,64390	0,85941	0,34087
110	1,3420	0,98016	—0,43995	0,18201	0,79814	0,90204	0,14153
120	1,5000	1,22840	—0,59313	0,27180	0,95660	0,90690	—0,09059
130	1,6428	1,50293	—0,77380	0,39699	1,11224	0,86905	—0,34620
140	1,7660	1,80066	—0,98067	0,54341	1,25724	0,78531	—0,61451
150	1,8660	2,11799	—1,21151	0,73441	1,38359	0,65450	—0,88362
160	1,9397	2,45053	—1,46218	0,95878	1,48307	0,47755	—1,14105
170	1,9848	2,79346	—1,72726	1,24569	1,54778	0,25761	—1,37417
180	2,0000	3,14160	—2,00000	1,57080	1,57080	0,00000	—1,57080
190	1,9848	3,4897	—2,27568	1,93366	1,54606	—0,28769	—1,71961
200	1,9397	3,83266	—2,53660	2,36357	1,47408	—0,59755	—1,81121
210	1,8660	4,16519	—2,78229	2,82817	1,33072	—0,91778	—1,83703
220	1,7660	4,48252	—3,00009	3,33331	1,14921	—1,23456	—1,79197
230	1,6428	4,78025	—3,18026	3,87306	0,90718	—1,53712	—1,67340
240	1,5000	5,05478	—3,31374	4,44059	0,61420	—1,81411	—1,47994
250	1,3420	5,30302	—3,39012	5,02674	0,27628	—2,04969	—1,21656
260	1,1736	5,52264	—3,40803	5,62116	—0,09656	—2,23458	—0,88611
270	1,0000	5,71239	—3,35619	6,21239	—0,50000	—2,35600	—0,50000
280	0,8264	5,87172	—3,23272	6,78830	—0,91658	—2,40633	—0,07789
290	0,6580	6,00116	—3,03613	7,33652	—1,33536	—2,37829	—0,39447
300	0,5000	6,10199	—2,76718	7,84398	—1,69200	—2,26724	0,87601
310	0,3572	6,17652	—2,42943	8,29846	—2,12194	—2,07171	1,35717
320	0,2340	6,22787	—2,02904	8,68834	—2,46048	—1,79510	1,81767
330	0,1340	6,25960	—1,57390	9,00351	—2,77390	—1,43896	2,24492
340	0,0603	6,27612	—1,07503	9,23527	—2,96414	—1,01510	2,61687
350	0,0152	6,28226	—0,54543	9,37697	—3,09970	—0,52937	2,92163
360	0,0000	6,28319	0,00000	9,42478	—3,14159	0,00000	3,14150

Выражения для  $Q_2^*$ ,  $M_2^*$  и т. д. будут

$$\left. \begin{aligned} Q_2^* &= +R \int_0^\varphi p_2(\varphi) d\varphi; \\ M_2^* &= R \int_0^\varphi \left\{ R p_2 + \left[ m_\kappa(t) + \frac{dm_2(t)}{dt} \right] \right\} \sin(\varphi - t) dt; \\ M_\kappa^* &= - \int_0^\varphi [M_2^*(\varphi) + m_\kappa(\varphi) R] d\varphi; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2^* &= -R \int_0^\varphi \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{M_2^*}{EJ_2} \right) - \frac{M_\kappa^*}{GJ_\kappa} \right] \sin(\varphi - t) dt; \\ u^* &= \int_0^\varphi \int_0^\varphi \frac{R^2}{EJ_2(t)} [M_2^*(t) - \lambda M_\kappa^*(t)] \sin(\varphi - t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В формулах (6) и (7)  $i$ -е члены под знаком сумм учитывают только при переходе через точку  $\varphi_i$ ; при  $\varphi < \varphi_i$  эти члены следует полагать равными нулю.

Этот метод позволяет также найти решения для стержня переменной жесткости. В этом случае усилия в брус вычисляются по формулам (6) и (7), а смещения можно определить из соотношений:

в плоскости стержня

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \vartheta_1^0 - M_1^0 R \Phi_1(\varphi) - Q_1^0 R^2 \Phi_2(\varphi) + N^0 R^2 \Phi_3(\varphi) - \\ &\quad - \sum L_{1i} R \Phi_1(\varphi - \varphi_i) - \sum P_{1i} R^2 \Phi_2(\varphi - \varphi_i) + \\ &\quad + \sum T_i R^2 \Phi_3(\varphi - \varphi_i) + \vartheta_1^*; \\ v &= v^0 \cos \varphi - w^0 \sin \varphi + \vartheta_1^0 R C_1(\varphi) - M_1^0 R^2 \Phi_4(\varphi) - \\ &\quad - Q_1^0 R^3 \Phi_5(\varphi) + N^0 R^3 \Phi_6(\varphi) - \sum L_{1i} R^2 \Phi_4(\varphi - \varphi_i) - \\ &\quad - \sum P_{1i} R^3 \Phi_5(\varphi - \varphi_i) + \sum T_i R^3 \Phi_6(\varphi - \varphi_i) + v^*; \\ w &= v^0 \sin \varphi + w^0 \cos \varphi - \vartheta_1^0 R \sin \varphi + M_1^0 R^2 \Phi_7(\varphi) + \\ &\quad + Q_1^0 R^3 \Phi_8(\varphi) - N^0 R^3 \Phi_9(\varphi) + \sum L_{1i} R^2 \Phi_7(\varphi - \varphi_i) + \\ &\quad + \sum P_{1i} R^3 \Phi_8(\varphi - \varphi_i) - \sum T_i R^3 \Phi_9(\varphi - \varphi_i) + w^*; \end{aligned}$$

перпендикулярно плоскости стержня

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= \vartheta_2^0 \cos \varphi - \vartheta_\kappa^0 \sin \varphi - Q_2^0 R^2 \psi_1(\varphi) - M_2^0 R^0 \psi_2(\varphi) - \\ &\quad - M_\kappa^0 R \psi_3(\varphi) - \sum P_{2i} R^2 \psi_1(\varphi - \varphi_i) - \sum L_{2i} R \psi_2(\varphi - \varphi_i) - \\ &\quad - \sum L_{\kappa i} R \psi_3(\varphi - \varphi_i) + \vartheta_2^*; \\ \vartheta_\kappa &= \vartheta_2^0 \sin \varphi + \vartheta_\kappa^0 \cos \varphi + Q_2^0 R^2 \psi_4(\varphi) + M_2^0 R \psi_5(\varphi) + \\ &\quad + M_\kappa^0 R \psi_6(\varphi) + \sum P_{2i} R^2 \psi_4(\varphi - \varphi_i) + \sum L_{2i} R \psi_5(\varphi - \varphi_i) + \\ &\quad + \sum L_{\kappa i} R \psi_6(\varphi - \varphi_i) + \vartheta_\kappa^*; \end{aligned}$$

$$u = u^0 + \vartheta_2^0 R \sin \varphi - \vartheta_\kappa^0 R C_1(\varphi) - Q_2^0 R^3 \psi_7(\varphi) - \\ - M_2^0 R^2 \psi_8(\varphi) - M_\kappa^0 R^2 \psi_9(\varphi) - \sum P_{2i} R^3 \psi_7(\varphi - \varphi_i) - \\ - \sum L_{2i} R^2 \psi_8(\varphi - \varphi_i) - \sum L_{\kappa i} R^2 \psi_9(\varphi - \varphi_i) + u^*.$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi - \varphi_i) &= \int_{\varphi_i}^{\varphi} \frac{d\varphi}{EJ_1(\varphi)}; \quad \Phi_2(\varphi - \varphi_i) = \int_{\varphi_i}^{\varphi} \frac{\sin \varphi}{EJ_1(\varphi)} d\varphi; \\ \Phi_3(\varphi - \varphi_i) &= \int_{\varphi_i}^{\varphi} \frac{C_1(\varphi)}{EJ_1(\varphi)} d\varphi; \quad \Phi_4(\varphi - \varphi_i) = \int_{\varphi_i}^{\varphi} \Phi_1(t) \sin(\varphi - t) dt; \\ \Phi_5(\varphi - \varphi_i) &= \int_{\varphi_i}^{\varphi} \Phi_2(t) \sin(\varphi - t) dt; \\ \Phi_6(\varphi - \varphi_i) &= \int_{\varphi_i}^{\varphi} \Phi_3(t) \sin(\varphi - t) dt; \\ \Phi_7(\varphi) &= \frac{d\Phi_4}{d\varphi}; \quad \Phi_8(\varphi) = \frac{d\Phi_5}{d\varphi}; \quad \Phi_9(\varphi) = \frac{d\Phi_6}{d\varphi}; \\ \psi_1(\varphi - \varphi_i) &= - \int_{\varphi_i}^{\varphi} \left[ \frac{\cos t}{EJ_2(t)} - \frac{C_1}{GJ_\kappa(t)} \right] \sin(\varphi - t) dt; \\ \psi_2(\varphi - \varphi_i) &= \frac{\sin \varphi}{EJ_2(\varphi)} + \int_{\varphi_i}^{\varphi} \frac{\sin(t)}{EJ_2(t)} \left[ 1 + \frac{EJ_2(t)}{GJ_\kappa(t)} \right] \sin(\varphi - t) dt; \\ \psi_3(\varphi - \varphi_i) &= \int_{\varphi_i}^{\varphi} \frac{\cos t}{EJ_2(t)} \left[ 1 + \frac{EJ_2(t)}{GJ_\kappa(t)} \right] \sin(\varphi - t) dt; \\ \psi_4(\varphi) &= - \frac{\sin \varphi}{EJ_2(\varphi)} + \frac{d\psi_1}{d\varphi}; \quad \psi_5(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{EJ_2(\varphi)} + \frac{d\psi_2}{d\varphi}; \\ \psi_6(\varphi) &= - \frac{\sin \varphi}{EJ_2(\varphi)} + \frac{d\psi_3}{d\varphi}; \\ \psi_7(\varphi) &= \int_0^{\varphi} \psi_1(t) dt; \quad \psi_8(\varphi) = \int_0^{\varphi} \psi_2(t) dt; \quad \psi_9(\varphi) = \int_0^{\varphi} \psi_3(t) dt. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования определяют из условий на краях стержня. На свободном крае  $Q_1 = M_1 = N = Q_2 = M_2 = M_\kappa = 0$ , на заделанном крае  $u = v = w = \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_\kappa = 0$ , на концевой шарнирной опоре  $u = v = w = M_1 = M_2 = M_\kappa = 0$ .

При расчете по формулам (6) и (7) следует учитывать все нагрузки, в том числе и реактивные. В случае статически неопределимого стержня сначала находят реактивные нагрузки из условий опирания по дополнительным опорам. Ниже приведен пример решения статически неопределимой задачи.

Смещения точек бруса можно также определить энергетическим методом [3, 7]. Смещения точек стержня переменной жесткости в его плоскости с учетом деформаций от нормальных и перерезывающих сил определяют по формуле

$$\delta = \int \frac{M_1 M'_1}{EJ_1} R d\varphi + \int \beta \frac{Q_1 Q'_1}{GF} R d\varphi + \int \frac{NN'}{EF} R d\varphi. \quad (11)$$

Смещения стержня при нагружении перпендикулярно его плоскости определяют по формуле

$$\delta = \int \left( \frac{M_2 M'_2}{EJ_2} + \frac{M_\kappa M'_\kappa}{GJ_\kappa} + \beta \frac{Q_2 Q'_2}{GF} \right) R d\varphi; \quad (12)$$

здесь величины усилий без штрихов означают внутренние усилия от внешней нагрузки, а со штрихами — от единичной нагрузки, прикладываемой в той точке и в том направлении, в которых определяют смещение.  $\beta$  — коэффициент формы сечения, принимаемый как у прямых брусьев. Для бруса постоянного сечения в работе [22] приводятся расчетные формулы для смещений в плоскости стержня и таблицы, облегчающие пользование этими формулами.

**Пример 1.** Круговой стержень с углом раствора  $\alpha = 120^\circ$ , заделанный на одном конце и шарнирно опертый на другом, нагружен вертикальной силой  $P$  в точке  $C$  (рис. 3). Определить эпюру изгибающих моментов.

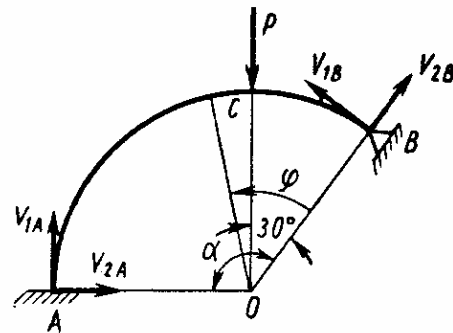


Рис. 3

Система дважды статически неопределима. Выбрав сечение  $B$  в качестве начального, усилия  $V_{1B}$  и  $V_{2B}$  в нем примем в качестве лишних неизвестных и определим их из условия  $v_A = w_A = \vartheta_A = 0$ . Имеем  $v_1^0 = v_B = 0$ ;  $w^0 =$

$= w_B = 0$ ;  $M_1^0 = M_B = 0$ ;  $Q_1^0 = V_{2B}$ ;  $N^0 = -V_{1B}$ . И тогда

$$v_A = \vartheta_1^0 R C_1(120^\circ) - \frac{R^3}{EJ_1} \left[ -V_{2B} C_3(120^\circ) + V_{1B} C_4(120^\circ) + P C_3(90^\circ) \right] = 0;$$

$$w_A = -\vartheta_1^0 R \sin 120^\circ + \frac{R^3}{EJ_1} \left[ -V_{2B} C_5(120^\circ) + V_{1B} C_3(120^\circ) + P C_5(90^\circ) \right] = 0;$$

$$\vartheta_A = \vartheta_1^0 - \frac{R^2}{EJ_1} \left[ -V_{2B} C_1(120^\circ) + V_{1B} C_2(120^\circ) + P C_1(90^\circ) \right] = 0.$$

Подставив сюда значения функций  $C_i$  из табл. 1, после исключения  $\vartheta_1^0$  найдем

$$V_{1B} = 0,36P; \quad V_{2B} = 0,37P.$$

Изгибающий момент

$$M_1 = \begin{cases} PR [0,36 (1 - \cos \varphi) - 0,37 \sin \varphi] & \text{при } 0 \leq \varphi \leq 30^\circ, \\ PR [0,36 (1 - \cos \varphi) - 0,37 \sin \varphi - \sin (\varphi - 30^\circ)] & \text{при } 30^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ. \end{cases}$$

Для стержня, заделанного по обоим концам трижды статически неопределимой системы (рис. 4), разработаны методы расчета [10, 14] с использованием понятия упругого центра пролета (точки, в которой приложенная сила вызывает смещение только по направлению этой силы). Ниже приведены расчетные формулы для такого стержня при нагружении в плоскости и из плоскости в ключевом сечении и приложением сил в упругом центре.

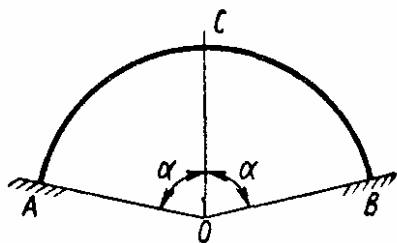


Рис. 4

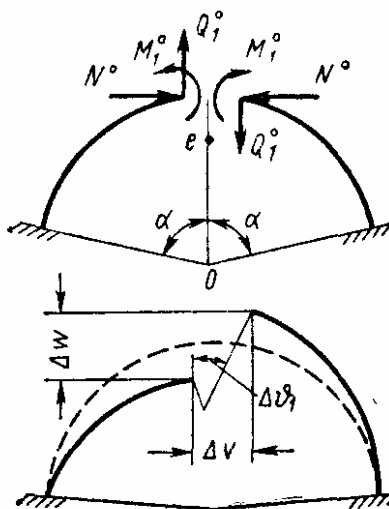


Рис. 5

В плоскости стержня (рис. 5) усилия в ключевом сечении для стержня переменного сечения с учетом растяжения определяют по формулам

$$Q_1^0 = -\frac{1}{\delta_1} \Delta w; \quad N^0 = \frac{1}{\delta_2} (\Delta v - e \Delta \vartheta_1); \quad M_1^0 = -\frac{1}{\delta_3} \Delta \vartheta_1 + e N^0,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\alpha \left( \frac{R^3}{EJ_1} + \frac{R^2}{EF} \right) \sin^2 \varphi \, d\varphi; \\ \delta_2 &= \int_0^\alpha \frac{Ry^2 \, d\varphi}{EJ_1} + \int_0^\alpha \frac{R \cos^2 \varphi \, d\varphi}{EF}; \quad \delta_3 = \int_0^\alpha \frac{R \, d\varphi}{EJ_1}; \\ e &= \frac{\int_0^\alpha \frac{R \, d\varphi}{EJ_1} (1 - \cos \varphi)}{\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{EJ_1}}; \end{aligned}$$

$$\Delta w = R^4 \int_0^\alpha \frac{M_{1p} \sin \varphi}{EJ_1} d\varphi + \int_0^\alpha \frac{Q_{1p} R^2}{EF} \sin^2 \varphi d\varphi;$$

$$\Delta v = \int_0^\alpha \frac{M_{1py} R^2}{EJ_1} d\varphi + \int_0^\alpha \frac{Q_p \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{EF} R^2 d\varphi;$$

$$\Delta \vartheta_1 = \int \frac{M_p R^2 d\varphi}{EJ_1};$$

здесь  $y = R(1 - \cos \varphi) - e$  — ордината оси бруса, отсчитываемая от упругого центра;  $M_{1p}$ ,  $Q_{1p}$  — момент и перерезывающая сила от внешних сил в основной системе.

Если стержень имеет постоянную толщину и можно пренебречь растяжением его, то коэффициенты  $\delta_i$  примут вид

$$\delta_1 = d_1 \frac{R^3}{EJ_1}; \quad \delta_2 = d_2 \frac{R^3}{EJ_1}; \quad \delta_3 = d_3 \frac{R^2}{EJ_1};$$

$$e = \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) R,$$

где

$$d_1(\alpha) = \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}; \quad d_2(\alpha) = \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - \frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha};$$

$$d_3(\alpha) = 2\alpha.$$

$\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta \vartheta_1$  вычисляют как разности перемещений концов правой и левой дуг под действием заданной нагрузки. Коэффициенты  $d_i$  для дуг с углом раствора  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  даны в табл. 2. Разложение заданной внешней нагрузки на симметричную и кососимметричную позволяет

2. Значения коэффициента  $d_i$

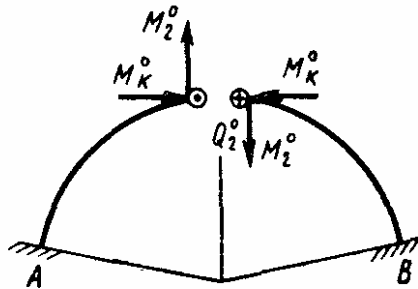
$\alpha$ в град	$\alpha$ в рад	$1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}$	$d_1(\alpha)$	$d_2(\alpha)$	$\alpha$ в град	$\alpha$ в рад	$1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}$	$d_1(\alpha)$	$d_2(\alpha)$
0	0,00000	0,0000	0,0000	0,00000	100	1,74533	0,43575	0,46299	1,91633
10	0,17453	0,00533	0,00015	0,00353	110	1,91986	0,51054	0,67856	2,24126
20	0,34907	0,02025	0,00035	0,02767	120	2,09440	0,58652	0,94524	2,52740
30	0,52360	0,04507	0,00167	0,09060	130	2,26893	0,66240	1,25932	2,76133
40	0,69813	0,07926	0,00683	0,20573	140	2,44346	0,73693	1,61286	2,93586
50	0,87266	0,12223	0,02030	0,38026	150	2,61799	0,80901	1,99400	3,05099
60	1,04720	0,17303	0,04789	0,61420	160	2,79253	0,87753	2,38736	3,11393
70	1,22173	0,23085	0,09757	0,90033	170	2,96706	0,94149	2,77477	3,13806
80	1,39626	0,29469	0,17808	1,22526	180	3,14159	1,0000	3,14159	3,14159
90	1,57080	0,36338	0,29756	1,57080					



свести весь расчет к расчету одной половины бруса. В случае кососимметричного нагружения  $N^0 = M_1^0 = 0$ , в случае симметричного нагружения  $Q_1^0 = 0$ .

При нагружении в плоскости стержня (рис. 6) усилия в ключевом сечении  $C$  определяют по формулам

$$Q_{2c} = -\frac{1}{\delta_4} (\Delta u + e_1 \Delta \vartheta_k); \quad M_{2c} = -\frac{1}{\delta_5} \Delta \vartheta_2;$$



где

$$M_{kc} = -\frac{1}{\delta_6} (\Delta \vartheta_k + e_1 Q_c),$$

$$\delta_4 = \frac{R^2}{EJ_2} \left\{ \left( 1 + \frac{e_1}{R} \right) \left( \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) + \right.$$

Рис. 6

$$+ \lambda \left[ 2\alpha - 4 \left( 1 + \frac{e_1}{R} \right) \sin \alpha + \left( 1 + \frac{e_1}{R} \right)^2 \left( \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \right) \right] \Bigg\};$$

$$\delta_5 = \frac{R}{EJ_2} \left[ (1 + \lambda) \alpha - (\lambda - 1) \frac{\sin 2\alpha}{2} \right];$$

$$\delta_6 = \frac{R}{EJ_2} \left[ (1 + \lambda) \alpha + (\lambda - 1) \frac{\sin 2\alpha}{2} \right];$$

$$e_1 = R \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha};$$

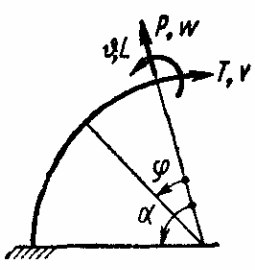
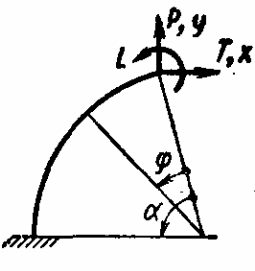
$\Delta u$ ,  $\Delta \vartheta_2$ ,  $\Delta \vartheta_k$  — разности перемещений левого и правого концов брусьев в разрезе, определяемые, например, по формулам (7). Величина  $e_1$  характеризует положение упругого центра. Разложением произвольной нагрузки на симметричную и кососимметричную можно свести весь расчет к расчету одной половины бруса. В случае симметричной нагрузки  $Q_{2c} = 0$ ,  $M_{2c} = 0$ ; в случае кососимметричной нагрузки  $M_{kc} = 0$ .

#### Стержни постоянного сечения, нагруженные в их плоскости

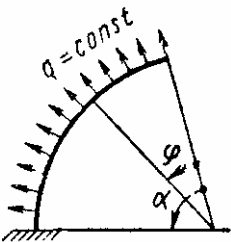
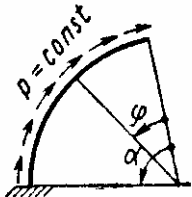
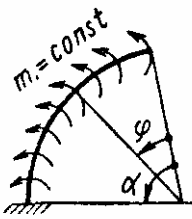
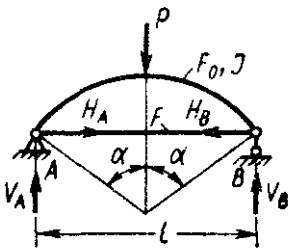
Формулы для определения усилий и перемещений при простейших нагрузках стержня в его плоскости при статически определенном и статически неопределенном закреплении стержня приведены в табл. 3.

Формулы для смещений относятся только к свободным концам стержня, причем смещения  $v$ ,  $w$  направлены по касательной и по радиусу от центра, а смещения  $x$ ,  $y$  — по горизонтальной и вертикальной осям, проведенным из конца стержня;  $\vartheta$  — угол поворота сечения (положительное направление против часовой стрелки).

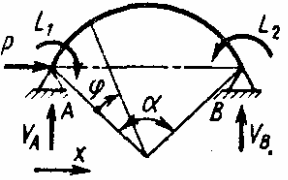
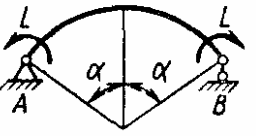
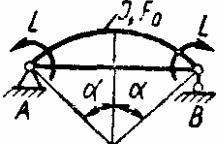
## 3. Усилия и перемещения при нагружении стержня в его плоскости

Схема	Расчетные формулы
	$Q = P \cos \varphi - T \sin \varphi; \quad N = P \sin \varphi + T \cos \varphi;$ $M = L + PR \sin \varphi - TR (1 - \cos \varphi).$ <p>Смещения свободного конца</p> $v = -\frac{R^2}{EJ} [LC_2(\alpha) - TRC_8(\alpha) + PRC_9(\alpha)];$ $w = \frac{R^2}{EJ} [LC_1(\alpha) - TRC_9(\alpha) + PRC_{10}(\alpha)];$ $\varphi = \frac{R}{EJ} [L\alpha - TRC_2(\alpha) + PRC_1(\alpha)].$ $C_8(\varphi) = \frac{3}{2} \varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \approx \frac{\varphi^5}{20} \times$ $\times \left[ 1 - \frac{5}{42} \varphi^2 + \frac{\varphi^4}{144} \right];$ $C_9(\varphi) = \frac{(1 - \cos \varphi)^2}{2} = \frac{1}{2} C_1^2(\varphi) \approx \frac{\varphi^4}{8} \times$ $\times \left[ 1 - \frac{\varphi^2}{6} + \frac{\varphi^4}{80} \right];$ $C_{10}(\varphi) = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \approx \frac{\varphi^3}{3} \left[ 1 - \frac{\varphi^2}{5} + \frac{2\varphi^4}{105} \right]$ <p>(см. стр. 293)</p>
	$Q = P \sin (\alpha - \varphi) - T \cos (\alpha - \varphi);$ $N = P \cos (\alpha - \varphi) + T \sin (\alpha - \varphi);$ $M = L + PR [\cos (\alpha - \varphi) - \cos \alpha] - TR [\sin \alpha - \sin (\alpha - \varphi)];$ $x = \frac{-R^2}{EJ} \left[ L(\alpha \sin \alpha - 1 + \cos \alpha) + PR \left( \cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \right. \right.$ $\left. - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right) - TR \left( \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos 2\alpha + \right.$ $\left. + \frac{3}{4} \sin 2\alpha - 2 \sin \alpha \right) \right];$ $y = \frac{R^2}{EJ} \left[ L(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + PR \left( \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos 2\alpha - \right. \right.$ $\left. - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \right) - TR \left( \cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \right.$ $\left. - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right) \right];$ $\varphi = \frac{R}{EJ} [L\alpha + PR (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) -$ $- TR (\alpha \sin \alpha - 1 + \cos \alpha)]$

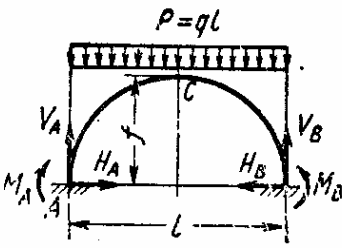
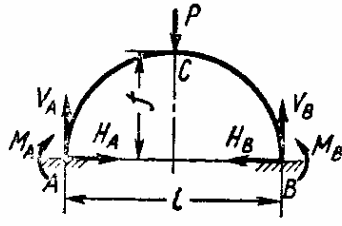
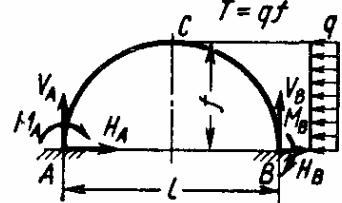
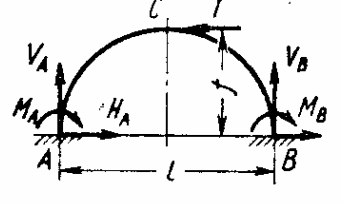
Продолжение табл. 3

Схема	Расчетные формулы
	$Q = qR \sin \varphi; \quad N = qR (1 - \cos \varphi); \quad M = qR^2 (1 - \cos \varphi).$ <p>Смещения свободного конца</p> $v = \frac{qR^4}{EJ} C_8(\alpha); \quad w = -\frac{qR^4}{EJ} C_9(\alpha); \quad \vartheta = \frac{qR^3}{EJ} C_2(\alpha);$ $x = \frac{qR^4}{EJ} \left( \cos \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos 2\alpha + \frac{3}{2} \alpha \sin \alpha - \frac{3}{2} \right);$ $y = \frac{qR^4}{EJ} \left( \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{3}{2} \alpha \cos \alpha \right)$
	$Q = -pR (1 - \cos \varphi); \quad N = pR \sin \varphi;$ $M = -pR (\varphi - \sin \varphi).$ <p>Смещения свободного конца</p> $v = -\frac{pR^4}{EJ} \left( \alpha \sin \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right);$ $\vartheta = \frac{pR^4}{EJ} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right);$ $w = \frac{pR^4}{EJ} \left( \frac{\alpha}{2} + \alpha \cos \alpha - \sin \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$
	$Q = 0; \quad N = 0; \quad M = mR \varphi;$ $v = \frac{mR^3}{EJ} (1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha);$ $w = \frac{mR^3}{EJ} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha);$ $\vartheta = \frac{mR^2}{EJ} \cdot \frac{\alpha^2}{2}$
	$V_A = V_B = \frac{1}{2} P; \quad H_A = H_B =$ $= \frac{P}{2} \cdot \frac{b_5(\alpha)}{b_6(\alpha) + \frac{Jl}{2FR^3} + \frac{Jl}{2F_0R^3}};$ $b_5(\alpha) = \cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4};$ $b_6(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha$

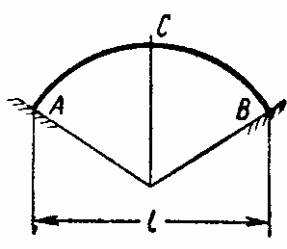
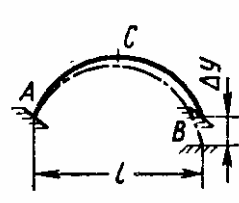
Продолжение табл. 3

Схема	Расчетные формулы
	$V_A = \frac{L_2 - L_1}{2R \sin \frac{\alpha}{2}}; \quad V_B = -V_A;$ $Q = V_A \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right) - P \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right);$ $N = -V_A \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right) - P \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right);$ $M = L_1 + V_A R \left[ \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right) - \sin \frac{\alpha}{2} \right] -$ $- P \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi \right) - \cos \frac{\alpha}{2} \right];$ $\vartheta_{1/\varphi=0} = -\frac{R}{EJ} \{ L_1 b_1(\alpha) + L_2 b_2(\alpha) + PR b_3(\alpha) \};$ $\vartheta_{2/\varphi=0} = \frac{R}{EJ} \{ L_1 b_2(\alpha) + L_2 b_1(\alpha) + PR b_3(\alpha) \};$ $x = -\frac{R^2}{EI} \{ (L_1 + L_2) b_3(\alpha) + PR b_4(\alpha) \};$ $b_1(\alpha) = \frac{2\alpha - \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{4(1 - \cos \alpha)}; \quad b_2(\alpha) = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{4(1 - \cos \alpha)};$ $b_3(\alpha) = \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad b_4(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha$
	$V_A = V_B = 0; \quad M = L;$ $\vartheta_A = -\vartheta_B = \frac{Ll}{2EJ};$
	$V_A = V_B = 0; \quad M = L;$ $H = -\frac{L}{R} \cdot \frac{2b_3(\alpha)}{b_4(\alpha) + \frac{lJ}{2F_0 R^3} + \frac{lJ}{2FR^3}}; \quad l = 2R \sin \alpha$

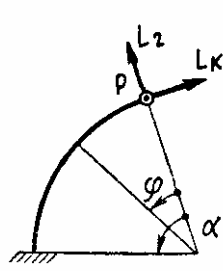
Продолжение табл. 3

Схема	Расчетные формулы					
	$M_B = M_A; H_B = H_A; V_B = V_A$					
	$f/L$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	$V_A/P$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	$H_A/P$	1,2609	0,6378	0,4342	0,3356	0,2758
	$M_A/Pl$	0,00131	0,00414	0,00925	0,01649	0,02467
	$M_B = M_A; H_B = H_A; V_B = V_A$					
	$f/L$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	$V_A/P$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	$H_A/P$	2,3461	0,1677	0,7740	0,5769	0,4551
	$M_A/Pl$	0,03249	0,03526	0,04014	0,04663	0,05326
	$V_C = V_A = -V_B; H_C = -H_A$					
	$f/L$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	$V_A/T$	0,0249	0,0485	0,0706	0,0899	0,1053
	$H_A/T$	0,2141	0,2145	0,2156	0,2182	0,2235
	$M_A/Tl$	0,0068	0,0145	0,0228	0,0332	0,0463
	$M_B = M_A; V_C = V_A = -V_B; M_C = 0;$ $H_A = H_C = H_B = \frac{1}{2} T$					
	$f/L$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	$V_A/T$	0,0744	0,1457	0,2110	0,2692	0,3197
	$M_A/Tl$	0,0128	0,0271	0,0445	0,0654	0,0901

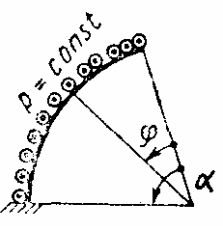
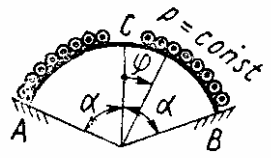
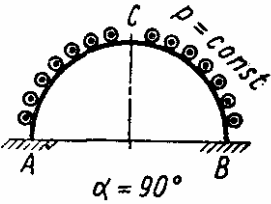
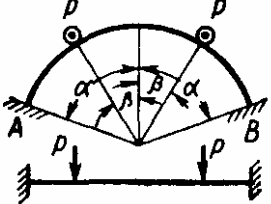
Продолжение табл. 3

Схема	Расчетные формулы
	<p>Равномерный нагрев бруса на температуру <math>t^\circ</math>:  <math>Q_C = 0</math>; <math>M_C = N_C l</math>; <math>M_A = M_B = N_C (l - l_1)</math>;  <math>N_C = \mp \frac{E l \alpha_t t^\circ}{2 \int_0^{\alpha} \frac{R}{J} [R (1 - \cos \varphi) - l_1^2] d\varphi - 2 \int_0^{\alpha} \frac{R}{F} \cos^2 \varphi d\varphi}</math>.</p> <p>По этим же формулам рассчитывают брус в случае горизонтальной усадки опор; в этом случае вместо <math>l \alpha_t t</math> следует подставить <math>\Delta l</math> — величину усадки в горизонтальном направлении</p>
	<p>Осадка одной (левой) опоры в вертикальном направлении на величину <math>\Delta y</math>:  <math>N_C = 0</math>; <math>M_C = 0</math>, <math>M_A = -M_B = Q_C \cdot \frac{l}{2}</math>;  <math>Q_C = \pm \frac{E \Delta y}{2 R^3 \int_0^{\alpha} \frac{1}{J} \left(1 + \frac{J}{R^2 F}\right) \sin^2 \varphi d\varphi}</math></p>

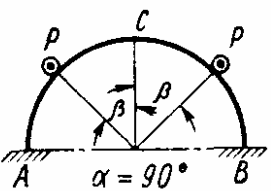
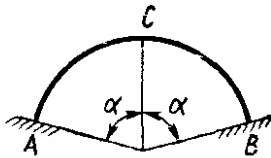
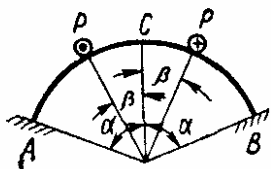
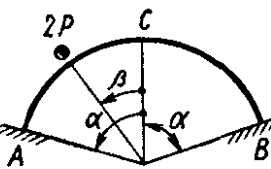
#### 4. Усилия и перемещения при нагружении стержня перпендикулярно его плоскости

Схема	Расчетные формулы
	<p> <math>M_2 = -PR \sin \varphi + L_2 \cos \varphi - L_K \sin \varphi</math>;  <math>M_K = -PR (1 - \cos \varphi) + L_2 \sin \varphi + L_K \cos \varphi</math>.          Смещения свободного конца:  <math>u = \frac{R^2}{EJ} \left\{ PR \left( \frac{3\lambda + 1}{2} \alpha + \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha - 2\lambda \sin \alpha \right) + \right.</math>  <math>\quad \left. + L_2 \left[ \frac{1 - \lambda}{2} \sin^2 \alpha - \lambda (1 - \cos \alpha) \right] + \right.</math>  <math>\quad \left. + L_K \left[ \lambda \sin \alpha - \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha - \frac{\lambda + 1}{2} \alpha \right] \right\}</math>;  <math>\vartheta_2 = \frac{R}{EJ} \left\{ PR \left[ \frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha - \lambda (1 - \cos \alpha) \right] + \right.</math>  <math>\quad \left. + L_2 \left[ \frac{\lambda + 1}{2} \alpha - \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha \right] + L_K \frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha \right\}</math>;  <math>\vartheta_K = \frac{R}{EJ} \left\{ PR \left[ \frac{\lambda - 1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\lambda + 1}{2} \alpha - \lambda \sin \alpha \right] + \right.</math>  <math>\quad \left. + L_2 \frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha + L_K \left( \frac{\lambda + 1}{2} \alpha + \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha \right) \right\}</math> </p>

Продолжение табл. 4

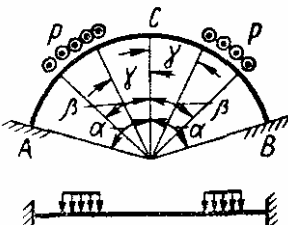
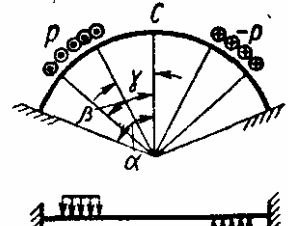
Схема	Расчетные формулы
	$M_2 = -pR^2 (1 - \cos \varphi); \quad M_K = -pR^2 (\varphi - \sin \varphi).$ <p>Смещения свободного конца:</p> $u = \frac{pR^4}{EJ} [(1 - \cos \alpha)^2 + \lambda (\alpha - \sin \alpha)^2];$ $\vartheta_2 = \frac{pR^3}{EJ} \left[ (\lambda + 1) \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha - \lambda \alpha \cos \alpha \right];$ $\vartheta_K = \frac{pR^3}{EJ} \left[ (\lambda + 1) (1 - \cos \alpha) - \frac{\lambda - 1}{4} (1 - \cos 2\alpha) - \lambda \alpha \sin \alpha \right]$
	$Q_{2C} = 0; \quad M_{KC} = 0;$ $-pR^2 \left\{ \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha + \lambda \left( -\alpha \cos \alpha + \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$ $M_{2C} = \frac{\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2} + \lambda \left( -\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{1}$
	$Q_{2C} = 0; \quad M_{KC} = 0;$ $M_{2C} = pR^2 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \right); \quad M_{2A} = M_{2B} = pR^2;$ $M_{KA} = -M_{KB} \approx 0,3pR^2;$ $Q = pR\varphi; \quad M_2 = M_{2C} \cos \varphi + pR^2 (1 - \cos \varphi);$ $M_K = M_{2C} \sin \varphi + pR^2 (\varphi - \sin \varphi)$
	$Q_C = 0; \quad M_{KC} = 0; \quad M_{2C} = d_4 PR;$ $d_4 = \frac{2}{2\alpha (\lambda + 1) - (\lambda - 1) \sin 2\alpha} \{ (1 - \lambda) \sin \alpha \cdot \sin (\alpha - \beta) - (1 + \lambda) (\alpha - \beta) \sin \beta + 2\lambda (\cos \beta - \cos \alpha) \};$ $M_2 = \begin{cases} M_{2C} \cos \varphi & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \beta, \\ M_{2C} \cos \varphi - PR \sin (\varphi - \beta) & \text{при } \beta \leq \varphi \leq \alpha; \end{cases}$ $M_K = \begin{cases} M_{2C} \sin \varphi & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \beta, \\ M_{2C} \sin \varphi - PR [1 - \cos (\varphi - \beta)] & \text{при } \beta \leq \varphi \leq \alpha \end{cases}$

Продолжение табл. 4

Схема	Расчетные формулы	
	$M_{2C} = -\frac{2}{\pi} PR \left[ \cos \beta - \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \sin \beta \right];$ $M_{\kappa A} = PR \cos \beta;$ $M_{2A} = -\frac{2}{\pi} PR \left[ -\frac{\pi}{2} + \cos \beta + \beta \sin \beta \right]$	
	<p>Края бруса поворачиваются так, что при <math>\varphi = \alpha</math> (точка A) <math>\vartheta_2(\alpha) = \vartheta_A</math>; <math>\vartheta_\kappa(\alpha) = \vartheta_{\kappa A}</math>; при <math>\varphi = -\alpha</math> (точка B) <math>\vartheta_2(-\alpha) = \vartheta_B</math>; <math>\vartheta_\kappa(-\alpha) = \vartheta_{\kappa B}</math>;</p> $M_{2C} = d_4 PR + \frac{4EJ}{R [(1+\lambda) 2\alpha - (1-\lambda) \sin 2\alpha]} \times$ $\times \left[ \frac{\vartheta_{\kappa B} - \vartheta_{\kappa A}}{2} \cos \alpha + \frac{\vartheta_B - \vartheta_A}{2} \sin \alpha \right]$	
	$M_{2C} = 0; \quad Q_C = d_5 \cdot P; \quad M_{\kappa C} = d_6 PR;$ $d_5 = \frac{1}{g_{11}} [\lambda (g_{13} \sin \alpha + g_8 g_{14}) + g_{15} \sin \alpha + g_{10} g_{14}];$ $d_6 = \frac{1}{g_{11}} [\lambda (g_{12} g_{13} - g_8 g_{14} + 4g_{14} \sin \alpha) - g_{10} g_{14} + g_{12} g_{15}];$ $g_8 = 2\alpha + \sin 2\alpha; \quad g_{10} = 2\alpha - \sin 2\alpha; \quad g_{12} = \alpha - \sin \alpha;$ $g_{11} = \alpha [2\alpha (1+\lambda) - (1-\lambda) \sin 2\alpha] - 4\lambda \sin^2 \alpha;$ $g_{13} = 2 [(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin (\alpha - \beta) - 2(\sin \alpha - \sin \beta)];$ $g_{14} = \alpha - \beta - \sin (\alpha - \beta);$ $g_{15} = 2 [(\alpha - \beta) \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin (\alpha - \beta)]$	
Углы	$M_2$	$M_\kappa$
$0 \leq \varphi \leq \beta$	$-Q_C R \sin \varphi - M_{\kappa C} \sin \varphi$	$-Q_C R + (M_{\kappa C} + Q_C R) \cos \varphi$
$\beta \leq \varphi \leq \alpha$	$-(Q_C R + M_{\kappa C}) \sin \varphi +$ $+ PR \sin (\varphi - \beta)$	$(Q_C R + M_{\kappa C}) \cos \varphi - Q_C R +$ $+ PR [1 - \cos (\varphi - \beta)]$
	$Q_C = d_5 P; \quad M_{2C} = d_4 PR; \quad M_{\kappa C} = d_6 PR.$ <p>Моменты <math>M_2</math> и <math>M_\kappa</math> в произвольных точках бруса определяют суммированием случаев нагружения, приведенных выше</p>	



Продолжение табл. 4

Схема	Расчетные формулы	
	$Q_C = 0; \quad M_{KC} = 0; \quad M_{2C} = d_1 p R^2;$ $d_1 = \frac{1}{g_4} [(\lambda + 1) g_1 - (1 - \lambda) g_2 - \lambda g_3];$ $g_1 = 2 [2 (\sin \beta - \sin \gamma) + (\alpha - \beta) \cos \beta - (\alpha - \gamma) \cos \gamma];$ $g_2 = 2 \cos \alpha [\sin (\alpha - \gamma) - \sin (\alpha - \beta)];$ $g_3 = 4 (\beta - \gamma) \cos \alpha; \quad g_4 = 2\alpha (1 + \lambda) - (1 - \lambda) \sin 2\alpha.$	
Углы	$M_2$	$M_K$
$0 \leq \varphi \leq \gamma$	$M_C \cos \varphi$	$M_C \sin \varphi$
$\gamma \leq \varphi \leq \beta$	$M_C \cos \varphi - p R^2 [1 - \cos (\varphi - \gamma)]$	$M_C \sin \varphi - p R^2 [\varphi - \gamma - \sin (\varphi - \gamma)]$
$\beta \leq \varphi \leq \alpha$	$M_C \cos \varphi - p R^2 \cdot 2 \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \times$ $\times \sin \left( \varphi - \frac{\beta + \gamma}{2} \right)$	$M_C \sin \varphi - p R^2 [(\beta - \gamma) -$ $- 2 \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \cos \left( \varphi - \frac{\beta + \gamma}{2} \right)]$
	$M_C = 0; \quad Q_C = p R d_2; \quad M_{KC} = p R^2 d_3;$ $d_2 = \frac{1}{g_{11}} \{ [\lambda \cdot \sin \alpha (g_5 + g_6 - g_7) - g_8 g_9] +$ $+ \sin \alpha (g_5 - g_6) - g_9 \cdot g_{10} \};$ $d_3 = \frac{1}{g_{11}} \{ \lambda [g_{12} (g_5 + g_6 - g_7) + g_8 g_9 -$ $- 4 g_9 \sin \alpha] + g_{12} (g_5 - g_6) - g_9 g_{10} \};$ $g_5 = 2 (\alpha - \beta) \sin \beta - (\alpha - \gamma) \sin \gamma - 2 (\cos \beta - \cos \gamma);$ $g_6 = g_2 \operatorname{tg} \alpha; \quad g_7 = g_3 \operatorname{tg} \alpha; \quad g_8 = 2\alpha + \sin 2\alpha;$ $g_9 = (\beta - \gamma) \left[ \frac{1}{2} (\beta + \gamma) - \alpha \right] + \cos (\alpha - \beta) -$ $- \cos (\alpha - \gamma)$	

**Стержни постоянного сечения,  
нагруженные перпендикулярно их плоскости**

Формулы для определения усилий и перемещений при простейших нагрузках стержня перпендикулярно его плоскости при статически определимом и статически неопределимом закреплении приведены в табл. 4. Формулы для смещений относятся к свободным концам стержня.

**ЗАМКНУТОЕ КРУГОВОЕ КОЛЬЦО**

**Основные соотношения**

Разработано несколько методов расчета замкнутого кругового кольца, являющегося статически неопределимой системой.

Первый метод основан на использовании решений для кругового стержня в форме выражений (4) или (6) и (7), в которых постоянные интегрирования определяют из условий стыка

$$\left. \begin{aligned} v(2\pi) &= v(0); \quad w(2\pi) = w(0); \quad \vartheta_1(2\pi) = \vartheta_1(0); \\ u(2\pi) &= u(0); \quad \vartheta_2(2\pi) = \vartheta_2(0); \quad \vartheta_k(2\pi) = \vartheta_k(0). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

При этом постоянные, характеризующие смещения кольца как жесткого целого не определяют; их можно приравнять нулю, так как члены, содержащие их, не входят в выражения для усилий. Эти постоянные могут быть определены из условий стыка с сопрягаемой деталью или, в ряде случаев, из других условий (см. стр. 313).

Для решений в форме уравнений (6) и (7) условия (13) дают:  
в плоскости кольца

$$\left. \begin{aligned} Q_1^0 &= \frac{1}{\pi R} \left\{ \sum_i [L_{1i} C_1 (2\pi - \varphi_i) + P_{1i} R C_5 (2\pi - \varphi_i) - \right. \\ &\quad \left. - T_i R C_3 (2\pi - \varphi_i)] + \frac{EJ_1}{R^3} w^*(2\pi) \right\}; \\ N_1^0 &= -\frac{1}{\pi R} \left\{ \sum_i [L_{1i} \{2\pi - \varphi_i - C_2 (2\pi - \varphi_i)\} + \right. \\ &\quad + P_{1i} R \{C_1 (2\pi - \varphi_i) - C_3 (2\pi - \varphi_i)\} - \\ &\quad - T_i R \{C_2 (2\pi - \varphi_i) - C_4 (2\pi - \varphi_i)\}] + \\ &\quad \left. + \frac{EJ_1}{R^2} \left[ \vartheta_1^*(2\pi) - \frac{1}{R} v^*(2\pi) \right] \right\}; \\ M_1^0 &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \sum_i \left[ L_{1i} \left\{ \frac{3}{2} (2\pi - \varphi_i) - C_2 (2\pi - \varphi_i) \right\} + \right. \right. \\ &\quad + P_{1i} R \left\{ \frac{3}{2} C_1 (2\pi - \varphi_i) - C_3 (2\pi - \varphi_i) \right\} - \\ &\quad - T_i R \left\{ \frac{3}{2} C_2 (2\pi - \varphi_i) - C_4 (2\pi - \varphi_i) \right\}] + \\ &\quad \left. + \frac{EJ_1}{R^2} \left[ \frac{3}{2} \vartheta_1^*(2\pi) - \frac{1}{R} v^*(2\pi) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

перпендикулярно плоскости кольца

$$\begin{aligned}
 Q_2^0 &= \frac{\lambda^2 - 1}{4\pi R \lambda^2} \left\{ \sum_i \left[ P_{2i} R \left\{ \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} C_5 (2\pi - \varphi_i) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\lambda + 1} D_4 (\lambda, 2\pi - \varphi_i) \right\} - L_{2i} \left\{ \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} C_6 (2\pi - \varphi_i) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\lambda + 1} D_1 (\lambda, 2\pi - \varphi_i) \right\} - L_{\kappa i} \left\{ \frac{1}{\lambda - 1} D_3 (\lambda, 2\pi - \varphi_i) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + C_5 (2\pi - \varphi_i) \right\} \right] + \vartheta_{\kappa}^* (2\pi) \frac{EJ_2}{R(\lambda - 1)} + u_{\kappa}^* (2\pi) \frac{EJ_2}{R^2(\lambda + 1)} \Big\}; \\
 M_2^0 &= \frac{1}{(1 + \lambda)\pi} \left\{ \sum_i \left[ P_{2i} R D_1 (\lambda, 2\pi - \varphi_i) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - L_{2i} D_2 (\lambda, 2\pi - \varphi_i) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + L_{\kappa i} (\lambda + 1) C_6 (2\pi - \varphi_i) \right] + \vartheta_2^* (2\pi) \frac{EJ_2}{R} \right\}; \\
 M_{\kappa}^0 &= - \frac{(1 + \lambda)(3\lambda + 1)}{2\pi(1 + 2\lambda - \lambda^2)} \left\{ \sum_i \left[ P_{2i} R \left\{ C_5 (2\pi - \varphi_i) - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{3\lambda + 1} D_4 (\lambda, 2\pi - \varphi_i) \right\} - L_{2i} \left\{ C_6 (2\pi - \varphi_i) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{3\lambda + 1} D_1 (\lambda, 2\pi - \varphi_i) \right\} - L_{\kappa i} \left\{ \frac{1}{\lambda + 1} D_3 (\lambda, 2\pi - \varphi_i) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\lambda + 1}{3\lambda + 1} C_5 (2\pi - \varphi_i) \right\} \right] + \vartheta_{\kappa}^* (2\pi) \frac{EJ_2}{R(\lambda + 1)} - \\
 &\quad \left. - u^* (2\pi) \frac{EJ_2}{R^2(3\lambda + 1)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Начальное сечение для кольца рекомендуется выбирать по оси симметрии или кососимметрии нагрузки. В этом случае часть начальных параметров обращается в нуль.

Другой метод [3, 16] основан на составлении канонических уравнений сил. При этом взаимные смещения определяются интегралом Лора (11), (12). Дальнейшее развитие этого метода в работе [3] приво-

дит к следующим выражениям для силовых факторов в начальном сечении:

в плоскости кольца

$$\left. \begin{aligned} Q_1^0 &= \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_{1p}(\varphi) \sin \varphi d\varphi; \quad N^0 = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_{1p}(\varphi) \cos \varphi d\varphi; \\ M_1^0 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{1p}(\varphi) d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M_{1p}(\varphi) \cos \varphi d\varphi; \end{aligned} \right\} (16)$$

перпендикулярно плоскости кольца

$$\left. \begin{aligned} Q_2^0 &= -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} M_{2p}(\varphi) d\varphi; \\ M_2^0 &= -\frac{1}{(1+\lambda)\pi} \int_0^{2\pi} M_{2p}(\varphi) \cos \varphi d\varphi - \\ &\quad - \frac{\lambda}{(1+\lambda)\pi} \int_0^{2\pi} M_{kp}(\varphi) \sin \varphi d\varphi; \\ M_k^0 &= \frac{1}{(1+\lambda)\pi} \int_0^{2\pi} M_{2p}(\varphi) \sin \varphi d\varphi - \\ &\quad - \frac{\lambda}{(1+\lambda)\pi} \int_0^{2\pi} M_{kp}(\varphi) \cos \varphi d\varphi - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{kp}(\varphi) d\varphi; \end{aligned} \right\} (17)$$

здесь  $M_{1p}(\varphi)$ ,  $M_{2p}(\varphi)$  и  $M_{kp}(\varphi)$  — изгибающие и крутящий моменты от внешней нагрузки в разрезанном кольце:

$$\begin{aligned} M_{1p} &= R \int_0^\varphi \left\{ \int_0^\varphi [p_1(t) \sin(\varphi - t) - q(t) \cos(\varphi - t)] R dt + m_1(\varphi) \right\} d\varphi; \\ M_{2p} &= -R \int_0^\varphi \{ [p_2(t) R + m_3(t)] \sin(\varphi - t) - \\ &\quad - m_2(t) \cos(\varphi - t) \} dt. \end{aligned}$$

После определения начальных силовых параметров величины усилий и смещений по длине кольца определяют по формулам (6) и (7).

Кроме изложенного метода можно рекомендовать метод наложения элементарных нагрузок, изложенный ниже. Метод применим только в случаях нагружения кольца сосредоточенными нагрузками.

### Элементарные нагрузки на кольцо

Три типа нагрузок в плоскости кольца (рис. 7—9) и три типа нагрузок из его плоскости (рис. 10—12) называют *элементарными* [6]. Такие нагрузки возникают в кольце, подкрепляющем свободную безмоментную цилиндрическую оболочку, при нагружении кольца

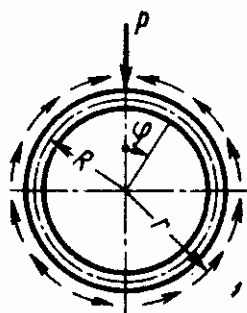


Рис. 7

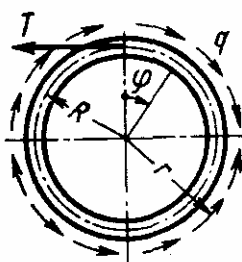


Рис. 8

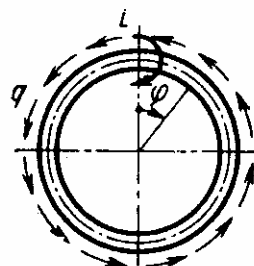


Рис. 9

сосредоточенными силами; уравнивающие их касательные к оси кольца и направленные по бинормали к ней распределенные нагрузки распределяются по радиусу  $r$  (радиусу сопряжения с оболочкой).

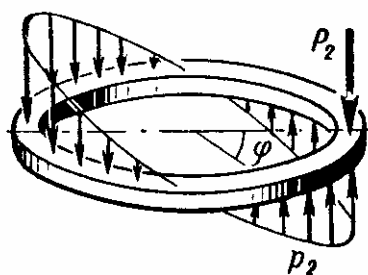


Рис. 10

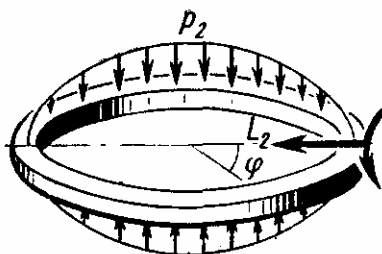


Рис. 11

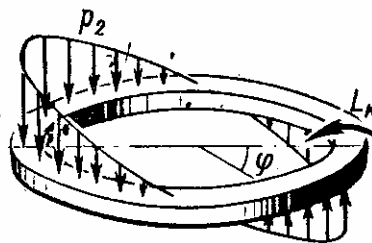


Рис. 12

Нагрузки в плоскости кольца. *Первая элементарная нагрузка* (см. рис. 7) — сосредоточенная радиальная сила  $P$ , уравниваемая касательными усилиями, распределенными по закону

$$q = -\frac{P}{\pi r} \sin \varphi.$$

Перенеся эту нагрузку на ось стержня, получим

$$q = -\frac{P}{\pi R} \sin \varphi; \quad m_1 = -\frac{P}{\pi} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \sin \varphi;$$

тогда правая часть уравнения (2) будет  $f_1 = -\frac{PR^3}{\pi EJ} \sin \varphi$  и общее решение с учетом кососимметрии функции  $v$  примет вид

$$v = A_1 \sin \varphi + A_3 \varphi + A_5 \varphi \cos \varphi + \frac{PR^3}{8EJ} \varphi^2 \sin \varphi.$$

Из условий (13) находят постоянные  $A_3$  и  $A_5$ . Коэффициенты жестких смещений кольца определяют из соотношений

$$\int_0^{2\pi} v(\varphi) d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} v(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} v(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (18)$$

Окончательные выражения для усилий и смещений по кольцу на участке  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\left. \begin{aligned} Q &= K_{QP}P; \quad N = K_{NP}P; \quad M_1 = K_{MP}PR; \\ v &= K_{vP} \frac{PR^3}{EJ_1}; \quad w = K_{wP} \frac{PR^3}{EJ_1}; \quad \vartheta_1 = K_{\vartheta P} \frac{PR^2}{EJ_1}; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где коэффициенты  $K_{iP}$  означают:

$$\left. \begin{aligned} K_{QP} &= \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \cos \varphi - \left( \frac{2r}{R} - \frac{3}{2} \right) \sin \varphi \right]; \\ K_{NP} &= -\frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \sin \varphi + \left( \frac{2r}{R} - \frac{1}{2} \right) \cos \varphi \right]; \\ K_{MP} &= \frac{1}{2\pi} \left( \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi + 1 - \pi \sin \varphi \right); \\ K_{vP} &= \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) (1 - \cos \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{11}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \sin \varphi \right]; \\ K_{wP} &= \frac{1}{2\pi} \left[ -1 + \frac{1}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \cos \varphi \right]; \\ K_{\vartheta P} &= \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) (1 - \cos \varphi) - \frac{3}{2} \sin \varphi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Графики этих коэффициентов показаны на рис. 13—16.

Вторая элементарная нагрузка (см. рис. 8) — касательная к оси кольца сосредоточенная сила  $T$ , уравновешенная распределенной нагрузкой по закону

$$q = \frac{T}{\pi R} \left( \cos \varphi + \frac{R}{2r} \right).$$

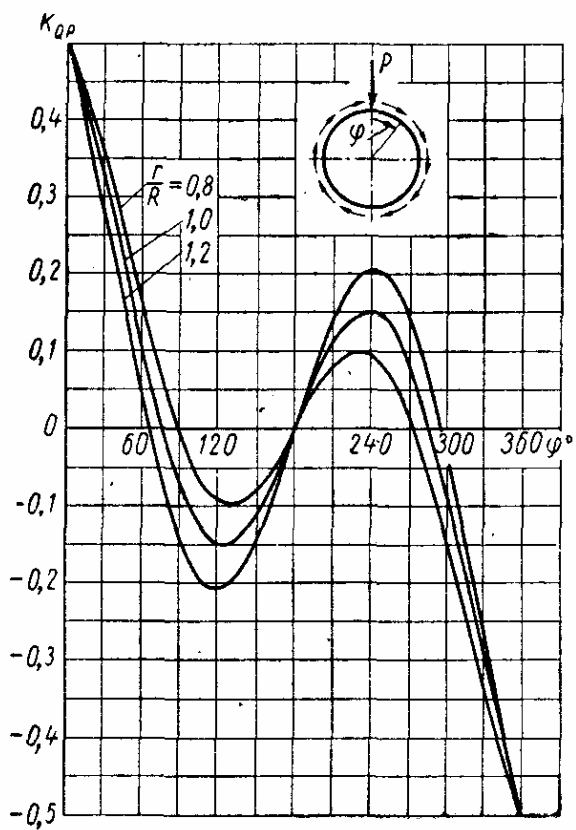


Рис. 13

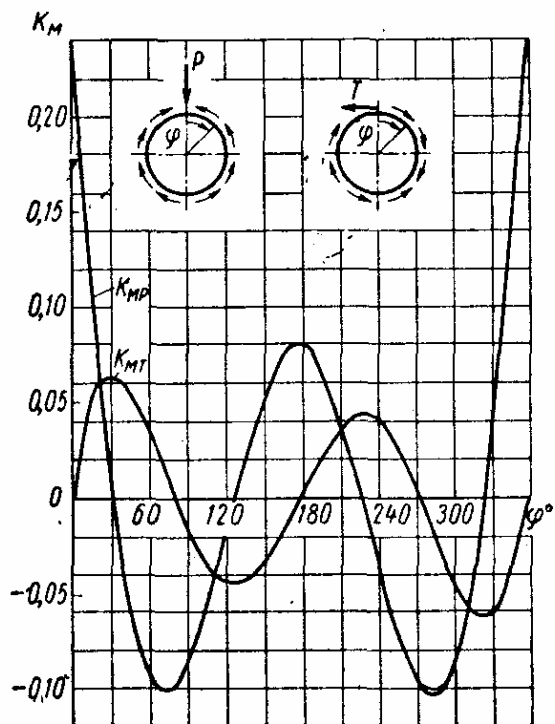


Рис. 14

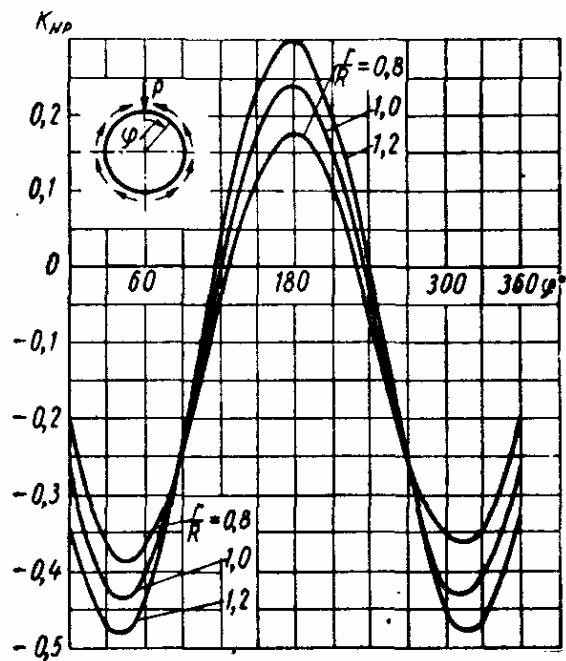


Рис. 15

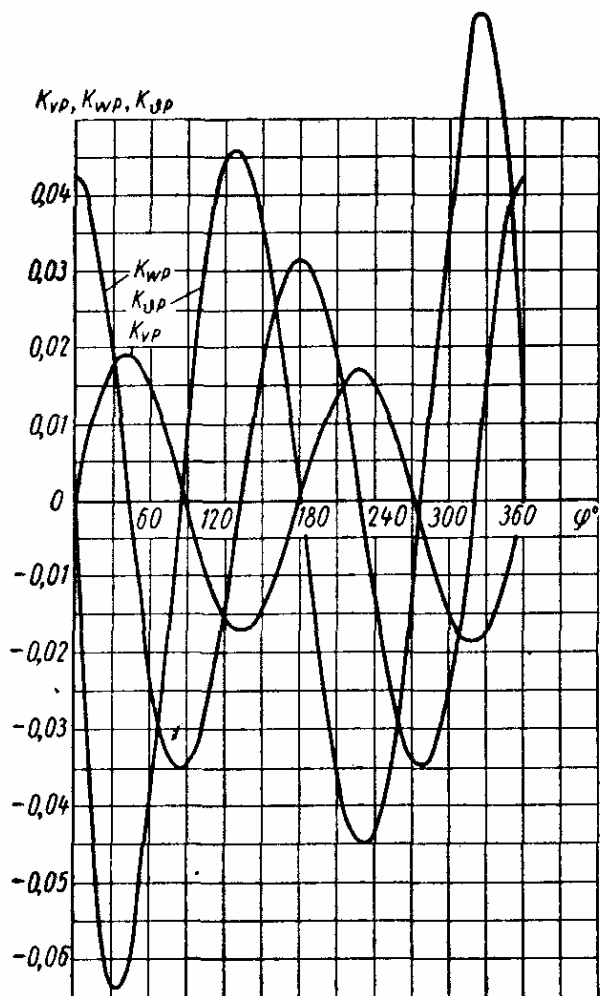


Рис. 16

Усилия и смещения по кольцу при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ :

$$\left. \begin{aligned} Q &= K_{QT}T; \quad N = K_{NT}T; \quad M = K_{MT}TR; \\ v &= K_{vT} \frac{TR^3}{EJ_1}; \quad w = K_{wT} \frac{TR^3}{EJ_1}; \quad \vartheta = K_{\vartheta T} \frac{TR^2}{EJ_1}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_{QT} &= \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \sin \varphi - \left( \frac{5}{2} - \frac{2r}{R} \right) \cos \varphi - \frac{R}{r} \right]; \\ K_{NT} &= \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \cos \varphi - \left( \frac{2r}{R} - \frac{3}{2} \right) \sin \varphi \right]; \\ K_{MT} &= \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \cos \varphi + \frac{3}{2} \sin \varphi + \varphi - \pi \right]; \\ K_{\vartheta T} &= \frac{1}{2\pi} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} + \pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{2} \cos \varphi - (\pi - \varphi) \sin \varphi \right]; \\ K_{vT} &= \frac{1}{2\pi} \left[ 2 - \frac{\pi^2}{3} + \pi\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{23}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi \right]; \\ K_{wT} &= \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) (1 - \cos \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{11}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \sin \varphi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Третья элементарная нагрузка (см. рис. 9) — сосредоточенный момент  $L$ , уравновешенный распределенной нагрузкой

$$q = \frac{L}{2\pi r^2}.$$

Усилия и смещения по кольцу при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ :

$$\left. \begin{aligned} Q &= K_{QL} \frac{L}{R}; \quad N = K_{NL} \frac{L}{R}; \quad M = K_{ML}L; \\ v &= K_{vL} \frac{LR^2}{EJ_1}; \quad w = K_{wL} \frac{LR^2}{EJ_1}; \quad \vartheta = K_{\vartheta L} \frac{LR}{EJ_1}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$



где

$$\left. \begin{aligned}
 K_{QL} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{R}{r} + 2 \cos \varphi \right); & K_{NL} &= -\frac{\sin \varphi}{\pi}; \\
 K_{ML} &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi - \varphi}{2} - \sin \varphi \right); \\
 K_{vL} &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi^2}{3} - 1 - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5}{2} \cos \varphi + (\pi - \varphi) \sin \varphi \right]; \\
 K_{\omega L} &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \pi - \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi - (\pi - \varphi) \cos \varphi \right]; \\
 K_{\theta L} &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi^2}{3} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} - 2 \cos \varphi \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Графики коэффициентов  $K$ , содержащих в индексе  $T$ , показаны на рис. 14, 17—18, а содержащих в индексе  $L$  — на рис. 19—21.

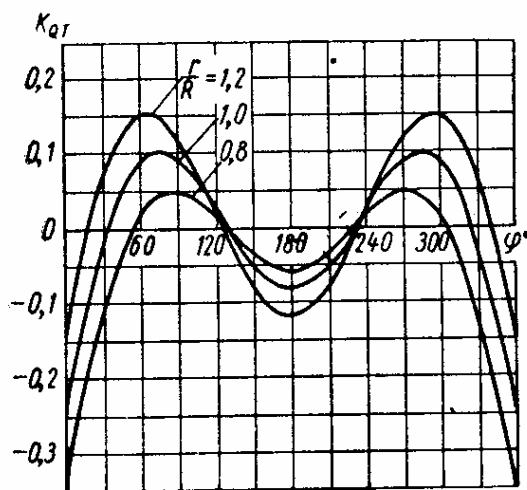


Рис. 17

Нагрузки перпендикулярно к плоскости кольца. Четвертая элементарная нагрузка (см. рис. 10) — сосредоточенная осевая сила  $P_2$ , уравновешенная распределенной, направленной по бинормали к оси кольца, нагрузкой

$$p_2 = \frac{P_2}{\pi r} \left( \frac{1}{2} + \cos \varphi \right).$$

Определив частные решения согласно формулам (10), значения начальных параметров в выражениях для усилий можно найти по формулам (15). Значения начальных параметров в выражениях для смещений,

в которые также входят коэффициенты смещений кольца как жесткого целого, определяют из соотношений

$$\int_0^{2\pi} u(\varphi) d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} u(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} u(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (25)$$

В результате окончательные выражения для усилий и смещений записывают в виде

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= \bar{K}_{QP} P_2; & M_2 &= \bar{K}_{MP} P_2 R; & M_K &= \bar{K}_{HP} P_2 R; \\
 \vartheta_K &= \bar{K}_{\theta P} \frac{P_2 R^2}{EJ_2}; & u &= \bar{K}_{uP} \frac{P_2 R^3}{EJ_2},
 \end{aligned}$$

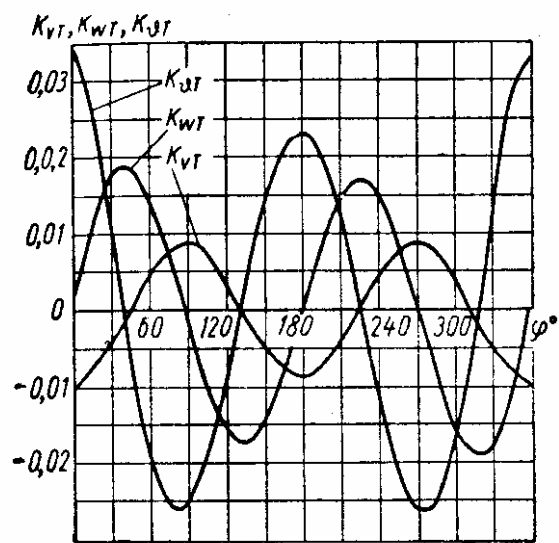


Рис. 18

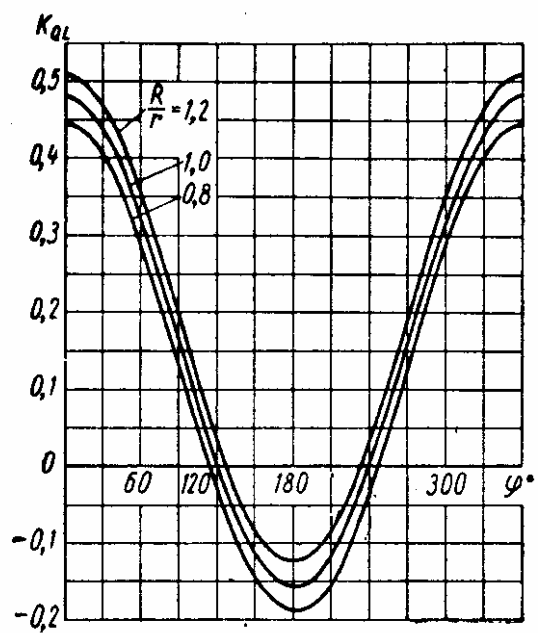


Рис. 19

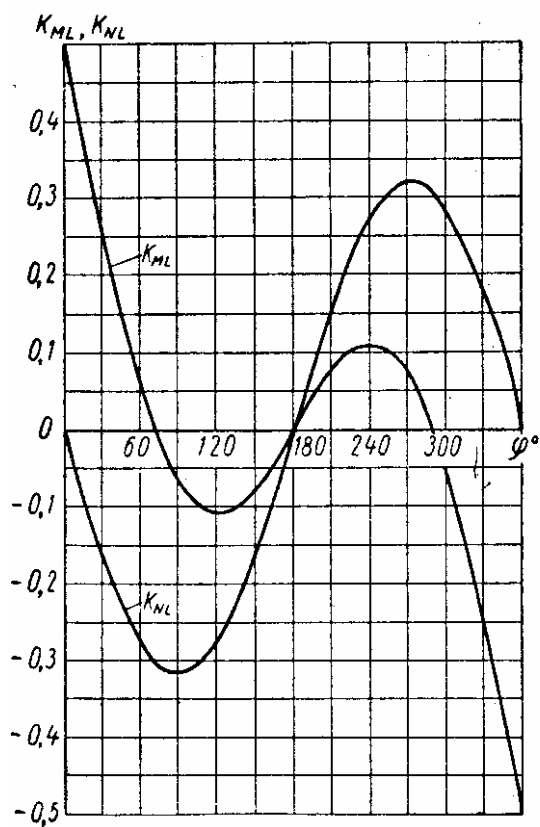


Рис. 20

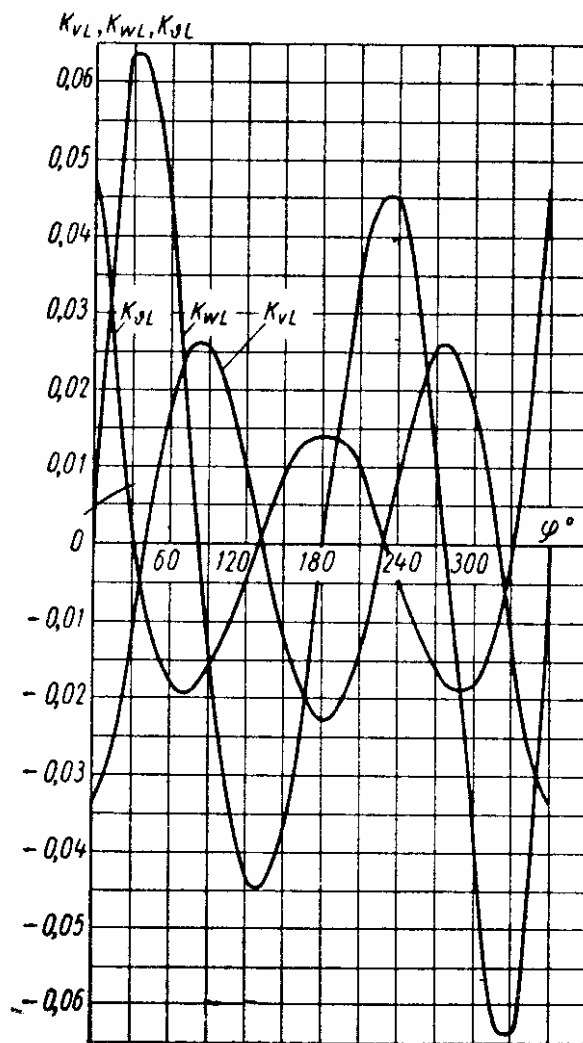


Рис. 21

где

$$\bar{K}_{QP} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi - \varphi}{2} - \sin \varphi \right);$$

$$\bar{K}_{MP} = -\frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi - 1 \right];$$

$$\bar{K}_{HP} = \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \left( 1 - \frac{r}{R} \cos \varphi \right) - \left( 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} \right) \sin \varphi \right];$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{uP} = & -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{R} \left\{ (1 + \lambda) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{4} - \pi\varphi + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\varphi^2}{2} \right) \cos \varphi - \frac{1}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi \right] + \right. \\ & \left. + \lambda \left[ \frac{r}{R} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{R}{r} \cdot \frac{(\pi - \varphi^2)}{2} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{R}{r} + 3 \frac{r}{R} \right) \cos \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{R}{r} (\pi - \varphi) \sin \varphi \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\theta P} = & \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{R} \left\{ (1 - \lambda) \left[ 1 + \frac{1}{2} (\pi - \varphi) \sin \varphi \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \lambda}{2} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2} \right) \cos \varphi + \right. \\ & \left. + \lambda \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{R}{r} \right) \cos \varphi + \frac{R}{r} (\pi - \varphi) \sin \varphi \right] \right\}. \end{aligned}$$

Пятая элементарная нагрузка (см. рис. 11) — сосредоточенный изгибающий момент  $L_2$ , уравновешенный распределенными по кольцу в направлении бинормали усилиями:

$$p_2 = \frac{t_2}{\pi r^2} \sin \varphi.$$

Приведем, в качестве примера, решение задачи энергетическим методом. Перенеся нагрузку  $p_2$  на ось бруса, будем иметь

$$p = \frac{L_2}{\pi R r} \sin \varphi; \quad m = \frac{L_2 R}{\pi R r} \left( 1 - \frac{r}{R} \right) \sin \varphi. \quad (26)$$

Выражения изгибающего и крутящего моментов в разрезанном кольце определяются по формулам (7) и (10). Подставляя в них выражения (26) при  $r = R$ , получим

$$M_{2P} = -\frac{L_2}{2\pi} (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi);$$

$$M_{\kappa P} = -\frac{L_2}{2\pi} \varphi \sin \varphi.$$

Подставив теперь эти выражения в формулы (17), получим значения начальных силовых параметров. Выражения для смещений необходимо принимать по формулам (7). При этом начальные параметры смещений следует определять из соотношений (25).

В результате усилия и смещения в этом случае нагружения будут

$$Q_2 = \bar{K}_{QL} \frac{L_2}{r}; \quad M_2 = \bar{K}_{ML} L_2; \quad M_\kappa = \bar{K}_{HL} L_2;$$

$$\vartheta_\kappa = \bar{K}_{\vartheta L} \frac{L_2 R}{EJ_2}; \quad u = \bar{K}_{uL} \frac{L_2 R^2}{EJ_2},$$

где

$$\bar{K}_{QL} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \cos \varphi \right);$$

$$\bar{K}_{ML} = \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right];$$

$$\bar{K}_{HL} = -\frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi - 1 \right];$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{uL} = & \frac{1}{8\pi} \left\{ (1 + \lambda) \left[ (\pi - \varphi)^2 \sin \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) \sin \varphi \right] + \lambda [4 (\pi - \varphi) (1 - \cos \varphi) - 9 \sin \varphi] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\vartheta L} = & \frac{1}{8\pi} \left\{ (1 + \lambda) \left[ (\pi - \varphi)^2 \sin \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \right) \sin \varphi \right] + \frac{3}{2} \lambda \sin \varphi \right\}. \end{aligned}$$

Шестая элементарная нагрузка (см. рис. 12) — сосредоточенный крутящий момент  $L_k$ , уравновешенный распределенными по кольцу усилиями

$$\rho_2 = \frac{L_k}{\pi R^2} \cos \varphi.$$

Усилия и смещения в этом случае нагружения

$$Q_2 = \bar{K}_{QH} \frac{L_k}{R}; \quad M_2 = \bar{K}_{MH} L_k; \quad M_k = \bar{K}_{HH} L_k;$$

$$u = \bar{K}_{uH} \frac{L_k R^2}{EJ_2}; \quad \vartheta_k = \bar{K}_{\vartheta H} \frac{L_k R}{EJ_2},$$

где

$$\bar{K}_{QH} = \frac{\sin \varphi}{\pi}; \quad \bar{K}_{MH} = \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \sin \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 3\lambda}{1 + \lambda} \cos \varphi \right];$$

$$\bar{K}_{HH} = \frac{1}{2\pi} \left[ (\pi - \varphi) \cos \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - \lambda}{1 + \lambda} \sin \varphi \right];$$

$$\bar{K}_{uH} = \frac{1 + \lambda}{8\pi} \left[ (\pi - \varphi)^2 \cos \varphi + 2(\pi - \varphi) \sin \varphi - \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{2} \right) \cos \varphi - 4 \right];$$

$$\bar{K}_{\vartheta H} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1 + \lambda}{4} \left[ (\pi - \varphi)^2 \cos \varphi - 2(\pi - \varphi) \sin \varphi - \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) \cos \varphi \right] + \left[ (\pi - \varphi) \sin \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 3\lambda}{1 + \lambda} \cos \varphi \right] \right\}.$$

#### Усилия и перемещения при простейших нагрузках в плоскости кольца

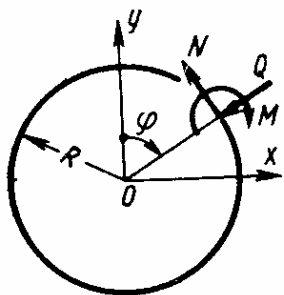

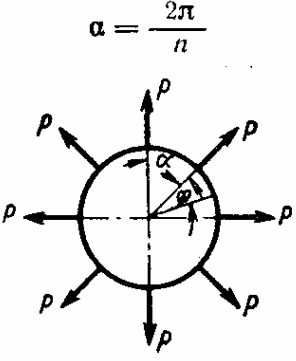
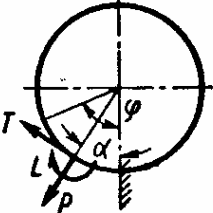


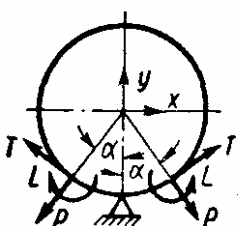
Рис. 22

Формулы для определения усилий и перемещений при простейших нагрузках в плоскости кольца приведены в табл. 5. На рис. 22 показаны положительные направления для усилий, действующих напереди лежащее сечение кольца в направлении возрастания угла  $\varphi$ ;  $\delta_x$  и  $\delta_y$  — изменения диаметров кольца в направлении осей  $x$  и  $y$ . Знак плюс соответствует увеличению диаметра.

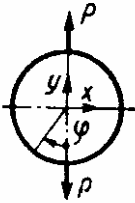
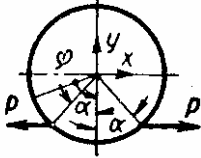
## 5. Усилия и перемещения при простейших нагрузках в плоскости кольца

Схема	Расчетные формулы
	$Q = 0; \quad M = 0; \quad N = qR;$ $\vartheta = 0; \quad v = 0; \quad w = -\frac{qR^2}{EF}$
 <p style="text-align: center;"><math>\alpha = \frac{2\pi}{n}</math></p>	$Q = -\frac{P}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \sin \left( \frac{\pi}{n} - \varphi \right);$ $N = \frac{P}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cos \left( \frac{\pi}{n} - \varphi \right);$ $M = -PR \left[ \frac{n}{2\pi} - \frac{\cos \left( \frac{\pi}{n} - \varphi \right)}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \right];$ $M_{\max} = -PR \left[ \frac{n}{2\pi} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{2} \right];$ $M \left( \frac{\alpha}{2} \right) = -\frac{PR}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \left[ 1 - \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right].$ <p>Смещение точки приложения силы</p> $w(0) = -\frac{PR^3}{EJ} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left\{ \frac{\alpha}{4} + \right.$ $\left. + \frac{\sin \alpha}{4} - \frac{2}{\alpha} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\}$
	<p style="text-align: center;"><math>0 \leq \varphi \leq \alpha</math></p> $M = \frac{1}{2\pi} \{ PR[-(2\pi - \alpha) \sin(\alpha - \varphi) + \sin \alpha \cdot \sin \varphi - \cos \alpha + 1] +$ $+ TR[(2\pi - \alpha)[1 - \cos(\alpha - \varphi)] + \sin \alpha(1 - \cos \varphi) -$ $- 2 \sin \varphi(1 - \cos \alpha)] + L[2\pi - \alpha - 2 \sin \varphi - 2 \sin(\alpha - \varphi)] \};$ $Q = \frac{1}{2\pi} \{ P[(2\pi - \alpha) \cos(\alpha - \varphi) + \sin \alpha \cdot \cos \varphi] +$ $+ T[-(2\pi - \alpha) \sin(\alpha - \varphi) - 2 \cos \varphi(1 - \cos \alpha) +$ $+ \sin \alpha \cdot \cos \varphi] + 2 \frac{L}{R} [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \varphi] \};$ $N = \frac{1}{2\pi} \{ P[(2\pi - \alpha) \sin(\alpha - \varphi) - \sin \alpha \cdot \sin \varphi] +$ $+ T[(2\pi - \alpha) \cos(\alpha - \varphi) + 2 \sin \varphi(1 - \cos \alpha) +$ $+ \sin \alpha \cdot \cos \varphi] + 2 \frac{L}{R} [\sin(\alpha - \varphi) + \sin \varphi] \};$

Продолжение табл. 5

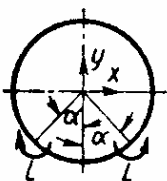
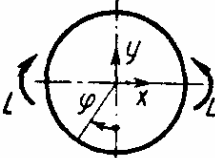
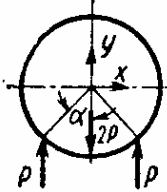
Схема	Расчетные формулы
	$\alpha \leq \varphi \leq 2\pi$ $M = \frac{1}{2\pi} \{ PR [\alpha \sin (\alpha - \varphi) + \sin \alpha \cdot \sin \varphi - \cos \alpha + 1] +$ $+ TR [-\alpha + \alpha \cos (\alpha - \varphi) + \sin \alpha (1 - \cos \alpha) -$ $- 2 (1 - \cos \alpha) \sin \varphi] - L [\alpha + 2 \sin \varphi + 2 \sin (\alpha - \varphi)] \};$ $Q = \frac{1}{2\pi} \{ P [-\alpha \cos (\alpha - \varphi) + \sin \alpha \cos \varphi] +$ $+ T [\alpha \cdot \sin (\alpha - \varphi) - 2 \cos \varphi (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot \sin \varphi] +$ $+ 2 \frac{L}{R} [\cos (\alpha - \varphi) - \cos \varphi] \};$ $N = \frac{1}{2\pi} \{ P [-\alpha \cdot \sin (\alpha - \varphi) - \sin \alpha \cdot \sin \varphi] +$ $+ T [-\alpha \cdot \cos (\alpha - \varphi) + 2 \sin \varphi (1 - \cos \alpha) +$ $+ \sin \alpha \cdot \cos \varphi] + 2 \frac{L}{R} [\sin (\alpha - \varphi) + \sin \varphi] \}$
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = \frac{1}{\pi} \{ PR [1 - \cos \alpha - (\pi - \alpha) \sin \alpha \cdot \cos \varphi +$ $+ \pi \cos \alpha \cdot \sin \varphi] + TR [\pi - \alpha + \sin \alpha -$ $- (\pi - \alpha) \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \cos \varphi - \pi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi] +$ $+ L [\pi - \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \varphi] \};$ $Q = \frac{1}{\pi} \{ P [\pi \cos \alpha \cdot \cos \varphi + (\pi - \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi] +$ $+ T [\sin \alpha \cdot \sin \varphi + (\pi - \alpha) \cos \alpha \cdot \sin \varphi - \pi \sin \alpha \cdot \cos \varphi] +$ $+ \frac{L}{R} 2 \sin \alpha \cdot \sin \varphi \};$ $N = \frac{1}{\pi} \{ P [(\pi - \alpha) \sin \alpha \cdot \cos \varphi - \pi \cos \alpha \cdot \sin \varphi] +$ $+ T [\pi \sin \alpha \cdot \sin \varphi + \sin \alpha \cdot \cos \varphi + (\pi - \alpha) \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi] +$ $+ \frac{L}{R} 2 \sin \alpha \cdot \cos \varphi \}$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = \frac{1}{\pi} \{ PR [1 - \cos \alpha + \alpha \cdot \sin \alpha \cos \varphi] + TR [\sin \alpha -$ $- \alpha + (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) \cos \varphi] - L [\alpha + 2 \sin \alpha \cos \varphi] \};$ $Q = \frac{1}{\pi} \{ -P \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi + T \sin \varphi (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) +$ $+ \frac{L}{R} 2 \sin \alpha \cdot \sin \varphi \};$ $N = \frac{1}{\pi} \{ -P \cdot \alpha \sin \alpha \cdot \cos \varphi + T \cos \varphi (\sin \alpha -$ $- \alpha \cos \alpha) + \frac{L}{R} 2 \sin \alpha \cdot \cos \varphi \}.$

Продолжение табл. 5

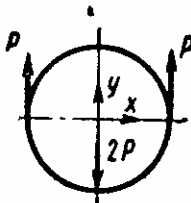
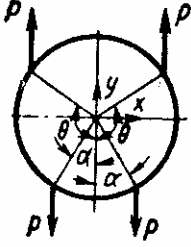
Схема	Расчетные формулы
	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ $\pi EJ \delta_x = PR^3 \left( 2 \cos \alpha + \frac{\pi \alpha}{2} \sin \alpha - 2 \right) +$ $+ TR^3 \left[ \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right) \sin \alpha - \frac{\pi \alpha}{2} \cos \alpha - 2 \alpha \right] +$ $+ LR^2 [2 \alpha - \pi \sin \alpha].$ $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ $\pi EJ \delta_x = PR^3 \left[ 2 \cos \alpha + \frac{\pi (\pi - \alpha)}{2} \sin \alpha - \pi \cos \alpha - \right.$ $\left. - 2 \right] - TR^3 \left[ 2 (\pi - \alpha) + 2 \sin \alpha - \frac{\pi}{2} (\pi - \alpha) \cos \alpha - \right.$ $\left. - \frac{3\pi}{2} \sin \alpha \right] - LR^2 [2 (\pi - \alpha) - \pi \sin \alpha]$
	$M = -PR \left( 0,3183 - \frac{1}{2} \sin \varphi \right); \quad N = \frac{1}{2} P \sin \varphi;$ $Q = -\frac{1}{2} P \cos \varphi; \quad \delta_x = -0,137 \frac{PR^3}{EJ};$ $\delta_y = +0,149 \frac{PR^3}{EJ}$
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = PR [0,3183 (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha \cos \varphi -$ $- \cos \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha) - \cos \varphi + \cos \alpha];$ $N = P [0,3183 (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) - 1] \cdot \cos \varphi;$ $Q = -P [0,3183 (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) - 1] \cdot \sin \varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = PR [0,3183 (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha \cos \varphi -$ $- \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi);$ $N = P [0,3183 \cdot \cos \varphi (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)];$ $Q = -P \cdot 0,3183 \cdot \sin \varphi (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$ $\delta_x = -\frac{PR^3}{EJ} [0,6366 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) +$ $+ \frac{1}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \alpha)];$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[ 0,6366 (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha) + \cos \alpha + \right.$ $\left. + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right]$



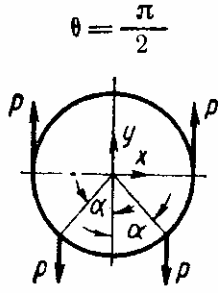
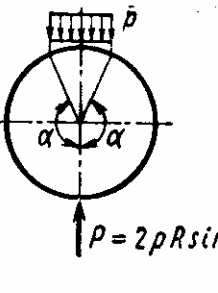
Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы	
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = L [0,3183 (2 \cos \varphi \times \sin \alpha + \alpha) - 1];$ $N = \frac{L}{R} 0,6366 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi$	$\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = L \left[ 0,6366 \cos \varphi + \frac{1}{2} \right];$ $N = \frac{L}{R} 0,6366 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha$
	$Q = -\frac{L}{R} 0,6366 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi;$ $\delta_x = \frac{LR^2}{EJ} (0,6366 \alpha - \sin \alpha);$ $\delta_y = \frac{LR^2}{EJ} (0,6366 \alpha + \cos \alpha - 1)$	
	$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $M = L \left( 0,6366 \cos \varphi - \frac{1}{2} \right)$	$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ $M = L \left( 0,6366 \cos \varphi + \frac{1}{2} \right)$
	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $N = \frac{L}{R} 0,6366 \cos \varphi; \quad Q = -\frac{L}{R} 0,6366 \cdot \sin \varphi;$ $\delta_x = 0; \quad \delta_y = 0;$ $M_{\max} = \pm \frac{1}{2} L$	
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = PR [0,3183 (\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi - 1) - \sin \alpha + \sin \varphi];$ $Q = P (\cos \varphi - 0,3183 \sin^2 \alpha \cdot \sin \varphi);$ $N = P \cdot 0,3183 (\sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi).$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = PR [0,3183 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi - 1)];$ $Q = -P \cdot 0,3183 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin \varphi;$ $N = P \cdot 0,3183 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi;$ $\delta_x = \frac{PR^3}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} \sin^2 \alpha + 0,6366 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1) \right];$	

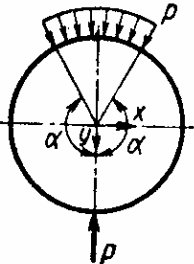
Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы	
	$\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) + \right. \\ \left. + 0,6366 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1) - \sin \alpha \right]$	
	$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $M = PR (0,3183 \cdot \cos \varphi + \sin \varphi - 0,8183);$ $N = P (0,3183 \cos \varphi + \sin \varphi);$ $Q = -P (0,3183 \cdot \sin \varphi - \cos \varphi)$	$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ $M = PR (0,1817 + 0,3183 \cos \varphi);$ $N = P \cdot 0,3183 \cdot \cos \varphi;$ $Q = -P \cdot 0,3183 \cdot \sin \varphi$
	$\delta_x = 0,1366 \frac{PR^3}{EJ}; \quad \delta_y = -0,1488 \frac{PR^3}{EJ}$	
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = PR [0,3183 (\theta \sin \theta + \cos \theta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi + \sin^2 \theta \cos \varphi) - \sin \theta + \sin \alpha];$ $Q = P [0,3183 \sin \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta)];$ $N = -P [0,3183 \cdot \cos \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta)].$	
	$\alpha \leq \varphi \leq \theta$ $M = PR [0,3183 (\theta \sin \theta + \cos \theta - \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi + \sin^2 \theta \cdot \cos \varphi) - \sin \theta + \sin \varphi];$ $N = P [0,3183 \cdot \cos \varphi (\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha) + \sin \varphi];$ $Q = -P [0,3183 \cdot \sin \varphi (\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha) - \cos \varphi].$	
	$\theta \leq \alpha \leq \pi$ $M = PR [0,3183 (\theta \sin \theta + \cos \theta - \alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi + \sin^2 \theta \cdot \cos \varphi);$ $N = P [0,3183 \cdot \cos \varphi (\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)];$ $Q = -P \cdot 0,3183 \cdot \sin \varphi (\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha);$ $\delta_x = \frac{-PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \theta) + 0,6366 (\theta \sin \theta + \cos \theta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + 1 - 2 \sin \theta \right];$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \theta - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \alpha) + \right. \\ \left. + 0,6366 (\theta \cdot \sin \theta + \cos \theta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + \sin \alpha - \sin \theta \right]$	

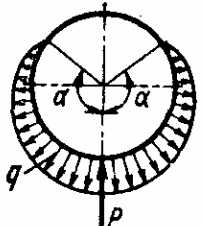
Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы
 <p style="text-align: center;"><math>\theta = \frac{\pi}{2}</math></p>	$\underline{0 \leq \varphi \leq \alpha}$ $M = PR \left[ 0,3183 (\cos^2 \alpha \cdot \cos \varphi - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + \sin \alpha - \frac{1}{2} \right];$ $N = P \cdot 0,3183 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \varphi;$ $Q = -P \cdot 0,3183 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \varphi.$ $\underline{\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}$ $M = PR \left[ 0,3183 (\cos^2 \alpha \cdot \cos \varphi - \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha) + \sin \varphi - \frac{1}{2} \right];$ $N = P (0,3183 \cos^2 \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi);$ $Q = P (\cos \varphi - 0,3183 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \varphi).$ $\underline{\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi}$ $M = PR \left[ 0,3183 (\cos^2 \alpha \cdot \cos \varphi - \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha) + \frac{1}{2} \right];$ $N = P \cdot 0,3183 \cos^2 \alpha \cdot \cos \varphi;$ $Q = -P \cdot 0,3183 \cos^2 \alpha \cdot \sin \varphi;$ $\delta_x = -\frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + 1) - 0,6366 (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) \right];$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[ \sin \alpha - \frac{1}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha) - 0,6366 (\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha) + 0,7854 \right]$
 <p style="text-align: center;"><math>P = 2pR \sin \alpha</math></p>	$M(0) = -pR^2 \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{\pi} \left( \sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha - \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{4} \alpha \right) \right].$ $\underline{0 \leq \varphi \leq \alpha}$ $M = M(0) + pR^2 \left[ \sin \alpha \cdot \sin \varphi - \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha (1 - \cos \varphi) \right];$

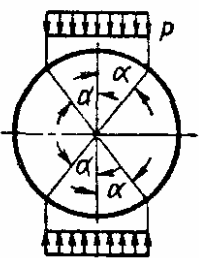
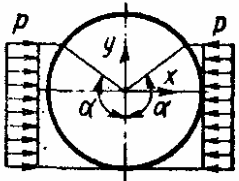
Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы
	$N = -pR \left( \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \alpha \cdot \sin \varphi \right);$ $Q = -pR \left( \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \cdot \sin \varphi - \sin \alpha \cdot \cos \varphi \right).$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = M(0) - pR^2 \left[ \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi) \right];$ $N = -pR \left( \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \cdot \cos \varphi + \sin^2 \varphi \right);$ $Q = -pR \left( \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \right);$ $\delta_x = \frac{2pR^4}{EJ} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{12} \sin^3 \alpha - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha}{4} - \sin \alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \alpha \right) \right];$ $\delta_y = -\frac{2pR^4}{EJ} \left[ \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} \alpha \sin \alpha - \frac{1}{12} \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{1}{6} \cos \alpha - \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4} \alpha - \sin \alpha \right) \right]$
 <p><math>P = pR \sin \alpha</math></p>	$N(\pi) = -\frac{pR}{\pi} (\pi - \sin \alpha + \alpha \cos \alpha)$ $0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = pR^2 \left[ \sin \alpha \cdot \sin \varphi + (1 + \cos \alpha) \cos \varphi - \frac{1}{\pi} (\pi - \alpha + \sin \alpha) \right] + N(\pi) \cdot R \cdot \cos \varphi;$ $Q = pR [\sin \alpha \cdot \cos \varphi - (1 + \cos \alpha) \sin \varphi] - N(\pi) \sin \varphi;$ $N = -pR [\sin \alpha \cdot \sin \varphi + (1 + \cos \alpha) \cos \varphi] - N(\pi) \cos \varphi.$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = pR^2 \left[ \cos \varphi - \frac{1}{\pi} (\sin \alpha - \alpha) \right] + N(\pi) \cdot R \cos \varphi;$ $Q = -pR \sin \varphi - N(\pi) \sin \varphi;$ $N = -pR (1 + \cos \varphi) - N(\pi) \cos \varphi.$

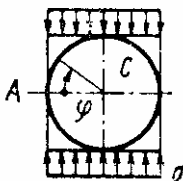
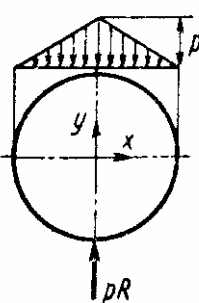
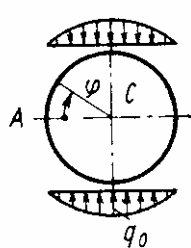
Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы
	$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ $\delta_x = -\frac{pR^4}{EJ} \left( 2 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sin \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right).$ $0 \leq \alpha \leq \pi$ $\delta_y = \frac{pR^4}{EJ} \left( 2 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \right)$
 <p> <math>P = \frac{q_0 R}{2} (2\alpha - \sin \alpha);</math>  <math>q = q_0 (\cos \varphi - \cos \alpha)</math> </p>	$M(\pi) = \frac{q_0 R^2}{\pi} \left( -\frac{3}{4} \alpha + \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \right. \\ \left. + \frac{5}{4} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos^2 \alpha \right);$ $N(\pi) = \frac{q_0 R}{4\pi} (\alpha - 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha)$ $0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = M(\pi) + N(\pi) R (1 + \cos \varphi) -$ $- \frac{q_0 R^2}{2} [-2 \cos \alpha + (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) \sin \varphi +$ $+ (1 + \cos^2 \alpha) \cos \varphi + \varphi \sin \varphi]^2;$ $Q = -N(\pi) \sin \varphi + \frac{q_0 R}{2} [\cos^2 \alpha \cdot \sin \varphi +$ $+ (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \varphi - \varphi \cos \varphi].$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = M(\pi) + N(\pi) R (1 + \cos \varphi);$ $Q = -N(\pi) \sin \varphi; N = -N(\pi) \cos \varphi.$ $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ $\delta_x = -\frac{q_0 R^4}{\pi EJ} \left[ \xi - \frac{\pi}{8} (3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cdot \sin^2 \alpha - 3\alpha) \right].$ $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ $\delta_x = \frac{q_0 R^4}{\pi EJ} \left[ \xi - \frac{\pi}{8} (16 \cos \alpha - 7 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \right. \\ \left. + 7\alpha - 2\pi \cdot \cos^2 \alpha - 3\pi - 2\alpha \sin^2 \alpha) \right].$ $0 \leq \alpha \leq \pi$ $\delta_y = \frac{q_0 R^4}{\pi EJ} \left[ \xi - \frac{\pi}{8} (8 \cos \alpha - 8 \cos^2 \alpha - \right. \\ \left. - 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha + \alpha^2 - 3 \sin^2 \alpha) \right];$ <p>здесь <math>\xi = 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \alpha - 2 \sin \alpha</math></p>

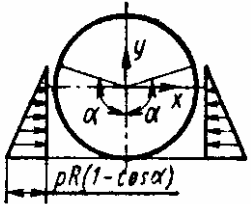
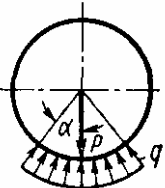
Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы	
	$M^0 = pR^2 \left[ 0,3183 \left( \frac{\alpha}{2} + \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right]; \quad N^0 = 0$	
	<table border="1"> <tr> <td> <math display="block">0 \leq \varphi \leq \alpha</math> <math display="block">M = M^0 - \frac{pR^2}{2} \sin^2 \varphi;</math> <math display="block">N = -pR^2 \sin^2 \varphi;</math> <math display="block">Q = -pR \sin \varphi \cdot \cos \varphi</math> </td><td> <math display="block">\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha</math> <math display="block">M = M^0 - pR^2 \left( \sin \alpha \times \right. \\ \left. \times \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right);</math> <math display="block">N = -pR \sin \alpha \cdot \sin \varphi;</math> <math display="block">Q = -pR \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi</math> </td></tr> </table>	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = M^0 - \frac{pR^2}{2} \sin^2 \varphi;$ $N = -pR^2 \sin^2 \varphi;$ $Q = -pR \sin \varphi \cdot \cos \varphi$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = M^0 - \frac{pR^2}{2} \sin^2 \varphi;$ $N = -pR^2 \sin^2 \varphi;$ $Q = -pR \sin \varphi \cdot \cos \varphi$	$\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ $M = M^0 - pR^2 \left( \sin \alpha \times \right. \\ \left. \times \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right);$ $N = -pR \sin \alpha \cdot \sin \varphi;$ $Q = -pR \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi$	
	$\delta_x = \frac{pR^4}{EJ} \left[ -\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha + 0,3183 (\alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2\alpha \cdot \sin^2 \alpha) \right];$ $\delta_y = -\frac{pR^4}{EJ} \left[ \sin^2 \alpha - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - \alpha \cdot \sin \alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} \sin \alpha - 0,3183 (2\alpha \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha) \right]$	
	$M^0 = pR^2 \left[ 0,3183 \left( \frac{2}{3} \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4} \alpha \right) - \frac{1}{2} + \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right];$ $N^0 = pR \left[ 0,3183 \left( \frac{2}{3} \sin \alpha + \frac{1}{3} \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \alpha \cos \alpha \right) + \cos \alpha - 1 \right].$	
	<table border="1"> <tr> <td> <math display="block">0 \leq \varphi \leq \alpha</math> <math display="block">M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} pR^2 (1 - \cos^2 \varphi);</math> <math display="block">N = N^0 \cos \varphi + pR (1 - \cos \varphi) \cos \varphi;</math> <math display="block">Q = -N^0 \sin \varphi - pR (1 - \cos \varphi) \sin \varphi.</math> </td><td> <math display="block">\alpha \leq \varphi \leq \pi</math> <math display="block">M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} pR^2 (1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha - 2 \cos \varphi);</math> </td></tr> </table>	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} pR^2 (1 - \cos^2 \varphi);$ $N = N^0 \cos \varphi + pR (1 - \cos \varphi) \cos \varphi;$ $Q = -N^0 \sin \varphi - pR (1 - \cos \varphi) \sin \varphi.$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} pR^2 (1 - \cos^2 \varphi);$ $N = N^0 \cos \varphi + pR (1 - \cos \varphi) \cos \varphi;$ $Q = -N^0 \sin \varphi - pR (1 - \cos \varphi) \sin \varphi.$	$\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} pR^2 (1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha - 2 \cos \varphi);$	

Продолжение табл. 5

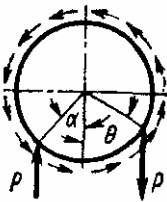
Схема	Расчетные формулы
	$N = N^0 \cos \varphi + pR (1 - \cos \alpha) \cos \varphi;$ $Q = -N^0 \sin \varphi - pR (1 - \cos \alpha) \sin \varphi$
	$M_A = \frac{qR^2}{4} = -M_C; \quad M = \frac{qR^2}{4} \cos 2\varphi$
	$M^0 = 0,305pR^2; \quad N^0 = -0,02653pR.$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} pR^2 \sin \varphi;$ $N = N^0 \cos \varphi - \frac{1}{2} pR \sin \varphi;$ $Q = -N^0 \sin \varphi - \frac{1}{2} pR \cos \varphi.$ $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) -$ $- \frac{1}{2} pR^2 \sin \varphi - \frac{1}{6} pR^2 (1 - \sin \varphi)^3;$ $N = N^0 \cos \varphi - \frac{1}{2} pR \sin \varphi +$ $+ \frac{1}{2} pR (1 - \sin \varphi)^2 \sin \varphi;$ $Q = -N^0 \sin \varphi - \frac{1}{2} pR \cos \varphi +$ $+ \frac{1}{2} pR (1 - \sin \varphi)^2 \cos \varphi;$ $\delta_x = 0,1228 \frac{pR^4}{EJ}, \quad \delta_y = -0,1220 \frac{pR^4}{EJ}$
 <p><math>q = q_0 \sin \varphi</math></p>	$M_A = -q_0 R^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{16}{9\pi} \right) = -0,219q_0 R^2;$ $M_C = +0,233q_0 R^2.$ <p>На участке AC</p> $M = -q_0 R^2 \left[ \frac{\pi}{4} \cos \varphi - \frac{16}{9\pi} + \frac{1}{2} \sin \varphi - \right.$ $\left. - \frac{1}{6} \sin^3 \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi \right]$

Продолжение табл. 5

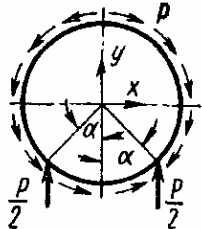
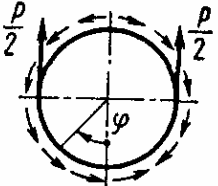
Схема	Расчетные формулы
	$M^0 = pR^3 \left[ 0,3183 \left( \frac{\alpha}{8} + \frac{1}{9} \sin \alpha - \frac{1}{4} \alpha \cos \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{13}{24} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{11}{36} \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \frac{1}{12} \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - \frac{1}{6} \alpha \cos^3 \alpha \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} (1 - \cos \alpha)^3 \right];$ $N^0 = pR^2 \left[ 0,3183 \left( \frac{\alpha}{8} + \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{13}{24} \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \frac{1}{12} \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha \right) - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2 \right].$ $0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \alpha) +$ $+ pR^3 \left[ \frac{1}{6} (1 - \cos \varphi)^3 - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) (1 - \cos \varphi) \right];$ $N = N^0 \cos \varphi + pR^2 \left[ \frac{1}{2} (1 - 2 \cos \alpha + \cos \varphi) \times \right. \\ \left. \times (1 - \cos \varphi) \cdot \cos \varphi \right];$ $Q = -N^0 \sin \varphi - pR^2 \left[ \frac{1}{2} (1 - 2 \cos \alpha + \right. \\ \left. + \cos \varphi) (1 - \cos \varphi) \sin \varphi \right].$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \alpha) +$ $+ pR^3 \left[ \frac{1}{3} (1 - \cos \alpha)^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \alpha - \cos \varphi \right) \right];$ $N = N^0 \cos \varphi + \frac{pR^2}{2} (1 - \cos \alpha)^2 \cos \varphi;$ $Q = -N^0 \sin \varphi - \frac{pR^2}{2} (1 - \cos \alpha)^2 \cdot \sin \varphi.$
 <p><math>P = 2q \cdot R \cdot \sin \alpha</math></p>	$M^0 = qR^2 [\cos \alpha - 0,3183 (\alpha \cdot \cos \alpha - \alpha) - 1];$ $N^0 = qR [0,3183 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \cos \alpha - 1].$ $0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) -$ $- qR^2 (1 - \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \varphi);$ $N = N^0 \cos \varphi + qR (\sin \alpha \cdot \sin \varphi + \cos \varphi - 1);$ $Q = -N^0 \sin \varphi + qR (\sin \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \varphi).$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) -$ $- qR^2 (\cos \alpha \cdot \cos \varphi - \cos \varphi);$ $N = N^0 \cos \varphi + qR (1 - \cos \alpha) \cos \varphi;$



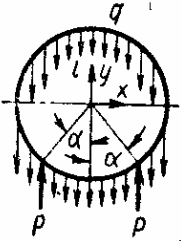
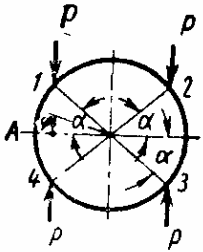
Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы
	$Q = -N^0 \sin \varphi + qR (\cos \alpha - 1) \cdot \sin \varphi;$ $\delta_x = \frac{2qR^4}{EJ} \left[ \frac{1}{4} \alpha \cos \alpha + 0,3183\alpha - 0,5683 \cdot \sin \alpha \right];$ <p>где <math>\alpha &lt; \frac{\pi}{2}</math>; <math>\delta_y = -\frac{2qR^4}{EJ} \left[ \frac{1}{4} \alpha \sin \alpha + 0,3183\alpha - \right.</math>  <math display="block">\left. - \frac{1}{2} \cos \alpha - 0,3183 \sin \alpha - \frac{1}{2} \right]</math></p>
	<p style="text-align: center;"><math>0 \leq \varphi \leq \alpha</math></p> $M = PR \left\{ 0,15915 [\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \theta \sin \theta - \cos \theta + \right.$ $+ \cos \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta) - \sin \varphi (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha +$ $+ \sin \theta \cdot \cos \theta + \theta) - \varphi (\sin \alpha + \sin \theta)] -$ $\left. - \frac{1}{2} (\sin \alpha - \sin \theta) + \sin \varphi \right\}.$ <p style="text-align: center;"><math>\alpha \leq \varphi \leq 2\pi - \theta</math></p> $M = PR \left\{ 0,15915 [\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha - \theta \sin \theta - \cos \theta + \right.$ $+ \cos \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta) - \sin \varphi (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha +$ $+ \sin \theta \cos \theta + \theta) - \varphi (\sin \alpha + \sin \theta)] +$ $\left. + \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \theta) \right\}.$ <p style="text-align: center;"><math>2\pi - \theta \leq \varphi \leq 2\pi</math></p> $M = PR \left\{ 0,15915 [\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha - \theta \cdot \sin \theta - \cos \theta + \right.$ $+ \cos \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta) - \sin \varphi (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha +$ $+ \sin \theta \cos \theta + \theta) - \varphi (\sin \alpha + \sin \theta)] +$ $\left. + \frac{1}{2} (\sin \alpha + 3 \sin \theta) + \sin \varphi \right\}.$ <p style="text-align: center;"><math>0 \leq \varphi \leq \alpha</math> и <math>2\pi - \theta \leq \varphi \leq 2\pi</math></p> $N = P \left\{ 0,15915 [\cos \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta) - \sin \varphi (\sin \alpha - \right.$ $- \cos \alpha + \alpha + \sin \theta \cos \theta + \theta)] + \sin \varphi \right\};$ $Q = P \left\{ 0,15915 [-\sin \alpha - \sin \theta - \sin \varphi (\sin^2 \alpha - \right.$ $- \sin^2 \theta) - \cos \varphi (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha + \sin \theta \cdot \cos \theta +$ $+ \theta)] + \cos \varphi \right\}.$ <p style="text-align: center;"><math>\alpha \leq \varphi \leq 2\pi - \theta</math></p> $N = P \left\{ 0,15915 [\cos \varphi (\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta) - \right.$ $- \sin \varphi (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha + \sin \theta \cdot \cos \theta + \theta)] \right\};$ $Q = P \left\{ 0,15915 [-\sin \alpha - \sin \theta - \sin \varphi (\sin^2 \alpha - \right.$ $- \sin^2 \theta) - \cos \varphi (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha + \sin \theta \cdot \cos \theta + \theta)] \right\}$
	<p style="text-align: center;"><math>0 \leq \varphi \leq \alpha</math></p> $M = PR \left[ 0,2387 \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \alpha + 0,15915 (\varphi \sin \varphi + \right.$ $\left. + \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \cos^2 \alpha) \right];$

Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы
 <p><math>p = \frac{P}{\pi R} \sin \alpha</math></p>	$N = P [0,15915 (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi \cdot \cos^2 \alpha) - 0,07958];$ $Q = -P \left[ 0,15915 \left( \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi + \sin \varphi \cdot \cos^2 \alpha \right) \right].$ $\frac{\alpha \leq \varphi \leq \pi}{M = PR \left[ 0,2387 \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi + 0,15915 (\varphi \sin \varphi + \right.$ $\left. + \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \cos^2 \alpha \right];$ $N = P \left[ 0,15915 (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi \cdot \cos^2 \alpha) - \right.$ $\left. - 0,07958 \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right];$ $Q = -P \left[ 0,15915 \left( \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi + \right. \right.$ $\left. + \sin \varphi \cdot \cos^2 \alpha \right) - \frac{1}{2} \cos \varphi \right];$ $\delta_x = -\frac{PR^3}{EJ} \left[ 0,3183 (\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha) - \right.$ $\left. - \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + 1) \right];$ $\delta_y = -\frac{PR^3}{EJ} \left[ 0,3183 (\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha) + \right.$ $\left. + \frac{1}{4} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha) - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\pi}{8} \right]$
 <p><math>p = \frac{P}{\pi R}</math></p>	$M^0 = -0,01132PR; \quad N^0 = -0,07958P.$ $\max(+M) = 0,01456PR \quad \text{при } \varphi = 66,8^\circ;$ $\max(-M) = -0,01456PR \quad \text{при } \varphi = 113,2^\circ.$ $M(\varphi) = -M(\pi - \varphi); \quad M = 0 \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2}.$ $\frac{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}{M = PR \left( 0,2387 \cos \varphi + 0,15915 \varphi \sin \varphi - \frac{1}{4} \right);}$ $N = P (0,15915 \varphi \sin \varphi - 0,07958 \cos \varphi);$ $Q = -P (0,15915 \varphi \cos \varphi - 0,07958 \sin \varphi).$ $\frac{\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi}{M = PR \left( 0,23868 \cos \varphi + 0,15915 \varphi \sin \varphi - \right.}$ $\left. - \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{1}{4} \right),$

Продолжение табл. 5

Схема	Расчетные формулы
	$N = P \left( 0,15915 \varphi \sin \varphi - 0,07958 \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right);$ $Q = -P \left( 0,15915 \varphi \cos \varphi - 0,07958 \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi \right);$ $\delta_x = 0; \quad \delta_y = 0$
	$M^0 = \frac{PR}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \cos \alpha + \alpha \cdot \sin \alpha - \pi \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha \right);$ $N^0 = \frac{P}{\pi} \left( \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right);$ $0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) + \frac{PR}{\pi} (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1);$ $N = N^0 \cos \varphi + \frac{P}{\pi} \varphi \sin \varphi; \quad Q = -N^0 \sin \varphi + \frac{P}{\pi} \varphi \cos \varphi;$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M = M^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) + \frac{PR}{\pi} [\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1 - \pi (\sin \varphi - \sin \alpha)];$ $N = N^0 \cos \varphi + \frac{P}{\pi} (\varphi \sin \varphi - \pi \sin \varphi);$ $Q = -N^0 \sin \varphi + \frac{P}{\pi} (\varphi - \pi) \cos \varphi;$ $\delta_x = -\frac{PR^3}{\pi EJ} \left[ \frac{\pi}{2} (1 - 4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha) + 2 (\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha) \right];$ $\delta_y = -\frac{PR^3}{\pi EJ} \left[ -2,4674 + \frac{\pi}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \alpha - 2 \sin \alpha) + 2 (\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha) \right]$
	$M_A = \frac{PR}{\pi} [\pi - 2 \sin \alpha - \pi \cos \alpha + 2 \alpha \cos \alpha].$ <p>На участках 1-4 и 2-3</p> $M = M_A - PR (1 - \cos \varphi).$ <p>На участках 1-2 и 3-4</p> $M = M_A - PR (1 - \cos \alpha)$

## Кольца переменной жесткости. Составные кольца

Наиболее удобными методами расчета колец переменной жесткости являются энергетические методы [5].

Усилия в плоскости кольца вычисляют по формулам

$$M_1 = M_1^0 - Q_1^0 R \sin \varphi - N^0 R (1 - \cos \varphi) + M_{1P};$$

$$Q_1 = Q_1^0 \cos \varphi + N_1^0 \sin \varphi + Q_{1P}; \quad N = -Q_1^0 \sin \varphi + N^0 \cos \varphi + N_P.$$

Начальные параметры

$$N^0 = -\frac{\delta_{13}\delta_{3P} - \delta_{33}\delta_{1P}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}; \quad Q_1^0 = \frac{\delta_{2P}}{\delta_{22}}; \quad M_1^0 = \frac{\delta_{13}\delta_{1P} - \delta_{11}\delta_{3P}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2},$$

где

$$\delta_{11} = R^3 \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos \varphi)^2}{EJ_1(\varphi)} d\varphi; \quad \delta_{13} = R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos \varphi}{EJ_1(\varphi)} d\varphi;$$

$$\delta_{22} = R^3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{EJ_1(\varphi)} d\varphi; \quad \delta_{33} = R \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{EJ_1(\varphi)};$$

$$\delta_{1P} = R^2 \int_0^{2\pi} \frac{M_{1P}(\varphi)(1 - \cos \varphi)}{EJ_1(\varphi)} d\varphi; \quad \delta_{2P} = R^2 \int_0^{2\pi} \frac{M_{1P} \sin \varphi}{EJ_1(\varphi)} d\varphi;$$

$$\delta_{3P} = R \int_0^{2\pi} \frac{M_{1P}(\varphi) d\varphi}{EJ_1(\varphi)}.$$

Из плоскости кольца моменты

$$M_2 = M_2^0 \cos \varphi + (M_\kappa^0 - RQ_2^0) \sin \varphi + M_{2P};$$

$$M_\kappa = -M_2^0 \sin \varphi + M_\kappa^0 \cos \varphi - Q_2^0 R (1 - \cos \varphi) + M_{\kappa P}.$$

Начальные параметры

$$Q_2^0 = -\frac{\delta_{46}\delta_{6P} - \delta_{66}\delta_{4P}}{\delta_{44}\delta_{66} - \delta_{46}^2}; \quad M_2^0 = -\frac{\delta_{5P}}{\delta_{55}};$$

$$M_\kappa^0 = \frac{\delta_{46}\delta_{4P} - \delta_{44}\delta_{6P}}{\delta_{44}\delta_{66} - \delta_{46}^2},$$

где

$$\delta_{44} = R^3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{EJ_2(\varphi)} \left[ 1 + \frac{J_2}{J_\kappa} \right] d\varphi;$$

$$\delta_{46} = -R^2 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\sin^2 \varphi}{EJ_2(\varphi)} - \frac{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi}{GJ_\kappa(\varphi)} \right] d\varphi;$$

$$\delta_{55} = R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\cos^2 \varphi}{EJ_2(\varphi)} + \frac{\sin^2 \varphi}{GJ_\kappa(\varphi)} \right] d\varphi;$$

$$\delta_{66} = R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\sin^2 \varphi}{EJ_2(\varphi)} + \frac{\cos^2 \varphi}{GJ_\kappa(\varphi)} \right] d\varphi;$$

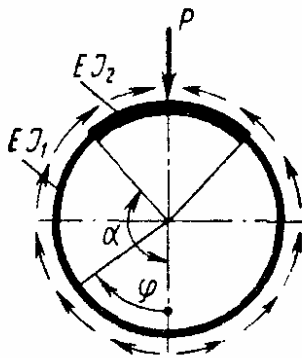
$$\delta_{4P} = R^2 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{M_{2P} \sin \varphi}{EJ_2(\varphi)} + \frac{M_{\kappa P} (1 - \cos \varphi)}{GJ_\kappa(\varphi)} \right] d\varphi;$$

$$\delta_{5P} = R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{M_{2P} \cos \varphi}{EJ_2(\varphi)} + \frac{M_{\kappa P} \sin \varphi}{GJ_\kappa(\varphi)} \right] d\varphi;$$

$$\delta_{6P} = -R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{M_{2P} \sin \varphi}{EJ_2(\varphi)} - \frac{M_{\kappa P} \cos \varphi}{GJ_\kappa(\varphi)} \right] d\varphi.$$

Ниже приведены решения некоторых частных задач для составных колец.

**Пример 2.** На кольцо, состоящее из двух секторов с одним и тем же радиусом  $R$  кривизны осей, действует первая элементарная нагрузка (рис. 23).  
Усилия



$$M_1 = M_1^0 - N^0 R (1 - \cos \varphi) - \frac{PR}{2\pi} (2 \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 2);$$

$$Q_1 = -N^0 \sin \varphi + \frac{P}{2\pi} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi);$$

$$N^0 = N^0 \cos \varphi - \frac{P}{2\pi} \varphi \sin \varphi,$$

где

$$N^0 = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{a_3 B_1 - a_1 B_2}{a_2 a_3 - a_1 a_4}; \quad M_1^0 = \frac{PR}{2\pi} \cdot \frac{a_4 B_1 - a_2 B_2}{a_1 a_4 - a_3 a_2}.$$

Рис. 23

Здесь обозначено

$$a_1 = (\chi - 1) \alpha + \pi; \quad a_2 = (\chi - 1) (\sin \alpha - \alpha) - \pi;$$

$$a_3 = (\chi - 1) (\sin \alpha + \alpha) + \pi;$$

$$a_4 = (\chi - 1) (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha) - \pi; \quad \chi = \frac{EJ_2}{EJ_1};$$

$$B_1 = (\chi - 1) (3 \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - 2\alpha) - \pi;$$

$$B_2 = \frac{\chi-1}{8} [2\alpha \cos 2\alpha - 7 \sin 2\alpha - 16 \sin \alpha + 16\alpha \cos \alpha + 12\alpha + \\ + 8 (3 \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - 2\alpha) (1 + \cos \alpha)] - \frac{\pi}{4}.$$

Для ряда значений угла  $\alpha$  и отношений жесткостей  $\chi$  в табл. 6 вычислены величины изгибающих моментов в точках  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \pi$ .

**Пример 3.** На кольцо, как в предыдущей задаче, действует третья элементарная нагрузка (рис. 24).

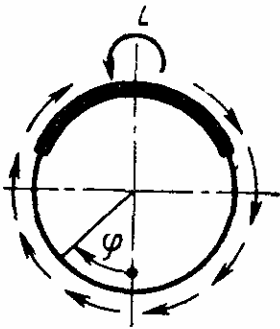


Рис. 24

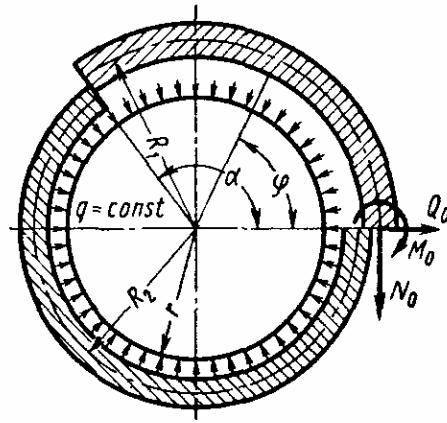


Рис. 25

Усилия по кольцу

$$Q = Q^0 \cos \varphi + \frac{L}{2\pi R} (1 + \cos \varphi); \quad N = Q^0 \sin \varphi + \frac{L}{2\pi R} \sin \varphi; \\ M = Q^0 R \sin \varphi + \frac{L}{2\pi} (\varphi + \sin \varphi),$$

где

$$Q^0 = - \left\{ 1 + \frac{\int_0^\pi \frac{\varphi \sin \varphi}{EJ} d\varphi}{\int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi}{EJ} d\varphi} \right\}.$$

Для кольца из двух секторов постоянной жесткости

$$Q^0 = - \frac{L}{2\pi R} \cdot \frac{(\chi-1) (4 \sin \alpha - 4\alpha \cos \alpha + 2\alpha - \sin 2\alpha) + 6\pi}{(\chi-1) (2\alpha - \sin 2\alpha) + 2\pi}.$$

**Пример 4.** Составное кольцо из двух секторов круговой формы разного сечения и разных радиусов нагружено равномерно распределенной нагрузкой  $q$  по радиусу  $r$  (рис. 25). Обозначения:  $R_1$ ,  $R_2$  и  $J_1$ ,  $J_2$  — радиусы окружностей, определяющих нейтральную ось, и моменты инерции сечений каждого сектора кольца;  $\alpha$  — угол, определяющий протяженность обеих частей кольца;

$$\chi = \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2}; \quad \mu_1 = \frac{R_1}{r}; \quad \mu_2 = \frac{R_2}{r}.$$

## 6. Нормальные силы и изгибающие моменты

Обозначения	$\alpha$	$\chi = \frac{EJ_2}{EJ_1}$							
		1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0	2,5	3,0
$N_0$ $M_0$ $M_\pi$ $M_{\pi/2}$	$170^\circ 03' 14''$	0,2370 0,0787 0,2420 0,1590	0,2350 0,0777 0,245 0,161	0,234 0,0770 0,247 0,163	0,233 0,0767 0,248 0,164	0,232 0,0759 0,250 0,166	0,227 0,0739 0,257 0,174	0,224 0,0722 0,261 0,178	0,2225 0,0716 0,264 0,180
$N_0$ $M_0$ $M_\pi$ $M_{\pi/2}$	$160^\circ 01' 38''$	0,236 0,078 0,243 0,086	0,233 0,077 0,248 0,091	0,230 0,0755 0,252 0,095	0,228 0,074 0,255 0,098	0,226 0,073 0,258 0,101	0,219 0,0695 0,268 0,110	0,213 0,067 0,278 0,120	0,210 0,065 0,282 0,124
$N_0$ $M_0$ $M_\pi$ $M_{\pi/2}$	$150^\circ$	0,236 0,0803 0,245 0,0255	0,233 0,0773 0,248 0,0281	0,230 0,0768 0,253 0,0327	0,228 0,0754 0,256 0,0356	0,226 0,0746 0,260 0,0385	0,218 0,0716 0,273 0,0504	0,210 0,0681 0,284 0,0617	0,206 0,0661 0,291 0,0673

Приняв в качестве начального сечения одно из двух сечений кольца, в котором меняется радиус, выражения для усилий будут

$$M = \begin{cases} M^0 + N^0 R_1 (1 - \cos \varphi) - Q_0 R_1 \sin \varphi + q R_1 r (1 - \cos \varphi) \\ \text{при } 0 \leq \varphi \leq \alpha; \\ M^0 + N^0 (R_1 - R_2 \cos \varphi) - Q_0 R_2 \sin \varphi + q R_2 r (1 - \cos \varphi) \\ \text{при } \alpha \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$N = N^0 \cos \varphi + Q^0 \sin \varphi - q r (1 - \cos \varphi);$$

$$Q = -N^0 \sin \varphi + Q^0 \cos \varphi - q r \sin \varphi.$$

Параметры  $M^0$ ,  $Q^0$ ,  $N^0$  определяют из уравнений

$$\begin{aligned} A M^0 + B N^0 + C Q^0 &= -q r D; & B M^0 + B_1 N^0 + C_1 Q^0 &= -q r D_1; \\ -C M^0 - C_1 N^0 + C_2 Q^0 &= -q r D_2 \end{aligned}$$

где

$$A = 2\pi \chi \mu_2 + \alpha (\mu_1 - \chi \mu_2);$$

$$B = r \left\{ \mu_1^2 (\alpha - \sin \alpha) + \chi \mu_2 [\mu_1 (2\pi - \alpha) + \mu_2 \alpha] \right\};$$

$$C = r \left[ (\chi \mu_2^2 - \mu_1^2) (1 - \cos \alpha) \right];$$

$$D = r \left[ \mu_1^2 - \chi \mu_2^2 \right] (\alpha - \sin \alpha) + 2\pi \chi \mu_2^2;$$

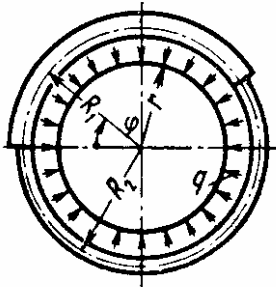
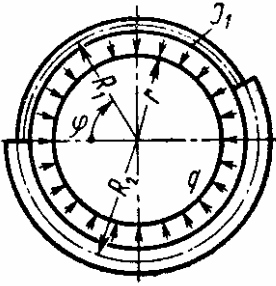
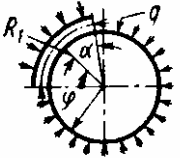
$$B_1 = r^2 \left[ \mu_1^3 \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) + \right.$$

$$\left. + \chi \mu_2 \left[ \mu_1^2 (2\pi - \alpha) + \mu_2^2 \left( \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + 2\mu_1 \mu_2 \sin \alpha \right] \right\};$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= r^2 \left\{ \mu_1^3 \left[ \frac{1}{4} (1 - \cos 2\alpha) - (1 - \cos \alpha) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \chi \mu_2^2 \left[ \mu_1 (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{4} \mu_2 (1 - \cos 2\alpha) \right] \right\}; \\
D_1 &= r^2 \left\{ \mu_1^3 \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \chi \mu_2^2 \left[ \mu_1 (2\pi - \alpha) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mu_2 \left( \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + (\mu_1 + \mu_2) \sin \alpha \right] \right\}; \\
C_2 &= r^2 \left\{ \mu_1^3 \left( \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - \chi \mu_2^3 \left( \pi - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) \right\}; \\
D_2 &= r^2 \left( \mu_1^3 - \chi \mu_2^3 \right) \left[ 1 - \cos \alpha - \frac{1}{4} (1 - \cos 2\alpha) \right].
\end{aligned}$$

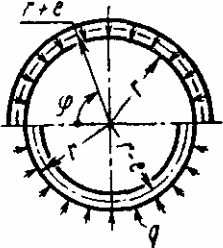
Решения ряда задач этого типа приведены в табл. 7.

7. Усилия и изгибающие моменты для некоторых случаев нагружений колец

Схема конструкции	Дополнительные условия	Расчетные формулы
	$R_1 = R_2$	$ \begin{aligned} N^0 &= -qr; \quad Q^0 = 0; \quad M^0 = 0; \\ N &= -qr; \quad Q = 0; \quad M = 0 \end{aligned} $
	$\frac{J_1}{J_2} = 0$	$ \begin{aligned} M^0 &= 0; \quad Q^0 = 0; \quad N^0 = -qr; \\ \text{при } 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad M &= 0; \\ \text{при } \alpha \leq \varphi \leq 2\pi \quad M &= qr(R_2 - R_1); \quad N = -qr; \\ Q &= 0 \end{aligned} $
	$R_2 = r$	$ \begin{aligned} M^0 &= Q^0 = N^0 = 0; \\ \text{при } 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad M &= qrR_1(1 - \cos \varphi); \\ \text{при } \alpha \leq \varphi \leq 2\pi \quad M &= 0 \end{aligned} $



Продолжение табл. 7

Схема конструкции	Дополнительные условия	Расчетные формулы
	$\alpha = \pi;$ $R_2 = r - e;$ $R_1 = r + e$	$N^0 = -qr; Q^0 = \frac{4}{\pi} qe; M^0 = qre;$ при всех $\varphi$ $N = -qr \left( 1 - \frac{4e}{\pi r} \sin \varphi \right); Q = \frac{4}{\pi} qe \cdot \cos \varphi;$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$ $M = qre \left( 1 - \frac{4}{\pi} \sin \varphi \right);$ при $0 \geq -\varphi \geq -\pi$ $M = -qre \left( 1 + \frac{4}{\pi} \sin \varphi \right)$

## ГИБКИЕ БРУС И КОЛЬЦО

### Влияние нормальных сил

В случае расчета гибких круговых стержней и колец уравнения равновесия элемента записывают для деформированного состояния. При нагружении в своей плоскости имеем [16]

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dN}{d\varphi} + \frac{Q_1}{R_1} + p = 0; \quad \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dQ}{d\varphi} - \frac{N}{R_1} - q = 0; \\ \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dM}{d\varphi} + Q - m = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

где  $R_1$  — радиус кривизны после деформации, определяемый из соотношения

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \kappa; \quad \kappa = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\varphi}. \quad (28)$$

Из второго уравнения (27) находим

$$N = \frac{dQ}{d\varphi} - qR(1 - \kappa R). \quad (29)$$

Вместо уравнения (2) получим

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \frac{R^3}{EJ_1} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left[ q \left( \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) \right] = f_1(\varphi). \quad (30)$$

В этом уравнении правая часть записывается по-прежнему в виде формул (3). Уравнение (30) может быть использовано при рассмотрении влияния гибкости кольца, влияния осевых усилий, задач устойчивости. После определения функции  $v$  смещения и усилия в кольце определяют из соотношений

$$\begin{aligned} w &= \frac{dv}{d\varphi}; \quad \vartheta_1 = \frac{1}{R} \left( \frac{dw}{d\varphi} + v \right); \\ M_1 &= -\frac{EJ_1}{R} \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\varphi}; \quad Q_1 = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dM_1}{d\varphi} - m_1; \\ N &= \frac{dQ}{d\varphi} \left( 1 - \frac{d\vartheta_1}{d\varphi} \right) - qR \left( 1 - \frac{d\vartheta_1}{d\varphi} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Пусть на кольцо действует нагрузка  $q$  постоянной интенсивности (рис. 26). Эта нагрузка вызывает в кольце нормальные силы  $N = qR$ . Смещения и усилия по кольцу вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} v &= A_0 + A_1\varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \sin \varphi + A_4 \cos \mu\varphi + \\ &\quad + A_5 \sin \mu\varphi + v^*; \\ w &= A_1 - A_2 \sin \varphi + A_3 \cos \varphi - \mu (A_4 \sin \mu\varphi - \\ &\quad - A_5 \cos \mu\varphi) + w^*; \\ \vartheta_1 &= \frac{1}{R} \left[ A_0 + A_1\varphi - (\mu^2 - 1) (A_4 \cos \mu\varphi + \right. \\ &\quad \left. + A_5 \sin \mu\varphi) \right] + \vartheta_1^*; \\ M_1 &= -\frac{EJ_1}{R^2} [A_1 + \mu (\mu^2 - 1) (A_4 \sin \mu\varphi - \\ &\quad - A_5 \cos \mu\varphi)] + M_1^*; \\ Q_1 &= \frac{EJ}{R^3} [\mu^2 (\mu^2 - 1) (A_4 \cos \mu\varphi + A_5 \sin \mu\varphi)] + Q_1^*; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

здесь

$$\mu^2 = 1 + \frac{qR^3}{EJ_1};$$

члены со звездочкой — частные решения, определяемые согласно соотношений (31) из функции  $v^*$ ;  $v^*$  — частное решение неоднородного уравнения (30), определяемое подбором или по формуле

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{1}{\mu} \int_0^\varphi \sin \mu (\varphi - \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \sin \mu (\varphi_1 - \\ &\quad - \varphi_2) \int_0^{\varphi_2} \int_0^{\varphi_3} f_1(\varphi_4) d\varphi_4 d\varphi_3 d\varphi_2 d\varphi_1. \end{aligned}$$

Величины  $A_i$  — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий или условий стыка.

Решения (32) справедливы при  $\frac{qR^3}{EJ_1} > -1$ .

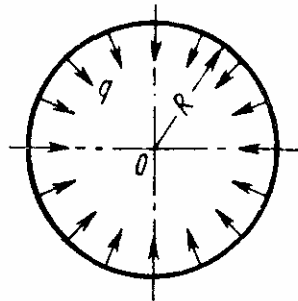


Рис. 26

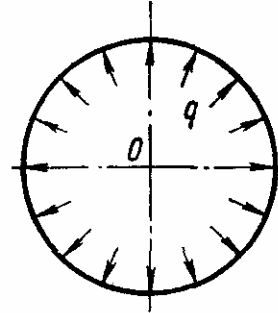


Рис. 27

Если нагрузка направлена в обратную сторону (рис. 27), то решение для  $v$  при  $\frac{qR^3}{EJ_1} > 1$  будет

$$v = A_0 + A_1\varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \sin \varphi + A_4 \operatorname{ch} \mu_1 \varphi + A_5 \operatorname{sh} \mu_1 \varphi + v^{**}, \quad (33)$$

где  $v^{**}$  вместо  $v^*$  следует находить по формуле

$$v^{**} = \frac{1}{\mu_1} \int_0^\varphi \operatorname{sh} \mu (\varphi - \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{\varphi_2} \int_0^{\varphi_3} f_1(\varphi_4) d\varphi_4 d\varphi_3 d\varphi_2 d\varphi_1;$$

здесь 
$$\mu_1^2 = \frac{qR^3}{EJ_1} - 1.$$

**Пример 5.** На кольцо действует первая элементарная нагрузка (рис. 28). Правая часть уравнения (30) будет  $f_1^* = \frac{PR^3}{\pi EJ} \sin \varphi$ . Тогда частные решения его, определенные подбором, будут

$$v^* = \frac{P}{2\pi qR} \varphi \cos \varphi; \quad w^* = \frac{P}{2\pi qR} (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi).$$

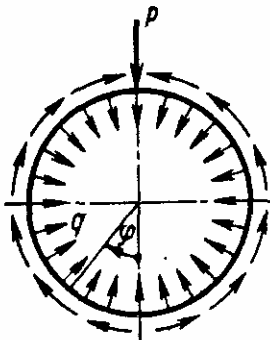


Рис. 28

В силу симметрии в решении однородного уравнения следует положить  $A_0 = A_2 = A_4 = 0$ . Постоянные  $A_1, A_3, A_5$  определяют из условий  $v(\pi) = \vartheta(\pi) = 0$ ,

$$\int_0^\pi v(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0;$$

$$A_1 = \frac{P}{2\pi qR} \cdot \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}; \quad A_5 = \frac{P}{2qR\mu^2 \sin \mu\pi}.$$

Таким образом, для изгибающего момента получим выражение

$$M = \frac{PEJ}{2\pi qR^3} \cdot \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \left[ 1 - \frac{2\mu^2}{\mu^2 - 1} \cos \varphi - \mu\pi \frac{\cos \mu\varphi}{\sin \mu\pi} \right].$$

**Пример 6.** Кольцо нагружено двумя радиальными силами, как показано на рис. 29. Методом наложения получим выражение для изгибающего момента

$$M = \frac{P}{2\pi\mu^2} \left\{ 2 - \frac{\mu\pi}{\sin \mu\pi} [\cos \mu\varphi + \cos \mu(\pi - \varphi)] \right\}.$$

Решение уравнения (30) может быть выполнено в рядах Фурье. Этот способ решения позволяет получить однотипное решение для произвольного направления нагрузки  $q$ . Правая часть уравнения (30) разлагается в ряд

$$f_1(\varphi) = \frac{R^4}{RJ} \sum_{n=2}^{\infty} (f_n \sin n\varphi + f'_n \cos n\varphi).$$

Решения запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{R^4}{EJ} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f_n \sin n\varphi + f'_n \cos n\varphi)}{n^2 (n^2 - 1)^2 \left[ 1 - \frac{qR^3}{EJ (n^2 - 1)} \right]}; \\ \omega &= \frac{R^4}{EJ} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n \cos n\varphi - f'_n \sin n\varphi}{n (n^2 - 1) \left[ 1 - \frac{qR^3}{EJ (n^2 - 1)} \right]}; \\ M &= R^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n \cos n\varphi - f'_n \sin n\varphi}{n (n^2 - 1)^2 \left[ 1 - \frac{qR^3}{EJ (n^2 - 1)} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Наиболее опасный случай, когда нагрузка  $q$  направлена к центру; тогда в формулах (34) следует брать перед  $\frac{qR^3}{EJ (n^2 - 1)}$  знак минус. Наибольшее влияние на напряженность оказывают первые гармоники.

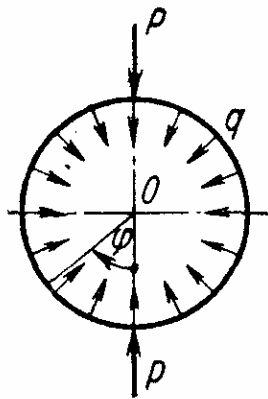


Рис. 29

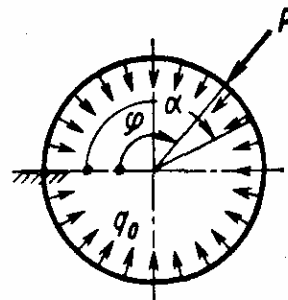


Рис. 30

**Пример 7.** Кольцо нагружено силой  $P$  и давлением  $q_0$  (рис. 30). Смещения и изгибающий момент

$$v = \frac{PR^3}{\pi EJ} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n(\alpha - \varphi)}{n (n^2 - 1)^2 \left[ 1 - \frac{q_0 R^3}{EJ (n^2 - 1)} \right]};$$

$$w = \frac{PR^3}{\pi EJ} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n(\alpha - \varphi)}{(n^2 - 1)^2 \left[ 1 - \frac{qR^3}{EJ(n^2 - 1)} \right]}$$

$$M = -\frac{PR}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n(\alpha - \varphi)}{(n^2 - 1) \left[ 1 - \frac{q_0 R^3}{EJ(n^2 - 1)} \right]}$$

**Пример 8.** Кольцо под наружным давлением  $q$ . В этом случае  $f_1(\varphi) \equiv 0$  и все частные решения  $v^* = w^* = \vartheta^* = \dots = 0$ . Условия стыка

$$v(2\pi) = v(0); \quad w(2\pi) = w(0); \quad \vartheta(2\pi) = \vartheta(0)$$

приводят к уравнениям

$$2\pi A_1 + A_4 (\cos 2\mu\pi - 1) + A_5 \sin 2\mu\pi = 0;$$

$$A_4 \sin 2\mu\pi - A_5 (\cos 2\mu\pi - 1) = 0;$$

$$2\pi A_1 - (\mu^2 - 1) [A_4 (\cos 2\mu\pi - 1) + A_5 \sin 2\mu\pi] = 0.$$

Решение этих уравнений существует, если их определитель равен нулю:

$$2(1 - \cos 2\mu\pi) = 0;$$

отсюда

$$2\mu\pi = 2\pi n \text{ или } \mu = n.$$

При  $\mu = 1$  решения нулевые. При  $\mu = 2$  существуют ненулевые решения, а соответствующее значение

$$q = q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3}$$

называют критическим давлением для кольца.

### Влияние начального прогиба

Если стержень или кольцо имеют начальный прогиб  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  в своей плоскости, то после деформации смещение точек кольца (от круговой формы) и изменение кривизны будут

$$v = \bar{v} + v_{ynp}; \quad w = \bar{w} + w_{ynp}; \quad \kappa = \bar{\kappa} + \kappa_{ynp}.$$

Исходное уравнение для гибкого кольца с учетом начального прогиба можно получить из уравнения (30) предыдущего параграфа

$$\begin{aligned} \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \frac{R^3}{EJ} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left[ q \left( \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) \right] = \\ = - \frac{R^3}{EJ} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left[ q \left( \frac{d^3 \bar{v}}{d\varphi^3} + \frac{d\bar{v}}{d\varphi} \right) \right] + f_1(\varphi). \end{aligned} \quad (35)$$

Если кольцо жесткое, четвертое слагаемое в левой части уравнения можно отбросить. Решение уравнения (35) в замкнутой форме

записывают в виде формул (32) или (33), только частные решения неоднородного уравнения должны быть соответственно изменены

$$v^* = \frac{1}{\mu} \int_0^\varphi \sin \mu (\varphi - \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{\varphi_2} \int_0^{\varphi_3} \times \\ \times \left\{ f_1 (\varphi_4) - \frac{R^3}{EJ} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left[ q \left( \frac{d^3 \bar{v}}{d\varphi^3} + \frac{d\bar{v}}{d\varphi} \right) \right] \right\} d\varphi_4 \dots d\varphi_1,$$

или

$$v^* = \frac{1}{\mu_1} \int_0^\varphi \operatorname{sh} \mu_1 (\varphi - \varphi_1) \int_0^\varphi \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{\varphi_2} \int_0^{\varphi_3} \times \\ \times \left\{ f_1 (\varphi_4) - \frac{R^3}{EJ} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left[ q \left( \frac{d^3 \bar{v}}{d\varphi^3} + \frac{d\bar{v}}{d\varphi} \right) \right] \right\} d\varphi_4 d\varphi_3 d\varphi_2 d\varphi_1.$$

Решение уравнения (35) записывают также в рядах Фурье. Допустим, смещение  $\bar{w}$  начального прогиба запишем рядом

$$\bar{w} = \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^0 \cos n\varphi + b_n^0 \sin n\varphi)$$

и кольцо нагружено равномерно распределенной нагрузкой  $q_0$ , тогда уравнение (35) в функции  $w$  примет вид

$$\frac{d^5 w}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi} + \frac{q_0 R^3}{EJ} \left( \frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi} \right) = - \frac{q_0 R^3}{EJ} \left( \frac{d^3 \bar{w}}{d\varphi^3} + \frac{d\bar{w}}{d\varphi} \right).$$

Его решение

$$w = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q_0 R^3}{EJ} \frac{(a_n^0 \cos n\varphi + b_n^0 \sin n\varphi)}{(n^2 - 1) - \frac{q_0 R^3}{EJ}}.$$

Изгибающий момент

$$M = -q_0 R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^0 \cos n\varphi + b_n^0 \sin n\varphi}{\left[ 1 - \frac{q_0 R^3}{EJ (n^2 - 1)} \right]}.$$

Наибольшие напряжения вызывает эллипсность кольца (при  $n = 2$ ). Если гибкостью кольца пренебречь, то

$$M = -q_0 R \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^0 \cos n\varphi + b_n^0 \sin n\varphi).$$

Подробнее см. работы [15, 21].

## ТОНКСТЕННЫЕ СТЕРЖЕНЬ И КОЛЬЦО

### Плоский изгиб

При изгибе тонкостенного профиля деформируется контур поперечного сечения, что приводит к перераспределению напряжений по сечению и снижению жесткости. Для стержня, составленного из цилиндрических и плоских стенок, получены точные решения в случае чистого изгиба при рассмотрении стенок как оболочечных элементов и полок как кольцевых пластин. Подробное изложение метода решения задачи можно найти в работе [16].

Расчет тонкостенного кривого стержня на прочность и жесткость выполняют по обычным формулам для стержня с недеформируемым сечением с заменой действительного сечения эквивалентным. Эту замену осуществляют умножением ширины цилиндрической полки на коэффициент  $k_1$ ; размеры плоских стенок оставляют без изменения. Момент инерции  $J$  и момент сопротивления  $W$  вычисляют для эквивалентного сечения с размерами цилиндрической полки  $ak_1$ . Местные изгибные напряжения в цилиндрической полке оценивают коэффициентом  $k_0$ :

$$\sigma_u = \sigma k_0 = \frac{M}{W} k_0.$$

Значения коэффициентов  $k_1$  и  $k_0$  для некоторых профилей приведены в табл. 8.

### Нагрузка, перпендикулярная плоскости стержня

Основные положения теории кручения и изгиба тонкостенных стержней подробнее изложены в гл. 12. Ниже приведены расчетные формулы для кругового стержня.

Дополнительные обозначения (рис. 31):

$R$  — радиус кривизны тонкостенного стержня, проходящий через центр изгиба сечений;

$\bar{M}_K(\varphi)$  — момент свободного кручения;

$\bar{M}(\varphi)$  — момент стесненного кручения;

$B(\varphi)$  — бимомент; считается положительным, если он увеличивает кривизну верхней полки и уменьшает кривизну нижней полки;

$EJ_\omega$  — жесткость стесненного (изгибного) кручения;

$GJ_K$  — жесткость свободного кручения;

$$\lambda = \frac{EJ_2}{GJ_K}; \quad \kappa = R \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_\omega}}. \quad (36)$$

Нагрузки приводят к оси стержня. Силы  $P_{2i}$  переносят с добавлением соответствующих крутящих моментов. Если крутящий момент приложен к отростку, выходящему за пределы сечения вдоль оси стержня, то при переносе момента  $K_i$  в сечение следует добавить бимомент  $B_i = K_i a_K$ . При переносе распределенной нагрузки следует учитывать распределенные моменты и бимоменты.

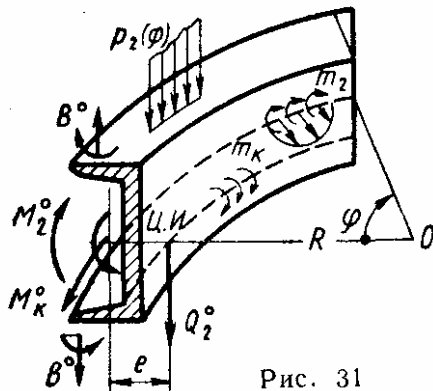
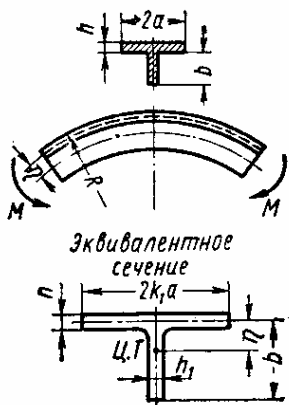
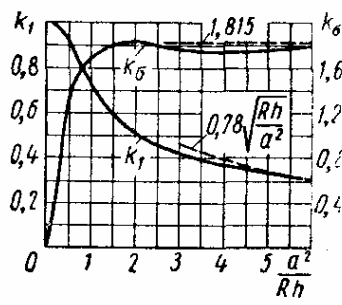
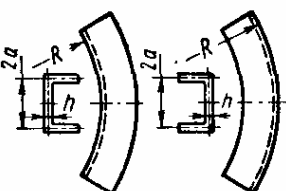
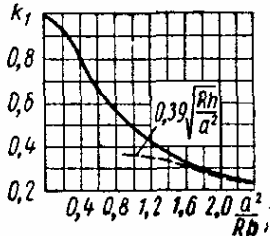


Рис. 31

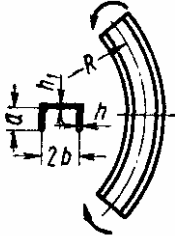
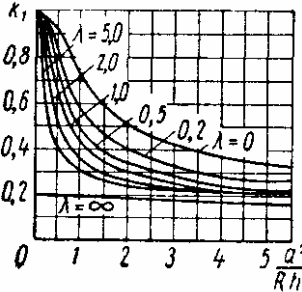
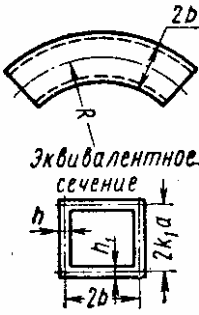
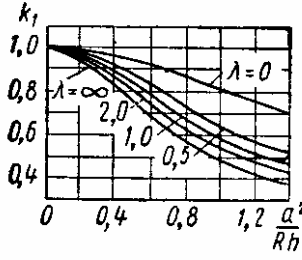
8. Значения коэффициентов  $k_1$  и  $k_0$ 

обозначения:  $k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона

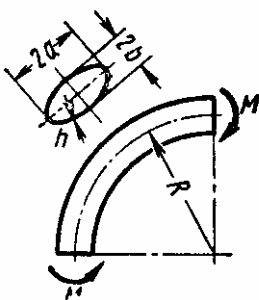
Профиль	Расчетные формулы и графики
 <p>Эквивалентное сечение</p>	$k_1 = \frac{1}{ka} \times \frac{\operatorname{sh} 2ka + \sin 2ka}{2 + \operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka} \cdot$ <p>При <math>ka &gt; 3</math> (или <math>a^2 &gt; 5Rh</math>)</p> $k_1 \approx \frac{1}{ka} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{Rh}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{1}{a};$  $J' = 2hak_1 \eta^2 + \frac{h_1}{3} [b^3 + (b - \eta)^3];$ $\eta = \frac{1}{2} \frac{b^2 h_1}{bh_1 + 2k_1 ah};$ $k_0 = \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \frac{\operatorname{ch} 2ka - \cos 2ka}{2 + \operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka}.$ <p>Увеличение ширины полки профиля <math>a &gt; \sqrt{5Rh}</math> практически не влияет на жесткость бруса</p>
	$k_1 = \frac{1}{2ka} \frac{\operatorname{sh} 2ka + \sin 2ka}{\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka}.$ <p>При <math>ka &gt; 3</math></p> $k_1 \approx \frac{1}{2ka} = 0,39 \sqrt{\frac{Rh}{a^2}};$ 



Продолжение табл. 8

Профиль	Расчетные формулы и графики
	$k_1 = \frac{1}{k_2} \times$ $\times \frac{\operatorname{sh} 2ka + \sin 2ka + \lambda ka (\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka - 2)}{2 + \operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka + 2\lambda ka (\operatorname{sh} 2ka - \sin 2ka)},$ <p>где</p> $\lambda = \frac{bh^3}{ah_1^3}$ 
 <p>Эквивалентное сечение</p>	$k_1 = \frac{1}{ka} \times$ $\times \frac{\operatorname{ch} 2ka - \cos 2ka + \lambda ka (\operatorname{sh} 2ka + \sin 2ka)}{\operatorname{sh} 2ka + \sin 2ka + 2\lambda ka (\operatorname{ch} 2ka + \cos 2ka)},$ <p>где</p> $\lambda = \frac{bh^3}{ah_1^3}$ <p>При <math>a^2 &gt; 1.2Rh</math></p> $k_1 = \frac{1}{ka} \frac{1 + \lambda ka}{1 + 2\lambda ka}$  $k_\sigma = \frac{1 + 1.0496 \frac{b^4}{R^2 h^2}}{1 + 1.432 \frac{b^4}{R^2 h^2}}$

Продолжение табл. 8

Профиль	Расчетные формулы и графики																													
	$J' = \psi J, \text{ где } \psi = 1 - \frac{\eta}{\xi + \frac{R^2 h^2}{a^4}};$ $J = \frac{\pi}{4} (ab^3 - a_1 b_1^3)$ <table border="1" data-bbox="700 848 952 1173"><thead><tr><th><math>\frac{a}{b}</math></th><th><math>\xi</math></th><th><math>\eta</math></th></tr></thead><tbody><tr><td>1,0</td><td>0,833</td><td>0,750</td></tr><tr><td>1,5</td><td>0,662</td><td>0,602</td></tr><tr><td>2,0</td><td>0,584</td><td>0,530</td></tr><tr><td>3,0</td><td>0,499</td><td>0,454</td></tr><tr><td>4,0</td><td>0,459</td><td>0,415</td></tr><tr><td>5,0</td><td>0,439</td><td>0,392</td></tr></tbody></table> <p>Для трубы круглого поперечного сечения</p> $\psi = 1 - \frac{9}{10 + 12 \frac{R^2 h^2}{a^4}};$ $J = \frac{\pi}{4} (a^4 - a_1^4).$ <p>Если <math>R</math> велико по сравнению с <math>a</math>, то напряжения можно вычислять по формуле</p> $\sigma = \frac{M}{\psi J} \left( 1 - \beta \frac{y^2}{a^2} \right),$ <p>где <math>\beta = \frac{6}{5 + 6 \frac{R^2 h^2}{a^4}}; \quad \sigma_{\max} = \psi_1 \frac{M d}{2J};</math><math display="block">\psi_1 = \frac{2}{3 \sqrt{3} \psi \sqrt{\beta}};</math><p><math>d</math> — наружный диаметр трубы.</p><table border="1" data-bbox="772 1709 1228 1928"><thead><tr><th><math>\frac{Rh}{a^2}</math></th><th>0,3</th><th>0,5</th><th>1,0</th></tr></thead><tbody><tr><td><math>\psi_1</math></td><td>1,98</td><td>1,30</td><td>0,88</td></tr></tbody></table></p>	$\frac{a}{b}$	$\xi$	$\eta$	1,0	0,833	0,750	1,5	0,662	0,602	2,0	0,584	0,530	3,0	0,499	0,454	4,0	0,459	0,415	5,0	0,439	0,392	$\frac{Rh}{a^2}$	0,3	0,5	1,0	$\psi_1$	1,98	1,30	0,88
$\frac{a}{b}$	$\xi$	$\eta$																												
1,0	0,833	0,750																												
1,5	0,662	0,602																												
2,0	0,584	0,530																												
3,0	0,499	0,454																												
4,0	0,459	0,415																												
5,0	0,439	0,392																												
$\frac{Rh}{a^2}$	0,3	0,5	1,0																											
$\psi_1$	1,98	1,30	0,88																											

Изгибающий момент  $M_2(\varphi)$  и крутящий момент  $M_\kappa$  определяют по формулам (7). Кроме того, необходимо вычислять момент стесненного кручения  $\bar{M}(\varphi)$  и бимомент  $B(\varphi)$ , которые определяют из соотношений

$$\frac{d^2 B}{d\varphi^2} - \kappa^2 B = R[M_2(\varphi) + Rm_\kappa(\varphi)];$$

$$\bar{\bar{M}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dB}{d\varphi}; \quad \bar{M} = M_\kappa - \bar{\bar{M}}.$$

Интегрирование уравнений приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{M}}(\varphi) = & \bar{\bar{M}}^0 \operatorname{ch} \kappa \varphi + M^0 \frac{\kappa \operatorname{sh} \kappa \varphi + \sin \varphi}{\kappa^2 + 1} + \\ & + \frac{B^0}{R} \kappa \operatorname{sh} \kappa \varphi + (M_\kappa^0 - RQ^0) \frac{\operatorname{ch} \kappa \varphi - \cos \varphi}{\kappa^2 + 1} + \\ & + \frac{1}{\kappa^2 + 1} \sum_i L_i [\kappa \operatorname{sh} \kappa (\varphi - \varphi_i) + \sin (\varphi - \varphi_i)] + \\ & + \frac{\kappa}{R} \sum_i L_{Bi} \operatorname{sh} \kappa (\varphi - \varphi_i) - \\ & - \frac{R}{\kappa^2 + 1} \sum_i P_i [\operatorname{ch} \kappa (\varphi - \varphi_i) - \cos (\varphi - \varphi_i)] - \\ & - \frac{1}{\kappa^2 + 1} \sum_i L_{\kappa i} [\kappa^2 \operatorname{ch} \kappa (\varphi - \varphi_i) + \cos (\varphi - \varphi_i)] + \bar{\bar{M}}^*; \\ B(\varphi) = & B^0 \operatorname{ch} \kappa \varphi + \bar{\bar{M}}^0 \frac{R}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa \varphi + \\ & + M^0 \frac{R}{\kappa^2 + 1} (\operatorname{ch} \kappa \varphi - \cos \varphi) + \\ & + (M_\kappa^0 - RQ^0) \frac{R}{\kappa (\kappa^2 + 1)} (\operatorname{sh} \kappa \varphi - \kappa \sin \varphi) - \\ & - \frac{R^2}{\kappa (\kappa^2 + 1)} \sum_i P_i [\operatorname{sh} \kappa (\varphi - \varphi_i) - \kappa \sin (\varphi - \varphi_i)] + \\ & + \frac{R}{\kappa^2 + 1} \sum_i L_i [(\operatorname{ch} \kappa (\varphi - \varphi_i) - \cos (\varphi - \varphi_i)] + \\ & + \sum_i L_{Bi} \operatorname{ch} \kappa (\varphi - \varphi_i) - \\ & - \frac{R}{\kappa^2 + 1} \sum_i L_{\kappa i} [\kappa \operatorname{sh} \kappa (\varphi - \varphi_i) + \sin (\varphi - \varphi_i)] + B^*; \\ \bar{M}(\varphi) = & M_\kappa(\varphi) - \bar{\bar{M}}(\varphi). \end{aligned} \quad (37)$$

Смещения тонкостенного стержня

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + \vartheta_2^0 R \sin \varphi - \vartheta_\kappa^0 R (1 - \cos \varphi) - \\
 &- \frac{R^2}{EJ_2} \left[ Q^0 R \Pi_Q(\varphi) - M^0 \Pi_M(\varphi) + M_\kappa^0 \Pi_\kappa + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{M}^0 \bar{\Pi}(\varphi) - \frac{1}{R} B^0 \Pi_B(\varphi) \right] + u^*(\varphi); \\
 \vartheta_2(\varphi) &= \vartheta_2^0 \cos \varphi - \vartheta_\kappa^0 \sin \varphi - \\
 &- \frac{R}{EJ_2} \left[ Q^0 R \Phi_Q(\varphi) - M^0 \Phi_M(\varphi) + \right. \\
 &\quad \left. + M_\kappa^0 \Phi_\kappa(\varphi) + \bar{M}^0 \bar{\Phi}(\varphi) - \frac{1}{R} B^0 \Phi_B(\varphi) \right] + \vartheta_2^*(\varphi); \\
 \vartheta_\kappa(\varphi) &= \vartheta_2^0 \sin \varphi - \vartheta_\kappa^0 \cos \varphi + \\
 &+ \frac{R}{EJ_2} \left[ Q^0 R \Psi_Q(\varphi) - M^0 \Psi_M(\varphi) + \right. \\
 &\quad \left. + M_\kappa^0 \Psi_\kappa(\varphi) + \bar{M}^0 \bar{\Psi}(\varphi) - \frac{1}{R} B^0 \Psi_B(\varphi) \right] + \vartheta_\kappa^*(\varphi).
 \end{aligned} \tag{38}$$

Относительный угол закручивания

$$\theta(\varphi) = \frac{\bar{M}(\varphi)}{GJ_\kappa} = \frac{M_\kappa - \bar{M}}{GJ_k}.$$

Здесь и в формулах (38) обозначено:

$$\begin{aligned}
 \Pi_Q(\varphi) &= \frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \\
 &+ \lambda \left[ \frac{\operatorname{sh} \kappa \varphi}{\kappa (\kappa^2 + 1)^2} + \frac{\kappa^2 (3\kappa^2 + 5)}{2 (\kappa^2 + 1)^2} \sin \varphi - \frac{\kappa^2 \varphi \cos \varphi}{2 (\kappa^2 + 1)} - \varphi \right]; \\
 \Pi_M(\varphi) &= -\frac{1}{2} \varphi \sin \varphi - \\
 &- \lambda \left[ \frac{\kappa^2}{2 (\kappa^2 + 1)} \varphi \sin \varphi + \frac{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}{(\kappa^2 + 1)^2} \cos \varphi + \frac{\operatorname{ch} \kappa \varphi}{(\kappa^2 + 1)^2} - 1 \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\kappa}(\varphi) &= \frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \\
&+ \frac{\lambda}{2\kappa(\kappa^2 + 1)^2} [2 \operatorname{sh} \kappa \varphi + (\kappa^2 - 1)(\kappa^2 + 2)\kappa \sin \varphi - \\
&\quad - \kappa^3(\kappa^2 + 1)\varphi \cos \varphi]; \\
\bar{\Pi}(\varphi) &= \frac{\lambda}{\kappa(\kappa^2 + 1)} (\kappa \sin \varphi - \operatorname{sh} \kappa \varphi); \\
\Pi_B(\varphi) &= -\frac{\lambda}{\kappa^2 + 1} (\kappa^2 + 1 - \kappa^2 \cos \varphi - \operatorname{ch} \kappa \varphi); \\
\Phi_Q(\varphi) &= \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi + \\
&+ \lambda \left[ \frac{\operatorname{ch} \kappa \varphi}{(\kappa^2 + 1)^2} + \frac{\kappa^2 \varphi \sin \varphi}{2(\kappa^2 + 1)} + \frac{\kappa^2(\kappa^2 + 2)}{(\kappa^2 + 1)^2} \cos \varphi - 1 \right]; \\
\Phi_M(\varphi) &= -\varphi \cos \varphi - \sin \varphi + \\
&+ \lambda \left[ \frac{\kappa^2(\kappa^2 + 3)}{2(\kappa^2 + 1)^2} \sin \varphi - \frac{\kappa^2 \varphi \cos \varphi}{2(\kappa^2 + 1)} - \frac{\kappa \operatorname{sh} \kappa \varphi}{(\kappa^2 + 1)^2} \right]; \\
\Phi_{\kappa}(\varphi) &= \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi + \\
&+ \frac{\lambda}{(\kappa^2 + 1)^2} \left[ \operatorname{ch} \kappa \varphi + \frac{1}{2} \kappa^2(\kappa^2 + 1) \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \right]; \\
\bar{\Phi}(\varphi) &= \frac{\lambda}{\kappa^2 + 1} (\cos \varphi - \operatorname{ch} \kappa \varphi); \\
\Phi_B(\varphi) &= \frac{\lambda \kappa}{\kappa^2 + 1} (\kappa \sin \varphi - \operatorname{sh} \kappa \varphi); \\
\Psi_Q(\varphi) &= \frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \\
&+ \frac{\lambda \kappa}{2(\kappa^2 + 1)^2} [\kappa(\kappa^2 + 3) \sin \varphi - \kappa(\kappa^2 + 1) \varphi \cos \varphi - 2 \operatorname{sh} \kappa \varphi]; \\
\Psi_M(\varphi) &= -\frac{1}{2} \varphi \sin \varphi + \\
&+ \frac{\lambda \kappa^2}{(\kappa^2 + 1)^2} \left[ \operatorname{ch} \kappa \varphi - \frac{1}{2} (\kappa^2 + 1) \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \right];
\end{aligned}$$

$$\Psi_{\kappa}(\varphi) = \frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) - \frac{\lambda}{2(\kappa^2 + 1)^2} \{ \kappa^2 (\kappa^2 + 1) \varphi \cos \varphi + \\ + [\kappa^2 (\kappa^2 + 1) + 2] \sin \varphi + 2\kappa \operatorname{sh} \kappa \varphi \};$$

$$\bar{\Psi}(\varphi) = \frac{\lambda}{\kappa^2 + 1} (\kappa \operatorname{sh} \kappa \varphi + \sin \varphi);$$

$$\Psi_B(\varphi) = \frac{\lambda \kappa^2}{\kappa^2 + 1} (\operatorname{ch} \kappa \varphi - \cos \varphi).$$

Начальные параметры, определяемые из условий закрепления стержня в формулах (37) и (38), отмечены нулями. При защемлении, не препятствующем свободной деформации края стержня,  $B^0 = 0$ ,  $\varphi^0 = 0$ ,  $\vartheta_{\kappa}^0 = 0$ ,  $u^0 = 0$ ; на свободном конце стержня  $Q_2^0 = M^0 = M_{\kappa}^0 = 0$ ; над концевой шарнирной опорой  $M^0 = \bar{M}_{\kappa}^0 = B^0 = 0$  и  $u = 0$ ; на полностью жестко защемленном конце  $M_{\kappa} = M^0$  и  $u^0 = \vartheta^0 = \vartheta_{\kappa}^0 = 0$ .

Звездочками отмечены величины усилий и смещений только от заданных нагрузок, определяемые как частные решения неоднородных уравнений:

$$B^* = \frac{R}{\kappa} \int_0^{\varphi} \{ M_2(\varphi_1) + R m_{\kappa}(\varphi) \} \operatorname{sh} \kappa (\varphi - \varphi_1) d\varphi_1.$$

В выражениях для смещений члены от приложенных в точках  $\varphi_i$  сосредоточенных нагрузок отнесены к частным решениям. Выражения для них получают по общему правилу использования начальных параметров аналогично выражениям для  $\bar{M}(\varphi)$  и  $B(\varphi)$ : заменой  $Q_0$ ,  $M_0$ ,  $M_{\kappa}^0$ ,  $B_0$  и  $\varphi$  соответственно на  $P_2$ ,  $L_2$ ,  $L_{\kappa}$ ,  $L_B$ ,  $\varphi - \varphi_i$ .

Ниже приведены частные решения ряда задач.

**Пример 9.** Стержень закреплен на трех равноотстоящих опорах и нагружен силой  $P$  по середине пролета (рис. 32). Реакции в опорах:

$$V_A = - \frac{\sin \alpha \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)} P = -C_1(\alpha) P;$$

$$V_B = - \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} P = -C_2(\alpha) P;$$

$$V_C = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)} P.$$

Наибольший изгибающий момент имеет место в сечении под силой  $P$ :

$$M_{\max} = M\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{PR \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)} \left[ \sin \alpha \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) + \sin \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) \right].$$

Момент стесненного кручения  $\bar{M}^0$  над опорой  $A$ :

$$\bar{M}^0 = \frac{PR}{(\kappa^2 + 1) \operatorname{sh} 2\kappa\alpha} \left[ \operatorname{sh} \frac{3}{2} \kappa\alpha - \kappa \sin \frac{3}{2} \alpha - C_1 (\operatorname{sh} 2\kappa\alpha - \kappa \sin 2\alpha) - C_2 (\operatorname{sh} \kappa\alpha - \kappa \sin \alpha) \right].$$

Наибольший бимомент (в сечении под силой  $P$ )

$$B_{\max} = B\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{\kappa} \bar{M}^0 \operatorname{sh} \frac{\kappa\alpha}{2} + \frac{PR^2}{\kappa(\kappa^2 + 1)} C_1 \left( \operatorname{sh} \frac{\kappa\alpha}{2} - \kappa \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

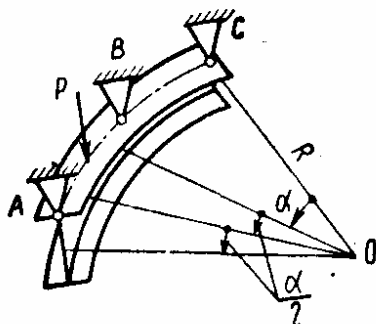


Рис. 32

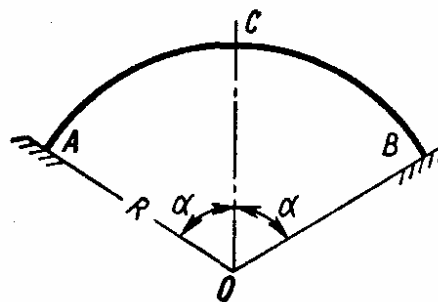


Рис. 33

**Пример 10.** Стержень с углом раствора  $2\alpha$  зашцеилен обоими концами и нагружен произвольной нагрузкой перпендикулярно его плоскости (рис. 33). Такой стержень рассчитывают с использованием упругих центров. Усилия в ключевом сечении  $C$  определяют по формулам

$$Q_C = -\frac{1}{\delta_Q} (\Delta u + d_1 \Delta \vartheta_\kappa); \quad M_C = -\frac{1}{\delta_M} (\Delta \vartheta_2 - d_2 \Delta \vartheta);$$

$$M_{\kappa C} = -\frac{\Delta \vartheta_\kappa}{\delta_\kappa} + d_1 Q; \quad B_C = -\frac{\Delta \vartheta}{\delta_B} - d_2 M_C;$$

для стержня с малой крутильной жесткостью коэффициенты будут

$$d_1 = \frac{2R^2}{GJ_\kappa} \cdot \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + 1} \cdot \frac{\alpha}{\delta_\kappa} (\kappa \sin \alpha \operatorname{ctg} \kappa\alpha - \cos \alpha) - R;$$

$$d_2 = \frac{R}{\kappa^2 + 1} \left( 1 - \frac{\kappa \sin \alpha}{\operatorname{sh} \kappa\alpha} \right);$$

$$\delta_Q = A_Q \frac{R^3}{GJ_\kappa}; \quad \delta_M = A_M \frac{R}{GJ_\kappa};$$

$$\delta_\kappa = A_\kappa \frac{R}{GJ_\kappa}; \quad \delta_B = \frac{A_B}{RGJ_\kappa};$$

$$A_Q = \alpha (\kappa \alpha \operatorname{cth} \kappa \alpha - 1) - A_\kappa \left( \frac{R+d}{R} \right)^2; \quad A_B = \kappa \operatorname{sh} 2\kappa \alpha;$$

$$A_M = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + 1)^2} \left[ (\kappa^2 + 1) \alpha - \frac{\kappa^2 - 1}{2} \sin 2\alpha - 2\kappa \sin^2 \alpha \operatorname{cth} \kappa \alpha \right];$$

$$A_\kappa = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + 1)^2} \left[ (\kappa^2 + 1) \alpha - \frac{3\kappa^2 + 1}{2} \sin 2\alpha + 2\kappa^3 \sin^2 \alpha \operatorname{cth} \kappa \alpha \right].$$

$\Delta u$ ,  $\Delta \vartheta_2$ ,  $\Delta \vartheta_\kappa$ ,  $\Delta \theta$  — разности соответствующих смещений концов в точке  $C$  левой и правой половины стержня только от внешней нагрузки, которые можно определить по формулам (7) и (38). Произвольную нагрузку, приложенную к стержню, рекомендуется разлагать на симметричную и косимметричную; это позволяет свести весь расчет к расчету одной половины стержня. В случае симметричной нагрузки  $Q^0 = M_\kappa^0 = 0$ , в случае косимметричной нагрузки  $M^0 = B^0 = 0$ . В справочнике [18] приведены таблицы коэффициентов  $\delta_i$  и  $A_i$ .

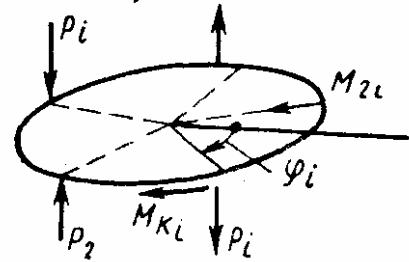


Рис. 34

Тонкостенное или массивное кольцо, опертые статически определенным образом и нагруженное системой сосредоточенных сил и моментов (рис. 34). После определения реакций на опорах усилия в любом сечении кольца определяют по формулам

$$Q(\varphi) = -\frac{1}{\pi} \sum_i P_i \Psi_1(\varphi - \varphi_i);$$

$$M(\varphi) = \frac{R}{\pi} \sum_i P_i \Psi_2(\varphi - \varphi_i) + \frac{1}{\pi} \sum_i L_i \Psi_3(\varphi - \varphi_i) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_i L_{\kappa i} \Psi_4(\varphi - \varphi_i) - \frac{1}{2\pi} \sum_i L_{\kappa i};$$

$$M_\kappa(\varphi) = \frac{R}{\pi} \sum_i P_i \Psi_4(\varphi - \varphi_i) + \frac{1}{\pi} \sum_i L_i \Psi_2(\varphi - \varphi_i) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_i L_{\kappa i} \Psi_3(\varphi - \varphi_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_i L_i;$$

$$\bar{M}(\varphi) = \frac{R}{\pi} \sum_i P_i \Psi_5(\varphi - \varphi_i) - \frac{1}{\pi} \sum_i L_i \Psi_6(\varphi - \varphi_i) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_i L_{\kappa i} \Psi_7(\varphi - \varphi_i);$$

$$B(\varphi) = \frac{R^2}{\pi} \sum_i P_i \Psi_8(\varphi - \varphi_i) - \frac{R}{\pi} \sum_i L_i \Psi_6(\varphi - \varphi_i) -$$

$$- \frac{R}{\pi} \sum_i L_{\kappa i} \Psi_8(\varphi - \varphi_i).$$

Для массивного кольца моменты  $\bar{M}$  и  $B$  не определяют.



Смещения тонкостенного кольца:

$$\begin{aligned}
 u &= u^0 + R\vartheta^0 \sin \varphi - R\vartheta_{\kappa}^0 \cos \varphi + \\
 &+ \frac{R^2}{\pi EJ_2} \left\{ R \sum_i P_i [\Psi_9 (\varphi - \varphi_i) + \lambda \Psi_{10} (\varphi - \varphi_i)] + \right. \\
 &+ \sum_i L_i [\Psi_{11} (\varphi - \varphi_i) + \lambda \Psi_{12} (\varphi - \varphi_i)] + \\
 &+ \left. \sum_i L_{\kappa i} [\Psi_9 (\varphi - \varphi_i) + \lambda \Psi_{13} (\varphi - \varphi_i)] \right\}; \\
 \vartheta &= \vartheta^0 \cos \varphi + \vartheta_{\kappa}^0 \sin \varphi + \\
 &+ \frac{R}{\pi EJ_2} \left\{ R \sum_i P_i [-\Psi_{11} (\varphi - \varphi_i) - \lambda \Psi_{12} (\varphi - \varphi_i)] + \right. \\
 &+ \sum_i L_i [\Psi_{14} (\varphi - \varphi_i) + \lambda \Psi_{13} (\varphi - \varphi_i)] + \\
 &+ \sum_i L_{\kappa i} [-\Psi_{11} (\varphi - \varphi_i) + \lambda \Psi_{15} (\varphi - \varphi_i)] + \frac{\lambda}{2} \sum_i L_i \Big\}; \\
 \vartheta_{\kappa} &= \vartheta^0 \sin \varphi - \vartheta_{\kappa}^0 \cos \varphi + \\
 &+ \frac{R}{\pi EJ_2} \left\{ R \sum_i P_i [\Psi_9 (\varphi - \varphi_i) + \lambda \Psi_{13} (\varphi - \varphi_i)] + \right. \\
 &+ \sum_i L_i [\Psi_{11} (\varphi - \varphi_i) + \lambda \Psi_{12} (\varphi - \varphi_i)] + \\
 &+ \sum_i L_{\kappa i} [\Psi_9 (\varphi - \varphi_i) + \lambda \Psi_{16} (\varphi - \varphi_i)] + \frac{1}{2} \sum_i L_{\kappa i} \Big\}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Суммирование ведут по всем силовым факторам, действующим на кольцо, включая и опорные реакции.  $(\varphi - \varphi_i)$  — кратчайшее угловое расстояние между сечением, в котором определяют усилия, и сечением, в котором приложен данный силовой фактор. Функции  $\Psi_i(\varphi)$  определяют по формулам

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(\varphi) &= \sum_2^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}; \\
 \Psi_2(\varphi) &= \sum_2^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^2 - 1}; \\
 \Psi_3(\varphi) &= \sum_2^{\infty} \frac{n \sin n\varphi}{n^2 - 1};
 \end{aligned}$$

$$\Psi_4(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n(n^2 - 1)};$$

$$\Psi_5(\varphi) = - \sum_2^{\infty} \frac{n \sin n\varphi}{(n^2 - 1)(n^2 + \kappa^2)};$$

$$\Psi_6(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{n^2 \cos n\varphi}{(n^2 - 1)(n^2 + \kappa^2)};$$

$$\Psi_7(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{n^3 \sin n\varphi}{(n^2 - 1)(n^2 + \kappa^2)};$$

$$\Psi_8(\varphi) = - \sum_2^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{(n^2 - 1)(n^2 + \kappa^2)};$$

$$\Psi_9(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{(n^2 - 1)^2};$$

$$\Psi_{10}(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{\kappa^2 \cos n\varphi}{n^2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + \kappa^2)};$$

$$\Psi_{11}(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{n \sin n\varphi}{(n^2 - 1)^2};$$

$$\Psi_{12}(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{\kappa^2 \sin n\varphi}{n (n^2 - 1)^2 (n^2 + \kappa^2)};$$

$$\Psi_{13}(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{\kappa^2 \cos n\varphi}{(n^2 - 1)^2 (n^2 + \kappa^2)};$$

$$\Psi_{14}(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{n^2 \cos n\varphi}{(n^2 - 1)^2};$$

$$\Psi_{15}(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{n\kappa^2 \sin n\varphi}{(n^2 - 1)^2 (n^2 + \kappa^2)};$$

$$\Psi_{16}(\varphi) = \sum_2^{\infty} \frac{n^2 \kappa^2 \cos n\varphi}{(n^2 - 1)^2 (n^2 + \kappa^2)}.$$

Функции имеют период  $2\pi$ ; функции  $\psi_1, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_7, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{15}$  — нечетные, т. е. при замене  $\varphi$  на  $-\varphi$  знак у них изменяется на обратный; функции  $\psi_2, \psi_6, \psi_8, \psi_9, \psi_{10}, \psi_{13}, \psi_{14}, \psi_{16}$  — четные, т. е. знак у них сохраняется при замене  $\varphi$  на  $-\varphi$ . Если угол между силой и рассматриваемым сечением больше  $180^\circ$ , то вместо него берут со знаком минус угол, дополнительный до  $360^\circ$ . В справочнике [18] приведены таблицы функций  $\psi_i$ .

Для стержня «массивного» сечения выражения для смещений можно получить из формул (40), если положить  $\kappa = \infty$ .

Вычисления рекомендуется выполнять в следующем порядке. В произвольном сечении кольца по формулам (39) определяют внутренние силовые факторы. Приняв эти усилия за начальные, по формулам (7) определяют силовые факторы в других сечениях кольца.

По найденным величинам внутренних силовых факторов в данном сечении определяют нормальные и касательные напряжения по формулам для прямых стержней:

$$\sigma = \frac{M_2}{J_2} y - \frac{B}{J_\omega} \omega;$$

$$\tau = \frac{Q_2 S_2}{J_2 t} - \frac{\bar{M} S_\omega}{J_\omega t},$$

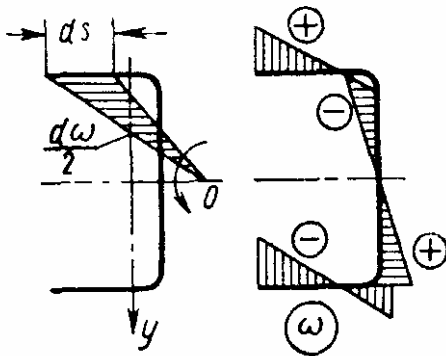


Рис. 35

где  $\omega$  — секториальная площадь для точек контура поперечного сечения, построенная при полюсе  $O$  выбранном в центре изгиба сечения;  $\omega$  считают положительной, если радиус-вектор, описывающий секториальную площадь, вращается против часовой стрелки (рис. 35);

$S_\omega = \int_0^S \omega dF$  — статический бимомент части сечения;  $t$  — толщина стенки профиля.

### КОЛЬЦА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ [16]

Если ни одна из главных центральных осей инерции поперечного сечения не совпадает с плоскостью кольца, то деформации кольца в своей плоскости и из своей плоскости взаимосвязаны. Пусть  $\xi, \eta$  — главные центральные оси поперечного сечения кольца;  $x, y$  — вспомогательные оси, расположенные в плоскости и перпендикулярно к плоскости кольца;  $\alpha_0$  — угол между осями  $x$  и  $\xi$  (рис. 36).

Моменты инерции  $J_x, J_y$  выражаются через главные центральные моменты инерции  $J_\xi, J_\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_\xi \cdot \cos^2 \alpha_0 + J_\eta \cdot \sin^2 \alpha_0; \\ J_y &= J_\xi \cdot \sin^2 \alpha_0 + J_\eta \cdot \cos^2 \alpha_0; \\ J_{xy} &= \frac{1}{2} (J_\eta - J_\xi) \cdot \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Замкнутое кольцо представляет собой 6 раз статически неопределимую систему. Разрезав в каком-либо сечении кольцо, находящееся под действием заданных нагрузок, следует приложить шесть внутренних

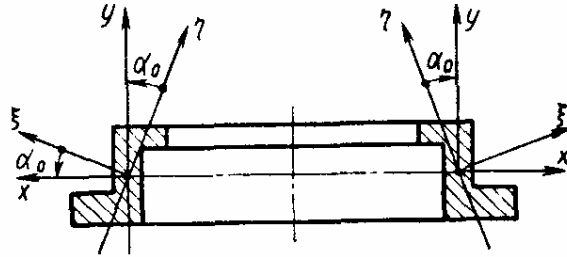


Рис. 36

силовых факторов (которым придается также смысл начальных параметров): три в плоскости кольца  $X_1 = M_1^0$ ,  $X_2 = N^0$ ,  $X_3 = Q_1^0$  и три перпендикулярно к нему  $X_4 = M_2^0$ ,  $X_5 = M_\kappa^0$ ,  $X_6 = Q_2^0$  (рис. 37). Эти начальные силовые факторы определяют из условий отсутствия

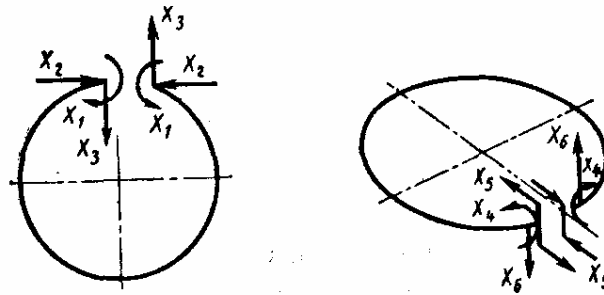


Рис. 37

линейных и угловых перемещений одной грани разреза относительно другой. Эти условия записывают в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \delta_{1k} X_k + \delta_{1p} &= 0; \quad \sum_{k=1}^6 \delta_{2k} X_k + \delta_{2p} = 0; \quad \sum_{k=1}^6 \delta_{3k} X_k + \delta_{3p} = 0; \\ \sum_{k=1}^6 \delta_{4k} X_k + \delta_{4p} &= 0; \quad \sum_{k=1}^6 \delta_{5k} X_k + \delta_{5p} = 0; \\ \sum_{k=1}^6 \delta_{6k} X_k + \delta_{6p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Коэффициенты  $\delta_{ik}$  определяют по формуле Мора

$$\delta_{ik} = \int \left[ \frac{M_\xi M'_\xi}{EJ_\xi} + \frac{M_\eta M'_\eta}{EJ_\eta} + \frac{M_\kappa M'_\kappa}{GJ_\kappa} \right] dS. \quad (43)$$

Моменты  $M_\xi$ ,  $M_\eta$  выражают через моменты  $M_x$ ,  $M_y$ :

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= M_x \cos \alpha_0 + M_y \sin \alpha_0; \\ M_\eta &= -M_x \sin \alpha_0 + M_y \cos \alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

После подстановки этих выражений в формулу (43) для коэффициентов  $\delta_{ik}$  получим

$$\delta_{ik} = \frac{RJ_x}{EJ_\xi J_\eta} \int_0^{2\pi} [\lambda_1 M_x M'_x + M_y M'_y + \lambda_2 (M_x M'_y + M_y M'_x) + \lambda_3 M_\kappa M'_\kappa] d\varphi,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{J_y}{J_x}; \quad \lambda_2 = \frac{J_{xy}}{J_x}; \quad \lambda_3 = \frac{E}{G} \cdot \frac{J_\xi J_\eta}{J_x J_\kappa}.$$

После вычислений для коэффициентов  $\delta_{ik}$  получаем выражения

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2\pi; \quad \delta_{12} = 2\pi R; \quad \delta_{13} = 0; \quad \delta_{14} = 0; \quad \delta_{15} = 0; \quad \delta_{16} = 0; \\ \delta_{21} &= 2\pi R; \quad \delta_{22} = 3\pi R^2; \quad \delta_{23} = 0; \quad \delta_{24} = -\pi \lambda_2 R; \quad \delta_{25} = 0; \quad \delta_{26} = 0; \\ \delta_{31} &= 0; \quad \delta_{32} = 0; \quad \delta_{33} = \pi R^2; \quad \delta_{34} = 0; \quad \delta_{35} = \pi \lambda_2 R; \quad \delta_{36} = \pi \lambda_2 R^2; \\ \delta_{41} &= 0; \quad \delta_{42} = -\pi \lambda_2 R; \quad \delta_{43} = 0; \quad \delta_{44} = \pi (\lambda_1 + \lambda_3); \quad \delta_{45} = 0; \quad \delta_{46} = 0; \\ \delta_{51} &= 0; \quad \delta_{52} = 0; \quad \delta_{53} = \pi \lambda_2 R; \quad \delta_{54} = 0; \quad \delta_{55} = \pi (\lambda_1 + \lambda_3); \\ &\quad \delta_{56} = \pi (\lambda_1 + \lambda_3); \\ \delta_{61} &= 0; \quad \delta_{62} = 0; \quad \delta_{63} = \pi \lambda_2 R^2; \quad \delta_{64} = 0; \quad \delta_{65} = \pi (\lambda_1 + \lambda_3); \\ &\quad \delta_{66} = \pi (\lambda_1 + 3\lambda_3) R. \end{aligned}$$

Задачу следует решать отдельно для нагрузок в плоскости кольца и перпендикулярных к плоскости кольца.

Для нагрузок в плоскости кольца свободные члены канонических уравнений (после деления на множитель  $\frac{RJ_x}{EJ_\xi J_\eta}$ ) принимают вид

$$\delta_{1p} = \int M_{py}(\varphi) d\varphi = A_y; \quad \delta_{2p} = R \int M_{py}(\varphi) (1 - \cos \varphi) d\varphi = R(A_y - C_y);$$

$$\delta_{3p} = R \int M_{py}(\varphi) \sin \varphi d\varphi = RS_y; \quad \delta_{4p} = \lambda_2 \int M_{py}(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \lambda_2 C_y;$$

$$\delta_{5p} = \lambda_2 \int M_{py}(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \lambda_2 S_y; \quad \delta_{6p} = \lambda_2 R \int M_{py}(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \lambda_2 RS_y;$$

тогда для начальных силовых факторов может быть получено решение

$$M_1^0 = -\frac{1}{2\pi} (A_y + 2C_y); \quad N^0 = \frac{C_y}{\pi R}; \quad Q_x^0 = -\frac{S_y}{\pi R};$$

$$Q_y^0 = 0; \quad M_x^0 = 0; \quad M_\kappa^0 = 0.$$

При нагружении перпендикулярно к плоскости кольца начальные силовые факторы определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_1^0 &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\lambda_2 A_x + \frac{2\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2^2} (S_\kappa + C_x) \right]; \\ N^0 &= -\frac{1}{\pi R} \cdot \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2^2} (S_\kappa - C_x); \\ Q_1^0 &= -\frac{1}{\pi R} \cdot \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2^2} (S_x + C_\kappa); \\ M_2^0 &= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda_3 S_\kappa + (\lambda_1 - \lambda_2^2) C_x}{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2^2}; \\ M_\kappa^0 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} A_\kappa + \frac{\lambda_3 C_\kappa - (\lambda_1 - \lambda_2^2) S_x}{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2^2} \right]; \\ Q_2^0 &= -\frac{1}{2\pi R} A_\kappa; \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= \int M_{\rho x}(\varphi) d\varphi; \quad C_x = \int M_{\rho x}(\varphi) \cos \varphi d\varphi; \\ S_x &= \int M_{\rho x}(\varphi) \sin \varphi d\varphi; \\ A_\kappa &= \int M_{\rho \kappa}(\varphi) d\varphi; \quad C_\kappa = \int M_{\rho \kappa}(\varphi) \cos \varphi d\varphi; \\ S_\kappa &= \int M_{\rho \kappa}(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что внешние нагрузки, перпендикулярные к плоскости кольца, вызывают внутренние силовые факторы не только по направлению нагрузок, но и в плоскости кольца.

По найденным значениям моментов  $M_x$ ,  $M_y$  определяют по формулам (44) моменты  $M_\xi$ ,  $M_\eta$  и по последним — напряжения в кольце:

$$\delta = \pm \left| \frac{M_\xi}{W_\xi} \right| + \left| \frac{M_\eta}{W_\eta} \right|; \quad \tau = \frac{M_\kappa}{W_\kappa},$$

где  $W_\xi$ ,  $W_\eta$  — моменты сопротивления поперечного сечения кольца относительно главных центральных осей.

### КОЛЬЦО С ПОДСОЕДИНЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Окончательные расчетные формулы для силовых факторов по кольцу в конструкциях, показанных на рис. 38—39, под действием сосредоточенных нагрузок на кольцо приведены в работах [2, 7]. При выводе формул предполагалось: кольца тонкие и нерастяжимые, одна из

главных осей сечения кольца лежит в его плоскости; оболочки — цилиндрические круговые, тонкие, безмоментные, заделанные на одном краю; деформации колец и оболочек малы; кольцо соединено с оболочкой по среднему радиусу кольца. Кроме того, при рассмотрении сосредоточенных нагрузок в плоскости кольца предполагалось кольцо абсолютно жестким из своей плоскости, а при рассмотрении сосредоточенных нагрузок, перпендикулярных к плоскости кольца, кольцо предполагается абсолютно жестким в своей плоскости.

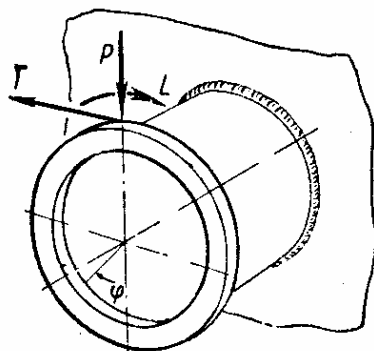


Рис. 38

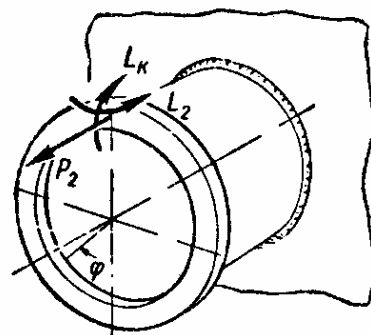


Рис. 39

Нагружение радиальной силой  $P$  (рис. 38):

$$N = \frac{P_1}{2\pi} \left[ \frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n C_n}{n^2 - 1} \cos n\varphi \right];$$

$$Q_1 = \frac{P_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin \varphi + \varphi \cos \varphi - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 - 1} \sin n\varphi \right];$$

$$M_1 = \frac{P_1 R}{2\pi} \left[ \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - 1 - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n(n^2 - 1)} \cos n\varphi \right],$$

где

$$C_n = \frac{a_2 (-1)^n \cdot n}{n^2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + a_1) + a_2}.$$

Нагружение касательной силой  $T$  (рис. 38):

$$N = \frac{T}{2\pi} \left[ \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 - 1} \sin n\varphi \right],$$

$$Q_1 = \frac{T}{2\pi} \left[ \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{(n^2 - 1) n} \cos n\varphi \right];$$

$$M_1 = -\frac{T}{2\pi} \left[ \varphi \cos \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi + \varphi - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 (n^2 - 1)} \sin n\varphi \right],$$

где

$$C_n = \frac{a_2 (-1)^n}{n^2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + a_1) + a_2}.$$

Нагружение моментом  $L_1$  в плоскости кольца (рис. 38):

$$N = -\frac{L_1}{\pi R} \left[ \sin \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n C_n}{n^2 - 1} \sin n\varphi \right];$$

$$Q_1 = \frac{L_1}{\pi R} \left[ \frac{1}{2} - \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 - 1} \cos n\varphi \right];$$

$$M_1 = \frac{L_1}{2\pi} \left[ \varphi - 2 \sin \varphi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n (n^2 - 1)} \sin n\varphi \right],$$

где

$$C_n = \frac{a_2 (-1)^n (n^2 - 1)}{n^2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + a_1) + a_2}.$$

Нагружение осевой силой  $P_2$  (рис. 39):

$$Q_2 = \frac{P_2}{2\pi} \left[ \varphi - 2 \sin \varphi - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n} \sin n\varphi \right];$$

$$M_2 = \frac{P_2 R}{2\pi} \left[ \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - 1 - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 - 1} \cos n\varphi \right];$$

$$M_\kappa = \frac{P_2 R}{2\pi} \left[ \frac{3}{2} \sin \varphi - \varphi - \varphi \cos \varphi - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n (n^2 - 1)} \sin n\varphi \right],$$

где

$$C_n = -\frac{(-1)^n (n^2 + \lambda) (n^2 + a_3)}{(n^2 + \lambda) (n^2 + a_3) + n^2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + 4a_3) a_4}.$$



Нагружение моментом  $L_2$  (рис. 39):

$$Q_2 = \frac{L_2}{\pi R} \left[ 1 - \cos \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n} \cos n\varphi \right];$$

$$M_2 = \frac{L_2}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin \varphi + \varphi \cos \varphi - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 - 1} \sin n\varphi \right];$$

$$M_\kappa = \frac{L_2}{2\pi} \left[ \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n(n^2 - 1)} \cos n\varphi \right];$$

здесь

$$C_n = \frac{(-1)^n n (n^2 + a_3) [n^2 (1 + 2\lambda) - \lambda]}{(n^2 + \lambda) (n^2 + a_3) + n^2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + 4a_3) a_4}.$$

Нагружение крутящим моментом  $L_\kappa$  (рис. 39):

$$Q_2 = -\frac{L_\kappa}{\pi} \left[ \sin \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n} \sin n\varphi \right];$$

$$M_2 = \frac{L_\kappa}{2\pi} \left[ \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 3\lambda}{1 + \lambda} \cos \varphi - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{(n^2 - 1)} \cos n\varphi \right];$$

$$M_\kappa = \frac{L_\kappa}{2\pi} \left[ \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - \lambda}{1 + \lambda} \sin \varphi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n(n^2 - 1)} \sin n\varphi \right];$$

здесь

$$C_n = \frac{(-1)^n n^2 (1 + \lambda) (n^2 + a_3)}{(n^2 + \lambda) (n^2 + a_3) + n^2 (n^2 - 1)^2 (n^2 + a_1) a_4}.$$

В этих формулах

$$a_1 = \frac{12E_0 R^2}{G_0 l^2}; \quad a_2 = 12 \frac{E_0 h_0 R^6}{E J_1 l^3}; \quad a_3 = \frac{a_1}{4}; \quad a_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{E J_2 l}{E_0 h_0 R^4};$$

$l, h_0$  — длина и толщина оболочки;  $E_0, G_0$  — модули упругости и модуль сдвига материала оболочки.

Весьма употребительны решения, данные Л. И. Балабухом [2] для цилиндрической оболочки, подкрепленной рядом колец. В работе [1] приведены графики распределения силовых факторов по длине кольца под действием сосредоточенных нагрузок на одно из колец в его плоскости.

## КОЛЬЦЕВЫЕ СИСТЕМЫ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ СПИЦ

Два соосных кольца, расположенных в одной плоскости, соединены  $n$  спицами, вообще говоря, наклонными к радиусу, жестко или шарнирно соединенными с кольцами (рис. 40). Относительно колец сделаны допущения, такие же как на стр. 288. Внешняя произвольная нагрузка приложена в плоскости колец. Система  $3n + 3$  раз статически неопределима в случае жесткого крепления спиц и  $n + 3$  раз — в случае шарнирного крепления. Спицы нумеруются  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Обозначения:  $R, r$  — радиусы наружного и внутреннего колец;  $l$  — длина спицы;  $\psi, \psi_1$  — углы наклона спиц к радиусу, одинаковые у всех спиц;  $X_i, Y_i, Z_i$  — нормальная и перерезывающая силы и изгибающий момент в  $i$ -й спице в точке ее соединения с внутренним кольцом. Остальные обозначения см. в начале

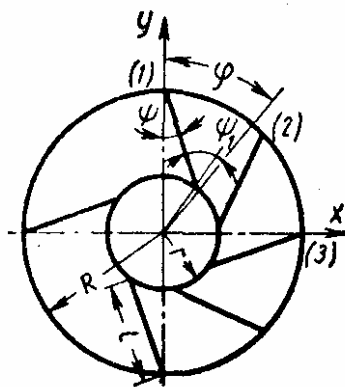


Рис. 40

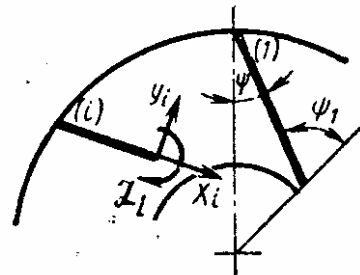


Рис. 41

главы. Величинам, относящимся к наружному кольцу, придается индекс «н», а относящимся к внутреннему кольцу — индекс «в» и к спицам — индекс «с».

Координатные оси  $x, y$  неподвижной системы координат проводят так, чтобы ось  $y$  проходила через точку крепления 1-й спицы к наружному кольцу (рис. 41).

Подробно о методах расчета кольцевых систем см. в работах [9, 11, 12, 17].

## Шарнирное соединение спиц с кольцами

Неизвестные усилия  $X_i$  в спицах определяют из условий совместности деформаций  $\Delta_c = \Delta_v$  по всем  $n$  спицам и уравнений равновесия

$$\sum_x = - \sum_{i=1}^n X_i \sin (\psi_1 - \varphi_i) + P_x = 0;$$

$$\sum_y = \sum_{i=1}^n X_i \cos (\psi_1 - \varphi_i) + P_y = 0;$$

$$\sum_M = r \sum_{i=1}^n X_i \sin \psi_1 + M_p = 0.$$

При составлении уравнений совместности выражения для смещений точек кольца составляют с учетом всех действующих сил и смещений



здесь

$$B_k = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} (a_k D'_k - b_k D''_k); \quad C_k = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} (a_k D''_k + b_k D'_k);$$

$$D'_k = \sum_{i=1}^n D_i \cos (i-1) k\alpha, \quad D''_k = \sum_{i=1}^n D_i \sin (i-1) k\alpha;$$

$$D_i = -[\Delta_{ip} + A_1 + A_2 \cos (i-1) \alpha + A_3 \sin (i-1) \alpha];$$

$$a_k = \sum_{i=1}^n \delta_i \cos (i-1) k\alpha; \quad b_k = \sum_{i=1}^n \delta_i \sin (i-1) k\alpha.$$

Коэффициенты жестких смещений:

$$A_1 = -\frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n \Delta_i + \frac{M_{\text{св}}}{r \cdot \sin \psi_1} \sum_{i=1}^n \delta_i \right];$$

$$A_2 = -\frac{2}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta_i \cos (i-1) \alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i [\cos (i-1) \alpha \cdot P_{\text{сy}} + \right. \\ \left. + \sin (i-1) \alpha \cdot P_{\text{сx}}] \right\};$$

$$A_3 = -\frac{2}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta_i \sin (i-1) \alpha + \sum_{i=1}^n \delta_i [\sin (i-1) \alpha \cdot P_{\text{сy}} + \right. \\ \left. + \cos (i-1) \alpha \cdot P_{\text{сx}}] \right\}.$$

Частные решения некоторых задач при нагружении наружного кольца элементарными нагрузками приведены в табл. 9. После определения усилий  $X_i$  вычисляют внутренние усилия в произвольных сечениях колец методом наложения элементарных нагрузок (или любым другим методом). Принимая эти сечения на нулевые, внутренние усилия по кольцам определяют по формулам (6).

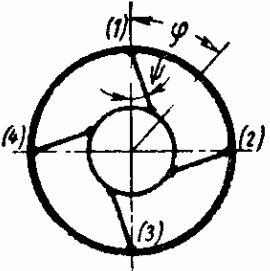
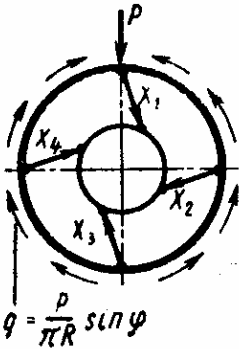
Если внутреннее кольцо представляет собой абсолютно жесткую ступицу, то конструкция относится к типу колес. Применительно к таким конструкциям разработаны другие методы расчета, применимые для нагрузок по ободу, уравновешенных нагрузками по ступице. Решения ряда задач для колеса с абсолютно жесткой втулкой при нагружении указанными нагрузками приведены в табл. 10.

Предварительный выбор сечения обода колеса, в котором сила по ободу приложена в сечении между спицами, можно выполнять по формуле

$$M_0 = \frac{1,14}{n} P R.$$

При  $n = 8$  погрешность в  $M_0$  составляет  $\sim 7,5\%$ ; с увеличением числа спиц погрешность уменьшается.

## 9. Решения некоторых задач при шарнирном соединении спиц с кольцами и нагружении наружного кольца элементарными нагрузками

Схема	Расчетные формулы
<p>Произвольная внешняя нагрузка на наружное кольцо</p> 	$X_1 = -X_2 = X_3 = -X_4 = X, \quad X = -\frac{1}{4} \frac{EJ_H}{R^3} \times$ $\frac{(w_{H1} - w_{H2} + w_{H3} - w_{H4}) \cos \psi - (v_{H1} - v_{H2} + v_{H3} + v_{H4}) \sin \psi}{0,0356 (1 + \chi_1) + 0,1071 (\cos^2 \psi + \chi_1 \cos^2 \psi_1) + \chi_2};$ <p><math>w_{Hi}, v_{Hi}</math> — смещения <math>i</math>-й точки наружного кольца только от внешней нагрузки</p>
<p>Первая элементарная нагрузка на наружное кольцо</p>  <p><math>q = \frac{P}{\pi R} \sin \varphi</math></p>	$X = -\frac{P}{4} \times$ $\times \frac{0,1427 \cos \psi}{0,0356 (1 + \chi_1) + 0,1071 (\cos^2 \psi + \chi_1 \cos^2 \psi_1) + \chi_2};$ <p>При <math>0 \leq \varphi \leq 90^\circ</math></p> $M_\theta = -\frac{X \cdot r}{2} [\cos \psi_1 (\cos \varphi - \sin \varphi) + \sin \psi_1 (\cos \varphi + \sin \varphi - 1)];$ $M_H = M_P + \frac{X \cdot R}{2} [\cos \psi (\cos \varphi - \sin \varphi) + \sin \psi (\cos \varphi + \sin \varphi - 1)];$ <p>При <math>90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ</math></p> $M_\theta = \frac{X \cdot r}{2} [\cos \psi_1 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \sin \psi_1 (\cos \varphi - \sin \varphi + 1)];$ $M_H = K_{MP}(\varphi) P \cdot R - \frac{X R}{2} [\cos \psi (\cos \varphi + \sin \varphi) + \sin \psi (\cos \varphi - \sin \varphi + 1)];$ <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>0 \leq \varphi \leq 90^\circ</math></p> $X = -\frac{0,25P}{1 + \chi_1 + 7,01\chi_2}; \quad M_\theta = -\frac{X \cdot r}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi);$ $M_H = K_{MP} P R + \frac{1}{2} X R (\cos \varphi - \sin \varphi)$

Продолжение табл. 9

Схема						Расчетные формулы										
$\chi_1 = 0$ $\chi_2 = 0$						$\psi = \psi_1 = 0$										
						$\chi_1 = 0$					$\chi_2 = 0$					
						$\chi_2$	$X$	$M_H^{(0)}$	$PR$	$M_\theta^{(0)}$	$PR$	$\chi_1$	$X$	$M_H^{(0)}$	$PR$	$M_\theta^{(0)}$
$0^\circ$	-0,250	0,125	0,114	0,00	-0,250	0,114	0,125	0,00	-0,250	0,114	0,125	0,00	-0,250	0,114	0,125	0,00
$10^\circ$	-0,252	0,124	0,115	0,05	-0,185	0,143	0,096	0,25	-0,200	0,139	0,100	0,25	-0,200	0,139	0,100	0,05
$20^\circ$	-0,258	0,121	0,118	0,10	-0,146	0,166	0,074	0,50	-0,167	0,155	0,084	0,50	-0,167	0,155	0,084	0,10
$30^\circ$	-0,268	0,115	0,124	0,15	-0,121	0,177	0,062	0,75	-0,143	0,167	0,072	0,75	-0,143	0,167	0,072	0,15
—	—	—	—	0,20	-0,104	0,187	0,052	1,00	-0,125	0,176	0,062	1,00	-0,125	0,176	0,062	0,20

Вторая элементарная нагрузка на наружное кольцо (сила  $T$  над спицей)

$$X = \frac{T}{4} \cdot \frac{0,0356 \sin \psi}{0,0356 (1 + \chi_1) + 0,1071 (\cos^2 \psi + \chi_1 \cos^2 \psi_1) + \chi_2}$$

При  $\psi = 0$

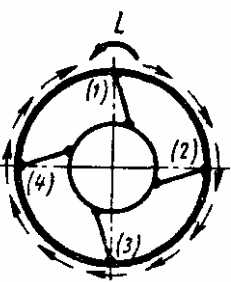
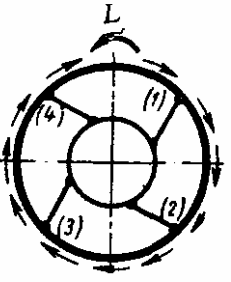
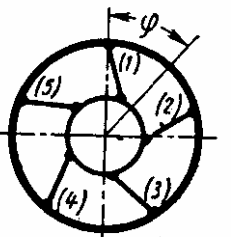
$$X = 0; M_\theta(\psi) = 0; M_A(\psi) = K_{MT}(\psi) TR$$

Вторая элементарная нагрузка на наружное кольцо (сила  $T$  посередине между спицами)

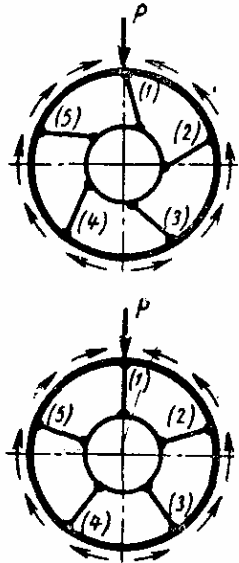
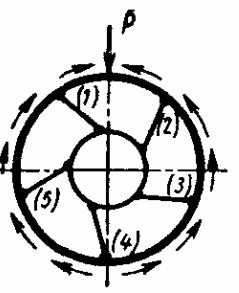
$$X = -\frac{T}{4} \cdot \frac{0,0711 \cos \psi}{0,0356 (1 + \chi_1) + 0,1071 (\cos^2 \psi + \chi_1 \cos^2 \psi_1) + \chi_2}$$

При  $\psi = 0$

$$X = -\frac{0,01777T}{0,1427 (1 + \chi_1) + \chi_2}$$

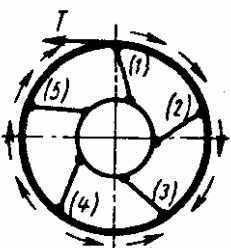
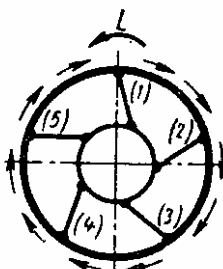
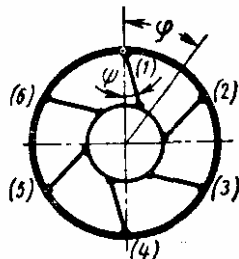
Схема	Расчетные формулы
<p>Третья элементарная нагрузка на наружное кольцо (момент <math>L</math> над спицей)</p> 	$X = -\frac{L}{R} \cdot \frac{0,0293 \sin \psi}{0,0356 (1 + \chi_1) + 0,1071 (\cos^2 \psi + \chi_1 \cos^2 \psi_1) + \chi_2}$ <p>При <math>\psi = 0</math> <math>X = 0</math>; <math>M_\theta(\varphi) = 0</math>; <math>M_H = K_{ML}(\varphi) L</math></p>
<p>Третья элементарная нагрузка на наружное кольцо (момент <math>L</math> посередине пролета)</p> 	$X = -\frac{L}{R} \cdot \frac{0,0517 \cos \psi}{0,0356 (1 + \chi_1) + 0,1071 (\cos^2 \psi + \chi_1 \cos^2 \psi_1) + \chi_2}$ <p>При <math>\psi = 0</math></p> $X = -\frac{L}{R} \cdot \frac{0,0517}{0,1427 (1 + \chi_1) + \chi_2}$
<p>Произвольная нагрузка по кольцам</p>  <p><math>\Delta_i</math> — смещение наружного кольца только от внешней нагрузки в <math>i</math>-й точке</p>	$X_1 = -\frac{1,118 D_1}{d_1};$ $X_{2,5} = -\frac{1}{2} \left( 1,809 \frac{D_1}{d_1} \mp 0,589 \frac{D_2}{d_2} \right);$ $X_{3,4} = \frac{1}{2} \left( 0,691 \frac{D_1}{d_1} \mp 0,9511 \frac{D_2}{d_2} \right);$ $d_1 = 0,0261 (1 + \chi_1) + 0,0874 (\cos^2 \psi + \chi_1 \cos^2 \psi_1) + 1,118 \chi_2;$ $d_2 = 0,0137 (1 + \chi_1) + 0,0460 (\cos^2 \psi + \chi_1 \cos^2 \psi_1) + 0,589 \chi_2;$ $D_1 = \frac{1}{5} [2\Delta_1 - 1,618 (\Delta_2 + \Delta_5) + 0,618 (\Delta_3 + \Delta_4)] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $D_2 = [-0,02763 (\Delta_2 - \Delta_5) + 0,447 (\Delta_3 - \Delta_4)] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $M_\theta(0) = -r \cos \psi_1 [0,239 X_1 - 0,102 (X_2 + X_5) + 0,035 (X_3 + X_4)] + r \sin \psi_1 [-0,020 (X_2 - X_5) + 0,040 (X_3 - X_4)];$ $M_H(0) = M_{H\psi}(\varphi) + R \cos \psi [0,239 X_1 - 0,102 (X_2 + X_5) + 0,035 (X_3 + X_4)] - R \sin \psi [-0,020 (X_2 - X_5) + 0,040 (X_3 - X_4)]$

Продолжение табл. 9

Схема	Расчетные формулы
<p>Первая элементарная нагрузка на наружное кольцо (сила <math>P</math> над спицей)</p> 	$X_1 = -0,6454 \cos \psi \frac{P}{d_1};$ $X_{2,5} = -0,808 X_1 \mp \frac{0,066 P \sin \psi}{d_2};$ $X_{3,4} = 0,310 X_1 \pm \frac{0,0107 \sin \psi P}{d_2}$ <p>Значения <math>d_i</math> приведены в предыдущей задаче. При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = -\frac{0,400 P}{1 + \chi_1}; \quad X_{2,5} = \frac{0,323 P}{1 + \chi_1}; \quad X_{3,4} = \frac{0,124 P}{1 + \chi_1};$ $M_\sigma(0) = \frac{0,162 P r}{1 + \chi_1}, \quad M_H(0) = 0,239 P R - \frac{0,162 P R}{1 + \chi_1}$
<p>Первая элементарная нагрузка на наружное кольцо (сила <math>P</math> посередине пролета)</p> 	$X_1 = -P (0,0104 \cos \psi - 0,0204 \sin \psi) \frac{1}{d_1};$ $X_{2,5} = -0,808 X_1 \pm \frac{P}{d_2} (0,0117 \cos \psi + 0,0024 \sin \psi);$ $X_{3,4} = 0,310 X_1 \pm \frac{P}{d_2} (0,0189 \cos \psi + 0,0038 \sin \psi);$ $M_\sigma(0) = r \cos \psi_1 [-0,008 (X_1 + X_2) - 0,055 (X_3 + X_5) + 0,080 X_4] - r \sin \psi_1 [-0,0603 (X_1 - X_2) + 0,035 (X_3 - X_5)];$ $M_H(0) = 0,239 P R - R \cos \psi [-0,008 (X_1 + X_2) - 0,055 (X_3 + X_5) + 0,080 X_4] + R \sin \psi [-0,0603 (X_1 - X_2) + 0,035 (X_3 - X_5)].$ <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_{1,2} = -\frac{0,066 P}{1 + \chi_1}; \quad X_{3,5} = \frac{0,172 P}{1 + \chi_1}; \quad X_4 = -\frac{0,213 P}{1 + \chi_1}$ $M_\sigma(0) = \frac{0,0349 P r}{1 + \chi_1}; \quad M_H(0) = 0,239 P R - \frac{0,0349 P R}{1 + \chi_1}$



Продолжение табл. 9

Схема	Расчетные формулы
<p>Вторая элементарная нагрузка на наружное кольцо (сила <math>T</math> над спицей)</p> 	$X_1 = \frac{0,0105 \sin \psi}{d_1} T; \quad X_{2,5} = -0,808 X_1 \mp \frac{0,0067 \cos \psi}{d_2} T; \quad X_{3,4} = 0,310 X_1 \pm \frac{0,0108 \cos \psi}{d_2} T.$ <p>Постоянные <math>d_i</math> приведены ранее</p> <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = 0; \quad X_2 = -X_5 = -\frac{0,112T}{1 + \chi_1},$ $X_3 = -X_4 = \frac{0,181T}{1 + \chi_1}$
<p>Третья элементарная нагрузка на наружное кольцо (момент <math>L</math> над спицей)</p> 	$X_1 = -\frac{0,0349 \sin \psi}{d_1} \cdot \frac{L}{R};$ $X_{2,5} = -0,808 X_1 \pm \frac{0,0165 \cos \psi}{d_2} \cdot \frac{L}{R};$ $X_{3,4} = 0,310 X_1 \mp \frac{0,0267 \cos \psi}{d_2} \cdot \frac{L}{R}.$ <p>Постоянные <math>d_i</math> см. ранее.</p> <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = 0; \quad X_{2,5} = \pm \frac{0,277}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R};$ $X_{3,4} = \mp \frac{0,447}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R}$
<p>Произвольная нагрузка на наружное кольцо</p> 	$X_{1,4} = -\frac{1}{6} \left( \frac{D_1}{d_1} \pm \frac{D_3}{d_2} \right);$ $X_{2,5} = -\frac{1}{6} \left( \frac{D_2}{d_1} \mp \frac{D_3}{d_2} \right);$ $X_{3,6} = \frac{1}{6} \left( \frac{D_1 + D_2}{d_1} \mp \frac{D_3}{d_2} \right);$ $d_1 = 0,1107 (1 + \chi_1) - 0,0839 (\sin^2 \psi + \chi_1 \sin^2 \psi_1) + \chi_2;$ $d_2 = 0,01505 (1 + \chi_1) - 0,01367 (\sin^2 \psi + \chi_1 \sin^2 \psi_1) + 0,500 \chi_2;$ $D_1 = [2 (\Delta_1 + \Delta_4) - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_5 + \Delta_6)] \frac{E J_H}{R^3};$ $D_2 = [2 (\Delta_2 + \Delta_5) - (\Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_6)] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $D_3 = \frac{1}{2} [(\Delta_1 - \Delta_4) - (\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_5 + \Delta_6)] \frac{E_H J_H}{R^3}.$

Продолжение табл. 9

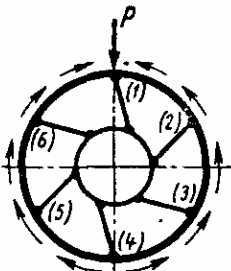
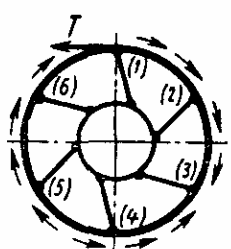
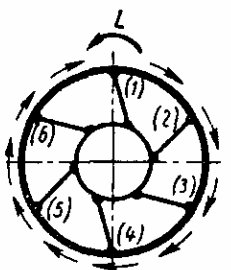
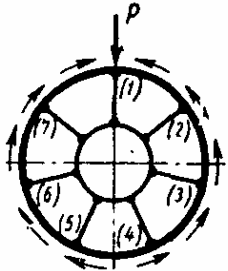
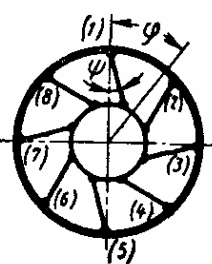
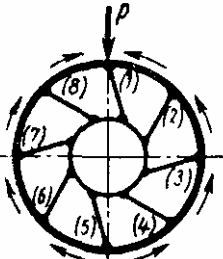
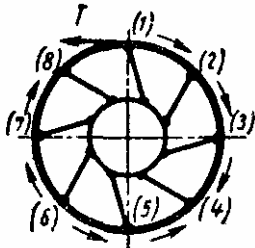
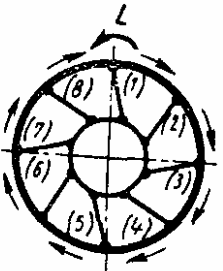
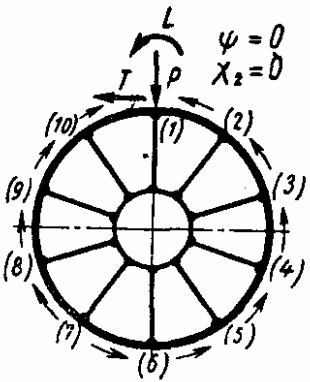
Схема	Расчетные формулы
	$M_{\theta}(0) = -r \cos \psi_1 [0,239X_1 - 0,0898(X_2 + X_6) - 0,0249(X_3 + X_5) + 0,0796X_4] +$ $+ r \sin \psi_1 [-0,0401(X_2 - X_6) + 0,0431(X_3 - X_5)];$ $M_H(0) = M_P(0) + R \cos \psi [0,239X_1 - 0,0898(X_2 + X_6) - 0,0249(X_3 + X_5) + 0,0796X_4] -$ $- R \sin \psi [-0,0401(X_2 - X_6) + 0,0431(X_3 - X_5)].$
<p>Первая элементарная нагрузка на наружное кольцо (сила <math>P</math> над спицей)</p> 	$D_1 = 0,2215 \cos \psi P; \quad D_3 = 0,01505 \cos \psi P;$ $D_2 = (-0,1107 \cos \psi + 0,0908 \sin \psi) P.$ <p>См. предыдущую задачу.</p> <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = -\frac{0,500}{1 + \chi_1} P; \quad X_2 = X_6 = \frac{0,333}{1 + \chi_1} P; \quad X_3 = X_5 = 0;$ $X_4 = -\frac{0,167P}{1 + \chi_1}; \quad M_{\theta}(0) = \frac{0,193}{1 + \chi_1} Pr;$ $M_H(0) = 0,239Pr - \frac{0,193PR}{1 + \chi_1}$
<p>Вторая элементарная нагрузка на наружное кольцо (сила <math>T</math> над спицей)</p> 	$D_1 = -0,0457 \sin \psi T; \quad D_3 = -0,00088 \sin \psi T;$ $D_2 = (0,0909 \cos \psi + 0,00895 \sin \psi) T.$ <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = X_4 = 0; \quad X_2 = X_6 = -X_3 = -X_5 = -\frac{0,137}{1 + \chi_1} T$
<p>Третья элементарная нагрузка на наружное кольцо (момент <math>L</math> над спицей)</p> 	$D_1 = 0,1679 \sin \psi \frac{L}{R}; \quad D_3 = 0,01337 \sin \psi \frac{L}{R};$ $D_2 = (0,240 \cos \psi - 0,1405 \sin \psi) \frac{L}{R}.$ <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = X_4 = 0; \quad X_2 = X_6 = -X_3 = -X_5 =$ $= -\frac{0,362}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R};$ $M_{\theta}(0) = 0; \quad M_H(0) = \pm 0,5L$

Схема	Расчетные формулы
<p>Первая элементарная нагрузка по наружному кольцу</p> 	$X_1 = -\frac{0,644}{1 + \chi_1} P; \quad X_2 = X_7 = \frac{0,316}{1 + \chi_1} P,$ $X_3 = X_8 = \frac{0,0655}{1 + \chi_1} P; \quad X_4 = X_5 = -\frac{0,059}{1 + \chi_1} P$
<p>Произвольная нагрузка</p> 	$X_{1,5} = -\frac{1}{4} \left( \frac{D_1}{d_1} + \frac{D_3}{d_2} \pm \frac{D_4}{d_3} \right);$ $X_{2,6} = -\frac{1}{4} \left( \frac{D_2}{d_1} - \frac{D_3}{d_2} \pm \frac{D_5}{d_3} \right);$ $X_{3,7} = -\frac{1}{4} \left( -\frac{D_1}{d_1} + \frac{D_3}{d_2} \pm \frac{D_6}{d_3} \right);$ $X_{4,8} = \frac{1}{4} \left( \frac{D_2}{d_1} + \frac{D_3}{d_2} \mp \frac{D_7}{d_3} \right);$ $d_1 = 0,1427 (1 + \chi_1) - 0,1071 (\sin^2 \psi + \chi_1 \sin^2 \psi_1) + \chi_2;$ $d_2 = 0,0416 (1 + \chi_1) - 0,0334 (\sin^2 \psi + \chi_1 \sin^2 \psi_1) + 2\chi_2;$ $d_3 = 0,0153 (1 + \chi_1) - 0,0156 (\sin^2 \psi + \chi_1 \sin^2 \psi_1) + \chi_2;$ $D_1 = [\Delta_1 - \Delta_3 + \Delta_5 - \Delta_7] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $D_2 = [\Delta_2 - \Delta_4 + \Delta_6 - \Delta_8] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $D_3 = [\Delta_1 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 - \Delta_2 - \Delta_4 - \Delta_8 - \Delta_3] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $D_4 = [\Delta_1 - \Delta_5 - 0,707 (\Delta_2 - \Delta_4 - \Delta_6 + \Delta_8)] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $D_5 = [\Delta_2 - \Delta_6 - 0,707 (\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_5 - \Delta_7)] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $D_6 = [\Delta_3 - \Delta_7 - 0,707 (\Delta_2 + \Delta_4 - \Delta_6 - \Delta_8)] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $D_7 = [\Delta_4 - \Delta_8 + 0,707 (\Delta_1 - \Delta_3 - \Delta_5 + \Delta_7)] \frac{E_H J_H}{R^3};$ $M_\theta(0) = -r \cos \psi_1 [0,239 X_1 - 0,050 (X_2 + X_8) -$ $- 0,091 (X_3 + X_7) + 0,080 X_5 + 0,015 (X_4 + X_6)] +$ $+ r \sin \psi_1 [-0,059 (X_2 - X_8) + 0,012 (X_3 - X_7) +$ $+ 0,045 (X_4 - X_6)];$

Продолжение табл. 9

Схема	Расчетные формулы
	$M_H(0) = M_p(0) + R \cos \psi [0,239X_1 - 0,050(X_2 + X_5) - 0,091(X_3 + X_7) + 0,080X_6 + 0,015(X_4 + X_8)] -$ $- R \sin \psi [-0,059(X_2 - X_6) + 0,012(X_3 - X_7) + 0,045(X_4 - X_8)]$
<p>Первая элементарная нагрузка на наружное кольцо</p> 	$D_1 = 0,1427 \cos \psi; D_2 = 0,0710 \sin \psi;$ $D_3 = 0,0208 \cos \psi; D_4 = 0,0153 \cos \psi;$ $D_5 = -0,0108 \cos \psi + 0,0331 \sin \psi;$ $D_6 = -0,0061 \sin \psi; D_7 = 0,0108 \cos \psi - 0,0331 \sin \psi.$ <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = -\frac{0,625}{1 + \chi_1} P; X_2 = X_8 = \frac{0,300 P}{1 + \chi_1};$ $X_3 = X_7 = \frac{0,125 P}{1 + \chi_1}; X_4 = X_6 = -\frac{0,050 P}{1 + \chi_1};$ $X_5 = -\frac{0,125 P}{1 + \chi_1}; M_\theta(0) = \frac{0,2136 P r}{1 + \chi_1};$ $M_H(0) = 0,2387 P R - \frac{0,2136 P R}{1 + \chi_1}$
<p>Вторая элементарная нагрузка на наружное кольцо</p> 	$\Delta_1 = -0,0095 \sin \psi T \frac{R^3}{EJ}; \Delta_5 = -0,0084 \sin \psi \frac{TR^3}{EJ};$ $\Delta_{2,8} = (\pm 0,0187 \cos \psi + 0,00046 \sin \psi) \frac{TR^3}{EJ_H};$ $\Delta_{3,7} = (\mp 0,0016 \cos \psi + 0,0088 \sin \psi) \frac{TR^3}{EJ_H};$ $\Delta_{4,6} = (\mp 0,0168 \cos \psi - 0,0009 \sin \psi) \frac{TR^3}{EJ_H}.$ <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_{1,5} = 0; X_2 = -X_8 = -\frac{0,196}{1 + \chi_1} T;$ $X_3 = -X_7 = \frac{0,100 T}{1 + \chi_1}; X_4 = -X_6 = \frac{0,053 T}{1 + \chi_1};$ $M_\theta(0) = M_H(0) = 0$

Продолжение табл. 9

Схема	Расчетные формулы
<p>Третья элементарная нагрузка на наружное кольцо</p> 	$\Delta_1 = 0,03345 \sin \psi \frac{LR^2}{EJ_H}; \quad \Delta_5 = 0,0231 \sin \psi \frac{LR^2}{EJ_H};$ $\Delta_{2,8} = (\mp 0,0590 \cos \psi - 0,0047 \sin \psi) \frac{LR^2}{E_H J_H};$ $\Delta_{3,7} = (\pm 0,01124 \cos \psi - 0,0254 \sin \psi) \frac{LR^2}{E_H J_H};$ $\Delta_{4,6} = (\pm 0,0444 \cos \psi + 0,0021 \sin \psi) \frac{LR^2}{E_H J_H};$ <p>При <math>\psi = 0</math> и <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = X_5 = 0; \quad X_2 = -X_8 = \frac{0,833}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R};$ $X_3 = -X_7 = -\frac{0,734}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R};$ $X_4 = -X_6 = \frac{0,158}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R}; \quad M_\theta(0) = M_\theta(\pi) = 0;$ $M_H(0) = \pm 0,5L; \quad M_H(\pi) = 0$
 <p>Решения для первой, второй и третьей элементарных нагрузок даны отдельно</p>	<p>Сила <math>P</math> над спицей:</p> $X_1 = -\frac{0,663P}{1 + \chi_1}; \quad X_2 = X_{10} = \frac{0,230P}{1 + \chi_1};$ $X_3 = X_9 = \frac{0,177P}{1 + \chi_1}; \quad X_4 = X_8 = \frac{0,049P}{1 + \chi_1};$ $X_5 = X_7 = -\frac{0,096P}{1 + \chi_1}; \quad X_6 = -\frac{0,057P}{1 + \chi_1};$ $M_\theta(0) = \frac{0,2196}{1 + \chi_1} Pr; \quad M_H(0) = 0,2387PR - \frac{0,2196PR}{1 + \chi_1};$ <p>Сила <math>T</math> над спицей:</p> $X_1 = X_6 = 0; \quad X_2 = -X_{10} = -\frac{0,163}{1 + \chi_1} T;$ $X_3 = -X_9 = \frac{0,031T}{1 + \chi_1}; \quad X_4 = -X_8 = -\frac{0,024}{1 + \chi_1} T;$ $X_5 = -X_7 = \frac{0,151T}{1 + \chi_1}; \quad M_\theta(0) = M_H(0) = 0.$ <p>Момент <math>L</math> над спицей:</p> $X_1 = X_6 = 0; \quad X_2 = -X_{10} = \frac{0,828}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R};$ $X_3 = -X_9 = -\frac{0,262}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R}; \quad X_4 = -X_8 =$ $= -\frac{0,285}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R}; \quad X_5 = -X_7 = -\frac{0,059}{1 + \chi_1} \cdot \frac{L}{R};$ $M_\theta(0) = M_\theta(\pi) = 0; \quad M_H(0) = \pm 0,5L;$ $M_H(\pi) = 0$

## 10. Решения некоторых задач для колеса с абсолютно жесткой ступицей и шарнирным соединением спиц с кольцами

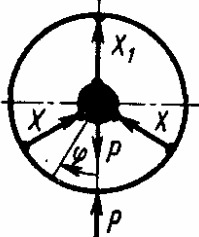
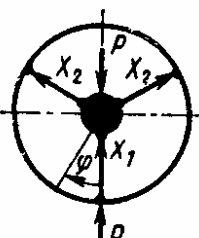
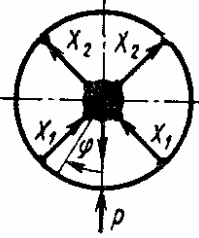
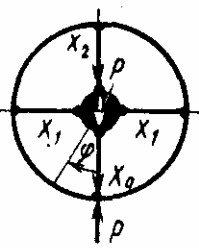
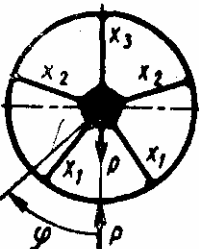
Схема	Расчетные формулы
 <p><math>n = 3</math></p>	$X = \frac{0,00168 + \chi_2}{0,04782 + 3\chi_2} P; \quad N^0 = 0,57735 X; \quad X_1 = P - X;$ $M^0 = - \frac{0,01539 + 1,05481\chi_2}{0,04782 + 3\chi_2} PR;$ $\omega^0 = \frac{0,00711 + 0,43079\chi_2 + 2\chi_2}{0,04782 + 3\chi_2} \cdot \frac{PR^3}{EJ_H}.$ <p>При <math>\chi_2 = 0</math></p> $X = 0,0351P; \quad N^0 = 0,0203P; \quad M^0 = -0,322PR;$ $\omega^0 = 0,149 \frac{PR^3}{EJ_H}$
 <p><math>n = 3</math></p>	$X_1 = \frac{0,04782 + 2\chi_2}{0,04782 + 3\chi_2} P; \quad N^0 = - \frac{0,28868\chi_2}{0,04782 + 3\chi_2} P;$ $M^0 = - \frac{0,18879\chi_2}{0,04782 + 3\chi_2} PR; \quad \omega^0 = \frac{X_1 l}{EF_c};$ $X_2 = P - X_1.$ <p>При <math>\chi_2 = 0; \quad X = P; \quad N^0 = 0; \quad M^0 = 0</math></p>
 <p><math>n = 4</math></p>	$X_1 = \frac{0,00229 + \chi_2}{0,01717 + 2,8284\chi_2} P;$ $X_2 = \frac{0,00985 + \chi_2}{0,01717 + 2,8284\chi_2} P;$ $N^0 = \frac{-0,00053 + 0,35355\chi_2}{0,01717 + 2,8284\chi_2} P; \quad Q^0 = 0,5P;$ $M^0 = - \frac{0,00461 + 0,80369\chi_2}{0,01717 + 2,8284\chi_2} PR;$ $\omega^0 = \frac{0,00100 + 0,17677\chi_2 + 1,4142\chi_2^2}{0,01717 + 2,8284\chi_2} \cdot \frac{PR^3}{EJ_H}.$ <p>При <math>\chi_2 = 0</math></p> $M^0 = -0,268PR; \quad X_1 = 0,133P; \quad X_2 = -0,574P;$ $N^0 = -0,031P$

Схема	Расчетные формулы
 <p style="text-align: center;"><math>n = 4</math></p>	$X_0 = \frac{0,00174 + 0,22320\chi_2 + \chi_2^2}{0,00174 + 0,29758\chi_2 + 2\chi_2^2} P;$ $X_2 = X_0 - P; \quad X_1 = -\frac{0,2146 (P - X_0)}{0,2337 + 3,1416\chi_2};$ $N_0 = \frac{1}{2} X_1; \quad M_0 = -0,25 (P - X_0) R -$ $- (0,1073 - \chi_2) X_1 R.$ <p>При <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_0 = P; \quad X_1 = X_2 = 0; \quad N^0 = M^0 = 0$
 <p style="text-align: center;"><math>n = 5</math></p>	$X_1 = \frac{0,000908 + 0,53697\chi_2 + 4,0735\chi_2^2}{0,003802 + 1,3150\chi_2 + 12,588\chi_2^2} P;$ $X_2 = -\frac{0,002063 + 0,47820\chi_2 + 1,5559\chi_2^2}{0,003802 + 1,3150\chi_2 + 12,588\chi_2^2} P;$ $X_3 = -\frac{0,001058 + 0,15064\chi_2 + 5,0352\chi_2^2}{0,003802 + 1,3150\chi_2 + 12,588\chi_2^2} P;$ $M^0 = -\frac{0,000783 + 0,28514\chi_2 + 3,3330\chi_2^2}{0,003802 + 1,3150\chi_2 + 12,588\chi_2^2} P R;$ $N^0 = -\frac{0,000358 - 0,07058\chi_2 - 1,3236\chi_2^2}{0,003802 + 1,3150\chi_2 + 12,588\chi_2^2} P.$ <p>При <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = 0,239P; \quad X_2 = -0,543P; \quad X_3 = -0,278P;$ $M^0 = -0,206PR; \quad N^0 = -0,094P;$ $M = M_1 = M^0 + 0,5PR \cdot \sin \varphi + N^0 R (1 - \cos \varphi);$ $0 \leq \varphi \leq \alpha = 36^\circ;$ $M = M_2 = M_1 - X_1 R \cdot \sin (\varphi - \alpha);$ $36^\circ \leq \varphi \leq 108^\circ;$ $M = M_3 = M_2 - X_2 R \cdot \sin (\varphi - 108^\circ);$ $108^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

Продолжение табл. 10

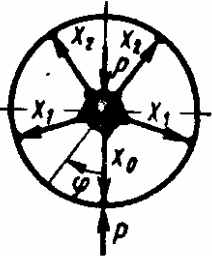
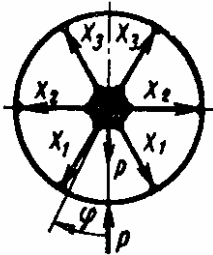
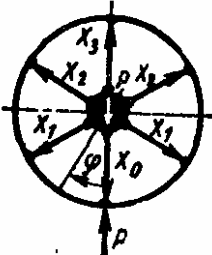
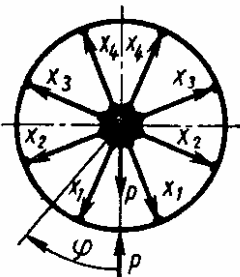
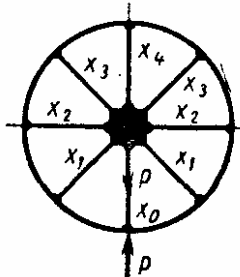
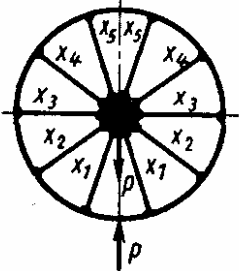
Схема	Расчетные формулы
 <p><math>n = 5</math></p>	$X_0 = \frac{0,01509 + 4,1490\chi_2 + 20\chi_2^2}{0,01509 + 5,2232\chi_2 + 50\chi_2^2} P;$ $X_1 = \frac{0,8584 (P - X_0)}{1,2197 + 12,568\chi_2}; \quad N^0 = \frac{X_1}{2};$ $X_2 = 0,61803X_0 + 0,38197X_1 - 0,61803P;$ $M^0 = \frac{1}{\pi} (-P - 0,5\pi N^0 + X_0 + 0,41267X_1 + 0,00633X_2) R$
 <p><math>n = 6</math></p>	$X_1 = \frac{1}{\Delta} (0,5509 + 491,6\chi_2 + 2887\chi_2^2) P;$ $X_2 = -\frac{1}{\Delta} (0,8456 + 341,6\chi_2) P;$ $X_3 = -\frac{1}{\Delta} (0,5270 + 157,3\chi_2 + 2887\chi_2^2) P;$ $M^0 = -\frac{1}{\Delta} (0,3215 + 202,2\chi_2 + 2554\chi_2^2) PR;$ $N^0 = -\frac{1}{\Delta} (0,2372 - 20,9\chi_2 - 962\chi_2^2) P;$ $\Delta = 1,867 + 1124\chi_2 + 10000\chi_2^2.$ <p>При <math>\chi_2 = 0</math>  <math>X_1 = 0,295P; \quad X_2 = -0,453P; \quad X_3 = -0,282P;</math>  <math>M^0 = -0,172PR, \quad N^0 = -0,127P; \quad \omega^0 = 0,0137 \frac{PR^3}{EJ_H}</math></p>
 <p><math>n = 6</math></p>	$X_0 = \frac{0,0001684 + 0,08922\chi_2 + 2,6928\chi_2^2 + 10\chi_2^3}{0,0001684 + 0,10737\chi_2 + 4,2780\chi_2^2 + 30\chi_2^3} P;$ $X_1 = \frac{(0,03102 + 0,433\chi_2 + 4,87\chi_2^2) X_0 - (0,03102 + 0,2166\chi_2) P}{0,03387 + 2,1367\chi_2 + 9,74\chi_2^2};$ $X_2 = (1,4332 + 9,74\chi_2^2) X_0 - (0,4493 + 19,49\chi_2) X_1 - 1,4332P;$ $X_3 = X_0 + X_1 - X_2 - P;$ $N^0 = 0,57735X_1 + 0,28867X_2;$ $M^0 = -0,17122PR - 0,09312N^0R + (0,17122 - \chi_2) X_0R + 2\chi_2X_1R$

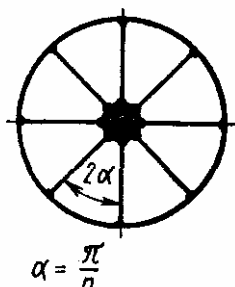


Схема	Расчетные формулы
 <p style="text-align: center;"><math>n = 8</math></p>	$X_1 = -\frac{1}{\Delta} (0,0000882 + 0,1807\chi_2 + 7,506\chi_2^2 + 26,81\chi_2^3) P;$ $X_2 = -\frac{1}{\Delta} (0,0000958 + 0,09894\chi_2 + 1,523\chi_2^2 - 11,10\chi_2^3) P;$ $X_3 = -\frac{1}{\Delta} (0,0000526 + 0,09631\chi_2 + 4,255\chi_2^2 + 11,10\chi_2^3) P;$ $X_4 = -\frac{1}{\Delta} (0,0000640 + 0,05179\chi_2 + 1,767\chi_2^2 + 26,81\chi_2^3) P;$ $M^0 = -\frac{1}{\Delta} (0,0000318 + 0,05107\chi_2 + 3,147\chi_2^2 + 28,73\chi_2^3) PR;$ $N^0 = -\frac{1}{\Delta} (0,0000471 + 0,01169\chi_2 - 0,0755\chi_2^2 - 10,26\chi_2^3) P,$ <p style="text-align: center;">где <math>\Delta = 0,0002482 + 0,3816\chi_2 + 19,22\chi_2^2 + 116,1\chi_2^3</math>.</p> <p>При <math>\chi_2 = 0</math>  <math>X_1 = 0,355P</math>; <math>X_2 = -0,386P</math>; <math>X_3 = -0,212P</math>;  <math>X_4 = -0,258P</math>; <math>M^0 = -0,128PR</math>; <math>N^0 = -0,190P</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>n = 8</math></p>	$X_0 = \frac{0,003607 + 4,3308\chi_2 + 447,00\chi_2^2 + 10638\chi_2^3 + 30645\chi_2^4}{0,003607 + 4,9874\chi_2 + 638,98\chi_2^2 + 21722\chi_2^3 + 122570\chi_2^4} P;$ $X_1 = \frac{(0,16691 - 1,010\chi_2 - 0,688\chi_2^2 - 0,085\chi_2^3) P - (0,16691 + 2,153\chi_2 + 0,533\chi_2^2 - 0,509\chi_2^3) X_0}{0,04807 - 1,107\chi_2 - 3,459\chi_2^2 - 0,115\chi_2^3};$ $X_2 = (0,2337 + 3,142\chi_2) X_0 + (0,1567 + 2,222\chi_2) X_1 - (0,1737 + 2,222\chi_2) X_3 - (0,2337 + 1,5708\chi_2) P;$ $X_4 = (X_0 - P) + 1,4142 (X_1 - X_3);$

Продолжение табл. 10

Схема	Расчетные формулы
Рис. 10 $n = 8$	$N^0 = 0,5303X_1 + X_2 + 0,1768X_3;$ $M^0 = \left(0,3927 + \frac{\chi_2}{2}\right) X_0 R + 0,06296X_1 R -$ $- 0,75X_2 R - 0,1388X_3 R + \frac{\chi_2}{2} X_4 R - 0,3927PR$
 <p style="text-align: center;"><math>n = 8</math></p>	$X_1 = \left(0,543 + 1950\chi_2 + 3,71 \cdot 10^5 \cdot \chi_2^2 + 215 \cdot 10^5 \cdot \chi_2^3 + \right.$ $\left. + 3,97 \cdot 10^8 \chi_2^4 + 10,02 \cdot 10^8 \cdot \chi_2^5\right) \frac{P}{\Delta};$ $X_2 = - \left(0,442 + 923\chi_2 + 1,15 \cdot 10^5 \chi_2^2 + 27,80 \chi_2^3 \cdot 10^5 - \right.$ $\left. - 5,55 \cdot 10^8 \chi_2^4 + 62,40 \cdot 10^8 \chi_2^5\right) \frac{P}{\Delta};$ $X_3 = - \left(0,212 + 294\chi_2 + 1,10 \cdot 10^5 \chi_2^2 + 84,60 \cdot 10^5 \cdot \chi_2^3 + \right.$ $\left. + 1,80 \cdot 10^8 \chi_2^4\right) \frac{P}{\Delta};$ $X_4 = - \left(0,279 + 458\chi_2 + 68700 \chi_2^2 + 55,10 \cdot 10^5 \chi_2^3 + \right.$ $\left. + 1,81 \cdot 10^8 \chi_2^4 + 6,19 \cdot 10^8 \cdot \chi_2^5\right) \frac{P}{\Delta};$ $X_5 = - \left(0,169 + 416\chi_2 + 87600 \chi_2^2 + 49,70 \cdot 10^5 \chi_2^3 + \right.$ $\left. + 0,933 \cdot 10^8 \chi_2^4 + 9,99 \cdot 10^8 \chi_2^5\right) \frac{P}{\Delta};$ $M^0 = - \left(0,139 + 423\chi_2 + 0,973 \cdot 10^5 \chi_2^2 + 72,80 \cdot 10^5 \chi_2^3 + \right.$ $\left. + 1,08 \cdot 10^8 \chi_2^4 + 1,29 \cdot 10^8 \chi_2^5\right) \frac{PR}{\Delta};$ $N^0 = - \left(0,278 + 251\chi_2 + 0,361 \cdot 10^5 \chi_2^2 + 13,20 \cdot 10^5 \chi_2^3 - \right.$ $\left. - 0,0524 \cdot 10^8 \chi_2^4 - 4,51 \cdot 10^8 \chi_2^5\right) \frac{P}{\Delta},$ <p>где</p> $\Delta = 1,335 + 3955\chi_2 + 8,189 \cdot 10^5 \chi_2^2 + 535,8 \cdot 10^5 \chi_2^3 +$ $+ 12,11 \cdot 10^8 \chi_2^4 + 52,66 \cdot 10^8 \cdot \chi_2^5.$ <p>При <math>\chi_2 = 0</math></p> $X_1 = 0,407P; \quad X_2 = -0,331P; \quad X_3 = -0,159P;$ $X_4 = -0,209P; \quad X_5 = -0,127P; \quad M^0 = -0,104PR;$ $N^0 = -0,208P$

Продолжение табл. 10

Схема	Расчетные формулы																												
 $\alpha = \frac{\pi}{n}$	<p>По спицам задано предварительное натяжение <math>S</math></p> $M^0 = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2\alpha \sin \alpha} SR; \quad N^0 = -\frac{S}{2 \sin \alpha};$ $M(\alpha) = -\frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{2\alpha \cdot \sin \alpha} SR;$ $\omega^0 = \frac{\alpha^2 \cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{4\alpha \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \frac{SR^3}{EJ}$																												
	<table><tr><th><math>n</math></th><th><math>M^0</math></th><th><math>N^0</math></th><th><math>M\left(\frac{\pi}{n}\right)</math></th></tr><tr><td>3</td><td><math>0,0990SR</math></td><td><math>-0,577S</math></td><td><math>-0,1888SR</math></td></tr><tr><td>4</td><td><math>0,0705SR</math></td><td><math>-0,707S</math></td><td><math>-0,1870SR</math></td></tr><tr><td>5</td><td><math>0,0549SR</math></td><td><math>-0,851S</math></td><td><math>-0,1080SR</math></td></tr><tr><td>6</td><td><math>0,0451SR</math></td><td><math>-S</math></td><td><math>-0,0889SR</math></td></tr><tr><td>8</td><td><math>0,0333SR</math></td><td><math>-1,31S</math></td><td><math>-0,0661SR</math></td></tr><tr><td>10</td><td><math>0,0265SR</math></td><td><math>-1,6S</math></td><td><math>-0,0527SR</math></td></tr></table>	$n$	$M^0$	$N^0$	$M\left(\frac{\pi}{n}\right)$	3	$0,0990SR$	$-0,577S$	$-0,1888SR$	4	$0,0705SR$	$-0,707S$	$-0,1870SR$	5	$0,0549SR$	$-0,851S$	$-0,1080SR$	6	$0,0451SR$	$-S$	$-0,0889SR$	8	$0,0333SR$	$-1,31S$	$-0,0661SR$	10	$0,0265SR$	$-1,6S$	$-0,0527SR$
$n$	$M^0$	$N^0$	$M\left(\frac{\pi}{n}\right)$																										
3	$0,0990SR$	$-0,577S$	$-0,1888SR$																										
4	$0,0705SR$	$-0,707S$	$-0,1870SR$																										
5	$0,0549SR$	$-0,851S$	$-0,1080SR$																										
6	$0,0451SR$	$-S$	$-0,0889SR$																										
8	$0,0333SR$	$-1,31S$	$-0,0661SR$																										
10	$0,0265SR$	$-1,6S$	$-0,0527SR$																										

### Жесткое соединение спиц с кольцами

Методы расчета конструкций с жестким соединением спиц с кольцами аналогичны методам при шарнирном креплении спиц. Однако расчетные формулы, ввиду их громоздкости, здесь не приведены.

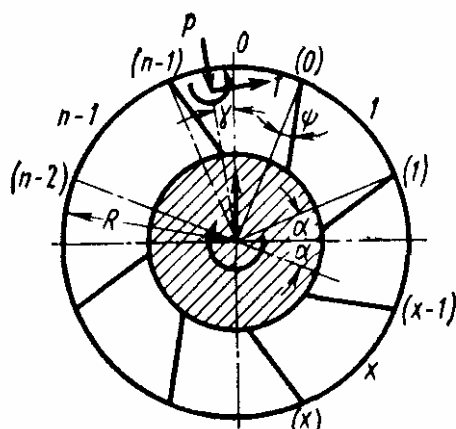


Рис. 42

Для частного вида конструкции, когда внутреннее кольцо представляет собой абсолютно жесткую ступицу (рис. 42), используют другой широко распространенный метод расчета — метод конечных разностей, подробно изложенный в работах [18]. Здесь приведены решения А. А. Подорожного для колеса с радиальными ненапряжимыми спицами при нагружении обода сосредоточенными усилиями  $P$ ,  $T$  и  $L$  в произвольном сечении пролета. Каждая нагрузка на обод уравнивается реакциями ступицы. Пролеты между спицами нумеруют  $x = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , где  $n$  —

число спиц, предполагаемое четным. Внешние усилия на обод прикладывают в нулевом или  $n$ -м пролете.

Внутренние усилия в середине обода  $x$ -го ненагруженного пролета, отнесенные в упругий центр пролета, определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= A_1 \operatorname{ch} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right) + B_1 \cdot \operatorname{sh} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right) + \\
 &+ (-1)^x \left[ A_2 \operatorname{ch} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right) + B_2 \operatorname{sh} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right) \right]; \\
 N_x &= m_1 \left[ A_1 \cdot \operatorname{ch} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right) + B_1 \cdot \operatorname{sh} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right) \right] + \\
 &+ (-1)^x m_2 \left[ A_2 \cdot \operatorname{ch} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right) + B_2 \cdot \operatorname{sh} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right) \right]; \\
 Q_x &= \frac{\psi_1 \cdot \operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{ch} \beta_1 - 1} \left[ A_1 \cdot \operatorname{sh} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right) + \right. \\
 &+ B_1 \operatorname{ch} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right) \left. \right] + \frac{\psi_2 \cdot \operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{ch} \beta_2 + 1} (-1)^x \times \\
 &\times \left[ A_2 \cdot \operatorname{sh} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right) + B_2 \cdot \operatorname{ch} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right) \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где  $x = 1, 2, \dots, n-1$ . В этих выражениях параметр  $\beta$  определяют из соотношений

$$\operatorname{ch} \beta_1 = \frac{1}{2} (2 + z_1); \quad \operatorname{ch} \beta_2 = -\frac{1}{2} (2 + z_2),$$

где

$$z_1 = \chi \frac{\delta_{NN}}{G} \left[ 2\chi\eta\delta_{QQ} + 4 \sin^2 \alpha \left( 1 - \eta + \frac{\eta^2}{3} \right) \right];$$

$$z_2 = -\frac{24\delta_{MM}G}{(1-c)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \delta_{MM} - \cos^2 \alpha \cdot \delta_{QQ}};$$

$$\eta = \frac{l}{R}; \quad \chi = \frac{R^3}{l^3} \cdot \frac{E_c J_c}{E_\kappa J_\kappa};$$

$$\begin{aligned}
 G &= \chi \cdot \delta_{QQ} \left[ (1-c)^2 - 2(1-c) \left( 1 - \frac{\eta}{2} \right) \cos \alpha + \right. \\
 &+ \left. \left( 1 - \eta + \frac{\eta^2}{3} \right) \cos^2 \alpha \right] + \frac{1}{6} (1-c)^2 \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

Параметры  $m$  и  $\psi$

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -\frac{\delta_{MM}}{\delta_{NN}} \cdot G \left\{ \chi \cdot \delta_{QQ} \left[ (1-c) - \left( 1 - \frac{\eta}{2} \right) \cos \alpha \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{6} (1-c) \sin^2 \alpha \right\}^{-1};
 \end{aligned}$$

$$m_2 = \frac{1}{1-c} + \frac{24\chi \cdot \delta_{MM}}{z_2(1-c) \cos \alpha} \times$$

$$\times \left[ (1-c) \left( 1 - \frac{\eta}{2} \right) - \left( 1 - \eta + \frac{\eta^2}{3} \right) \cos \alpha \right];$$

$$\psi_1 = \frac{\chi \cdot \delta_{MM} \left[ (1-c) \left( 1 - \frac{\eta}{2} \right) - \left( 1 - \eta + \frac{\eta^2}{3} \right) \cos \alpha \right] \cdot \sin \alpha}{\chi \cdot \delta_{QQ} \left[ (1-c) - \left( 1 - \frac{\eta}{2} \right) \cos \alpha \right] + \frac{1}{6} (1-c) \sin^2 \alpha};$$

$$\psi_2 = \frac{(1-c) \delta_{MM}}{\delta_{QQ}} \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{3}{\alpha}.$$

Коэффициенты смещений

$$\delta_{MM} = \alpha; \quad \delta_{QQ} = \frac{\alpha^3}{3}; \quad \delta_{NN} = \frac{\alpha^5}{45} + \alpha \frac{J}{FR^2}; \quad \delta_{MQ} = -\frac{\alpha^2}{2}.$$

Характеристики упругого центра определяют из соотношений

$$1-c = \frac{\sin \alpha}{\alpha \left[ 1 + \frac{J}{FR^2} \right]} \approx \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Далее

$$\mu_1 = \psi_2 [1 - (1-c) m_1] - \psi_1 [1 - (1-c) m_2] +$$

$$+ (m_1 - m_2) \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\mu_2 = \psi_1 \frac{\operatorname{ch} \beta_1 + 1}{\operatorname{ch} \beta_1 - 1} [1 - (1-c) m_2] - \psi_2 \frac{\operatorname{ch} \beta_2 - 1}{\operatorname{ch} \beta_2 + 1} [1 - (1-c) m_1] -$$

$$- (m_1 - m_2) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Усилия, действующие на спицы, определяют по формулам (при  $x \neq 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \cos \alpha (Q_{x+1} - Q_x) + \sin \alpha (N_{x+1} + N_x); \\ Y_x &= -\sin \alpha (Q_{x+1} + Q_x) + \cos \alpha (N_{x+1} - N_x); \\ Z_x &= \bar{M}_{x+1} - \bar{M}_x - (1-c) (N_{x+1} - N_x) + Y_x. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Усилия в  $(n-1)$ -й спице

$$\left. \begin{aligned} X_{n-1} &= -[Q_{n-1} - Q_0] \cos \alpha + [N_{n-1} + N_0] \sin \alpha + \\ &\quad + P \cdot \cos (\alpha - \gamma) + T \cdot \sin (\alpha - \gamma); \\ Y_{n-1} &= -[Q_{n-1} + Q_0] \sin \alpha - [N_{n-1} - N_0] \cos \alpha - \\ &\quad - P \cdot \sin (\alpha - \gamma) + T \cdot \cos (\alpha - \gamma); \\ Z_{n-1} &= -[\bar{M}_{n-1} - \bar{M}_0] + [N_{n-1} - N_0] (1-c) + \\ &\quad + Y_{n-1} + L - T (1-c'). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Усилия в точке  $\varphi$  ненагруженного пролета кольца (левой половины, рис. 43) вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_A &= M_x - Q_x R \cdot \sin \varphi - N_x R (1 - \cos \varphi); \\ N_A &= N_x \cos \varphi - Q_x \sin \varphi; \quad Q_A = N_x \sin \varphi + Q_x \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где

$$M_x = \bar{M}_x R + N_x R c.$$

Для правой половины пролета формулы получаются из выражений (48) заменой  $\varphi$  на  $-\varphi$ .

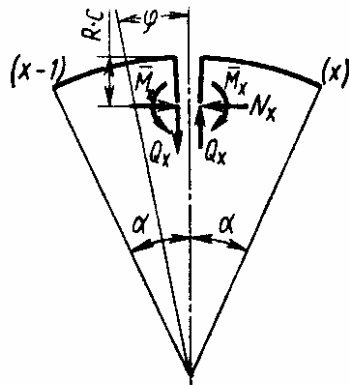


Рис. 43

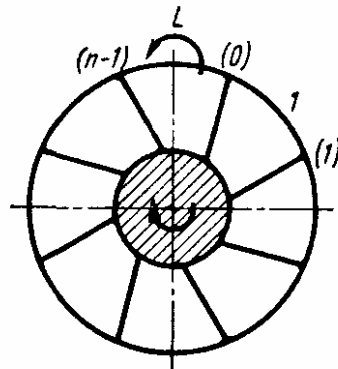


Рис. 44

Момент  $L$  приложен в середине пролета (рис. 44). Усилия в середине нагруженного пролета:

$$M_n = -M_0 = \frac{L}{2}; \quad N_n = N_0 = 0;$$

$$Q_n = Q_0 = \frac{L}{8} \left( \frac{\psi_2 \cdot \operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{ch} \beta_2 + 1} + \frac{3}{\alpha} \right).$$

Усилия в середине  $x$ -го пролета ( $x = 1, 2, \dots, n-1$ ):

$$\begin{aligned} \bar{M}_x &= -\bar{L} \frac{3+m_2}{8m_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} + \frac{\bar{L}}{8} (-1)^x \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}}, \\ N_x &= -\bar{L} \frac{3+m_2}{8m_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} + \bar{L} \frac{m_2}{8} (-1)^x \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}}; \\ Q_x &= -\bar{L} \frac{\psi_1}{8m_1} (3+m_2) \frac{\operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{ch} \beta_1 - 1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} + \\ &\quad + \bar{L} (-1)^x \frac{\psi_2 \cdot \operatorname{sh} \beta_2 \cdot \operatorname{ch} \beta_2}{8(\operatorname{ch} \beta_2 + 1) \operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Сила  $T$  приложена в середине пролета (рис. 45). Усилия в середине пролета, нагруженного касательной силой:

$$M_n = M_0 = 0; \quad N_n = -N_0 = \frac{T}{2};$$

$$Q_n = Q_0 = T \left\{ \frac{\psi_1}{2m_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{ch} \beta_1 - 1} \operatorname{cth} \beta_1 \frac{n}{2} - \frac{\psi_2}{2m_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{ch} \beta_2 + 1} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2 + 12 \frac{J}{FR^2}}{32\alpha} \left[ 1 - \psi_2 \alpha \frac{\operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{ch} \beta_2 + 1} \right] \right\}.$$

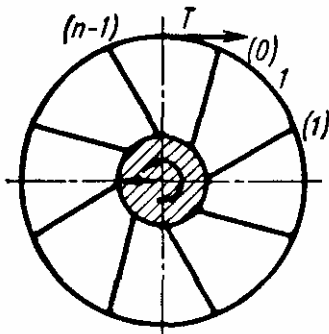


Рис. 45

Усилия в середине ненагруженных пролетов вычисляются по формулам

$$\bar{M}_x = \frac{T}{2m_1} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} - \right.$$

$$\left. - (-1)^x \left[ 1 + \frac{\alpha^2 + 12 \left( \frac{J_n}{FR^2} \right)}{16} m_1 \right] \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}} \right\};$$

$$N_x = \frac{T}{2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} - (-1)^x \frac{m_2}{m_1} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 + 12 \frac{J_n}{FR^2}}{16} m_1 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}} \right\};$$

$$Q_x = \frac{T}{2m_1} \left\{ \frac{\psi_1 \operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{ch} \beta_1 - 1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} - (-1)^x \psi_2 \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \frac{\alpha^2 + 12 \frac{J_n}{FR^2}}{16} m_1 \right] \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}} \right\}.$$

Радиальная сила  $P$  приложена посередине пролета (рис. 46). Усилия в середине нагруженного пролета (под силой):

$$\bar{M}_n = -\bar{M}_0 = \frac{P \cdot \alpha}{8} \left( 1 + \frac{\operatorname{ch} \beta_2 + 1}{\operatorname{sh} \beta_2} \right);$$

$$N_n = N_0 = 0; \quad Q_n = -Q_0 = \frac{P}{2}.$$

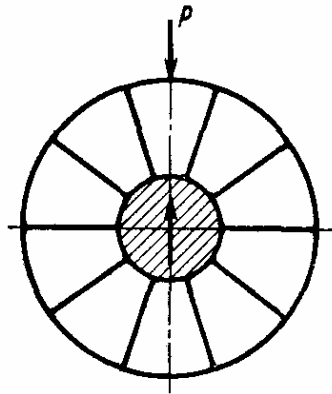


Рис. 46

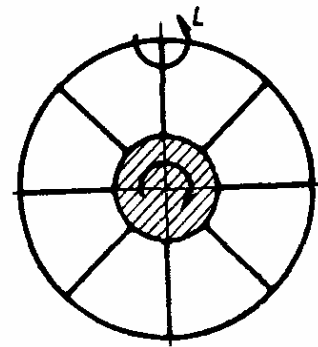


Рис. 47

Усилия в середине  $x$ -го пролета ( $x = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ):

$$\bar{M}_x = \frac{P\alpha}{8} (-1)^x \frac{\operatorname{ch} \beta_2 + 1}{\operatorname{sh} \beta_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{ch} \beta_2 \frac{n}{2}};$$

$$Q_x = \frac{P\alpha}{8} (-1)^x \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta_2 \left( x - \frac{n}{2} \right)}{\operatorname{ch} \beta_2 \frac{n}{2}} \psi_2.$$

Усилия  $N_x$  определяют по формуле (45), где  $B_1 = B_2 = 0$  и

$$A_1 = \frac{P}{8} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_1 - 1}{(\psi_1 - \psi_2) \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} \{ 3 - \psi_2 [2\alpha - (1 - c) \operatorname{tg} \alpha] \};$$

$$A_2 = -\frac{P}{8} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_2 + 1}{(\psi_1 - \psi_2) \operatorname{sh} \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}} \{ 3 - \psi_1 [2\alpha - (1 - c) \operatorname{tg} \alpha] \}.$$

Момент  $L$  приложен над спицей (рис. 47). Усилия в серединах пролетов, примыкающих к нагруженному сечению кольца:

$$\bar{M}_n = -\bar{M}_0 = \frac{\bar{L}}{2(\psi_2 - \operatorname{ctg} \alpha)} \cdot \left( \frac{\operatorname{ch} \beta_2 + 1}{\operatorname{sh} \beta_2 \cdot \operatorname{th} \beta_2 \frac{n}{2}} - 1 \right) \operatorname{ctg} \alpha;$$



$$\begin{aligned}
 N_n = -N_0 &= \frac{\bar{L}}{2(\psi_2 - \operatorname{ctg} \alpha)} \left[ \psi_2 \left( \frac{\operatorname{ch} \beta_1 - 1}{\operatorname{sh} \beta_1 \cdot \operatorname{th} \beta_1 \frac{n}{2}} - 1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + m_2 \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{\operatorname{ch} \beta_2 + 1}{\operatorname{sh} \beta_2 \cdot \operatorname{th} \beta_2 \frac{n}{2}} - \frac{\operatorname{ch} \beta_1 - 1}{\operatorname{ch} \beta_1 \cdot \operatorname{th} \beta_1 \frac{n}{2}} \right) \right]; \\
 Q_n = Q_0 &= -\frac{\bar{L}\psi_2}{2m_1(\psi_2 - \operatorname{ctg} \alpha)} \left[ \left( \frac{\operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{ch} \beta_2 + 1} \operatorname{cth} \beta_2 \frac{n}{2} - 1 \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times m_1 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\psi_1 \operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{ch} \beta_1 - 1} \operatorname{cth} \beta_1 \frac{n}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Усилия в  $x$ -м пролете определяют по формулам (45), где

$$A_1 = -\frac{\bar{L}}{2m_1} \cdot \frac{\psi_2 - m_2 \operatorname{ctg} \alpha}{\psi_2 - \operatorname{ctg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_1 - 1}{\operatorname{sh} \beta_1 \cdot \operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}};$$

$$B_1 = A_1 \frac{\operatorname{sh} \beta_1}{\operatorname{ch} \beta_1 - 1};$$

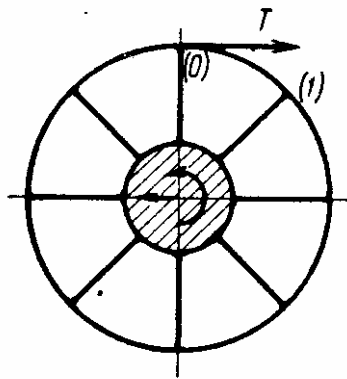


Рис. 48

$$A_2 = -\frac{\bar{L}}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\psi_2 - \operatorname{ctg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_2 + 1}{\operatorname{sh} \beta_2 \cdot \operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}};$$

$$B_2 = A_2 \frac{\operatorname{sh} \beta_2}{\operatorname{ch} \beta_2 + 1}.$$

Касательная сила  $T$  приложена над спицей (рис. 48). Усилия в серединах пролетов определяют по формулам (45) при всех  $x = 0, 1, 2, \dots$ , где

$$\begin{aligned}
 A_1 = -\frac{T}{2 \operatorname{sh} \beta_1 \cdot \operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} &\left\{ \frac{\operatorname{ch} \beta_1 - 1}{\mu_1} (\psi_2 - m_2 \operatorname{ctg} \alpha) (1 - c') - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\operatorname{ch} \beta_1 + 1}{\mu_2 \sin \alpha} [1 - (1 - c) m_2] \right\};
 \end{aligned}$$

$$B_1 = -\frac{T}{2 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{n}{2}} \left\{ \frac{1 - c'}{\mu_1} (\psi_2 - m_2 \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{1}{\mu_2 \sin \alpha} [1 - (1 - c) m_2] \right\};$$

$$A_2 = \frac{T}{2 \operatorname{sh} \beta_2 \operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \beta_2 + 1}{\mu_1} (\psi_1 - m_1 \operatorname{ctg} \alpha) (1 - c') - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{ch} \beta_2 - 1}{\mu_2 \sin \alpha} [1 - (1 - c) m_1] \right\};$$

$$B_2 = \frac{T}{2 \operatorname{sh} \beta_2 \frac{n}{2}} \left\{ \frac{1 - c'}{\mu_1} (\psi_1 - m_1 \operatorname{ctg} \alpha) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\mu_2 \sin \alpha} [1 - (1 - c) m_1] \right\},$$

где

$$1 - c' = \frac{1}{1 + \frac{J_H}{R^2 F_H}}.$$

Приближенные формулы для максимальных усилий в ободке.

При нагружении обода касательной силой  $T$  посередине пролета (см. рис. 45) максимальные усилия в ободке оценивают по приближенным формулам

$$M_{\max} = \pm \frac{1}{2} TR (1 - \cos \alpha);$$

$$N_{\max} = \pm \frac{T}{2}.$$

При нагружении обода радиальной силой  $P$  в точке  $\varphi = \gamma$  максимальный момент в ободке

$$M_{\max} = \frac{\pi P R}{2n} \cdot \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{21\alpha^2 - 5\gamma^2}{30\alpha^2}.$$

При нагружении кольца парой сил  $L = PR \sin 2(\alpha - \gamma)$ , приложенной симметрично относительно спицы (рис. 49), максимальный момент в ободке

$$M_{\max} = \frac{\pi P R}{2n} \cdot \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{13\alpha^2 + 4\alpha\gamma - \gamma^2}{16\alpha^2}.$$

При нагружении части обода на пролете  $\pm k$  равномерно распределенной радиальной нагрузкой максимальный момент в ободу

$$M_{\max} = -qR^2 \left(1 - \frac{2k}{n}\right) \frac{\alpha^2}{3}.$$

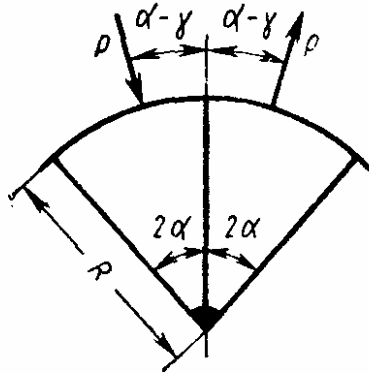


Рис. 49

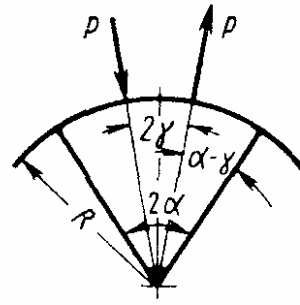


Рис. 50

При нагружении обода изгибающей парой  $L = PR \cdot \sin 2\gamma$ , приложенной симметрично относительно середины пролета (рис. 50), максимальный момент в ободу

$$M_{\max} = \frac{\pi PR}{n} \cdot \frac{\alpha - \gamma}{\alpha^2} \gamma.$$

Разработаны и другие методы расчета конструкций типа колес [11, 12]. Частные решения для некоторых колес приведены в табл. 11.

11. Решения для некоторых колес с абсолютно жесткой ступицей и жестким соединением спиц с кольцами

Схема	Расчетные формулы
	<p>На схеме показаны положительные направления усилий.</p> <p>Коэффициенты</p> $\chi_2 = \frac{l}{R^3} \frac{E_H J_H}{E_c F_c}; \quad \chi_3 = \frac{l^3}{R^3} \frac{E_H J_H}{E_c J_c}$

Продолжение табл. 11

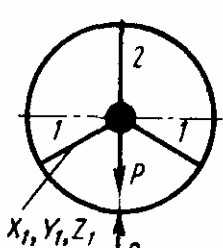
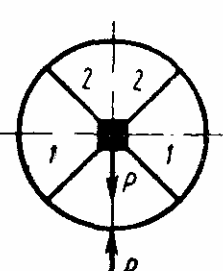
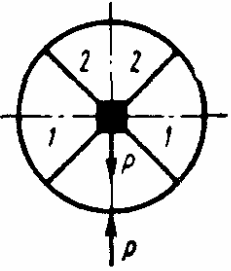
Схема	Расчетные формулы
	$Z_1 = \frac{(0,6142 + 2\chi_2) b - 0,0962d}{bc - ad} PR,$ $X_1 = \frac{0,0552 + 2\sqrt{3}\chi_2}{0,0956 + 6\chi_2} Y_1 + \frac{0,00168 + \chi_2}{0,0478 + 3\chi_2} P;$ $Y_1 = \frac{(0,6142 + 2\chi_2) a - 0,0962c}{bc - ad} P;$ $X_2 = P + 2X_1 \cos 60^\circ + 2Y_1 \sin 60^\circ; \quad Y_2 = Z_2 = 0;$ $N^0 = 0,57735X_1 + 0,55133 \frac{Z_1}{R} + 0,6090Y_1;$ $M^0 = \left( -0,5N^0 + 0,1888X_1 + 0,3910 \frac{Z_1}{R} + \right. \\ \left. + 0,0865Y_1 - 0,3183P \right) R,$ <p>где</p> $a = 0,25481 + 1,1547\chi_3 + 0,57735\chi_3 \frac{l}{R};$ $c = 1,1730 + 3,4641\chi_3;$ $b = 0,13621 - 0,57735\chi_3 \frac{l}{R} - 0,3849\chi_3 \frac{l^2}{R^2};$ $d = 0,83193 - 1,7321\chi_3 \frac{l}{R} + 2\chi_3 \sqrt{3}$
	$M^0 = \frac{1}{2} (\tau_1 + \tau_2); \quad M'_0 = \frac{1}{2} (\tau_1 - \tau_2);$ $N_0 = \frac{1}{2} (S_1 + S_2); \quad N'_0 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2);$ $X_1 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2); \quad X_2 = \frac{1}{2} (v_1 - v_2);$ $Y_1 = \frac{1}{2} (t_1 + t_2); \quad Y_2 = \frac{1}{2} (t_1 - t_2);$ $Z_1 = \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2); \quad Z_2 = \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2);$ $\tau_1 = -\frac{a_1 + b_1\chi_2}{D} PR; \quad S_1 = -\frac{a_2 + b_2\chi_3}{D} P;$ $\tau_2 = -\frac{a_2 + \beta_2\chi_2}{D_1} PR; \quad S_2 = -\frac{a_3 + \beta_3\chi_3}{D_1} P;$ $\mu_1 = \frac{-0,0616 + 0,9003\chi_3 \frac{l}{R} + 2,362\chi_3 \frac{l^2}{R^2}}{d} PR;$

Схема	Расчетные формулы
	$v_1 =$ $= -\frac{P}{D} \left[ 0,06095 + \left( 0,9035 + 3,189 \frac{l}{R} + 4,248 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3 + \right.$ $\left. + 2,124 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2} \right];$ $t_1 = -\frac{P}{d} \left( 0,1401 + 1,801 \chi_3 + 3,542 \chi_3 \frac{l}{R} \right);$ $\mu_2 = \frac{PR}{D_1} (\alpha_4 + \beta_4 \chi_3);$ $v_2 = \frac{\alpha_5}{D_1} P; \quad t_2 = -\frac{P}{D_1} (\alpha_6 + \beta_6 \chi_3);$ $d = 0,1218 + 1,806 \chi_3 + 6,379 \chi_3 \frac{l}{R} -$ $- 8,505 \chi_3 \frac{l^2}{R^2} + 4,252 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$ $a = 0,000179 + 0,003344 \chi_3 + 0,02567 \chi_3 \frac{l}{R} +$ $+ 0,1389 \chi_3 \frac{l^2}{R^2} + 0,3450 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$ $b = 0,08340 + \left( 1,356 + 7,054 \frac{l}{R} + 26,64 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3 +$ $+ 58,68 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$ $a_1 = 0,01017 + \left( 0,1640 + 0,7292 \frac{l}{R} + 1,421 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3 +$ $+ 1,376 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$ $b_1 = 2,382 + \left( 37,49 + 157,0 \frac{l}{R} + 283,1 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3 +$ $+ 251,1 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$ $a_2 = 0,1547 + \left( 2,074 + 5,077 \frac{l}{R} + 3,004 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3 +$ $+ 1,502 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$

Продолжение табл. 11

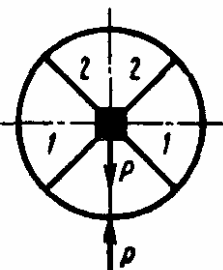
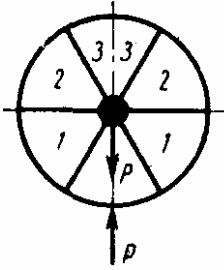
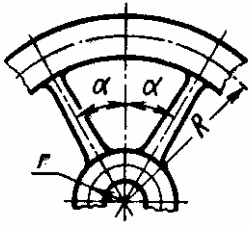
Схема	Расчетные формулы
	$b_2 = 18,38 + \left( 236,2 + 464,6 \frac{l}{R} \right) \chi_3;$ $D = d (1,127 + 185,5 \chi_3);$ $\alpha_1 = 0,0007016 + \chi_3 \left( 0,008566 + 0,03067 \frac{l}{R} + \right. \\ \left. + 0,07341 \frac{l^2}{R^2} \right) + 0,1136 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$ $\beta_2 = 0,1087 + \left( 0,7567 + 0,1862 \frac{l}{R} - 0,1281 \frac{l}{R^2} \right) \chi_3;$ $\alpha_3 = 0,01066 + \left( 0,1011 + 0,0520 \frac{l}{R} - 0,1651 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3 - \\ - 0,1136 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$ $\beta_3 = 0,4263 + \left( 3,098 - 0,1862 \frac{l}{R} - 1,157 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3;$ $\alpha_4 = -0,0004783 + \left( 0,05485 + 0,09168 \frac{l}{R} \right) \chi_3 \frac{l}{R};$ $\beta_4 = 0,03847 + \left( 1,928 + 1,285 \frac{l}{R} \right) \chi_3 \frac{l}{R};$ $\alpha_5 = -0,00419 - \left( 0,03668 + 0,02586 \frac{l}{R} + \right. \\ \left. + 0,2335 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3 + 0,3213 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2};$ $\alpha_6 = 0,01088 + \left( 0,1097 + 0,1375 \frac{l}{R} \right) \chi_3;$ $\beta_6 = 0,5735 + \left( 3,855 + 1,928 \frac{l}{R} \right) \chi_3;$ $D_1 = 0,009459 + \left( 0,1033 + 0,2311 \frac{l}{R} + 0,3302 \frac{l^2}{R^2} \right) \chi_3 + \\ + 0,4543 \chi_3^2 \frac{l^2}{R^2} + \chi_2 \left( 0,8111 + 5,452 \chi_3 + 2,726 \chi_3 \frac{l}{R} \right)$

Схема	Расчетные формулы
	$M_0 = \frac{1}{2} (\tau_1 + \tau_2); \quad M'_0 = \frac{1}{2} (\tau_1 - \tau_2);$ $N_0 = \frac{1}{2} (S_1 + S_2); \quad N'_0 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2);$ $X_1 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2); \quad X_3 = \frac{1}{2} (v_1 - v_2);$ $Y_1 = \frac{1}{2} (t_1 + t_2); \quad Y_3 = \frac{1}{2} (t_1 - t_2);$ $Z_1 = \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2); \quad Z_3 = \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2);$ $X_2 = S_1 - \frac{1}{2} v_1 - 0,8660 t_1;$ $Y_2 = 0,8660 v_2 - \frac{1}{2} t_2 - \frac{P}{2};$ $Z_2 = \tau_2 + S_2 R - \mu_2 + t_2 R - Y_2 R;$ <p>здесь при <math>\chi_2 = 0</math> и <math>\frac{l}{R} = 0,9</math></p> $\tau_1 = -\frac{PR}{D} [0,06793 + (73,81 + 117,85\chi_3) \chi_3];$ $S_1 = -\frac{P}{D} [2,408 + (430,8 + 346,24\chi_3) \chi_3];$ $\mu_1 = \frac{P}{D} [-0,04576 + 101,82\chi_3];$ $v_1 = \frac{P}{D} [-0,6070 - (115,8 - 9,8905\chi_3) \chi_3];$ $\tau_1 = -\frac{P}{D} [2,430 + 180,15\chi_3];$ $D = 1,379 + 755,8\chi_3 + 775,41\chi_3^2;$ $\tau_2 = -\frac{PR}{D_1} [0,06793 + \chi_3 (98,78 + 22810\chi_3 +$ $+ 66600\chi_3^2 + 40554\chi_3^3)];$ $S_2 = -\frac{P}{D_1} [2,408 + \chi_3 (1314 + 1954\chi_3 -$ $- 44520\chi_3^2 - 40552\chi_3^3)];$ $\mu_2 = \frac{PR}{D_1} [-0,04576 + \chi_3 \times$ $\times (85,04 + 26600\chi_3 + 35622\chi_3^2)];$

Продолжение табл. 11

Схема	Расчетные формулы
	$v_2 = \frac{P}{D_1} \left[ -0,6070 - 338,0\chi_3 + \right.$ $\left. + 75380\chi_3^2 + 240300\chi_3^3 + 121660\chi_3^4 \right];$ $t_2 = -\frac{P}{D} \left[ 2,431 + 1073\chi_3 + 48680\chi_3^2 + 63181\chi_3^3 \right];$ $D_1 = 1,379 + 1262\chi_3 + 188700\chi_3^2 + 452300\chi_3^3 + 210730\chi_3^4$
<p>Вращающееся колесо</p>  <p><math>\alpha = \frac{\pi}{n};</math></p> <p><math>\gamma</math> — удельный вес,  <math>F_c</math> — средняя          площадь сечения          спицы</p>	<p>Усилие в спице:</p> $X = \frac{1}{B} \left\{ \frac{\gamma F_1 \omega^2 R^3}{g F_1} - \frac{\gamma \omega^2}{2g} \left( \frac{2}{3} R^3 - R^2 r + \frac{r^3}{3} \right) - \right.$ $\left. - \frac{\gamma F_c (R^2 - r^2) \omega^2}{2g} \left[ \frac{r^3}{J_\theta} f_2(\alpha) + \frac{r}{F_\theta} f_1(\alpha) \right] \right\},$ <p>где</p> $B = \left( \frac{R^3}{J_H} + \frac{r^3}{J_\theta} \right) f_2(\alpha) + \left( \frac{R}{F_H} + \frac{r}{F_\theta} \right) f_1(\alpha) +$ $+ \frac{R - r}{F_c};$ $f_1(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left( \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right);$ $f_2(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left( \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha}.$ <p>Усилия в ободе около спицы:</p> $N_H = \frac{\gamma F_H \omega^2 R^2}{g} - \frac{X}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$ $M_H = \frac{X R}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right).$ <p>Усилия в ободе посередине между спицами:</p> $N_H = \frac{\gamma F_H \omega^2 R^2}{g} - \frac{X}{2} \frac{1}{\sin \alpha};$ $M_H = \frac{X R}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right).$ <p>Более подробные формулы см. в работе [9].</p>



## КОЛЬЦЕВЫЕ СИСТЕМЫ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СПИЦ

Два соосных кольца, расположенных в одной плоскости, соединены некоторым, достаточно большим, числом спиц (см. рис. 40). Кольца со спицами соединены жестко или шарнирно. Спицы заменяются упругой прослойкой Винклеровского типа с характеристиками жесткости на растяжение и изгиб

$$E_c F_c = \frac{E_c F_c^* n}{2\pi R_{cp}}; \quad E_c J_c = \frac{E_c J_c^* n}{2\pi R_{cp}}, \quad (49)$$

где  $F_c^*$  и  $J_c^*$  — площадь и момент инерции одной (исходной) спицы. Произвольная внешняя нагрузка приложена к кольцам в плоскости колец.

Остальные допущения и обозначения приняты такими же, как на стр. 365.

Обозначим через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  усилия по направлению спицы, перпендикулярно к ней и изгибающий момент, действующие в стыке спицы с наружным кольцом и приходящиеся на единицу длины кольца. Эти величины определяют из соотношений

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{E_c F_c}{l} (w_\theta - w_n); \\ Y &= 12 \frac{E_c J_c}{l^3} \left[ v_\theta - v_n + \frac{l}{2} (\vartheta_\theta + \vartheta_n) \right]; \\ Z &= 6 \frac{E_c J_c}{l^2} \left[ v_n - v_\theta - \frac{l}{3} (\vartheta_\theta + 2\vartheta_n) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Внутренние усилия по кольцам определяют из условий равновесия

$$\left. \begin{aligned} N_n &= \frac{dQ_n}{d\varphi} - q_n R - X \cdot R; \quad Q_n = -\frac{dM_n}{R d\varphi} + m_n - Z; \\ M_n &= -\frac{E_n J_n}{R^3} \cdot \frac{d\vartheta_n}{d\varphi}; \quad N_\theta = \frac{dQ_\theta}{d\varphi} - q_\theta r + X \cdot R; \\ Q_\theta &= -\frac{dM_\theta}{r d\varphi} + m_\theta + \frac{R}{r} Z; \quad M_\theta = -\frac{E_\theta J_\theta}{r^3} \frac{d\vartheta_\theta}{d\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Соотношения деформаций

$$\vartheta_i = \frac{1}{R_i} \left( \frac{d^2 v_i}{d\varphi^2} + v_i \right); \quad w_i = \frac{dv_i}{d\varphi} \quad (i = n, \theta). \quad (52)$$

Полученные соотношения представляют собой полную группу дифференциальных уравнений решения задачи. Решение этих уравнений, имеющих 12-й порядок, в замкнутом виде довольно громоздко, поэтому рекомендуется решение в общем виде разыскивать в рядах Фурье.

В качестве примера приведем решение задачи для системы нагруженной первой элементарной нагрузкой по наружному кольцу (рис. 51). Задаваясь усилиями  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  в виде

$$X = \frac{P}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n\varphi; \quad Y = \frac{P}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos n\varphi;$$

$$Z = \frac{P}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin n\varphi,$$

выражения для внутренних усилий по кольцам находят интегрированием уравнений равновесия элементов колец:

по наружному кольцу

$$N_n = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{ny_n + x_n}{n^2 - 1} \cos n\varphi \right];$$

$$Q_n = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin \varphi + \varphi \cos \varphi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx_n + y_n}{n^2 - 1} \sin n\varphi \right];$$

$$M_n = \frac{PR}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1 - \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx_n + y_n - (n^2 - 1)z_n}{n(n^2 - 1)} \cos n\varphi \right];$$

по внутреннему кольцу

$$N_s = -\frac{P}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{ny_n + x_n}{n^2 - 1} \cos n\varphi;$$

$$Q_s = -\frac{P}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx_n + y_n}{n^2 - 1} \sin n\varphi;$$

$$M_s = \frac{Pr}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx_n + y_n - (n^2 - 1) \left( z_n + \frac{l}{R} y_n \right)}{n(n^2 - 1)} \cos n\varphi.$$

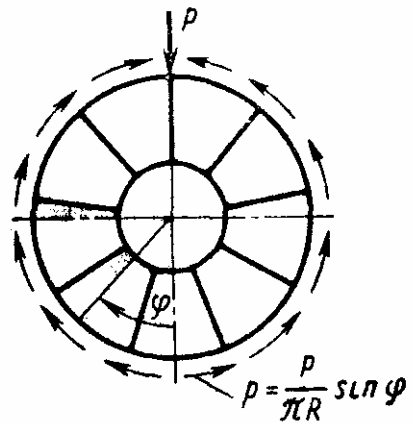


Рис. 51

Из условий равновесия колец в целом и совместности деформаций находят неизвестные коэффициенты  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$  рядов. При  $n = 1$  коэффициенты  $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ . При  $n \geq 2$  коэффициенты определяют из уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \frac{nx_n + y_n - (n^2 - 1)z_n}{n(n^2 - 1)} + a_1 n^2 x_1 - a_2 n y_n - a_3 n z_n + \\ & + a_4 \frac{nx_n + y_n - (n^2 - 1)\left(z_n + \frac{l}{R} y_n\right)}{n(n^2 - 1)} = \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}; \\ & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{l_c}{R}\right) y_n + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{R}\right) \frac{R}{l} z_n + \\ & \quad + \frac{E_c J_c}{R l_c E_c F_c} n x_n = 0; \\ & a_5 x_n + a_6 \frac{nx_n + y_n - (n^2 - 1)\left(z_n + \frac{l}{R} y_n\right)}{n(n^2 - 1)} - \\ & \quad - n y_n - \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{l} n z_n = 0, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{l}{R^4} \cdot \frac{E_H J_H}{E_c F_c}; \quad a_2 = \frac{l^3}{3R^4} \cdot \frac{E_H J_H}{E_c J_c}; \quad a_3 = \frac{l^2}{2R^3} \cdot \frac{E_H J_H}{E_c J_c}; \\ a_4 &= \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{E_H J_H}{E_B J_B}; \quad a_5 = \frac{3E_c J_c}{l^2 E_c F_c}; \quad a_6 = \frac{3r^2 R}{l^2} \cdot \frac{E_c J_c}{E_B J_B}. \end{aligned}$$

Если принять спицы нерастяжимыми, что часто допускается в расчетах подобных систем, то решение уравнений (53) резко упрощается. В этом случае следует положить  $E_c F_c = \infty$  и тогда  $a_1 = 0$ ,  $a_5 = 0$ . В результате из уравнений (53) получим

$$\begin{aligned} z_n &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{R} \cdot \frac{R + 2r}{R + r} \cdot y_n = -a_7 y_n; \\ y_n &= \frac{n(-1)^n a_6}{(n^2 - 1) \left[ \frac{l}{r} a_6 + n^2 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{l} a_7\right) \left(1 + \frac{r}{R} a_4\right) \right]}; \\ x_n &= \frac{n^2 - 1}{n a_6} \left[ n^2 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{l} a_7\right) + a_6 \left(\frac{l}{r} - a_7\right) - \frac{a_6}{n^2 - 1} \right] y_n. \end{aligned}$$

Ряды в выражениях для внутренних силовых факторов по кольцам сходятся достаточно быстро: обычно достаточно учитывать 2—3 члена.

## Внутреннее кольцо абсолютно жесткое

Если в системе спицы соединены с кольцами жестко, а внутреннее кольцо представляет собой абсолютно жесткую втулку (диск), то в этом случае задача сводится к решению одного уравнения

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + (2 - b_4) \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + (1 - 2b_4 + b_2) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} - (b_4 + b_0) v = f_n(\varphi), \quad (54)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_4 &= 4 \frac{l}{R} \chi_3; \quad b_2 = \chi_2 + 12\chi_3; \quad b_0 = 12 \frac{r}{l} \chi_3; \\ \chi_2 &= \frac{R^4}{l} \cdot \frac{E_c F_c}{E_n J_n}; \quad \chi_3 = \frac{R^3}{l^2} \cdot \frac{E_c J_c}{E_n J_n}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Решение этого уравнения

$$v = A_0 \operatorname{ch} \mu_1 \varphi + A_1 \operatorname{sh} \mu_1 \varphi + A_2 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi + A_3 \operatorname{ch} \mu \varphi \sin v \varphi + A_4 \operatorname{sh} \mu \varphi \sin v \varphi + A_5 \operatorname{sh} \mu \varphi \cos v \varphi + v^*(\varphi), \quad (56)$$

где  $\lambda = \pm \mu_1$  и  $\lambda = \pm \mu \pm iv$  — корни характеристического уравнения:

$$\lambda^6 + (2 - b_4) \lambda^4 + (1 - 2b_4 + b_2) \lambda^2 - (b_4 + b_0) = 0, \quad (57)$$

а  $v^*$  — частное решение неоднородного уравнения. Постоянные  $A_i$  определяют из условий стыка. Усилия по кольцам находятся согласно формулам (51), а усилия и моменты по спицам (при числе  $n \geq 20$ ) — по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_c &= - \frac{2\pi R E F_c}{nl} \omega; \quad Q_c = - 12 \frac{2\pi R E_c J_c}{nl^3} \left( v_n - \frac{l}{2} \vartheta_n \right); \\ M_c &= 6 \frac{2\pi R E_c J_c}{nl^3} \left( v_n + \frac{l}{2} \vartheta_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

При малом числе спиц эти величины следует вычислять интегрированием соответствующих выражений по длине участков. Ниже приводятся решения нескольких частных задач.

На обод колеса действует первая элементарная нагрузка (см. рис. 51). В этом случае

$$v = \frac{PR^3}{\pi(b_2 + b_0)EJ_n} \{ A_1 \cdot \operatorname{sh} \mu_1 \varphi + A_3 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + \\ + A_5 \operatorname{sh} \mu \varphi \cos v \varphi + \sin \varphi \}.$$

$$\omega = \frac{PR^3}{\pi(b_2 + b_0)E_n J_n} \{ \mu_1 A_1 \operatorname{ch} \mu_1 \varphi + A_3 (\mu \cdot \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi +$$

$$+ v \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi) + A_5 (\mu \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi - v \cdot \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi) + \cos \varphi \};$$

$$M_n = \frac{PR}{\pi(b_2 + b_0)} \left\{ \mu_1 (\mu_1^2 + 1) A_1 \operatorname{ch} \mu_1 \varphi + [\mu (\mu^2 - \nu^2 + 1) - 2\mu \nu^2] (A_3 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + A_5 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi) + \right. \\ \left. + [\nu (3\mu^2 - \nu^2 + 1)] A_3 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi - A_5 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi \right\};$$

здесь

$$A_1 = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \mu_1 \pi} \frac{1}{\frac{2(\mu^2 - \nu^2) - \mu_1^2 + 1}{(\mu^2 + \nu^2 + 1)^2 - 4\nu^2} - \frac{1}{\mu_1^2 + 1}};$$

$$A_3 = A_1 \cdot \operatorname{sh} \mu_1 \pi \frac{(\mu^2 - \nu^2 - \mu_1^2) \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi + 2\mu \nu \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi}{2\mu \nu (\operatorname{sh}^2 \mu \pi + \sin^2 \nu \pi)};$$

$$A_5 = A_1 \cdot \operatorname{sh} \mu \pi \frac{2\mu \nu \cdot \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi - (\mu^2 - \nu^2 - \mu_1^2) \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi}{2\mu \nu (\operatorname{sh}^2 \mu \pi + \sin^2 \nu \pi)}.$$

Максимальные усилия в спицах и изгибающий момент в кольце

$$N_{c \max} = - \frac{2PR\chi_3}{(b_2 + b_0)nl} A_1 \operatorname{sh} \mu_1 \pi \times \\ \times \left[ \frac{\mu_1 \operatorname{ch} \mu_1 \pi}{\operatorname{sh} \mu_1 \pi} + \frac{3\mu^2 - \nu^2 - \mu_1^2}{2\mu} - \frac{1}{A_1 \operatorname{sh} \mu_1 \pi} \right]; \\ M_{\max} = \frac{PRA_1 \cdot \operatorname{sh} \mu_1 \pi}{\pi(b_2 + b_0)} \left[ \mu_1 (\mu_1^2 + 1) \frac{\operatorname{ch} \mu_1 \pi}{\operatorname{sh} \mu_1 \pi} + \mu (\mu^2 - 3\nu^2 + 1) + \right. \\ \left. + (3\mu^2 - \nu^2 + 1) \frac{\mu^2 - \nu^2 - \mu_1^2}{2\mu} \right].$$

В работе [12] показано, что вместо уравнения (54) можно пользоваться уравнением

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + (2 - b_4) \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + (1 - 2b_4 + b_2) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = f_n(\varphi), \quad (59)$$

решение которого записывается в более простом виде

$$v = A_0 + A_1 \varphi + A_2 \operatorname{ch} \bar{\mu} \varphi \cdot \cos \bar{\nu} \varphi + A_3 \operatorname{ch} \bar{\mu} \varphi \cdot \sin \bar{\nu} \varphi + \\ + A_4 \operatorname{sh} \bar{\mu} \varphi \cdot \sin \bar{\nu} \varphi + A_5 \operatorname{sh} \bar{\mu} \varphi \cdot \cos \bar{\nu} \varphi + v^*(\varphi), \quad (60)$$

где

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + b_2 - 2b_4} - \frac{2 - b_4}{2} \right]};$$

$$\bar{\nu} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + b_2 - 2b_4} + \frac{2 - b_4}{2} \right]}.$$

На обод колеса действует сосредоточенная радиальная сила, уравновешенная нагрузками по диску (рис. 52). Тогда в силу симметрии  $A_0 = A_2 = A_4 = 0$  и ввиду отсутствия внешней распределенной нагрузки  $v^* = 0$ , при этом

$$w = A_1 + A_3 (\bar{\mu} \cdot \text{sh } \bar{\mu} \varphi \cdot \sin \bar{\nu} \varphi + \bar{\nu} \cdot \text{ch } \bar{\mu} \varphi \cdot \cos \bar{\nu} \varphi) + \\ + A_5 (\bar{\mu} \text{ ch } \bar{\mu} \varphi \cdot \cos \bar{\nu} \varphi - \bar{\nu} \cdot \text{sh } \bar{\mu} \varphi \cdot \cos \bar{\nu} \varphi);$$

$$M = - \frac{EJ}{R^2} \{ A_1 + \bar{\mu} (\bar{\mu}^2 - 3\bar{\nu}^2 + \\ + 1) (A_3 \cdot \text{sh } \bar{\mu} \varphi \cdot \sin \bar{\nu} \varphi + A_5 \text{ ch } \bar{\mu} \varphi \cdot \cos \bar{\nu} \varphi) + \\ + \bar{\nu} (3\bar{\mu}^2 - \bar{\nu}^2 + 1) (A_3 \text{ ch } \bar{\mu} \varphi \cdot \cos \bar{\nu} \varphi - \\ - A_5 \text{ sh } \bar{\mu} \varphi \cdot \sin \bar{\nu} \varphi) \},$$

где

$$A_1 = - \frac{PR^3}{2\pi EJ_n (1 + b_2 - 2b_4)};$$

$$A_3 = \frac{\pi A_1}{2\bar{\mu}\bar{\nu}} \cdot \frac{\left(\frac{2-b_4}{2}\right) \text{sh } \bar{\mu}\pi \cdot \cos \bar{\nu}\pi + 2\bar{\mu}\bar{\nu} \cdot \text{ch } \bar{\mu}\pi \cdot \sin \bar{\nu}\pi}{\text{sh}^2 \bar{\mu}\pi + \sin^2 \bar{\nu}\pi};$$

$$A_5 = \frac{\pi A_1}{2\bar{\mu}\bar{\nu}} \cdot \frac{2\bar{\mu}\bar{\nu} \cdot \text{sh } \bar{\mu}\pi \cdot \cos \bar{\nu}\pi - \left(\frac{2-b_4}{2}\right) \text{ch } \bar{\mu}\pi \cdot \sin \bar{\nu}\pi}{\text{sh}^2 \bar{\mu}\pi + \sin^2 \bar{\nu}\pi}.$$

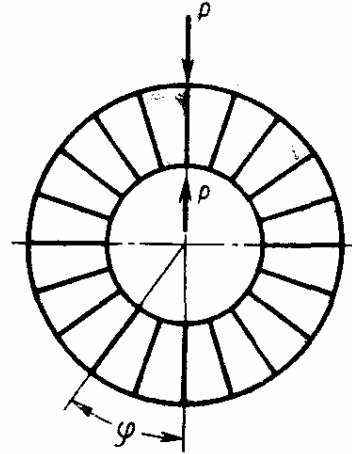


Рис. 52

Максимальные значения прогиба и момента по ободу в точке  $\varphi = \pi$ :

$$w(\pi) = \frac{PR^3}{2EJ_n \cdot 2\bar{\mu}\bar{\nu} \sqrt{1 + b_2 - 2b_4}} \left[ - \frac{2\bar{\mu}\bar{\nu}}{\pi \sqrt{1 + b_2 - 2b_4}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{\nu} \cdot \text{sh } 2\bar{\mu}\pi + \bar{\mu} \cdot \sin 2\bar{\nu}\pi}{\text{sh}^2 \bar{\mu}\pi + \sin^2 \bar{\nu}\pi} \right];$$

$$M(\pi) = \frac{PR}{2\pi \cdot 2\bar{\mu}\bar{\nu} \sqrt{1 + b_2 - 2b_4}} \left[ \frac{2\bar{\mu}\bar{\nu}}{\sqrt{1 + b_2 - 2b_4}} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 + b_2 - 2b_4} (\bar{\nu} \cdot \text{sh } 2\bar{\mu}\pi - \bar{\mu} \sin 2\bar{\nu}\pi) - (\bar{\nu} \cdot \text{sh } 2\bar{\mu}\pi + \bar{\mu} \cdot \sin 2\bar{\nu}\pi)}{\text{sh}^2 \bar{\mu}\pi + \sin^2 \bar{\nu}\pi} \right]. \quad (61)$$

Если  $\mu l \geq 6$ , то формулы для постоянных и для максимальных величин можно упростить, принимая  $\operatorname{ch} \mu l = \operatorname{sh} \mu l$ .

Приближенные значения для максимальных величин

$$w(\pi) = \frac{PR^3}{2\pi EJ_n} \left[ -\frac{1}{1+b_2-2b_4} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{\sqrt{2(1+b_2-2b_4) \left[ \frac{2-b_4}{2} + \sqrt{1+b_2-2b_4} \right]}} \right];$$

$$M(\pi) = \frac{PR}{2\pi} \left[ \frac{1}{1+b_2-2b_4} + \right. \\ \left. + \frac{\pi(\sqrt{1+b_2-2b_4}-1)}{\sqrt{2(1+b_2-2b_4) \left( \frac{2-b_4}{2} + \sqrt{1+b_2-2b_4} \right)}} \right].$$

Для первоначального выбора сечений можно пользоваться более грубым приближением

$$w(\pi) = \frac{PR^3}{8\bar{\mu}^3 EJ_n}; \quad M(\pi) = \frac{PR}{4\bar{\mu}}.$$

### Шарнирное соединение спиц с кольцами

Для конструкции из двух соосных колец, шарнирно соединенных спицами, решение задачи удобнее искать в усилиях. Функцию  $X$  усилий по упругой прослойке определяют из уравнения

$$\frac{d^6 X}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 X}{d\varphi^4} + (1 + \alpha) \frac{d^2 X}{d\varphi^2} = \Phi, \quad (62)$$

где

$$\alpha = \chi_2(1 + \chi_1); \quad \Phi = -\frac{E_c F_c}{l} (f'_{1n} - f'_{1s}). \quad (63)$$

Решение уравнения записывают так:

$$X = C_0 + C_5 \Phi + C_8 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi + C_9 \cdot \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + \\ + C_{10} \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + C_{11} \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi + X^*, \quad (64)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha+1}-1}{2}}; \quad v = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha+1}+1}{2}}; \\ (\mu^2 - v^2 + 1 = 0; \quad 2\mu v = \sqrt{\alpha}). \quad (65)$$

Как только функция  $X$  определена, функцию  $v_n(\varphi)$  перемещений находят из уравнения

$$\frac{d^6 v_n}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v_n}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v_n}{d\varphi^2} = \frac{R^4}{EJ_n} \cdot \frac{dX}{d\varphi} + f_n(\varphi); \quad (66)$$

решив уравнение, получим

$$\begin{aligned} v_n = & A_1 + A_2 \varphi + A_3 \cos \varphi + A_4 \sin \varphi + A_5 \varphi^2 + A_6 \varphi \cos \varphi + \\ & + A_7 \varphi \sin \varphi + A_8 \operatorname{sh} \mu \varphi \cos \nu \varphi + A_9 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + A_{10} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + \\ & + A_{11} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi + v_n^*. \end{aligned} \quad (67)$$

В этом выражении часть постоянных  $A_i$  выражают через  $C_i$ :

$$\left. \begin{aligned} A_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4 C_5}{EJ_n}; \quad A_8 = -\frac{R^4}{E_n J_n} \cdot \frac{\nu C_8 - \mu C_{10}}{(\alpha + 1) \sqrt{\alpha}}; \\ A_9 = -\frac{R^4}{E_n J_n} \cdot \frac{\nu C_9 + \mu C_{11}}{(\alpha + 1) \sqrt{\alpha}}; \\ A_{10} = -\frac{R^4}{E_n J_n} \cdot \frac{\nu C_{10} + \mu C_8}{(\alpha + 1) \sqrt{\alpha}}; \\ A_{11} = -\frac{R^4}{E_n J_n} \cdot \frac{\nu C_{11} - \mu C_9}{(\alpha + 1) \sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Остальные постоянные  $A_i$  и  $C_i$  произвольные, их определяют из условий стыка и равновесия.

Смещение  $v_\theta$  записывают аналогично  $v_n$ :

$$\begin{aligned} v_\theta = & B_1 + B_2 \varphi + B_3 \cos \varphi + B_4 \sin \varphi + B_5 \varphi^2 + B_6 \varphi \cos \varphi + \\ & + B_7 \varphi \sin \varphi + B_8 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi + B_9 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + \\ & + B_{10} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + B_{11} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi + v_\theta^*. \end{aligned} \quad (69)$$

Согласно уравнению

$$X = \frac{E_c F_c}{l} (\omega_\theta - \omega_n),$$

постоянные  $B_i$  выражают через постоянные  $A_i$  и  $C_i$ :

$$\left. \begin{aligned} B_2 = A_2 + \frac{l C_0}{E_c F_c}; \quad B_3 = A_3; \quad B_4 = A_4; \quad B_5 = A_5 + \frac{l C_5}{2 E_c F_c}; \\ B_6 = A_6; \quad B_7 = A_7; \quad B_8 = A_8 + \frac{l}{E_c F_c} \cdot \frac{\mu C_8 - \nu C_{10}}{\sqrt{\alpha + 1}}; \\ B_9 = A_9 + \frac{l}{E_c F_c} \cdot \frac{\mu C_9 + \nu C_{11}}{\sqrt{\alpha + 1}}; \\ B_{10} = A_{10} + \frac{l}{E_c F_c} \cdot \frac{\mu C_{10} + \nu C_8}{\sqrt{\alpha + 1}}; \\ B_{11} = A_{11} + \frac{l (\mu C_{11} - \nu C_9)}{E_c F_c \sqrt{\alpha + 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$



Выражения для внутренних усилий по кольцам определяют из формул (67) и (69) согласно выражений (51). Так, например, по наружному кольцу

$$\begin{aligned}
 w_n &= A_2 - A_3 \sin \varphi + A_4 \cos \varphi + 2A_5 \varphi + A_6 (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \\
 &+ A_7 (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) + \mu (A_8 \operatorname{ch} \mu \varphi \cos v \varphi + A_9 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + \\
 &+ A_{10} \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + A_{11} \operatorname{sh} \mu \varphi \cos v \varphi) - v (A_8 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi - \\
 &- A_9 \operatorname{sh} \mu \varphi \cos v \varphi - A_{10} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi + A_{11} \operatorname{ch} \mu \varphi \sin v \varphi) + w_n^*; \\
 M_n &= -\frac{E_n J_n}{R^2} \left\{ A_2 + 2A_5 \varphi - 2A_6 \cos \varphi - 2A_7 \sin \varphi - \sqrt{\alpha} \times \right. \\
 &\times \left[ \mu (A_8 \operatorname{sh} \mu \varphi \sin v \varphi - A_9 \operatorname{sh} \mu \varphi \cos v \varphi - A_{10} \operatorname{ch} \mu \varphi \cos v \varphi + \right. \\
 &\quad + A_{11} \operatorname{ch} \mu \varphi \sin v \varphi) + v (A_8 \operatorname{ch} \mu \varphi \cos v \varphi + \\
 &\quad + A_9 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + A_{10} \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + \\
 &\quad \left. \left. + A_{11} \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi) \right] \right\} + M_n^*; \\
 Q_n &= \frac{E_n J_n}{R^3} \left\{ 2A_5 + 2A_6 \sin \varphi - 2A_7 \cos \varphi + \sqrt{\alpha} \times \right. \\
 &\times \left[ (A_8 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi - A_9 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi - \right. \\
 &\quad - A_{10} \operatorname{sh} \mu \varphi \cos v \varphi + A_{11} \operatorname{sh} \mu \varphi \sin v \varphi) - \sqrt{\alpha} \times \\
 &\quad \times (A_8 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi + A_9 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + \\
 &\quad \left. \left. + A_{10} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + A_{11} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi) \right] \right\} + Q_n^*; \\
 N_n &= \frac{E_n J_n}{R^3} \left\{ 2A_6 \cos \varphi + 2A_7 \sin \varphi + [(\mu + v \sqrt{\alpha}) \times \right. \\
 &\quad \times (A_8 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi - A_9 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi - \\
 &\quad - A_{10} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi + A_{11} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi) + (v - \mu \sqrt{\alpha}) \times \\
 &\quad \times (A_8 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos v \varphi + A_9 \operatorname{ch} \mu \varphi \sin v \varphi + \\
 &\quad \left. \left. + A_{10} \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin v \varphi + A_{11} \operatorname{sh} \mu \varphi \cos v \varphi) \right] \sqrt{\alpha} \right\} + N_n^* - X R.
 \end{aligned} \tag{71}$$

Выражения для величин по внутреннему кольцу аналогичны выражениям (71), только следует заменять соответственно постоянные  $A_i$ , жесткость кольца и радиус.

При  $\alpha \geq 70$  величины  $\mu$  и  $v$  таковы, что  $\mu l \geq 6$  и  $vl \geq 6$ . Тогда можно принять  $\operatorname{sh} \mu l \approx \operatorname{ch} \mu l$  и, кроме того, в формулах можно отбросить  $\sin vl$  и  $\cos vl$  (малы по сравнению с  $\operatorname{sh} \mu l$  и  $\operatorname{ch} \mu l$ ). Эти условия позволяют записать окончательные формулы в более простом виде, без существенных ошибок.

Ниже приводятся решения ряда задач. В этих решениях приводятся также приближенные значения при  $\alpha \geq 70$ .

На кольца системы действуют симметричные относительно вертикальной оси нагрузки типа сосредоточенных радиальных сил, первой элементарной нагрузки и распределенных нагрузок вида

$$\rho_n = D_1 \sin \varphi; \quad \rho_\theta = D_2 \sin \varphi,$$

как показано на рис. 51—57. В этих случаях нагружения функции  $X$  четные:

$$X = C_0 + C_8 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi + C_{10} \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + C \cdot \cos \varphi, \quad (72)$$

а функции  $v_i$  — нечетные:

$$v_n = A_2 \varphi + A_4 \sin \varphi + A_6 \varphi \cos \varphi + A_8 \operatorname{sh} \mu \varphi \cos \nu \varphi + \\ + A_{10} \operatorname{ch} \mu \varphi \sin \nu \varphi + A \varphi^2 \sin \varphi;$$

$$v_\theta = B_2 \varphi + B_4 \sin \varphi + B_6 \varphi \cos \varphi + B_8 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi + \\ + B_{10} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + B \varphi^2 \cdot \sin \varphi.$$

Постоянную  $C$  определяют из уравнения (62):

$$C = - \frac{1}{1 + \frac{1}{\chi_1}} \left( D_1 - \frac{1}{\chi_1} D_2 \right).$$

Постоянные  $C_8$  и  $C_{10}$  находят из соотношений  $X'(\pi) = 0$ ;  $\int_0^\pi X d\varphi = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} C_8 &= -\pi C_0 \left\{ \frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{\nu \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi + \mu \operatorname{ch} \mu \pi \sin \nu \pi}{\operatorname{sh}^2 \mu \pi + \sin^2 \nu \pi} \approx \right. \\ &\quad \approx -\pi C_0 \frac{\nu \cos \nu \pi + \mu \sin \nu \pi}{\operatorname{sh} \mu \pi}; \\ C_{10} &= -\pi C_0 \left\{ \frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{\nu \cdot \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi - \nu \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi}{\operatorname{sh}^2 \mu \pi + \sin^2 \nu \pi} \approx \right. \\ &\quad \approx -\pi C_0 \frac{\nu \sin \nu \pi - \mu \cos \nu \pi}{\operatorname{sh} \mu \pi}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Постоянную  $C_0$  определяют из уравнения

$$2R \int_0^\pi X \cos \varphi d\varphi = 2R \left( \frac{\alpha+1}{\alpha} \pi C_0 + \frac{\pi C}{2} \right) = P_y,$$

где  $P_y$  — равнодействующая внешних сил на наружное кольцо по вертикальной оси.

Постоянные  $A_i$  определяют по формулам (68) из условий  $v_n(\pi) = 0$  и  $\vartheta_n(\pi) = 0$  и из уравнения (66):

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{R_4(C - D_1)}{8E_H J_H}; \quad A_2 = 4A - \frac{R^4}{E_H J_H} \cdot \frac{C_0}{\alpha}; \quad A_6 = 4A; \\ A_8 &= \frac{\pi \cdot C_0}{\alpha \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{R^4}{E_H J_H} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi - \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \approx \\ &\approx \frac{\pi C_0}{\alpha \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{R^4}{E_H J_H} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} \cdot \cos \nu\pi - \sin \nu\pi}{\operatorname{sh} \mu\pi}; \\ A_{10} &= \frac{\pi C_0}{\alpha \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{R^4}{E_H J_H} \cdot \frac{\operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi + \sqrt{\alpha} \cdot \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \approx \\ &\approx \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{C_0}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{R^4}{E_H J_H} \cdot \frac{\cos \nu\pi + \sqrt{\alpha} \cdot \sin \nu\pi}{\operatorname{sh} \mu\pi}; \\ B &= A; \quad B_2 = 4A + \frac{R^4}{E_H J_H} \cdot \frac{C_0}{\alpha \chi_1}; \\ B_6 &= A_6; \quad B_{8, 10} = -\frac{1}{\chi_1} A_{8, 10}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Изгибающие моменты по кольцам

$$\left. \begin{aligned} M_H &= -R^2 \left\{ 4A \frac{E_H J_H}{R^4} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right) - \right. \\ &- \frac{C_0}{\alpha} \left[ 1 + \left( \frac{\nu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi + \mu \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \times \right. \right. \\ &\times \operatorname{sh} \mu\varphi \sin \nu\varphi + \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi - \nu \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \times \\ &\times \operatorname{ch} \mu\varphi \cdot \cos \nu\varphi \left. \right) \pi \sqrt{\alpha + 1} \left. \right\}; \\ M_\theta &= -R \cdot r \left\{ 4A \chi_1 \frac{E_H J_H}{R^4} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right) + \right. \\ &+ \frac{C_0}{\alpha} \left[ 1 + \left( \frac{\nu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi + \mu \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \times \right. \right. \\ &\times \operatorname{sh} \mu\varphi \sin \nu\varphi + \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi - \nu \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \times \\ &\times \operatorname{ch} \mu\varphi \cdot \cos \nu\varphi \left. \right) \pi \sqrt{\alpha + 1} \left. \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

На наружное кольцо действует первая элементарная нагрузка (см. рис. 51). В этом случае усилия, действующие на спицы, вычисляют по формуле (72), а моменты по кольцам — по формулам (75), где

$$C = -\frac{P}{\pi R \left( 1 + \frac{1}{\chi_1} \right)}; \quad C_0 = \frac{P}{2\pi R} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha + 1)(1 + \chi_1)};$$

$$A = - \frac{PR^3}{8\pi(1+\chi_1)EJ_n}.$$

Максимальные значения

$$\begin{aligned} X_{\max} = X(\pi) &= \frac{P}{2\pi R(1+\chi_1)} \left[ \frac{\alpha}{\alpha+1} + 2\chi_1 - \right. \\ &- \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \frac{\nu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi + \mu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \left. \right] \approx \\ &\approx - \frac{P}{2\pi R(1+\chi_1)} [\nu\pi - 2\chi_1 - 1]; \\ M_n(\pi) &= \frac{PR}{2\pi(1+\chi_1)} \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha+1} \times \right. \\ &\times \left( 1 + \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right) \left. \right] \approx \\ &\approx \frac{PR}{2\pi(1+\chi_1)} \left( \frac{3}{2} + \frac{\mu\pi}{\sqrt{\alpha+1}} \right); \\ M_\theta(\pi) &= \frac{Pr}{2\pi(1+\chi_1)} \left[ \frac{3}{2} \chi_1 - \frac{1}{\alpha+1} \times \right. \\ &\times \left( 1 + \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right) \left. \right] \approx \\ &\approx \frac{Pr}{2\pi(1+\chi_1)} \left( \frac{3}{2} \chi_1 - \frac{\mu\pi}{\sqrt{\alpha+1}} \right). \end{aligned}$$

На внутреннее кольцо действует первая элементарная нагрузка (рис. 53). Усилия определяют по формулам (72) и (75), где

$$C = \frac{P}{\pi R(1+\chi_1)}; \quad C_0 = - \frac{P}{2\pi R(1+\chi_1)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1};$$

$$A = - \frac{1}{8} \cdot \frac{CR^4}{E_n J_n} = - \frac{PR^3}{8\pi(1+\chi_1)E_n J_n}.$$

Максимальные значения

$$\begin{aligned} X_{\max} &= - \frac{P}{2\pi R(1+\chi_1)} \left[ 2 + \frac{\alpha}{\alpha+1} - \right. \\ &- \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \frac{\nu \cdot \operatorname{sh} \mu\pi \operatorname{ch} \mu\pi + \mu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \left. \right] \approx \frac{(\nu\pi - 3) P}{2\pi R(1+\chi_1)}; \end{aligned}$$

$$M_{\kappa \max} = \frac{PR}{2\pi(1+\chi_1)} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} \times \right. \\ \times \left[ 1 + \pi \sqrt{\alpha+1} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right] \Bigg\} \approx \\ \approx \frac{PR}{2\pi(1+\chi_1)} \left( \frac{3}{2} - \frac{\mu\pi}{\sqrt{\alpha+1}} \right);$$

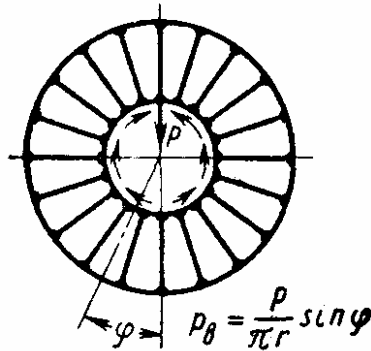


Рис. 53

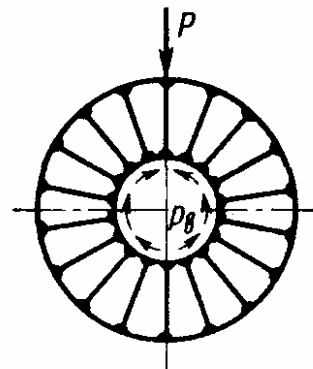


Рис. 54

$$M_{\theta}(\pi) = \frac{Pr}{2\pi(1+\chi_1)} \left\{ \frac{3}{2} \chi_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha+1} \left( 1 + \pi \sqrt{\alpha+1} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right) \right\} \approx \\ \approx \frac{Pr}{2\pi(1+\chi_1)} \left( \frac{3\chi_1}{2} + \frac{\mu\pi}{\sqrt{\alpha+1}} \right).$$

Сосредоточенная радиальная сила  $P$ , действующая на наружное кольцо, уравновешивается распределенной нагрузкой  $p_{\theta} = \frac{P}{\pi r} \cdot \sin \varphi$  по внутреннему кольцу (рис. 54). Усилия определяют по формулам (72) и (75), а постоянные — по формулам (73) и (74), где

$$C = \frac{P}{\pi R(1+\chi_1)}; \quad C_0 = \frac{P}{2\pi R \left( 1 + \frac{1}{\chi_1} \right)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1};$$

$$A = - \frac{PR^3}{8\pi(1+\chi_1) E_{\kappa} J_{\kappa}}.$$

Максимальные значения:

$$\begin{aligned}
 X(\pi) &= \frac{P}{2\pi R \left(1 + \frac{1}{\chi_1}\right)} \left[ \frac{\alpha}{\alpha + 1} - \frac{2}{\chi_1} - \right. \\
 &\quad \left. - \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 1}} \cdot \frac{\nu \operatorname{sh} \mu\pi \operatorname{ch} \mu\pi + \mu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right] \approx \\
 &\quad \approx - \frac{(\nu\pi - 1) P}{2\pi R \left(1 + \frac{1}{\chi_1}\right)}; \\
 M_n(\pi) &= \frac{PR}{2\pi(1 + \chi_1)} \left[ \frac{3}{2} + \frac{\chi_1}{\alpha + 1} \times \right. \\
 &\quad \times \left( 1 + \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 1}} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right) \Big] \approx \\
 &\quad \approx \frac{PR}{2\pi(1 + \chi_1)} \left( \frac{3}{2} + \frac{\mu\pi \cdot \chi_1}{\sqrt{\alpha + 1}} \right); \\
 M_\theta(\pi) &= \frac{Pr\chi_1}{2\pi(1 + \chi_1)} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha + 1} \times \right. \\
 &\quad \times \left( 1 + \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + 1}} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right) \Big] \approx \\
 &\quad \approx \frac{Pr}{2\pi \left(1 + \frac{1}{\chi_1}\right)} \left( \frac{3}{2} - \frac{\mu\pi}{\sqrt{\alpha + 1}} \right).
 \end{aligned}$$

Сосредоточенная радиальная сила  $P$  действует на внутреннее кольцо и уравновешивается распределенной нагрузкой  $p_n = \frac{P}{\pi R} \cdot \sin \varphi$  по наружному кольцу (рис. 55). Тогда

$$\begin{aligned}
 C &= - \frac{P}{\pi R \left(1 + \frac{1}{\chi_1}\right)}; \quad C_0 = - \frac{P}{2\pi R (1 + \chi_1)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1}; \\
 A &= - \frac{PR^3}{8\pi (1 + \chi_1) E_n J_n}.
 \end{aligned}$$

Максимальные значения:

$$X(\pi) = -\frac{P}{2\pi R(1+\chi_1)} \left[ \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2\chi_1 - \right. \\ \left. - \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \frac{\nu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi + \mu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right] \approx \\ \approx \frac{(2\chi_1 + \nu\pi)}{2\pi R(1+\chi_1)} P;$$

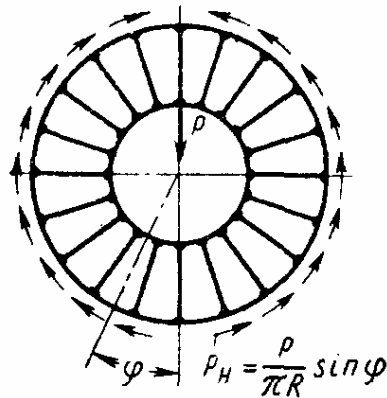


Рис. 55

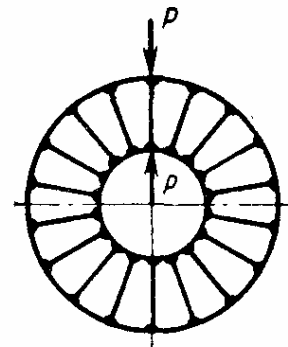


Рис. 56

$$M_H(\pi) = \frac{PR}{2\pi(1+\chi_1)} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha+1} \left( 1 + \pi \sqrt{\alpha+1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right) \right] \approx \\ \approx \frac{PR}{2\pi(1+\chi_1)} \left( \frac{3}{2} - \frac{\mu\pi}{\sqrt{\alpha+1}} \right);$$

$$M_\theta(\pi) = \frac{Pr}{2\pi(1+\chi_1)} \left[ -\frac{1}{2} \chi_1 + \frac{1}{\alpha+1} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \pi \sqrt{\alpha+1} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right) \right] \approx \\ \approx \frac{Pr}{2\pi(1+\chi_1)} \left( \frac{3}{2} \chi_1 + \frac{\mu\pi}{\sqrt{\alpha+1}} \right).$$

Сосредоточенные радиальные, взаимно уравновешенные силы действуют на наружное и внутреннее кольца (рис. 56). Тогда

$$C = 0; C_0 = \frac{P}{2\pi R} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1}; A = 0.$$

Максимальные значения:

$$X(\pi) = \frac{P}{2\pi R} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1} \times \\ \times \left[ 1 - \pi \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha}} \cdot \frac{\nu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi + \mu \sin \nu\pi \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right] \approx \\ \approx - \frac{\nu\pi - 1}{2\pi R} P;$$

$$M_n(\pi) = \frac{PR}{2\pi(\alpha + 1)} \times \\ \times \left[ 1 + \pi \sqrt{\alpha + 1} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right] \approx \\ \approx \frac{PR \cdot \mu}{2\sqrt{\alpha + 1}};$$

$$M_\theta(\pi) = - \frac{Pr}{2\pi(\alpha + 1)} \times \\ \times \left[ 1 + \pi \sqrt{\alpha + 1} \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \operatorname{ch} \mu\pi - \nu \sin \nu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \right] \approx \\ \approx - \frac{Pr \cdot \mu}{\sqrt{2}(\alpha + 1)}.$$

Распределенные по обоим кольцам нагрузки  $p_n = \frac{P}{\pi R} \sin \varphi$ ;  $p_\theta = - \frac{P}{\pi r} \sin \varphi$  взаимно уравновешены (рис. 57). Усилия по спицам  $X = \frac{P}{\pi R} \cos \varphi$ .

Изгибающие моменты в обоих кольцах не возникают. Кольца смещаются только как абсолютно жесткие.

В приведенных решениях не даются выражения для коэффициентов  $A_4$  и  $B_4$ , выражающих смещения колец как абсолютно жестких тел. В случае надобности они могут быть найдены по формулам

$$A_4 = - \left( \frac{\pi^2}{3} + \frac{11}{2} \right) A + \frac{2C_0 R^4}{E_n J_n} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (A_8 \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi + A_{10} \cdot \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi) \right]; \\ B_4 = A_4 + \frac{lC}{E_c F_c}.$$

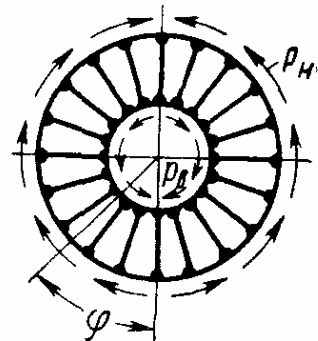


Рис. 57



Наружное кольцо системы нагружено второй элементарной нагрузкой (рис. 58). В этом случае функция  $X$  нечетная:

$$X = C_5 \varphi + C_9 \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + C_{11} \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi + C \cdot \sin \varphi, \quad (76)$$

а функции смещений  $v_i(\varphi)$  — четные:

$$\left. \begin{aligned} v_H &= A_0 + A_3 \cos \varphi + A_5 \varphi^2 + A_7 \varphi \sin \varphi + A_9 \operatorname{sh} \mu \varphi \cdot \sin \nu \varphi + \\ &\quad + A_{11} \operatorname{ch} \mu \varphi \cdot \cos \nu \varphi + A \varphi^2 \cos \varphi; \\ v_\theta &= B_0 + B_3 \cos \varphi + B_5 \varphi^2 + B_7 \varphi \sin \varphi + B_9 \operatorname{sh} \mu \varphi \sin \nu \varphi + \\ &\quad + B_{11} \operatorname{ch} \mu \varphi \cos \nu \varphi + B \varphi^2 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

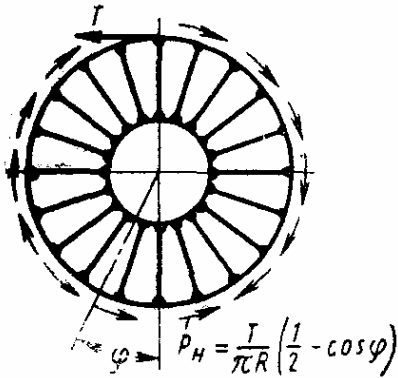


Рис. 58

Из уравнения (62) находят постоянные  $C$  и  $C_5$ :

$$C = - \frac{T}{\pi R \left( 1 + \frac{1}{\chi_1} \right)};$$

$$C_5 = \frac{T}{2\pi R \left( 1 + \frac{1}{\chi_1} \right)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

Постоянные  $C_9$  и  $C_{11}$  находят из соотношений  $X'(\pi) = 0$ ;

$$\int_0^\pi X R \sin \varphi d\varphi = 0:$$

$$\left. \begin{aligned} C_9 &= - \frac{\pi C_5}{V \alpha} \cdot \frac{V \alpha \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi + \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi}{\operatorname{sh}^2 \mu \pi + \sin^2 \nu \pi} \approx \\ &\approx - \frac{\pi C_5}{V \alpha} \cdot \frac{V \alpha \cdot \sin \nu \pi + \cos \nu \pi}{\operatorname{sh} \mu \pi}; \\ C_{11} &= - \frac{\pi C_5}{V \alpha} \cdot \frac{V \alpha \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi - \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi}{\operatorname{sh}^2 \mu \pi + \sin^2 \nu \pi} \approx \\ &\approx - \frac{\pi C_5}{V \alpha} \cdot \frac{V \alpha \cos \nu \pi - \sin \nu \pi}{\operatorname{sh} \mu \pi}. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{T R^3}{8\pi (1 + \chi_1) E_H J_H}; \\ A_5 &= - \frac{T R^3}{4\pi (1 + \chi_1) E_H J_H} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left( 1 + \frac{\chi_1}{\chi_2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

$$\begin{aligned}
 A_9 &= \frac{R^4}{E_H J_H} \cdot \frac{\pi C_5}{\sqrt{\alpha}} \times \\
 &\quad \sqrt{\alpha + 1} (\nu \cdot \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi + \mu \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi) - \\
 &\quad \times \frac{-2 (\nu \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi - \mu \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi)}{\alpha \sqrt{\alpha + 1} (\operatorname{sh}^2 \mu \pi + \sin^2 \nu \pi)}; \\
 A_{11} &= \frac{R^4}{E_H J_H} \cdot \frac{\pi C_5}{\sqrt{\alpha}} \times \\
 &\quad \sqrt{\alpha + 1} (\nu \cdot \operatorname{sh} \mu \pi \cdot \cos \nu \pi - \mu \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi) - \\
 &\quad \times \frac{-2 (\nu \cdot \operatorname{sh} \mu \pi \cos \nu \pi + \mu \operatorname{ch} \mu \pi \cdot \sin \nu \pi)}{\alpha \sqrt{\alpha + 1} (\operatorname{sh}^2 \mu \pi + \sin^2 \nu \pi)}
 \end{aligned} \tag{79}$$

Из условия  $w_H(\pi) = 0$  определяют постоянную

$$A_7 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{TR^3}{2\pi(1 + \chi_1) E_H J_H}$$

Постоянные  $B_i$  определяют по формулам

$$B = A; \quad B_{9, 11} = -\frac{1}{\chi_1} A_{9, 11};$$

$$B_7 = A_7; \quad B_5 = A_5 + \frac{1C_5}{2E_c F_c}. \tag{80}$$

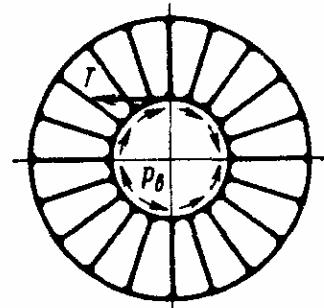


Рис. 59

На внутреннее кольцо действует вторая элементарная нагрузка (рис. 59). В этом случае функцию  $X$  вычисляют по формуле (76), а функцию  $v_i(\varphi)$  — по формуле (77), причем

$$C = \frac{T}{\pi R \left(1 + \frac{1}{\chi_1}\right)}; \quad C_5 = -\frac{T}{2\pi(1 + \chi_1) R} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

Постоянные  $C_9$  и  $C_{11}$  вычисляют по формулам (78), а постоянные  $A_9$  и  $A_{11}$  — по формулам (79). Далее

$$A = \frac{TR^3}{8\pi(1 + \chi_1) E_H J_H}; \quad A_5 = -\frac{TR^3}{4\pi(1 + \chi_1) E_H J_H} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

На наружное кольцо действует третья элементарная нагрузка (рис. 60). В этой задаче функция  $X$  нечетная, ее можно вычислить по формуле (76), а функции  $v_i(\varphi)$  — четные и определяют по формулам (77).

Произвольные постоянные

$$C = 0; \quad C_5 = \frac{L}{2\pi \left(1 + \frac{1}{\chi_1}\right) R^2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1};$$

$$C_9 = -\pi C_5 \frac{\operatorname{ch} \mu\pi \sin \nu\pi - \sqrt{\alpha} \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \approx$$

$$\approx -\pi C_5 \frac{\sin \nu\pi - \sqrt{\alpha} \cos \nu\pi}{\operatorname{sh} \mu\pi};$$

$$C_{11} = -\pi C_5 \frac{\operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi + \sqrt{\alpha} \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi}{\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi} \approx$$

$$\approx -\pi C_5 \frac{\cos \nu\pi + \sqrt{\alpha} \sin \nu\pi}{\operatorname{sh} \mu\pi};$$

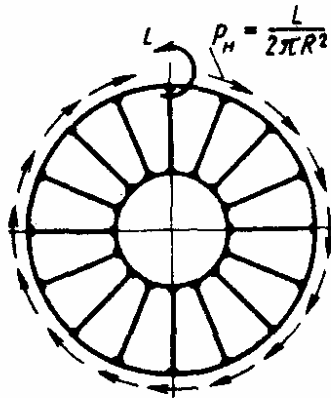


Рис. 60

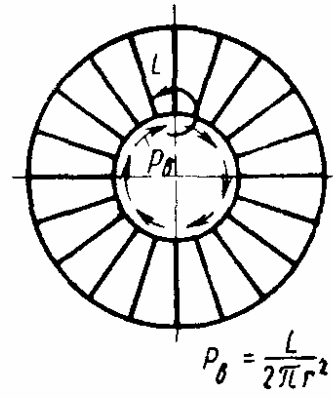


Рис. 61

$$A = B = 0; \quad A_5 = -\frac{LR^2}{4\pi(1 + \chi_1) E_H J_H} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left(1 + \frac{\chi_1}{\chi_2}\right);$$

$$A_7 = -\frac{LR^2}{2\pi(1 + \chi_1) E_H J_H};$$

$$A_9 = -\frac{\pi C_5 R^4}{E_H J_H} \times$$

$$\frac{\sqrt{\alpha + 1} (\nu \cdot \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi + \mu \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi) -}{\alpha \sqrt{\alpha + 1} (\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi)} \times$$

$$A_{11} = \frac{\pi C_5 R^4}{E_H J_H} \times$$

$$\frac{\sqrt{\alpha + 1} (\nu \operatorname{ch} \mu\pi \cdot \sin \nu\pi + \mu \operatorname{sh} \mu\pi \cdot \cos \nu\pi) -}{\alpha \sqrt{\alpha + 1} (\operatorname{sh}^2 \mu\pi + \sin^2 \nu\pi)} \times$$

Постоянные  $B_i$  определяют по формулам (80).

Внутреннее кольцо системы загружено третьей элементарной нагрузкой (рис. 61). В этом случае функции  $X$  и  $v_i$  определяют также по формулам (76) и (77), где постоянные

$$C = 0; \quad C_8 = \frac{L}{2\pi(1 + \chi_1)rR} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

Постоянные  $C_9$  и  $C_{11}$  вычисляются по формуле (78), а постоянные  $A_9$  и  $A_{11}$  — по формуле (79) и постоянные

$$A_5 = \frac{LR^3}{4\pi(1 + \chi_1)rE_n J_n} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 1};$$

$$A_7 = \frac{LR^3}{2\pi(1 + \chi_1)rE_n J_n}; \quad A = 0.$$

Другие виды нагружения можно получить комбинацией рассмотренных случаев.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Астахов М. Ф., Караваев А. В., Макаров С. Я., Суздальцев Я. Я. Справочная книга по расчету самолета на прочность. М., Оборонгиз, 1954.
2. Биргер И. А. Крупные пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961.
3. Биргер И. А. Расчет колец на прочность и колебания. Институт им. П. И. Баранова. Труды № 304. М., Оборонгиз, 1957.
4. Бицено К. Б. и Граммель Р. Техническая динамика. Т. I. М., ГИТТЛ, 1950.
5. Вайнберг Д. В. Кривой брус в упругой среде. «Прикладная математика и механика». Вып. 4, 1939.
6. Вальтер П. А. Об изгибе брусев двойкой кривизны. Труды ЦАГИ. Вып. 23, 1926.
7. Вопросы прочности цилиндрических оболочек. Сб. переводных статей под ред. В. М. Даревского. М., Оборонгиз, 1960.
8. Григорьев Ю. П. Формулы и таблицы для расчета тонкостенных круговых колец. Сб. «Расчет пространственных конструкций». Т. I. М., Госстройиздат, 1961.
9. Дацковский В. Определение напряжений в ободе махового колеса. Труды Одесского института инженеров водного транспорта. Вып. 4. М., «Водный транспорт», 1938.
10. Инженерные сооружения. Справочник. Т. I. Госстройиздат, 1950.
11. Кац А. М. О распределении напряжений в спицах и ободе шкивов и зубчатых колес. Труды Ленинградского индустриального института, № 6, Л., 1937.
12. Коробов А. П. Расчет колес с небольшим числом спиц под действием сил, лежащих в их плоскости. Известия Новочеркасского индустриального института. Т. IX. 1941.
13. Лурье А. И. О малых деформациях криволинейных стержней. Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, раздел физ.-мат. наук, № 3, Л., 1941.
14. «Машиностроение». Энциклопедический справочник. Т. I. Кн. 2. Машгиз, 1948.

15. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля. Т. 2. Л., Судпромгиз, 1962.
  16. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Калинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. I. М., Машгиз, 1956.
  17. Рабинович А. Л., Федотов Н. М. Определение усилий в элементах шкива. Инженерный сборник. Т. III. Вып. 2. Изд-во АН СССР, 1947.
  18. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений, расчетно-теоретический. Под ред. А. А. Уманского. М., Госстройиздат, 1960.
  19. Справочник машиностроителя. Т. 3. М., Машгиз, 1951.
  20. Шиманский Ю. А. Строительная механика подводных лодок. Л., Судпромгиз, 1948.
  21. Шталева Б. А. Формулы для расчета колец. «Вестник машиностроения», 1956, № 6.
  22. Попов А. А. Новые таблицы для перемножения эпюр в брус большой кривизны. «Вестник инженеров и техников», № 3, 1953.
-

## Глава 12

# ТОНКОСТЕННЫЕ И КРИВЫЕ СТЕРЖНИ

## ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

### Общие сведения

Тонкостенными стержнями называют цилиндрические или призматические оболочки, три основных измерения которых выражаются величинами различных порядков: длина во много раз превосходит ширину (или высоту) поперечного сечения, а последняя — во много раз больше толщины стенки. К этому типу стержней относят, например, стержни углового, корытного, таврового, двутаврового сечений (рис. 1).

В общем случае нагружения тонкостенного стержня происходит *депланация* (коробление, искажение) его поперечных сечений — се-

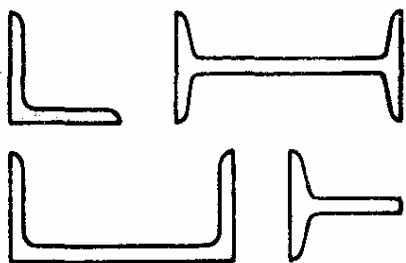


Рис. 1

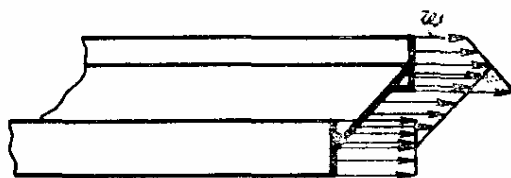


Рис. 2

чения, плоские до приложения нагрузки, теряют свою первоначально плоскую форму. Пусть  $w$  — составляющая вектора перемещения произвольной точки поперечного сечения, направленная параллельно продольной оси  $z$  стержня. При депланации концы составляющих  $w$  располагаются не на плоскости, а на некоторой криволинейной поверхности (рис. 2). Исключение представляют случаи, когда векторы внешних сил проходят через *центры изгиба* (*центры кручения*, *центры жесткости*) поперечных сечений (определение координат центра изгиба см. ниже); в этих случаях сечения остаются плоскими и после приложения нагрузки, а нормальные и касательные напряжения определяются формулами, выведенными для обычных стержней сплошного поперечного сечения.

Произвольную поперечную нагрузку всегда можно привести к линии центров изгиба (*оси изгиба*, *оси кручения*, *оси жесткости*); при этом

образуется система присоединенных пар, скручивающих стержень. Напряжения, возникающие от приложенных вдоль оси изгиба внешних сил, определяют по формулам, данным для стержней сплошного сечения. При кручении, вызываемом присоединенными парами, как правило, возникают не только касательные, но и нормальные напряжения; их определяют указанными ниже способами.

Явление депланации с особой отчетливостью наблюдается при свободном (чистом) кручении тонкостенного стержня. Если свободный тонкостенный стержень подвергают действию приложенных по концам скручивающих моментов  $M$  и  $\varphi$  — угол поворота произвольного сечения, то перемещения  $\omega$  точек сечения в направлении оси стержня определяются выражением

$$\omega(z, s) = -\varphi' \omega, \quad (1)$$

в котором

$$\varphi' = \frac{M}{GJ_k} \quad (2)$$

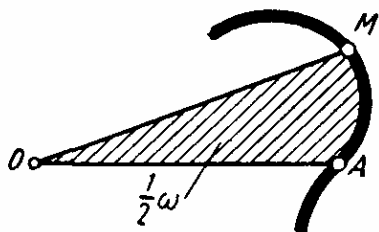


Рис. 3

— погонный угол закручивания, причем произведение  $GJ_k$  представляет собой жесткость при свободном кручении. Мно-

житель  $\omega$  — специальная координата, определяющая положение текущей точки на средней линии сечения (см. точку  $M$  на рис. 3). Эту координату называют *секториальной площадью*, она равна удвоенной площади сектора, образованного дугой  $AM$  (отсчитываемой от некоторого начала  $A$ ) и радиусами-векторами  $OA$  и  $OM$ , проведенными из произвольного полюса  $O$  в начало и конец дуги. Секториальная площадь считается положительной, если она описана подвижным радиусом-вектором против хода часовой стрелки.

Следовательно, система перемещений  $\omega$ , характеризующая депланацию сечения, определена с точностью до трех чисел — двух координат полюса  $O$  и дуговой координаты точки  $A$ . Способ определения этих чисел приведен ниже.

### Стесненное кручение под действием скручивающих моментов

В большинстве практических случаев депланация не может свободно развиваться. Она может быть стеснена депланационными связями (см. заделку левого конца стержня на рис. 4, а) или самим способом приложения скручивающих моментов (рис. 4, б; здесь среднее сечение стержня должно оставаться плоским вследствие симметрии системы). С удалением от источника стеснения депланация развивается все более свободно.

В технической теории стесненного кручения принимают, что для перемещений  $\omega$  остается справедливой зависимость (1), в которой, однако, производная  $\varphi'$ , служащая масштабом эпюры перемещений  $\omega$ , становится функцией координаты  $z$ .

Стеснение депланации приводит к появлению системы нормальных напряжений

$$\sigma_\omega = E \frac{\partial \omega}{\partial z} = -E \varphi'' \omega, \quad (3)$$

которые изменяются вдоль оси стержня (пропорционально производной  $\varphi''$ ) и по контуру сечения (пропорционально секториальной площади  $\omega$ ). Система нормальных напряжений  $\sigma_\omega$  должна быть *самоуравновешенной*, т. е. удовлетворять условиям

$$\int_{(F)} \sigma_\omega x dF = 0; \quad \int_{(F)} \sigma_\omega y dF = 0; \quad \int_{(F)} \sigma_\omega dF = 0, \quad (4)$$

где  $dF = hds$  — элемент площади поперечного сечения;  $h$  — толщина стенки;  $x, y$  — декартовы координаты текущей точки средней линии поперечного сечения.

Условия (4), выражающие отсутствие изгибающих моментов и продольной силы в поперечном сечении, устраняют произвол в выборе положения полюса и начала отсчета дуг. Из первых двух условий (4) следуют формулы, определяющие координаты полюса (центра изгиба) в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения:

$$a_x = -\frac{1}{J_x} \int_{(F)} \bar{\omega} y dF; \quad (5)$$

$$a_y = \frac{1}{J_y} \int_{(F)} \bar{\omega} x dF, \quad (6)$$

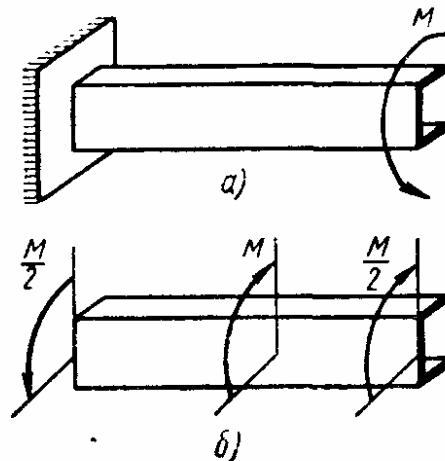


Рис. 4

причем секториальные площади  $\bar{\omega}$  определяются при любом полюсе и отсчитываются от любого начала по дуге;  $J_x$  и  $J_y$  — главные центральные моменты инерции поперечного сечения.

Для сечений, имеющих две оси симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести поперечного сечения. Если сечение имеет одну ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси, но не совпадает с центром тяжести.

Третье из условий (4) приводит к соотношению

$$\int_F \omega dF = 0, \quad (7)$$

из которого может быть определено положение начала отсчета дуг (положение нулевой секториальной точки); в соотношении (7) секториальные площади определяются при полюсе в центре изгиба. Секториальную площадь, определяемую при полюсе в центре изгиба и начале отсчета дуг в нулевой секториальной точке, называют *главной секториальной площадью*. Если  $\bar{\omega} = \bar{\omega}(s)$  — секториальная площадь, определяемая при произвольном выборе начала отсчета дуг, то главную секториальную площадь находят из соотношения

$$\omega = \bar{\omega} - \frac{1}{F} \int_{(F)} \bar{\omega} dF. \quad (8)$$



Пользование соотношением (8) избавляет от необходимости специального вычисления нулевой секториальной точки.

Эпюры главных секториальных площадей и координаты центра изгиба для некоторых сечений приведены в табл. 1.

Нормальным напряжениям  $\sigma_\omega$  сопутствуют касательные напряжения  $\tau_\omega$  (рис. 5, а):

$$\tau_\omega = E\varphi''' S_\omega \quad (9)$$

где

$$S_\omega = \int_0^s \omega dF. \quad (10)$$

Величина  $S_\omega$  зависит от верхнего предела — дуговой координаты  $s$  текущей точки средней линии поперечного сечения — и называется *секториальным статическим моментом*. При определении секториального статического момента начало отсчета дуг  $s$  принимают у одного из краев сечения. Согласно соотношению (7) секториальный статический момент всего сечения равен нулю.

Система касательных напряжений  $\tau_\omega$  статически эквивалентна крутящему моменту

$$M_\omega = -EJ_\omega \varphi''', \quad (11)$$

который представляет собой часть полного крутящего момента. В выражении (11)

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF \quad (12)$$

— специальная геометрическая характеристика сечения, называемая *секториальным моментом инерции*. Произведение  $EJ_\omega$  называют *секториальной жесткостью*. При вычислении секториального момента инерции за полюс принимают центр изгиба.

Эпюры секториальных статических моментов  $S_\omega$  и секториальные моменты инерции приведены в табл. 2.

Другой частью полного крутящего момента  $M_*$  является момент свободного кручения; согласно формуле (2)

$$M_* = GJ_\kappa \varphi'. \quad (13)$$

Крутящему моменту  $M_*$  соответствуют касательные напряжения  $\tau_*$ , развивающиеся по законам свободного кручения (рис. 5, б); максимальное касательное напряжение

$$\tau_* = \frac{M_*}{J_\kappa} \cdot \frac{h}{2}. \quad (14)$$

Из выражений (11) и (13) следует дифференциальное уравнение

$$\varphi''' - \frac{GJ_\kappa}{EJ_\omega} \varphi' = - \frac{M}{EJ_\omega} \quad (15)$$

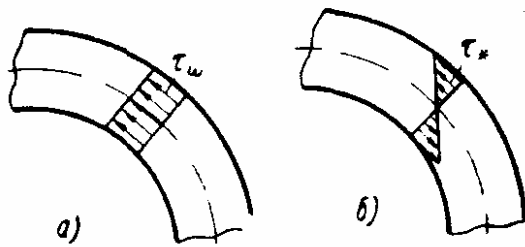
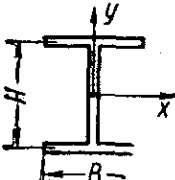
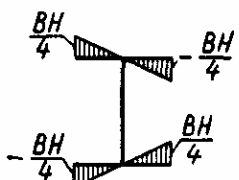
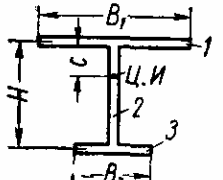
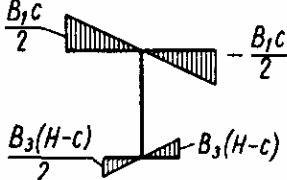
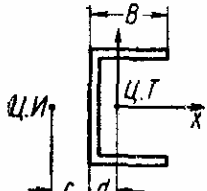
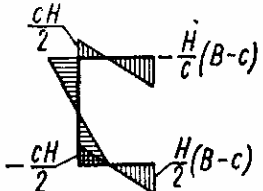
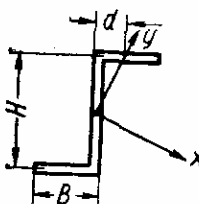
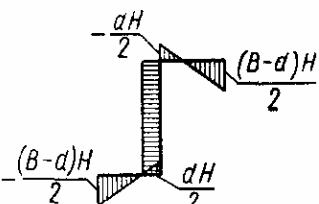
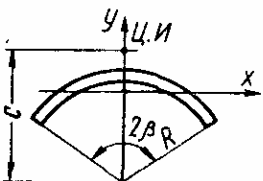
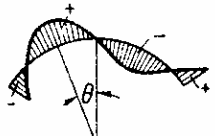
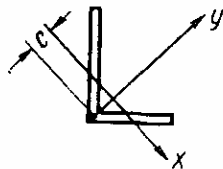

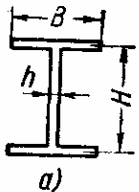
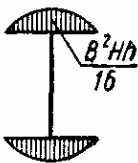
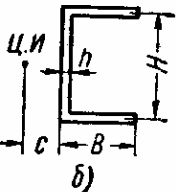
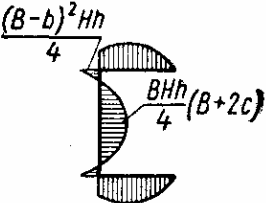
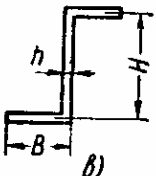

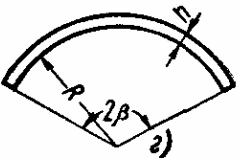
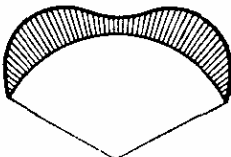


Рис. 5

## 1. Эпюры главных секториальных площадей и координаты центра изгиба

Сечение	Эпюра главных секториальных площадей	Координаты центра изгиба
		$a_x = 0;$ $a_y = 0$
		$c = \frac{J_{3y}}{J_y} H$
		$c = \frac{J_{1x}}{J_x} d$
		$a_x = 0;$ $a_y = 0$
		$c = \frac{2R (\sin \beta - \beta \cos \beta)}{\beta - \sin \beta \cos \beta}$
		$a_y = -c$

2. Эпюры секториальных статических моментов  
и секториальные моменты инерции

Сечение	Эпюра секториальных статических моментов	Секториальный момент инерции
 <p>a)</p>		$J_{\omega} = \frac{B^3 H^2 h}{24}$
 <p>б)</p>		$J_{\omega} = \frac{1}{6} (B - 3c) B^2 H^2 h + c^2 J_x$
 <p>в)</p>		$J_{\omega} = \frac{B^3 H^2 h}{12} \cdot \frac{B + 2H}{H + 2B}$
 <p>г)</p>		$J_{\omega} = \frac{2}{3} R^4 h \left[ \beta^3 - \frac{6 (\sin \beta - \beta \cos \beta)^2}{\beta - \sin \beta \cos \beta} \right]$

Примечание. При одинаковых ширинах полок и одинаковых высотах сечений а — в, наибольшей секториальной жесткостью обладает сечение в (в 2,45 раз большей, чем сечение а, и в 1,44 раз большей, чем сечение б).

Наименьших нормальных напряжений достигают при следующих пропорциях поперечного сечения:

для сечения а:  $F_1 = F_2 = \frac{1}{3} F$ ;

для сечения б:  $F_1 = 0,232F$ ;  $F_2 = 0,536F$ ;

для сечения в:  $F_1 = 0,188F$ ;  $F_2 = 0,624F$ ;

здесь  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  — соответственно площади всего сечения, сечения полки и стенки.

или

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{m}{EJ_{\omega}}, \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \frac{GJ_{\kappa}}{EJ_{\omega}}; \\ m &= -\frac{dM}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Функция  $m = m(z)$  представляет собой интенсивность моментов внешних скручивающих пар.

Четыре постоянные интегрирования, возникающие при решении дифференциального уравнения (15), определяются граничными условиями, причем на каждом конце стержня имеются два условия, зависящих от характера наложенных связей:

в концевых сечениях со свободной деформацией  $\sigma = 0$  и поэтому  $\varphi'' = 0$ ; в концевых сечениях, лишенных возможности деформироваться,  $\omega = 0$  и, следовательно,  $\varphi' = 0$ ; в концевых сечениях со связью, препятствующей повороту вокруг оси  $z$ , угол  $\varphi = 0$ ; в концевых сечениях, свободных от такой связи,  $M = 0$  и, следовательно,  $\varphi''' - k^2 \varphi' = 0$ ; если в таких сечениях приложен заданный крутящий момент  $M$ , то должно выполняться равенство  $\varphi''' - k^2 \varphi' = -\frac{M}{EJ_{\omega}}$ .

Варианты сочетания граничных условий в зависимости от опорных устройств приведены в табл. 3.

Выражения  $\varphi = \varphi(z)$ , получаемые интегрированием дифференциального уравнения (15), для некоторых схем стержней даны в табл. 4. По этим выражениям могут быть найдены нормальные напряжения [формула (3)], касательные напряжения стесненного кручения [формула (9)], а также касательные напряжения свободного кручения [формула (14)].

Расчет тонкостенных стержней иногда строят на понятии о *бимоменте*, который определяется выражениями

$$B_{\omega} = \int_{(F)} \sigma \omega \, dF = -EJ_{\omega} \varphi'' \quad (18)$$

и является функцией координаты сечения  $z$ . При этом дифференциальное уравнение (15) записывают в виде

$$B_{\omega}'' - k^2 B_{\omega} = m. \quad (19)$$

Для определения двух постоянных интегрирования, входящих в общее решение, используют граничные условия, связанные с деформационными свойствами в концевых сечениях (по одному условию на каждом конце):

при свободной деформации  $B_{\omega} = 0$ ; при отсутствии деформации  $B_{\omega}' = M$ .

После определения  $B_{\omega}$  в функции координаты сечения  $z$  находят момент стесненного кручения

$$M_{\omega} = B_{\omega}' \quad (20)$$

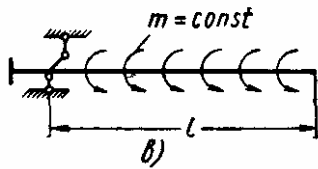
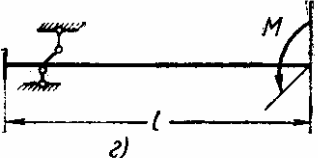
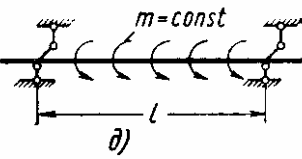
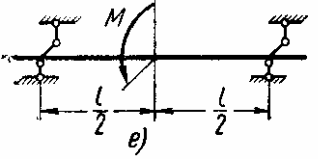
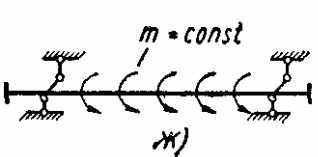
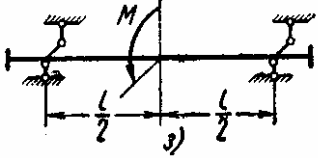
## 3. Граничные условия в зависимости от опорных устройств

Характеристика закрепления	Схема	Граничные условия
Полная заделка: поворот и деформация невозможны		$\psi = 0;$ $\psi' = 0$
Поворот невозможен; свободная деформация		$\psi = 0;$ $\psi'' = 0$
Свободный поворот; деформация невозможна		$\psi' = 0;$ $\psi''' = 0$
Свободный поворот, деформация невозможна, к торцу приложен крутящий момент		$\psi' = 0;$ $\psi''' = -\frac{M}{EJ_{\omega}}$
Свободный конец		$\psi'' = 0;$ $\psi''' = k^2\psi'$
Свободный конец, к которому приложен крутящий момент		$\psi'' = 0;$ $\psi''' - k^2\psi' = -\frac{M}{EJ_{\omega}}$

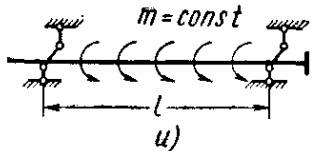
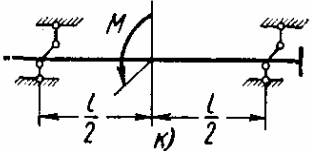
## 4. Решение уравнения стесненного кручения для некоторых стержней

Тип стержня и нагрузка	Зависимость
	$\psi = \frac{m}{k^4 EJ_{\omega}} \left[ k^2 z \left( l - \frac{z}{2} \right) + \operatorname{ch} \frac{k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} - 1 \right]$
	$\psi = \frac{M_z}{k^3 EJ_{\omega}}$

Продолжение табл. 4

Тип стержня и нагрузка	Зависимость
	$\varphi = \frac{m}{k^4 E J_{\omega} \operatorname{ch} kl} \left[ k^2 z \left( l - \frac{z}{2} \operatorname{ch} kl \right) kl + \operatorname{ch} kz - 1 - kl \operatorname{sh} kl + kl \operatorname{sh} k(l - z) \right]$
	$\varphi = \frac{M}{k^3 E J_{\omega} \operatorname{ch} kl} \left[ kz \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl + \operatorname{sh} k(l - z) \right]$
	$\varphi = \frac{m}{k^4 E J_{\omega}} \left[ \frac{k^2 z (l - z)}{2} + \frac{\operatorname{ch} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} + 1 \right]$
	$\varphi_1 = \frac{M}{2k^3 E J_{\omega}} \left( kz - \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right)$
	$\varphi = \frac{m}{k^4 E J_{\omega}} \left[ \frac{k^2 z (l - z)}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{kz}{2} \operatorname{sh} \frac{k(l - z)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right]$
	$\varphi = \frac{M}{k^3 E J_{\omega} \operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \left[ \frac{kz}{2} \operatorname{sh} \frac{kl}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{kz}{2} - \operatorname{sh} \frac{kz}{2} \operatorname{sh} \frac{k(l - z)}{2} \right]$

Продолжение табл. 4

Тип стержня и нагрузка	Зависимость
	$\varphi = \frac{m}{k^4 EJ_\omega} \left[ \operatorname{ch} kz - 1 + k^2 z \left( l - \frac{z}{2} \right) - \frac{1 + kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl - \frac{k^2 l^2}{2}}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz + \frac{\operatorname{ch} kl - 1 - \frac{k^2 l^2}{2} \operatorname{ch} kl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} kz \right]$
	$\varphi_1 = \frac{M}{k^3 EJ_\omega} \left( kz - \frac{\frac{kl}{2} \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} kz - \frac{\frac{kl}{2} \operatorname{ch} \frac{kl}{2} - \operatorname{sh} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz \right)$

и момент свободного кручения

$$M_* = M - M_\omega. \quad (21)$$

В табл. 5 даны выражения  $B_\omega$ ,  $M_\omega$  и  $M_*$  для случаев закрепления и нагружения тонкостенных стержней, приведенных в табл. 4.

Нормальные напряжения  $\sigma_\omega$  определяют через бимомент

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega, \quad (22)$$

а касательные напряжения стесненного кручения — через момент стесненного кручения  $M_\omega$ :

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega}{J_\omega h} \quad (23)$$

Касательные напряжения свободного кручения определяют по формуле (14), причем крутящий момент свободного кручения находят по формуле (21).

#### Стесненное кручение при действии внешних бимоментов и продольной нагрузки

Явление стесненного кручения может быть вызвано не только крутящими парами, но и действием внешних бимоментов или внешней нагрузки, направленной параллельно оси  $z$  стержня.

Внешние бимоменты возникают в тех случаях, когда к тонкостенному стержню приложены изгибающие пары, плоскость действия которых

5. Бимоменты  $B_{\omega}$ , моменты стесненного кручения  $M_{\omega}$   
и моменты свободного кручения  $M_*$

Схема в табл. 4	Формулы
а	$B_{\omega} = \frac{m}{k^2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right]; \quad M_{\omega} = \frac{m}{k \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \operatorname{sh} k \left( \frac{l}{2} - z \right);$ $M_* = m \left[ (l - z) - \frac{\operatorname{sh} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{k \operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right]$
б	$B_{\omega} = 0; \quad M_{\omega} = 0; \quad M_* = M$
в	$B_{\omega} = -\frac{m}{k^2 \operatorname{ch} kl} [kl \operatorname{sh} k(l - z) - \operatorname{ch} kl + \operatorname{ch} kz];$ $M_{\omega} = -\frac{m}{k \operatorname{ch} kl} [\operatorname{sh} kz - kl \operatorname{ch} k(l - z)];$ $M_* = m \left[ l - z + \frac{\operatorname{sh} kz - kl \operatorname{ch} k(l - z)}{k \operatorname{ch} kl} \right]$
г	$B_{\omega} = -\frac{M}{k} \frac{\operatorname{sh} k(l - z)}{\operatorname{ch} kl}; \quad M_{\omega} = M \frac{\operatorname{ch} k(l - z)}{\operatorname{ch} kl};$ $M_* = M \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} k(l - z)}{\operatorname{ch} kl} \right]$
д	$B_{\omega} = \frac{m}{k^2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right];$ $M_{\omega} = \frac{m}{k} \frac{\operatorname{sh} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}};$ $M_* = ml \left[ \frac{1}{2} - \frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right]$



Продолжение табл. 5

Схема в табл. 4	Формулы
e	$B_{\omega}(1) = \frac{M}{2k} \cdot \frac{\text{sh } kz}{\text{ch } \frac{kl}{2}}; \quad M_{\omega}(1) = \frac{M}{2} \cdot \frac{\text{ch } kz}{\text{ch } \frac{kl}{2}};$ $M^*(1) = \frac{M}{2} \left( 1 - \frac{\text{ch } kz}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right)$
ж	$B_{\omega} = \frac{m}{k^2} \left[ 1 - \frac{kl \text{ ch } k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{2 \text{ sh } \frac{kl}{2}} \right]; \quad M_{\omega} = \frac{ml}{2 \text{ sh } \frac{kl}{2}} \text{ sh } k \left( \frac{l}{2} - z \right);$ $M^* = \frac{ml}{2} \left[ 1 - \frac{2z}{l} - \frac{\text{sh } k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\text{sh } \frac{kl}{2}} \right]$
з	$B_{\omega}(1) = \frac{M}{2k} \cdot \frac{\text{ch } kz - \text{ch } k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\text{sh } \frac{kl}{2}};$ $M_{\omega}(1) = \frac{M}{2} \cdot \frac{\text{sh } kz + \text{sh } k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\text{sh } \frac{kl}{2}};$ $M^*(1) = \frac{M}{2} \left[ 1 - \frac{\text{sh } kz + \text{sh } k \left( \frac{l}{2} - z \right)}{\text{sh } \frac{kl}{2}} \right]$
u	$B_{\omega} = \frac{m}{k^2} \left( 1 - \text{ch } kz + \frac{1 + kl \text{ sh } kl - \text{ch } kl - \frac{k^2 l^2}{2}}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} \text{ sh } kz \right);$ $M_{\omega} = \frac{m}{k} \left( \frac{1 + kl \text{ sh } kl - \text{ch } kl - \frac{k^2 l^2}{2}}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} \text{ ch } kz - \text{sh } kz \right)$
к	$B_{\omega}(1) = \frac{M}{k} \cdot \frac{1}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} \left( kl \text{ ch } \frac{kl}{2} - \text{sh } \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right) \text{ sh } kz;$ $M_{\omega}(1) = \frac{M}{kl \text{ ch } kl - \text{sh } kl} \left( kl \text{ ch } \frac{kl}{2} - \text{sh } \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right) \text{ ch } kz$

проходит в стороне от оси изгиба (рис. 6, а). Это воздействие можно заменить такой же парой, лежащей в плоскости, которая проходит через ось изгиба (рис. 6, б), и бимоментом (бипарой), представляющим собой совокупность двух равных и противоположно направленных пар (рис. 6, в). Пара (рис. 6, б) вызывает изгиб стержня, а бимомент (рис. 6, в) служит причиной кручения стержня.

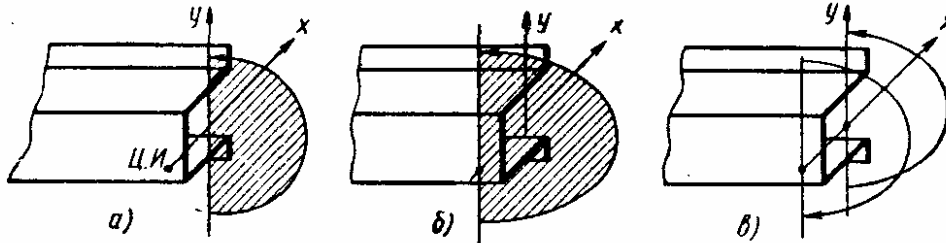


Рис. 6

На примере стержня двутаврового сечения, показанного на рис. 7, пояснена природа кручения, вызываемого бипарой. Совокупность двух изгибающих моментов  $\pm M$  (рис. 7, а) вызывает изгиб полков двутавра в двух противоположных направлениях. Вследствие жесткости контура сечения, деформация, изображенная на рис. 7, б, невозможна, т. е. при изгибе полков происходит поворот всего сечения (рис. 7, в). В данном случае бимомент равен произведению одной из пар на расстояние между парами (плечо бимомента). Если нормальные напряжения на торце заданы каким-либо законом  $\sigma = \sigma(s)$ , то бимомент

$$B_{\omega} = \int_{(F)} \sigma \omega dF. \quad (24)$$

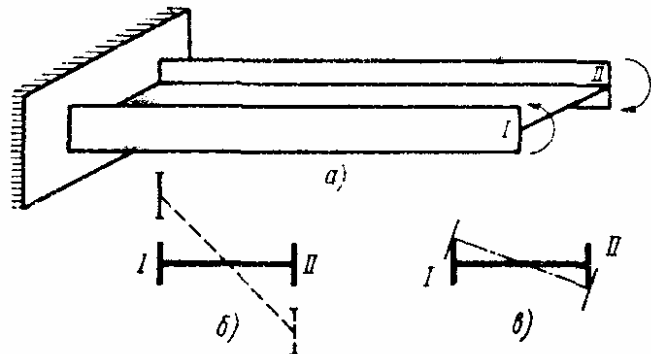


Рис. 7

Причиной стесненного кручения может оказать-

ся также внешняя нагрузка в виде продольной силы  $P$ , приложенной в произвольной точке  $A$  срединной поверхности параллельно оси  $z$  (рис. 8). Действие такой силы эквивалентно совокупному действию: силы  $P$ , приложенной в нулевой секториальной точке  $B$ ; пары переноса  $Pa$ .

Первое воздействие вызывает внецентренное растяжение (сжатие), причем нормальные напряжения определяются обычными формулами сопротивления материалов для стержня сплошного сечения. Второе воздействие, в свою очередь, приводится к паре  $Pa$  в плоскости, проходящей через центр изгиба, и бимоменту  $B_{\omega} = P\omega$ , где  $\omega$  — секториальная площадь, соответствующая точке  $A$  приложения силы.

Если к сечению приложено несколько сил  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то полный бимомент определяется формулой

$$B_{\omega} = \sum_{i=1}^n P_i \omega_i. \quad (25)$$

При непрерывной вдоль контура приложенной внешней нагрузке интенсивностью  $q(s)$  на единицу длины средней линии сечения

$$B_{\omega} = \int_{(F)} q \omega dF. \quad (26)$$

Если внешняя нагрузка  $q = q(z, s)$  приложена непрерывно также и по длине стержня, то кручение будут вызывать распределенные бимоменты, интенсивность которых на единицу длины стержня

$$b_{\omega} = \int_{(F)} q(z, s) \omega dF. \quad (27)$$

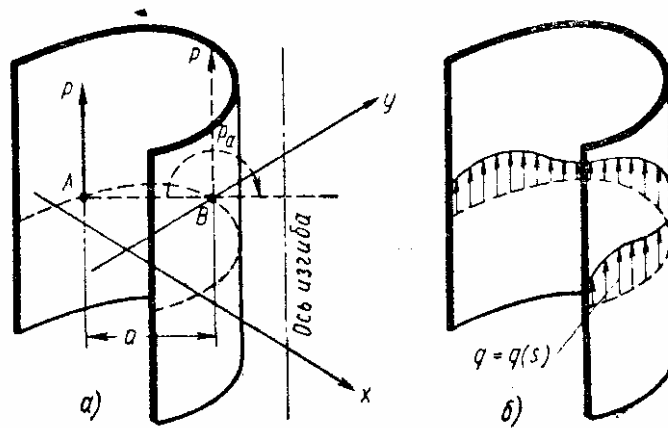


Рис. 8

В этом случае основное дифференциальное уравнение (15) приобретает вид

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi^{II} = \frac{m(z) - b'_{\omega}(z)}{EJ_{\omega}}. \quad (28)$$

В табл. 6 даны выражения для величин  $B_{\omega}$ ,  $M_{\omega}$  и  $M_*$  в различных случаях действия на стержень внешней сосредоточенной бимоментной нагрузки.

## КРИВЫЕ СТЕРЖНИ

### Общие сведения. Нормальные напряжения

Стержни с криволинейной осью называют *кривыми стержнями* (рис. 9). Если высота стержня  $h$  мала по сравнению с радиусом  $r$  (стержни малой кривизны  $\frac{h}{r} < \frac{1}{5}$ ), то с достаточной точностью справедливы основные зависимости для прямого стержня (см. гл. 9).

Для расчета стержней большой кривизны  $\left(\frac{h}{r} > \frac{1}{5}\right)$  применяют приближенную теорию, основанную на гипотезе плоских сечений.

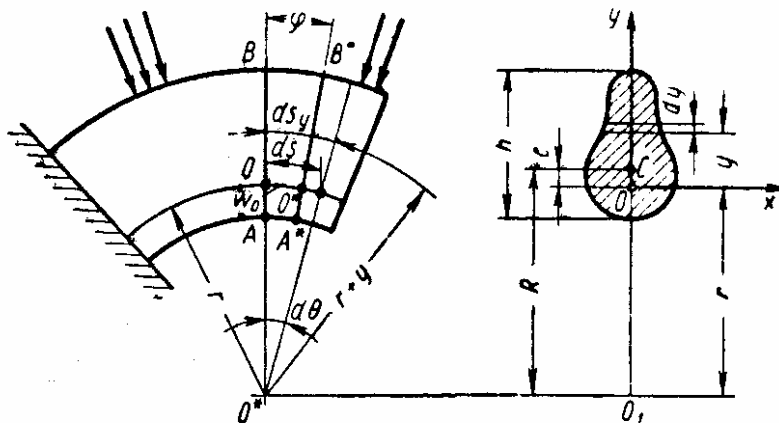


Рис. 9

6. Бимоменты  $B_\omega$ , моменты стесненного кручения  $M_\omega$  и моменты свободного кручения  $M_*$  при действии на стержень внешней сосредоточенной бимоментной нагрузки

Тип стержня и нагрузка	Формулы
	$B_\omega = -B \frac{\text{sh } kz}{\text{sh } kl}; \quad M_\omega = -Bk \frac{\text{ch } kz}{\text{sh } kl};$ $M_* = Bk \frac{\text{ch } kz}{\text{sh } kl}$
	$B_\omega = -B \frac{\text{sh } k(l-z)}{\text{sh } kl};$ $M_\omega = Bk \frac{\text{ch } k(l-z)}{\text{sh } kl};$ $M_* = -Bk \frac{\text{ch } k(l-z)}{\text{sh } kl}$
	$B_\omega = -B \frac{\text{ch } kz}{\text{ch } kl}; \quad M_\omega = -Bk \frac{\text{sh } kz}{\text{ch } kl};$ $M_* = Bk \frac{\text{sh } kz}{\text{ch } kl}$
	$B_\omega = -B_A \frac{\text{sh } k(l-z)}{\text{sh } kl} - B_B \frac{\text{sh } kz}{\text{sh } kl};$ $M_\omega = B_A k \frac{\text{ch } k(l-z)}{\text{sh } kl} - B_B k \frac{\text{ch } kz}{\text{sh } kl};$ $M_* = -B_A k \frac{\text{ch } k(l-z)}{\text{sh } kl} + B_B k \frac{\text{ch } kz}{\text{sh } kl}$

**Гипотеза плоских сечений.** Для плоского сечения стержня перемещения точек поперечного сечения

$$\omega = \omega_0 + \varphi y, \quad (29)$$

где  $\omega_0$  — перемещение точки  $O$  (приведенного центра тяжести сечения). Центр тяжести поперечного сечения  $C$  находится на расстоянии  $R$  от центра кривизны. Относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{ds_y} = \frac{d\omega_0}{ds} \cdot \frac{r}{r+y} + \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ry}{r+y}. \quad (30)$$

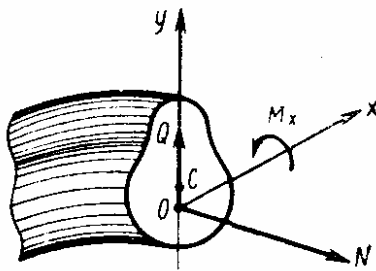


Рис. 10

Нормальные напряжения

$$\sigma = E \left( \frac{d\omega_0}{ds} \cdot \frac{r}{r+y} + \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ry}{r+y} - \alpha t \right), \quad (31)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $\alpha t$  — температурная деформация. Из условий равновесия (рис. 10)

$$\int_F \sigma dF = N; \quad \int_F \sigma y dF = -M_x \quad (32)$$

получаем

$$\frac{d\omega_0}{ds} = \frac{N}{\int_F E \frac{r}{r+y} dF} + \frac{\int_F E \alpha t dF}{\int_F E \frac{r}{r+y} dF}; \quad (33)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = - \frac{M_x}{\int_F E \frac{ry^2}{r+y} dF} + \frac{\int_F E \alpha t y dF}{\int_F E \frac{ry^2}{r+y} dF}. \quad (34)$$

Положение приведенного центра тяжести определяют из условия

$$\int_F E \frac{y}{r+y} dF = 0. \quad (35)$$

Расстояния от приведенного центра тяжести до центра кривизны

$$r = \frac{\int_F E dF}{\int_F \frac{E dF}{r+y}}. \quad (36)$$

Например, для стержня прямоугольного сечения с постоянным модулем упругости (рис. 11) с радиусом кривизны линии центров тяжести сечений  $R$

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r+y}} = \frac{h}{R + \frac{1}{2}h} = \frac{h}{R + \frac{1}{2}h} = \frac{h}{\ln \frac{R + \frac{1}{2}h}{R - \frac{1}{2}h}} = \frac{h}{\ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}}. \quad (37)$$

Смещение приведенного центра тяжести

$$e = R - r = R \frac{h}{\ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}} \approx \frac{h^2}{12R}. \quad (38)$$

Приближенное равенство справедливо при  $\frac{h}{R} < \frac{1}{2}$ .

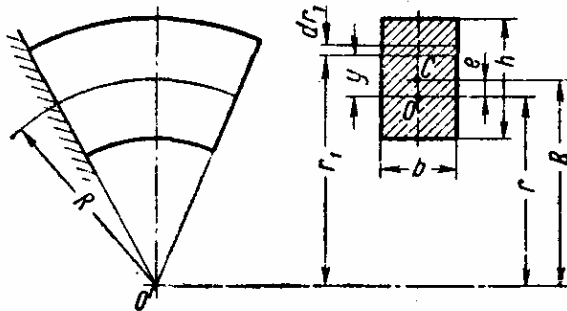


Рис. 11

Нормальные напряжения в поперечном сечении при плоском изгибе стержня определяют по формуле, вытекающей из равенств (31), (33) и (34),

$$\sigma = E \left( \frac{r}{r+y} \cdot \frac{N}{\int_F E \frac{r}{r+y} dF} - \frac{ry}{r+y} \cdot \frac{M_x}{\int_F E \frac{ry^2}{r+y} dF} \right) +$$

$$+ E \left( \frac{r}{r+y} \cdot \frac{\int_F E \alpha t dF}{\int_F E \frac{r}{r+y} dF} + \frac{ry}{r+y} \frac{\int_F E \alpha ty dF}{\int_F E \frac{ry^2}{r+y} dF} - \alpha t \right). \quad (39)$$

Другой, более краткий вид формулы (39):

$$\sigma = E \left\{ \frac{r}{r+y} \left( \frac{N + N_t}{\int_F E dF} - y \frac{M_x + M_{xt}}{r \int_F E y dF} \right) - \alpha t \right\}, \quad (40)$$

где условные температурные усилия и моменты

$$N_t = \int_F E \alpha t \, dF;$$

$$M_{xt} = - \int_F E \alpha t y \, dF.$$

Вторая группа членов выражает температурные напряжения в кривом стержне. Предполагается, что температурное поле имеет плоскость симметрии стержня.

Стержень с постоянными параметрами упругости, неравномерный нагрев отсутствует. Напряжения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{r}{r+y} \cdot \frac{N}{F_{np}} - \frac{ry}{r+y} \cdot \frac{M_x}{J_{xnp}}, \quad (41)$$

где приведенные площадь сечения и момент инерции

$$F_{np} = \int_F \frac{r}{r+y} \, dF = \int_F \frac{r}{r_1} \, dF = F_1$$

$$J_{xnp} = \int_F \frac{ry^2}{r+y} \, dF = \int_F \frac{r}{r_1} y^2 \, dF, \quad (42)$$

здесь  $r_1 = r + y$  — расстояние рассматриваемой точки до центра кривизны.

Положение приведенного центра тяжести определяется условиями (35) и (36).

Для приведенного момента инерции часто используют формулу

$$J_{xnp} = \int_F \frac{ry^2}{r+y} \, dF = r \int_F y \, dF = r S_F, \quad (43)$$

где

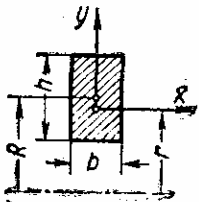
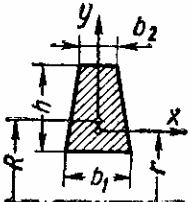
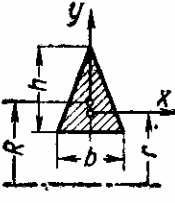
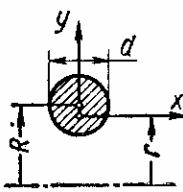
$$S_F = \int_F y \, dF = e F \quad (44)$$

— статический момент сечения стержня относительно оси, проходящей через приведенный центр тяжести;  $e$  — расстояние между центром тяжести и приведенным центром тяжести сечения.

Значения радиусов кривизны линии приведенных центров тяжести для различных сечений приведены в табл. 7.

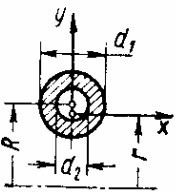
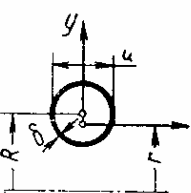
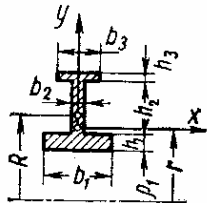
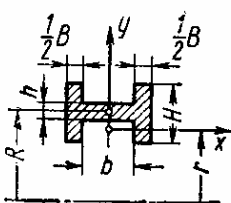
7. Значения радиусов кривизны  $r$  линии приведенных центров тяжести для различных сечений

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{1}{r_1} dF}$$

Сечение	Радиус кривизны $r$
	$\frac{h}{1 + \frac{h}{2R}} \approx R \left\{ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{15} \left( \frac{h}{R} \right)^2 + \frac{11}{1260} \left( \frac{h}{R} \right)^4 + \dots \right] \right\}$
	$\frac{\frac{h}{2} (b_1 + b_2)}{\left\{ \left[ b_1 + (b_1 - b_2) \frac{R}{h} \left( 1 - \frac{h}{3R} \cdot \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \right) \right] \times \right.}$ $\left. \times \ln \frac{1 + \frac{h}{3R} \cdot \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2}}{1 - \frac{h}{3R} \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_2}} - (b_1 - b_2) \right\}}$
	$\frac{\frac{h}{2}}{\frac{R}{h} \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{R} \right) \ln \frac{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{R}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{R}} - 1}$
	$\frac{d^2}{8R \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{d}{2R} \right)^2} \right)}$



Продолжение табл. 7

Сечение	Радиус кривизны $r$
	$\frac{d_1^2 - d_2^2}{8R \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{2R}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{d_1}{2R}\right)^2} \right]}$
	$\frac{\pi R \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2R}\right)^2} \right]}{4 \arctg \sqrt{\frac{1 - \frac{d}{2R}}{1 + \frac{d}{2R}}}}$
	$\frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{\rho_1 + h_1}{\rho_1} + b_2 \ln \frac{\rho_1 + h_1 + h_2}{\rho_1 + h_1} + b_3 \ln \frac{\rho_1 + h_1 + h_2 + h_3}{\rho_1 + h_1 + h_2}}$
	$\frac{BH + bh}{B \ln \frac{1 + \frac{H}{2R}}{1 - \frac{H}{2R}} + b \ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}}$

Распределение нормальных напряжений при чистом изгибе. В этом случае (рис. 12)

$$\sigma = - \frac{ry}{r+y} \cdot \frac{M}{\int_F \frac{ry^2}{r+y} dF} = - \frac{ry}{r+y} \cdot \frac{M}{J_{xnp}}. \quad (45)$$

Напряжение в точках A и B

$$\sigma_A = \frac{rh_A}{r-h_A} \cdot \frac{M}{J_{xnp}}; \quad \sigma_B = - \frac{rh_B}{r+h_B} \cdot \frac{M}{J_{xnp}}.$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении распределяются по гиперболическому закону. Сопоставление с точным решением для стержня с узким прямоугольным сечением (плоская задача в полярных координатах, решение Головина) показывает, что приближенное решение на основе гипотезы плоских сечений [формула (45)] обладает достаточной точностью при  $\frac{h}{r} \leq 1$ .

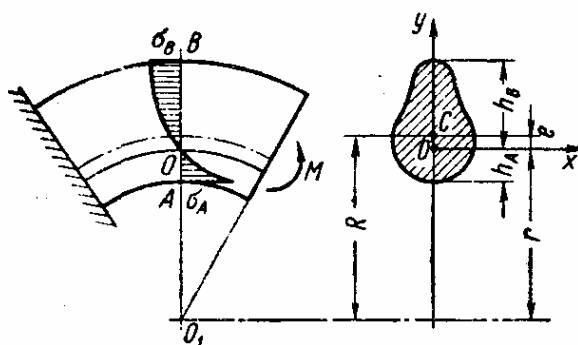


Рис. 12

Случай растяжения центральной силой. В поперечном сечении внешние нагрузки приводят к нормальному усилию  $N$ , приложенному в центре тяжести сечения. В рассматриваемом случае  $M_x = -Ne$  и из формулы (41) следует

$$\sigma = \frac{r}{r+y} \cdot \frac{N}{F} + \frac{y}{r+y} \cdot \frac{Ne}{eF} = \frac{N}{F}.$$

Напряжения распределяются по поперечному сечению равномерно.

#### Условия равновесия, касательные напряжения и перемещения

**Условия равновесия участка стержня (рис. 13).** При плоском изгибе кривого стержня условия равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{r} + q &= 0; \\ \frac{dN}{ds} + \frac{Q}{r} + n &= 0; \\ \frac{dM_x}{ds} + Q &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

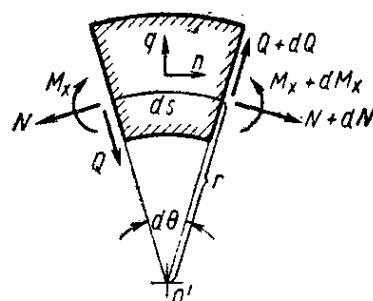


Рис. 13

где  $q$  и  $n$  — интенсивность распределенной нагрузки на единицу длины приведенной оси стержня (элемент дуги  $ds$ , радиус кривизны  $r$ );  $M_x$ ,  $N$  и  $Q$  — изгибающий момент, нормальное и касательное усилия в сечении стержня.

**Касательные напряжения.** В приближенной теории касательные напряжения в поперечном сечении определяют на основании условий

равновесия. Для элемента стержня при отсутствии распределенного усилия вдоль его оси (рис. 14) условие равновесия

$$\frac{dN_f}{ds} - \tau b \frac{r+y}{r} + \frac{1}{r} Q_f = 0, \quad (47)$$

где  $N_f$  и  $Q_f$  — нормальное и касательное усилия, действующие на отсеченной части сечения.

Касательное напряжение для равномерно нагретого кривого стержня постоянного сечения определяют по формуле

$$\tau = \frac{rQ}{b(r+y)^2} \left( \frac{S_f}{S_F} - \frac{f}{F} \right), \quad (48)$$

где  $S_f = \int_F y dF$  — статический момент отсеченной части сечения, площадь которой равна  $f$ .

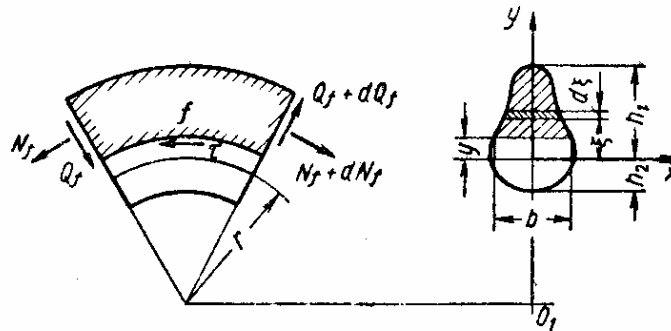


Рис. 14

При  $r \rightarrow \infty$  уравнение (48) выражает обычный закон распределения касательных напряжений.

**Потенциальная энергия деформации** равномерно нагретого кривого стержня

$$U = \int_0^l \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2}{EJ_{xnp}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{EF} + k \frac{Q^2}{2GF} \right) ds, \quad (49)$$

где  $E$  и  $G$  — модуль упругости и модуль сдвига;  $J_{xnp}$  — приведенный момент инерции, определяемый по формуле (42);  $F$  — площадь поперечного сечения.

Последний член в формуле (49) выражает влияние усилий сдвига; коэффициент  $k$  может быть принят приближенно таким же, как и для призматического стержня. Интегрирование ведут вдоль оси приведенных центров тяжести сечений. Часто используют выражение для потенциальной энергии при интегрировании по обычной оси и при приведении силовых факторов к обычному центру тяжести. Тогда выражение для потенциальной энергии деформации будет

$$U = \int_0^{l_c} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{RES_F} + \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{EF} - \frac{MN}{REF} + k \frac{Q^2}{2GF} \right) ds_c. \quad (50)$$

где  $ds_c$  — элемент дуги оси стержня (геометрического места центров тяжести сечений).

**Перемещения.** Для определения перемещений удобно воспользоваться интегралом Мора. Перемещение точки  $A$  стержня (рис. 15) в направлении «1» определяют по формуле

$$\delta_{1A} = \int_0^l \left( \frac{M_x M_{1x}}{E J_{xnp}} + \frac{N N_1}{EF} + k \frac{Q Q_1}{GF} \right) ds. \quad (51)$$

В этом равенстве  $M_{1x}$ ,  $N_1$  и  $Q_1$  — изгибающий момент, нормальное и касательное усилия в поперечном сечении от единичной силы, приложенной в точке  $A$ ;  $M_x$ ,  $N$  и  $Q$  — силовые факторы от действия внешних нагрузок.

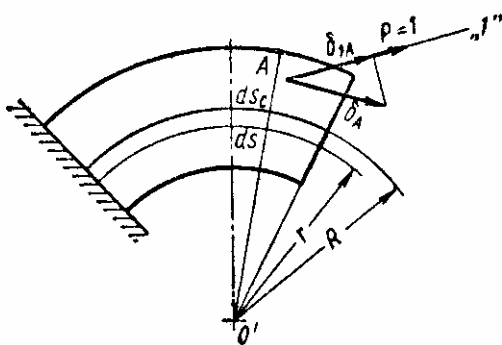


Рис. 15

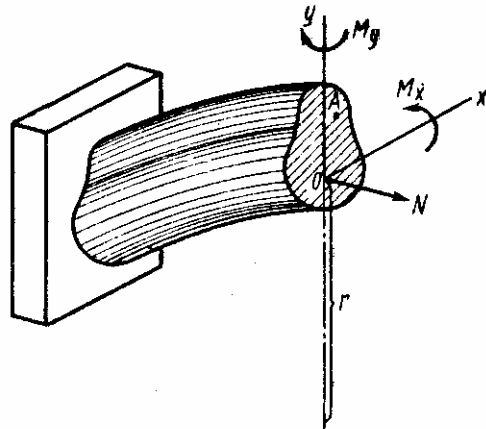


Рис. 16

Интегрирование ведут по оси приведенных центров тяжести сечений.

**Общий случай изгиба.** Предполагается, что сечение стержня имеет плоскость симметрии (рис. 16), которая совпадает с плоскостью кривизны.

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня определяют по формуле

$$\begin{aligned} \sigma = E & \left( \frac{r}{r+y} \cdot \frac{N}{\int_F E \frac{r}{r+y} dF} - \frac{ry}{r+y} \cdot \frac{M_x}{\int_F E \frac{ry^2}{r+y} dF} + \right. \\ & \left. \mp \frac{rx}{r+y} \cdot \frac{M_y}{\int_F E \frac{rx^2}{r+y} dF} \right) + E \left( \frac{r}{r+y} \cdot \frac{\int_F E \alpha t dF}{\int_F E \frac{r}{r+y} dF} + \right. \\ & \left. \mp \frac{ry}{r+y} \cdot \frac{\int_F E \alpha ty dF}{\int_F E \frac{ry^2}{r+y} dF} + \frac{rx}{r+y} \cdot \frac{\int_F E \alpha tx dF}{\int_F E \frac{rx^2}{r+y} dF} - \alpha t \right). \quad (52) \end{aligned}$$

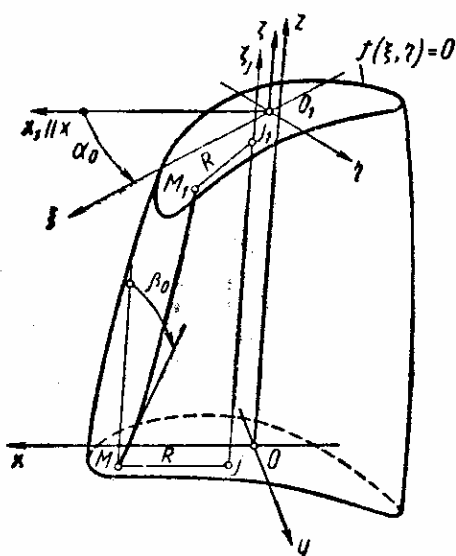
Предполагается, что температура распределена симметрично относительно плоскости кривизны; такое предположение относится и к величине модуля упругости.

## Глава 13

# ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННЫЕ СТЕРЖНИ

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**Определения.** Естественно закрученными называют стержни, боковая поверхность которых может быть образована винтовым движением плоского контура  $f(\xi, \eta) = 0$  относительно прямолинейной



оси  $\xi_j$ , которая проходит через некоторую точку  $j$  плоскости, ограниченной указанным контуром, и перпендикулярна к этой плоскости (рис. 1). Примерами естественно закрученных стержней<sup>1</sup> являются витые лопасти осевых компрессоров и газовых турбин, воздушные винты, спиральные сверла, закрученные манометрические трубки и другие подобные детали. Различают неподвижные  $x, y, z$  и подвижные —  $\xi, \eta, \zeta$  (связанные с текущим сечением) оси координат, направляющие косинусы которых принимают по табл. 1.

В таблице  $\alpha_0$  — угол установки текущего сечения. В дальнейшем  $\xi, \eta$  — главные центральные оси сечения.

Рис. 1. Схема естественно закрученного стержня

### 1. Направляющие косинусы осей координат

Оси координат	$x$	$y$	$z$
$\xi$	$\cos \alpha_0$	$\sin \alpha_0$	0
$\eta$	$-\sin \alpha_0$	$\cos \alpha_0$	0
$\zeta$	0	0	1

<sup>1</sup> В дальнейшем слово «естественно» иногда опускается.

Относительная закрученность стержня в данном сечении в рад/см

$$\tau_0 = \frac{d\alpha_0}{dz}. \quad (1)$$

Стержень равномерно закручен, если  $\tau_0 = \text{const}$ . Тогда

$$\alpha_0(z) = \alpha_0(0) + \tau_0 z, \quad (2a)$$

$$\tau_0 = \frac{\alpha_l}{l}, \quad (2б)$$

где  $\alpha_l$  — изменение угла установки сечений на длине  $l$ .

Соответственные точки  $M$  и  $M_1$  различных сечений закрученного стержня располагаются на винтовых линиях  $MM_1$ , углы наклона которых

$$\beta_0 = \text{arctg}(\tau_0 R). \quad (3)$$

где  $R = \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}$  — расстояние точки  $M$  до оси  $\xi_j$ .

Основное практическое значение имеют закрученные стержни с умеренными углами наклона винтовых линий, у которых для всех точек сечения углы

$$\beta_0^2 \ll 1 \quad (4)$$

и, следовательно,

$$\beta_0 \approx \tau_0 R. \quad (5)$$

В этом случае, не нарушая общности, можно считать, что ось естественной закрученности  $\xi_j$  совпадает с линией центров жесткости  $i$  (т. е. с упругой осью стержня). В дальнейшем различие в положениях центра жесткости и центра тяжести сечений для простоты пренебрегаем.

Одни из особенностей поведения закрученных стержней зависят от взаимного положения сечений (т. е. от абсолютного угла закрученности  $\alpha_0$ ), другие — от взаимного наклона винтовых линий в данном сечении (т. е. от относительного угла закрученности  $\tau_0$  и конфигурации сечения).

**Геометрические соотношения.** Перемещения точек оси стержня  $u_\xi, v_\eta, w_\zeta$ , углы поворота  $\theta_\xi, \theta_\eta, \theta_\zeta$ , а также компоненты вектора общей деформации (кривизны  $\kappa_\xi, \kappa_\eta$  и кручение  $\tau_\zeta$ ) в системе координат  $\xi, \eta, \zeta$  связаны соответственно с перемещениями  $u, v, w$ , углами поворота  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  и компонентами вектора общей деформации (кривизнами  $\kappa_x, \kappa_y$  и кручением  $\tau_z$ ) в системе координат  $x, y, z$  соотношениями табл. 1, в частности

$$\left. \begin{aligned} \kappa_\xi &= \kappa_x \cos \alpha_0 + \kappa_y \sin \alpha_0; \\ \kappa_\eta &= -\kappa_x \sin \alpha_0 + \kappa_y \cos \alpha_0; \\ \tau_\zeta &= \tau_z = \tau; \\ \theta_\zeta &= \theta_z = \theta; \\ w_\zeta &= w_z = w. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При малых прогибах

$$\kappa_x = -v''; \quad \kappa_y = u' \quad (7)$$

(штрихом обозначены производные по длине стержня) и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \kappa_\xi &= -v'' \cos \alpha_0 + u'' \sin \alpha_0 = -v''_\eta - 2u'_\xi \tau_0 + v_\eta \tau_0^2 - u_\xi \tau_0'; \\ \kappa_\eta &= v'' \sin \alpha_0 + u'' \cos \alpha_0 = u''_\xi - 2v'_\eta \tau_0 - u_\xi \tau_0^2 - v_\eta \tau_0'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Кручение

$$\tau = \theta', \quad (9)$$

удлинение оси

$$\varepsilon = w'. \quad (10)$$

**Уравнения равновесия.** Компоненты главного вектора  $Q_\xi, Q_\eta, Q_\zeta$  и главного момента  $M_\xi, M_\eta, M_\zeta$  внутренних сил в системе осей  $\xi, \eta, \zeta$  связаны соответственно с компонентами  $Q_x, Q_y, Q_z$  и  $M_x, M_y, M_z$  в системе осей  $x, y, z$  также соотношениями табл. 1, в частности

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= M_x \cos \alpha_0 + M_y \sin \alpha_0; \\ M_\eta &= -M_x \sin \alpha_0 + M_y \cos \alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Уравнения равновесия элемента стержня в системе координат  $x, y, z$  после исключения сил  $Q_x, Q_y$  имеют обычный вид

$$\left. \begin{aligned} Q'_z + q_z &= 0; \\ M''_x + q_y + m'_x &= 0; \\ M''_y - q_x + m'_y &= 0; \\ M'_z + m_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $q_x, q_y, q_z$  и  $m_x, m_y, m_z$  — соответственно компоненты распределенной нагрузки и распределенного момента в направлении осей  $x, y, z$ . В подвижной системе координат

$$\left. \begin{aligned} Q'_\xi - Q_\eta \tau_0 + q_\xi &= 0; \\ Q'_\eta + Q_\xi \tau_0 + q_\eta &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

$$\left. \begin{aligned} M'_\xi - M_\eta \tau_0 - Q_\eta + m_\xi &= 0; \\ M'_\eta + M_\xi \tau_0 + Q_\xi + m_\eta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

где  $q_\xi, q_\eta$  и  $m_\xi, m_\eta$  — компоненты распределенной нагрузки и момента в направлении осей  $\xi, \eta$ .

**Физические уравнения.** Пренебрегая, как обычно в теории стержней, деформациями от поперечных сил  $Q_\xi, Q_\eta$ , получим, что компоненты общей деформации закрученного стержня  $\varepsilon, \kappa_\xi, \kappa_\eta, \tau$  являются функ-

циями компонентов внутренних силовых факторов  $Q_\xi$ ,  $M_\xi$ ,  $M_\eta$ ,  $M_\zeta$ . В линейной постановке задачи

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa_\xi \\ \kappa_\eta \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\varepsilon\varepsilon} & a_{\varepsilon\xi} & a_{\varepsilon\eta} & a_{\varepsilon\tau} \\ a_{\xi\varepsilon} & a_{\xi\xi} & a_{\xi\eta} & a_{\xi\tau} \\ a_{\eta\varepsilon} & a_{\eta\xi} & a_{\eta\eta} & a_{\eta\tau} \\ a_{\tau\varepsilon} & a_{\tau\xi} & a_{\tau\eta} & a_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_\xi \\ M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix} \quad (14)$$

и обратно

$$\begin{pmatrix} Q_\xi \\ M_\xi \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{\varepsilon\varepsilon} & h_{\varepsilon\xi} & h_{\varepsilon\eta} & h_{\varepsilon\tau} \\ h_{\xi\varepsilon} & h_{\xi\xi} & h_{\xi\eta} & h_{\xi\tau} \\ h_{\eta\varepsilon} & h_{\eta\xi} & h_{\eta\eta} & h_{\eta\tau} \\ h_{\tau\varepsilon} & h_{\tau\xi} & h_{\tau\eta} & h_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa_\xi \\ \kappa_\eta \\ \tau \end{pmatrix} \quad (15)$$

где  $a_{kl} = a_{lk}$  и  $h_{kl} = h_{lk}$  ( $k, l = \varepsilon, \xi, \eta, \tau$ ) — соответственно коэффициенты податливости и жесткости, вообще говоря, зависящие от относительной закрученности  $\tau_0$  стержня. Для простоты вместо  $a_{kk}$  и  $h_{kk}$  пишем  $a_k$  и  $h_k$ .

Для отдельных классов задач система (14)—(15) упрощается. Известные теории естественно закрученных стержней<sup>1</sup> различаются полнотой используемых матриц коэффициентов податливости  $\|a_{kl}\|$  или жесткости  $\|h_{kl}\|$  и выражениями этих коэффициентов.

### ТЕОРИЯ КИРХГОФА — КЛЕБША

**Основные соотношения** [15, 14, 6]. Для незакрученного стержня ( $\tau_0 = 0$ ) система (14)—(15) распадается на четыре независимых соотношения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= a_{\varepsilon 0} Q_\xi = \frac{Q_\xi}{EF}; \\ \kappa_\xi &= a_{\xi 0} M_\xi = \frac{M_\xi}{EJ_\xi}; \\ \kappa_\eta &= a_{\eta 0} M_\eta = \frac{M_\eta}{EJ_\eta}; \\ \tau &= a_{\tau 0} M_\zeta = \frac{M_\zeta}{GT_0}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $F$  — площадь сечения;  $J_\xi$ ,  $J_\eta$  — осевые моменты инерции;  $T_0$  — геометрическая жесткость на кручение.

Если естественно закрученный стержень можно полностью раскрутить (т. е. перевести в незакрученное состояние) путем упругой и линейной деформации, то для расчета такого стержня можно также пользоваться соотношениями (16), считая  $\tau = \tau_1 - \tau_0$ , где  $\tau_0$  — естественная (начальная), а  $\tau_1$  — конечная относительные закрученности.

<sup>1</sup> См. литературу в конце главы.



**Пределы применимости теории.** При закручивании на относительный угол  $\tau_0$  стержня эллиптического сечения с отношением осей  $c = \frac{\delta}{b}$  ( $0 < c \leq 1$ ) максимальные деформации сдвига  $\epsilon_m = \tau_0 b \frac{c}{1+c^2}$ , а максимальный угол поворота продольного волокна  $\beta_m = 0,5\tau_0 b$ . Условие *линейности* деформаций требует, чтобы  $\beta_m^2 \ll \epsilon_m$ , откуда

$$\beta_m \ll \frac{2c}{1+c^2}. \quad (17)$$

Условие *упругих* деформаций требует, чтобы  $\epsilon_m < \epsilon_y$ , где  $\epsilon_y$  — деформация, соответствующая пределу упругости ( $\epsilon_y$  порядка  $10^{-3}$ ), т. е.

$$\beta_m < \frac{1+c^2}{2c} \epsilon_y. \quad (18)$$

Для стержней с тонкими сечениями ( $c < 0,1$ ) определяющим является условие (17), для стержней с толстыми сечениями — условие (18). В обоих случаях применимость теории Кирхгофа—Клебша ограничивается стержнями с весьма малой величиной углов наклона винтовых линий  $\beta_0 = \beta_m$  (порядка  $10^{-3}$ ). При больших значениях углов  $\beta_0$  должны использоваться более общие теории закрученных стержней.

В частном случае для стержней с двусимметричными сечениями в соотношениях (14) коэффициенты  $a_{\xi k} = 0$  ( $k \neq \xi$ ),  $a_{\eta k} = 0$  ( $k \neq \eta$ ) и система (14) распадается на две системы соотношений для продольно-крутильных и изгибных деформаций, причем последняя при условии (4) совпадает с соотношениями теории Кирхгофа—Клебша для задачи поперечного изгиба

$$EJ_{\xi} \kappa_{\xi} = M_{\xi}; \quad EJ_{\eta} \kappa_{\eta} = M_{\eta}, \quad (19)$$

так что в этом случае пределы применимости теории Кирхгофа—Клебша для задачи изгиба расширяются до значений  $\beta_0$  порядка  $10^{-1}$ .

**Изгиб закрученного стержня двусимметричного сечения.** Разрешив выражения (8) относительно  $u''$ ,  $v''$ , получим с учетом (19) и (11) дифференциальные уравнения упругой линии закрученного стержня [10], справедливые для стержней двусимметричного сечения при  $\beta_0^2 \ll 1$ :

$$\left. \begin{aligned} u'' &= M_x \left( \frac{1}{EJ_{\xi}} - \frac{1}{EJ_{\eta}} \right) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \\ &\quad + M_y \left( \frac{\sin^2 \alpha_0}{EJ_{\xi}} + \frac{\cos^2 \alpha_0}{EJ_{\eta}} \right); \\ v'' &= -M_x \left( \frac{\cos^2 \alpha_0}{EJ_{\xi}} + \frac{\sin^2 \alpha_0}{EJ_{\eta}} \right) - \\ &\quad - M_y \left( \frac{1}{EJ_{\xi}} - \frac{1}{EJ_{\eta}} \right) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

или

$$\left. \begin{aligned} u'' &= -A \sin(2\alpha_0) M_x + [A \cos(2\alpha_0) + B] M_y; \\ v'' &= [A \cos(2\alpha_0) - B] M_x + A \sin(2\alpha_0) M_y. \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{EJ_\eta} - \frac{1}{EJ_\xi} \right); \\ B &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{EJ_\eta} + \frac{1}{EJ_\xi} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Частные случаи. Незакрученный стержень  $\alpha_0 = 0$ ;  $\xi = x$ ;  $\eta = y$ , тогда

$$u'' = \frac{M_y}{EJ_y};$$

$$v'' = -\frac{M_x}{EJ_x}.$$

Стержень с равными жесткостями на изгиб  $J_\xi = J_\eta = J$ :

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{EJ};$$

$$u'' = \frac{M_y}{EJ};$$

$$v'' = -\frac{M_x}{EJ}.$$

Естественная закрученность в этом случае не влияет на изгиб.

Изгиб равномерно закрученного консольного стержня моментом  $M$  на конце.  $M_x = M$ ;  $M_y = 0$ ;  $\alpha_0 = \tau_0 z$ , где  $\tau_0 = \frac{\alpha_l}{l} = \text{const}$  (рис. 2).  $u(0) = v(0) = u'(0) = v'(0) = 0$ .

Проинтегрировав выражения (206) и отнеся прогибы конца стержня  $u_l, v_l$  к прогибу незакрученного стержня той же длины

$$v_{l0} = -\frac{Ml^2}{2EJ_\xi}, \quad (22a)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_l &= \frac{u_l}{v_{l0}} = -\frac{1}{2} (1-k) \frac{2\alpha_l - \sin 2\alpha_l}{2\alpha_l^2}; \\ \bar{v}_l &= \frac{v_l}{v_{l0}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + k + (1-k) \frac{1 - \cos 2\alpha_l}{2\alpha_l^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (22b)$$

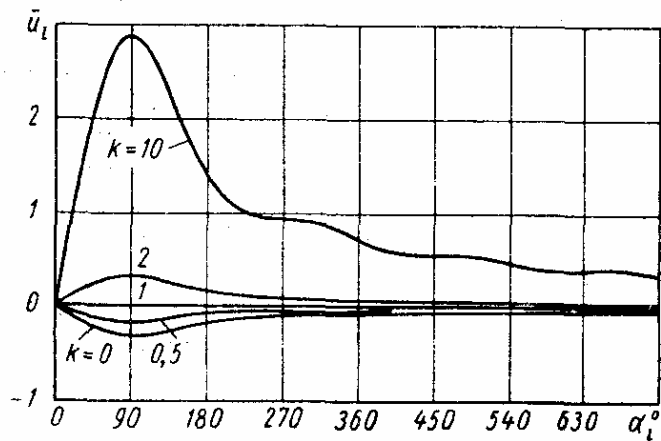
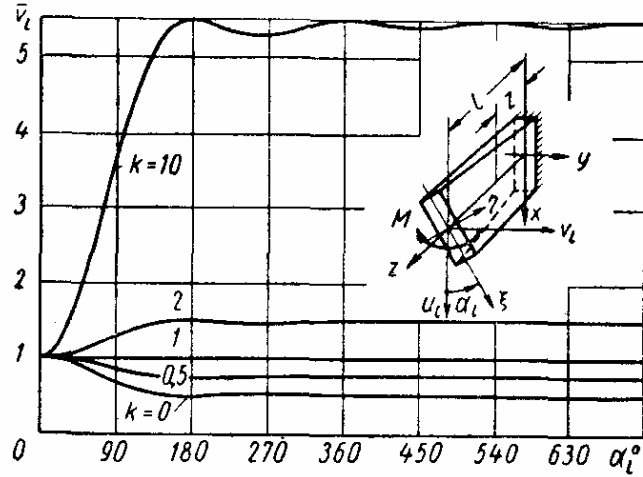


Рис. 2. Изгиб закрученного стержня двусимметричного сечения: зависимость относительных прогибов  $\bar{v}_l$  и  $\bar{u}_l$  от полного угла закрученности  $\alpha_l$  при разных значениях  $k$

где

$$k = \frac{J_{\xi}}{J_{\eta}}; \quad \alpha_l = \tau_0 l$$

При  $\tau_0 = \text{const}$  выражения (226) справедливы при неограниченном возрастании длины стержня и его абсолютной закрученности, причем при  $\alpha_l \rightarrow \infty$

$$\bar{u}_l \rightarrow 0; \quad \bar{v}_l \rightarrow \frac{1+k}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{J_{\xi}} + \frac{1}{J_{\eta}} \right) : \frac{1}{J_{\xi}}, \quad (23)$$

т. е. многократно закрученный стержень изгибается так же, как незакрученный стержень, податливость которого на изгиб равна полусумме податливостей закрученного стержня.

При  $l = \text{const}$  выражения (226) справедливы только до таких значений угла  $\alpha_l$ , пока соблюдается условие (4) — см. стр. 464.

Зависимости (226) показаны на графиках рис. 2.

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

**Точные решения.** Для некоторых простейших задач известны «точные» решения, т. е. решения, полученные методами общей теории упругости или теории оболочек.

Растяжение слабо закрученного стержня [8]. Деформации:

$$\varepsilon = \frac{Q_{\xi}}{EF}; \quad \tau = -\tau_0 \frac{Q_{\xi}}{GF} \left( \frac{J_p}{T_0} - 1 \right); \quad \kappa_{\xi} = \kappa_{\eta} = 0. \quad (24a)$$

Напряжения в поперечном сечении, нормальном к оси  $\xi$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{Q_{\xi}}{F}; \\ \sigma_{\xi\xi} &= -\tau_0 \sigma_{\xi} \left[ \frac{J_p}{T_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \eta \left( \frac{J_p}{T_0} - 1 \right) \right]; \\ \sigma_{\eta\xi} &= -\tau_0 \sigma_{\xi} \left[ \frac{J_p}{T_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \xi \left( \frac{J_p}{T_0} - 1 \right) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (24b)$$

здесь  $J_p$  — полярный момент инерции сечения;  $\varphi$  — функция кручения соответствующего незакрученного стержня.

Из формул (24) видно, что под действием растягивающей силы ( $Q_{\xi} > 0$ ) закрученный стержень раскручивается и в нем возникают дополнительные касательные напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$ ,  $\sigma_{\eta\xi}$ .

Формулы (24) справедливы при условии

$$\beta_p^2 \ll 1 \quad (25)$$

Параметр  $\beta_p^2$  определяют по формуле (316).

Деформации слабо закрученного стержня двусимметричного поперечного сечения [4]. Деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{Q_\xi}{EF} - \tau_0 \frac{M_\xi}{GF} \left( \frac{J_\rho}{T_0} - 1 \right); \\ \tau &= \frac{M_\xi}{GT_0} - \tau_0 \frac{Q_\xi}{GF} \left( \frac{J_\rho}{T_0} - 1 \right); \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

$$\kappa_\xi = \frac{M_\xi}{EJ_\xi}; \quad \kappa_\eta = \frac{M_\eta}{EJ_\eta}. \quad (26b)$$

Выражения (26a) справедливы также при условии (25), а выражения (26b) — при менее жестком условии (4).

Растяжение и кручение произвольно закрученного стержня удлиненного прямоугольного сечения [16]. Для рассматриваемой задачи соотношения (15) принимают вид

$$Q_\xi = h_\varepsilon \varepsilon + h_{\varepsilon\tau} \tau; \quad M_\xi = h_{\tau\varepsilon} \varepsilon + h_\tau \tau. \quad (27)$$

При чистом растяжении

$$M_\xi = 0; \quad \tau = -\frac{h_{\tau\varepsilon}}{h_\tau} \varepsilon; \quad Q_\xi = h_\varepsilon^* \varepsilon, \quad (28a)$$

где  $h_\varepsilon^*$  — «эффективная» жесткость при растяжении,

$$h_\varepsilon^* = h_\varepsilon - \frac{h_{\tau\varepsilon}^2}{h_\tau}. \quad (28b)$$

При чистом кручении

$$Q_\xi = 0; \quad \varepsilon = -\frac{h_{\varepsilon\tau}}{h_\varepsilon} \tau; \quad M_\xi = h_\tau^* \tau, \quad (29a)$$

где  $h_\tau^*$  — «эффективная» жесткость при кручении,

$$h_\tau^* = h_\tau - \frac{h_{\varepsilon\tau}^2}{h_\varepsilon}. \quad (29b)$$

Для незакрученного стержня удлиненного прямоугольного сечения  $b \times \delta$  величины  $h_{\varepsilon 0} = E b \delta$ ;  $h_{\tau 0} = \frac{1}{3} G b \delta^3$ . Для закрученного стержня эффективные жесткости зависят от максимального угла наклона волокон  $\beta_m = 0,5 \tau_0 b$ , соотношения сторон и коэффициента Пуассона  $\nu$ . Зависимости  $h_\varepsilon^*$  и  $h_\tau^*$  от угла  $\beta_m$  при  $\frac{\delta}{b} = 0,1$  и  $\nu = \frac{1}{3}$  приведены на рис. 3.

Приближенная теория стержней произвольного профиля [11]. Если  $\xi, \eta$  — главные центральные оси сечения, то при выполнении условия (4) коэффициенты матрицы жесткости (15) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} h_{\xi} &= EF; \quad h_{\xi} = EJ_{\xi}; \quad h_{\eta} = EJ_{\eta}; \quad h_{\tau} = GT; \\ h_{\xi\tau} &= \tau_0 E (J_{\rho} - T_0); \quad h_{\xi\tau} = \tau_0 E (J_{\rho\xi} - T_{\xi}); \\ h_{\eta\tau} &= -\tau_0 E (J_{\rho\eta} - T_{\eta}); \quad h_{\xi\xi} = h_{\xi\eta} = h_{\xi\eta} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

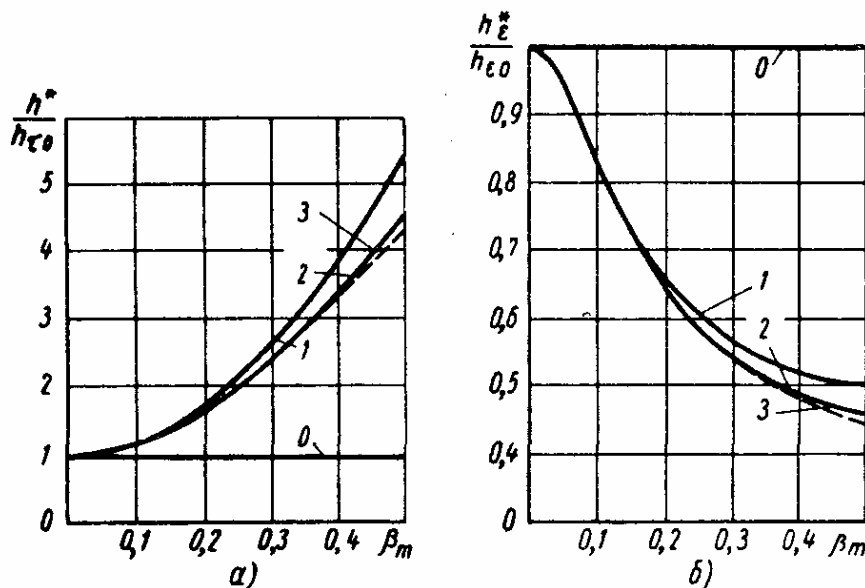


Рис. 3. Изменение крутильной (а) и продольной (б) эффективных жесткостей в зависимости от угла наклона винтовых волокон  $\beta_m$  для стержня с удлиненным прямоугольным сечением при  $\nu = 1/3$ ;  $\frac{\delta}{b} = 0,1$ : 0 — расчет при  $\beta_m = 0$ ; 1 — расчет в предположении  $\beta_m^2 \ll 1$ ; 2 — расчет с учетом членов порядка  $\beta_m^2$ ; 3 — расчет с учетом членов порядка  $\beta_m^4$  [16]

где

$$T = T_0 + 2(1 + \nu) \tau_0^2 (J_r^0 - T_r^0).$$

Здесь  $F$  — площадь;  $J_{\xi} = \int_F \eta^2 dF$ ;  $J_{\eta} = \int_F \xi^2 dF$  — осевые;  $J_{\rho} = \int_F R^2 dF$  — полярный;  $J_{\rho\xi} = \int_F R^2 \eta dF$  и  $J_{\rho\eta} = \int_F R^2 \xi dF$  — полярно-осевые моменты инерции;  $J_r^0 = \int_F R^4 dF$ ;  $T_0 = \int_F (R^2 + \Phi'_{\psi}) dF$  — геометрическая жесткость на кручение незакрученного стержня;

$$T_{\xi} = \int_F (R^2 + \Phi'_{\psi}) \eta dF; \quad T_{\eta} = \int_F (R^2 + \Phi'_{\psi}) \xi dF;$$

$$T_r^0 = \int_F [R^4 - (\Phi'_{\psi})^2] dF;$$

$$\Phi_{\psi} = \Phi_{\eta} (\xi - \xi_j) - \Phi_{\xi} (\eta - \eta_j); \quad \Phi_{\xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad \Phi_{\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta},$$

где  $\Phi$  — функция кручения соответствующего незакрученного стержня.  
Коэффициенты матрицы податливости (14)

$$\left. \begin{aligned} a_{\varepsilon} &= \frac{1}{h_{\varepsilon}} \left( 1 + a_{\tau} \frac{h_{\varepsilon\tau}^2}{h_{\varepsilon}} \right); \\ a_{\xi} &= \frac{1}{h_{\xi}} \left( 1 + a_{\tau} \frac{h_{\xi\tau}^2}{h_{\xi}} \right); \quad a_{\eta} = \frac{1}{h_{\eta}} \left( 1 + a_{\tau} \frac{h_{\eta\tau}^2}{h_{\eta}} \right); \\ a_{\tau} &= \frac{1}{h_{\tau}} \left[ 1 + a_{\tau} \left( \frac{h_{\varepsilon\tau}^2}{h_{\varepsilon}} + \frac{h_{\xi\tau}^2}{h_{\xi}} + \frac{h_{\eta\tau}^2}{h_{\eta}} \right) \right] = \\ &= \left( h_{\tau} - \frac{h_{\varepsilon\tau}^2}{h_{\varepsilon}} - \frac{h_{\xi\tau}^2}{h_{\xi}} - \frac{h_{\eta\tau}^2}{h_{\eta}} \right)^{-1}; \\ a_{\varepsilon\tau} &= -a_{\tau} \frac{h_{\varepsilon\tau}}{h_{\varepsilon}}; \quad a_{\xi\tau} = -a_{\tau} \frac{h_{\xi\tau}}{h_{\xi}}; \quad a_{\eta\tau} = -a_{\tau} \frac{h_{\eta\tau}}{h_{\eta}}; \\ a_{\varepsilon\xi} &= a_{\tau} \frac{h_{\varepsilon\tau} h_{\xi\tau}}{h_{\varepsilon} h_{\xi}}; \quad a_{\varepsilon\eta} = a_{\tau} \frac{h_{\varepsilon\tau} h_{\eta\tau}}{h_{\varepsilon} h_{\eta}}; \quad a_{\xi\eta} = a_{\tau} \frac{h_{\xi\tau} h_{\eta\tau}}{h_{\xi} h_{\eta}}. \end{aligned} \right\} \quad (31a)$$

Формула для  $a_{\tau}$  может быть представлена также в виде

$$a_{\tau} = \frac{1}{GT_0 (1 + \beta_{\rho}^2)},$$

где

$$\beta_{\rho}^2 = \frac{2(1 + \nu) \tau_0^2 (J_r - T_r)}{T_0};$$

$$J_r - T_r = J_r^0 - T_r^0 - \frac{(J_p - T_0)^2}{F} - \frac{(J_{p\xi} - T_{\xi})^2}{J_{\xi}} - \frac{(J_{p\eta} - T_{\eta})^2}{J_{\eta}}. \quad (31b)$$

Без учета стесненной деформации напряжения в поперечном сечении определяются формулами:  
нормальное напряжение

$$\sigma_{\xi} = E (\varepsilon - \kappa_{\eta} \xi + \kappa_{\xi} \eta - \tau_0 \Phi_{\psi}); \quad (32a)$$

касательные напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= G\tau (\varphi'_\xi - \eta + \eta_j) - E\tau_0 (\varepsilon - \kappa_\eta \xi + \kappa_\xi \eta - \tau_0 \tau \varphi'_\psi) \varphi'_\xi; \\ \sigma_{\eta\xi} &= G\tau (\varphi'_\eta + \xi - \xi_j) - E\tau_0 (\varepsilon - \kappa_\eta \xi + \kappa_\xi \eta - \tau_0 \tau \varphi'_\psi) \varphi'_\eta. \end{aligned} \right\} \quad (326)$$

С учетом соотношений (14) и выражений (30)—(31) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{Q_\xi}{F} [1 + E\tau_0^2 a_\tau (J_\rho - T_0) \varphi_\psi^*] - \\ &- \frac{M_\eta}{J_\eta} [\xi + E\tau_0^2 a_\tau (J_{\rho\eta} - T_\eta) \varphi_\psi^*] + \\ &+ \frac{M_\xi}{J_\xi} [\eta + E\tau_0^2 a_\tau (J_{\rho\xi} - T_\xi) \varphi_\psi^*] - M_\xi E\tau_0 a_\tau \varphi_\psi^*, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\varphi_\psi^* = \varphi'_\psi + \frac{J_\rho - T_0}{F} + \frac{J_{\rho\eta} - T_\eta}{J_\eta} \xi + \frac{J_{\rho\xi} - T_\xi}{J_\xi} \eta \quad (34)$$

— «главное» значение функции  $\varphi'_\psi$ .

В закрученном стержне произвольного профиля все силовые факторы и все компоненты деформаций взаимосвязаны. С увеличением естественной закрученности  $\tau_0$  жесткость стержня на кручение возрастает, а на растяжение и на изгиб — убывает. Помимо обычных нормальных напряжений

$$\sigma_\xi^0 = \frac{Q_\xi}{F} - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta,$$

в поперечном сечении закрученного стержня возникает система самоуравновешенных нормальных напряжений, распределение которых описывается функцией  $\varphi_\psi^*$ .

В поперечном сечении закрученного стержня, помимо системы касательных напряжений по Сен-Венану [первые члены в формулах (326)], даже при чистом кручении возникает дополнительная система касательных напряжений, причем крутящий момент  $M_\xi$  уравнивается суммой моментов обеих систем.

Внутренняя потенциальная энергия единицы длины закрученного стержня

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \{ E [\varepsilon^2 F + \kappa_\xi^2 J_\xi + \kappa_\eta^2 J_\eta + 2\tau_0 \varepsilon \tau (J_\rho - T_0) - \\ &- 2\tau_0 \kappa_\eta \tau (J_{\rho\eta} - T_\eta) + 2\tau_0 \kappa_\xi \tau (J_{\rho\xi} - T_\xi)] + G\tau^2 T \}. \end{aligned} \quad (35)$$

Стержень эллиптического сечения с произвольным отношением осей  $c = \frac{\delta}{b}$  ( $0 < c \leq 1$ ). Максимальный угол наклона волокон  $\beta_m = 0,5\tau_0 b$ .

В силу симметрии  $J_{\rho\xi} = J_{\rho\eta} = T_{\xi} = T_{\eta} = 0$ ;  $h_{\xi\tau} = h_{\eta\tau} = a_{e\xi} = a_{e\eta} = a_{\xi\eta} = a_{\xi\tau} = a_{\eta\tau} = 0$ ;

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\pi b^2}{4} c; \quad J_{\xi} = \frac{\pi b^4}{64} c^3; \\
 J_{\eta} &= \frac{\pi b^4}{64} c; \quad J_{\rho} = \frac{\pi b^4}{64} c (1 + c^2); \\
 T_0 &= \frac{\pi b^4}{16} \cdot \frac{c^3}{1 + c^2}; \quad J_{\rho} - T_0 = \frac{\pi b^4}{64} c \frac{(1 - c^2)^2}{1 + c^2}; \\
 J_r^0 &= \frac{\pi b^6}{512} c \left( 1 + \frac{2}{3} c^2 + c^4 \right); \quad J_r^0 - T_r^0 = \\
 &= \frac{\pi b^6}{512} c \left( \frac{1 - c^2}{1 + c^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{2}{3} c^2 + c^4 \right); \\
 J_r &= J_r^0 - \frac{J_{\rho}^2}{F} = \frac{\pi b^6}{1024} c \left( 1 - \frac{2}{3} c^2 + c^4 \right); \\
 J_r - T_r &= J_r^0 - T_r^0 - \frac{(J_{\rho} - T_0)^2}{F} = \\
 &= \frac{\pi b^6}{1024} c \left( \frac{1 - c^2}{1 + c^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{2}{3} c^2 + c^4 \right); \\
 h_e &= \frac{E \pi b^2}{4} c; \quad h_{\xi} = \frac{E \pi b^4}{64} c^3; \quad h_{\eta} = \frac{E \pi b^4}{64} c; \\
 h_{\tau} &= \frac{G \pi b^4}{16} \cdot \frac{c^3}{1 + c^2} \times \\
 &\times \left[ 1 + \frac{(1 + \nu) \beta_m^2}{4c^2} \frac{(1 - c^2)^2 \left( 1 - \frac{2}{3} c^2 + c^4 \right)}{1 + c^2} \right]; \\
 h_{e\tau} &= \beta_m \frac{E \pi b^3}{32} c \frac{(1 - c^2)^2}{1 + c^2}; \\
 a_e &= \frac{4}{E \pi b^2 c} \left\{ 1 + \frac{(1 + \nu) \beta_m^2 (1 - c^2)^4}{8c^2 (1 + c^2)} \times \right. \\
 &\times \left[ 1 + \frac{(1 + \nu) \beta_m^2 (1 - c^2)^2}{8c^2 (1 + c^2)} \left( 1 + \frac{2}{3} c^2 + c^4 \right) \right]^{-1} \Big\}; \\
 a_{\tau} &= \frac{16 (1 + c^2)}{G \pi b^4 c^3} \left[ 1 + \frac{(1 + \nu) \beta_m^2 (1 - c^2)^2}{8c^2 (1 + c^2)} \times \right. \\
 &\times \left. \left( 1 + \frac{2}{3} c^2 + c^4 \right) \right]^{-1};
 \end{aligned} \tag{36}$$



$$a_{\epsilon\tau} = - \frac{2\beta_m(1-c^2)^2}{G\pi b^3 c^3} \left[ 1 + \frac{(1+\nu)\beta_m^2(1-c^2)^2}{8c^2(1+c^2)} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{2}{3}c^2 + c^4 \right) \right]^{-1}; \quad (36)$$

$$\varphi_\psi^* = - \left( \frac{1-c^2}{1+c^2} \right) \left[ \xi^2 - \eta^2 - \frac{b^2}{16}(1-c^2) \right].$$

Зависимости  $\bar{a}_\epsilon = \frac{a_\epsilon}{a_{\epsilon 0}}$  и  $\bar{a}_\tau = \frac{a_\tau}{a_{\tau 0}}$  (где  $a_{\epsilon 0}$ ,  $a_{\tau 0}$  — значения  $a_\epsilon$ ,  $a_\tau$  при  $\beta_m = 0$ ) от угла  $\beta_m$  показаны на рис. 4. Зависимость изменения угла наклона крайнего винтового волокна  $\Delta\beta_m = 0.5\tau b$  от  $\beta_m$  при рас-

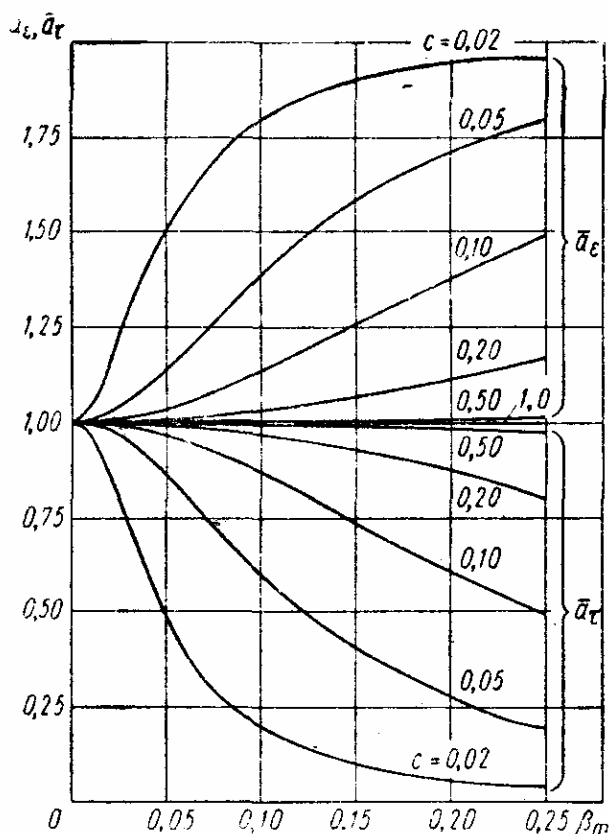


Рис. 4. Изменение коэффициентов податливостей на растяжение  $\bar{a}_\epsilon$  и кручение  $\bar{a}_\tau$  стержня эллиптического сечения в зависимости от максимального угла наклона винтовых волокон  $\beta_m$  и относительной толщины профиля  $c$ ;  $\nu = 0,3$

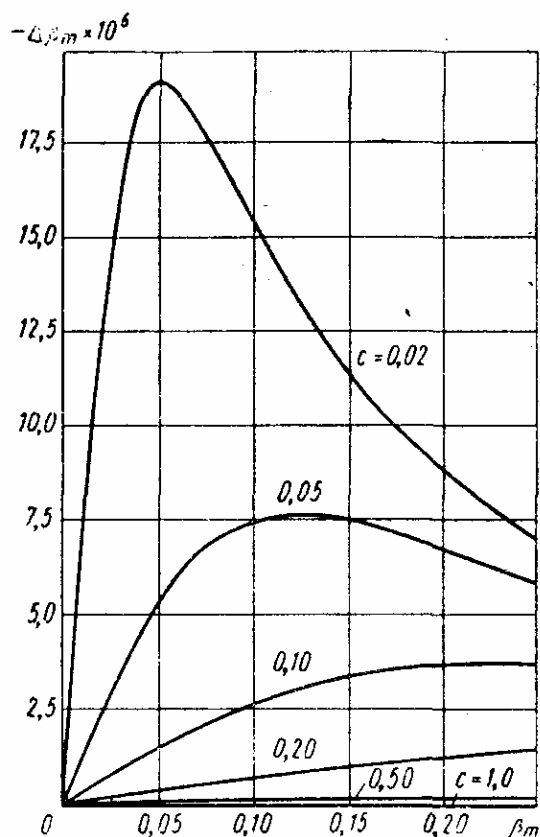


Рис. 5. Зависимость изменения угла наклона винтовых волокон  $\Delta\beta_m$  от его начального значения  $\beta_m$  и относительной толщины профиля  $c$  при растяжении закрученного стержня эллиптического сечения:

$$\sigma_{ср} = \frac{Q_\tau}{F} = 1 \text{ дан/см}^2, E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ дан/см}^2, \nu = 0,3$$

тяжении, когда  $\tau = a_{\tau} Q_{\xi}$ , показана на рис. 5. Знак минус указывает на раскрутку стержня. Максимум на кривых  $\Delta\beta_m = f(\beta_m)$  связан с увеличением крутильной жесткости.

Графики зависимости  $\bar{\sigma}_{\xi} = f(\beta_m, c)$ , где  $\bar{\sigma}_{\xi}$  — отношение максимальных дополнительных нормальных напряжений (в точке  $M_*$ ) к среднему

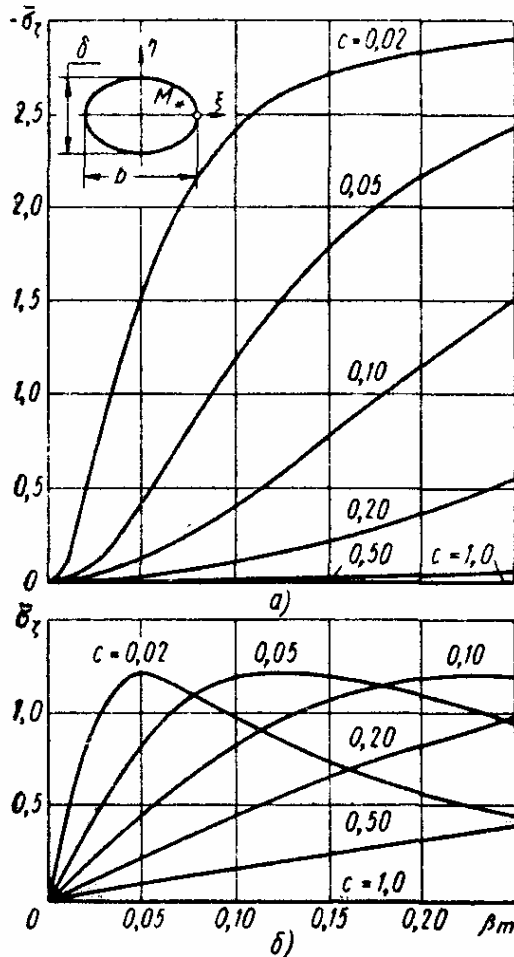


Рис. 6. Зависимость относительных максимальных дополнительных нормальных напряжений  $\bar{\sigma}_{\xi}$  от угла наклона винтовых волокон  $\beta_m$  и относительной толщины профиля  $c$  при растяжении (а) и кручении (б) закрученного стержня эллиптического сечения

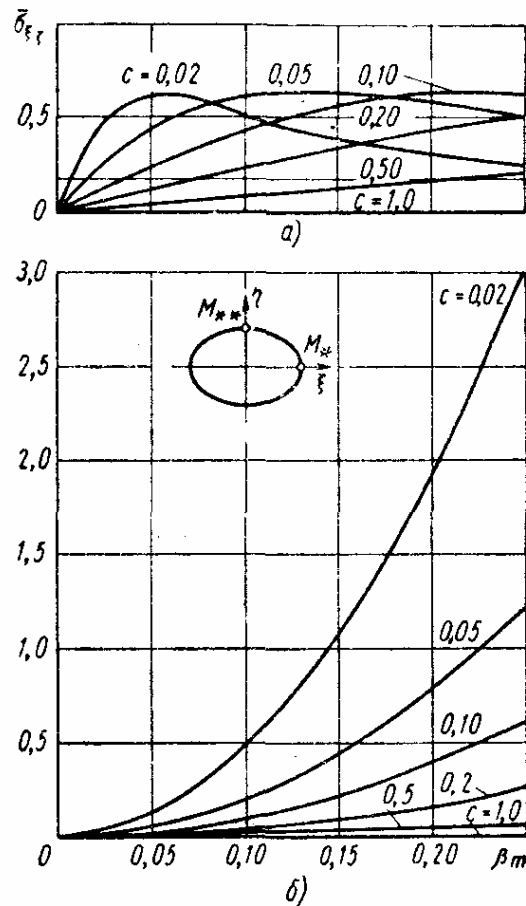


Рис. 7. Зависимость относительных максимальных дополнительных касательных напряжений  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$  — при растяжении (а) и  $\bar{\sigma}_{\eta\xi}$  — при кручении (б) от угла наклона винтовых волокон  $\beta_m$  и относительной толщины профиля  $c$  для закрученного стержня эллиптического сечения

напряжению при растяжении  $\sigma_{cp} = \frac{Q_{\xi}}{F}$  показаны на рис. 6, а, а к максимальному напряжению  $(\sigma_{\xi\xi})_{\max} = \frac{M_{\xi}\delta}{T_0(1+c^2)}$  при кручении — на рис. 6, б.

На рис. 7 приведены графики зависимостей  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\eta\xi} = f(\beta_m, c)$ , где  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$  — отношение максимальных дополнительных касательных напряжений (в точке  $M_{**}$ ) к напряжению  $\sigma_{cp}$  при растяжении,

а  $\overline{\sigma_{\eta\xi}}$  — отношение дополнительных напряжений (в точке  $M_*$ ) к напряжению  $(\sigma_{\xi\xi})_{\max}$  при кручении.

Из рис. 4—7 видно, что при значениях  $\beta_m^2 \ll 1$  влияние закрученности становится практически важным для относительно тонких профилей при  $c \leq 0,2$ , когда  $c^2 \ll 1$ . Для таких удлиненных профилей теория существенно упрощается.

### ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ УДЛИНЕННОГО ПРОФИЛЯ

**Основные соотношения.** Для стержней удлиненного в направлении оси  $\xi$  сечения составляющая сдвигов в направлении оси  $\eta$  весьма мала, вследствие чего для большей части сечения

$$\varphi'_{\psi} \approx -R^2. \quad (37)$$

Тогда в формулах (30)  $T_0 \ll J_p$ ;  $T_{\xi} \ll J_{p\xi}$ ,  $T_{\eta} \ll J_{p\eta}$ ,  $T_r^0 \ll J_r^0$  и коэффициенты матрицы жесткости (15) будут

$$\left. \begin{aligned} h_{\xi} &= EF; \quad h_{\xi\xi} = EJ_{\xi}; \quad h_{\eta} = EJ_{\eta}, \quad h_{\tau} = GT; \\ h_{\xi\tau} &= \tau_0 EJ_p; \quad h_{\xi\xi\tau} = \tau_0 EJ_{p\xi}; \quad h_{\eta\tau} = -\tau_0 EJ_{p\eta}; \\ h_{\xi\xi} &= h_{\xi\eta} = h_{\xi\eta} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

причем

$$T = T_0 + 2(1 + \nu) \tau_0^2 J_r^0.$$

Коэффициенты матрицы податливости (14) выражаются по-прежнему формулами (31). Нормальное напряжение

$$\sigma_{\xi} = E(\varepsilon - \kappa_{\eta}\xi + \kappa_{\xi}\eta + \tau_0\tau R^2), \quad (39a)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{Q_{\xi}}{F} (1 - E\tau_0^2 a_{\tau} J_p R_*^2) - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}} (\xi - E\tau_0^2 J_{p\eta} R_*^2) + \\ &+ \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}} (\eta - E\tau_0^2 a_{\tau} J_{p\xi} R_*^2) + M_{\xi} E\tau_0 a_{\tau} R_*^2, \end{aligned} \quad (39b)$$

где

$R_*^2 = R^2 - \frac{J_p}{F} - \frac{J_{p\eta}}{J_{\eta}} \xi - \frac{J_{p\xi}}{J_{\xi}} \eta$  — «главное» значение функции  $R^2$ ; очевидно, что  $R_*^2$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Наибольшее касательное напряжение

$$(\sigma_{\xi\xi})_{\max} \approx G\delta\tau. \quad (40)$$

где  $\delta$  — максимальная толщина профиля.

К соотношениям технической теории закрученных стержней можно прийти также элементарным путем.

Последний член в формуле (39a) получается непосредственно, если учесть, что при повороте одного сечения относительно другого на угол  $\tau dz$  первоначальная длина винтового волокна  $\frac{dz}{\cos \beta_0}$  (см рис. 1) принимает значение  $\frac{dz}{\cos(\beta_0 + \beta)}$ , так что его удлинение при  $\beta_0^2 \ll 1$

$$\varepsilon_\tau = \frac{\cos \beta_0}{\cos(\beta_0 + \beta)} - 1 \approx \beta(\beta_0 + 0,5\beta). \quad (41a)$$

В линейной постановке при  $\beta \ll \beta_0$

$$\varepsilon_\tau \approx \beta\beta_0 \approx \tau_0 \tau R^2. \quad (41b)$$

Суммируя выражение (41b) с составляющими плоской деформации  $\varepsilon = \kappa_\eta \xi + \kappa_\xi \eta$ , получим полную деформацию  $\varepsilon^*$  и, полагая  $\sigma_\xi \approx \sigma^* = E\varepsilon^*$ , — выражение (39a). Напряжения  $\sigma^* \approx \sigma_\xi$ , действующие вдоль винтовых волокон, вызывают в поперечном сечении стержня касательные напряжения

$$\sigma_{\xi\xi} = -\tau_0 \sigma_\xi (\xi - \xi_j); \quad \sigma_{\eta\xi} = \tau_0 \sigma_\xi (\eta - \eta_j),$$

момент которых  $\tau_0 \int_F \sigma_\xi R^2 dF$  в сумме с моментом касательных напряжений по Сен-Венану  $GT_0 \tau$  уравнивает внешний крутящий момент

$$GT_0 \tau + \tau_0 \int_F \sigma_\xi R^2 dF = M_\xi \quad (42)$$

Введя выражение (39a) в выражение (42) и в остальные три уравнения равновесия

$$\int_F \sigma_\xi dF = Q_\xi; \quad \int_F \sigma_\xi \eta dF = M_\xi; \quad \int_F \sigma_\xi \xi dF = -M_\eta, \quad (43)$$

получим соотношения (15) при значениях коэффициентов  $h_{kl}$  согласно формулам (38).

**Уравнения в неподвижной системе координат.** Подставив выражения (8)—(10) в соотношения (14) и (15), придем к преобразованным соотношениям в системе координат  $x, y, z$ :

$$\begin{pmatrix} w' \\ -v'' \\ u'' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_w & a_{wx} & a_{wy} & a_{w\theta} \\ a_{xw} & a_x & a_{xy} & a_{x\theta} \\ a_{yw} & a_{yx} & a_y & a_{y\theta} \\ a_{\theta w} & a_{\theta x} & a_{\theta y} & a_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (44)$$

и обратно

$$\begin{pmatrix} Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_w & h_{wx} & h_{wy} & h_{w\theta} \\ h_{xw} & h_x & h_{xy} & h_{x\theta} \\ h_{yw} & h_{yx} & h_y & h_{y\theta} \\ h_{\theta w} & h_{\theta x} & h_{\theta y} & h_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w' \\ -v'' \\ u'' \\ \theta' \end{pmatrix} \quad (45)$$

где

$$\left. \begin{aligned} h_w &= h_e = EF; \quad h_\theta = h_\tau = GT; \quad h_{wx} = h_{wy} = 0; \\ h_x &= h_\xi \cos^2 \alpha_0 + h_\eta \sin^2 \alpha_0 = EJ_x; \\ h_y &= h_\xi \sin^2 \alpha_0 + h_\eta \cos^2 \alpha_0 = EJ_y; \\ h_{xy} &= (h_\xi - h_\eta) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = -EJ_{xy}; \\ h_{w\theta} &= h_{e\tau} = \tau_0 EJ_p; \\ h_{x\theta} &= h_{\xi\tau} \cos \alpha_0 - h_{\eta\tau} \sin \alpha_0 = \tau_0 EJ_{px}; \\ h_{y\theta} &= h_{\xi\tau} \sin \alpha_0 + h_{\eta\tau} \cos \alpha_0 = -\tau_0 EJ_{py}; \end{aligned} \right\} \quad (46a)$$

$$\left. \begin{aligned} a_w &= a_e; \quad a_\theta = a_\tau; \quad a_{w\theta} = a_{e\tau}; \\ a_x &= a_\xi \cos^2 \alpha_0 + a_\eta \sin^2 \alpha_0 - a_{\xi\eta} \sin 2\alpha_0; \\ a_y &= a_\xi \sin^2 \alpha_0 + a_\eta \cos^2 \alpha_0 + a_{\xi\eta} \sin 2\alpha_0; \\ a_{xy} &= (a_\xi - a_\eta) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + a_{\xi\eta} \cos 2\alpha_0; \\ a_{x\theta} &= a_{\xi\tau} \cos \alpha_0 - a_{\eta\tau} \sin \alpha_0; \\ a_{y\theta} &= a_{\xi\tau} \sin \alpha_0 + a_{\eta\tau} \cos \alpha_0; \\ a_{xw} &= a_{\xi e} \cos \alpha_0 - a_{\eta e} \sin \alpha_0; \\ a_{yw} &= a_{\xi e} \sin \alpha_0 + a_{\eta e} \cos \alpha_0; \\ h_{kl} &= h_{lk}; \quad a_{kl} = a_{lk} \quad (k, l = w, x, y, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (46b)$$

Подставив соотношения (45) в уравнения равновесия (12), получим основную систему дифференциальных уравнений закрученного стержня

$$\left. \begin{aligned} (h_w w' - h_{wx} v'' + h_{wy} u'' + h_{w\theta} \theta')' + q_z &= 0; \\ (-h_x v'' + h_{xy} u'' + h_{x\theta} \theta')'' + q_y + m'_x &= 0; \\ (-h_{yx} v'' + h_y u'' + h_{y\theta} \theta')'' - q_x + m'_y &= 0; \\ (h_\theta w w' - h_{\theta x} v'' + h_{\theta y} u'' + h_{\theta\theta} \theta')' + m_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Двенадцать граничных условий устанавливают исходя из конкретных особенностей закрепления стержня.

**Определение геометрических и упругих характеристик.** Удлиненное сечение, средняя линия которого представляет собой параболу с максимальной стрелой подъема  $h$ , показано на рис. 8, а, а на рис. 8, б — изменение относительной толщины типичных профилей, описывающихся уравнением

$$\delta(\bar{\xi}_1) = \delta \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} \bar{\xi}_1^m (1 - \bar{\xi}_1)^n, \quad (48)$$

где  $\delta$  — максимальная толщина;  $\bar{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{b}$ ,  $m$ ,  $n$  — постоянные, значения которых указаны в табл. 2.

В этой таблице приведены расчетные формулы и числовые коэффициенты для основных геометрических характеристик и коэффициентов

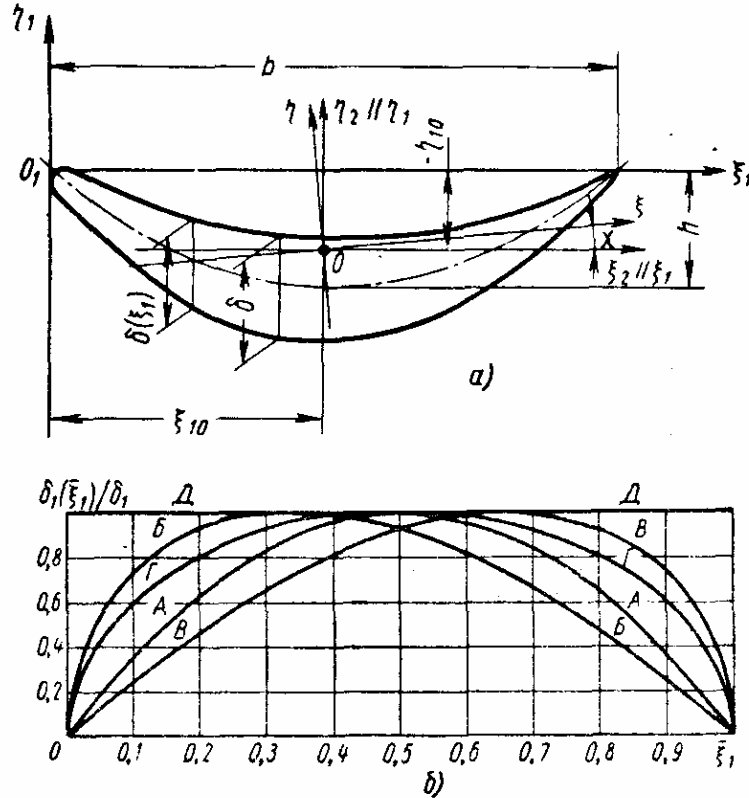


Рис. 8. Схема удлиненного сечения (а) и изменение по длине относительной толщины типичных профилей (б);  $\delta_1 = 0,5\delta$  и  $\delta_1(\bar{\xi}_1) = 0,5\delta(\bar{\xi}_1)$

податливости в зависимости от длины профиля  $b$ , относительной толщины  $c = \frac{\delta}{b}$ , относительной изогнутости профиля  $\bar{h} = \frac{h}{b}$  и параметров  $q = \frac{h}{\delta}$  и  $\gamma = \frac{\tau_0 b^2}{\delta}$ .

Знаки  $\bar{h}$  и  $q$  совпадают со знаком  $h$ , причем  $h > 0$ , если профиль изогнут, как показано на рис. 8. Величина  $\gamma$ , как и  $\tau_0$ , положительна при естественной закрученности против часовой стрелки (см. рис. 1).

**Изгиб закрученного стержня с несимметричным сечением.** Перемещения консольного стержня, нагруженного на конце изгибающим моментом  $M_x = M$  (рис. 9) согласно матрицы (44)

$$\left. \begin{aligned} \omega &= M \int_0^l a_{\omega x} dz; & \theta &= M \int_0^l a_{\theta x} dz; \\ v &= -M \int_0^l \int_0^z a_x dz^2; & u &= M \int_0^l \int_0^z a_{yx} dz^2. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

2. Расчетные формулы основных геометрических характеристик и коэффициентов податливости

Расчетная формула	Обозначение коэффициента	Значения коэффициентов $k$ для профилей по рис. 8						
		$m$						
		$n$						
		$\infty$						
		1	0,5	1	0,5			
		1 <td>1<td>0,5<td>0,5<td colspan="2"></td></td></td></td>	1 <td>0,5<td>0,5<td colspan="2"></td></td></td>	0,5 <td>0,5<td colspan="2"></td></td>	0,5 <td colspan="2"></td>			
$F = k_F b^2 c$	$k_F$	0,667	0,693	0,693	0,785	1,000		
$\xi_{10} = 0,5 k_{\xi 0} b$	$k_{\xi 0}$	1,000	0,858	1,142	1,000	1,000		
$\eta_{10} = -0,667 k_{\eta 0} \bar{h}$	$k_{\eta 0}$	1,200	1,143	1,143	1,125	1,000		
$\chi = k_{\chi} \bar{h}$	$k_{\chi}$	0	-0,364	0,364	0	0		
$J_{\xi} = 0,0833 k_{\xi} b^4 c^3 (1 + 1,067 k_q q^2)$	$k_{\xi}$	0,457	0,486	0,486	0,588	1,000		
	$k_q$	0,750	0,830	0,830	0,938	1,000		
$J_p \approx J_{\eta} = 0,0833 k_{\eta} b^4 c$	$k_{\eta}$	0,400	0,452	0,452	0,588	1,000		
$T_0 = 0,3333 k_{T0} b^4 c^3$	$k_{T0}$	0,457	0,486	0,486	0,588	1,000		
$J_{p\xi} = 0,02225 k_{p\xi} b^5 c \bar{h}$	$k_{p\xi}$	0,343	0,402	0,402	0,552	1,000		
$J_{p\eta} = k_{p\eta} b^5 c$	$k_{p\eta}$	0	0,00196	-0,00196	0	0		
$J_r^0 = 0,01250 k_r^0 b^6 c$	$k_r^0$	0,286	0,351	0,351	0,490	1,000		





Продолжение табл. 2

Расчетная формула	Обозначение коэффициента	Значения коэффициентов $k$ для профилей по рис. 8								
		$A$	$B$	$B$	$\Gamma$	$D$	$\varphi = \text{const}$			
		$m$								
		$n$								
		1	0,5	1	0,5	0,5				
$\frac{a_{\varepsilon\tau}}{a_\tau} = -0,0833k_{\varepsilon\tau}b\gamma c$	$k_{\varepsilon\tau}$	0,600	0,652	0,652	0,750	1,000				
$\frac{a_{\xi\tau}}{a_\tau} = -\frac{0,267k_{\xi\tau}q\gamma}{1+1,067k_qq^2}$	$k_{\xi\tau}$	0,750	0,828	0,828	0,935	1,000				
$\frac{a_{\eta\tau}}{a_\tau} = 12k_{\eta\tau}b\gamma c$	$k_{\eta\tau}$	0	0,00433	-0,00433	0	0				
$\frac{a_{\varepsilon\eta}}{a_\tau} = -k_{\varepsilon\eta}b^2\gamma^2c^2$	$k_{\varepsilon\eta}$	0	0,00269	-0,00269	0	0				
$\frac{a_{\varepsilon\xi}}{a_\tau} = \frac{0,0222k_{\varepsilon\xi}b\gamma^2qc}{1+1,067k_qq^2}$	$k_{\varepsilon\xi}$	0,450	0,540	0,540	0,702	1,000				
$\frac{a_{\xi\eta}}{a_\tau} = -\frac{3,21k_{\xi\eta}b\gamma^2qc}{1+1,067k_qq^2}$	$k_{\xi\eta}$	0	0,00359	-0,00359	0	0				

Отнеся прогиб конца стержня  $v_l$  к прогибу  $v_{l0}$  незакрученного стержня той же длины и того же поперечного сечения [см. формулу (22a)], с учетом формул (466) получим

$$\bar{v}_l = \frac{v_l}{v_{l0}} = \frac{EJ_{\xi}a_{\xi}}{2} \left[ 1 + \frac{a_{\eta}}{a_{\xi}} - \left( 1 - \frac{a_{\eta}}{a_{\xi}} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1 - \cos 2\alpha_l}{2\alpha_l^2} - \frac{a_{\xi}\eta}{a_{\xi}} \cdot \frac{2\alpha_l - \sin 2\alpha_l}{\alpha_l^2} \right]. \quad (50)$$

Для изогнутого сечения постоянной толщины при  $\delta \ll b$  и  $\nu = 0,3$  с учетом данных табл. 2

$$\bar{v}_l = \frac{1 + \frac{1 - \cos 2\alpha_l}{2\alpha_l^2}}{2 \left[ 1 - \frac{0,0462q^2\gamma^2}{(1 + 1,067q^2)(1 + 0,0433\gamma^2)} \right]}, \quad (51a)$$

причем

$$\gamma = \alpha_l \left( \frac{b^2}{\delta l} \right). \quad (51б)$$

На рис. 9 построена зависимость  $\bar{v}_l$  от угла  $\alpha_l$  при разных значениях изогнутости сечения  $q = \frac{h}{\delta}$  для случая  $\frac{b^2}{\delta l} = 1$  (угол  $\alpha_l$  возрастает с увеличением  $\tau_0$  при  $l = \text{const}$ ). Увеличение прогиба  $\bar{v}_l$  с ростом угла  $\alpha_l$  при  $q \neq 0$  связано с уменьшением эффективной изгибной жесткости закрученного стержня несимметричного сечения.

Изгиб в плоскости  $yz$  сопровождается не только изгибом в плоскости  $xz$ , но также кручением и изменением длины оси стержня.

Уравнения технической теории закрученных стержней являются основой расчета на прочность и колебания закрученных лопаток турбомашин [13].

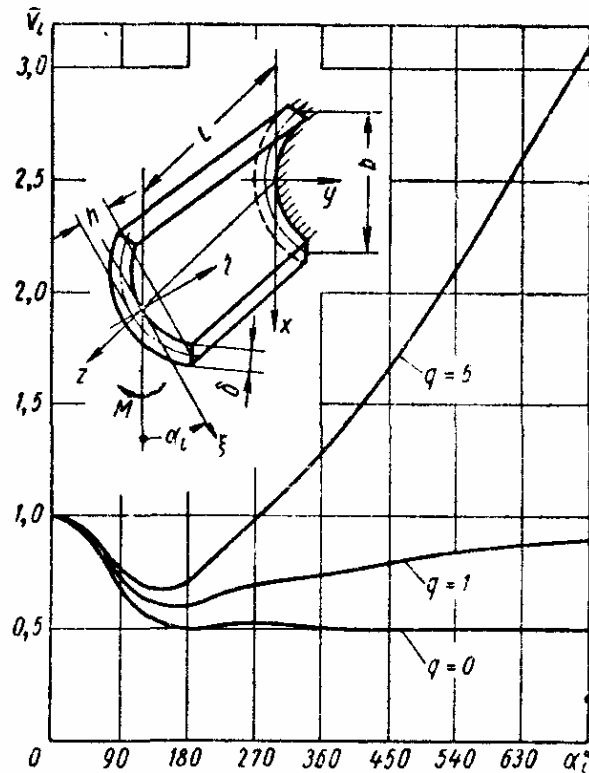


Рис. 9. Расчетная схема изгиба закрученного стержня несимметричного профиля и зависимость относительного прогиба  $\bar{v}_l$  от угла  $\alpha_l$  при  $l = \text{const}$  для различных значений параметра изогнутости  $q = \frac{h}{\delta}$

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

**Раскрутка закрученного стержня.** При небольших значениях угла  $\beta_0$  величина его изменения может быть того же порядка, что и  $\beta_0$ . Сохраняя выражение для удлинения  $\varepsilon_\tau$  в форме (41a) и заменяя в уравне-

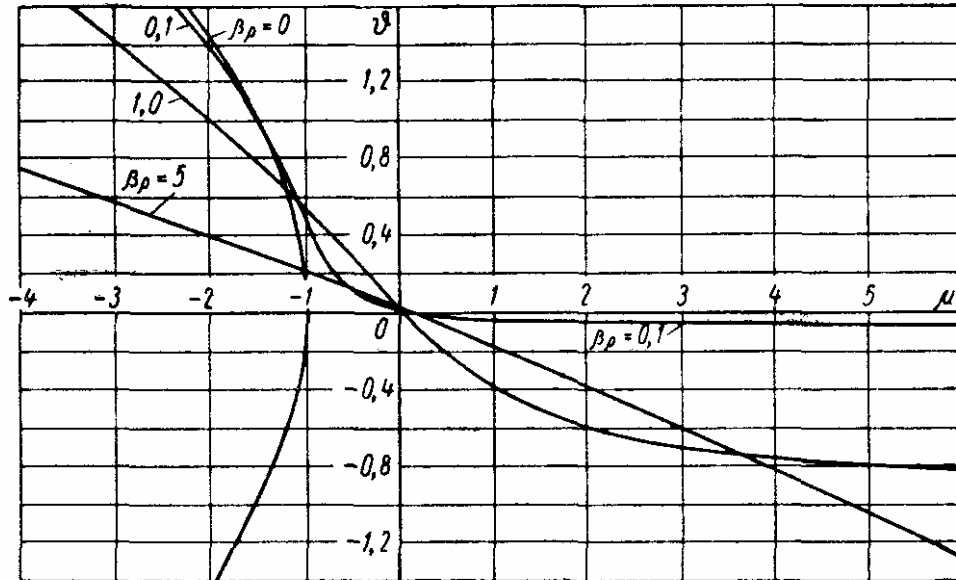


Рис. 10. Зависимость  $\vartheta = f(\mu, \beta_0)$  при  $\vartheta_m = 0$

нии (42) угол  $\tau_0$  на сумму  $\tau_0 + \tau$ , что соответствует деформированному состоянию, приведем уравнение крутящих моментов к виду

$$\vartheta^3 + 3\beta_0\vartheta^2 + 2(1 + \mu + \beta_0^2)\vartheta = 2(\vartheta_m - \mu\beta_0), \quad (52a)$$

где

$$\mu = \frac{1}{GT_0} \left( \frac{J_p}{F} Q_\xi - \frac{J_{p\eta}}{J_\eta} M_\eta + \frac{J_{p\xi}}{J_\xi} M_\xi \right);$$

$$\beta_0^2 = \frac{2(1 + \nu)\tau_0^2 J_r}{T_0};$$

$$\vartheta_m = \frac{\beta_0}{\tau_0} \frac{M_\xi}{GT_0}; \quad \vartheta = \frac{\beta_0}{\tau_0} \tau. \quad (52b)$$

График зависимости (52a) для случая  $\vartheta_m = 0$  (крутящий момент отсутствует) показан на рис. 10. При  $\mu > 0$  по мере возрастания растягивающих нагрузок угол естественной закрученности убывает ( $\vartheta < 0$ ), причем темп убывания замедляется с ростом  $\mu$ . Стержень практически распрямляется при  $\mu \gg 1 + \beta_0^2$ . При  $\mu < 0$  естественная закрутка возрастает с ростом абсолютного значения  $|\mu|$ , особенно резко при малых значениях  $\beta_0$ . Парабола  $\beta_0 = 0$  соответствует деформациям при критической потере устойчивости незакрученного стержня, наступающей при  $\mu = -1$ .

Пренебрегая в формуле (52a) членами  $\vartheta^3$  и  $\vartheta^2$ , получим

$$\vartheta = \frac{\vartheta_m - \mu \beta_p}{1 + \mu + \beta_p^2}. \quad (53)$$

Для чистого растяжения при  $\sigma_{cp} = \frac{Q_\xi}{F}$

$$\tau = - \frac{\sigma_{cp} J_p}{GT_0 \left( 1 + \frac{\sigma_{cp} J_p}{GT_0} + \beta_p^2 \right)} \tau_0. \quad (54)$$

**Сильно закрученные стержни.** Общая теория сильно закрученных стержней, у которых величина угла  $\beta_0^2$  соизмерима с единицей, не разработана. Для приближенной оценки влияния сильной закрученности следует учесть, что длина винтового волокна, равная до деформации

$$dl_0 = \frac{dz}{\cos \beta_0},$$

принимает после деформации (рис. 11, а) значение

$$dl = \frac{(1 + \varepsilon - \kappa_\eta \xi + \kappa_\xi \eta) dz}{\cos(\beta_0 + \beta')},$$

где в линейной постановке

$$\beta' = \beta - (\varepsilon - \kappa_\eta \xi + \kappa_\xi \eta) \cos \beta_0 \sin \beta_0.$$

Удлинение винтового волокна

$$\varepsilon^* = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \beta \operatorname{tg} \beta_0 + (\varepsilon - \kappa_\eta \xi + \kappa_\xi \eta) \cos^2 \beta_0. \quad (55a)$$

Так как

$$\beta = \tau R \cos^2 \beta_0, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \tau_0 R$$

и

$$\cos^2 \beta_0 = \frac{1}{1 + (\tau_0 R)^2},$$

то

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \kappa_\eta \xi + \kappa_\xi \eta + \tau_0 \tau R^2}{1 + (\tau_0 R)^2}. \quad (55b)$$

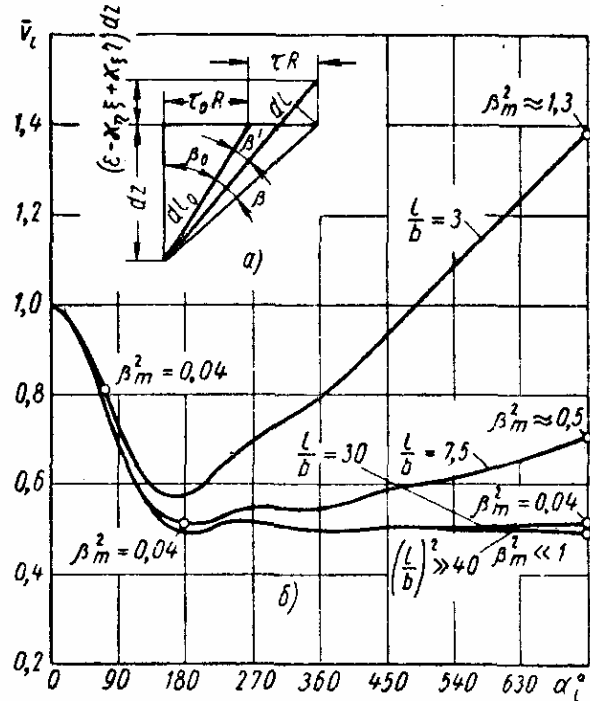


Рис. 11. К расчету при больших углах закрученности: а — расчетная схема; б — зависимость относительного прогиба  $\bar{v}_l$  от угла  $\alpha_l$  при различных значениях  $\frac{l}{b}$  с учетом изменения длины винтовых волокон

Нормальное напряжение в плоском поперечном сечении  $\sigma_\xi$  связано с напряжением вдоль волокна  $\sigma^* = E\epsilon^*$  соотношением

$$\sigma_\xi = \sigma^* \cos^2 \alpha_0,$$

так что

$$\sigma_\xi = \frac{E(e - \kappa_\eta \xi + \kappa_\xi \eta + \tau_0 \tau R^2)}{[1 + (\tau_0 R)^2]^2}. \quad (56)$$

Изгиб сильно закрученных стержней двухсимметричного сечения. Введя формулу (56) в последние два уравнения равновесия (43), получим [17]

$$E\tilde{J}_\xi \kappa_\xi = M_\xi; \quad E\tilde{J}_\eta \kappa_\eta = M_\eta, \quad (57a)$$

где

$$\tilde{J}_\xi = \int_F \frac{\eta^2 dF}{[1 + (\tau_0 R)^2]^2}; \quad \tilde{J}_\eta = \int_F \frac{\xi^2 dF}{[1 + (\tau_0 R)^2]^2}. \quad (57b)$$

Интегрирование ведут по площади плоского поперечного сечения. Для удлиненного прямоугольного сечения при  $\delta \ll b$

$$\tilde{J}_\xi = \lambda J_\xi, \quad (58)$$

где  $J_\xi$  — осевой момент инерции поперечного сечения;

$$\lambda = 0,5 \cos \beta_m \left( \cos \beta_m + \frac{\beta_m}{\sin \beta_m} \right); \quad (59a)$$

$$\beta_m = \arctg(0,5\tau_0 b). \quad (59b)$$

Уравнения (20) остаются справедливыми при замене  $J_\xi$  и  $J_\eta$  соответственно на  $\tilde{J}_\xi$  и  $\tilde{J}_\eta$ .

На рис. 11, б приведена зависимость относительного прогиба  $\bar{v}_l$  от угла  $\alpha_l$  при различных значениях удлинения  $\frac{l}{b}$  для случая изгиба равномерно закрученного консольного стержня моментом на конце при  $\delta \ll b$ , когда с учетом выражений (22б)

$$\bar{v}_l = \left( 1 + \frac{1 - \cos 2\alpha_l}{2\alpha_l^2} \right) \frac{1}{2\lambda}. \quad (60)$$

При сильной закрученности изгибная жесткость падает из-за увеличения длины и уменьшения напряженности наиболее удаленных винтовых волокон. Участки кривых при  $\beta_m^2 \ll 1$  совпадают с кривой  $k = 0$  на рис. 2, а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б и р г е р И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956.
2. Г о л у б е в О. Б. Обобщение теории тонких стержней. Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, № 226, 1963.
3. Г р и н б е р г С. М. О роли стесненности кручения при расчете частот колебаний лопаток компрессора. Сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей». Вып. 3. М., «Машиностроение», 1966.
4. Д ж а н е л и д з е Г. Ю. Соотношения Кирхгофа для естественно скрученных стержней и их приложения. Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, № 1, 1946.
5. Л у р ь е А. И., Д ж а н е л и д з е Г. Ю. Задача Сен-Венана для естественно скрученных стержней. ДАН СССР, т. XXIV, № 1; 3; 4, 1939.
6. Л я в А. Математическая теория упругости. Пер. с англ. М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1935.
7. М е е р о в и ч И. И. Распределение напряжений в компрессорных лопатках при колебаниях. М., Оборонгиз, 1961.
8. Р и з П. М. Деформации естественно закрученных стержней. ДАН СССР, т. XXIII, № 1; 5, 1939.
9. Р у х а д з е А. К. О деформации естественно закрученных стержней. Прикладная математика и механика. Т. XI. Вып. 5, 1947.
10. Т у м а р к и н С. А. Равновесие и колебания закрученных стержней. Труды ЦАГИ. Вып. 341, 1937.
11. Ш о р р Б. Ф. К теории закрученных неравномерно нагретых стержней. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, № 1, 1960.
12. Ш о р р Б. Ф. К теории закрученных тонкостенных стержней. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, № 5, 1960.
13. Ш о р р Б. Ф. Изгибно-крутильные колебания закрученных компрессорных лопаток. Сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей», Вып. № 1. М., «Машиностроение», 1964.
14. C l e b s c h A. Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig, 1862.
15. K i r c h h o f f G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. Journ. f. Math., B. 56, 1859; Vorlesungen über math. Physik, Mechanik, Leipzig, 1883.
16. K n o w l e s J. K., R e i s s n e r E. Torsion and Extension of Helicoidal Shells. Quart. Appl. Math., 17, № 4, 1960.
17. Z i c k e l J. Pretwisted Beams and Columns. Journ. of Appl. Mech., v. 23, № 2, 1956.

## Глава 14

### СОСТАВНЫЕ СТЕРЖНИ

Составными называют стержни, которые образованы соединением двух или нескольких монолитных стержней (полос). В металлических конструкциях полосы соединяют заклепочными или сварными швами, стенкой, стойками, решеткой. Рассчитать составной стержень значит найти напряжения в каждом поясе и соединяющем элементе, иногда необходимо также знать деформации.

#### БАЛКА СО СТЕНКОЙ, РАБОТАЮЩЕЙ НА СДВИГ, И ПОЯСАМИ, ВОСПРИНИМАЮЩИМИ ТОЛЬКО ОСЕВЫЕ УСИЛИЯ

Пояса и стойки соединены шарнирами, панели защиты листом, работающим на сдвиг (рис. 1, а). Предполагается, что при заданной нагрузке стенка не теряет устойчивость. Изгибающий момент  $M_x$

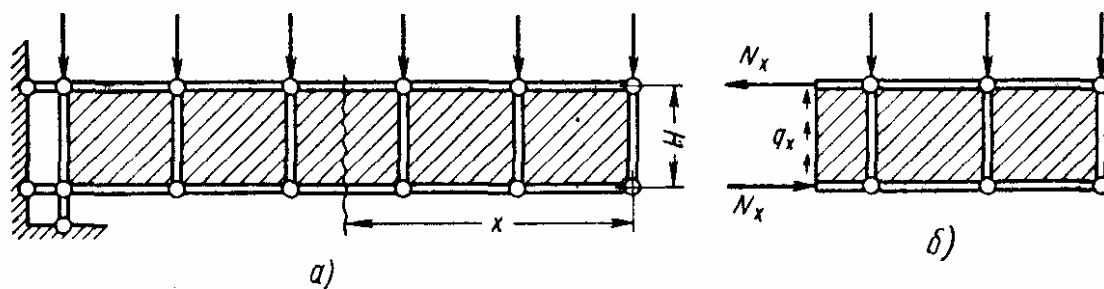


Рис. 1

в сечении балки (рис. 1, б) воспринимается поясами, а поперечная сила  $Q_x$  — стенкой. Усилия  $N_x$  в поясах и погонные касательные усилия  $q_x$  определяют из условия равновесия отсеченной части балки

$$N_x = \frac{M_x}{H}; \quad q_x = \frac{Q_x}{H}, \quad (1)$$

здесь  $H$  — расчетная высота балки. Усилие на одну заклепку, соединяющую пояс со стенкой, при шаге заклепок  $a$  будет

$$N_z = qa.$$

## МНОГОСЛОЙНЫЕ СОСТАВНЫЕ СТЕРЖНИ

Предположим, что слои постоянного сечения, работают в пределах пропорциональности, напряжения и деформации в них определяют по формулам сопротивления материалов, связи (швы) упругие и соединяют слои непрерывно по всей длине. Различают связи сдвига, которые препятствуют взаимному сдвигу одного слоя относительно другого, и связи поперечные, удерживающие слои от взаимного смещения перпендикулярно оси стержня. Рассмотрим балку, у которой  $n$  швов и  $n + 1$  слоев, связи сдвига упругие, поперечные связи недеформируемые [9]. Погонные касательные усилия  $q$  (в  $\text{кг/см}$ ) в шве и взаимный сдвиг  $\Delta_c$  (в  $\text{см}$ ) двух соседних слоев пропорциональны, т. е.

$$q = \kappa \Delta_c, \quad (2)$$

здесь  $\kappa$  — жесткость (отпорность) связей сдвига. Определение усилий в швах и поясах является статически неопределимой задачей. В качестве основной системы берут пакет из слоев, между которыми связи сдвига удалены и заменены касательными усилиями  $q$ . На

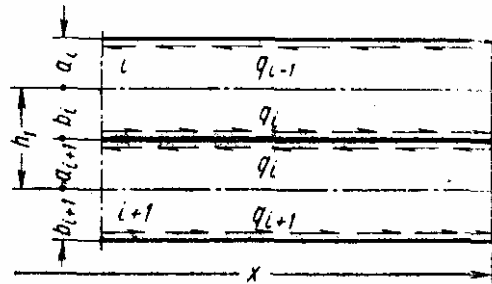


Рис. 2

рис. 2 показаны  $i$  и  $i + 1$  слои с касательными усилиями, действующими на них со стороны  $i - 1$ ,  $i$  и  $i + 1$  швов. За лишние неизвестные удобно принять равнодействующую  $T_i(x)$  касательных усилий  $q_i(x)$ , действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. Для  $i$ -го шва равнодействующая  $T_i(x)$  и усилия  $q_i(x)$  связаны соотношениями

$$T_i(x) = T_i(0) + \int_0^x q(\xi) d\xi \quad \text{или} \quad T_i'(x) = q_i(x). \quad (3)$$

В основной системе общий изгибающий момент  $M^0(x)$  в сечении балки от внешней нагрузки распределяется между слоями пропорционально их изгибным жесткостям; так, изгибающий момент в  $i$ -м слое

$$M_i(x) = \frac{E_i J_i}{\sum E J} M^0(x), \quad (4)$$

здесь  $\sum E J$  — сумма жесткостей всех отдельных слоев, входящих в составной стержень. Найдя величину сдвига в сечении  $x$  по  $i$ -му шву через внешние силы и лишние неизвестные и пользуясь зависимостью (2), получим дифференциальное уравнение

$$T_i''(x) - \kappa_i \sum_{k=1}^n T_k(x) \delta_{ik} = \Delta_{ip} \kappa_i, \quad (5)$$



здесь

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ip} &= -\frac{N_i^0(x)}{E_i F_i} + \frac{N_{i+1}^0(x)}{E_{i+1} F_{i+1}} - \frac{M_{(x)}^0 h_i}{\sum EJ}; \\ \delta_{ii} &= \frac{1}{E_i F_i} + \frac{1}{E_{i+1} F_{i+1}} + \frac{h_i^2}{\sum EJ}; \\ \delta_{i-1, i} &= -\frac{1}{E_i F_i} + \frac{h_i h_{i-1}}{\sum EJ}; \\ \delta_{i+1, i} &= -\frac{1}{E_{i+1} F_{i+1}} + \frac{h_i h_{i+1}}{\sum EJ}; \\ \delta_{ik} &= \frac{h_i h_k}{\sum EJ} \quad \text{при } |i - k| > 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнений вида (5) будет столько, сколько швов в составном стержне. Эта система линейных дифференциальных уравнений второго порядка хорошо исследована. Общее решение для неизвестной функции  $T_i(x)$  записывают в виде

$$T_i(x) = \sum \beta_{ik} \bar{T}_k(x),$$

где  $\beta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) — постоянные множители;  $\bar{T}_k(x)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) — функции вида

$$\bar{T}_k(x) = A_k \operatorname{sh} \lambda_k x + B_k \operatorname{ch} \lambda_k x,$$

здесь  $\lambda_k$  — корни следующего уравнения:

$$\begin{vmatrix} \kappa_1 \delta_{11} - \lambda^2 & \kappa_1 \delta_{12} & \dots & \kappa_1 \delta_{1n} \\ \kappa_2 \delta_{21} & \kappa_2 \delta_{22} - \lambda^2 & \dots & \kappa_2 \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_n \delta_{n1} & \kappa_n \delta_{n2} & \dots & \kappa_n \delta_{nn} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Постоянные  $A_k$  и  $B_k$  определяют из граничных условий на концах  $k$ -го шва: если на конце шва нет препятствий взаимному сдвигу, то  $T = 0$ ; если на конце шва имеется жесткое препятствие сдвигу, то здесь должна выполняться зависимость (2) при заданных  $\kappa$  и  $\Delta_c$ .

После того как определены неизвестные  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), находят усилия в каждом слое составного стержня

$$\begin{aligned} N_i(x) &= T_i(x) - T_{i-1}(x) + N_i^0; \\ M_i(x) &= \frac{E_i J_i}{\sum EJ} \left( M^0 - \sum_{i=1}^n T_i h_i \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В частности, для двухслойной балки с упругими связями сдвига получим дифференциальное уравнение

$$T'' - \kappa \delta T = \kappa \Delta, \quad (9)$$

здесь

$$\delta = \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} + \frac{h^2}{\sum EJ}; \quad \Delta = -\frac{M^0 h}{\sum EJ} - \frac{N_1^0}{E_1 F_1} + \frac{N_2^0}{E_2 F_2};$$

$$\sum EJ = E_1 J_1 + E_2 J_2;$$

корень уравнения (7) будет  $\lambda^2 = \kappa \delta$ . Решение

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= A \operatorname{sh} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda x + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^x \Delta(\xi) \operatorname{sh} \lambda (x - \xi) d\xi; \\ q(x) = T'(x) &= \lambda A \operatorname{ch} \lambda x + \lambda B \operatorname{sh} \lambda x + \\ &+ \kappa \int_0^x \Delta(\xi) \operatorname{sh} \lambda (x - \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Окончательные формулы для двухслойной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой или сосредоточенной силой, приведены в табл. 1, на концах балки сдвиг слоев свободный или исключен.

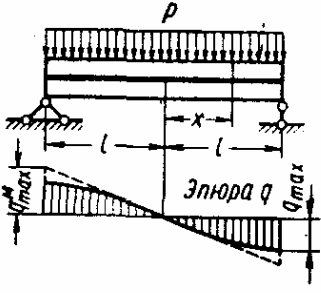
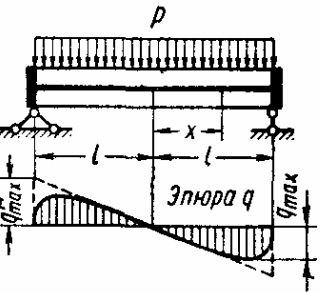
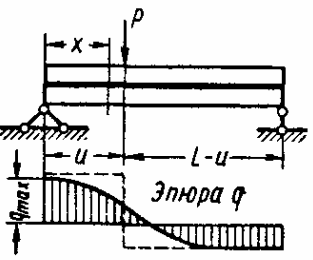
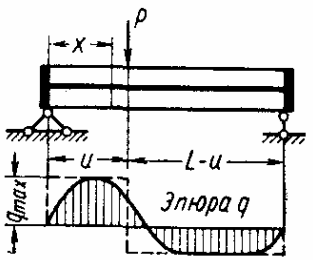
Прогибы  $v$  двухслойной балки в случае отсутствия внешних осевых сил определяют интегрированием дифференциального уравнения

$$v^{IV} - \kappa \delta v'' = \frac{1}{\sum EJ} (-M^{0''} + \kappa \delta M^0). \quad (11)$$

Практически важен случай, когда стержень, составленный из трех слоев, имеет I-образное сечение, симметричное относительно горизонтальной и вертикальной осей. В этом случае от неизвестных суммарных усилий  $T_1$  и  $T_2$ , приводящих к совместной системе двух уравнений (5), удобнее перейти к неизвестным  $2T_a = T_1 + T_2$  и  $2T_c = T_1 - T_2$ . Неизвестная  $T_a$  — антисимметричная часть совокупности усилий  $T_1$  и  $T_2$ , а  $T_c$  — симметричная. Тогда получим два независимых уравнения

$$\left. \begin{aligned} T_a'' &= \kappa (\gamma_a T_a + \Delta_a); \\ T_c'' &= \kappa (\gamma_c T_c + \Delta_c), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

## 1. Формулы для двухслойной балки

	$T = \frac{ph}{\delta \sum EJ} \left( \frac{l^2 - x^2}{2} - \frac{\operatorname{ch} \lambda l - \operatorname{ch} \lambda x}{\lambda^2 \operatorname{ch} \lambda l} \right);$ $q = -\frac{ph}{\delta \sum EJ} \left( x - \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\lambda \operatorname{ch} \lambda l} \right);$ $q_{\max} = q_{\max}^M \left( 1 - \frac{\operatorname{th} \lambda l}{\lambda l} \right)$
	$T = \frac{ph}{\delta \sum EJ} \left( \frac{l^2 - x^2}{2} - \frac{\operatorname{sh} \lambda l - \lambda l \operatorname{ch} \lambda x}{\lambda^2 \operatorname{sh} \lambda l} \right);$ $q = -\frac{ph}{\delta \sum EJ} \left( x - \frac{l \operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda l} \right)$
	$T = \frac{Ph}{\delta \sum EJ} \left[ \frac{L-u}{L} x - \frac{\operatorname{sh} \lambda (L-u) \operatorname{sh} \lambda x}{\lambda \operatorname{sh} \lambda L} \right];$ $q = \frac{Ph}{\delta \sum EJ} \left[ \frac{L-u}{L} - \frac{\operatorname{sh} \lambda (L-u)}{\operatorname{sh} \lambda L} \operatorname{ch} \lambda x \right];$ $q_{\max} = \frac{Ph}{\delta \sum EJ} \left[ \frac{L-u}{L} - \frac{\operatorname{sh} \lambda (L-u)}{\operatorname{sh} \lambda u} \right];$ $0 \leq x \leq u$
	$T = \frac{Ph}{\delta \sum EJ} \left[ \frac{u-L \operatorname{ch} \lambda (L-u)}{\lambda L \operatorname{sh} \lambda L} \operatorname{ch} \lambda x + \right.$ $\left. + \frac{L-u}{\lambda L} \cdot \frac{\operatorname{ch} \lambda (L-x)}{\operatorname{sh} \lambda L} + \frac{L-u}{L} x \right];$ $q = \frac{Ph}{\delta \sum EJ} \left[ \frac{u-L \operatorname{ch} \lambda (L-u)}{L \operatorname{sh} \lambda L} \operatorname{sh} \lambda x + \right.$ $\left. + \frac{L-u}{L} - \frac{L-u}{L} \cdot \frac{\operatorname{sh} (L-x)}{\operatorname{sh} \lambda L} \right]$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_a &= \frac{1}{E_k F_k} + \frac{2h^2}{\sum EJ}; & \lambda_a &= \sqrt{\kappa \gamma_a}; \\ \Delta_a &= -\frac{N_k^0}{E_k F_k} - \frac{M^0 h}{\sum EJ}; \\ \gamma_c &= \frac{1}{E_k F_k} + \frac{2h^2}{E_n F_n}; & \lambda_n &= \sqrt{\kappa \gamma_n}; \\ \Delta_c &= -\frac{N_k^0}{E_k F_k} + \frac{N_n^0}{E_n F_n}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Индексами  $k$  отмечены величины, относящиеся к крайним слоям, индексом  $n$  — к промежуточному (среднему) слою. Прогiby от поперечной нагрузки в балке, симметрично составленной из трех слоев, определяют интегрированием уравнения

$$v^{IV} - \kappa \delta v'' = \frac{q}{\sum EJ} + \kappa \delta \frac{M_m^0}{E_m J_m}, \quad (14)$$

где  $M_m^0$  и  $E_m J_m$  — изгибающий момент и жесткость для монолитной балки.

Напряженное состояние составной балки представляется в виде частного решения, соответствующего монолитному сечению, и общего решения, зависящего от длины стержня. Деформация связей сдвига существенно влияет на распределение нормальных и касательных напряжений в составных стержнях лишь в сечениях, близко расположенных к характерным точкам (концы стержня, места приложения сосредоточенных сил и др.). При  $\lambda x \geq 4$  влияние «местного» фактора пропадает и напряжения можно определять как для монолитного стержня.

Величины напряжений в составной балке лежат между их значениями для балки монолитного сечения и для балки-пакета, лишенной связей сдвига. Они определяются формулой

$$\sigma = \sigma_m \psi + \sigma_n (1 - \psi), \quad (15)$$

где  $\sigma_m$  и  $\sigma_n$  — напряжения в монолитной балке и балке, лишенной связей сдвига;  $\psi$  — коэффициент, зависящий от размеров балки и вида нагрузки; приближенно для всех сечений балки можно взять

$$\psi = \frac{\lambda^2 L^2}{\lambda^2 L^2 + \pi^2}, \quad (16)$$

здесь  $L$  — пролет балки.

### ДВУХСЛОЙНАЯ БАЛКА С УПРУГИМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СВЯЗЯМИ И БЕЗ СВЯЗЕЙ СДВИГА

Некоторые тонкостенные конструкции, содержащие мощный продольный элемент (хребтовую балку), собственной изгибной жесткостью которого пренебречь нельзя, можно свести к расчетной схеме двух

балок, соединенных упругими поперечными связями (рис. 3, а). Обозначим (рис. 3, б)  $v$  — прогиб;  $\varphi$  — угол поворота (положительный по часовой стрелке);  $M$  — изгибающий момент в сечении;  $Q$  — поперечная сила;  $EJ$  — изгибная жесткость;  $q$  — интенсивность внешней погонной нагрузки на участке от  $x = c$  до  $x = d$ ;  $p$  — погонная интенсивность «отпора» связей;  $P$  — внешняя сосредоточенная сила, приложенная в сечении  $x = a$ ;  $M$  — сосредоточенный изгибающий момент (положительный по часовой стрелке), действующий в сечении  $x = b$ .

Всем величинам, относящимся к балке I—I или II—II, приписывается индекс соответственно 1 или 2.

Интенсивность отпора и разность прогибов поясов связаны зависимостью

$$p = -\kappa (v_1 - v_2). \quad (17)$$

Написав дифференциальное уравнение упругой линии для каждого пояса, получим совместную систему

$$\left. \begin{aligned} v_1^{IV} + \alpha_1 v_1 - \alpha_1 v_2 &= \frac{q_1(x)}{E_1 J_1}; \\ v_2^{IV} + \alpha_2 v_2 - \alpha_2 v_1 &= \frac{q_2(x)}{E_2 J_2}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

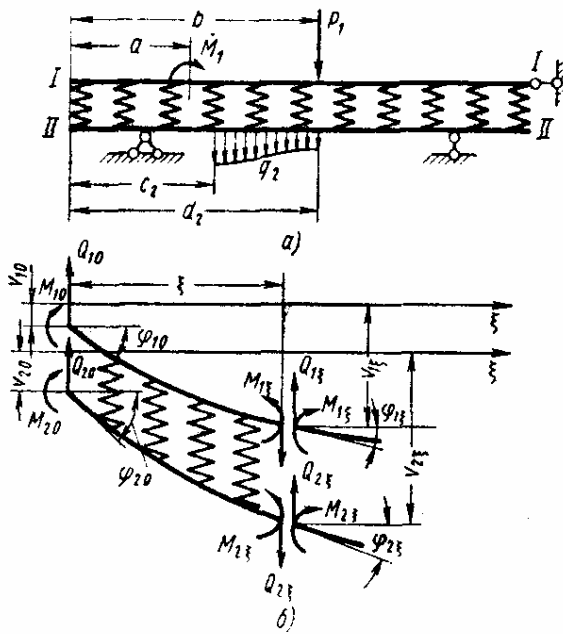


Рис. 3

где

$$\alpha_1 = \frac{\kappa}{E_1 J_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\kappa}{E_2 J_2}. \quad (19)$$

Если ввести безразмерную абсциссу  $\xi = \frac{x}{L}$ , где  $L = \sqrt[4]{\frac{4}{\alpha_1 + \alpha_2}}$ , и постоянные интегрирования выразить через начальные параметры (рис. 3, б), то полное решение системы (18) примет вид

$$\left. \begin{aligned} v_{1\xi} = \frac{\alpha_1 L^4}{4} & \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + A_\xi \right) v_{10} + (1 - A_\xi) v_{20} + \right. \\ & + \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \xi + B_\xi \right) L \varphi_{10} + (\xi - B_\xi) L \varphi_{20} - \\ & - \left( \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \xi^2 + C_\xi \right) \frac{L^2 M_{10}}{E_1 J_1} - \left( \frac{1}{2} \xi - C_\xi \right) \frac{L^2 M_{20}}{E_2 J_2} - \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{\alpha_2}{6\alpha_1} \xi^3 + D_\xi \right) \frac{L^3 Q_{10}}{E_1 J_1} - \left( \frac{1}{6} \xi^3 - D_\xi \right) \frac{L^3 Q_{20}}{E_2 J_2} - \\
& - \frac{L_2}{E_1 J_1} \sum \left( \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \xi^2 + C_{\xi-a} \right) \dot{M}_1 - \\
& - \frac{L^2}{E_2 J_2} \sum \left( \frac{1}{2} \xi^2 - C_{\xi-a} \right) \dot{M}_2 + \frac{L^3}{E_1 J_1} \int_{c_1}^{d_1} \left( \frac{\alpha_2}{6\alpha_1} \xi^3 + \right. \\
& \left. + D_{\xi-u} \right) q_1(u) du + \frac{L^3}{E_2 J_2} \int_{c_2}^{d_2} \left( \frac{1}{6} \xi^3 - D_{\xi-u} \right) q_2(u) du + \\
& + \frac{L^3}{E_1 J_1} \sum \left( \frac{\alpha_2}{6\alpha_1} \xi^3 + D_{\xi-b} \right) P_1 + \\
& + \frac{L^3}{E_2 J_2} \sum \left( \frac{1}{6} \xi^3 - D_{\xi-b} \right) \Big] P_2; \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{2\xi} = & \frac{\alpha_2 L^4}{4} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + A_\xi \right) v_{20} + (1 - A_\xi) v_{10} + \right. \\
& + L \varphi_{20} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \xi + B_\xi \right) + L \varphi_{10} (\xi - B_\xi) - \\
& - \frac{L^2 M_{20}}{E_2 L_2} \left( \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \xi^2 + C_\xi \right) - \frac{L^2 M_{10}}{E_1 J_1} \left( \frac{1}{2} \xi^2 - C_\xi \right) - \\
& - \frac{L^3 Q_{20}}{E_2 J_2} \left( \frac{\alpha_1}{6\alpha_2} \xi^3 + D_\xi \right) - \frac{L^3 Q_{10}}{E_1 J_1} \left( \frac{1}{6} \xi^3 - D_\xi \right) - \\
& - \frac{L^2}{E_2 J_2} \sum \dot{M}_2 \left( \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \xi^2 + C_{\xi-a} \right) - \\
& - \frac{L^2}{E_1 J_1} \sum \dot{M}_1 \left( \frac{1}{2} \xi^2 - C_{\xi-a} \right) + \\
& + \frac{L^3}{E_2 J_2} \int_{c_2}^{d_2} \left( \frac{\alpha_1}{6\alpha_2} \xi^3 + D_{\xi-u} \right) q_2(u) du + \\
& + \frac{L^3}{E_1 J_1} \int_{c_1}^{d_1} \left( \frac{1}{6} \xi^3 - D_{\xi-u} \right) q_1(u) du + \\
& + \frac{L^3}{E_2 J_2} \sum \left( \frac{\alpha_1}{6\alpha_2} \xi^3 + D_{\xi-b} \right) P_2 + \\
& + \frac{L^3}{E_1 J_1} \sum \left( \frac{1}{6} \xi^3 - D_{\xi-b} \right) \Big] P_1. \quad (21)
\end{aligned}$$

Таблицы входящих в эти выражения гиперболо-тригонометрических функций

$$\left. \begin{aligned} A_{\xi} &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi; & C_{\xi} &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi; \\ B_{\xi} &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi); \\ D_{\xi} &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

приведены в работе [11].

Из выражений (20) и (21), пользуясь зависимостями

$$\varphi = \frac{1}{L} \cdot \frac{dv}{d\xi}; \quad M = \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{d^2v}{d\xi^2}; \quad Q = \frac{EJ}{L^3} \cdot \frac{d^3v}{d\xi^3}; \quad (23)$$

$$\frac{dA_{\xi}}{d\xi} = -4D_{\xi}; \quad \frac{dB_{\xi}}{d\xi} = A_{\xi}; \quad \frac{dC_{\xi}}{d\xi} = B_{\xi}; \quad \frac{dD_{\xi}}{d\xi} = C_{\xi}. \quad (24)$$

легко получить общие формулы для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в любом сечении обоих поясов. Подробнее см. работу [2].

### УЧЕТ СИЛ ТРЕНИЯ И КОНСТРУКЦИОННОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ

Соединение слоев составного стержня связями (заклепками, болтами) обычно осуществляют с предварительным натягом, в результате чего слои оказываются прижаты один к другому. Взаимному сдвигу слоев при этом будут препятствовать не только соединяющие элементы, но и силы трения между слоями. Учет сил трения при расчете составных стержней сводится к экспериментальному и теоретическому определению той части сдвигающего усилия по шву, которая воспринимается силами трения [9, 12]. Замечательной особенностью жестких соединений в составных стержнях является их способность рассеивать энергию при циклическом нагружении. Это явление называют конструкционным демпфированием [3]. Сущность конструкционного демпфирования заключается в том, что деформация жестко соединенных элементов может вызвать проскальзывание по контактным поверхностям, в результате чего силы трения совершают необратимую работу, которая исключается из общего баланса энергии деформации. В зависимости от характера касательных сил, действующих по контактным поверхностям, различают швы чисто фрикционные и упруго-фрикционные. В чисто фрикционных швах касательные усилия, взаимодействуя между слоями, реализуются только в виде сил трения; в упруго-фрикционных швах взаимному проскальзыванию слоев препятствуют как силы трения, так и упругие связи сдвига. Рассматривая конструкционное демпфирование в составных балках, примем следующие обозначения:

- $\alpha P$ ,  $\alpha M$  — текущее значение внешней статически изменяющейся нагрузки;  
 $P$ ,  $M$  — амплитудное значение соответственно внешней силы или момента;  
 $\alpha$  — безразмерный коэффициент нагрузки, изменяющийся в пределах  $r \leq \alpha \leq 1$ ;  
 $r$  — характеристика цикла;  
 $v$  — прогиб под силой  $\alpha P$ ;  
 $\varphi$  — угол поворота в сечении, где приложен момент  $\alpha M$ ;  
 $b$ ,  $h$ ,  $J = \frac{bh^3}{12}$  — размеры и момент инерции одного слоя;  
 $p$  — удельное давление на контактной поверхности;  
 $q$  — погонные касательные усилия по шву;  
 $f$  — коэффициент сухого трения;  
 $q_0 = fp$  — предельное значение касательного усилия, соответствующее моменту проскальзывания;  
 $\Psi$  — площадь петли гистерезиса.

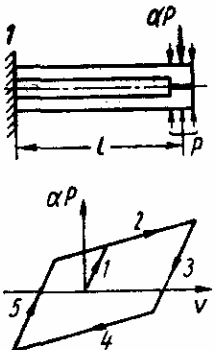
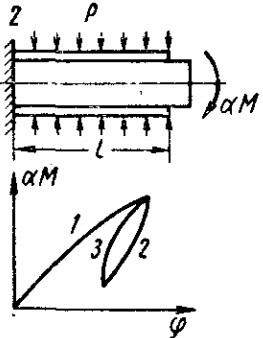
Предполагается, что силы трения на контактных поверхностях постоянные и отвечают закону сухого трения, а напряжения и деформации во всех элементах составного стержня связаны законом Гука. Схемы простейших составных балок, зависимости между действующей нагрузкой и перемещением на различных этапах нагружения, а также петли конструкционного гистерезиса приведены в табл. 2. Схема 1 представляет собой простейшую модель рессоры, составленной из двух листов, которые заделаны в корневом сечении и имеют точечный контакт на другом конце [1, 10]. На первом этапе нагружения, когда еще нет проскальзывания по контакту, балка рассчитывается как П-образная статически неопределимая рама. На втором этапе нагружения, после того как произошло проскальзывание по контактной плоскости, монолитность системы нарушается и она будет деформироваться как две балки. При разгрузке наблюдаются два аналогичных этапа, только силы трения, изменяясь, перейдут через нуль и в конце третьего этапа достигнут предельной величины с обратным знаком.

В схемах 2 и 3 проскальзывание между балкой и накладками, как на этапе нагружения, так и на этапе разгрузки начинается на свободном конце накладки одновременно с приложением нагрузки и распространяется к заделке по мере изменения нагрузки.

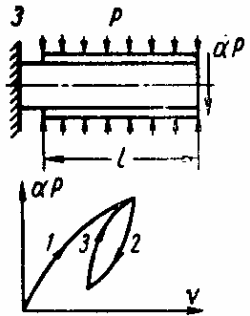
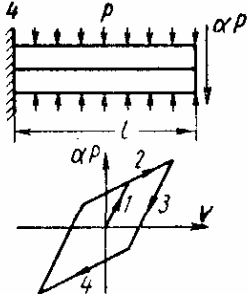
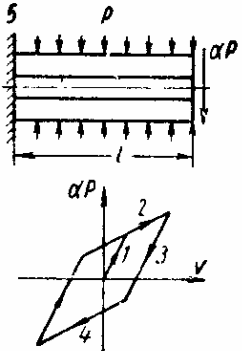
В схемах 4 и 5 на первом этапе, когда касательные усилия по швам меньше предельного значения, составная балка работает как балка монолитного сечения. Вторым этапом ( $q = q_0$ ) соответствует совместному изгибу пакета балок, состоящего из отдельных слоев. Процесс разгрузки состоит из двух этапов, аналогичных процессу нагружения. В работах [3, 6] исследовано конструкционное демпфирование в балках, состоящих из многих слоев. Отличительной особенностью конструкционного демпфирования является возможность в определенных пределах управлять потерями на трение. На рис. 4 приведены два характерных графика, полученных практически и экспериментально в работе [13] и относящихся к схеме 4 табл. 2. Кривая 1 показывает изменение коэффициента поглощения  $\psi$  в зависимости от величины  $p$  поперечного прижатия слоев. Кривая 2 представляет зависимость коэффициента поглощения от амплитуды наибольшего напряжения  $\sigma_{\max}$  в заделке, отнесенного к пределу выносливости  $\sigma_{-1}$ . Коэффициент поглощения



## 2. Конструкционное демпфирование в составных балках

Схема балки и петля гистерезиса	Процесс нагружения	Процесс разгрузки
	<p style="text-align: center;"><i>Балка с точечным контактом</i></p> $v_1 = \frac{\alpha P l^3}{24 E J};$ $v_2 = \frac{\alpha P l^3}{6 E J} - \frac{(\alpha P + 2 P^*) f h l^2}{4 E J};$ $v_3 = \frac{(\alpha + 3 r) P l^3}{24 E J} + \frac{r P + 2 P^*}{4 E J} f h l^2;$ $\Psi = \frac{l}{4 E J \sqrt{a b}} [P a (P + 4 P^*) - r P b (r P + 4 P^*) - 32 P^{*2}];$ $a = \frac{(l - 2 f h)^2}{f h l}; \quad b = \frac{(l + 2 f h)^2}{f h l}$	$v_4 = \frac{(\alpha + 3) P l^3}{24 E J} - \frac{(P + 2 P^*) f h l^2}{4 E J};$ $v_5 = \frac{\alpha P l^3}{6 E J} + \frac{\alpha P + 2 P^*}{4 E J} f h l^2;$
	<p style="text-align: center;"><i>Чистый изгиб балки с накладками</i></p> $\Phi_1 = \frac{\alpha (1 - k) M l}{E J_0} + \frac{(\alpha k M)^2}{2 q_0 h E J_0};$ $\Phi_2 = \frac{\alpha (1 - k) M l}{E J_0} - \frac{(1 + \alpha^2 - 2 r - 2 \alpha r) (k M)^2}{4 q_0 h E J_0};$ $\Psi = \frac{k^2 M^3 (1 - r)^3}{12 q_0 h E J_0}$	$\Phi_3 = \frac{\alpha (1 - k) M l}{E J_0} + \frac{(1 + 2 \alpha - \alpha^2) (k M)^2}{4 q_0 h E J_0};$

Продолжение табл. 2

Схема балки и петля гистерезиса	Процесс нагружения	Процесс разгрузки
	<p>Поперечный изгиб балки с накладками</p> $v_1 = \frac{\alpha P l^3}{3EJ_0} - \frac{q h l^3}{6EJ_0} \times$ $\times \frac{\alpha^2 k^2 P^2 - 2\alpha P q h}{(\alpha P k - q h)^2};$ $v_3 = \frac{\alpha P l^3}{3EJ_0} - \frac{q h l^3}{6EJ_0} \times$ $\times \left[ \frac{P^2 k^2 + 2P k q h}{(P k + q h)^2} - \right.$ $\left. - 2 \frac{(1-r)^2 P^2 k^2 + 4(1-r) P k q h}{[(1-r) P k + 2q h]^2} + \right.$ $\left. + 2 \frac{(\alpha-r)^2 P^2 k^2 + 4(\alpha-r) P k q h}{[(\alpha-r) P k + 2q h]^2} \right]$ $k = \frac{F h^2}{2J}; \quad J = J_0 + \frac{F h^2}{2};$ <p><math>F</math> — площадь сечения накладок</p>	$v_2 = \frac{\alpha P l^3}{3EJ_0} - \frac{q h l^3}{6EJ_0} \times$ $\times \left[ \frac{P^2 k^2 + 2P k q h}{(P k + q h)^2} - \right.$ $\left. - 2 \frac{(1-\alpha)^2 P^2 k^2 + 4(1-\alpha) P k q h}{[(1-\alpha) P k + 2q h]^2} + \right.$ $\left. + 2 \frac{(\alpha-r)^2 P^2 k^2 + 4(\alpha-r) P k q h}{[(\alpha-r) P k + 2q h]^2} \right]$ $\Psi = \frac{P^3 k^2 l^3 q h}{6EJ_0 (kP + qh)^2}$
	<p>Поперечный изгиб двухслойной консоли</p> $v_1 = \frac{\alpha P l^3}{24EJ}; \quad v_3 = \frac{P l^3}{24EJ} (3 - 3\alpha_0 + \alpha);$ $v_2 = \frac{P l^3}{24EJ} (4\alpha - 3\alpha_0); \quad v_4 = \frac{P l^3}{24EJ} (3\alpha_0 + 4\alpha);$ $\Psi = \frac{2q_0 h l^3 (3P - 4q_0 h)}{9EJ}$	
	<p>Поперечный изгиб трехслойной консоли</p> $v_1 = \frac{\alpha P l^3}{81EJ}; \quad v_3 = \frac{P l^3}{81EJ} (8 - 8\alpha_0 + \alpha);$ $v_2 = \frac{P l^3}{81EJ} (9\alpha - 8\alpha_0); \quad v_4 = \frac{P l^3}{81EJ} (8\alpha_0 + 9\alpha);$ $\Psi = \frac{32\alpha_0 (1 - \alpha_0) P^2 l^3}{81EJ}$	
<p>Примечание. В схемах 4 и 5 и в формулах <math>P</math> — равнодействующая распределенной нагрузки.</p>		

определяется как отношение рассеянной энергии к наибольшей энергии деформации одного слоя.

В балках с упруго-фрикционными связями взаимному проскальзыванию слоев препятствуют не только силы трения, но и связи сдвига, которые предполагаются равномерно распределенными по контактной поверхности. Например, для двухслойной балки, нагруженной на конце силой  $\alpha P$  (схема 4 табл. 2), будем иметь: на первом этапе нагружения, когда составная балка деформируется как балка монолитного сечения,

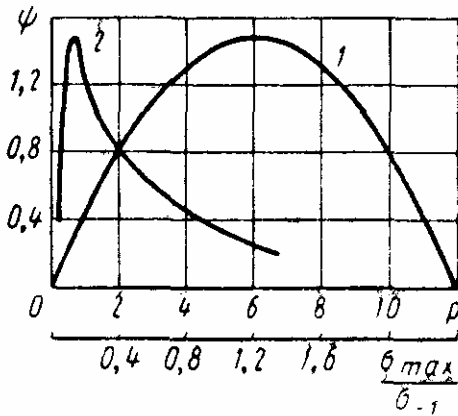


Рис. 4

$$v_1 = \frac{\alpha P l^3}{24 E J};$$

на втором этапе нагружения, после того как величина касательных усилий по шву превзойдет предельное значение, вступают в действие связи сдвига. Тогда на контактной поверхности интенсивность погонных касательных усилий будет  $q = q_0 + 2cu$ , где  $u$  —

взаимный сдвиг слоев в текущем сечении, который определяют из уравнения

$$u'' - \beta u = - \frac{3(\alpha - \alpha_0) P}{E b h^2}.$$

Прогиб на конце

$$v_2 = \frac{P l^3}{24 E J} \left[ (4\alpha - 3\alpha_0) - 9(\alpha - \alpha_0) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{\beta^2 l^2} + \frac{\text{th } \beta l}{\beta^3 l^3} \right) \right].$$

В этих зависимостях  $c$  — коэффициент жесткости связей сдвига в  $\text{кг/см}^2$

$$\beta = \frac{8c}{E b h};$$

$\alpha_0$  — коэффициент нагрузки, при которой  $q = q_0$ .

В процессе разгрузки будут два аналогичные этапа. В частности,

$$v_3 = \frac{P l^3}{24 E J} \left[ \alpha + 9(1 - \alpha_0) \left( \frac{1}{\beta^2 l^2} - \frac{\text{th } \beta l}{\beta^3 l^3} \right) \right].$$

Петля гистерезиса имеет такой же вид, как для чисто фрикционного соединения (схема 4). Площадь петли гистерезиса

$$\Psi = \frac{8q_0 l^3}{E b h^2} (3P - 4q_0 h) \left( \frac{1}{\beta^2 l^2} - \frac{\text{th } \beta l}{\beta^3 l^3} \right).$$

В работе [3] рассмотрен ряд схем с упруго-фрикционными связями. Влияние конструкционного демпфирования на процесс колебания систем, обладающих этим свойством, см. т. II.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Расчет листовых рессор. В кн. «Расчеты на прочность в машиностроении». Т. 1, М., Машгиз, 1957.
2. Калинин Н. Г. К вопросу о совместном изгибе балок, соединенных упругими связями. Научно-технический сборник Рижского высшего инженерно-авиационного училища, вып. 3, Рига, 1951.
3. Калинин Н. Г. и др. Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях. Изд-во АН Латвийской ССР, 1960.
4. Калинин Н. Г. и Лебедев Ю. А. Конструкционное демпфирование в тонкостенной балке. Изд-во АН Латвийской ССР, 1959, 12.
5. Калинин Н. Г. Две задачи о конструкционном демпфировании в двухслойной балке. Вопросы динамики и прочности. Вып. VII. Рига, Изд-во АН Латвийской ССР, 1961.
6. Калинин Н. Г. Конструкционное демпфирование в многослойной балке переменного сечения. Вопросы динамики и прочности. Вып. VIII. Рига изд-во АН Латвийской ССР, 1962.
7. Кушелев Н. Ю. О расчете составной дощато-гвоздевой балки. Труды Ленинградского индустриального института, 1937, № 3.
8. Рабинович А. И. Составные балки из брусьев. «Проект и Стандарт» 1937, № 7.
9. Ржаницын А. Р. Теория составных стержней строительных конструкций. М., Госстройиздат, 1948.
10. Страхов Г. И. Характеристика демпфирования в двухслойной рессоре. Изв. АН Латвийской ССР, 1958, 10.
11. Уманский А. А. Специальный курс строительной механики. Ч. I. М., ОНТИ, 1935.
12. Шапиро Г. А. Работа заклепочных соединений стальных конструкций. Стройвоенмориздат, 1949.
13. Goodman L. E. a. Klump J. H. Analysis of slip Damping J. Appl. mech. 1956, 3.

---

## **Глава 15**

### **СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

Стержневую систему называют статически неопределимой, если усилия во всех ее стержнях не могут быть определены только из уравнений статики. Статическая неопределимость обуславливается наличием в системе избыточных (лишних) связей, помимо того минимума, который необходим для образования геометрически неизменяемого скелета этой системы. Число избыточных связей называют степенью или порядком статической неопределимости.

Статически неопределимые системы отличаются от статически определимых тем, что в них смещение опор, изменение температуры, неточность изготовления стержней приводят, как правило, к изменению напряженного состояния. Усилия в стержнях статически неопределимых систем зависят от геометрических размеров поперечных сечений стержней и от модулей упругости материала, поэтому расчет статически неопределимых систем носит проверочный характер — вначале назначают размеры (или соотношения между размерами) и материал стержней, а потом производят расчет. В случае изменений размеров расчет повторяют.

В зависимости от конструктивных особенностей системы ее рассчитывают обычно или методом сил, или методом перемещений, или смешанным методом. Существуют также различные модификации этих методов.

#### **МЕТОД СИЛ**

##### **Канонические уравнения метода сил**

Метод сил является универсальным методом расчета статически неопределимых систем. Простая идея, лежащая в основе метода, ясный геометрический смысл всех величин, входящих в уравнения, канонизированная последовательность вычислительных операций делают этот метод незаменимым для расчета простых статически неопределимых систем. Основная трудность его применения к конструкциям, имеющим высокую степень статической неопределимости, связана с решением совместной системы многих линейных уравнений. Однако использование цифровых вычислительных машин в значительной мере снимает и эту трудность.

Для основной системы, нагруженной заданной нагрузкой и лишними неизвестными, исходя из принципа независимости действия сил, записывают условия равенства нулю суммарных перемещений по направлению каждой из отброшенных связей. При этом получаем следующую систему канонических уравнений метода сил:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\delta_{ik}$  — побочные коэффициенты уравнений, которые определяют по формуле Мора как единичные упругие перемещения от силы  $X_i = 1$ , по направлению силы  $X_k = 1$  (или наоборот):

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k ds}{EF} + \sum \int \frac{\kappa \bar{Q}_i \bar{Q}_k ds}{GF}; \quad (2)$$

$\delta_{ii}$  — главные коэффициенты уравнений, определяемые по формуле Мора

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{N}_i^2 ds}{EF} + \sum \int \frac{\kappa \bar{Q}_i^2 ds}{GF}; \quad (3)$$

$\Delta_{ip}$  — свободные члены уравнений, определяют по формуле Мора как перемещения в основной системе по направлению лишнего неизвестного от внешней нагрузки:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_i ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_p \bar{N}_i ds}{EF} + \sum \int \frac{\kappa Q_p \bar{Q}_i ds}{GF}. \quad (4)$$

Если внешним воздействием является изменение температуры, то

$$\Delta_{it} = \sum \int \frac{M_t \bar{M}_i ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_t \bar{N}_i ds}{EF} + \\ + \sum \int \frac{\kappa Q_t \bar{Q}_i ds}{GF} + \sum \int N_i \alpha t ds + \sum \int \frac{\bar{M}_i \alpha t ds}{h}. \quad (5)$$

В этих формулах:  $M_p$ ,  $N_p$ ,  $Q_p$  — соответственно изгибающий момент, осевое и поперечное усилия от заданной нагрузки;  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{N}_i$ ,  $\bar{Q}_i$  — изгибающий момент, осевое и поперечное усилия от  $X_i = 1$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения;  $t$  — изменение температуры;  $h$  — расстояние между крайними волокнами сечения.

Для балок и плоских рам основным видом деформаций является изгиб, а деформациями, обусловленными усилиями  $N$  и  $Q$ , можно пренебречь. В этом случае

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EJ}; \quad \delta_{ik} = \delta_{ki} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}; \\ \Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_i ds}{EJ}. \quad (6)$$

Формулы (2) и (6) относятся к плоским системам.

Интегралы Мора для балок и для рам, состоящих из прямых стержней, удобно вычислять по правилу Верещагина.

После того как из решения уравнений (1) определены лишние неизвестные, усилия в элементах данной системы находят по принципу независимости действия сил:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_p + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_n \bar{M}_n = \\ &= M_p + \sum_{i=1}^n X_i \bar{M}_i; \\ N &= N_p + \sum_{i=1}^n X_i \bar{N}_i; \\ Q &= Q_p + \sum_{i=1}^n X_i \bar{Q}_i. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

При двух—трех лишних неизвестных решение уравнений (1) не вызывает затруднений. Если же данная система обладает высокой степенью статической неопределимости, то получается большое число канонических уравнений, решение которых становится операцией, требующей большого труда, значительного времени и определенных вычислительных навыков. При числе неизвестных порядка 10 обычно пользуются алгоритмом Гаусса, который представляет собой упорядоченный способ последовательного исключения неизвестных. В табл. 1 в общем виде

## 1. Алгоритм Гаусса для четырех канонических уравнений

Номер уравнения и действия	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$\Delta$	Контроль $\delta$
1	$\delta_{11}$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	$\delta_{14}$	$\Delta_1$	$s_1$
I	●	$-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$	$-\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}$	$-\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}}$	$-\frac{\Delta_1}{\delta_{11}}$	$-\frac{s_1}{\delta_{11}}$
2	$\delta_{21}$	$\delta_{22}$	$\delta_{23}$	$\delta_{24}$	$\Delta_2$	$s_2$
I · $\delta_{21}$	●	$-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \delta_{21}$	$-\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} \delta_{21}$	$-\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}} \delta_{21}$	$-\frac{\Delta_1}{\delta_{11}} \delta_{21}$	$-\frac{s_1}{\delta_{11}} \delta_{21}$
$\Sigma=2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\Delta_2^{(1)}$	$s_2^{(1)}$
II		●	$-\frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}$	$-\frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}$	$-\frac{\Delta_2^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}$	$-\frac{s_2^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}$
3	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{33}$	$\delta_{34}$	$\Delta_3$	$s_3$
I · $\delta_{31}$	●	●	$-\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} \delta_{31}$	$-\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}} \delta_{31}$	$-\frac{\Delta_1}{\delta_{11}} \delta_{31}$	$-\frac{s_1}{\delta_{11}} \delta_{31}$
II · $\delta_{23}^{(1)}$		●	$-\frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \delta_{31}$	$-\frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \delta_{31}$	$-\frac{\Delta_2^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \delta_{31}$	$-\frac{s_2^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \delta_{31}$
$\Sigma=3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\Delta_3^{(2)}$	$s_3^{(2)}$
III			●	$-\frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}$	$-\frac{\Delta_3^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}$	$-\frac{s_3^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}$
4	$\delta_{41}$	$\delta_{42}$	$\delta_{43}$	$\delta_{44}$	$\Delta_4$	$s_4$
I · $\delta_{41}$	●	●	●	$-\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}} \delta_{41}$	$-\frac{\Delta_1}{\delta_{11}} \delta_{41}$	$-\frac{s_1}{\delta_{11}} \delta_{41}$
II · $\delta_{24}^{(1)}$		●	●	$-\frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \delta_{41}$	$-\frac{\Delta_2^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \delta_{41}$	$-\frac{s_2^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \delta_{41}$
III · $\delta_{34}^{(2)}$			●	$-\frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \delta_{41}$	$-\frac{\Delta_3^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \delta_{41}$	$-\frac{s_3^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \delta_{41}$



Продолжение табл. 1

Номер уравнения и действия	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$\Delta$	Контроль $s$
$\Sigma = 4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	$\Delta_4^{(3)}$	$s_4^{(3)}$
				•	$-\frac{\Delta_4^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}$	

приведена схема решения по способу Гаусса четырех канонических уравнений:

1.  $\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_1 = 0.$
2.  $\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_2 = 0.$
3.  $\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_3 = 0.$
4.  $\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_4 = 0.$

По схеме видно, что исключение проводится по шагам. Первый шаг — уравнение 1 решается относительно  $X_1$  (получается уравнение I). Второй шаг — из уравнений 2 и 1 исключают неизвестное  $X_1$ , полученное уравнение решают относительно  $X_2$  (II). Третий шаг — из уравнений 3, I и II исключают  $X_1$  и  $X_2$ , и полученное уравнение решают относительно  $X_3$  (III). Четвертый шаг — из уравнений 4, I, II и III исключают  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , из полученного уравнения находят  $X_4$ . После этого, последовательно из уравнений III, II и I определяют  $X_3$ ,  $X_2$ ,  $X_1$ . Контроль вычислений ведут суммированием коэффициентов.

Применение современных вычислительных машин к расчету сложных статически неопределимых систем предполагает матричное представление всех исходных и искомых параметров задачи. Это обстоятельство, в частности, послужило причиной широкого интереса, который проявили в последнее время специалисты в области прочности к использованию матричного исчисления в различных задачах строительной механики.

В матричной форме система канонических уравнений метода сил запишется так:

$$AX = -\Delta p; \quad (8)$$

здесь  $A$  — матрица единичных перемещений (или матрица податливости), которая является квадратичной и симметричной ( $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ ) матрицей:

$$A = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}; \quad (9)$$

$X$  — матрица-столбец лишних неизвестных

$$X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix}; \quad (10)$$

$\Delta_p$  — матрица-столбец действительных перемещений (свободных членов):

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \\ \vdots \\ \Delta_{np} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Исследование детерминанта матрицы  $A$  показало, что сам детерминант и все его главные миноры всегда положительны, также положительны след матрицы, ее квадратичная форма и все характеристические числа.

Первостепенное значение при расчете статически неопределимых систем имеет рациональный выбор основной системы. Хорошо выбранная основная система упрощает канонические уравнения, уменьшает затраты труда и времени, повышает точность расчета.

Рациональной следует считать такую основную систему, для которой наибольшее число побочных коэффициентов  $\delta_{ik}$  обращается в нуль. Это значит, что в рациональной основной системе большое число эпюр единичных усилий обладают свойствами ортогональности. Этого можно добиться удачным выбором лишних неизвестных, их группировкой, использованием симметрии данной системы.

#### Статически неопределимые балки

Для закрепления балки как плоского тела достаточно трех связей. Если связей будет больше, то балка окажется статически неопределимой. Степень статической неопределимости балки равна числу лишних опорных связей. Примеры статических балок показаны на рис. 1 (степень статической неопределимости обозначена  $n$ ).

Степень статической неопределимости многопролетной неразрезной балки равна числу опор без двух (заделка накладывает три связи).

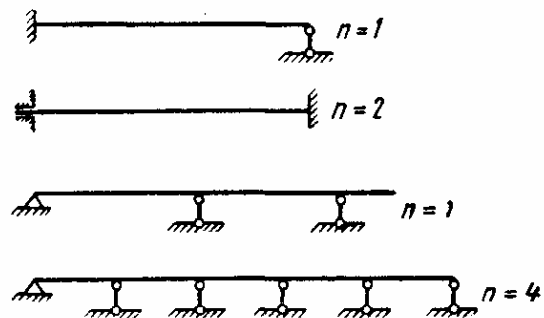


Рис. 1



по формуле Мора получаются следующие зависимости для коэффициентов и свободных членов:

$$\delta_{i-1,i} = \frac{l_i}{6E_i J_i}; \quad \delta_{ii} = \frac{1}{3} \left( \frac{l_i}{E_i J_i} + \frac{l_{i+1}}{E_{i+1} J_{i+1}} \right);$$

$$\Delta_{ip} = \frac{\omega_i a_i}{l_i E_i J_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} E_{i+1} J_{i+1}}, \quad (13)$$

здесь  $\omega_i$  — площадь эпюры моментов только от нагрузки в пролете,  $a_i, b_i$  — расстояния до центра тяжести площади соответственно от левой и правой опор  $i$ -го пролета (рис. 2, в).

Если жесткость  $EJ$  постоянная по всей длине балки, то

$$\delta_{i-1,i} = \frac{l_i}{6EJ}; \quad \delta_{ii} = \frac{1}{3EJ} (l_i + l_{i+1});$$

$$\Delta_{ip} = \left( \frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \frac{1}{EJ}. \quad (14)$$

В этом случае  $i$ -е уравнение трех моментов принимает вид

$$X_{i-1} l_i + 2X_i (l_i + l_{i+1}) + X_{i+1} l_{i+1} = -6 \left( \frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right). \quad (15)$$

Заметим, что заделанный конец балки формально можно заменить дополнительным пролетом, у которого  $EJ = \infty$  или  $l_0 = 0$ . Однопролетные статически неопределимые балки также целесообразно рассчитывать, пользуясь уравнениями трех моментов. Решать систему трехчленных уравнений удобно путем последовательного исключения неизвестных, идя навстречу снизу вверх и сверху вниз.

### Плоские статически неопределимые рамы

Степень статической неопределимости плоской рамы может быть определена из следующих соображений: замкнутый бесшарнирный контур является 3 раза статически неопределимым; постановка шарнира понижает степень статической неопределимости на единицу, а разрез по целому сечению снимает три связи. Для плоских рам, которые могут быть многократно статически неопределимыми, особое значение приобретает выбор основной системы. Например, для одноэтажной бесшарнирной многопанельной рамы (рис. 3, а) основную систему удобно выбирать, делая разрез в каждой панели (рис. 3, б). Идея такого выбора заключается в том, что эпюра изгибающих моментов от каждого лишнего неизвестного распространяется на стержни только одной панели. При этом не будут равны нулю побочные коэффициенты, которые получаются путем перемножения эпюр в двух смежных панелях. Все побочные коэффициенты при лишнях неизвестных, разделенных хотя бы одной панелью, равны нулю. Так, для 15 раз статически неопределимой рамы получим  $\delta_{ik} = 0$  при  $k = 1, 2, 3; i = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ ;

при  $k = 4, 5, 6$ ;  $i = 10, 11, 12, 13, 14, 15$  и при  $k = 7, 8, 9$ ;  $i = 13, 14, 15$ ; из 15 канонических уравнений шесть уравнений будут содержать

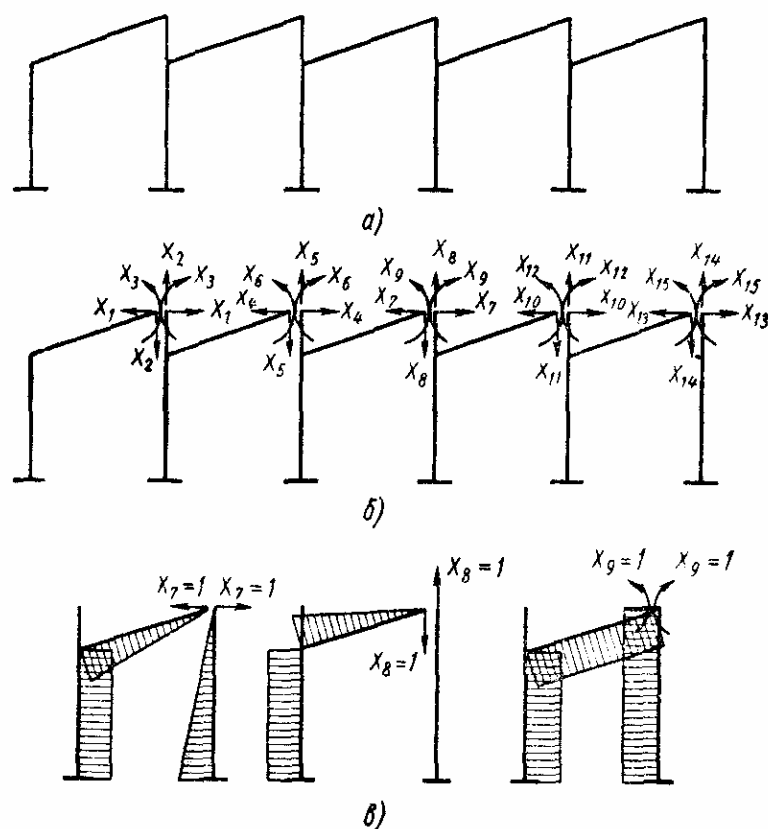


Рис. 3

по шесть лишних неизвестных и девять уравнений по девять лишних неизвестных.

**Пример 1.** Замкнутая прямоугольная рама (рис. 4, а) вообще 3 раза статически неопределима. Однако рама симметрична относительно средних вертикальной и горизонтальной осей. Нагрузка также симметричная.

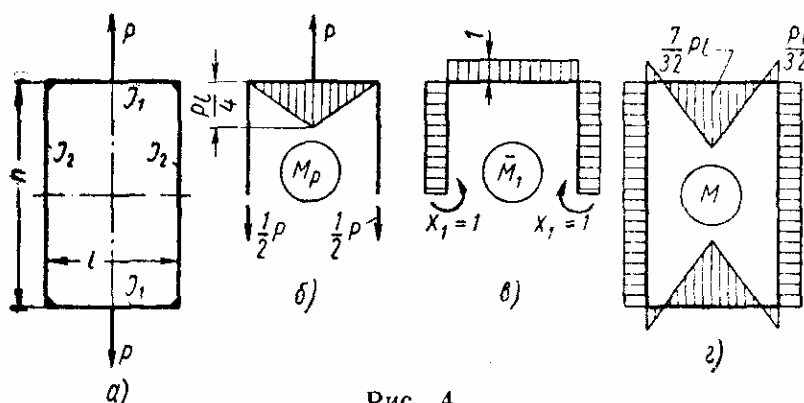


Рис. 4

В симметричных сечениях от симметричной нагрузки действуют равные симметричные усилия. Поэтому достаточно рассмотреть только одну половину рамы. Разрезая раму по горизонтальной оси симметрии, получим: поперечные силы в сечении, как кососимметричные факторы, равны нулю; осевые силы находятся из равновесия отсеченной части рамы и равны  $\frac{1}{2} P$  (рис. 4, б); остается только одна неизвестная — изгибающий момент  $X_1$  (рис. 4, в). Если взять,

например,  $h = 1.5l$ ;  $J_1 = 2J_2$ , то, перемножая эпюры  $M_p$  и  $\bar{M}_1$ , получим  $\Delta_{1p} = -\frac{Pl^2}{8EJ_1}$ , а по эпюре  $\bar{M}_1$  найдем  $\delta_{11} = \frac{h}{EJ_2} + \frac{l}{EJ_1} = \frac{4l}{EJ_1}$ . Тогда

$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{Pl}{32}$ . Окончательная эпюра моментов показана на рис. 4, г.

**Пример 2.** Многоэтажная рама (рис. 5, а) 9 раз статически неопределима, и при неудачном выборе основной системы можно получить девять уравнений, каждое из которых содержит все девять лишних неизвестных. Задача значительно упрощается, если воспользоваться симметрией рамы. Пусть рама по своим геометрическим и упругим параметрам симметрична относительно средней вертикальной оси. Выбирая основную систему так, чтобы она была также

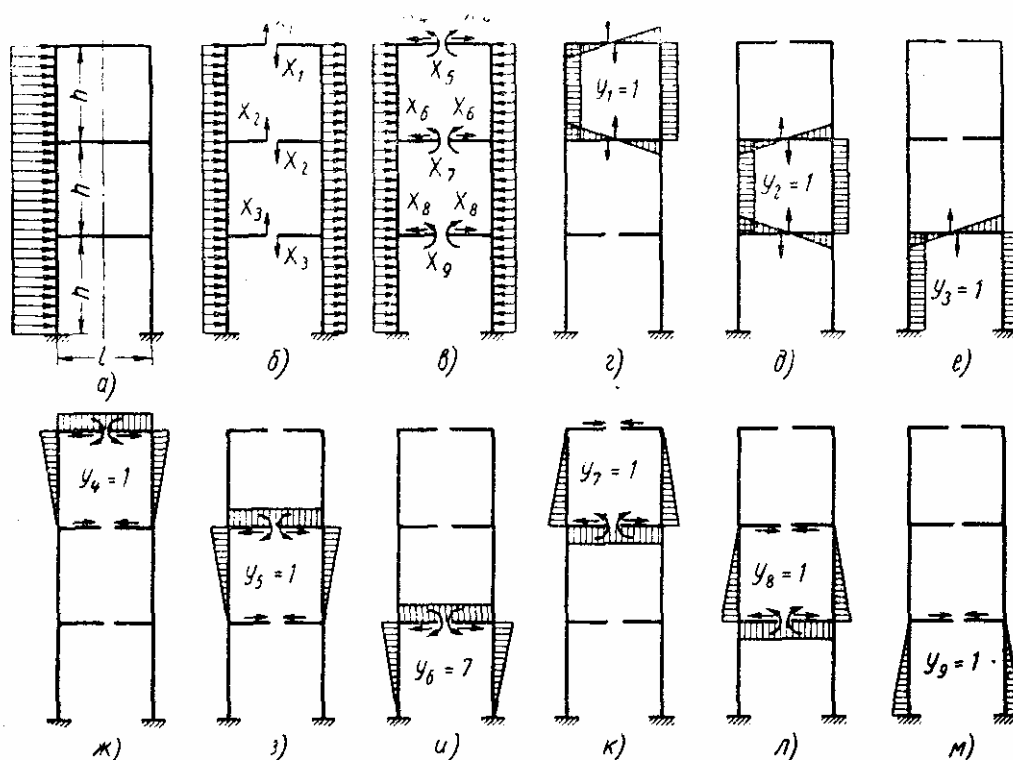


Рис. 5

симметрична относительно средней вертикальной оси, разрежем каждый ригель по оси симметрии. В общем случае в каждом сечении действуют три усилия, из которых осевая сила и изгибающий момент являются симметричными усилиями, и кососимметричная поперечная сила. Преобразуем внешнюю нагрузку, приложенную к раме, на кососимметричную (рис. 5, б) и симметричную (рис. 5, в). От кососимметричной нагрузки будут только кососимметричные лишние неизвестные  $X_1, X_2, X_3$ , а от симметричной нагрузки — только симметричные лишние неизвестные  $X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$ . В качестве лишних неизвестных примем такую группу сил, которая дает изгибающие моменты только в стержнях одного яруса. На рис. 5, г—е показаны групповые кососимметричные лишние неизвестные и эпюры моментов от них; на рис. 5, ж—м видны групповые симметричные лишние неизвестные и соответствующие им эпюры моментов.

Перемножение симметричных эпюр на кососимметричные дает нуль ( $\delta_{ik} = 0$  при  $i = 1, 2, 3$  и  $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ). Следовательно, использование симметрии в данном случае приводит к тому, что система из девяти уравнений распадается на две группы, одна из которых состоит из трех уравнений относительно кососимметричных лишних неизвестных, а вторая — из шести уравнений относительно шести симметричных лишних неизвестных.

Выбранная группировка лишних неизвестных обращает также в нуль побочные коэффициенты, получаемые путем перемножения эпюр в двух несмежных ярусах ( $\delta_{13} = \delta_{46} = \delta_{67} = \delta_{79} = 0$ ). Определив групповые лишние неизвестные, можно путем алгебраического сложения найти усилия в отброшенных связях и построить окончательные суммарные эпюры.

Основываясь на понятии так называемого «упругого центра», можно так преобразовать лишние неизвестные для бесшарнирного замкнутого контура, что все эпюры моментов от них будут взаимноортогональны. При этом система канонических уравнений перестает быть совместной. В теории матриц доказывается, что квадратную симметричную матрицу всегда можно преобразовать в квазидиагональную матрицу, однако, как правило, такое преобразование практически себя не оправдывает.

### Плоскопространственные статически неопределимые рамы

Плоскопространственными называют рамы, у которых стержни расположены в одной плоскости, а нагрузка действует из этой плоскости. В поперечных сечениях такой рамы в общем случае будут возникать поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ , нормальные к плоскости

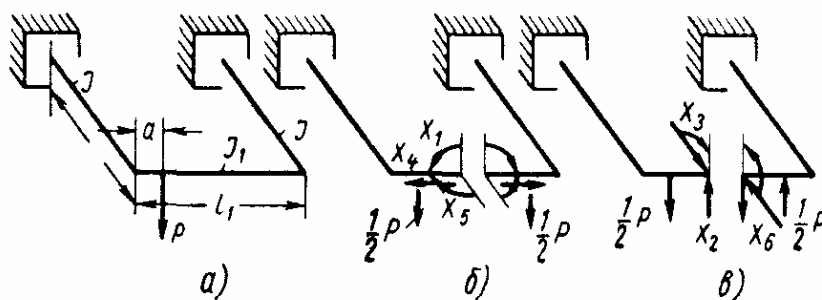


Рис. 6

рамы, и крутящий момент  $K$ . Усилия, лежащие в плоскости рамы, равны нулю. Формулы Мора для вычисления коэффициентов и свободных членов в канонических уравнениях метода сил принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ip} &= \sum \int \frac{M_p \bar{M}_i ds}{EJ} + \sum \int \frac{K_p \bar{K}_i ds}{GJ_T} + \sum \int \frac{\kappa Q_p \bar{Q}_i ds}{GF}; \\ \delta_{ik} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{K}_i \bar{K}_k ds}{GJ_T} + \sum \int \frac{\kappa \bar{Q}_i \bar{Q}_k ds}{GF}; \\ \delta_{ii} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{K}_i^2 ds}{GJ_T} + \sum \int \frac{\kappa \bar{Q}_i^2 ds}{GF}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $\kappa$  — безразмерный коэффициент, учитывающий неравномерность касательных напряжений при изгибе и зависящий от формы сечения стержня. Кроме ранее введенных обозначений, здесь  $GJ_T$  — жесткость на кручение.

**Пример 3.** Раскрыть статическую неопределимость рамы, показанной на рис. 6, а. Данная плоскопространственная рама симметрична относительно средней горизонтальной оси. Преобразуем нагрузку на симметричную

(рис. 6, б) и кососимметричную (рис. 6, в). Выберем основную систему, разрезав раму по оси симметрии. Из шести лишних неизвестных, действующих в разрезе  $X_1$ ,  $X_4$  и  $X_5$  — симметричные,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_6$  — кососимметричные. Однако усилия  $X_4$ ,  $X_5$  и  $X_6$ , действующие в плоскости рамы, равны нулю. Остаются симметричная неизвестная  $X_1$  и кососимметричные —  $X_2$  и  $X_3$ . Эпюры изгибающих и крутящих моментов от внешней нагрузки и единичных значений лишних неизвестных показаны в табл. 2. Пренебрегая деформациями от поперечной силы, по формулам (16) найдем для симметричной нагрузки

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pa^2}{2EJ_1} - \frac{Pal}{2GJ_T}; \quad \delta_{11} = \frac{l_1}{EJ_1} + \frac{2l}{GJ_T}, \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}};$$

от кососимметричной нагрузки

$$\Delta_{2p} = -\frac{1}{6} \left[ \frac{l^3}{EJ} + \frac{a^2(3l_1 - 2a)}{EJ_1} + \frac{3all_1}{GJ_T} \right]; \quad \Delta_{3p} = -\frac{Pl^2}{2EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{2l^3}{3EJ} + \frac{l_1^3}{12EJ_1} + \frac{l_1^2}{2GJ_T}; \quad \delta_{33} = \frac{2l}{EJ} + \frac{l_1}{GJ_T}; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{l^2}{EJ}$$

Подставляя эти выражения в уравнения

$$\delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

и решая их, найдем  $X_1$  и  $X_2$ . Если принять  $l_1 = l$ ;  $J_1 = J$ ;  $a = \frac{1}{4}l$ ;  $EJ = 1,3GJ_T$ , то получим

$$X_1 = 0,246Pl; \quad X_2 = 1,71P; \quad X_3 = -0,737Pl.$$

Имея значения лишних неизвестных и пользуясь принципом суперпозиции, легко построить суммарные эпюры изгибающих и крутящих моментов.

### Статически неопределимые фермы

Узлы фермы считают шарнирными, а потому статическая неопределимость обуславливается наличием избыточных (лишних) стержней. Степень статической неопределимости может быть подсчитана как разность между имеющимся числом стержней и минимальным числом стержней, необходимым для образования геометрически неизменяемой фермы данной схемы. Обозначим  $C$  — число стержней данной фермы;  $U$  — число узлов;  $L$  — степень статической неопределимости.

Для плоских ферм  $L = C - 2U + 3$ , если ферма прикрепленная, и  $L = C - 2U$ , если ферма свободная.

Предварительный подбор сечений стержней статически неопределимой фермы можно сделать приближенно, рассматривая ее как балку на двух опорах (рис. 7, а), или как неразрезную балку (рис. 7, б), или как раму (рис. 7, в). При этом предполагается, что изгибающий момент в сечении воспринимается поясами, а поперечная сила — раскосами. Распределять силу по перекрестным раскосам можно поровну или в заданном отношении.

Если ферма многократно статически неопределима, то для нее, так же как при расчете рам, очень важно выбрать рациональную основную систему, при которой наибольшее число побочных коэффициентов  $\delta_{ik}$  ( $i \neq k$ ) в канонических уравнениях обращаются в нуль. На рис. 7 двумя чертами отмечены стержни, которые выгодно перерезать, приняв усилия в них за лишние неизвестные.



## 2. Эпюры изгибающих и крутящих моментов от внешней нагрузки и единичных значений лишних неизвестных

Симметричная нагрузка		Кососимметричная нагрузка		
$\frac{1}{2} P$	$x_1$	$\frac{1}{2} P$	$x_2$	$x_3$
Изгиб				
Кручение				

В ферме на рис. 7, а с перекрестными раскосами за лишние неизвестные следует принять усилия в раскосах, сохраняя симметрию основной системы. При этом каждая лишняя неизвестная будет уравновешиваться в пределах одной панели, а потому все коэффициенты  $\delta_{ik}$  с индексами неизвестных для несмежных панелей будут равны нулю. Кроме того, использование симметрии и группировка лишних неизвестных может значительно упростить расчет. Для фермы, показанной на рис. 7, б, удобно перерезать один из поясов в панелях непосредственно слева или справа от промежуточной опоры. В ферме арочного типа за лишнюю неизвестную выгодно принять усилие в стержне 3. Основную систему рассчитывают отдельно от внешней нагрузки и от единичного значения каждого лишнего неизвестного. Стержни фермы работают только на растяжение — сжатие, а потому формула Мора для коэффициентов и свободных членов принимает вид

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{N_p \bar{N}_i l}{EF}; \quad \delta_{ii} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 l}{EF}; \quad \delta_{ik} = \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k l}{EF}. \quad (17)$$

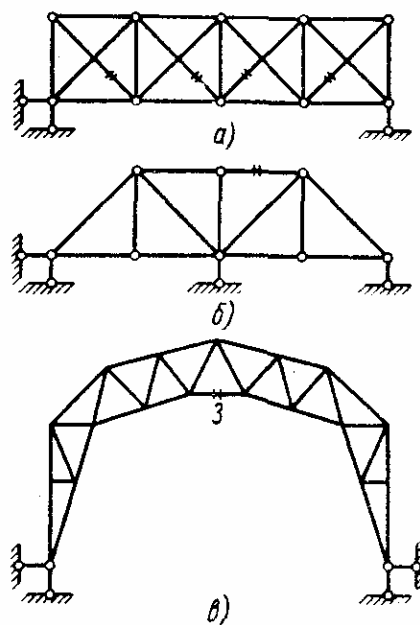


Рис. 7

Если внешним воздействием является изменение температуры, то

$$\Delta_{it} = \alpha \sum N_i t l. \quad (18)$$

Вычисления целесообразно вести по форме табл. 3.

### 3. Расчет фермы с двумя лишними неизвестными

Номер стержня	$\frac{l}{F}$	$N_p$	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_2$	$\frac{\bar{N}_1^2 l}{F}$	$\frac{\bar{N}_2^2 l}{F}$	$\frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2 l}{F}$	$\frac{N_p \bar{N}_1 l}{F}$	$\frac{N_p \bar{N}_2 l}{F}$	$N$
					$E\delta_{11}$	$E\delta_{22}$	$E\delta_{12}$	$E\Delta_{1p}$	$E\Delta_{2p}$	

## МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### Общие сведения

При этом методе за основные неизвестные принимают угловые и линейные перемещения, через которые выражают усилия в стержнях и опорные реакции. Метод всесторонне разработан и успешно применяется при расчете плоских статически неопределимых рам, которые имеют много избыточных связей и малую степень упругой подвижности. Степень упругой линейной подвижности рамы определяется как число степеней свободы механизма, который получается из данной рамы после замены жестких узлов шарнирами; степень угловой подвижности равна числу жестких узлов (опорные узлы не учитывают, так как для них перемещения равны нулю или заданы).

Основную систему выбирают такую, в которой после введения дополнительных связей ликвидируется подвижность узлов рамы. Дополнительные связи вводят с таким расчетом, чтобы в основной системе каждый стержень рамы являлся балкой, у которой оба конца заделаны или один конец заделан, а другой шарнирно оперт. Для этих случаев имеется набор формул и таблиц, которые устанавливают зависимость усилий на концах балки от перемещений и которые используют как рабочий аппарат при определении коэффициентов в уравнениях метода. Деформациями

растяжения — сжатия и сдвига стержней рамы обычно пренебрегают. Наиболее эффективен метод расчета (применительно к раме с неподвижными узлами), когда нет линейных упругих перемещений и узлы могут только поворачиваться.

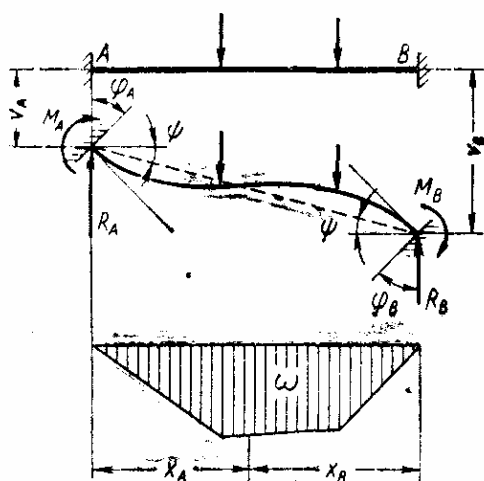


Рис. 8

### Основные зависимости для одного стержня

На концах стержня (рис. 8), стоящего в раме между узлами A и B, имеем изгибающие моменты M, поперечные силы R, прогибы u, углы поворота φ. Все величины

на рис. 8 показаны с их положительными знаками, каждой из них приписывается индекс соответствующего узла.

Для стержня с заделанными концами концевые усилия и перемещения связаны зависимостями

$$\left. \begin{aligned} M_A &= 2i (2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi) - \frac{2\omega}{l^2} (3x_B - l); \\ M_B &= 2i (\varphi_A + 2\varphi_B - 3\psi) + \frac{2\omega}{l^2} (3x_A - l); \\ R_A &= -\frac{6i}{l} (\varphi_A + \varphi_B - 2\psi) - \frac{6\omega}{l^3} (x_A - x_B) + R_A^0; \\ R_B &= \frac{6i}{l} (\varphi_A + \varphi_B - 2\psi) + \frac{6\omega}{l^3} (x_A - x_B) + R_B^0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

от внешней нагрузки для стержня, шарнирно опертого на концах;  $R_A^0$ ,  $R_B^0$  — концевые поперечные силы (опорные реакции) от внешней нагрузки, действующей на стержень с шарнирными опорами по концам;  $x_A$ ,  $x_B$  — расстояния соответственно от опор  $A$  и  $B$  до центра тяжести площади  $\omega$

$$\left. \begin{aligned} M_A &= 3i(\varphi_A - \psi) - \frac{3\omega}{l^2} x_B; \\ R_A &= -\frac{3i}{l}(\varphi_A - \psi) + \frac{3\omega}{l^3} x_B + R_A^0; \\ R_B &= \frac{3i}{l}(\varphi_A - \psi) - \frac{3\omega}{l^3} x_B + R_B^0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

## Канонические уравнения метода перемещений

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} &= 0; \\ . &. . . . . \\ . &. . . . . \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

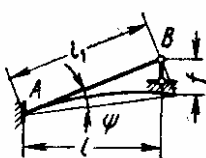

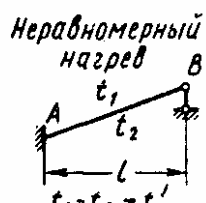
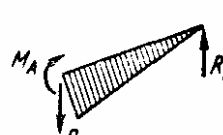

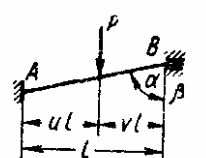
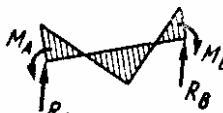
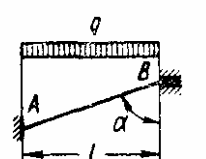
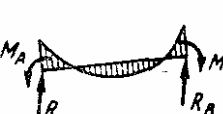
## Расчет рам с вертикальными стойками

В этом случае удобнее пользоваться уравнениями метода перемещений в развернутом виде, когда в них вписаны формулы для всех коэффициентов. Напишем уравнения применительно к трехэтажной

## 4. Реакции балок постоянного сечения

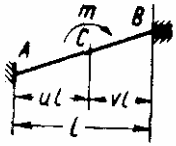

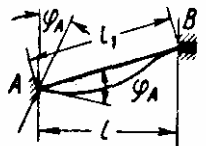
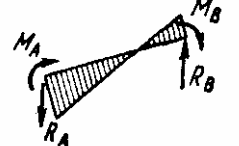
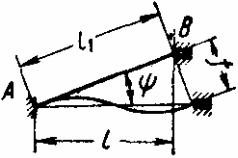
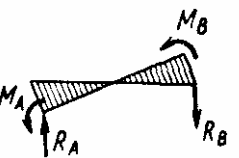
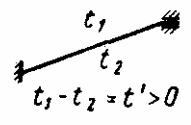

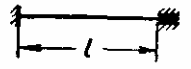
№ по пор.	Схема сооружения и воздействия на него	Эпюры изгибающих моментов и реакции *	Формулы
Балка с одним защемленным и другим шарнирно опертым концом			
1			$M_A = -\frac{Pl}{2} v (1 - v^2);$ $M_C = \frac{Pl}{2} uv (3 - u);$ $R_A = \frac{Pv}{2} (3 - v^2);$ $R_B = Pu^2 \left(1 + \frac{v}{2}\right) = \frac{Pu^2}{2} (3 - u)$
2			$M_A = -\frac{ql^2}{8};$ $R_A = \frac{5}{8} ql; \quad R_B = \frac{3}{8} ql$
3			$M_A = \frac{m}{2} (1 - 3v^2);$ $R_A = -R_B = \frac{3m}{2l} (1 - v^2)$
4			$M_A = \frac{3EJ}{l_1} \varphi_A;$ $R_A = -R_B = -\frac{3EJ}{l_1^2} \varphi$
5			$M_A = -\frac{3EJ}{l_1^2} \varphi = -\frac{3EJ}{l_1} \psi;$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l_1^2} \varphi = \frac{3EJ}{l_1} \psi$
* Ординаты отложены со стороны растянутого волокна			

Продолжение табл. 4

№ по пор.	Схема сооружения и воздействия на него	Эпюры изгибающих моментов и реакции *	Формулы
6			$M_A = -\frac{3EJ}{l_1^2} f = -\frac{3EJ}{l_1} \psi;$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{ll_1^2} f =$ $= \frac{3EJ}{ll_1} \psi$
7	Неравномерный нагрев 		$M_A = \frac{3EJat'}{2d},$ <p>где <math>d</math> — высота поперечного сечения; <math>a</math> — коэффициент линейного расширения</p> $R_A = -R_B = -\frac{3EJat'}{2dt}$
8	Воздействия №1-6 	—	Формулы для такой балки получают из предыдущих при помощи подстановки $l_1 = l$
Балка с защемленными концами			
9			$M_A = -uv^2Pl;$ $M_B = u^2vPl;$ $M_C = 2u^2v^2Pl;$ $R_A = v^2(1+2u)P;$ $R_B = u^2(1+2v)P$
10			$M_A = -M_B = -\frac{ql^2}{12};$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

\* Ординаты отложены со стороны растянутого волокна.

Продолжение табл. 4

№ по пор.	Схема сооружения и воздействия на него	Эпюры изгибающих моментов и реакции*	Формулы
11			$M_A = v(2 - 3v)m;$ $M_B = u(2 - 3u)m;$ $R_A = -R_B = -6uv \frac{m}{l}$
12			$M_A = \frac{4EJ}{l_1} \varphi_A;$ $M_B = \frac{2EJ}{l_1} \varphi_A;$ $R_A = -R_B = -\frac{6EJ}{ll_1} \varphi_A$
13			$M_A = M_B = -\frac{6EJ}{l_1^2} f =$ $= -\frac{6EJ}{l_1} \psi;$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l_1^2 l} f =$ $= \frac{12EJ}{l_1 l} \varphi$
14	<p>Неравномерный нагрев</p>  <p><math>t_1 - t_2 = t' &gt; 0</math></p>		$M_A = -M_B = \frac{EJat'}{d},$ <p>где <math>d</math> — высота поперечного сечения;</p> $R_A = R_B = 0$
15	 <p>Воздействия № 7-12</p>	—	<p>Формулы для такой балки получают из предыдущих при помощи подстановки</p> $l_1 = l$

\* Ординаты отложены со стороны растянутого волокна.

раме, показанной на рис. 9, а. Степень линейной подвижности рамы равна 3 (числу ярусов), степень узловой подвижности — 11 (число узлов кроме шарнирного узла А). Неизвестные углы поворота дополнительных защемлений узлов обозначены через  $\varphi_i$ . Условие равновесия

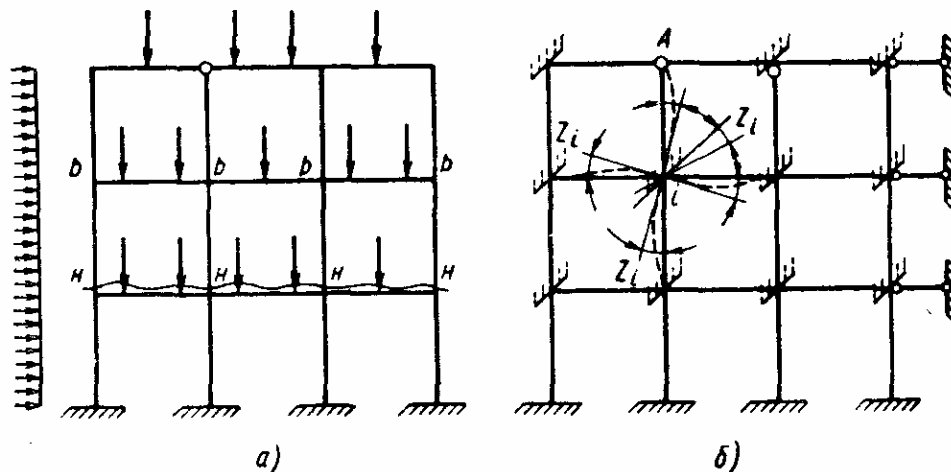


Рис. 9

узла  $i$  (равенство нулю суммы реактивных моментов), в котором сходятся четыре стержня  $i1, i2, i3, i4$  (рис. 10, а), дает следующее уравнение

$$\varphi_i \sum_{k, s} (2i_{ik} + 1,5i_{is}) + \sum_k i_{ik} \varphi_k - 3 \sum_k i_{ik} \psi_{ik} - 1,5 \sum_s i_{is} \psi_{is} + \\ + 0,5 \sum M_i^p = 0, \quad (22)$$

здесь индексы  $k$  относятся к тем стержням, подходящим к узлу  $i$ , у которых другой конец  $k$  заделан; индексы  $s$  относятся к стержням, у которых другой конец шарнирно оперт;  $\varphi_i$  — угол поворота узла  $i$ ;  $\varphi_k$  — угол поворота узла  $k$ ;  $\psi = \frac{\delta}{l}$  — угол перекоса стержней;  $\sum M^p$  — сумма моментов в узле  $i$  от внешней нагрузки.

Положительное направление углов  $\varphi_i, \varphi_k$  и  $\psi$  — по часовой стрелке.

При горизонтальных ригелях и четырех стержнях, сходящихся в узле, уравнение (22) содержит не более семи неизвестных (пять углов и два линейных перемещения).

Разрезая все стойки в пределах одного этажа у нижних узлов и проектируя на горизонталь силы, действующие на отсеченную часть рамы, получим следующее уравнение:

$$6 \sum_k \frac{i}{l} (\varphi_B + \varphi_H) - 12 \sum_k \frac{i}{l} \psi + 3 \sum_s \frac{i}{l} \varphi_{H(s)} - 3 \sum_s \frac{i}{l} \psi + \\ + \sum_k Q_{Hk} + \sum_s Q_{Hs} + Q = 0, \quad (23)$$



здесь  $\varphi_v$ ,  $\varphi_n$  — углы поворота соответственно верхнего и нижнего концов стойки;  $\varphi_{n(v)}$  — угол поворота верхнего или нижнего конца стойки, у которой другой конец шарнирно оперт;  $Q_n$  — поперечная сила в разрезанном сечении стойки (в узлах  $n$ );  $Q$  — сумма проекций на горизонталь всех сил, лежащих выше узлов  $v$ .

Суммирование по  $k$  относится к стойкам с обоими заделанными концами, суммирование по  $s$  — к стойкам, у которых один конец заделан, а второй шарнирно оперт.

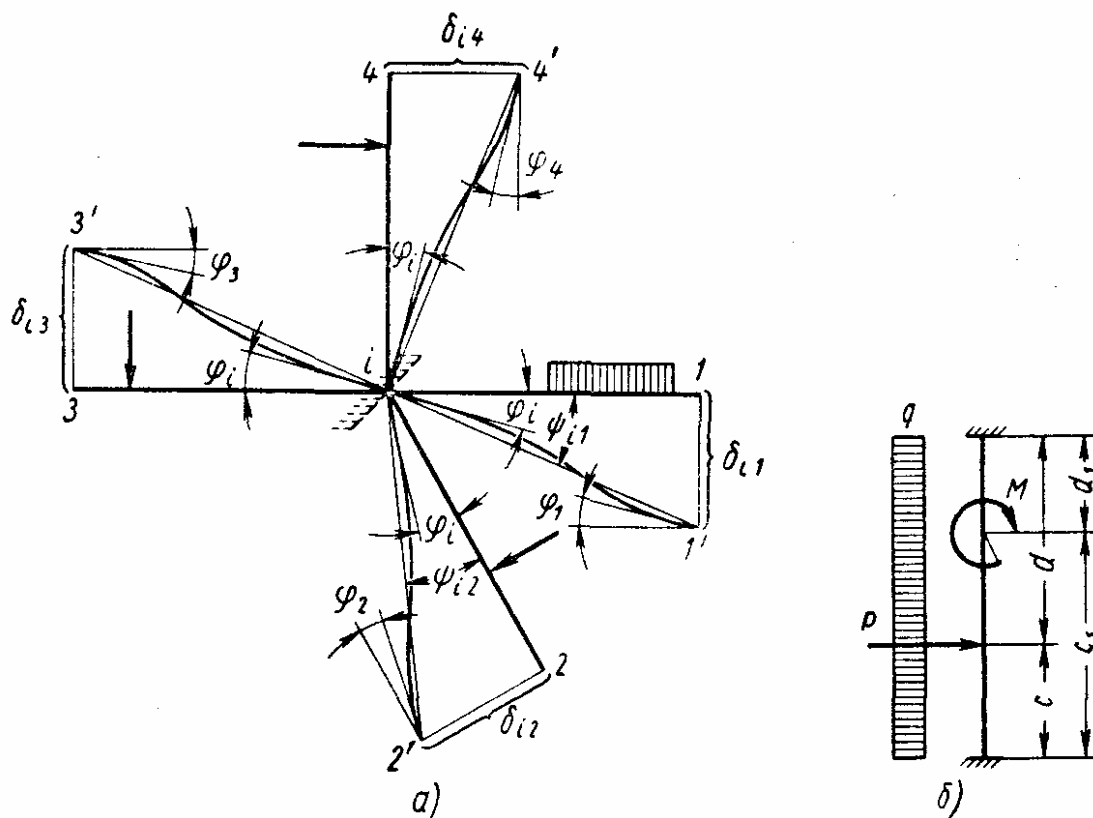


Рис. 10

Если концы стойки заделаны (рис. 10, б), то

$$Q_{nk} = \frac{ql}{2} + \frac{Pc^2(3l - 2c)}{l^3} + \frac{6Mc_1d_1}{l^3}. \quad (24)$$

Для стойки, у которой верхний конец шарнирно оперт, а нижний заделан

$$Q_{ns} = \frac{5ql}{8} + \frac{Pd(3l^2 - d^2)}{3l^3} - \frac{3M(l^2 - d_1^2)}{2l^3}. \quad (25)$$

Если у стойки верхний конец заделан, а нижний шарнирно оперт, то

$$Q_{ns} = \frac{3ql}{8} + \frac{Pc^2(3l - c)}{2l^3} + \frac{3M(l^2 - d_1^2)}{2l^3}. \quad (26)$$

## Расчет рамной эстакады

Из уравнений (22) и (23) как частный случай получается система уравнений для свободной рамной эстакады (на рис. 11 показаны два смежных пролета).

Уравнение равновесия моментов в узле

$$\varphi_{i-1} r_{i-1, i} + \varphi_i r_{ii} + \varphi_{i+1} r_{i, i+1} + u r_{iu} + r_{ip} = 0. \quad (27)$$

Число таких уравнений будет равно числу  $n$  стоек. Уравнение суммы проекций сил на горизонталь

$$\sum_{i=1}^n r_{iu} \varphi_i + u r_{uu} + r_{up} = 0. \quad (28)$$

Коэффициенты этих уравнений: главные

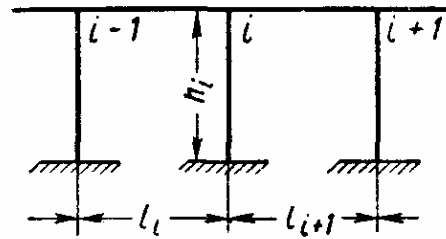


рис. 11

$$r_{ii} = 4(i_i + i_{i+1} + i_i^c), \quad r_{uu} = 12 \sum_{i=1}^n \frac{i_i^c}{h_i}; \quad (29)$$

побочные

$$r_{i, i-1} = r_{i-1, i} = 2i_i; \quad r_{i, i+1} = r_{i+1, i} = 2i_{i+1}; \quad r_{iu} = r_{ui} = -\frac{6i_i^c}{h_i}; \quad (30)$$

свободные члены

$$r_{ip} = \sum M_i^p; \quad r_{up} = \sum Q_i^c + Q. \quad (31)$$

здесь  $i_i$  — погонная жесткость ригеля  $i$ ;  $i_i^c$  — погонная жесткость стойки  $i$ ;  $u$  — горизонтальное перемещение первого узла;  $\sum Q_i^c$  — поперечная сила в нижнем сечении стойки от нагрузки, непосредственно приложенной к стойке;  $Q$  — сумма горизонтальных проекций сил, приложенных к ригелю;  $\sum M_i^p$  — сумма моментов в узле  $i$  от внешней нагрузки.

## СМЕШАННЫЙ МЕТОД

Смешанным методом выгодно пользоваться при расчете рам, у которых в одной части имеется большое число избыточных связей, а в другой части — высокая степень упругой подвижности. При этом в первой части за лишние неизвестные следует взять перемещения, а во второй части — усилия. Общее положение смешанного метода изложим применительно к раме, показанной на рис. 12, а. Верхняя часть рамы дважды статически неопределима и имеет четыре степени упругой неподвижности. За лишние неизвестные принимаем усилия  $X_1$  и  $X_2$  в сечении по шарниру. В нижней части рамы имеются шесть избыточных связей и две степени подвижности. За неизвестные принимаем углы

поворота  $Z_3$  и  $Z_4$  узлов 3 и 4. Основная система изображена на рис. 12, б. Написав условия, что по направлению каждой из отброшенных связей суммарное перемещение равно нулю, суммарный реактивный момент

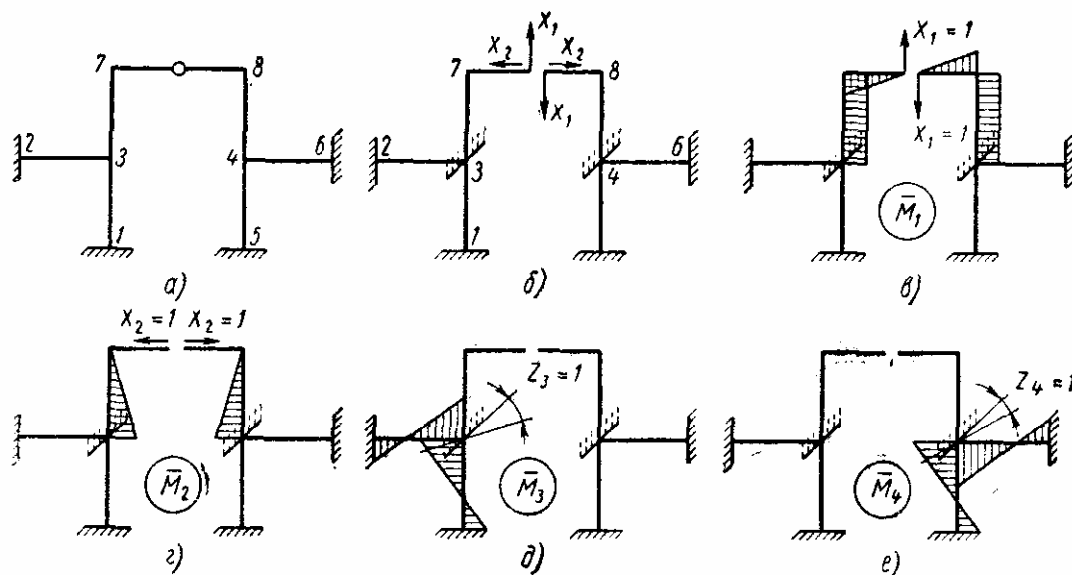


Рис. 12

в каждом дополнительном защемлении также равен нулю, получим систему канонических уравнений смешанного метода

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta'_{13}Z_3 + \delta'_{14}Z_4 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta'_{23}Z_3 + \delta'_{24}Z_4 + \Delta_{2p} &= 0; \\ r'_{31}X_1 + r'_{32}X_2 + r_{33}Z_3 + r_{34}Z_4 + R_{3p} &= 0; \\ r'_{41}X_1 + r'_{42}X_2 + r_{43}Z_3 + r_{44}Z_4 + R_{4p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Здесь коэффициенты  $\delta_{ik}$ ,  $r_{ik}$  (без штрихов) и свободные члены  $\Delta_{ip}$ ,  $R_{ip}$  имеют то же значение и находятся тем же путем, как в методе перемещений и методе сил. Смешанные коэффициенты  $\delta'_{ik} = -r'_{ki}$  имеют следующий смысл:  $\delta_{ik}$  — упругое перемещение по направлению  $i$ -й связи (отброшенной) от перемещения  $Z_k = 1$ ;  $r'_{ki}$  — реакция дополнительной связи от неизвестной  $X_i = 1$ .

На рис. 12, в—е приведены эпюры изгибающих моментов от единичных лишних неизвестных.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев А. М., Калинин Н. Г., Марьин В. А. Основы строительной механики. М., Оборонгиз, 1951.
2. Бернштейн С. А. Основы расчета статически неопределимых систем. М.—Л., ОНТИ, 1936.
3. Гвоздев А. А. Общий метод расчета сложных статически неопределимых систем. М., Изд. МИИТ, 1927.
4. Жемочкин Б. Н. Расчет рам. М., Госстройиздат, 1933.

5. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Малинин Н. Н., Макушев В. М., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. I. М., Машгиз, 1956.
6. Прокофьев И. П. Теория сооружений. 4-е изд., ч. I и II. М., Трансжелдориздат, 1947.
7. Рабинович И. М., Курс строительной механики. Ч. II. М., Госстройиздат, 1954.
8. Рабинович И. М. Методы расчета рам. Ч. I и II. М.—Л., Госстройиздат, 1934.
9. Рогницкий С. А. Расчет рам. Машгиз, 1948.
10. Справочник проектировщика. Под ред. Уманского А. А., М., Госстройиздат, 1960.
11. Уманский А. А. Строительная механика самолета. М., Оборонгиз, 1961.
12. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1960.
13. Филоненко-Бородич М. М. и др. Курс сопротивления материалов. Ч. I и II. М., Гостехтеориздат, 1956.
14. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем. Сборник статей под ред. А. П. Филина. Л., Судпромгиз, 1961.

## Глава 16

# РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

## РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

### Кривые деформации при растяжении и сжатии

**Кривые деформации.** В дальнейшем предполагаем, что материал сопротивляется одинаково растяжению и сжатию. Случай различного сопротивления см. в работе [12]. Кривая деформации при растяжении показана на рис. 1, а ( $\sigma$  — напряжение;  $\epsilon$  — относительное удлинение;

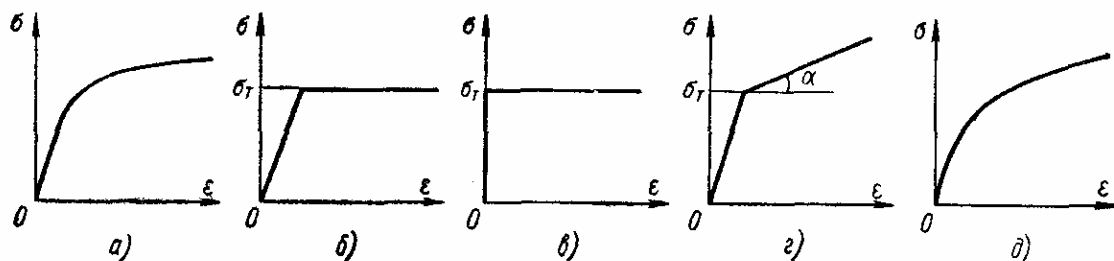


Рис. 1. Кривые деформации при растяжении

индексы в этой главе опускаются). Расчет стержней на растяжение и изгиб может быть проведен при произвольной зависимости

$$\sigma = f(\epsilon). \quad (1)$$

Обычно, для упрощения расчетов, кривую деформации схематизируют.

Идеальная упруго-пластическая схема (рис. 1, б). Изучают напряжения и упруго-пластические деформации. В пределе наступает идеально-пластическое (предельное) состояние.

Жестко-пластическая схема (рис. 1, в). Основной задачей является нахождение предельной (разрушающей) нагрузки.

Линейное упрочнение (рис. 1, г). Разыскивают напряжения и деформации системы.

Степенной закон (рис. 1, д) вида

$$\sigma = \bar{B}_1 |\varepsilon|^{\mu-1} \varepsilon, \quad (2)$$

где  $\bar{B}_1 > 0$  и  $\mu \leq 1$  — постоянные. Этот закон часто является удовлетворительным приближением и позволяет значительно упростить расчеты.

### Шарнирные стержневые системы (решетки)

**Статически определимые системы.** Усилия в стержнях не зависят от деформаций последних. В случае идеальной упруго-пластической схемы существует предельная нагрузка, которая достигается, когда напряжение, по крайней мере, в одном из стержней достигнет по величине предела текучести  $\sigma_T$ .

**Статически неопределимые системы** рассчитывают, как и упругие, с помощью условий совместности деформаций элементов. Эти условия можно составлять непосредственно; удобно их получать с помощью обобщенной теоремы Кастильяно [формула (43) гл. 3] из соотношений

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial X_j} = 0; \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где  $X_j$  — лишние неизвестные;  $\bar{R}$  — дополнительная работа системы, равная сумме дополнительных работ стержней  $\bar{R} = \sum_k \bar{R}_k$ . Для каждого

из них  $\bar{R}_k = l_k F_k R_k$ , где  $l_k$ ,  $F_k$  — длина и площадь сечения  $k$ -го стержня,

$$R_k = \int_0^{\sigma_k} \varepsilon d\sigma; \quad \varepsilon = \varphi(\sigma). \quad (4)$$

### Изгиб балок

**Упруго-пластический изгиб.** Предполагается, что сечение балки имеет две оси симметрии (рис. 2); гипотеза плоских сечений справедлива и при пластическом изгибе, следовательно,

$$\varepsilon = y\kappa, \quad (5)$$

где  $\kappa = -\frac{d^2 v}{dx^2}$  — кривизна балки;  $v = v(x)$  — прогиб балки.

Внося  $\varepsilon$  в зависимость (1), умножая на  $y$  и интегрируя по площади сечения, получаем дифференциальное уравнение изгиба

$$M = 2 \int b(y) y f(\kappa y) dy, \quad (6)$$

где  $M$  — изгибающий момент. Напряжения при изгибе распределяются по закону

$$\sigma = f(\kappa y). \quad (7)$$

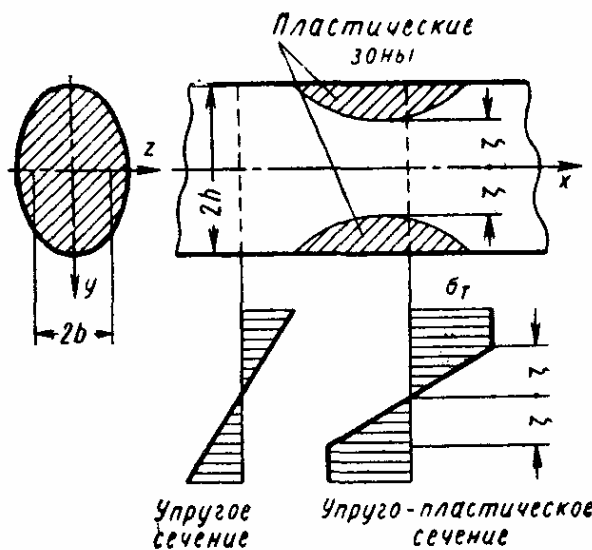
Для упругого участка балки  $f(\epsilon) = E\epsilon$ ; из уравнения (6) вытекает уравнение Бернулли

$$EJ = \frac{d^2 v}{dx^2} = -M \quad (8)$$

(здесь  $J$  — момент инерции), а из зависимости (7) — линейный закон распределения напряжений

$$\sigma = \frac{M}{J} y. \quad (9)$$

Для упруго-пластического участка балки (рис. 2) при идеальной упруго-пластической схеме (см. рис. 1, б) напряжения изгиба



$$\sigma = \begin{cases} \pm \sigma_T \frac{y}{\zeta} & \text{при } |y| \leq \zeta, \\ \pm \sigma_T & \text{при } |y| \geq \zeta, \end{cases}$$

где  $\zeta$  — расстояние в данном сечении от нейтральной плоскости балки до зоны текучести. Для величины изгибающего момента имеем формулу (напомним, что сечение имеет две оси симметрии)

$$|M| = \frac{\sigma_T}{\zeta} J_e + \sigma_T S_p. \quad (10)$$

Рис. 2. Упруго-пластический изгиб балки

где  $J_e$  — момент инерции упругого ядра сечения;  $S_p$  — удвоенный статический момент одной из пластических зон относительно нейтральной оси;

$$J_e = 4 \int_0^{\zeta} b(y) y^2 dy; \quad S_p = 4 \int_{\zeta}^h b(y) y dy.$$

Следовательно,  $\zeta = \zeta(|M|)$ . Для каждой формы поперечного сечения имеется своя зависимость  $\zeta(|M|)$ .

Пример 1. Для прямоугольного сечения (высота  $2h$ , ширина  $2b$ )

$$\frac{\zeta}{h} = \sqrt[3]{1 - \frac{|M|}{M_*}}; \quad M_* = 2bh^2\sigma_T.$$

Дифференциальное уравнение изгиба для упруго-пластического участка балки имеет вид

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \pm \frac{\sigma_T}{E} \frac{1}{\zeta(|M|)}; \quad (11)$$

знак в правой части обратен знаку изгибающего момента.

Так как изгибающий момент зависит от  $x$ , уравнение (11) интегрируется в квадратурах.

**Предельный изгибающий момент. Пластический шарнир.** С возрастанием изгибающего момента размер  $\zeta$  упругого ядра уменьшается; в пределе  $\zeta = 0$  для предельного момента

$$M_* = \sigma_T S, \quad (12)$$

где  $S$  — величина удвоенного статического момента верхней половины поперечного сечения относительно нейтральной оси; величину  $S$  называют пластическим моментом сопротивления. Отношение  $S$  к упругому моменту сопротивления  $W$  характеризует резерв сопротивления деформации при переходе за предел упругости. Это отношение достигает наименьшего значения, равного 1 для идеального профиля на изгиб; для двутаврового профиля оно несколько превышает 1, для прямоугольника равно 1,5, для круга — 1,70. Эпюра напряжений показана на рис. 3; нейтральная плоскость является плоскостью разрыва напряжений (от  $+\sigma_T$  к  $-\sigma_T$ ). При достижении предельного изгибающего момента в сечении образуется пластический шарнир, балка «надламывается», повышается в «пластический механизм», ее несущая способность исчерпывается. Предельный момент определяется формой поперечного сечения балки (табл. 1).

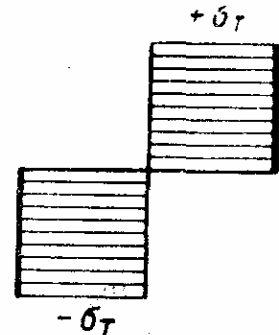


Рис. 3. Эпюра изгибающих напряжений в предельном состоянии

Предельные нагрузки для некоторых случаев изгиба простых балок приведены в табл. 2.

**Степенной закон деформирования [2].** Дифференциальное уравнение прогиба имеет вид

$$\bar{B}_1 J_m | \kappa |^{\mu-1} \kappa = -M. \quad (13)$$

где  $J_m = 4 \int_0^h y^{1+\mu} b(y) dy$  — обобщенный момент инерции (см. табл. 1).

Заметим, что в этой таблице

$$q(\mu) = \frac{2^{2+\mu}}{3+\mu} \cdot \frac{\left[ \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \right]^2}{\Gamma(2+\mu)},$$

где  $\Gamma(\ )$  — гамма-функция. График  $q(\mu)$  показан на рис. 4.

Распределение изгибных напряжений

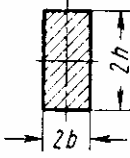
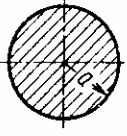
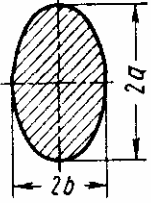
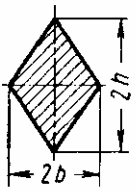
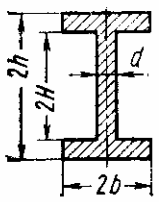
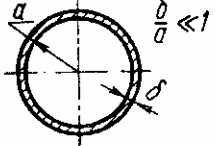
$$\sigma = \frac{M}{J_m} y^\mu \quad (y > 0). \quad (14)$$

Для отрицательных  $y$  напряжение меняет знак. Графики напряжения  $\sigma$  для различных показателей  $m = \frac{1}{\mu}$  показаны на рис. 5. Максимальное изгибающее напряжение

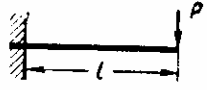
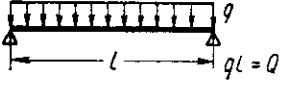
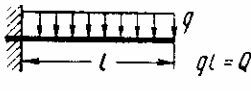
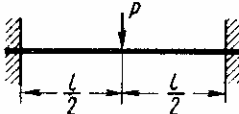
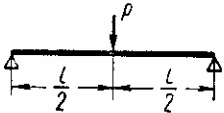
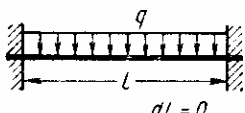
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_m}; \quad W_m = \frac{J_m}{h_1^\mu}, \quad (15)$$



1. Предельные изгибающие моменты  $M_* = \sigma_T S$  и обобщенные моменты инерции

Поперечное сечение	Предельный изгибающий момент $M_*$	Обобщенный момент инерции $J_m$
	$2bh^2\sigma_T$	$\frac{2bh^{2+\mu}}{1+\frac{\mu}{2}}$
	$\frac{4}{3} a^3\sigma_T$	$q(\mu) a^{3+\mu}$
	$\frac{4}{3} ba^2\sigma_T$	$q(\mu) ba^{2+\mu}$
	$\frac{2}{3} bh^2\sigma_T$	$\frac{4bh^{2+\mu}}{(2+\mu)(3+\mu)}$
	$[2bh^2 - H^2(2b-d)]\sigma_T$	$\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}} [dH^{2+\mu} + 2b(h^{2+\mu} - H^{2+\mu})]$
	$2a^2\delta\sigma_T$	$q(\mu)(3+\mu)a^{2+\mu}\delta$

2. Предельные нагрузки для балок

Схема	Предельная нагрузка	Схема	Предельная нагрузка
	$P_* = \frac{M_*}{l}$		$Q_* = \frac{8M_*}{l}$
	$Q_* = \frac{2M_*}{l}$		$P_* = \frac{8M_*}{l}$
	$P_* = \frac{4M_*}{l}$		$Q_* = \frac{16M_*}{l}$
Примечание. $M_*$ см. в табл. 1.			

где  $W_m$  — обобщенный момент сопротивления;  $h_1$  — расстояние наиболее удаленной точки сечения от нейтральной плоскости.

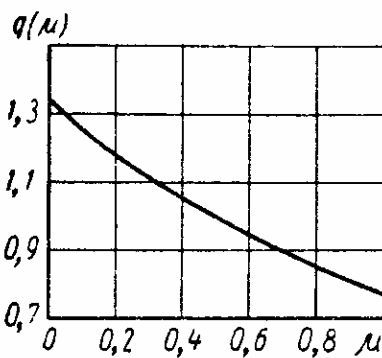


Рис. 4. График функции  $q(\mu)$

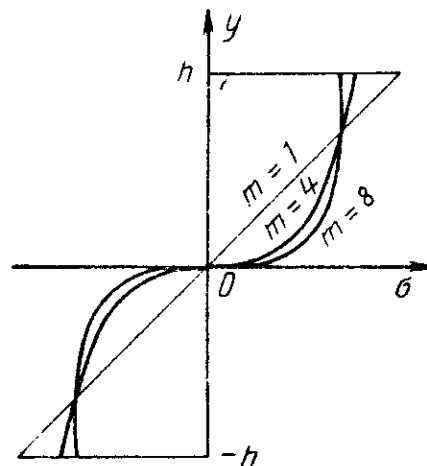


Рис. 5. Распределение напряжений при изгибе в зависимости от показателя  $m$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{D} |M|^{m-1} M, \quad (16)$$

где  $D = \frac{1}{B_1} J_m^m$  — обобщенная жесткость.

Уравнение (16) имеет решение

$$v = - \int_0^x \int_0^x \frac{1}{D} |M|^{m-1} M dx dx + C_1 x + C_2$$

здесь  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Для эффективного решения удобен графо-аналитический метод [2]. Решения для простых балок приведены в табл. 4, необходимо лишь под  $v$  понимать прогиб в точке  $A$ , под скоростью поворота  $\omega$  — поворот. Заметим, что кривизна не пропорциональна изгибающему моменту, поэтому нельзя использовать принцип сложения действий отдельных нагрузок.

**Влияние осевой силы.** Действие осевой силы заметно усложняет расчеты на изгиб (см. работы [12, 13]). Нейтральная плоскость, как и при упругом изгибе, смещается.

В идеально-пластической балке предельные значения изгибающего момента  $M$  и осевой силы  $P$  связаны некоторой зависимостью, характерной для данного поперечного сечения. Так, для прямоугольного поперечного сечения

$$\frac{M}{M_*} = 1 - \left( \frac{P}{P_*} \right)^2, \quad (17)$$

где  $M_*$  — предельный изгибающий момент при отсутствии осевой нагрузки (см. табл. 1);  $P_*$  — предельное осевое усилие при отсутствии изгибающего момента ( $P_* = F\sigma_T$ , здесь  $F$  — площадь поперечного сечения). Кривые предельного состояния для некоторых профилей показаны на рис. 6.

**Изгиб балок из материала с разным сопротивлением растяжению**

**и сжатию.** Расчет таких балок несколько сложнее, чем в симметричном случае, но также может быть проведен для различных сечений [12].

**Расчет рам и сложных балок.** Разыскание предельных нагрузок для рамных конструкций требует рассмотрения возможных механизмов пластического разрушения. Эффективны энергетические методы нахождения предельной нагрузки [5].

**Применение обобщенной теоремы Кастильяно** (см. гл. 3). Дополнительная работа единицы длины балки

$$R = \int_0^M \kappa dM, \quad (18)$$

где для данного поперечного сечения  $\kappa = \kappa(M)$ , например уравнения (11) или (16).

Дополнительная работа всей балки

$$\bar{R} = \int_0^l R dx, \quad (19)$$

где  $l$  — длина балки.

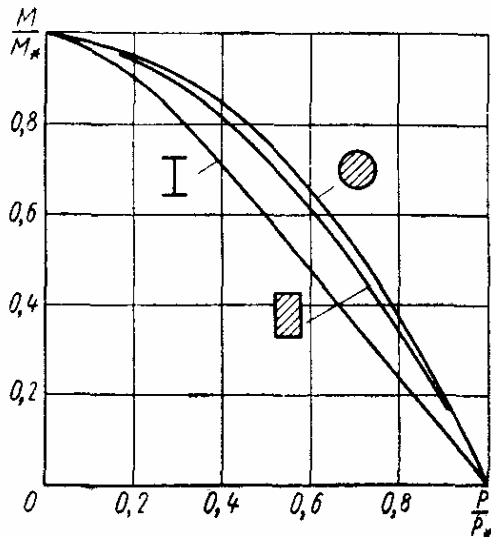


Рис. 6. Кривые предельного состояния для круглого, прямоугольного и двутаврового сечений при одновременном действии изгибающего момента и осевой силы

Так, в случае степенного закона

$$\bar{R} = \frac{m}{m+1} \int_0^l \frac{|M|^{1+\mu}}{D} dx. \quad (20)$$

Прогиб  $\Delta$  под силой  $P$  (или угол поворота сечения  $\varphi$  в точке приложения момента  $M_0$ )

$$\Delta = \frac{\partial \bar{R}}{\partial P} \text{ или } \varphi = \frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0}. \quad (21)$$

### Изгиб кривых стержней

**Изгиб кривых стержней малой кривизны.** В этом случае радиус кривизны стержня велик по сравнению с размерами поперечного сечения и рассмотренные выше уравнения изгиба применимы. Для определения пластических деформаций кривого стержня удобно исходить

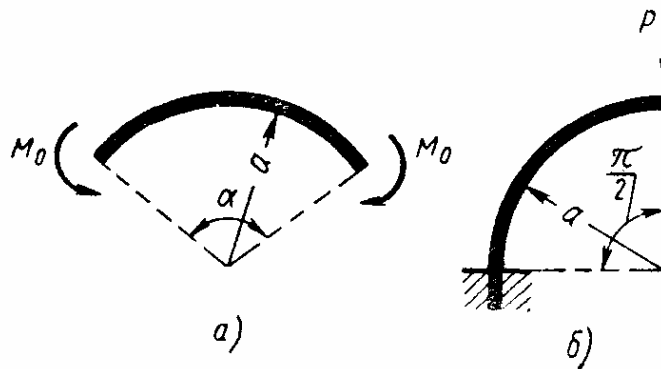


Рис. 7. Изгиб кривых стержней

из обобщенной теоремы Кастильяно; при этом под  $dx$  следует понимать дифференциал дуги, а под  $l$  — длину оси кривого стержня.

**Пример 2.** Изгиб парами  $M_0$  кругового стержня (рис. 7, а). Здесь  $M = M_0$ , при степенном законе деформации  $\bar{R} = \frac{M_0^{m+1} a \alpha}{(m+1)D}$  и изменение угла  $\alpha$  будет

$$\varphi = \frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0} = \frac{M_0^m a \alpha}{D}.$$

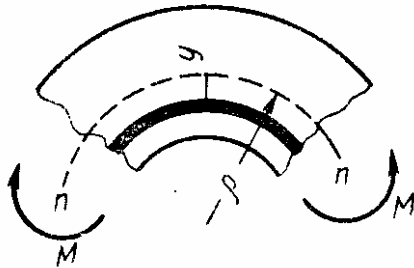
**Пример 3.** Изгиб силой  $P$  круговой консоли (рис. 7, б). Здесь  $M = Pa \cos \varphi$  и прогиб под силой

$$\Delta = \frac{P^m a^{m+2}}{D} N(m),$$

где

$$N(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} \varphi d\varphi.$$

**Изгиб стержней большой кривизны.** Предполагается, что ось стержня — плоская кривая, а поперечные сечения имеют ось симметрии, лежащую в той же плоскости. Решение основано на гипотезах плоских сечений и отсутствия давлений между продольными волокнами. Пусть  $\rho$  — радиус нейтральной линии  $nn$ , смещенной относительно центра тяжести сечения (рис. 8);  $\kappa$  — изменение кривизны при деформации. Относительное удлинение волокна, отстоящего на расстоянии  $y$  от нейтральной плоскости,



$$\varepsilon = \frac{\kappa y}{\rho - y} \quad (22)$$

По закону деформации (1) находят напряжение. Радиус нейтральной линии определяют из условия

$$2 \int \sigma b(y) dy = 0, \quad (23)$$

Рис. 8. Изгиб кривого бруса

где  $2 b(y)$  — ширина сечения. Изменение кривизны  $\kappa$  находят из уравнения моментов

$$2 \int \sigma y b(y) dy = M. \quad (24)$$

**Предельный изгибающий момент.** В случае идеальной пластичности в растянутой зоне  $\sigma = \sigma_T$ , в сжатой  $\sigma = -\sigma_T$ . Для сечений, имеющих две оси симметрии, предельный момент  $M_*$  приведен в табл. 1. Для сечений с одной осью симметрии нейтральная линия смещена и радиус определяют из условия (23) при  $\sigma = \pm \sigma_T$ .

**Степенной закон деформации** (2). Напряжение

$$\sigma = \bar{B}_1 \frac{|y|^{\mu-1} y}{(\rho - y)^\mu} |\kappa|^{\mu-1} \kappa. \quad (25)$$

Радиус нейтральной линии определяют из уравнения

$$\int \frac{|y|^{\mu-1} y}{(\rho - y)^\mu} b(y) dy = 0,$$

а изменение кривизны — из уравнения

$$M = \bar{B}_1 J \kappa^\mu; \quad J = 2 \int \frac{|y|^{\mu-1} y^2}{(\rho - y)^\mu} b(y) dy.$$

Распределение напряжений описывается формулой

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot \frac{|y|^{\mu-1} y}{(\rho - y)^\mu} \quad (26)$$

С уменьшением показателя  $\mu$  распределение напряжений в растянутой и сжатой зонах выравнивается, а нейтральная линия приближается к центру тяжести.

## Кручение

**Основные положения.** При кручении призматических стержней (рис. 9) поперечные сечения испытывают жесткий поворот в своей плоскости, но искривляются в направлении оси стержня, т. е. компоненты перемещения

$$u = -\omega zy; \quad v = \omega zx; \quad w = \varphi(\omega; x, y), \quad (27)$$

где  $\omega$  — кручение на единицу длины стержня.

При этом  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$ ;  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ . Остальные компоненты напряжения выражают через функцию напряжений  $F(x, y)$ :

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (28)$$

На контуре сечения  $F = \text{const}$ , а крутящий момент для односвязного контура

$$M = 2 \iint F \, dx \, dy. \quad (29)$$

Функцию напряжений определяют из дополнительного уравнения (условия сплошности и закона деформации или из условия текучести) и граничного условия.

Условие сплошности вытекает из зависимостей (27)

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\omega. \quad (30)$$

**Упругое кручение.** Используя закон Гука, получаем из равенств (28) и (30) дифференциальное уравнение упругого кручения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2G\omega, \quad (31)$$

где  $G$  — модуль сдвига. Это уравнение аналогично уравнению для прогиба мембраны под действием равномерного давления, натянутой на данном контуре (*мембранная аналогия Прандтля*).

**Идеально-пластическое кручение.** По условию текучести

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \quad (32)$$

причем  $k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$  при условии Мизеса и  $k = \frac{\sigma_T}{2}$  при условии Треска — Сен-Венана. Функция напряжений удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = k^2. \quad (33)$$

Это — уравнение поверхности естественного откоса. Вектор касательного напряжения постоянен по величине [согласно уравнению (33)]

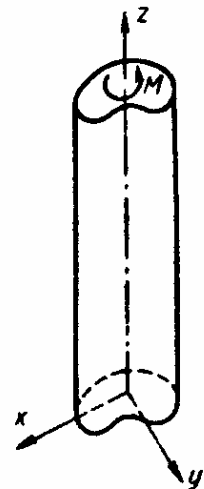


Рис. 9. Кручение стержня

и направлен перпендикулярно к нормали к контуру сечения. Предельный крутящий момент  $M_*$  (в случае односвязного контура) вычисляют по формуле (29). Предельные крутящие моменты для некоторых сечений приведены в табл. 3.

**Влияние дополнительного осевого растяжения.** Если круглый стержень одновременно скручивают моментом  $M$  и растягивают (или сжимают) усилием  $P$ , то в предельном состоянии имеется приближенная зависимость вида

$$\left(\frac{P}{P_*}\right)^2 + \left(\frac{M}{M_*}\right)^2 = 1, \quad (34)$$

где  $P_* = \sqrt{3} k \pi a^2$ ;  $M_* = \frac{2}{3} k \pi a^2$  — предельные усилие и момент соответственно для простого растяжения и кручения.

**Упруго-пластическое кручение.** При кручении стержня из упруго-пластического материала (см. рис. 1, б) для крутящих моментов, меньших предельного  $M_*$ , в сечении стержня, наряду с пластическими зонами, будут и упругие зоны. В упругих зонах функция напряжений удовлетворяет уравнению (31), а в пластических — уравнению (33). Аналитическое решение упруго-пластической задачи связано с большими трудностями. Имеется удобный экспериментальный метод, предложенный Надаи на основе мембранной аналогии [3].

Для круглого стержня имеется элементарное решение. Здесь касательное напряжение

$$\tau = \begin{cases} \frac{r}{c} k & \text{при } r \leq c; \\ k & \text{при } r \geq c, \end{cases}$$

где  $c$  — радиус упругого ядра. Скручивающий момент

$$M = M_* \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{c^3}{a^3}\right),$$

а угол кручения на единицу длины

$$\omega = \frac{k}{Gc}$$

**Кручение упрочняющихся стержней.** По уравнениям теории упруго-пластических деформаций (14) гл. 3

$$\gamma_{xz} = \bar{g}(\tau_i) \tau_{xz}; \quad \gamma_{yz} = \bar{g}(\tau_i) \tau_{yz} \quad (35)$$

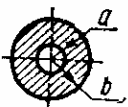
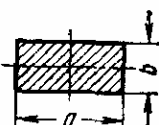
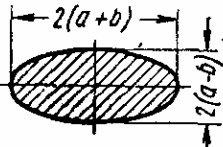

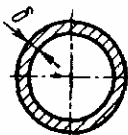
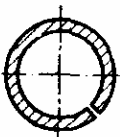
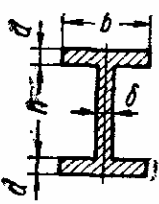

при условии упрочнения (5) гл. 3

$$\gamma_i = \bar{g}(\tau_i) \tau_i.$$

Внося выражения (35) в условие (30), получаем дифференциальное уравнение для функции напряжений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{g}(\tau_i) \frac{\partial F}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \bar{g}(\tau_i) \frac{\partial F}{\partial y} \right] + 2\omega = 0, \quad (36)$$

3. Пределные крутящие моменты

Поперечное сечение	Пределный крутящий момент $M_*$
	$\frac{2}{3} k\pi (b^3 - a^3)$ Для сплошного вала $a = 0$
	$\frac{kb^2}{6} (3a - b)$
	Овальное сечение ( $a \geq 3b$ ) $\frac{2}{3} k\pi \left( a^3 - \frac{9}{2} ab^2 + 4b^3 \right)$
	$\frac{ka^3}{12}$
	Тонкостенная труба, $c$ — средний радиус $2\pi kc^2\delta$
	Тонкостенная труба с разрезом $\pi kc\delta^2$
	$\frac{1}{2} k (\delta^2 h + 2a^2 b)$
	Тонкостенный открытый профиль с медленно изменяющейся толщиной $\delta(s)$ $\frac{1}{2} k \int_0^l \delta^2(s) ds$



где

$$\tau_i^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2.$$

На контуре  $F = \text{const.}$  Решение уравнения (36) затруднительно. Для круглого сечения решение элементарно; здесь  $\tau_{\varphi z} = g(\omega r) \omega r$ ; угол кручения находят из уравнения

$$M = 2\pi\omega \int_0^a g(\omega r) r^3 dr. \quad (37)$$

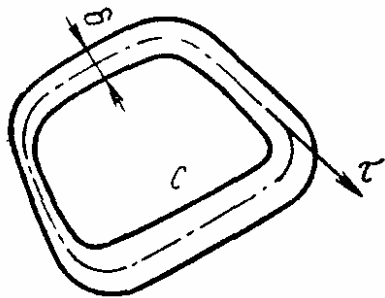


Рис. 10. Тонкостенный замкнутый профиль

Приближенное решение задачи кручения удобно находить на основе вариационного уравнения кручения, вытекающего из принципа минимума дополнительной работы (35), гл. 3:

$$\iint \left[ \int_0^{\tau_i} \bar{g}(\zeta) \zeta d\zeta - 2\omega F \right] dx dy = \min. \quad (38)$$

**Кручение упрочняющихся тонкостенных стержней открытого профиля** (на основе решения задачи о кручении вытянутого прямоугольника). В этой задаче можно принимать, что функция напряжений  $F$  не зависит от  $x$  (продольное направление). При этом из уравнения (36) следует, что для такого прямоугольника

$$F = F(\delta, \omega, y) = -2\omega \int_y^{\delta/2} g(-2\omega y) y dy, \quad (39)$$

где  $\delta$  — толщина стенки.

Для открытого тонкостенного профиля произвольного очертания

$$M = 2 \int_0^l \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} F(\delta, \omega, y) dy ds, \quad (40)$$

где  $s$  отсчитывают вдоль срединной линии профиля,  $\delta = \delta(s)$ .

**Теорема о циркуляции сдвига** (обобщение теоремы Бредта). Пусть  $C$  — произвольный замкнутый контур, целиком лежащий внутри сечения. Тогда

$$\oint_C \bar{g}(\tau_i) \frac{\partial F}{\partial n} ds = -2\omega\Omega, \quad (41)$$

где  $\frac{\partial F}{\partial n}$  — производная функция напряжения по нормали  $n$  к  $C$ ;  $\Omega$  — площадь, заключенная внутри  $C$ .

**Кручение упрочняющихся тонкостенных замкнутых профилей** (рис. 10) рассматриваем с помощью предыдущей теоремы. Пусть  $C$  —

серединная линия тонкостенной трубы;  $\delta$  (s) — толщина трубы;  $\Omega$  — площадь, ограниченная  $C$ . Тогда  $\tau_i = \tau$  и

$$\oint_C \bar{g}(\tau) \tau ds = 2\omega\Omega, \quad (42)$$

причем

$$\tau = \frac{M}{2\Omega\delta}.$$

## РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

### Стержневые решетки

**Статически определимые решетки.** Рассмотрим ползучесть статически определимой системы стержней, соединенных между собой идеальными шарнирами. Стержни работают на растяжение или сжатие; механические характеристики ползучести материала при растяжении и сжатии одинаковы. Напряжение в  $k$ -м стержне обозначим  $\sigma_k$ , длину стержня —  $l_k$ , площадь сечения —  $F_k$ . Стержни изготовлены из одного материала и работают при одной температуре.

В статически определимых системах напряжение  $\sigma_k$  находят из уравнений статики. Скорость деформации определяют по закону ползучести (см. гл. 4)

$$\xi_k = B_1(t) |\sigma_k|^{m-1} \sigma_k. \quad (43)$$

Деформация ползучести

$$\epsilon_k^c = \int_0^t \xi_k dt. \quad (44)$$

При постоянной нагрузке

$$\epsilon_k^c = \Omega_1(t) |\sigma_k|^{m-1} \sigma_k; \quad \Omega_1(t) = \int_0^t B_1(t) dt.$$

Скорость  $v_j$  некоторого узла в направлении действия нагрузки удобно определять по обобщенной теореме Кастильяно (см. гл. 4)

$$v_i = \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial P_j},$$

где  $\bar{\Lambda}$  — дополнительное рассеяние решетки,

$$\bar{\Lambda} = B_1(t) \sum_{k=1}^n \frac{F_k l_k}{m+1} |\sigma_k|^{m+1}. \quad (45)$$

Если рассматривают большие деформации, то  $\xi_k = \frac{1}{l_k} \cdot \frac{dl_k}{dt}$ ,

где  $l_k$  — длина стержня в момент времени  $t$ ; напряжение будет, вообще говоря, функцией  $l_k$ . Интегрирование (43) определит длину  $l_k$  в функции времени.

**Статически неопределимые решетки.** Напряжения в лишних  $s$  стержнях обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Значения напряжений в начальном упругом состоянии отличаем одним штрихом ( $\sigma'_k, x'_j$ ), в установившемся состоянии — двумя штрихами ( $\sigma''_k, x''_j$ ).

По уравнениям статики

$$\sigma_k = \alpha_k + \sum_{j=1}^s \beta_{jk} x_j; \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n - s), \quad (46)$$

где  $\alpha_k, \beta_{jk}$  — коэффициенты, зависящие от типа решетки и внешних сил. Величины  $x'_j$  определяют методами сопротивления материалов. Величины  $x''_j$  находят из системы нелинейных уравнений [1]

$$\sum_{k=1}^n F_k l_k |\sigma''_k|^{m-1} \sigma''_k \beta_{kl} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, s). \quad (47)$$

Если напряжение в  $k$ -м стержне взято за лишнее неизвестное  $x''_p$ , то  $\beta_{kp} = 1, \sigma''_k = x''_p$ .

Решение нелинейной системы (47) связано с известными трудностями. При постоянных нагрузках можно рекомендовать следующий способ приближенного решения. Последнее ищут в форме

$$\sigma_k = \sigma_k^0 + K(m) (\sigma'_k - \sigma_k^0),$$

где  $\sigma_k^0$  — напряжения в решетке в предположении, что она является жестко-пластической.

Из условия минимума дополнительного рассеяния вытекает уравнение для  $K(m)$ :

$$\sum_{k=1}^n F_k l_k |\sigma_k|^{m-1} \sigma_k (\sigma'_k - \sigma_k^0) = 0. \quad (48)$$

Множитель  $K(m)$ , как правило, — монотонно убывающая функция  $m$ , причем  $K(m) \leq 1$ .

Не установившуюся ползучесть решетки удобно рассматривать по приближенному общему решению, изложенному в гл. 4; тогда при заданных постоянных нагрузках

$$x_j = x'_j + \tau(t) (x''_j - x'_j); \quad \tau(t) = 1 - e^{-t_*};$$

$$t_* = \frac{- \sum_{k=1}^n F_k l_k |\sigma'_k|^{m-1} \sigma'_k \sum_{j=1}^s \beta_{kj} (x''_j - x'_j)}{\sum_{k=1}^n F_k l_k \left[ \sum_{j=1}^s \beta_{kj} (x''_j - x'_j) \right]^2} E \Omega_1(t). \quad (49)$$

Релаксацию напряжений в решетке определяют по общему приближенному решению (см. гл. 4), при этом

$$\sigma_k = \rho(t) \sigma'_k;$$

$$\rho = \frac{1}{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + (m-1)t^*}}; \quad (50)$$

$$t^* = \frac{\sum_{k=1} F_k l_k |\sigma'_k|^{m+1}}{\sum_{k=1} F_k l_k \sigma_k^2} E \Omega_1(t). \quad (51)$$

Отдельные части решетки при заданных фиксированных смещениях некоторых узлов могут релаксировать независимо от остальных частей. Приближенный метод решения следует применять отдельно к каждой автономной части; при этом суммирование распространяется на все стержни рассматриваемой автономной части.

### Изгиб

**Установившаяся ползучесть при изгибе.** Пусть поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии (см. рис. 2) и справедлив степенной закон ползучести

$$\xi = B_1 |\sigma|^{m-1} \sigma \quad \text{или} \quad \sigma = \bar{B}_1 |\xi|^{\mu-1} \xi; \quad (\bar{B}_1 = B_1^{-\mu}). \quad (52)$$

Дифференциальное уравнение для скорости прогиба в условиях установившейся ползучести имеет такой же вид, как дифференциальное уравнение пластического изгиба балки при степенном законе (см. стр. 509)

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{1}{D} |M|^{m-1} M, \quad (53)$$

где  $v$  — скорость прогиба;  $M$  — изгибающий момент;  $D = B_1^{-1} J_m^m$  — обобщенная жесткость балки. Обобщенные моменты инерции для ряда сечений приведены в табл. 1. Напряжения изгиба распределены по закону (см. рис. 5)

$$\sigma = \frac{M}{J_m} |y|^{\mu-1} y. \quad (54)$$

Уравнение (53) легко интегрируется. Вычисления упрощаются различными приемами, аналогичными соответствующим приемам сопротивления материалов, например графо-аналитическим методом [2].

Скорость прогиба  $v$  сообщает минимум полной мощности балки

$$\int_0^l \left[ \frac{D^\mu}{1+\mu} \left| \frac{d^2 v}{dx^2} \right|^{\mu+1} - q(x) v \right] dx = \min, \quad (55)$$

где  $q(x)$  — распределенная нагрузка. При  $\mu = 1$  получаем вариационное уравнение изгиба упругой балки (тогда  $v$  — прогиб).

Согласно второму вариационному принципу истинное распределение изгибающего момента сообщает минимум дополнительному рассеянию балки

$$\tilde{\Lambda} = \int_0^l \frac{|M|^{m+1}}{(m+1)D} dx = \min. \quad (56)$$

По обобщенной теореме Кастильяно под сосредоточенной силой  $P_k$  скорость прогиба

$$v_k = \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial P_k}. \quad (57)$$

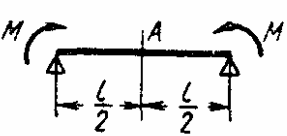

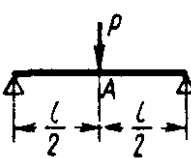
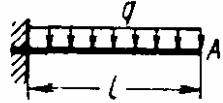
Лишние неизвестные  $X_j$  определяют из уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial X_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (58)$$

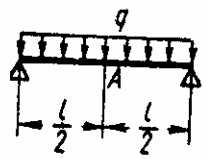
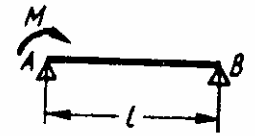
Можно считать, что в достаточно простой балочной системе лишние неизвестные слабо зависят от  $m$ , поэтому в первом приближении для лишних неизвестных можно принимать их значения для соответствующей упругой балочной системы.

Справочные сведения по ползучести простых балок приведены в табл. 4.

4. Скорость прогиба и скорость поворота для простых балок

Схема	Скорость прогиба $v$ в точке $A$	Скорость поворота $\omega$
	$\frac{M m l^2}{8D}$	На опоре $\frac{M m l}{2D}$
	$\frac{P m l^{m+2}}{(m+2)D}$	Конца балки $\frac{P m l^{m+1}}{(m+1)D}$
	$\frac{P m l^{m+2}}{(m+2) 4^{m+1} D}$	На опоре $\frac{2 P m l^{m+1}}{(m+1) 4^{m+1} D}$
	$\frac{1}{2(m+1)D} \left(\frac{q}{2}\right)^m l^{2m+2}$	Конца балки $\frac{1}{(2m+1)D} \left(\frac{q}{2}\right)^m l^{2m+1}$

Продолжение табл. 4

Схема	Скорость прогиба $v$ в точке $A$	Скорость поворота $\omega$
	$\left( \frac{m! 2^m}{1 \cdot 3 \cdot \dots (2m+1)} - \frac{1}{m+1} \right) \times$ $\times \frac{l^2}{4D} \left( \frac{ql^2}{8} \right)^m$ $m - \text{целое}$	На опоре $\frac{m! 2^m}{1 \cdot 3 \cdot \dots (2m+1)} \cdot \frac{l}{2D} \times$ $\times \left( \frac{ql^2}{8} \right)^m$ $m - \text{целое}$
	—	На опоре $A \frac{M^m l}{(m+2) D}$ На опоре $B$ $\frac{M^m l}{(m+1)(m+2) D}$

Касательные напряжения при изгибе в условиях установившейся ползучести определяются формулой

$$\tau = \frac{Qh^{1+\mu}}{(1+\mu)J_m} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^{1-\mu} \right], \quad (59)$$

где  $Q$  — перерезывающая сила. Зависимость распределения касательных напряжений от  $m$  показана на рис. 11.

**Неустановившаяся ползучесть при изгибе постоянным моментом.** В начальный момент времени  $t = 0$  напряжения  $\sigma'$  определяют по формулам сопротивления материалов. В установившемся состоянии напряжение изгиба  $\sigma''$  находят по формуле (54). Точное решение задачи о неустановившейся ползучести при изгибе требует применения методов численного интегрирования. Приближенное решение ищут в форме (см. гл. 4)

$$\sigma = \sigma' + \tau(t)(\sigma'' - \sigma'), \quad (60)$$

причем

$$\tau(t) = 1 - e^{-Q_1(0)t_{1*}},$$

где

$$t_{1*} = \frac{E\Omega_1(t)}{\Sigma} \left( \frac{Mh}{J} \right)^{m-1};$$

$$Q_1(0) = - \int_0^1 \eta^m (\kappa_1 \eta^\mu - \eta) \beta(\eta) d\eta;$$

$$\beta(\eta) = \frac{b(y)}{h}; \quad \eta = \frac{y}{h}; \quad \kappa_1 = \frac{J}{J_m h^{1-\mu}},$$

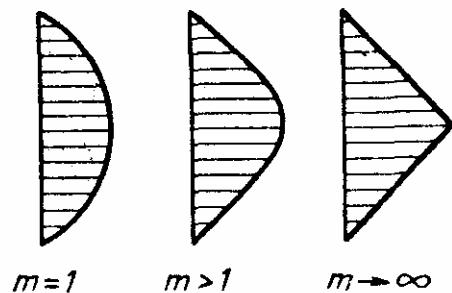


Рис. 11. Распределение касательных напряжений в зависимости от показателя  $m$

здесь  $J$  — момент инерции; значения коэффициентов  $\kappa_1$ ,  $\Sigma$  для некоторых сечений приведены ниже.

П р я м о у г о л ь н и к (высота  $2h$ , ширина  $2b$ ):

$$\kappa_1 = \frac{1+2m}{3m}; \quad \Sigma = \frac{1}{9} \cdot \frac{(m-1)^2 b}{m(m+2)h}.$$

К р у г о в о е к о л ь ц о (внутренний радиус  $a$ , внешний  $b$ ,  $\alpha = \frac{a}{b}$ ):

$$\kappa_1 = \frac{\pi}{4q(\mu)} \cdot \frac{1-\alpha^4}{1-\alpha^{3+\mu}};$$

$$\Sigma = \frac{1-\alpha^4}{4} \left[ \kappa_1 q (2\mu - 1) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Для сплошного круга  $\alpha = 0$ . Зависимость  $q(\mu)$  показана на рис. 4.

Релаксация при изгибе. Приближенное решение строят по методу, изложенному в гл. 4. Напряжения изгиба

$$\sigma(t) = \rho(t) \sigma',$$

где  $\sigma'$  — начальное упругое распределение изгибных напряжений. Множитель релаксации  $\rho(t)$  определяют из уравнения (50), а

$$t^* = \frac{NJ_\mu}{2\bar{\Pi}'} \Omega_1(t),$$

где

$$J_\mu = 4 \int_0^h b(y) y^{1+m} dy; \quad \bar{\Pi}' = \int_0^l \frac{M'^2}{2EJ} dx — \text{упругая энергия балки};$$

$$N = \int_0^l \left( \frac{|M'|}{J} \right)^{m+1} dx.$$

Напомним, что  $M'$  — изгибающий момент в начальном упругом состоянии.

**Установившаяся ползучесть стержней малой кривизны.** Распределение напряжений в поперечном сечении стержня незначительно отличается от распределения напряжений в прямом стержне. Зависимости, выведенные для последнего, можно поэтому применять и для кривого стержня. Скорости прогибов и поворотов удобно определять с помощью обобщенной теоремы Кастильяно (см. гл. 4). Дополнительное рассеяние стержня

$$\bar{\Lambda} = \int_0^l \frac{|M|^{m+1}}{(m+1)D} ds, \quad (61)$$

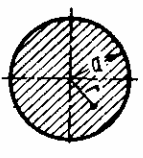
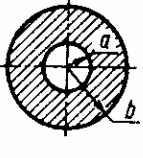
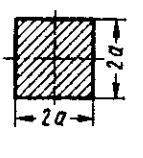
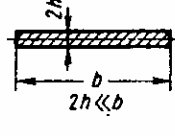
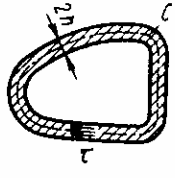
где  $l$  — длина стержня;  $ds$  — дифференциал дуги оси стержня.

На основании *упругой аналогии* (см. гл. 4) примеры, приведенные в гл. 4, легко переносятся на случай установившейся ползучести.

**Установившаяся ползучесть стержней большой кривизны** по той же аналогии рассматривают так же, как на стр. 512. Нужно лишь в формулах (22)–(26) понимать под  $\mu$  — скорость изменения кривизны, под  $\bar{B}_1$  — коэффициент ползучести в формуле (11), под  $\mu = \frac{1}{m}$  — показатель ползучести.

Неустановившуюся ползучесть и релаксацию в кривых стержнях можно рассчитать по общему методу (см. гл. 4). Расчет релаксации в кольцевом разрезанном образце см. в работе [2].

### 5. Установившаяся ползучесть при кручении

Сечение	Угловая скорость кручения; напряжение $\tau_{\max}$
	$\frac{\omega}{BM^m} = \left( \frac{3 + \mu}{2\pi} \right)^m \frac{1}{a^{1+3m}};$ $\tau_{\max} = \frac{3 + \mu}{2\pi a^3} M; \quad \mu = \frac{1}{m}$
	$\frac{\omega}{BM^m} = \left( \frac{3 + \mu}{2\pi} \right)^m \frac{1}{b^{1+3m}} \cdot \frac{1}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{3+\mu} \right]^m};$ $\tau_{\max} = \frac{3 + \mu}{2\pi b^3} \cdot \frac{1}{1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{3+\mu}}$
	$\frac{\omega}{BM^m} = 4a^2 \left( \frac{3}{8a^3} \right)^m J_*(m);$ $\tau_{\max} = k(m) \tau_{\max}^{упр}; \quad \tau_{\max}^{упр} = 0,625 \frac{M}{a^3}.$ <p>Графики <math>J_*(m)</math>, <math>k(m)</math> см. рис. 12; <math>J_*(m) \approx 0,81</math></p>
	$\frac{\omega}{BM^m} = \frac{1}{2} \left( \frac{2 + \mu}{4bh^2 + \mu} \right)^m; \quad \tau_{\max} = \left( \frac{2\omega h}{B} \right) \mu.$ <p>Это решение пригодно для тонкостенных открытых профилей при <math>h = \text{const}</math>. Тогда <math>b</math> — длина средней линии профиля</p>
	$\frac{\omega}{B} = \frac{l}{2 \sum} \tau^m; \quad \tau_{\max} = \frac{M}{4h \sum}.$ <p>Замкнутый тонкостенный профиль постоянной толщины <math>2h</math>; <math>l</math> — длина срединной линии <math>C</math>; <math>\sum</math> — площадь внутри <math>C</math></p>



## Кручение

**Основные положения.** Кинематическая картина деформации такая же, что и при пластическом кручении (см. стр. 513 и рис. 9), т. е. формулы (27) сохраняются; нужно лишь вместо  $u, v, w$  теперь внести составляющие скорости  $v_x, v_y, v_z$ , а под  $\omega$  понимать скорость кручения на единицу длины. От нуля отличны скорости деформаций  $\eta_{xz}, \eta_{yz}$  и компоненты напряжения  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ . Последние выражаются через функцию напряжений  $F(x, y)$  согласно формулам (28). Соотношение (29) для крутящего момента  $M$  сохраняется, а в условии сплошности вместо  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  нужно внести соответственно  $\eta_{xz}, \eta_{yz}$ .

**Установившаяся ползучесть.** На основании упругой аналогии (см. гл. 4) задача об установившейся ползучести скручиваемого стержня аналогична задаче

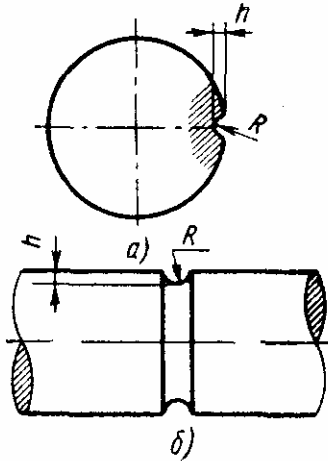


Рис. 12. Концентрация напряжений на поверхности скручиваемого вала: а — вал с продольной канавкой; б — вал с кольцевой канавкой

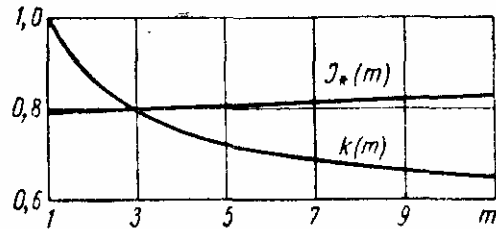


Рис. 13. Графики коэффициентов  $J_*(m)$  и  $k(m)$

кручения упрочняющихся (по теории упруго-пластических деформаций) стержней (см. стр. 514—517). С очевидными изменениями имеют место дифференциальное уравнение (36) и вариационное уравнение (38) для функции напряжений, а также и последующие формулы (39)—(42).

Кручение круглого вала см. стр. 516.

Приводимые ниже результаты относятся к случаю степенного закона.

Угловая скорость кручения пропорциональна крутящему моменту в степени  $m$

$$\omega = BDM^m, \quad (62)$$

где постоянная  $D$  зависит только от формы поперечного сечения и показателя  $m$ .

Функция напряжений сообщает минимум функционалу

$$\iint \left[ \frac{B}{m+1} \tau_i^{m+1} - 2\omega F \right] dx dy = \min, \quad (63)$$

где

$$\tau_i = \sqrt{\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2}.$$

Приближенный метод решения состоит в разыскании функции напряжений в виде

$$F = F^0 + K(m)(F' - F^0),$$

где  $F^0$  — функция напряжений при идеально-пластическом кручении ( $m \rightarrow \infty$ );  $F'$  — функция напряжений при упругом кручении ( $m = 1$ ).

Формулы для определения угловой скорости кручения и максимальных касательных напряжений при установившейся ползучести приведены в табл. 5.

Неустановившуюся ползучесть при кручении постоянным моментом анализируют по общему методу (см. гл. 4 и работу [2]).

Релаксация крутящего момента определяется зависимостью

$$M(t) = M_0 \rho(t),$$

где  $\rho(t)$  берут по формуле (50); для круглого стержня

$$t^* = \frac{8\dot{G}}{m+3} \left( \frac{2M_0}{\pi a^3} \right)^{m-1} \Omega(t).$$

Концентрация напряжений у мелкой выточки (кольцевой или продольной) в условиях ползучести [2]

$$\tau_{\max} = \tau \left( 1 + \sqrt{\frac{h}{mR}} \right),$$

где  $h$  — глубина выточки;  $R$  — радиус кривизны дна выточки (рис. 13);  $\tau$  — касательное напряжение при отсутствии выточки.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дикович И. Л. Динамика упруго-пластических балок. Л., Судпромгиз, 1962.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести М., Физматгиз, 1960.
3. Малинин Н. Н. Расчеты на ползучесть в кн. Пономарев С. Д. и др. «Расчеты на прочность в машиностроении». Т. II. М., Машгиз, 1959.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., ИЛ, 1954.
5. Нил Б. Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств. М., Госстройиздат, 1961.
6. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. II. М., Машгиз, 1959.
7. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., Госстройиздат, 1959.
8. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., Гостехиздат, 1947.
9. Соколовский В. В. Теория пластичности. М., Гостехиздат, 1950.
10. Стрельбичка А. И. Предельное состояние рам из тонкостенных стержней при изгибе с кручением. Киев. «Наукова думка», 1964.
11. Finnie a. Heller. Creep of engin. materials, N. Y. London, 1959.
12. Phillips A. Introduction to plasticity. New York, 1956.
13. Sobotka Z. Theorie plasticity. T. 1 u 2, Praha, 1954.
14. Obqvista. Hult. Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Springer-Verlag, 1962.

# ● НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИНОК

---

## Глава 17

### ИЗГИБ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНОК

#### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пластинкой постоянной толщины называют тело, имеющее форму прямой призмы или прямого цилиндра и малую, по сравнению с размерами основания, толщину.

Под срединной плоскостью пластинки понимают плоскость, делящую ее толщину пополам.

Пластинки, толщина которых не превышает  $\frac{1}{5}$  наименьшего размера основания, относятся к *тонким* пластинкам.

Расчеты пластинок, толщина которых превышает  $\frac{1}{5}$  наименьшего размера основания, ведут на основе теории *толстых* плит.

Перемещения, которые получают точки срединной плоскости в направлении, перпендикулярном к ней, называют *прогибами*. Срединная плоскость пластинки после деформации пластинки переходит в срединную поверхность.

Пластинку считают *жесткой*, если при ее деформации под действием поперечной нагрузки можно пренебречь напряжениями растяжения или сжатия в срединной поверхности; пластинки относят к жестким, если величина стрелы прогиба при изгибе не превышает  $\frac{1}{5}$  толщины.

*Гибкой* называют пластинку, при расчете которой, наряду с чисто изгибными напряжениями, необходимо учитывать напряжения, равномерно распределенные по толщине пластинки, называемые напряжениями в срединной поверхности, или мембранными напряжениями.

Пластинку принято считать *абсолютно гибкой* или *мембраной*, если ее прогиб превышает толщину в 5 раз и более; при расчете мембраны можно пренебречь собственно изгибными напряжениями по сравнению с напряжениями в срединной поверхности.

Теория тонких пластинок основана на следующих допущениях.

Любая прямая, нормальная к срединной плоскости до деформации, остается после деформации прямой, нормальной к срединной поверхности.

Напряжениями, действующими в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, можно пренебречь.

#### ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ

**Основные уравнения.** Выберем систему координат так, чтобы плоскость  $xu$  совпала со срединной плоскостью пластинки (рис. 1).

Условимся считать изогнутую поверхность пологой. Угол наклона  $\theta_x$  касательной к кривой

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad (1)$$

аналогично для сечения, параллельного плоскости  $yz$ ,

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2)$$

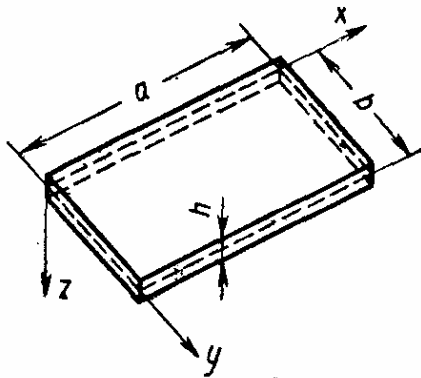


Рис. 1

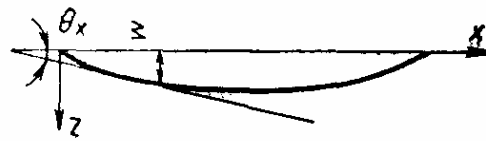


Рис. 2. Сечение срединной поверхности плоскостью, параллельной плоскости  $xz$  ( $w$  — прогиб)

Кривизна сечения имеет положительное значение, если выпуклость обращена в сторону положительного направления оси  $z$ . Тогда кривизны в сечениях, параллельных плоскостям  $xz$  и  $yz$ , будут

$$\kappa_x = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad (3)$$

или

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Угол  $\theta_x$  может, вообще говоря, меняться также вдоль линии, параллельной оси  $y$ , т. е. при переменном  $y$ . Относя приращение угла  $\theta_x$  к приращению координаты  $y$  (или приращение  $\theta_y$  к приращению  $x$ ), находим «кривизну» кручения срединной поверхности

$$\chi = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -\frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad (5)$$

или

$$\chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

В случае жестких пластинок срединную поверхность считают свободной от деформаций, сопровождающих изгиб. Деформации удлинения  $\epsilon_{x,u}$  и  $\epsilon_{y,u}$  для произвольного слоя пластинки, лежащего на расстоянии  $z$  от срединной поверхности:

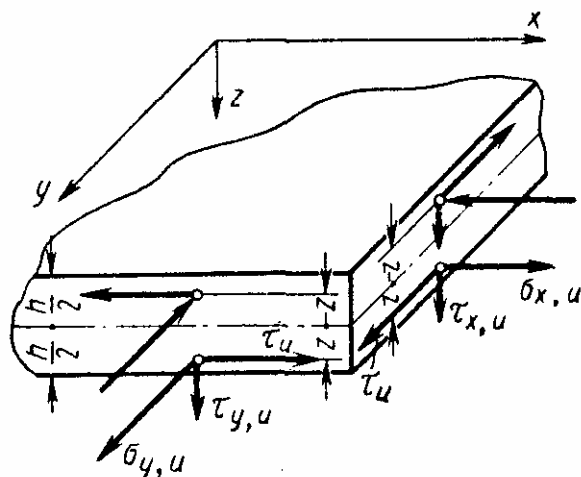
$$\epsilon_{x,u} = z\kappa_x, \quad \epsilon_{y,u} = z\kappa_y; \quad (7)$$

деформация сдвига

$$\gamma_u = 2z\chi. \quad (8)$$

Нормальные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и касательные напряжения  $\tau$  (рис. 3) определяются законом Гука; пренебрегая напряжениями  $\sigma_z$ , получим

$$\sigma_{x,u} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{x,u} + \nu \epsilon_{y,u}); \quad \sigma_{y,u} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{y,u} + \nu \epsilon_{x,u});$$



$$\tau_u = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_u. \quad (9)$$

или

$$\sigma_{x,u} = \frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu \kappa_y);$$

$$\sigma_{y,u} = \frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_y + \nu \kappa_x);$$

$$\tau_u = \frac{Ez}{1+\nu} \chi. \quad (10)$$

Рис. 3. Напряжения в элементе пластинки

Изгибающие моменты, действующие в сечениях, нормальных к осям  $x$  и  $y$ , и приходящиеся на единицу длины сечения,

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{x,u} z dz; \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{y,u} z dz, \quad (11)$$

или

$$M_x = D (\kappa_x + \nu \kappa_y); \quad M_y = D (\kappa_y + \nu \kappa_x), \quad (12)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластинки,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (13)$$

Касательные напряжения  $\tau_u$  образуют крутящий момент, приходящийся на единицу длины сечения

$$H = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_u z dz, \quad (14)$$

или

$$H = D (1-\nu) \chi. \quad (15)$$

Обозначим через  $Q_x Q_y$  значения поперечных сил, действующих в сечениях  $xz$  и  $yz$  и приходящихся на единицу длины сечения. Значения  $Q_x$  и  $Q_y$  определяют в виде

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{x,u} dz; \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{y,u} dz. \quad (16)$$

Из формул (10), (12) и (15) вытекают следующие зависимости между напряжениями и моментами:

$$\sigma_{x,u} = \frac{12M_x z}{h^3}; \quad \sigma_{y,u} = \frac{12M_y z}{h^3}; \quad \tau_u = \frac{12Hz}{h^3}. \quad (17)$$

Максимальные по толщине пластинки напряжения будут у поверхности:

$$(\sigma_{x,u})_{\max} = \frac{6M_x}{h^2}; \quad (\sigma_{y,u})_{\max} = \frac{6M_y}{h^2}; \quad (\tau_u)_{\max} = \frac{6H}{h^2}. \quad (18)$$

Составим уравнения равновесия элемента пластинки  $dx, dy$ , показанного на рис. 4. На элемент пластинки действуют внешняя поперечная

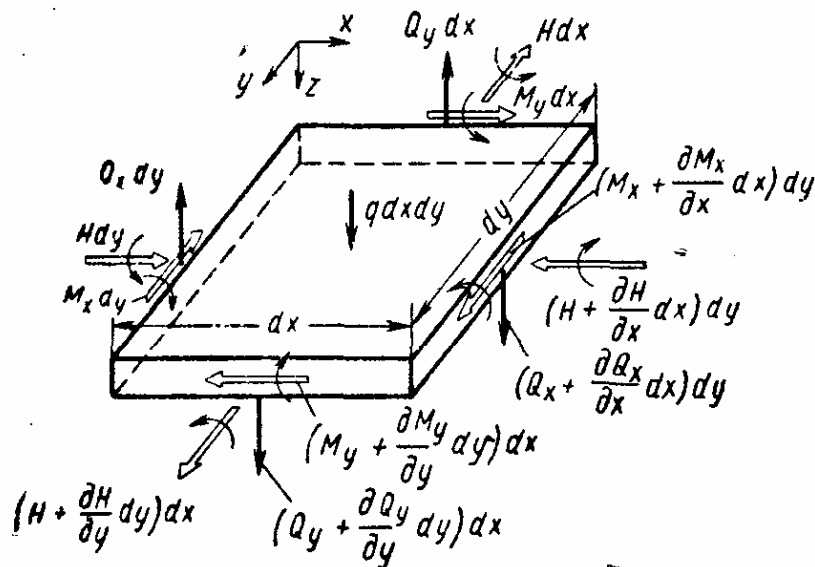


Рис. 4. Условия равновесия элемента пластинки

нагрузка  $q$  и рассмотренные выше внутренние усилия, светлыми стрелками нанесены вектор-моменты. Если в сечении с координатой  $x$  действует момент  $M_x dy$ , то в соседнем сечении, имеющем координату  $x + dx$ , будет действовать момент  $(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy$ . Аналогичные приращения получают остальные компоненты моментов и поперечных сил.

Срединную плоскость мы считаем недеформируемой; поэтому суммы проекций сил на направления  $x$  и  $y$  тождественно равны нулю.

Уравнения равновесия элемента в проекциях на ось  $z$  и в моментах относительно осей  $x$  и  $y$  после простых преобразований приобретают вид

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q; \quad (19)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0; \quad (20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (21)$$

Из уравнений (19)–(21) находим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (22)$$

Пользуясь выражениями (12), (15), а также (4), (6), приходим к дифференциальному уравнению изгиба жестких пластинок

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (23)$$

или

$$D \nabla^4 w = q, \quad (24)$$

где  $\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w$ ;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — двумерный оператор Лапласа.

**Граничные условия.** Интегрирование уравнения (23) следует вести с учетом граничных условий. Рассмотрим некоторые из вариантов таких условий.

**Ш а р н и р н о о п е р т ы й к р а й.** Допустим, что один из краев, например край  $x = 0$ , шарнирно оперт. Тогда прогиб и изгибающий момент вдоль края

$$(w)_{x=0} = 0; \quad (25)$$

$$(M_x)_{x=0} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (26)$$

Но условие (25) означает, что вдоль края  $x = 0$  одновременно  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ . Следовательно, условие (26) переписывается в виде

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0; \quad (27)$$

Край  $x = 0$  зашпелен. Прогиб и угол поворота в точках края должны равняться нулю:

$$(w)_{x=0} = 0; \quad (28)$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (29)$$

Пластишка скреплена по краю  $x = 0$  с упругим ребром, имеющим изгибную жесткость  $EJ$ . Одно из условий сопряжения состоит в равенстве прогибов:

$$w_p = (w)_{x=0}; \quad (30)$$

здесь  $w_p$  — прогиб ребра. Второе граничное условие запишется в виде дифференциального уравнения изгиба для ребра

$$EJ \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} = R_x, \quad (31)$$

где  $R_x$  — погонное усилие, передающееся от пластишки на ребро, равное реакции со стороны ребра.

Крутящий момент  $H$ , действующий на элемент кромки пластишки, можно представить в виде двух статически эквивалентных сил, которые могут быть рассмотрены в сочетании с вертикальными поперечными силами. В результате находим, что приходящаяся на единицу длины контура  $x = \text{const}$  сила давления  $R(x)$  со стороны пластишки будет

$$R_x = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (32)$$

или

$$R_x = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]; \quad (33)$$

тогда условие (31) приобретает вид

$$EJ \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0}. \quad (34)$$

Край  $x = 0$  свободен. Граничные условия будут

$$(M_x)_{x=0} = 0; \quad (35)$$

$$(R_x)_{x=0} = 0 \quad (36)$$

или

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0; \quad (37)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0} = 0. \quad (38)$$



В дальнейшем для определения граничных условий на схемах пластинок приняты обозначения, показанные на рис. 5.

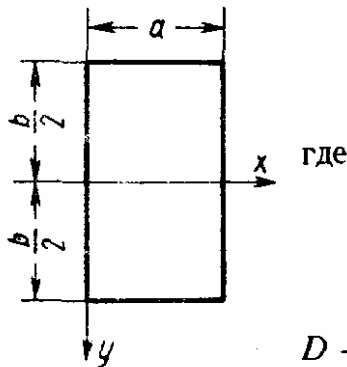


Рис. 5. Обозначения условий на краях пластинок: а — заземленный край; б — шарнирно опертый край; в — свободный край; г — упруго-опертый край

### Расчет прямоугольных пластинок

На пластинку (рис. 6) действует равномерно распределенная по всей площади нагрузка;  $b \geq a$ . Прогиб в произвольной точке пластинки [13]

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{2\alpha_m y}{b} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cdot \frac{2y}{b} \operatorname{sh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (39)$$



где

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}; \quad (40)$$

$D$  — цилиндрическая жесткость по формуле (13). Изгибающие моменты

$$M_x = \frac{qx(a-x)}{2} + (1-\nu) qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[ A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ \left. + B_m \left( \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{2\nu}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad (41)$$

$$M_y = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - (1-\nu) qa^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[ A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ \left. + B_m \left( \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{2}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (42)$$

где

$$A_m = - \frac{2(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}; \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}. \quad (43)$$

Изгибающие моменты, действующие по линии  $y = 0$ , определяют по формулам

$$(M_x)_{y=0} = \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 [2\nu B_m - 1(1-\nu) A_m] \times \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad (44)$$

$$(M_y)_{y=0} = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 [2B_m + (1-\nu) A_m] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (45)$$

Для вычисления моментов можно пользоваться формулами

$$(M_x)_{y=0} = C_1 qa^2; \quad (M_y)_{y=0} = C_2 qa^2. \quad (46)$$

Значения коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$  даны в табл. 1.

1. Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  для изгибающих моментов шарнирно опертой прямоугольной пластинки под равномерным давлением  $q$  ( $b \geq a$ ;  $y = 0$ ;  $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$C_1$ при $x$					$C_2$ при $x$				
	0,1a	0,2a	0,3a	0,4a	0,5a	0,1a	0,2a	0,3a	0,4a	0,5a
1,0	0,0209	0,0343	0,0424	0,0466	0,0479	0,0168	0,0303	0,0400	0,0459	0,0479
1,1	0,0234	0,0389	0,0486	0,0541	0,0554	0,0172	0,0311	0,0412	0,0475	0,0493
1,2	0,0256	0,0432	0,0545	0,0607	0,0627	0,0174	0,0315	0,0417	0,0480	0,0501
1,3	0,0277	0,0472	0,0599	0,0671	0,0694	0,0175	0,0316	0,0419	0,0482	0,0503
1,4	0,0297	0,0509	0,0649	0,0730	0,0755	0,0175	0,0315	0,0418	0,0481	0,0502
1,5	0,0314	0,0544	0,0695	0,0783	0,0812	0,0173	0,0312	0,0415	0,0478	0,0498
1,6	0,0330	0,0572	0,0736	0,0831	0,0862	0,0171	0,0309	0,0411	0,0472	0,0492
1,7	0,0344	0,0599	0,0773	0,0874	0,0908	0,0169	0,0306	0,0405	0,0466	0,0486
1,8	0,0357	0,0623	0,0806	0,0913	0,0948	0,0167	0,0301	0,0399	0,0459	0,0479
1,9	0,0368	0,0644	0,0835	0,0948	0,0985	0,0165	0,0297	0,0393	0,0451	0,0471
2,0	0,0378	0,0663	0,0861	0,0978	0,1017	0,0162	0,0292	0,0387	0,0444	0,0464
2,5	0,0413	0,0729	0,0952	0,1085	0,1129	0,0152	0,0272	0,0359	0,0412	0,0430
3,0	0,0431	0,0763	0,1000	0,1142	0,1189	0,0145	0,0258	0,0340	0,0390	0,0406
4,0	0,0445	0,0791	0,1038	0,1185	0,1235	0,0138	0,0246	0,0322	0,0369	0,0384
$\infty$	0,0450	0,0800	0,1050	0,1200	0,1250	0,0135	0,0240	0,0315	0,0360	0,0375

Изгибающий момент по средней линии  $x = \frac{a}{2}$

$$(M_x)_{x=\frac{a}{2}} = C_3 qa^2; \quad (M_y)_{x=\frac{a}{2}} = C_4 qa^2. \quad (47)$$

Значения  $C_3$  и  $C_4$  приводятся в табл. 2.

Перерезывающие силы

$$Q_x = \frac{q(a-2x)}{2} - 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a}; \quad (48)$$

2. Коэффициенты  $C_3$  и  $C_4$  для изгибающих моментов шарнирно опертой прямоугольной пластинки под равномерным давлением

$$\left( b \geq a; \quad x = \frac{a}{2}; \quad \nu = 0,3 \right)$$

$\frac{b}{a}$	$C_3$ при $y$					$C_4$ при $y$				
	0,4a	0,3a	0,2a	0,1a	0	0,4a	0,3a	0,2a	0,1a	0
1,0	0,0168	0,0303	0,0400	0,0459	0,0479	0,0209	0,0343	0,0424	0,0466	0,0479
1,1	0,0197	0,0353	0,0465	0,0532	0,0554	0,0225	0,0363	0,0442	0,0481	0,0493
1,2	0,0225	0,0401	0,0526	0,0600	0,0627	0,0239	0,0379	0,0454	0,0490	0,0501
1,3	0,0252	0,0447	0,0585	0,0667	0,0694	0,0252	0,0391	0,0462	0,0494	0,0503
1,4	0,0275	0,0491	0,0639	0,0727	0,0755	0,0263	0,0402	0,0470	0,0495	0,0502
1,5	0,0302	0,0532	0,0690	0,0781	0,0812	0,0275	0,0410	0,0470	0,0493	0,0498
1,6	0,0324	0,0571	0,0737	0,0832	0,0862	0,0288	0,0417	0,0471	0,0489	0,0492
1,7	0,0348	0,0607	0,0780	0,0877	0,0908	0,0295	0,0423	0,0470	0,0484	0,0486
1,8	0,0371	0,0641	0,0819	0,0917	0,0948	0,0304	0,0428	0,0469	0,0478	0,0479
1,9	0,0392	0,0673	0,0854	0,0953	0,0985	0,0314	0,0433	0,0467	0,0472	0,0471
2,0	0,0413	0,0703	0,0887	0,0986	0,1017	0,0322	0,0436	0,0464	0,0465	0,0464
2,5	0,0505	0,0828	0,1012	0,1102	0,1129	0,0360	0,0446	0,0447	0,0435	0,0430
3,0	0,0586	0,0923	0,1092	0,1168	0,1189	0,0389	0,0447	0,0431	0,0413	0,0406
4,0	0,0723	0,1054	0,1180	0,1224	0,1235	0,0426	0,0436	0,0406	0,0389	0,0384
$\infty$	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375

$$Q_y = -2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (49)$$

Для сторон  $x = 0$  и  $y = \frac{b}{2}$

$$(Q_x)_{x=0} = \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m}; \quad (50)$$

$$(Q_y)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \alpha_m}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (51)$$

Опорные реакции по стороне  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} (R_x)_{x=0} = & \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} + \\ & + \frac{2(1-\nu)qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_m} \left( \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \right. \\ & \left. - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Максимальные значения прогиба и силовых факторов:

$$w'_{\max} = (w)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = C_5 \frac{qa^4}{D}; \quad (53)$$

$$(M_x)_{\max} = (M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = C_6 qa^2;$$

$$(M_y)_{\max} = (M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = C_7 qa^2; \quad (54)$$

$$(Q_x)_{\max} = (Q_x)_{x=0, y=0} = C_8 qa; \quad (Q_y)_{\max} = (Q_y)_{x=\frac{a}{2}, y=-\frac{b}{2}} = C_9 qa; \quad (55)$$

$$(R_x)_{\max} = (R_x)_{x=0, y=0} = C_{10} qa;$$

$$(R_y)_{\max} = (R_y)_{x=\frac{a}{2}, y=-\frac{b}{2}} = C_{11} qa. \quad (56)$$

Значения коэффициентов  $C_5 - C_{11}$  приведены в табл. 3.

3. Значения коэффициентов  $C_5 - C_{11}$  в формулах (53)–(56) для случая равномерно нагруженной шарнирно опертой пластинки ( $\nu=0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$	$C_{10}$	$C_{11}$
1,0	0,00406	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420
1,1	0,00485	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440
1,2	0,00564	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453
1,3	0,00638	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464
1,4	0,00705	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471
1,5	0,00772	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480
1,6	0,00830	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485
1,7	0,00883	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488
1,8	0,00931	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491
1,9	0,00974	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494
2,0	0,01013	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496
3,0	0,01223	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498
4,0	0,01282	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500
5,0	0,01297	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500
$\infty$	0,01302	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500

Пластика (рис. 7) нагружена гидростатическим давлением.

Прогиб в произвольной точке [13]

$$w = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right.$$

$$\left. + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (57)$$

где

$$A_m = -\frac{(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}; \quad B_m = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}; \quad (58)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}. \quad (59)$$

Прогиб пластинки по оси  $x$

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (60)$$

Для квадратной пластинки ( $a = b$ ) будет

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \left( 0,002055 \sin \frac{\pi x}{a} - 0,000177 \sin \frac{2\pi x}{a} + \right. \\ \left. + 0,000025 \sin \frac{3\pi x}{a} - \dots \right). \quad (61)$$

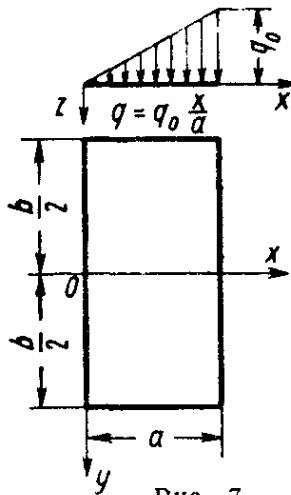


Рис. 7

Прогиб в центре квадратной пластинки

$$(w)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = 0,00203 \frac{q_0 a^4}{D}; \quad (62)$$

максимальный прогиб для квадратной пластинки

$$w_{\max} = 0,00206 \frac{q_0 a^4}{D} \quad (63)$$

имеет место в точке  $x = 0,557a$ .

Пользуясь коэффициентами, приведенными в табл. 4, прогиб для точек по оси  $x$  можно определить по формуле

$$(w)_{y=0} = C_1 \frac{q_0 a^4}{D}. \quad (64)$$

Изгибающий момент  $M_x$  для оси  $x$  (т. е. при  $y = 0$ )

$$(M_x)_{y=0} = \frac{q_0 (a^2 x - x^3)}{6a} - \frac{q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \times \\ \times [2 + (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (65)$$

Изгибающие моменты можно определить из уравнений

$$(M_x)_{y=0} = C_2 q_0 a^2; \quad (M_y)_{y=0} = C_3 q_0 a^2 \quad (66)$$

Значения коэффициентов  $C_2, C_3$  приводятся в табл. 5.

4. Коэффициент  $C_1$  для определения прогибов шарнирно опертой прямоугольной пластинки, нагруженной гидростатическим давлением ( $b > a$ )

$\frac{b}{a}$	$C_1$ при $x$				$\frac{b}{a}$	$C_1$ при $x$			
	0,25a	0,50a	0,60a	0,75a		0,25a	0,50a	0,60a	0,75a
1,0	0,00131	0,00203	0,00201	0,00162	1,8	0,00313	0,00465	0,00455	0,00353
1,1	0,00158	0,00243	0,00242	0,00192	1,9	0,00328	0,00487	0,00475	0,00368
1,2	0,00186	0,00282	0,00279	0,00221	2,0	0,00342	0,00506	0,00494	0,00382
1,3	0,00212	0,00319	0,00315	0,00248	3,0	0,00416	0,00612	0,00592	0,00456
1,4	0,00235	0,00353	0,00348	0,00273	4,0	0,00437	0,00641	0,00622	0,00477
1,5	0,00257	0,00386	0,00379	0,00296	5,0	0,00441	0,00648	0,00629	0,00483
1,6	0,00277	0,00415	0,00407	0,00317	$\infty$	0,00443	0,00651	0,00632	0,00484
1,7	0,00296	0,00441	0,00432	0,00335					

5. Коэффициенты  $C_2$  и  $C_3$  в формулах (66) для случая шарнирно опертой прямоугольной пластинки, нагруженной гидростатическим давлением ( $b > a$ ;  $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$C_2$ при $x$				$C_3$ при $x$			
	0,25a	0,50a	0,60a	0,75a	0,25a	0,50a	0,60a	0,75a
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207
1,1	0,0156	0,0276	0,0302	0,0289	0,0155	0,0247	0,0251	0,0211
1,2	0,0179	0,0313	0,0338	0,0318	0,0158	0,0250	0,0254	0,0213
1,3	0,0200	0,0346	0,0371	0,0344	0,0160	0,0252	0,0255	0,0213
1,4	0,0221	0,0376	0,0402	0,0367	0,0160	0,0253	0,0254	0,0212
1,5	0,0239	0,0406	0,0429	0,0388	0,0159	0,0249	0,0252	0,0210
1,6	0,0256	0,0431	0,0454	0,0407	0,0158	0,0246	0,0249	0,0207
1,7	0,0272	0,0454	0,0476	0,0424	0,0155	0,0243	0,0246	0,0205
1,8	0,0286	0,0474	0,0496	0,0439	0,0153	0,0239	0,0242	0,0202
1,9	0,0298	0,0492	0,0513	0,0452	0,0150	0,0235	0,0238	0,0199
2,0	0,0309	0,0508	0,0529	0,0463	0,0148	0,0232	0,0234	0,0197
3,0	0,0369	0,0594	0,0611	0,0525	0,0128	0,0202	0,0207	0,0176
4,0	0,0385	0,0617	0,0632	0,0541	0,0120	0,0192	0,0196	0,0168
5,0	0,0389	0,0623	0,0638	0,0546	0,0118	0,0187	0,0193	0,0166
$\infty$	0,0391	0,0625	0,0640	0,0547	0,0117	0,0187	0,0192	0,0165

Выражения для перерезывающих сил

$$Q_x = \frac{q_0(a^2 - 3x^2)}{6a} - \frac{2q_0a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a}; \quad (67)$$

$$Q_y = -\frac{2q_0a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (68)$$

Величину вертикальных опорных реакций  $R_x$  для сторон  $x = 0$  и  $x = a$  определяют по формуле

$$R_x = \pm C_4 q_0 a. \quad (69)$$

Вертикальные опорные реакции  $R_y$  для сторон  $y = \pm \frac{b}{2}$

$$R_y = \mp C_5 q_0 b. \quad (70)$$

Ряд значений коэффициентов  $C_4$ ,  $C_5$  приведен в табл. 6.

6. Значения коэффициентов  $C_4$  и  $C_5$  в формулах (69) и (70) для пластинки, шарнирно опертой по краям и нагруженной гидростатическим давлением ( $b > a$ ;  $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$C_4$				$C_5$			
	$x=0$		$x=a$		$y = \pm \frac{b}{2}$			
	$y=0$	$y=0,25b$	$y=0$	$y=0,25b$	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239
1,1	0,136	0,107	0,304	0,267	0,110	0,199	0,221	0,224
1,2	0,144	0,114	0,312	0,276	0,105	0,189	0,208	0,209
1,3	0,150	0,121	0,318	0,284	0,100	0,178	0,196	0,196
1,4	0,155	0,126	0,323	0,292	0,095	0,169	0,185	0,184
1,5	0,159	0,132	0,327	0,297	0,090	0,160	0,175	0,174
1,6	0,162	0,136	0,330	0,302	0,086	0,151	0,166	0,164
1,7	0,164	0,140	0,332	0,306	0,082	0,144	0,157	0,155
1,8	0,166	0,143	0,333	0,310	0,078	0,136	0,149	0,147
1,9	0,167	0,146	0,334	0,313	0,074	0,130	0,142	0,140
2,0	0,168	0,149	0,335	0,316	0,071	0,124	0,135	0,134
3,0	0,169	0,163	0,336	0,331	0,048	0,083	0,091	0,089
4,0	0,168	0,167	0,334	0,334	0,036	0,063	0,068	0,067
5,0	0,167	0,167	0,334	0,335	0,029	0,050	0,055	0,054
$\infty$	0,167	0,167	0,333	0,333				

Если  $b < a$ , то прогиб и силовые факторы можно определить, пользуясь численными результатами, приведенными в табл. 7—9, и используя формулы

7. Коэффициенты  $C_6$  в формуле (71) для определения прогибов шарнирно опертой прямоугольной пластинки, нагруженной гидростатическим давлением

$$q = q_0 \frac{x}{a} \quad (b < a)$$

$\frac{a}{b}$	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$	$\frac{a}{b}$	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$
$\infty$	0,00325	0,00651	0,00781	0,00976	1,6	0,00249	0,00415	0,00432	0,00372
5	0,00325	0,00648	0,00778	0,00965	1,5	0,00234	0,00386	0,00399	0,00339
4	0,00325	0,00641	0,00751	0,00832	1,4	0,00218	0,00353	0,00363	0,00304
3	0,00321	0,00630	0,00692	0,00707	1,3	0,00199	0,00319	0,00325	0,00269
2	0,00288	0,00506	0,00542	0,00492	1,2	0,00179	0,00282	0,00286	0,00234
1,9	0,00281	0,00487	0,00518	0,00465	1,1	0,00153	0,00243	0,00245	0,00199
1,8	0,00270	0,00465	0,00491	0,00434	1,0	0,00131	0,00202	0,00201	0,00162
1,7	0,00261	0,00441	0,00463	0,00404					

$$(w)_{y=0} = C_6 \frac{q_0 b^4}{D}; \quad (71)$$

$$(M_x)_{y=0} = C_7 b^2 q_0; \quad (M_y)_{y=0} = C_8 b^2 q_0; \quad (72)$$

$$R_x = C_9 q_0 a; \quad R_y = C_{10} q_0 b. \quad (73)$$

8. Коэффициенты  $C_7$  и  $C_8$  в формулах (72) для определения изгибающих моментов в случае шарнирно опертой прямоугольной пластинки, нагруженной гидростатическим давлением  $q = q_0 \frac{x}{a}$  ( $b < a$ ;  
 $\nu = 0,3$ )

$\frac{a}{b}$	$C_7$				$C_8$			
	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$
$\infty$	0,0094	0,0187	0,0225	0,0281	0,0312	0,0625	0,0750	0,0937
5,0	0,0094	0,0187	0,0230	0,0309	0,0312	0,0623	0,0742	0,0877
4,0	0,0094	0,0192	0,0237	0,0326	0,0312	0,0617	0,0727	0,0820
3,0	0,0096	0,0202	0,0256	0,0345	0,0309	0,0594	0,0678	0,0715
2,0	0,0108	0,0232	0,0285	0,0348	0,0284	0,0508	0,0554	0,0523
1,9	0,0111	0,0235	0,0288	0,0345	0,0278	0,0492	0,0533	0,0498
1,8	0,0115	0,0239	0,0291	0,0341	0,0269	0,0474	0,0509	0,0470
1,7	0,0117	0,0243	0,0293	0,0337	0,0261	0,0454	0,0485	0,0442
1,6	0,0120	0,0246	0,0294	0,0331	0,0251	0,0431	0,0457	0,0412
1,5	0,0123	0,0249	0,0294	0,0324	0,0239	0,0406	0,0428	0,0381
1,4	0,0126	0,0253	0,0292	0,0315	0,0225	0,0376	0,0396	0,0348
1,3	0,0129	0,0252	0,0290	0,0304	0,0209	0,0346	0,0360	0,0314
1,2	0,0131	0,0250	0,0284	0,0291	0,0192	0,0313	0,0323	0,0279
1,1	0,0134	0,0247	0,0276	0,0276	0,0169	0,0276	0,0285	0,0245
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207

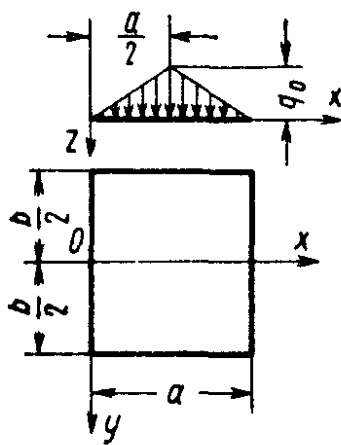
9. Значения коэффициентов  $C_9$  и  $C_{10}$  в формулах (73) для определения вертикальных реакций шарнирно опертой прямоугольной пластинки, нагруженной гидростатическим давлением  $q = q_0 \frac{x}{a}$   
( $\nu = 0,3$ )

$\frac{a}{b}$	$C_9$				$C_{10}$			
	$x=0$		$x=a$		$y = \pm \frac{b}{2}$			
	$y=0$	$y = \frac{b}{4}$	$y=0$	$y = \frac{b}{4}$	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$
$\infty$					0,125	0,250	0,300	0,375
5,0	0,008	0,006	0,092	0,076	0,125	0,250	0,301	0,379
4,0	0,013	0,010	0,112	0,093	0,125	0,251	0,301	0,377
3,0	0,023	0,018	0,143	0,119	0,125	0,252	0,304	0,368
2,0	0,050	0,038	0,197	0,166	0,127	0,251	0,296	0,337
1,9	0,055	0,041	0,205	0,172	0,127	0,251	0,294	0,331
1,8	0,060	0,045	0,213	0,179	0,128	0,249	0,291	0,325
1,7	0,066	0,050	0,221	0,187	0,127	0,248	0,288	0,318
1,6	0,073	0,055	0,230	0,195	0,127	0,245	0,284	0,311
1,5	0,080	0,060	0,240	0,204	0,127	0,243	0,279	0,302
1,4	0,088	0,067	0,250	0,213	0,126	0,239	0,273	0,292
1,3	0,097	0,074	0,260	0,223	0,124	0,234	0,266	0,281
1,2	0,106	0,081	0,271	0,233	0,122	0,227	0,257	0,269
1,1	0,116	0,090	0,282	0,244	0,120	0,220	0,247	0,255
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239



Пластинка (рис. 8) под нагрузкой в виде треугольной призмы. Прогиб определяют по формуле [13]

$$\omega = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left[ \frac{8(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^6 m^6} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (74)$$



где

$$A_m = - \frac{4(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^6 m^6 \operatorname{ch} \alpha_m};$$

$$B_m = \frac{4(-1)^{\frac{(m-1)}{2}}}{\pi^6 m^6 \operatorname{ch} \alpha_m}; \quad (75)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}. \quad (76)$$

Рис. 8

Прогиб по оси  $x$

$$(\omega)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left[ \frac{8(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^6 m^6} + A_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (77)$$

Максимальный прогиб будет в центре пластинки

$$\omega_{\max} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left[ \frac{8}{\pi^6 m^6} + A_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right]. \quad (78)$$

Пользуясь табл. 10, максимальный прогиб можно определить по формуле

$$(\omega)_{\max} = C_1 \frac{q_0 a^4}{D}. \quad (79)$$

Максимальные значения изгибающих моментов имеют место в центре пластинки:

$$(M_x)_{\max} = C_2 q_0 a^2; \quad (80)$$

$$(M_y)_{\max} = C_3 q_0 a^2. \quad (81)$$

Значения коэффициентов  $C_2$  и  $C_3$  даны в табл. 10.

10. Численные значения коэффициентов  $C_1—C_7$  в формулах (79)—(83) для расчета шарнирно опертой прямоугольной пластинки под нагрузкой в виде треугольной призмы ( $b > a$ ;  $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
1,0	0,00263	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250
1,1	0,00314	0,0390	0,0326	0,212	0,297	0,161	0,232
1,2	0,00364	0,0436	0,0330	0,222	0,280	0,173	0,216
1,3	0,00411	0,0479	0,0332	0,230	0,265	0,184	0,202
1,4	0,00455	0,0518	0,0331	0,236	0,250	0,193	0,189
1,5	0,00496	0,0554	0,0329	0,241	0,236	0,202	0,178
1,6	0,00533	0,0586	0,0325	0,246	0,224	0,208	0,168
1,7	0,00567	0,0615	0,0321	0,247	0,212	0,214	0,158
1,8	0,00597	0,0641	0,0316	0,249	0,201	0,220	0,150
1,9	0,00625	0,0664	0,0311	0,251	0,191	0,224	0,142
2,0	0,00649	0,0685	0,0306	0,252	0,183	0,228	0,135
3,0	0,00783	0,0794	0,0270	0,253	0,122	0,245	0,090
$\infty$	0,00833	0,0833	0,0250	0,250	. . .	0,250	

В таблице приведены и численные коэффициенты  $C_4—C_7$  для вычисления перерезывающих сил и опорных реакций по формулам

$$(Q_x)_{\max} = (Q_x)_{x=0, y=0} = C_4 q_0 a;$$

$$(Q_y)_{\max} = (Q_y)_{x=\frac{a}{2}, y=-\frac{b}{2}} = C_5 q_0 b; \quad (82)$$

$$(R_x)_{\max} = (R_x)_{x=0, y=0} = C_6 q_0 a;$$

$$(R_y)_{\max} = (R_y)_{x=\frac{a}{2}, y=-\frac{b}{2}} = C_7 q_0 b. \quad (83)$$

Для случая  $b < a$  можно пользоваться формулами

$$w_{\max} = C'_1 \frac{q_0 b^4}{D}; \quad (84)$$

$$(M_x)_{\max} = C'_2 q_0 b^2; \quad (M_y)_{\max} = C'_3 q_0 b^2; \quad (85)$$

$$(Q_x)_{\max} = C'_4 q_0 a; \quad (Q_y)_{\max} = C'_5 q_0 b; \quad (86)$$

$$(R_x)_{\max} = C'_6 q_0 a; \quad (R_y)_{\max} = C'_7 q_0 b. \quad (87)$$

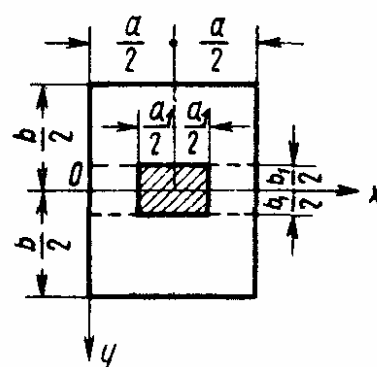


Рис. 9

Значения коэффициентов  $C'_1—C'_7$  приведены в табл. 11.

Пластика под нагрузкой, равномерно распределенной по площади центральной части (рис. 9, нагруженная площадь заштрихована).

11. Значения коэффициентов  $C'_1—C'_7$  в формулах (85)—(87) для расчета шарнирно опертой прямоугольной пластинки, находящейся под нагрузкой в виде треугольной призмы ( $b < a$ ;  $\nu = 0,3$ )

$\frac{a}{b}$	$C'_1$	$C'_2$	$C'_3$	$C'_4$	$C'_5$	$C'_6$	$C'_7$
$\infty$	0,01302	0,0375	0,1250		0,500		0,500
3,0	0,00868	0,0387	0,0922	0,045	0,442	0,027	0,410
2,0	0,00686	0,0392	0,0707	0,091	0,412	0,057	0,365
1,9	0,00656	0,0392	0,0681	0,098	0,407	0,062	0,358
1,8	0,00624	0,0391	0,0651	0,106	0,402	0,098	0,350
1,7	0,00588	0,0390	0,0609	0,115	0,396	0,074	0,342
1,6	0,00549	0,0388	0,0585	0,124	0,389	0,081	0,332
1,5	0,00508	0,0386	0,0548	0,135	0,381	0,090	0,322
1,4	0,00464	0,0382	0,0508	0,146	0,371	0,099	0,311
1,3	0,00418	0,0376	0,0464	0,158	0,360	0,109	0,298
1,2	0,00367	0,0368	0,0418	0,171	0,347	0,120	0,284
1,1	0,00316	0,0356	0,0369	0,185	0,332	0,133	0,268
1,0	0,00263	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250

Прогиб [13]

$$\omega = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(m-1)}{2}}}{m^5} \sin \frac{m\pi a_1}{2a} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left[ \operatorname{ch} (\alpha_m - 2\beta_m) + \beta_m \operatorname{sh} (\alpha_m - 2\beta_m) \right] + \right.$$

$$\left. + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\beta_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right] + \frac{\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\beta_m)}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \left\} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (88)$$

где

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}; \quad \beta_m = \frac{m\pi b_1}{4a}. \quad (89)$$

Уравнение (88) позволяет определить прогибы в любой точке загруженного участка пластинки.

В центре пластинки получается наибольший прогиб

$$\omega_{\max} = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi a_1}{2a} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \times \right.$$

$$\times \left[ \operatorname{ch} (\alpha_m - 2\beta_m) + \beta_m \operatorname{sh} (\alpha_m - 2\beta_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\beta_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right] \left. \right\}. \quad (90)$$

12. Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  в формулах (92) и (93) для определения максимального прогиба шарнирно опертой прямоугольной пластинки, нагруженной по оси симметрии, параллельной стороне  $a$

$\frac{b}{a}$	$C_1$	$\frac{b}{a}$	$C_1$	$\frac{a}{b}$	$C_2$	$\frac{a}{b}$	$C_2$
2,0	0,00987	1,2	0,00799	1,1	0,00802	1,5	0,01251
1,5	0,00911	1,1	0,00742	1,2	0,00926	2,0	0,01629
1,4	0,00882	1,0	0,00674	1,3	0,01042	$\infty$	0,02083
1,3	0,00844	—	—	1,4	0,01151	—	—

Максимальный прогиб для случая, когда  $a_1 = a$ , а  $b_1$  представляет весьма малую величину (случай равномерного распределения нагрузки по оси  $x$ ), можно представить в виде

$$w_{\max} = \frac{qb_1 a^3}{D\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(m-1)}{2}}}{m^4} \left( \operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right). \quad (91)$$

Пользуясь табл. 12, можно определить максимальный прогиб для пластинки, равномерно загруженной по оси  $x$ :  
при  $a < b$

$$w_{\max} = C_1 \frac{q_0 a^3}{D}; \quad (92)$$

при  $a > b$

$$w_{\max} = C_2 \frac{q_0 b^3}{D}. \quad (93)$$

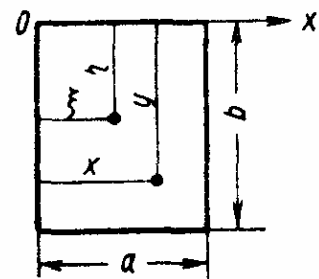


Рис. 10

Изгибающие моменты достигают максимальных значений в центре пластинки:

$$(M_x)_{\max} = C_3 P; \quad (M_y)_{\max} = C_4 P, \quad (94)$$

где  $P = a_1 b_1 q$ . Значения коэффициентов  $C_3$  для квадратной пластинки и для различных участков загруженного прямоугольного участка приведены в табл. 13. Коэффициенты  $C_4$  находят из табл. 13 путем перестановки букв  $a_1$  и  $b_1$ .

Численные коэффициенты  $C_3$  и  $C_4$  для пластинки с отношением сторон  $b = 1,4a$  и  $b = 2a$  приведены в табл. 14—15.

Пластика (рис. 10) в некоторой точке  $x = \xi$ ,  $y = \eta$  нагружена сосредоточенной силой  $P$ . Прогиб пластинки [13]

$$w = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \beta_m \operatorname{cth} \beta_m - \frac{\beta_m y_1}{b} \operatorname{cth} \frac{\beta_m y_1}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \operatorname{cth} \frac{\beta_m \eta}{b} \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta_m \eta}{b} \operatorname{sh} \frac{\beta_m y_1}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{sh} \beta_m}, \quad (95)$$

13. Коэффициент  $C_3$  для определения максимального изгибающего момента в шарнирно опертой частично загруженной квадратной пластинке ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b_1}{a}$	$C_3$ при $\frac{a_1}{a}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	$\infty$	0,321	0,251	0,209	0,180	0,158	0,141	0,125	0,112	0,102	0,092
0,1	0,378	0,284	0,232	0,197	0,170	0,150	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088
0,2	0,308	0,254	0,214	0,184	0,161	0,142	0,127	0,114	0,103	0,093	0,084
0,3	0,262	0,225	0,195	0,168	0,151	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088	0,080
0,4	0,232	0,203	0,179	0,158	0,141	0,126	0,113	0,102	0,092	0,084	0,076
0,5	0,208	0,185	0,164	0,146	0,131	0,116	0,106	0,096	0,087	0,079	0,071
0,6	0,188	0,168	0,150	0,135	0,121	0,109	0,099	0,090	0,081	0,074	0,067
0,7	0,170	0,153	0,137	0,124	0,112	0,101	0,091	0,083	0,076	0,069	0,062
0,8	0,155	0,140	0,126	0,114	0,103	0,094	0,085	0,077	0,070	0,063	0,057
0,9	0,141	0,127	0,115	0,104	0,094	0,086	0,078	0,070	0,064	0,058	0,053
1,0	0,127	0,115	0,105	0,095	0,086	0,078	0,071	0,064	0,058	0,053	0,048

14. Коэффициенты  $C_3$  и  $C_4$  в формулах (94) для определения максимальных изгибающих моментов в шарнирно опертой частично загруженной пластинке ( $b = 1,4a$ ,  $\nu = 0,3$ )

$\frac{b_1}{a}$	$C_3$ при $\frac{a_1}{a}$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	$\infty$	0,276	0,208	0,163	0,134	0,110
0,2	0,332	0,239	0,186	0,152	0,125	0,103
0,4	0,261	0,207	0,168	0,138	0,115	0,095
0,6	0,219	0,181	0,151	0,126	0,105	0,086
0,8	0,187	0,158	0,134	0,112	0,094	0,078
1,0	0,162	0,139	0,118	0,100	0,084	0,070
1,2	0,141	0,122	0,104	0,089	0,075	0,062
1,4	0,123	0,106	0,091	0,077	0,065	0,054

$\frac{b_1}{a}$	$C_4$ при $\frac{a_1}{a}$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	$\infty$	0,299	0,230	0,183	0,151	0,125
0,2	0,246	0,208	0,175	0,147	0,124	0,102
0,4	0,177	0,157	0,138	0,119	0,101	0,083
0,6	0,138	0,125	0,111	0,097	0,083	0,069
0,8	0,112	0,102	0,091	0,080	0,069	0,058
1,0	0,093	0,085	0,077	0,068	0,058	0,049
1,2	0,079	0,072	0,065	0,058	0,050	0,042
1,4	0,068	0,062	0,056	0,050	0,043	0,036

15. Коэффициенты  $C_3$  и  $C_4$  в формулах (94) для определения максимальных изгибающих моментов в шарнирно опертой частично загруженной пластинке ( $b = 2a$ ,  $\nu = 0,3$ )

$\frac{b_1}{a}$	$C_3$ при $\frac{a_1}{a}$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	$\infty$	0,289	0,220	0,175	0,144	0,118
0,2	0,347	0,252	0,199	0,163	0,135	0,111
0,4	0,275	0,221	0,181	0,150	0,125	0,103
0,6	0,233	0,195	0,164	0,138	0,115	0,095
0,8	0,203	0,174	0,148	0,126	0,106	0,088
1,0	0,179	0,155	0,134	0,115	0,097	0,080
1,2	0,161	0,141	0,122	0,105	0,089	0,074
1,4	0,144	0,127	0,111	0,096	0,081	0,068
1,6	0,130	0,115	0,101	0,087	0,074	0,062
1,8	0,118	0,104	0,091	0,079	0,067	0,056
2,0	0,107	0,094	0,083	0,072	0,061	0,051

$\frac{b_1}{a}$	$C_4$ при $\frac{a_1}{a}$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	$\infty$	0,294	0,225	0,179	0,148	0,122
0,2	0,242	0,203	0,170	0,143	0,120	0,099
0,4	0,172	0,152	0,133	0,114	0,097	0,081
0,6	0,133	0,120	0,106	0,093	0,079	0,066
0,8	0,107	0,097	0,087	0,076	0,065	0,054
1,0	0,089	0,081	0,073	0,064	0,055	0,046
1,2	0,074	0,068	0,061	0,054	0,046	0,039
1,4	0,064	0,058	0,052	0,046	0,040	0,033
1,6	0,056	0,051	0,046	0,040	0,035	0,029
1,8	0,049	0,045	0,041	0,036	0,031	0,026
2,0	0,044	0,041	0,037	0,032	0,028	0,023

где

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a}; \quad y_1 = b - y; \quad y \geq \eta.$$

Если  $y < \eta$ , то в выражении (95) вместо величины  $y_1$  следует подставить  $y$ , а вместо  $\eta$  — величину  $\eta_1 = b - \eta$ .

Пластика (рис. 11) нагружена силой  $P$ , сосредоточенной в точке на оси симметрии. Общее выражение для прогиба [13]

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) - \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \right] \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m}, \quad (96)$$

где

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}; \quad y \geq 0.$$

Прогиб пластинки по оси  $x$

$$(w)_{y=0} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3}. \quad (97)$$

В частном случае, когда нагрузка  $P$  приложена в центре пластинки, максимальный прогиб будет

$$(w)_{\max} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left( \operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) = C_1 \frac{Pa^2}{D}. \quad (98)$$

Значения коэффициента  $C_1$  приведены в табл. 16.

В случае пластинки, загруженной по схеме рис. 10, изгибающие моменты на оси  $x$

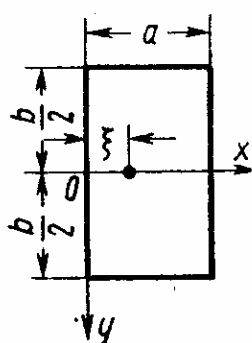


Рис. 11

$$(M_x)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a}}{m} \times \\ \times \left[ (1 + \nu) \operatorname{th} \alpha_m - \frac{(1 - \nu) \alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad (99)$$

$$(M_y)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a}}{m} \times$$

$$\times \left[ (1 + \nu) \operatorname{th} \alpha_m + \frac{(1 - \nu) \alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (100)$$

16. Значения коэффициентов  $C_1$  в формуле (98),  $C_2$  и  $C_3$  в уравнениях (101) и (102) для расчета шарнирно опертой прямоугольной пластинки, нагруженной силой, сосредоточенной в центре

$\frac{b}{a}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$\frac{b}{a}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1,0	0,01160	-0,565	0,135	1,8	0,01620	-0,073	0,037
1,1	0,01265	—	—	2,0	0,01651	-0,042	0,023
1,2	0,01353	-0,350	0,115	3,0	0,01690	—	—
1,4	0,01484	-0,211	0,085	$\infty$	0,01695	0	0
1,6	0,01570	-0,125	0,057				

Для точек оси  $x$ , близких к точке приложения нагрузки, изгибающие моменты можно определить по формулам

$$M_x = \frac{(1 + \nu) P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} + C_2 \frac{P}{4\pi} =$$

$$= \frac{P(1 + \nu)}{4\pi} \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + C_2 \frac{P}{4\pi}; \quad (101)$$

$$M_y = \frac{(1 + \nu) P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} + C_3 \frac{P}{4\pi} =$$

$$= \frac{P(1 + \nu)}{4\pi} \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + C_3 \frac{P}{4\pi}, \quad (102)$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Несколько значений коэффициентов  $C_2$  и  $C_3$  для случая приложения нагрузки в центре приведено в табл. 16.

Прямоугольная пластинка шарнирно оперта по контуру, разность температур на верхней и нижней поверхностях равна  $t$ , температура по толщине меняется по линейному закону. Изгибающие моменты имеют максимальное значение на краях (рис. 11):

$$(M_x)_{y = \pm \frac{b}{2}} = (M_y)_{x=0, x=a} = Eh^2 \frac{\alpha t}{12}, \quad (103)$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Пластика (рис. 12) загружена моментами интенсивностью  $M_0$ , равномерно распределенными по краям. Прогиб равен [13]

$$w = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} a_m} \left( a_m \operatorname{th} a_m \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (104)$$

где

$$a_m = \frac{m\pi b}{2a}.$$

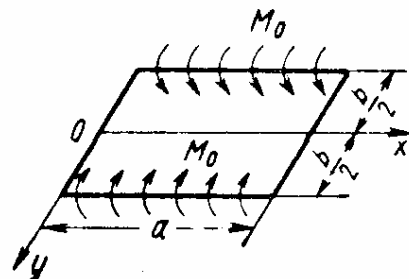


Рис. 12



Прогиб на оси симметрии ( $y = 0$ )

$$(w)_{y=0} = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \cdot \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (105)$$

Прогиб в центре пластинки

$$(w)_{y=0, x=\frac{a}{2}} = \frac{M_0 ab}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m}. \quad (106)$$

Несколько значений прогибов и изгибающих моментов в центре пластинки в зависимости от отношения сторон  $\frac{b}{a}$  приведены в табл. 17.

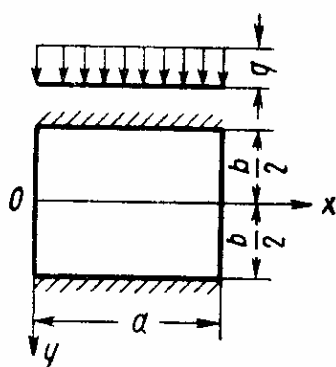


Рис. 13

Пластика (рис. 13) нагружена равномерно распределенным давлением. Прогиб и изгибающие моменты в центре пластинки [13]

$$w_{\max} = C_1 \frac{qa^4}{D}; \quad (107)$$

$$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = C_2 qa^2;$$

$$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = C_3 qa^2. \quad (108)$$

Максимальный изгибающий момент  $M_y$  имеет место в серединах зашумленных сторон

$$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=\pm \frac{b}{2}} = C_4 qa^2. \quad (109)$$

17. Прогибы и изгибающие моменты в центре прямоугольной шарнирно опертой пластинки, нагруженной моментами, равномерно распределенными по краям  $y = \pm \frac{b}{2}$  при  $\nu = 0,3$ ;  $M_x = C_1 M_0$ ;  $M_y = C_2 M_0$

$\frac{b}{a}$	$w$	$C_1$	$C_2$	$\frac{b}{a}$	$w$	$C_1$	$C_2$
0	$0,1250 M_0 \frac{b^2}{D}$	0,300	1,000	1,00	$0,368 M_0 \frac{a}{D}$	0,394	0,256
0,50	$0,0964 M_0 \frac{b^2}{D}$	0,387	0,770	1,50	$0,280 M_0 \frac{a^2}{D}$	0,264	0,046
0,75	$0,0620 M_0 \frac{b^2}{D}$	0,424	0,476	2,0	$0,0174 M_0 \frac{a^2}{D}$	0,153	-0,010

Коэффициенты  $C_1—C_4$  см. в табл. 18.

18. Коэффициенты  $C_1—C_4$  в формулах (107)—(109), для вычисления прогибов и изгибающих моментов пластинки, у которой два края шарнирно оперты и два других защемлены, нагруженной равномерно распределенным давлением ( $b > a$ ,  $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$\frac{b}{a}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
1	0,00192	0,0244	0,0332	—0,0697	1,7	0,00668	0,0712	0,0475	—0,1122
1,1	0,00251	0,0307	0,0371	—0,0787	1,8	0,00732	0,0768	0,0477	—0,1152
1,2	0,00319	0,0376	0,0400	—0,0868	1,9	0,00790	0,0821	0,0476	—0,1174
1,3	0,00388	0,0446	0,0426	—0,0938	2,0	0,00844	0,0869	0,0474	—0,1191
1,4	0,00460	0,0514	0,0448	—0,0998	3,0	0,01168	0,1144	0,0419	—0,1246
1,5	0,00531	0,0585	0,0460	—0,1049	$\infty$	0,01302	0,1250	0,0375	—0,1250
1,6	0,00603	0,0650	0,0469	—0,1090					

Если  $b < a$ , то вычисляют по формулам

$$w_{\max} = C'_1 \frac{qb^4}{D}; \quad (110)$$

$$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = C'_2 qb^2; \quad (M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = C'_3 qb^2; \quad (111)$$

$$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = C'_4 qb^2. \quad (112)$$

Коэффициенты  $C'_1—C'_4$  приведены в табл. 19.

19. Коэффициенты  $C'_1—C'_4$  в формулах (110)—(112) ( $b < a$ ,  $\nu = 0,3$ )

$\frac{a}{b}$	$C'_1$	$C'_2$	$C'_3$	$C'_4$
$\infty$	0,00260	0,0125	0,0417	—0,0833
2	0,00260	0,0142	0,0420	—0,0842
1,5	0,00247	0,0179	0,0406	—0,0822
1,4	0,00240	0,0192	0,0399	—0,0810
1,3	0,00234	0,0203	0,0388	—0,0794
1,2	0,00223	0,0215	0,0375	—0,0771
1,1	0,00209	0,0230	0,0355	—0,0739

На пластинку (рис. 14) действует равномерно распределенная нагрузка. Значения прогибов и изгибающих моментов для нескольких значений отношения  $\frac{b}{a}$  приведены в табл. 20 [13].

20. Прогобы и изгибающие моменты прямоугольной пластинки, один край которой зашпелен, три другие — шарнирно оперты ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$(w) \quad x = \frac{a}{2}, y = 0$	$(M_y) \quad x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$	$(M_x) \quad x = \frac{a}{2}, y = 0$	$(M_y) \quad x = \frac{a}{2}, y = 0$
$\infty$	$0,0130 \frac{qa^4}{D}$	$-0,125 qa^2$	$0,125 qa^2$	$0,037 qa^2$
2	$0,0093 \frac{qa^4}{D}$	$-0,122 qa^2$	$0,094 qa^2$	$0,047 qa^2$
1,5	$0,0064 \frac{qa^4}{D}$	$-0,112 qa^2$	$0,069 qa^2$	$0,048 qa^2$
1,4	$0,0058 \frac{qa^4}{D}$	$-0,109 qa^2$	$0,063 qa^2$	$0,047 qa^2$
1,3	$0,0050 \frac{qa^4}{D}$	$-0,104 qa^2$	$0,056 qa^2$	$0,045 qa^2$
1,2	$0,0043 \frac{qa^4}{D}$	$-0,098 qa^2$	$0,049 qa^2$	$0,044 qa^2$
1,1	$0,0035 \frac{qa^4}{D}$	$-0,092 qa^2$	$0,041 qa^2$	$0,042 qa^2$
1,0	$0,0028 \frac{qa^4}{D}$	$-0,084 qa^2$	$0,034 qa^2$	$0,039 qa^2$
1/1,1	$0,0032 \frac{qb^4}{D}$	$-0,092 qb^2$	$0,033 qb^2$	$0,043 qb^2$
1/1,2	$0,0035 \frac{qb^4}{D}$	$-0,098 qb^2$	$0,032 qb^2$	$0,047 qb^2$
1/1,3	$0,0038 \frac{qb^4}{D}$	$-0,103 qb^2$	$0,031 qb^2$	$0,050 qb^2$
1/1,4	$0,0040 \frac{qb^4}{D}$	$-0,108 qb^2$	$0,030 qb^2$	$0,052 qb^2$
1/1,5	$0,0042 \frac{qb^4}{D}$	$-0,111 qb^2$	$0,028 qb^2$	$0,054 qb^2$
0,5	$0,0049 \frac{qb^4}{D}$	$-0,122 qb^2$	$0,023 qb^2$	$0,060 qb^2$
0	$0,0052 \frac{qb^4}{D}$	$-0,125 qb^2$	$0,019 qb^2$	$0,062 qb^2$

Изгибающие моменты по стороне  $y = \frac{b}{2}$

$$(M_y)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{8qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{2\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1) - \operatorname{cth} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m - 1)}, \quad (113)$$

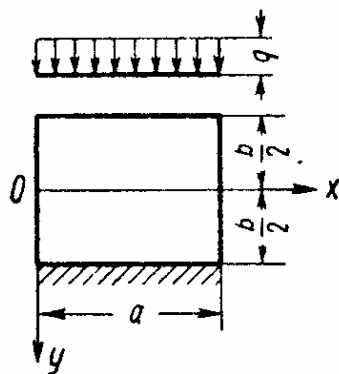


Рис. 14

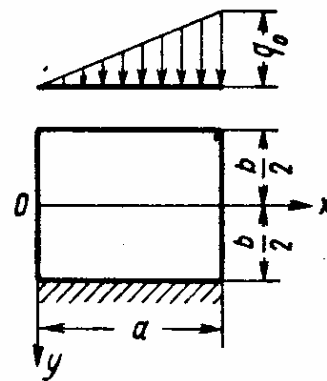


Рис. 15

где

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}. \quad (114)$$

Пласти́нка (рис. 15) нагружена гидростатическим давлением. Выражение для изгибающего момента  $M_y$  по краю  $y = \frac{b}{2}$  имеет вид [13]

$$(M_y)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{4q_0a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{2\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1) - \operatorname{cth} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m - 1)}. \quad (115)$$

Значения момента  $(M_y)_{y=\frac{b}{2}}$  для ряда точек защемленного края приведены в табл. 21.

21. Значения момента  $M_y$  по защемленному краю  $y = \frac{b}{2}$  для прямоугольной пластинки, нагруженной гидростатическим давлением  $q_0 \frac{x}{a}$

$\frac{b}{a}$	$x = a/4$	$x = a/2$	$x = \frac{3}{4} a$
$\infty$	$-0,039 q_0 a^2$	$-0,062 q_0 a^2$	$-0,055 q_0 a^2$
2	$-0,038 q_0 a^2$	$-0,061 q_0 a^2$	$-0,053 q_0 a^2$
3/2	$-0,034 q_0 a^2$	$-0,056 q_0 a^2$	$-0,050 q_0 a^2$
1	$-0,025 q_0 a^2$	$-0,042 q_0 a^2$	$-0,040 q_0 a^2$
2/3	$-0,030 q_0 b^2$	$-0,056 q_0 b^2$	$-0,060 q_0 b^2$
1/2	$-0,031 q_0 b^2$	$-0,061 q_0 b^2$	$-0,073 q_0 b^2$
0	$-0,031 q_0 b^2$	$-0,062 q_0 b^2$	$-0,094 q_0 b^2$

На пластинку (рис. 16) действует равномерно распределенная по всей площади нагрузка. Наибольший по абсолютной величине момент возникает вблизи середины более длинной стороны пластинки. Этот момент защемления имеет следующие значения: при  $\frac{b}{a} = 0,5$   $M = -0,1180 q b^2$ , при

$\frac{b}{a} = 1,0$  принимает значение  $M = -0,0694 q b^2$ . Наибольший изгибающий момент близ центра квадратной пластинки  $M_{\max} = 0,034 q a^2$

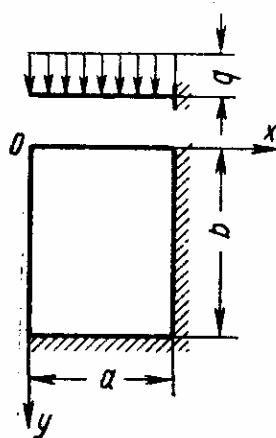


Рис. 16

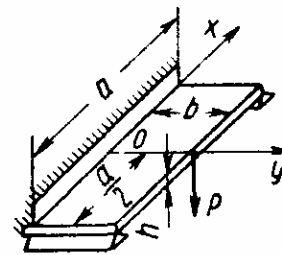


Рис. 17

(для  $\nu = 0,3$ ), а соответствующий ему прогиб  $w = 0,0023 q \frac{a^4}{D}$ . Другие численные значения изгибающих моментов приведены в табл. 22 (при  $\nu = 0,2$ ).

Пластика (рис. 17) нагружена силой  $P$ , сосредоточенной в середине свободной стороны (4). Прогиб под силой при  $a \gg b$

$$(w)_{x=0, y=b} = \frac{1,82 P b^2}{E h^3} \cdot \quad (116)$$

22. Изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки, у которой два смежных края шарнирно оперты, а остальные защемлены ( $\nu = 0,2$ )

$\frac{b}{a}$	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}$	$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}$	$(M_x)_{x=a, y=\frac{b}{2}}$	$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=b}$	В точке с координатами $x=0,4a$ ; $y=0,4b$
					$M_{\max}$
0,5	0,0191 $qb^2$	0,0574 $qb^2$	—0,0787 $qb^2$	—0,1180 $qb^2$	0,0662 $qb^2$
0,6	0,0228 $qb^2$	0,0522 $qb^2$	—0,0781 $qb^2$	—0,1093 $qb^2$	0,0570 $qb^2$
0,7	0,0257 $qb^2$	0,0460 $qb^2$	—0,0767 $qb^2$	—0,0991 $qb^2$	0,0501 $qb^2$
0,8	0,0275 $qb^2$	0,0396 $qb^2$	—0,0746 $qb^2$	—0,0882 $qb^2$	0,0430 $qb^2$
0,9	0,0282 $qb^2$	0,0336 $qb^2$	—0,0715 $qb^2$	—0,0775 $qb^2$	0,0363 $qb^2$
1,0	0,0281 $qb^2$	0,0281 $qb^2$	—0,0678 $qb^2$	—0,0678 $qb^2$	0,0305 $qb^2$
1,1	0,0330 $qa^2$	0,0283 $qa^2$	—0,0766 $qa^2$	—0,0709 $qa^2$	0,0358 $qa^2$
1,2	0,0376 $qa^2$	0,0279 $qa^2$	—0,0845 $qa^2$	—0,0736 $qa^2$	0,0407 $qa^2$
1,3	0,0416 $qa^2$	0,0270 $qa^2$	—0,0915 $qa^2$	—0,0754 $qa^2$	0,0452 $qa^2$
1,4	0,0451 $qb^2$	0,0260 $qb^2$	—0,0975 $qb^2$	—0,0765 $qb^2$	0,0491 $qb^2$
1,5	0,0481 $qa^2$	0,0248 $qa^2$	—0,1028 $qa^2$	—0,0772 $qa^2$	0,0524 $qa^2$
1,6	0,0507 $qa^2$	0,0236 $qa^2$	—0,1068 $qa^2$	—0,0778 $qa^2$	0,0553 $qa^2$
1,7	0,0529 $qa^2$	0,0224 $qa^2$	—0,1104 $qa^2$	—0,0782 $qa^2$	0,0586 $qa^2$
1,8	0,0546 $qa^2$	0,0213 $qa^2$	—0,1134 $qa^2$	—0,0785 $qa^2$	0,0608 $qa^2$
1,9	0,0561 $qa^2$	0,0202 $qa^2$	—0,1159 $qa^2$	—0,0786 $qa^2$	0,0636 $qa^2$
2,0	0,0574 $qa^2$	0,0191 $qa^2$	—0,1180 $qa^2$	—0,0787 $qa^2$	0,0662 $qa^2$

Расчетное напряжение

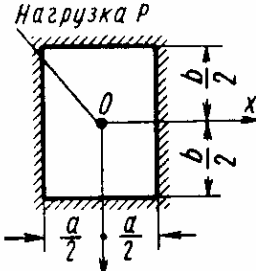
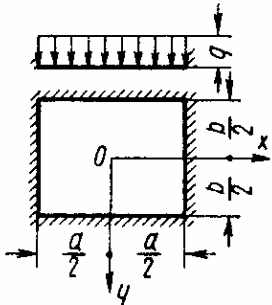
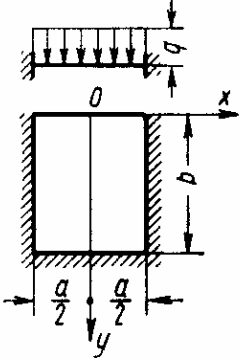
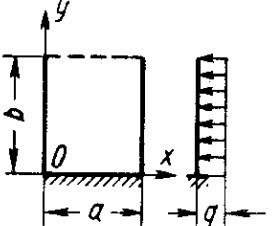
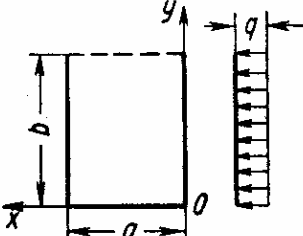
$$\sigma = \frac{3,06P}{h^2}. \quad (117)$$

Для пластинки конечной длины при  $\nu = 0,3$ ;  $x = 0$ ,  $y = 0$  изгибающие моменты  $M = C_1 P$ , где коэффициент  $C_1$  имеет следующие значения:

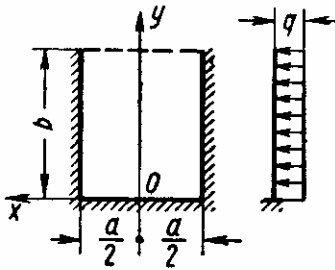
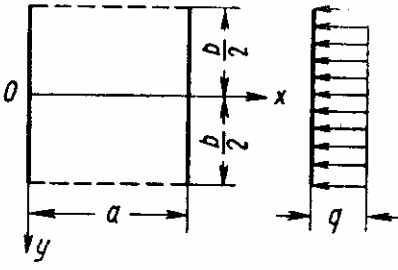
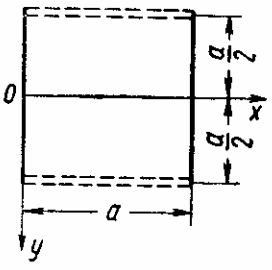
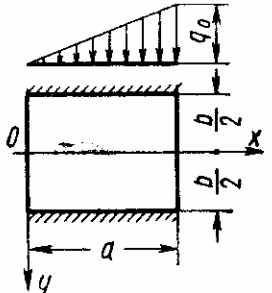
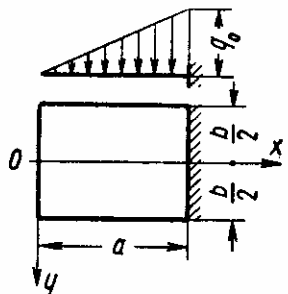
$\frac{b}{a}$	4	2	1,5	1	2/3	0,5	1,3	0,25	0
$C_1$	—0,000039	—0,0117	—0,0455	—0,163	—0,366	—0,436	—0,498	—0,507	—0,509

Некоторые другие случаи расчета прямоугольных пластинок приведены в табл. 23.

## 23. Некоторые случаи расчета прямоугольных пластинок

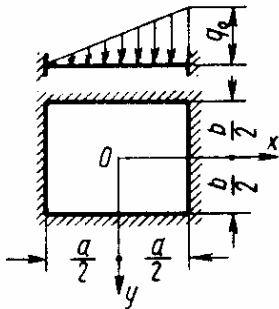
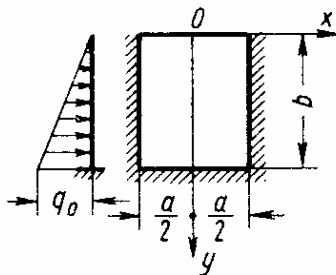
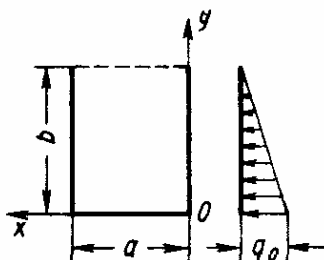
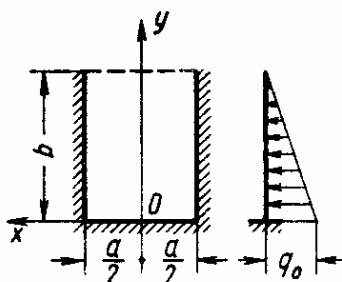
Схема	Нагрузка	№ табл.
	Сосредоточенная сила в центре 0	28
	Равномерно распределенное давление	26
		29, 30
		32
		33

Продолжение табл. 23

Схема	Нагрузка	№ табл.
	Равномерно распределенное давление	35
		37
		38
	Гидростатическое давление	24
		25



Продолжение табл. 23

Схема	Нагрузка	№ табл.
	Гидростатическое давление	27
		31
		34
		36
<p>Примечания: 1. В приведенных номерах таблиц даны расчетные формулы к схемам.</p> <p>2. Обозначение условий на краях пластинок см. рис. 5.</p>		

24. Изгибающие моменты в прямоугольной пластинке с двумя шарнирно опертыми и двумя защемленными краями, нагруженной гидростатическим давлением ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$		$x = \frac{3a}{4}, y = 0$		$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$	$x = \frac{3a}{4}, y = \frac{b}{2}$
	$M_x$	$M_y$	$M_x$	$M_y$	$M_y$	$M_y$
0,50	$0,007 q_0 b^2$	$0,021 q_0 b^2$	$0,018 q_0 b^2$	$0,029 q_0 b^2$	$-0,042 q_0 b^2$	$-0,062 q_0 b^2$
0,75	$0,011 q_0 b^2$	$0,020 q_0 b^2$	$0,018 q_0 b^2$	$0,021 q_0 b^2$	$-0,040 q_0 b^2$	$-0,045 q_0 b^2$
1,00	$0,013 q_0 a^2$	$0,017 q_0 a^2$	$0,017 q_0 a^2$	$0,015 q_0 a^2$	$-0,035 q_0 a^2$	$-0,035 q_0 a^2$
1,25	$0,021 q_0 a^2$	$0,021 q_0 a^2$	$0,024 q_0 a^2$	$0,019 q_0 a^2$	$-0,045 q_0 a^2$	$-0,043 q_0 a^2$
1,50	$0,030 q_0 a^2$	$0,023 q_0 a^2$	$0,031 q_0 a^2$	$0,020 q_0 a^2$	$-0,051 q_0 a^2$	$-0,048 q_0 a^2$
2,0	$0,043 q_0 a^2$	$0,024 q_0 a^2$	$0,042 q_0 a^2$	$0,020 q_0 a^2$	$-0,060 q_0 a^2$	$-0,053 q_0 a^2$
$\infty$	$0,063 q_0 a^2$	$0,019 q_0 a^2$	$0,055 q_0 a^2$	$0,017 q_0 a^2$	$-0,063 q_0 a^2$	$-0,055 q_0 a^2$

25. Прогибы и изгибающие моменты для прямоугольной пластинки, защемленной по краю  $x = a$ , шарнирно опертой по остальным краям и несущей гидростатическую нагрузку ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$(w)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$	$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$	$(M_x)_{x=a, y=0}$
$\infty$	$0,0024 \frac{q_0 a^4}{D}$	$0,029 q_0 a^2$	$0,009 q_0 a^2$	$-0,067 q_0 a^2$
2	$0,0023 \frac{q_0 a^4}{D}$	$0,029 q_0 a^2$	$0,011 q_0 a^2$	$-0,063 q_0 a^2$
1,5	$0,0019 \frac{q_0 a^4}{D}$	$0,026 q_0 a^2$	$0,013 q_0 a^2$	$-0,061 q_0 a^2$
1,0	$0,0013 \frac{q_0 a^4}{D}$	$0,019 q_0 a^2$	$0,016 q_0 a^2$	$-0,048 q_0 a^2$
$\frac{2}{3}$	$0,0030 \frac{q_0 b^4}{D}$	$0,028 q_0 b^2$	$0,034 q_0 b^2$	$-0,071 q_0 b^2$
0,5	$0,0045 \frac{q_0 b^4}{D}$	$0,024 q_0 b^2$	$0,046 q_0 b^2$	$-0,084 q_0 b^2$
0	$0,0065 \frac{q_0 b^4}{D}$	$0,019 q_0 b^2$	$0,062 q_0 b^2$	$-0,125 q_0 b^2$

26. Прогибы и изгибающие моменты равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, защемленной по контуру ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$x=0; y=0$	$x=\frac{a}{2}; y=0$	$x=0; y=\frac{b}{2}$	$x=0; y=0$	
	$(w) = C_1 q \frac{a^4}{D}$	$(M_x) = C_2 q a^2$	$(M_y) = C_3 q a^2$	$(M_x) = C_4 q a^2$	$(M_y) = C_5 q a^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
1,0	0,00126	-0,0513	-0,0513	0,0231	0,0231
1,1	0,00150	-0,0581	-0,0538	0,0264	0,0231
1,2	0,00172	-0,0639	-0,0554	0,0299	0,0228
1,3	0,00191	-0,0687	-0,0563	0,0327	0,0222

Продолжение табл. 26

$\frac{b}{a}$	$x=0; y=0$	$x=\frac{a}{2}; y=0$	$x=0; y=\frac{b}{2}$	$x=0; y=0$	
	$(w) = C_1 q \frac{a^4}{D};$	$(M_x) = C_2 qa^2;$	$(M_y) = C_3 qa^2;$	$(M_x) = C_4 qa^2;$	$(M_y) = C_5 qa^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
1,4	0,00207	—0,0726	—0,0568	0,0349	0,0212
1,5	0,00220	—0,0757	—0,0570	0,0368	0,0203
1,6	0,00230	—0,0780	—0,0571	0,0381	0,0193
1,7	0,00238	—0,0799	—0,0571	0,0392	0,0182
1,8	0,00245	—0,0812	—0,0571	0,0401	0,0174
1,9	0,00249	—0,0822	—0,0571	0,0407	0,0165
2,0	0,00254	—0,0829	—0,0571	0,0412	0,0158
$\infty$	0,00260	—0,0833	—0,0571	0,0417	0,0125

27. Прогибы и изгибающие моменты в прямоугольной пластинке, защемленной по контуру и нагруженной гидростатическим давлением ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$x=0, y=0$			$x=\frac{a}{2}, y=0$	$x=-\frac{a}{2}, y=0$	$x=0, y=\pm\frac{b}{2}$
	$w = C_1 \times$ $\times \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x =$ $= C_2 q_0 a^2$	$M_y =$ $= C_3 q_0 a^2$	$M_x =$ $= C_4 q_0 a^2$	$M_x =$ $= C_5 q_0 a^2$	$M_y =$ $= C_6 q_0 a^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
0,5	0,000080	0,00198	0,00515	—0,0115	—0,0028	—0,0104
$\frac{2}{3}$	0,000217	0,00451	0,00817	—0,0187	—0,0066	—0,0168
1,0	0,00063	0,0115	0,0115	—0,0334	—0,0179	—0,0257
1,5	0,00110	0,0184	0,0102	—0,0462	—0,0295	—0,0285
$\infty$	0,00130	0,0208	0,0063	—0,0500	—0,0333	

28. Прогибы в центре и изгибающие моменты в серединах длинных сторон для прямоугольной пластинки, защемленной по контуру и нагруженной в центре ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$w = C_1 \frac{Pa^2}{D};$	$M = C_2 P$
	$C_1$	$C_2$
1,0	0,00560	—0,1257
1,2	0,00647	—0,1490
1,4	0,00691	—0,1604
1,6	0,00712	—0,1651
1,8	0,00720	—0,1667
2,0	0,00722	—0,1674
$\infty$	0,00725	—0,168

29. Прогибы в прямоугольной пластинке, один край которой шарнирно оперт, а остальные защемлены, нагрузка равномерно распределена по поверхности ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$(w)_{x=0, y=\frac{b}{2}}$
0,5	$0,00449 q \frac{b^4}{D}$
0,75	$0,00286 q \frac{b^4}{D}$
1,0	$0,00157 q \frac{b^4}{D}$
$\frac{4}{3}$	$0,00215 q \frac{a^4}{D}$
2	$0,00257 q \frac{a^4}{D}$

30. Изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки, один край которой шарнирно оперт, а остальные защемлены ( $\nu = 0,2$ )

$\frac{b}{a}$	$(M_x)_{x=0, y=\frac{b}{2}}$	$(M_y)_{x=0, y=\frac{b}{2}}$	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}$	$(M_y)_{x=0, y=b}$
0,5	$0,0206qb^2$	$0,0554qb^2$	$-0,0783qb^2$	$-0,114qb^2$
0,6	$0,0245qb^2$	$0,0481qb^2$	$-0,0773qb^2$	$-0,102qb^2$
0,7	$0,0268qb^2$	$0,0409qb^2$	$-0,0749qb^2$	$-0,0907qb^2$
0,8	$0,0277qb^2$	$0,0335qb^2$	$-0,0708qb^2$	$-0,0778qb^2$
0,9	$0,0274qb^2$	$0,0271qb^2$	$-0,0657qb^2$	$-0,0658qb^2$
1,0	$0,0261qb^2$	$0,0213qb^2$	$-0,0600qb^2$	$-0,0547qb^2$
1,1	$0,0294qa^2$	$0,0204qa^2$	$-0,0659qa^2$	$-0,0566qa^2$
1,2	$0,0323qa^2$	$0,0192qa^2$	$-0,0705qa^2$	$-0,0573qa^2$
1,3	$0,0346qa^2$	$0,0179qa^2$	$-0,0743qa^2$	$-0,0574qa^2$
1,4	$0,0364qa^2$	$0,0166qa^2$	$-0,0770qa^2$	$-0,0576qa^2$
1,5	$0,0378qa^2$	$0,0154qa^2$	$-0,0788qa^2$	$-0,0569qa^2$
1,6	$0,0390qa^2$	$0,0143qa^2$	$-0,0803qa^2$	$-0,0568qa^2$
1,7	$0,0398qa^2$	$0,0133qa^2$	$-0,0815qa^2$	$-0,0567qa^2$
1,8	$0,0405qa^2$	$0,0125qa^2$	$-0,0825qa^2$	$-0,0567qa^2$
1,9	$0,0410qa^2$	$0,0118qa^2$	$-0,0831qa^2$	$-0,0566qa^2$
2	$0,0414qa^2$	$0,0110qa^2$	$-0,0833qa^2$	$-0,0566qa^2$
$\infty$	$0,0417qa^2$	$0,0083qa^2$	$-0,0833qa^2$	$-0,0566qa^2$

31. Прогобы и изгибающие моменты для пластинки, нагруженной гидростатическим давлением ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$(w)_{x=0, y=\frac{b}{2}}$	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}$	$(M_y)_{x=0, y=b}$
0,5	$0,00202q_0 \frac{b^4}{D}$	$-0,0368q_0b^2$	$-0,0623q_0b^2$
0,75	$0,00132q_0 \frac{b^4}{D}$	$-0,0344q_0b^2$	$-0,0484q_0b^2$
1	$0,00074q_0 \frac{b^4}{D}$	$-0,0287q_0b^2$	$-0,0347q_0b^2$

32. Прогобы и изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки, у которой два противоположных края шарнирно оперт, третий край свободен, четвертый — защемлен ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$w_{\max}$	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=b}$	$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$
0	$0,125q \frac{b^4}{D}$	0	$-0,500qb^2$
1/3	$0,094q \frac{b^4}{D}$	$0,0078qa^2$	$-0,428qb^2$
1/2	$0,0582q \frac{b^4}{D}$	$0,0293qa^2$	$-0,319qb^2$
2/3	$0,0335q \frac{b^4}{D}$	$0,0558qa^2$	$-0,227qb^2$

Продолжение табл. 32

$\frac{b}{a}$	$w_{\max}$	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=b}$	$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$
1	$0,0113q \frac{b^4}{D}$	$0,0972qa^2$	$-0,119qb^2$
3/2	$0,0141q \frac{a^4}{D}$	$0,123qa^2$	$-0,124qa^2$
2	$0,0150q \frac{a^4}{D}$	$0,131qa^2$	$-0,125qa^2$
3	$0,0152q \frac{a^4}{D}$	$0,133qa^2$	$-0,125qa^2$
$\infty$	$0,0152q \frac{a^4}{D}$	$0,133qa^2$	$-0,125qa^2$
Примечание. Максимальный прогиб и $(M_x)_{\max}$ в середине неопертого края.			

33. Прогибы и изгибающие моменты для пластинки, у которой три края шарнирно оперты, четвертый — свободен; нагрузка равномерно распределена по всей поверхности ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$x = \frac{a}{2}, y = b$		$x = \frac{a}{2}$	$y = \frac{b}{2}$
	$w_{\max} = C_1 q \frac{a^4}{D}$	$(M_x)_{\max} = C_2 qa^2$	$M_x = C_3 qa^2$	$M_y = C_4 q' a^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$\frac{1}{2}$	0,00710	0,060	0,039	0,022
$\frac{2}{3}$	0,00968	0,083	0,055	0,030
$\frac{1}{1,4}$	0,01023	0,088	0,059	0,032
$\frac{1}{1,3}$	0,01092	0,094	0,064	0,034
$\frac{1}{1,2}$	0,01158	0,100	0,069	0,036
$\frac{1}{1,1}$	0,01232	0,107	0,074	0,037
1	0,01286	0,112	0,080	0,039
1,1	0,01341	0,117	0,085	0,040
1,2	0,01384	0,121	0,090	0,041
1,3	0,01417	0,124	0,094	0,042
1,4	0,01442	0,126	0,098	0,042
1,5	0,01462	0,128	0,101	0,042
2	0,01507	0,132	0,113	0,041
3	0,01520	0,133	0,122	0,039
$\infty$	0,01522	0,133	0,125	0,037
Примечание. Максимальные прогиб и изгибающий момент в середине свободного края.				

34. Прогiby и изгибающие моменты в пластинке, три края которой шарнирно оперты, четвертый — свободен, нагруженной гидростатическим давлением ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$x = \frac{a}{2}, y = b$		$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$		
	$w =$ $= C_2 q_0 \frac{a^4}{D}$	$M_x =$ $= C_2 q_0 a^2$	$w =$ $= C_3 q_0 \frac{a^4}{D}$	$M_x = C_4 q_0 a^2$	$M_y = C_5 q_0 a^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
1/2	0,00230	0,0197	0,00135	0,0145	0,0120
2/3	0,00304	0,0265	0,00207	0,0220	0,0156
1	0,00368	0,0325	0,00313	0,0331	0,0214
1,5	0,00347	0,0308	0,00445	0,0453	0,0231
2,0	0,00291	0,0258	0,00533	0,0529	0,0222
$\infty$	0	0	0,00651	0,0625	0,0187

35. Прогiby, изгибающие моменты и опорные реакции пластинки с тремя защемленными краями и одним свободным, нагруженной равномерно распределенным давлением

$$\left(\nu = \frac{1}{6}\right)$$

$\frac{b}{a}$	$x = 0, y = b$		$x = 0, y = \frac{b}{2}$		
	$w = C_1 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = C_2 qa^2$	$w = C_3 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = C_4 qa^2$	$M_y = C_5 qa^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
0,6	0,00271	0,0336	0,00129	0,0168	0,0074
0,7	0,00292	0,0371	0,00159	0,0212	0,0097
0,8	0,00308	0,0401	0,00185	0,0252	0,0116
0,9	0,00323	0,0425	0,00209	0,0287	0,0129
1,0	0,00333	0,0444	0,00230	0,0317	0,0138
1,25	0,00345	0,0467	0,00269	0,0374	0,0142
1,5	0,00335	0,0454	0,00290	0,0402	0,0118

$\frac{b}{a}$	$x = \frac{a}{2}, y = b$		$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$		$x = 0, y = 0$	
	$M_x =$ $= C_6 qa^2$	$R_x =$ $= C_7 qa$	$M_x = C_8 qa^2$	$R_x = C_9 qa$	$M_y =$ $= C_{10} qa^2$	$R_y = C_{11} qa$
	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$	$C_{10}$	$C_{11}$
0,6	—0,0745	0,750	—0,0365	0,297	—0,0554	0,416
0,7	—0,0782	0,717	—0,0439	0,346	—0,0545	0,413
0,8	—0,0812	0,685	—0,0505	0,385	—0,0535	0,410
0,9	—0,0836	0,656	—0,0563	0,414	—0,0523	0,406
1,0	—0,0853	0,628	—0,0614	0,435	—0,0510	0,401
1,25	—0,0867	0,570	—0,0708	0,475	—0,0470	0,388
1,5	—0,0842	0,527	—0,0755	0,491	—0,0418	0,373

36. Прогiby, изгибающие моменты и опорные реакции для пластинки, три края которой зашкелены, четвертый — свободен, нагруженной гидростатическим давлением ( $\nu = \frac{1}{6}$ )

$\frac{b}{a}$	$x = 0, y = b$		$x = 0, y = \frac{b}{2}$		
	$w =$ $= C_1 \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x = C_2 q_0 a^2$	$w = C_3 \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x = C_4 q_0 a^2$	$M_y = C_5 q_0 a^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
0,6	0,00069	0,0089	0,00044	0,0060	0,0062
0,7	0,00069	0,0093	0,00058	0,0080	0,0074
0,8	0,00068	0,0096	0,00072	0,0100	0,0083
0,9	0,00067	0,0096	0,00085	0,0118	0,0090
1,0	0,00065	0,0095	0,00097	0,0135	0,0094
1,25	0,00056	0,0085	0,00121	0,0169	0,0092
1,5	0,00042	0,0065	0,00138	0,0191	0,0075

$\frac{b}{a}$	$x = \frac{a}{2}, y = b$		$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$		$x = 0, y = 0$	
	$M_x =$ $= C_6 q_0 a^2$	$R_x = C_7 q_0 a$	$M_x =$ $= C_8 q_0 a^2$	$R_x = C_9 q_0 a$	$M_y =$ $= C_{10} q_0 a^2$	$R_y =$ $= C_{11} q_0 a$
	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$	$C_{10}$	$C_{11}$
0,6	—0,0179	0,093	—0,0131	0,136	—0,0242	0,248
0,7	—0,0172	0,081	—0,0170	0,158	—0,0261	0,262
0,8	—0,0164	0,069	—0,0206	0,177	—0,0278	0,275
0,9	—0,0156	0,057	—0,0239	0,194	—0,0290	0,286
1,0	—0,0146	0,045	—0,0269	0,209	—0,0299	0,295
1,25	—0,0119	0,018	—0,0327	0,234	—0,0306	0,309
1,5	—0,0087	—0,006	—0,0364	0,245	—0,0291	0,311

37. Прогiby и изгибающие моменты для прямоугольной пластинки, два края которой шарнирно оперты, два других — свободны, нагруженной равномерно распределенным давлением ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{b}{a}$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$			$x = \frac{a}{2}, y = \pm \frac{b}{2}$	
	$w = C_1 \frac{qa^4}{D}$	$M_x =$ $= C_2 qa^2$	$M_y = C_3 qa^2$	$w = C_4 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = C_5 qa^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
0,5	0,01377	0,1235	0,0102	0,01443	0,1259
1,0	0,01309	0,1225	0,0271	0,01509	0,1318
2,0	0,01289	0,1235	0,0364	0,01521	0,1329
$\infty$	0,01302	0,1250	0,0375	0,01522	0,1330

38. Прогобы и изгибающие моменты в центре равномерно загруженной квадратной пластинки, два края которой шарнирно оперты, а два других поддерживают упругие балки ( $\nu = 0,3$ )

$\lambda = \frac{EJ}{aD}$	$w_{\max} = C_1 q \frac{a^4}{D}$	$(M_x)_{\max} = C_2 qa^2$	$(M_y)_{\max} = C_3 qa^2$
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$\infty$	0,00406	0,0479	0,0479
100	0,00409	0,0481	0,0477
30	0,00416	0,0486	0,0473
10	0,00434	0,0500	0,0465
6	0,00454	0,0514	0,0455
4	0,00472	0,0528	0,0447
2	0,00529	0,0571	0,0419
1	0,00624	0,0643	0,0376
0,6	0,00756	0,0744	0,0315
0	0,01309	0,1225	0,0271

Примечание.  $EJ$  — жесткость каждый из подкрепляющих балок.

## КРУГЛЫЕ ПЛАСТИНКИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

### Основные уравнения и граничные условия

Если поперечная нагрузка, действующая на пластинку, распределена симметрично относительно оси, проходящей через центр пластинки, то во всех точках, равноудаленных от центра пластинки, прогибы и все остальные величины, характеризующие напряженное состояние, будут одинаковыми.

Диаметральное сечение срединной поверхности деформированной пластинки показано на рис. 18. Пользуемся цилиндрической системой координат; начало координат  $O$  совпадает с центром недеформированной пластинки, ось  $z$  совмещена с осью симметрии пластинки, основная плоскость — со срединной плоскостью. Расстояние произвольной точки  $m$  от оси  $z$  обозначено через  $r$ ;  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности, проведенной через  $m$ , и осью  $z$ :

$$\theta = -\frac{dw}{dr}. \quad (118)$$

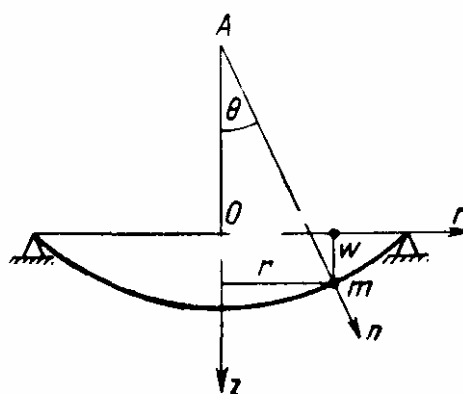


Рис. 18

Угол  $\theta$  отсчитывают в направлении, обратном вращению от оси  $r$  к оси  $z$ ; поэтому в равенстве (118) принят знак минус.

Кривизна изогнутой поверхности в диаметральном сечении (для пологой кривой)

$$\kappa_r = \frac{d\theta}{dr}, \quad (119)$$



или

$$\kappa_r = -\frac{d^2 w}{dr^2}. \quad (120)$$

Кривизну в сечении, проходящем через нормаль  $Am$  и перпендикуляр к плоскости  $rz$ , определяют по формуле

$$\kappa_\varphi = \frac{1}{r} \theta, \quad (121)$$

или

$$\kappa_\varphi = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr}. \quad (122)$$

Кривизна кручения при осесимметричном изгибе равна нулю, кривизны (120) и (122) являются главными.

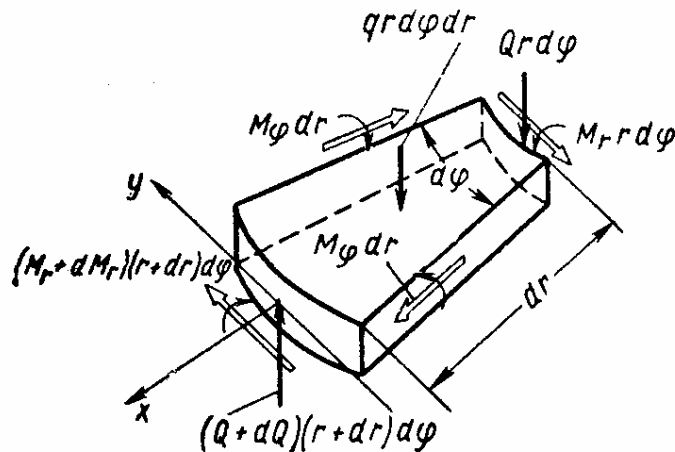


Рис. 19. Условия равновесия элемента пластинки

На рис. 19 показан элемент пластинки, ограниченный двумя радиальными сечениями, угол между которыми равен  $d\varphi$ , и двумя дуговыми сечениями, одно из них расположено на окружности радиуса  $r$ , а второе — на окружности радиуса  $r + dr$ .  $M_r$  и  $M_\varphi$  — изгибающие моменты, действующие по окружным и диаметральному сечениям пластинки соответственно и отнесенные к единице длины; на рисунке нанесены векторы моментов.  $Q$  — поперечная сила в дуговом сечении. Крутящие моменты отсутствуют, поперечная сила в радиальном сечении также равна нулю.

Для определения изгибающих моментов воспользуемся формулами типа (12); получим

$$M_r = D (\kappa_r + \nu \kappa_\varphi); \quad (123)$$

$$M_\varphi = D (\kappa_\varphi + \nu \kappa_r), \quad (124)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ;  $h$  — толщина пластинки.

Выражения (123) и (124) можно представить в виде

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = D \left( \frac{d\theta}{dr} + \frac{\nu}{r} \theta \right); \quad (125)$$

$$M_\varphi = -D \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = D \frac{\theta}{r} + \nu \frac{d\theta}{dr}. \quad (126)$$

Взаимно перпендикулярные оси  $x$  (вдоль радиуса) и  $y$  (вдоль касательной) проведены через середину внешней дуги (см. рис. 19). Уравнение равновесия в моментах относительно оси  $y$  после отбрасывания величин высшего порядка малости принимает вид

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\varphi}{r} = -Q. \quad (127)$$

Пусть задана интенсивность поперечной нагрузки  $q$  в функции  $r$ ; тогда перерезывающую силу  $Q$  можно выразить в виде

$$Q = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (128)$$

Уравнение равновесия (127), с учетом выражений (125), (126) и (128), можно записать

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (129)$$

Введем оператор  $\nabla^2$ , тогда получим

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) = \Psi, \quad (130)$$

где  $\Psi$  — функция нагрузки,

$$\Psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (131)$$

Уравнение (129) примет вид

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (r\theta) \right] = -\Psi, \quad (132)$$

где угол наклона  $\theta$  определяют по формуле (118).

Граничные условия на контуре пластинки: при шарнирном опирании

$$w = 0; \quad M_r = D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = 0; \quad (133)$$

при защемлении

$$w = 0; \quad \theta = 0. \quad (134)$$

## Расчет круглых пластинок

Круглая пластинка шарнирно оперта по контуру; нагрузка равномерно распределена по всей площади. Прогиб на расстоянии  $r$  от центра [13]:

$$w = \frac{q(b^2 - r^2)}{64D} \left( \frac{5 + \nu}{1 + \nu} b^2 - r^2 \right), \quad (135)$$

где  $b$  — радиус пластинки;  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость;  $q$  — интенсивность нагрузки; прогиб в центре

$$w_{\max} = \frac{(5 + \nu)qb^4}{64(1 + \nu)D}. \quad (136)$$

Моменты

$$M_r = \frac{q}{16} (3 + \nu) (b^2 - r^2); \quad (137)$$

$$M_\varphi = \frac{q}{16} [b^2 (3 + \nu) - r^2 (1 + 3\nu)]. \quad (138)$$

Моменты в центре

$$(M_r)_{\max} = (M_\varphi)_{\max} = \frac{3 + \nu}{16} qb^2. \quad (139)$$

Отсюда получаем максимальное напряжение

$$(\sigma_r, \sigma_\varphi)_{\max} = (\sigma_\varphi, \sigma_r)_{\max} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{3(3 + \nu)qb^2}{8h^2}, \quad (140)$$

где  $h$  — толщина пластинки.

Круглая пластинка защемлена по контуру, нагрузка распределена равномерно по всей площади. Прогиб [13]

$$w = \frac{q}{64D} (b^2 - r^2)^2. \quad (141)$$

Прогиб в центре

$$w_{\max} = \frac{qb^4}{64D}. \quad (142)$$

Моменты

$$M_r = \frac{q}{16} [b^2 (1 + \nu) - r^2 (3 + \nu)]; \quad (143)$$

$$M_\varphi = \frac{q}{16} [b^2 (1 + \nu) - r^2 (1 + 3\nu)]. \quad (144)$$

Напряжения в центре

$$\sigma_{r,u} = \sigma_{\varphi,u} = 0,49q \left( \frac{b}{h} \right)^2. \quad (145)$$

Напряжения у контура

$$\sigma_{r,u} = -0,75q \left( \frac{a}{h} \right)^2; \quad \sigma_{\varphi,u} = \nu \sigma_{r,u}. \quad (146)$$

Нижние волокна у контура сжаты.

Круглая кольцевая пластинка, шарнирно опертая по внешнему контуру, нагружена моментами  $M_{ra}$  и  $M_{rb}$ , равномерно распределен-

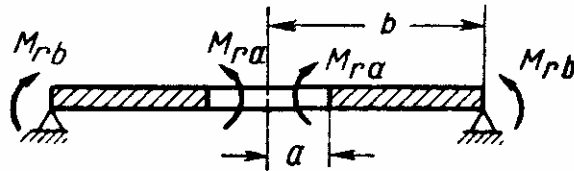


Рис. 20

ными по внутреннему и внешнему контурам (рис. 20). Моменты  $M_{ra}$  и  $M_{rb}$  приходятся на единицу длины. Прогиб [13]

$$w = -\frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{b} + C_3. \quad (147)$$

Угол наклона

$$-\frac{dw}{dr} = \theta = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (148)$$

В выражениях (147) и (148) принято

$$C_1 = \frac{2(b^2 M_{rb} - a^2 M_{ra})}{(1 + \nu) D (b^2 - a^2)}; \quad (149)$$

$$C_2 = \frac{a^2 b^2 (M_{rb} - M_{ra})}{(1 - \nu) D (b^2 - a^2)}; \quad (150)$$

$$C_3 = \frac{C_1 b^2}{4} = \frac{b^2 (b^2 M_{rb} - a^2 M_{ra})}{2(1 + \nu) D (b^2 - a^2)}, \quad (151)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ ;  $h$  — толщина пластинки.

Изгибающие моменты будут

$$M_r = D \left[ 0,5C_1 (1 + \nu) - \frac{C_2}{r^2} (1 - \nu) \right];$$

$$M_\varphi = D \left[ 0,5C_1 (1 + \nu) + \frac{C_2}{r^2} (1 - \nu) \right].$$

Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  определяют по формулам, аналогичным выражениям (18).

Круглая кольцевая пластинка закреплена по внутреннему контуру, по внешнему контуру распределена моментная нагрузка (рис. 21). На единицу длины контура приходится момент  $M_0$  [4].

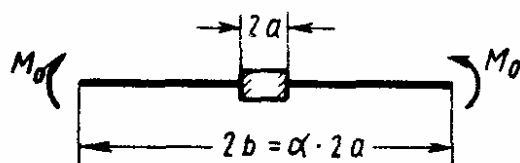


Рис. 21

Прогиб

$$(w)_{r=b} = 5,46 \frac{1 - \frac{2 \ln \alpha}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}}{1,3 + \frac{0,7}{\alpha^2}} \cdot \frac{M_0 b^2}{E h^3}, \quad (152)$$

где  $h$  — толщина пластинки;  $\alpha = \frac{b}{a}$ .

Напряжения на внутреннем контуре

$$\sigma_{r,u} = \frac{12}{1,3 + \frac{0,7}{\alpha^2}} \cdot \frac{M_0}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi,u} = \nu \sigma_{r,u}. \quad (153)$$

Напряжения на внешнем контуре

$$\sigma_{r,u} = \frac{6M_0}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi,u} = \frac{6 \left( 1,3 - \frac{0,7}{\alpha^2} \right)}{1,3 + \frac{0,7}{\alpha^2}} \cdot \frac{M_0}{h^2}. \quad (154)$$

Круглая кольцевая пластинка нагружена по контуру или равномерно по всей площади (рис. 22). Максимальное напряжение и максимальный прогиб при нагрузке, распределенной только по контуру пластинки, определяют по формулам [13]

$$\sigma_{\max} = \frac{C_1 P}{h^2}; \quad (155)$$

$$(w)_{\max} = C_2 \frac{P b^2}{E h^3}, \quad (156)$$

где  $P$  — равнодействующая нагрузки, распределенной по контуру;  $h$  — толщина пластинки.

При нагрузке, распределенной по всей поверхности пластинки, используют формулы

$$\sigma_{\max} = C_1 \frac{qb^2}{h^2}; \quad (157)$$

$$\omega_{\max} = C_2 \frac{qb^4}{Eh^3}, \quad (158)$$

где  $q$  — нагрузка, приходящаяся на единицу площади;  $h$  — толщина пластинки. Значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  приведены в табл. 39.

39. Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  в уравнениях (155)—(158) при  $\nu = 0,3$

Рис. 22	$\frac{b}{a} = 1,25$		$\frac{b}{a} = 1,5$		$\frac{b}{a} = 2$	
	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
<i>a</i>	1,10	0,341	1,26	0,519	1,48	0,672
<i>б</i>	0,66	0,202	1,19	0,491	2,04	0,902
<i>в</i>	0,135	0,00231	0,410	0,0183	1,04	0,0938
<i>г</i>	0,122	0,00343	0,336	0,0313	0,74	0,1250
<i>д</i>	0,090	0,00077	0,273	0,0062	0,71	0,0329
<i>е</i>	0,115	0,00129	0,220	0,0064	0,405	0,0237
<i>ж</i>	0,592	0,184	0,976	0,414	1,440	0,664
<i>з</i>	0,227	0,00510	0,428	0,0249	0,753	0,0877
<i>и</i>	0,194	0,00504	0,320	0,0242	0,454	0,0810
<i>к</i>	0,105	0,00199	0,259	0,0139	0,480	0,0575

Рис. 22	$\frac{b}{a} = 3$		$\frac{b}{a} = 4$		$\frac{b}{a} = 5$	
	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
<i>a</i>	1,88	0,734	2,17	0,724	2,34	0,704
<i>б</i>	3,34	1,220	4,30	1,300	5,10	1,310
<i>в</i>	2,15	0,293	2,99	0,448	3,69	0,564
<i>г</i>	1,21	0,291	1,45	0,417	1,59	0,492
<i>д</i>	1,54	0,110	2,23	0,179	2,80	0,234
<i>е</i>	0,703	0,062	0,933	0,092	1,13	0,114
<i>ж</i>	1,880	0,824	2,08	0,830	2,19	0,813
<i>з</i>	1,205	0,209	1,514	0,293	1,745	0,350
<i>и</i>	0,673	0,172	1,021	0,217	1,305	0,238
<i>к</i>	0,657	0,130	0,710	0,162	0,730	0,175

Круглая пластинка шарнирно оперта по контуру; нагрузка распределена равномерно по окружности радиуса  $d$  (рис. 23). Прогиб для наружной части пластинки ( $r \geq d$ ) [13]

$$\omega = \frac{P}{8\pi D} \left[ (b^2 - r^2) \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{b^2 - d^2}{b^2} \right) + (d^2 + r^2) \ln \frac{r}{b} \right], \quad (159)$$

где  $P$  — полная приложенная нагрузка.

Прогибы внутренней части

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[ (d^2 + r^2) \ln \frac{d}{b} + (b^2 - d^2) \frac{(3 + \nu) b^2 - (1 - \nu) r^2}{2(1 + \nu) b^2} \right]. \quad (160)$$

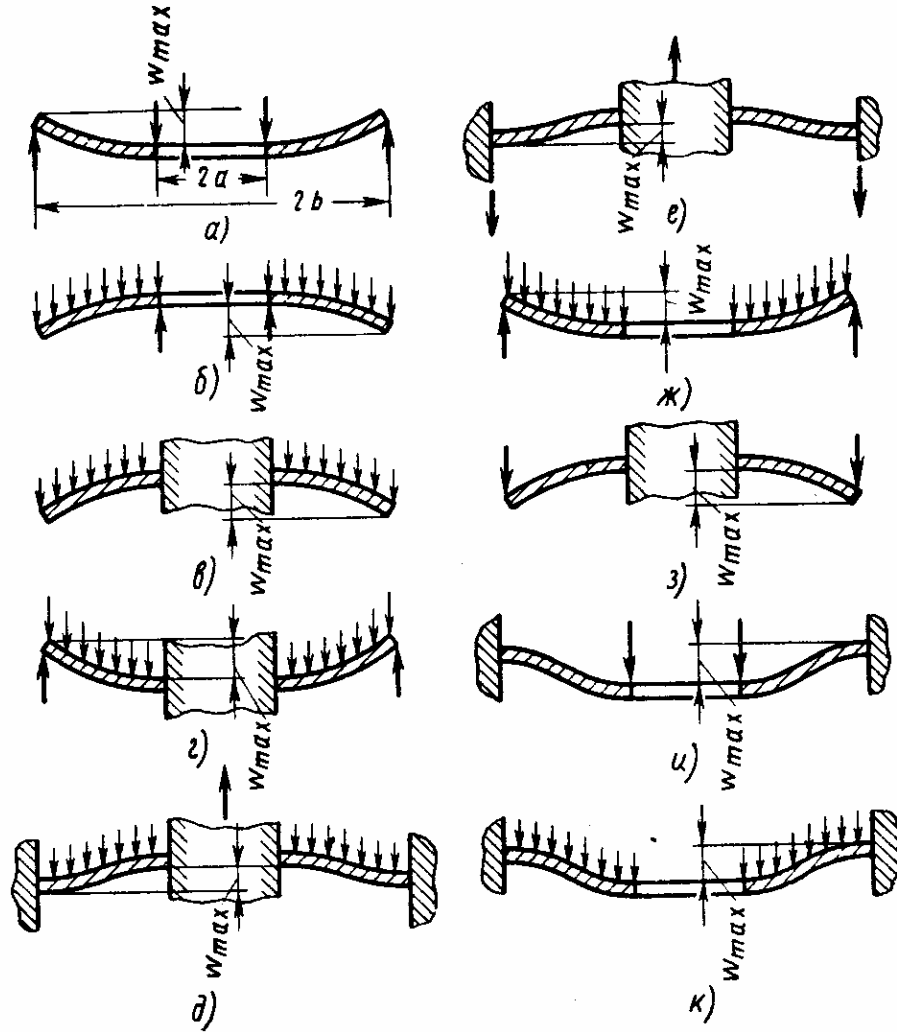


Рис. 22

Момент

$$(M_r)_{r=d} = \frac{(1 - \nu) P (b^2 - d^2)}{8\pi b^2} - \frac{(1 + \nu) P \ln \frac{d}{b}}{4\pi}. \quad (161)$$

Круглая пластинка защемлена по контуру, нагрузка распределена равномерно по окружности радиуса  $d$  (рис. 24). Прогиб для внешней части ( $r \geq d$ )

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[ (b^2 - r^2) \frac{b^2 + d^2}{2b^2} + (d^2 + r^2) \ln \frac{r}{b} \right]; \quad (162)$$

для внутренней части

$$w = \frac{P}{8\pi d} \left[ (d^2 + r^2) \ln \frac{d}{b} + \frac{(b^2 + r^2)(b^2 - d^2)}{2b^2} \right]. \quad (163)$$

Момент у контура

$$M_0 = \frac{P}{4\pi} \cdot \frac{b^2 - d^2}{b^2}. \quad (164)$$

В уравнениях (162)—(164) через  $P$  обозначена равнодействующая приложенной нагрузки.

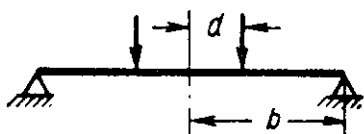


Рис. 23

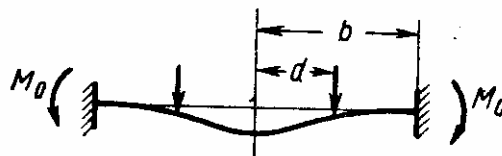


Рис. 24

Круглая пластинка шарнирно оперта по контуру, нагрузка равномерно распределена в центральной части по площади круга радиуса  $d$  (рис. 25). Прогиб в центре

$$(w)_{r=0} = (1,73 - 1,03\alpha^2 + 0,68\alpha^2 \ln \alpha) \frac{qb^2d^2}{Eh^3}, \quad (165)$$

где  $\alpha = \frac{d}{b}$ .

Напряжения в центре

$$\sigma_{r,u} = \sigma_{\varphi,u} = (1,5 - 0,262\alpha^2 - 1,95 \ln \alpha) q \left( \frac{d}{h} \right)^2. \quad (166)$$

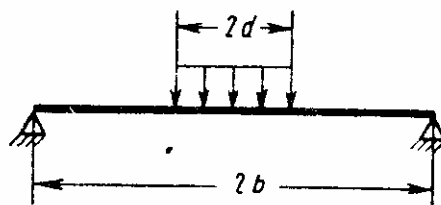


Рис. 25

Напряжения у контура

$$\sigma_{r,u} = 0; \quad \sigma_{\varphi,u} = 0,525 (2 - \alpha^2) q \left( \frac{d}{h} \right)^2. \quad (167)$$

Круглая пластинка защемлена по контуру, нагрузка равномерно распределена в центральной части по площади круга радиуса  $d$ . Принимаем  $d/b = \alpha$ .

Прогиб в центре

$$(w)_{r=0} = (0,68 - 0,51\alpha^2 + 0,68\alpha^2 \ln \alpha) \frac{qb^2d^2}{Eh^3}. \quad (168)$$

Напряжения в центре

$$\sigma_{r,u} = \sigma_{\varphi,u} = 0,49 (\alpha^2 - 4 \ln \alpha) q \left( \frac{d}{h} \right)^2. \quad (169)$$



Напряжения у контура

$$\sigma_{r, u} = -0,75 (2 - \alpha^2) q \left( \frac{d}{h} \right)^2; \quad (170)$$

$$\sigma_{\varphi, u} = \nu \sigma_{r, u}. \quad (171)$$

Круглая пластинка шарнирно оперта по контуру, нагрузка  $P$  сосредоточена в центре. Прогиб в центре

$$(\omega)_{r=0} = 0,55 \frac{Pb^2}{Eh^3}. \quad (172)$$

Максимальные растягивающие напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{h^2} \left( 0,63 \ln \frac{b}{h} + 1,16 \right). \quad (173)$$

Круглая пластинка защемлена по контуру, нагрузка  $P$  сосредоточена в центре. Прогиб в центре

$$(\omega)_{r=0} = 0,218 \frac{Pb^2}{Eh^3}. \quad (174)$$

Максимальные растягивающие напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{h^2} \left( 0,63 \ln \frac{b}{h} + 0,68 \right). \quad (175)$$

Круглая пластинка под действием произвольной осесимметричной нагрузки. Интегрируя уравнение (129) для пластинки с отверстием при граничных условиях

$$M_r(a) = M_{ra}; \quad M_r(b) = M_{rb}, \quad (176)$$

где  $M_{ra}$  и  $M_{rb}$  — заданные значения изгибающих моментов (на единицу длины), получим

$$M_r(r) = M_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - M_{ra} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \\ - [\Phi_1(b) + \Phi_2(b)] \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \Phi_1(r) + \Phi_2(r); \quad (177)$$

$$M_{\varphi}(r) = M_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - M_{ra} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \\ - [\Phi_1(b) + \Phi_2(b)] \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \Phi_1(r) - \Phi_2(r), \quad (178)$$

где функции нагрузки

$$\Phi_1(r) = -\frac{1+\nu}{2} \int_0^r Q(r_1) dr_1; \quad (179)$$

$$\Phi_2(r) = -\frac{1-\nu}{2r^2} \int_a^r r_1^2 Q(r_1) dr_1; \quad (180)$$

здесь  $Q(r)$  — перерезывающая сила в сечении  $r$  (на единицу длины).

Для пластинки без центрального отверстия при граничных условиях

$$M_r(0) = M_\varphi(0); \quad M_r(b) = M_{rb} \quad (181)$$

будем иметь

$$M_r(r) = M_{rb} - \Phi_1(b) - \Phi_2(b) + \Phi_1(r) + \Phi_2(r); \quad (182)$$

$$M_\varphi(r) = M_{rb} - \Phi_1(b) - \Phi_2(b) + \Phi_1(r) - \Phi_2(r), \quad (183)$$

где функции нагрузки определяются равенствами (179) и (180) при  $a=0$ . В центре пластинки ( $r=0$ )

$$\Phi_1(0) = 0; \quad \Phi_2(0) = 0.$$

## РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК РАЗЛИЧНОГО ОЧЕРТАНИЯ

Условные обозначения закрепления краев пластинок см. на рис. 5.

Пластинка, имеющая форму сектора круга, шарнирно оперта по контуру; нагрузка равномерно распределена по всей поверхности. Прогибы и изгибающие моменты определяют по формулам [13]

$$\omega = C_1 \frac{qb^4}{Eh^3}; \quad (184)$$

$$M_r = C_2 qb^2; \quad (185)$$

$$M_\varphi = C_3 qb^2, \quad (186)$$

где  $b$  — радиус сектора;  $h$  — толщина пластинки;  $q$  — интенсивность нагрузки. Значения коэффициентов  $C_1$ — $C_3$  для различных углов  $\frac{\pi}{k}$  пластинки-сектора для точек, взятых на оси симметрии сектора, приведены в табл. 40.

Пластинка, имеющая форму сектора круга, зашкреплена по дуге контура и шарнирно оперта по прямолинейным краям; нагрузка равномерно распределена по всей поверхности. Для такого случая справедливы формулы (184) и (185); значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  для точек на оси симметрии сектора приведены в табл. 41.

40. Значения коэффициентов  $C_1—C_3$  для различных углов пластинки-сектора, шарнирно опертого по контуру и нагруженного равномерно распределенным давлением; коэффициенты приведены для точек, взятых на оси симметрии сектора ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{\pi}{k}$	$\frac{r}{b} = \frac{1}{4}$			$\frac{r}{b} = \frac{1}{2}$		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$\frac{\pi}{4}$	0,00006	-0,0015	0,0093	0,00033	0,0069	0,0183
$\frac{\pi}{3}$	0,00019	-0,0025	0,0177	0,00080	0,0149	0,0255
$\frac{\pi}{2}$	0,00092	+0,0036	0,0319	0,00225	0,0353	0,0352
$\pi$	0,00589	0,0692	0,0357	0,00811	0,0868	0,0515

$\frac{\pi}{k}$	$\frac{r}{b} = \frac{1}{3}$			$\frac{r}{b} = 1$		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$\frac{\pi}{4}$	0,00049	0,0161	0,0169	0	0	0,0025
$\frac{\pi}{3}$	0,00092	0,0243	0,0213	0	0	0,0044
$\frac{\pi}{2}$	0,00203	0,0381	0,0286	0	0	0,0088
$\pi$	0,00560	0,0617	0,0468	0	0	0,0221

41. Значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  в формулах (184) и (185) для различных углов  $\frac{\pi}{k}$  пластинки-сектора, защемленной по дуге контура и шарнирно опертой по радиальным краям; коэффициенты даны для точек, взятых на оси симметрии сектора ( $\nu = 0,3$ )

$\frac{\pi}{k}$	$\frac{r}{b} = \frac{1}{4}$		$\frac{r}{b} = \frac{1}{2}$		$\frac{r}{b} = \frac{3}{4}$		$\frac{r}{b} = 1$	
	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
$\frac{\pi}{4}$	0,00005	-0,0008	0,00026	0,0087	0,00028	0,0107	0	-0,0250
$\frac{\pi}{3}$	0,00017	-0,0006	0,00057	0,0143	0,00047	0,0123	0	-0,0340
$\frac{\pi}{2}$	0,00063	0,0068	0,00132	0,0272	0,00082	0,0113	0	-0,0488
$\pi$	0,00293	0,0473	0,00337	0,0446	0,00153	0,0016	0	-0,0756

Пластинка, имеющая форму сектора круга ( $\frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2}$ ), шарнирно оперта по радиальным краям, дуговой край совершенно свободен; нагрузка равномерно распределена по всей поверхности [13]. Максимальный прогиб имеет место в средней точке свободного края

$$w_{\max} = 0,0633 \frac{qb^4}{D}, \quad (187)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}$  — цилиндрическая жесткость.

Изгибающий момент для этой точки

$$M_{\varphi} = 0,1331 qb^2. \quad (188)$$

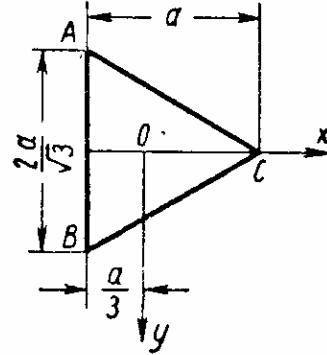


Рис. 26

Пластинка, имеющая форму равностороннего треугольника (рис. 26), нагружена равномерно распределенными по ее контуру моментами  $M_0$  [13].

Прогиб

$$w = \frac{M_0}{4aD} \left[ x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right], \quad (189)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ;  $h$  — толщина пластинки.

Прогиб в центре тяжести треугольника

$$(w)_{x=y=0} = \frac{M_0 a^2}{27D}. \quad (190)$$

Изгибающие моменты

$$M_x = \frac{M_0}{2} \left[ 1 + \nu - (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right]; \quad (191)$$

$$M_y = \frac{M_0}{2} \left[ 1 + \nu + (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right]. \quad (192)$$

Крутящий момент

$$H = -\frac{3(1-\nu)M_0 y}{2a}. \quad (193)$$

Перерезывающие силы  $Q_x = Q_y = 0$ .

Пусть  $H_0$  — крутящий момент на стороне  $BC$ ; этот момент определяют по формуле

$$H_0 = \frac{3(1-\nu)M_0}{4a}(y - \sqrt{3}x). \quad (194)$$

Перерезывающая сила на контуре  $Q_0 = 0$ .  
Вертикальные реакции по стороне  $BC$

$$R_0 = -\frac{3(1-\nu)}{2a}M_0. \quad (195)$$

По двум другим сторонам пластинки действуют такие же равномерно распределенные реакции.

Сосредоточенные реакции в вершинах треугольника

$$R = (1-\nu)\sqrt{3}M_0. \quad (196)$$

Максимальный изгибающий момент

$$(M_y)_{\max} = (M_y)_{x = \frac{2}{3}a} = \frac{M_0(3-\nu)}{2}. \quad (197)$$

Равносторонняя треугольная пластинка (рис. 26) нагружена равномерно распределенным давлением  $q$  [13]. Прогиб

$$w = \frac{q}{64aD} \left[ x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left( \frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right). \quad (198)$$

Максимальный изгибающий момент получается на биссектрисах углов треугольника. Для точек по оси  $x$  при  $\nu = 0,3$  будет

$$(M_x)_{\max} = 0,0248qa^2 \text{ (в точке } x = -0,062a); \quad (199)$$

$$(M_y)_{\max} = 0,0259qa^2 \text{ (в точке } x = 0,129a). \quad (200)$$

Моменты в центре пластинки

$$M_x = M_y = (1+\nu)\frac{qa^2}{54}. \quad (201)$$

Равносторонняя треугольная пластинка (рис. 27) нагружена силой  $P$ , сосредоточенной в центре тяжести. Прогиб под нагрузкой

$$w_0 = 0,00575 \frac{Pa^2}{D}. \quad (202)$$

На некотором малом расстоянии  $s$  от точки приложения нагрузки действуют изгибающие моменты

$$M_x = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left( \ln \frac{a\sqrt{3}}{\pi s} - 0,379 \right) - \frac{(1-\nu)P}{8\pi}; \quad (203)$$

$$M_y = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left( \ln \frac{a\sqrt{3}}{\pi s} - 0,379 \right) + \frac{(1-\nu)P}{8\pi}. \quad (204)$$

Равносторонняя треугольная пластинка (рис. 28) под действием нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности. Для опре-

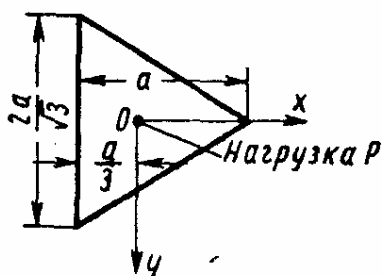


Рис. 27

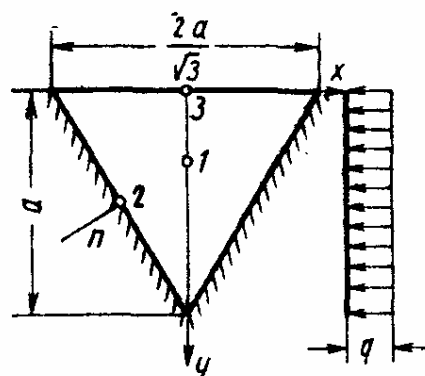


Рис. 28

деления максимального изгибающего момента и момента защемления в середине защемленного края при  $\nu = 0,2$  пользуются формулами

$$M_{x1} = 0,0126 qa^2; \quad (205)$$

$$M_{y1} = 0,0147 qa^2; \quad (206)$$

$$M_{n2} = -0,0285 qa^2. \quad (207)$$

Равносторонняя треугольная пластинка (рис. 29) под действием гидростатической на-

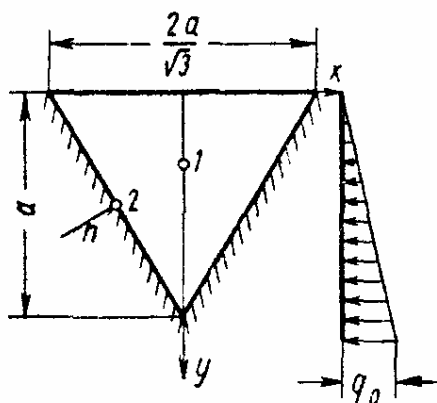


Рис. 29

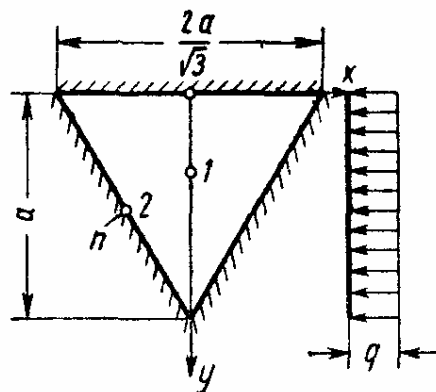


Рис. 30

грузки. Максимальные изгибающие моменты и моменты защемления в середине защемленного края при  $\nu = 0,2$ :

$$M_{x1} = 0,0053 q_0 a^2; \quad (208)$$

$$M_{y1} = 0,0035 q_0 a^2; \quad (209)$$

$$M_{n2} = -0,01 q_0 a^2. \quad (210)$$

Равносторонняя треугольная пластинка (рис. 30) под действием нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности. Максимальные

изгибающие моменты и момент защемления в середине края при  $\nu = 0,2$  определяют по формулам

$$M_{x1} = 0,0113 qa^2; \quad (211)$$

$$M_{y1} = 0,0110 qa^2; \quad (212)$$

$$M_{n2} = -0,0238 qa^2. \quad (213)$$

Равносторонняя треугольная пластинка (рис. 31) нагружена гидростатическим давле-

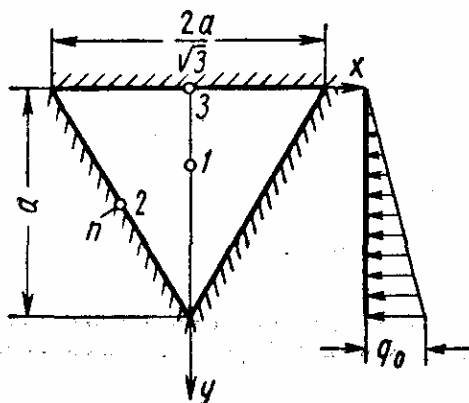


Рис. 31

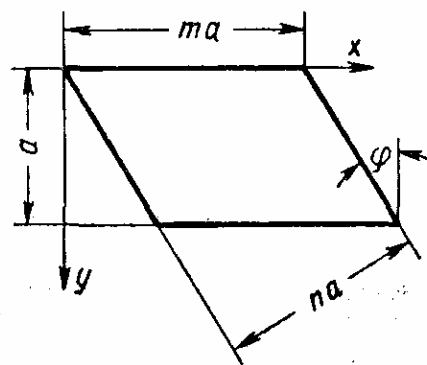


Рис. 32

нием. Максимальные изгибающие моменты и моменты в середине краев при  $\nu = 0,2$  определяют по формулам

$$M_{x1} = -0,0051 q_0 a^2; \quad (214)$$

$$M_{y1} = 0,0034 q_0 a^2; \quad (215)$$

$$M_{n2} = -0,0091 q_0 a^2; \quad (216)$$

$$M_{y3} = -0,0060 q_0 a^2. \quad (217)$$

Пластика (рис. 32) загружена равномерно по всей поверхности [13]. Прогибы и моменты в центре пластинки

$$w = C_1 \frac{qa^4}{D}; \quad (218)$$

$$M_{\max} = C_2 qa^2. \quad (219)$$

Значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  приведены в табл. 42.

42. Коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  в уравнениях (218) и (219) для прогибов и изгибающих моментов равномерно нагруженной пластинки, имеющей форму параллелограмма и шарнирно опертой по контуру ( $\nu = 0,2$ )

$\varphi^\circ$	$m$	$n$	$C_1$	$C_2$
0	2	2	0,01013	0,0999
30	2,02	1,75	0,01046	0,0968
30	1,92	1,67		
45	2	1,414	0,00938	0,0898
60	2	1	0,00796	0,0772
75	2	0,518	0,00094	0,0335

Пластинка (рис. 33) нагружена равномерно распределенным давлением. Пусть  $w_0$  и  $(M_0)_{\max}$  — прогиб и изгибающий момент в центре пластинки;  $(w_1)_{\max}$  и  $(M_1)_{\max}$  — соответственно для свободного края; эти величины можно определить по формулам

$$w_0 = C_1 \frac{qa^4}{D}; \quad (220)$$

$$(M_0)_{\max} = C_2 qa^2; \quad (221)$$

$$(w_1)_{\max} = C_3 \frac{qa^4}{D}; \quad (222)$$

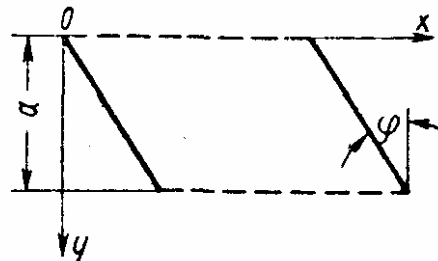


Рис. 33

$$(M_1)_{\max} = C_4 qa^2. \quad (223)$$

Значения коэффициентов  $C_1—C_4$  приведены в табл. 43.

43. Коэффициенты  $C_1—C_4$  в формулах (220)—(223) для прогибов и изгибающих моментов равномерно нагруженной пластинки, имеющей форму параллелограмма ( $\nu = 0,2$ )

$\varphi^\circ$	$m$	$n$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
0	2	2	0,214	0,495	0,224	0,508
30	1,92	1,67	0,1183	0,368	0,1302	0,367
45	2	1,414	0,0708	0,291	0,0869	0,296
60	2	1	0,0186	0,166	0,0396	0,152

## ИЗГИБ ПЛАСТИНОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

На практике часто встречаются пластинки, опирающиеся на упругое основание (днища резервуаров, фундаментные плиты, бетонные покрытия автомобильных дорог, взлетно-посадочные полосы аэродромов).

При расчете поперечно-нагруженной пластинки, покоящейся на упругом основании, кроме действующей нагрузки, необходимо учитывать силы реакции, передающиеся от основания к пластинке.

Если следовать гипотезе о пропорциональности интенсивности реакции основания прогибам  $w$  пластинки, то эта интенсивность реакции будет равна  $k w$  ( $k$  — модуль основания, или коэффициент постели). Величина  $k$  имеет размерность давления, отнесенного к единице длины ( $\text{кг/см}^3$ ).

**Прямоугольные пластинки.** Дифференциальное уравнение изгиба

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q - k w}{D}, \quad (224)$$

где  $q$  — интенсивность действующей поперечной нагрузки;  $k$  — модуль основания;  $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость;  $h$  — толщина пластинки.



Рассмотрим несколько примеров. Балка прямоугольного коробчатого сечения (рис. 34) вдавливается в упругое основание силами  $P$ . Нижняя пластинка балки, нагруженная реакциями основания, удерживается вертикальными стенками балки и вертикальными поперечными диафрагмами. Края пластинки, параллельные оси  $y$ , шарнирно оперты, а два других края  $y = \pm \frac{b}{2}$  защемлены [13].

Пусть  $w_0$  — прогиб краев нижней пластинки;  $w$  — прогиб пластинки относительно плоскости ее краев. Прогиб пластинки будет

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[ \frac{4kw_0}{D\pi} \cdot \frac{1}{m \left( \frac{m^4\pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m y \cdot \cos \beta_m y + B_m \operatorname{sh} \alpha_m y \sin \beta_m y \right], \quad (225)$$

где

$$2\alpha_m^2 = \sqrt{\gamma_m^4 + \lambda^4} + \gamma_m^2; \quad 2\beta_m^2 = \sqrt{\gamma_m^4 + \lambda^4} - \gamma_m^2; \quad (226)$$

причем

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{a}; \quad \lambda^4 = \frac{k}{D}; \quad (227)$$

коэффициенты  $A_m$  и  $B_m$  определяют из уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{4kw_0}{D\pi} \frac{1}{m \left( \frac{m^4\pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + \\ & + A_m \operatorname{ch} \frac{\alpha_m b}{2} \cos \frac{\beta_m b}{2} + \\ & + B_m \operatorname{sh} \frac{\alpha_m b}{2} \sin \frac{\beta_m b}{2} = 0; \end{aligned} \quad (228)$$

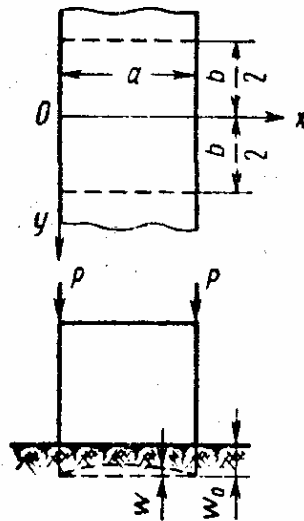


Рис. 34

$$(A_m \alpha_m + B_m \beta_m) \operatorname{sh} \frac{\alpha_m b}{2} \cos \frac{\beta_m b}{2} -$$

$$- (A_m \beta_m - B_m \alpha_m) \operatorname{ch} \frac{\alpha_m b}{2} \sin \frac{\beta_m b}{2} = 0. \quad (229)$$

Пластика (рис. 35) шарнирно оперта по всему контуру и нагружена сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в некоторой точке  $\xi, \eta$  [4].

Прогиб

$$w = \frac{4P}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \cdot \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k} \times \\ \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (230)$$

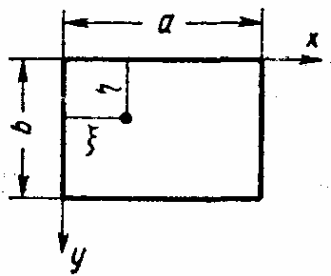


Рис. 35

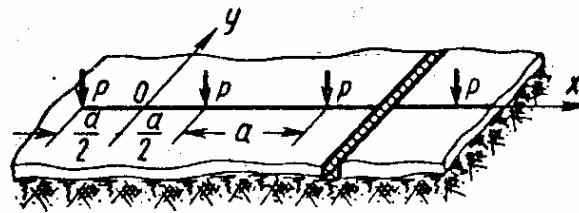


Рис. 36

Если на пластинку (рис. 35) действует равномерно распределенная нагрузка, то прогиб будет

$$w = \frac{16q}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k \right]}. \quad (231)$$

Бесконечная в плане, покоящаяся на упругом основании пластинка (рис. 36) нагружена по оси  $x$  в равноотстоящих одна от другой точках силами  $P$ . Прогиб

$$w = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}ak} e^{-\frac{\lambda y}{\sqrt{2}}} \left( \cos \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \right) + \\ + \frac{P\lambda^2}{ak} \sum_{m=2,4,6\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\lambda^4 + \gamma_m^4}} \cos \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times e^{-\alpha_m y} (\beta_m \cos \beta_m y + \alpha_m \sin \beta_m y), \quad (232)$$

где величины  $\lambda$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  и  $\gamma_m$  определяют по формулам (226) и (227).

Из выражения (232) определяют максимальный прогиб, имеющий место под грузами  $P$ , при  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = 0$  получим

$$w_{\max} = \frac{p\lambda}{2\sqrt{2}ak} + \frac{P\lambda^2}{ak} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\beta_m}{\sqrt{\lambda^4 + \gamma_m^4}} \quad (233)$$

На неограниченную пластинку на упругом основании действует единственный сосредоточенный груз  $P$ . Максимальный прогиб

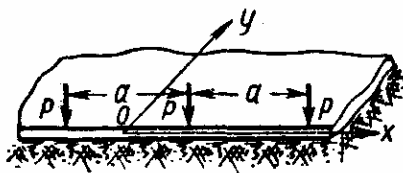


Рис. 37

$$w_{\max} = \frac{P\lambda^2}{8k} \quad (234)$$

Максимальное давление на упругое основание

$$p_{\max} = \frac{P}{8} \sqrt{\frac{k}{D}}. \quad (235)$$

На нижней поверхности пластинки под точкой приложения нагрузки действует максимальное растягивающее напряжение. Если  $c$  — радиус круга, по площади которого равномерно распределена нагрузка  $P$ , то

$$(\sigma_r)_{\max} = 0,275 (1 + \nu) \frac{P}{h^2} \lg \frac{Eh^3}{kb^4}, \quad (236)$$

где  $h$  — толщина пластинки,  
при  $c \leq 1,724h$

$$b = \sqrt{1,6c^2 + h^2} - 0,675h;$$

при  $c > 1,724h$

$$b = c;$$

при  $c = 0$  получаем выражение для случая сосредоточенной силы.

Если нагрузка  $P$  распределена по площади квадрата  $u \times u$ , то вместо  $c$  необходимо ввести величину  $0,57u$ .

Полубесконечная пластинка на упругом основании нагружена равноотстоящими силами  $P$ , приложенными по ее краю (рис. 37) [13]. Если расстояние  $a$  велико, то растягивающее напряжение на нижней поверхности пластинки под нагрузкой определяют по формуле

$$(\sigma_x)_{\max} = 0,529 (1 + 0,54\nu) \frac{P}{h^2} \left[ \lg \left( \frac{Eh^3}{kb^4} \right) - 0,71 \right]. \quad (237)$$

Величину  $b$  определяют так же, как и в предыдущем случае, причем  $c$  — радиус полукруга, по площади которого равномерно распределена нагрузка  $P$ .

Бесконечная пластинка на упругом основании, нагруженная равноотстоящими и равными нагрузками  $P$ , из которых каждая распределена равномерно по площади прямоугольника  $u \times v$  (рис. 38). Прогиб

$$w = \frac{4P}{\pi^2 uv} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_{mn} \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}}{mn(D\gamma_{mn}^4 + k)} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad (238)$$

где

$$\alpha_m = \frac{2m\pi}{a}; \quad \beta_n = \frac{2n\pi}{b};$$

$$\gamma_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2;$$

$$\epsilon_{mn} = 1 \text{ при } m \neq 0, n \neq 0;$$

$$\epsilon_{mn} = \frac{1}{2} \text{ при } m = 0,$$

$$n \neq 0 \text{ или } m \neq 0, n = 0;$$

$$\epsilon_{mn} = \frac{1}{4} \text{ при } m = n = 0.$$

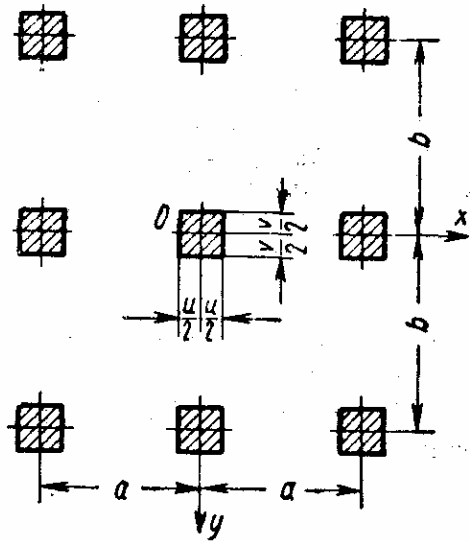


Рис. 38

**Круглые пластинки.** Введя в уравнение (130) реакцию упругого основания ( $-kw$ ), получим дифференциальное уравнение изгиба пластинки на упругом основании

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q - kw}{D}, \quad (239)$$

где  $q$  — интенсивность поперечной нагрузки;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ;  $h$  — толщина пластинки. Обозначим

$$\frac{k}{D} = \frac{1}{l^4}; \quad \frac{w}{l} = z; \quad \frac{r}{l} = x. \quad (240)$$

Уравнение (239) приведем к виду

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dz}{dx} \right) + z = 0. \quad (241)$$

Рассмотрим случай пластинки, нагруженной в центре силой  $P$ . Решением уравнения (241) будет [13]

$$\begin{aligned}
 z = & A_1 \left( 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) + \\
 & + A_2 \left( x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) + \\
 & + A_3 \left[ \left( 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) \ln x + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \dots \right] + \\
 & + A_4 \left[ \left( x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \ln x + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{5}{3456} x^6 - \frac{1054 \cdot 10^{-4}}{442368} x^{10} + \dots \right]. \quad (242)
 \end{aligned}$$

Постоянные  $A_1$ — $A_4$  определяют из соответствия граничным условиям.

Если контур круглой пластинки радиуса  $b$  свободен, то граничные условия для радиальных моментов [выражение (125)] и соответствующих перерезывающих сил [формула (125)] можно выразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} &= 0; \\
 \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Используем еще два условия, относящиеся к центру пластинки: первое — прогиб в центре пластинки должен иметь конечное значение; второе — равнодействующая перерезывающих сил, распределенных по боковой поверхности бесконечно малого круглого цилиндра, вырезанного из пластинки в ее центре, равна силе  $P$ . Из первого условия вытекает что в выражении (242)  $A_3 = 0$ . По второму условию

$$\left( \int_0^{2\pi} Qr \, d\varphi \right)_{r=\varepsilon} + P = 0.$$

Обозначим  $\frac{k}{d} = l^4$ , тогда

$$-kl^4 \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right)_{r=\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon + P = 0, \quad (244)$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малый радиус. Используя обозначения (240) и выражение (242) для  $z$ , находим окончательно, что для бесконечно малого значения  $x = \frac{\varepsilon}{l}$  уравнение (244) принимает вид

$$-kl^4 \frac{4A_4}{l\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon + P = 0;$$

отсюда

$$A_4 = \frac{P}{8\pi kl^3}.$$

Из соотношений (243) находят остальные постоянные  $A_1$  и  $A_2$ .

Неограниченная большая пластинка на упругом основании нагружена в центре силой  $P$ . Прогиб в центре

$$w_{\max} = \frac{Pl^2}{8D}. \quad (245)$$

Радиальные моменты на некотором расстоянии от нагрузки принимают отрицательное значение; наибольшее по абсолютной величине значение отрицательных радиальных моментов равно  $0,02P$  (при  $\nu = 0,3$ ). Моменты  $M_r$  и  $M_\varphi$  будут

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \left[ (1 + \nu) \left( \ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) - \frac{1}{2} (1 - \nu) \right]; \quad (246)$$

$$M_\varphi = \frac{P}{4\pi} \left[ (1 + \nu) \left( \ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) + \frac{1}{2} (1 - \nu) \right], \quad (247)$$

где  $\gamma = 0,5772157 \dots$  — постоянная Эйлера.

Формулы (246) и (247) неприменимы для точек в непосредственной близости от центра пластинки.

Если нагрузка  $P$  распределена по площади круга радиуса  $d$ , малого в сравнении с  $l$ , то момент  $M_{\max}$  для центра бесконечно большой пластинки будет

$$M_{\max} = \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \left( \ln \frac{2l}{d} - \gamma + \frac{1}{2} \right),$$

или

$$M_{\max} = \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \left( \ln \frac{l}{d} + 0,616 \right). \quad (248)$$

Если нагрузка равномерно распределена по площади малого квадрата  $u \times u$ , то момент в центре

$$M_{\max} = \frac{1 + \nu}{4\pi} P \left( \ln \frac{l}{u} + 1,177 \right). \quad (249)$$

## ИЗГИБ ТОЛСТЫХ ПЛИТ

Круглая плита закреплена по контуру и нагружена равномерно по всей площади. Стрела прогиба  $f'$  при шарнирном опирании по контуру [4]

$$f' = f \left[ 1 + 0,7 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \right];$$

если плита защемлена по контуру, то

$$f' = f \left[ 1 + 3,33 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \right],$$

где  $f$  — стрела прогиба по соответствующей формуле теории тонких пластинок;  $b$  — радиус плиты;  $h$  — толщина.

Прямоугольная плита со сторонами  $a \times b$ , шарнирно опертая по контуру, нагружена равномерно распределенным давлением ( $a \geq b$ ). Стрелу прогиба  $f'$  определяют по формуле [4]

$$f' = f \left[ 1 + \alpha \left( \frac{h}{2b} \right)^2 \right],$$

где  $f$  — стрела прогиба, определяемая по соответствующей формуле теории тонких пластинок.

Коэффициент  $\alpha$  принимают:

$\frac{a}{b}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0	5,0	$\infty$
$\alpha$	1,18	0,98	0,87	0,80	0,75	0,72	0,64	0,62	0,61	0,61

Нормальные напряжения при изгибе шарнирно опертых толстых плит можно определять по формулам теории тонких пластинок даже в том случае, если отношение толщины к наименьшему размеру основания достигает  $\frac{1}{3}$ .

## ОСЕССИММЕТРИЧНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНОК

## Основные уравнения

Рассмотрим осесимметричное растяжение (сжатие) круглых пластинок (дисков) переменной толщины (рис. 39).

Предполагаем, что пластинка имеет плоскость симметрии; внешние нагрузки (контурные и центробежные силы) и температурный нагрев зависят только от радиуса; напряжения распределяются равномерно по толщине диска; перпендикулярными к срединной плоскости диска

напряжениями можно пренебречь. Допущения справедливы при не очень резком изменении толщины диска и для относительно тонких дисков  $\left(\frac{h_{\max}}{b} < \frac{1}{4}\right)$ .

Относительные деформации диска в радиальном и окружном направлениях (рис. 40)

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad (250)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (251)$$

где  $u$  — радиальное смещение точки на радиусе  $r$ .

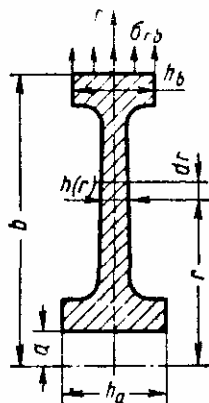


Рис. 39

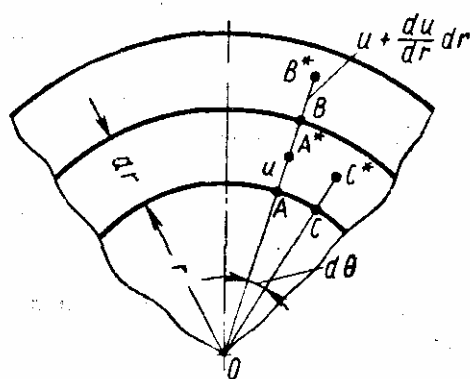


Рис. 40

**Уравнения упругости.** На основании закона Гука

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha t; \quad (252)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha t, \quad (253)$$

где  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  — радиальное и окружное напряжения;  $E = E(r)$  — модуль упругости;  $\nu = \nu(r)$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha = \alpha(r)$  — коэффициент линейного расширения материала;  $t = t(r)$  — температура пластинки на радиусе  $r$ .

В другой форме

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) - \frac{E \alpha t}{1 - \nu}; \quad (254)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) - \frac{E \alpha t}{1 - \nu}. \quad (255)$$



**Уравнения равновесия.** Условия равновесия элемента пластинки (рис. 41):

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{d}{dr} (\sigma_r r h) - \sigma_\theta + q(r) r = 0 \quad (256)$$

или

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r h) - (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{h}{r} + q(r) h = 0, \quad (257)$$

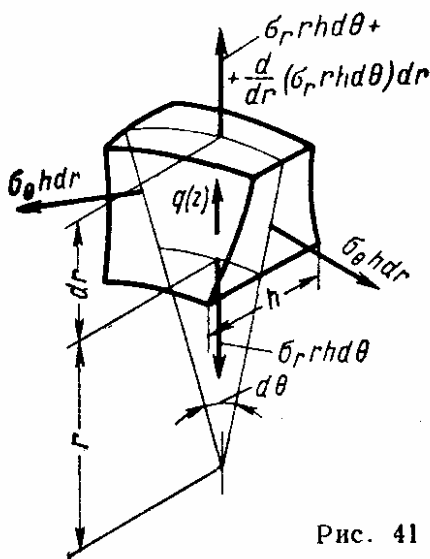


Рис. 41

где  $q(r)$  — радиальная распределенная нагрузка на единицу объема. Интегрированием выражения (256) и (257) в пределах от  $a$  до  $r$ , где  $a$  — внутренний радиус, можно получить уравнение равновесия для круглой пластинки в интегральной форме

$$\sigma_r = \frac{1}{rh} \left[ \int_a^r h \sigma_\theta dr_1 - \int_a^r q(r_1) r_1 h dr_1 + ah_a \sigma_{ra} \right]; \quad (258)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{h} \left[ \int_a^r \frac{h}{r_1} (\sigma_\theta - \sigma_r) dr_1 - \int_a^r q(r_1) h dr_1 + h_a \sigma_{ra} \right]. \quad (259)$$

В частном случае, когда пластинка представляет собой диск, нагрузка на который вызывается действием собственных центробежных сил

$$q = \rho \omega^2 r, \quad (260)$$

где  $\omega$  — угловая скорость;  $\rho$  — плотность материала диска.

**Уравнение совместности деформаций**

$$\frac{d}{dr} (\epsilon_\theta r) = \epsilon_r; \quad (261)$$

в напряжениях это уравнение имеет вид

$$\frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha t = \frac{d}{dr} \left\{ \left[ \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r + \alpha t) \right] r \right\}. \quad (262)$$

Уравнение совместности в интегральной форме

$$\sigma_{\theta} = \nu \sigma_r + \frac{E}{rf} \int_a^r \frac{(1 - \nu^2)f}{E} \sigma_r dr - Eat + \frac{E}{rf} \int_a^r (1 + \nu) fat dr + \\ + \frac{Ea}{rfE_a} (\sigma_{\theta a} - \nu_a \sigma_{ra} + E_a \alpha_a t_a), \quad (263)$$

где

$$f = \exp \int_a^r \frac{\nu}{r} dr.$$

В случае  $\nu = \text{const}$

$$f = \left( \frac{r}{a} \right)^{\nu}$$

и уравнение совместности (263) примет вид

$$\sigma_{\theta} = \nu \sigma_r + \frac{E(1 - \nu^2)}{r^{1+\nu}} \int_a^r \frac{r^{\nu}}{E} \sigma_r dr - Eat + \\ + \frac{E(1 + \nu)}{r^{1+\nu}} \int_a^r r^{\nu} at dr + \frac{Ea^{1+\nu}}{E_a r^{1+\nu}} (\sigma_{\theta a} - \nu \sigma_{ra} + E_a \alpha_a t_a). \quad (264)$$

В уравнениях (263) и (264) индекс  $a$  означает, что рассматривается значение параметра для радиуса  $r = a$ .

**Краевые условия.** Обычно краевые условия для диска на внешнем контуре относятся к радиальному напряжению

$$\sigma_r(b) = \sigma_{rb}, \quad (265)$$

где  $\sigma_{rb}$  — заданное радиальное напряжение на внешнем контуре (обычно, от действия центробежных сил лопаток).

На внутреннем контуре диска с отверстием краевое условие

$$\sigma_r(a) = \sigma_{ra}, \quad (266)$$

где  $\sigma_{ra}$  — заданное радиальное напряжение. Если отсутствует посадка диска на вал, то  $\sigma_{ra} = 0$ . При наличии прессовой посадки

$$\sigma_{ra} = -p, \quad (267)$$

где  $p$  — давление напрессовки в рабочем состоянии.

Для диска без центрального отверстия (сплошной диск) в центре диска радиальное и окружное напряжения будут

$$\sigma_r(0) = \sigma_{\theta}(0) \quad (268)$$

(условие осевой симметрии).

**Основное дифференциальное уравнение для радиального перемещения.** Из уравнений равновесия и соотношений упругости получается следующее дифференциальное уравнение для радиального перемещения:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d}{dr} (\ln H) \frac{du}{dr} + \left[ \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\ln H) + \frac{d}{dr} \left( \frac{\nu}{r} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \right] u = F(r), \quad (269)$$

где

$$H = \frac{r h E}{1 - \nu^2};$$

$$F(r) = \frac{1}{h} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{E h \alpha t}{1 - \nu} \right) \frac{1 - \nu^2}{E} - q \frac{1 - \nu^2}{E}.$$

Краевые условия устанавливают в соответствии с равенствами (265)–(268) и соотношениями (254) и (255).

**Основная система дифференциальных уравнений для напряжений.** Для решения задачи «в напряжениях» используют уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций в напряжениях.

Преимущество решения задачи «в напряжениях» — более простой вид краевых условий.

### Точные решения

Точные решения уравнения (269) известны в сравнительно небольшом числе случаев [7, 11]. Ниже приведены наиболее важные точные решения, которые используют также для построения приближенных решений с помощью разбивки диска на участки.

**Диск постоянной толщины** (рис. 42). Основное дифференциальное уравнение для диска с постоянными параметрами упругости

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1 + \nu) \frac{d(\alpha t)}{dr} - \frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2 r \quad (270)$$

имеет частные решения

$$u_1 = r; \quad u_2 = \frac{1}{r}. \quad (271)$$

**Диск с центральным отверстием:**

$$\sigma_r(r) = \sigma_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \sigma_{ra} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \\ + \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left[ b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right] + \\ + E \left[ \theta(b) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \theta(r) \right]; \quad (272)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r) = & \sigma_{rb} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \sigma_{ra} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) + \\ & + \frac{3 + \nu}{3} \rho \omega^2 \left[ b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right] + \\ & + E \left[ \theta(b) \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \theta(r) - \alpha t \right]; \end{aligned} \quad (273)$$

$$\theta(r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r r a t \, dr. \quad (274)$$

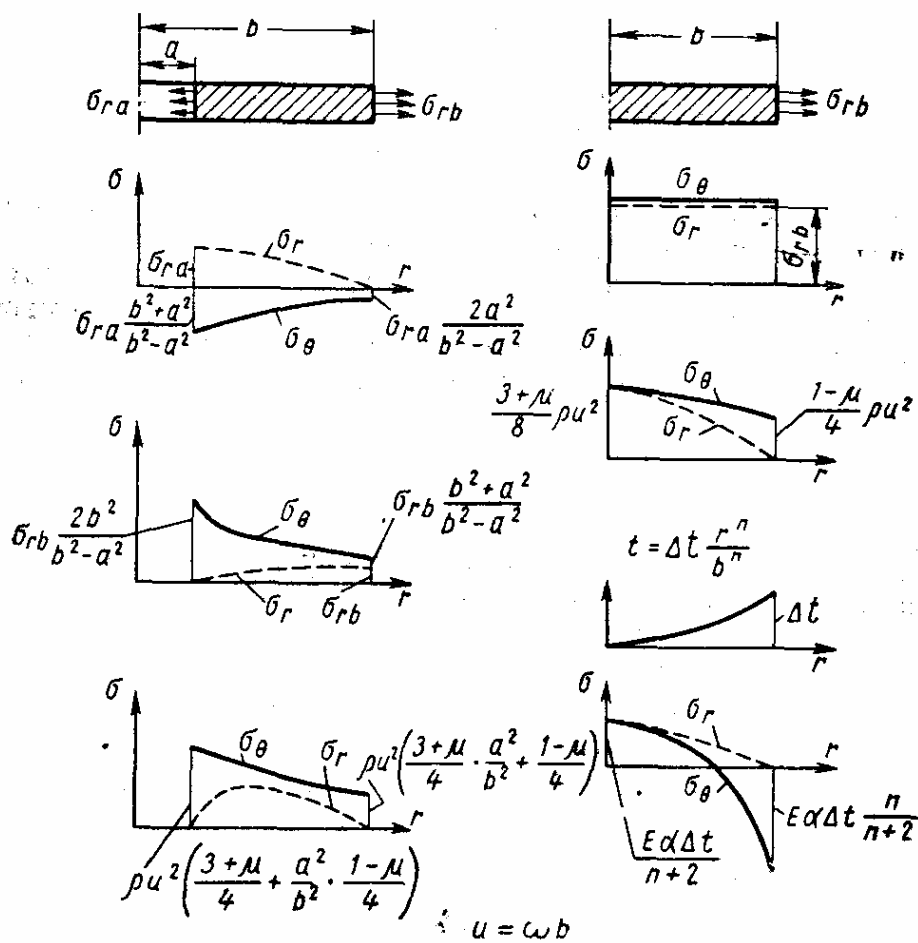


Рис. 42

Сплошной диск без центрального отверстия:

$$\sigma_r(r) = \sigma_{rb} + \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) + E [\theta(b) - \theta(r)]; \quad (275)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r) = & \sigma_{rb} + \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left( b^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right) + \\ & + E [\theta(b) + \theta(r) - \alpha t], \end{aligned} \quad (276)$$

где

$$\theta(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r a t dr. \quad (277)$$

В центре диска

$$\theta(0) = \frac{1}{2} a(0) t(0).$$

Типичное распределение напряжений в диске постоянной толщины от действия контурных нагрузок, центробежных сил и температуры показано на рис. 42.

Радиальное перемещение в диске

$$\begin{aligned} u(r) = & \frac{\sigma_{rb}}{E} \cdot \frac{b^2 r}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \nu + \frac{a^2}{r^2} (1 + \nu) \right] - \\ & - \frac{\sigma_{ra}}{E} \cdot \frac{a^2 r}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \nu + \frac{b^2}{r^2} (1 + \nu) \right] + \\ & + \frac{3 + \nu}{8} \cdot \frac{\rho \omega^2 r}{E} \left[ (b^2 + a^2) (1 - \nu) + \frac{a^2 b^2}{r^2} (1 + \nu) - r^2 \frac{1 - \nu^2}{3 + \nu} \right] + \\ & + \theta(b) \frac{b^2 r}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \nu + \frac{a^2}{r^2} (1 + \nu) \right] + \theta(r) (1 + \nu) r. \end{aligned} \quad (278)$$

Формула (278) справедлива и для сплошного диска при  $a = 0$ . Диск гиперболического профиля. Толщина диска на радиусе  $r$  (рис. 43, а)

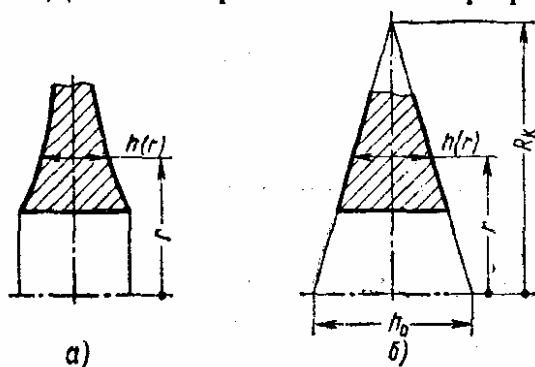


Рис. 43

$$h = \frac{m}{r^n}, \quad (279)$$

где  $m$  и  $n$  — постоянные величины.

При  $n = 0$  толщина диска постоянна; в большинстве практических задач  $n > 0$ , что соответствует уменьшению диска при увеличении радиуса.

Основное дифференциальное уравнение для диска с постоянными параметрами упругости

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1 - n}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{1 + \nu n}{r^2} u = & - \frac{n(1 + \nu) a t}{r} + \\ & + (1 + \nu) \frac{d(at)}{dr} - \rho \omega^2 r \frac{1 - \nu^2}{E}. \end{aligned} \quad (280)$$

Это уравнение имеет два частных решения

$$u_1 = r^{k_1}; \quad u_2 = r^{k_2}, \quad (281)$$

где

$$k_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1 + \nu n}.$$

Произвольные постоянные в общем решении определяют из краевых условий.

**Диск конического профиля.** Толщина профиля (рис. 43, б)

$$h(r) = h_0 \left( 1 - \frac{r}{R_k} \right). \quad (282)$$

Основное дифференциальное уравнение для диска с постоянными параметрами упругости

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_k - r} \right) \frac{du}{dr} - \left[ \frac{\nu}{(R_k - r)r} + \frac{1}{r^2} \right] u = \\ = \alpha t (1 + \nu) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_k - r} \right) + \frac{d}{dr} [\alpha t (1 + \nu)] - \\ - \frac{\alpha t (1 + \nu)}{r} - \rho \omega^2 r \frac{1 - \nu^2}{E}. \end{aligned} \quad (283)$$

Уравнение интегрируют с помощью гипергеометрических рядов [3, 7, 10].

**Диск составного профиля** из ступицы и обода постоянной толщины и полотна в виде диска конического профиля. Решение и таблицы для расчета указаны в работе [2].

#### Напряжения и деформации в дисках с произвольным изменением толщины

Методы расчета на прочность дисков переменной толщины применяют при проектировании паровых и газовых турбин, компрессоров и т. д. Температурные напряжения в дисках, изменение параметров упругости вдоль радиуса, учет пластичности и ползучести материала см. в работах [1, 6, 9], а также в более ранних работах [10]. Существует свыше 50 методов определения напряжений в дисках. Эти методы можно разделить на три группы: аппроксимации, конечных разностей, интегральные.

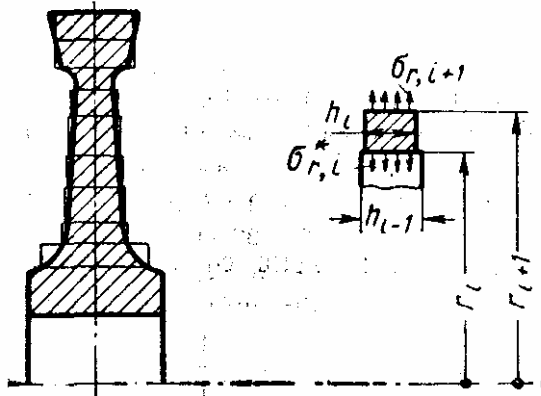
**Методы аппроксимации.** В этих методах реальный профиль диска аппроксимируют участками с другими законами изменения толщины, для которых известно точное решение.

**Аппроксимация участками постоянной толщины** (рис. 44). Существует большое число различных видоизменений этого способа, отличающихся алгоритмом расчета (методы Доната,

Граммеля, Яновского и др.). Наиболее употребителен способ, идея которого близка к *методу начальных параметров*.

На основании решения для диска постоянной толщины с постоянными параметрами упругости, напряжения в конце  $i$ -го участка и напряжения на его внутреннем радиусе связаны соотношением

$$\sigma_{r, i+1} = \sigma_{r, i}^* A_i + \sigma_{\theta, i} (1 - A_i) + E_i [(1 - A_i) \alpha_i t_i - \theta_{i+1}] - \rho \omega^2 r_{i+1}^2 L_i; \quad (284)$$



$$\sigma_{\theta, i+1} = \sigma_{r, i}^* (1 - A_i) + \sigma_{\theta, i}^* A_i + E_i [A_i \alpha_i t_i + \theta_{i+1} - \alpha_{i+1} t_{i+1}] - \rho \omega^2 r_{i+1}^2 M_i, \quad (285)$$

где

$$A_i = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^2 \right]; \quad (286)$$

$$L_i = -\frac{1 + \nu_i}{4} \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^2 - \frac{1 - \nu_i}{8} \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^4 + \frac{3 + \nu_i}{8}; \quad (287)$$

$$M_i = -\frac{1 + \nu_i}{4} \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^2 + \frac{1 - \nu_i}{8} \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^4 + \frac{1 + 3\nu_i}{8}; \quad (288)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{1}{r_{i+1}^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \alpha t dr \approx \frac{1}{2r_{i+1}^2} (r_{i+1} \alpha_{i+1} t_{i+1} + r_i \alpha_i t_i) (r_{i+1} - r_i). \quad (289)$$

Так как на  $i$ -м радиусе происходит скачок толщины, то напряжения в конце  $i-1$  участка  $\sigma_{r, i}$  и  $\sigma_{\theta, i}$  связаны с напряжениями в начале  $i$ -го участка следующими зависимостями:

$$\sigma_{r, i}^* = \frac{h_{i-1}}{h_i} \sigma_{r, i}; \quad (290)$$

$$\sigma_{\theta, i}^* = \nu_i \sigma_{r, i}^* + \frac{E_i}{E_{i-1}} (\sigma_{\theta, i} - \nu_{i-1} \sigma_{r, i}). \quad (291)$$

Для удовлетворения краевых условий применяют *метод двух расчетов*. В первом расчете задаются на начальном радиусе произвольным значением окружного напряжения  $\sigma_{\theta 0}$  ( $i = 0$ ). Значение радиального напряжения на начальном радиусе или известно (диск с отверстием) или  $\sigma_{r0} = \sigma_{\theta 0}$  (сплошной диск).

По формулам (284)–(291) от участка к участку находят напряжения на внешнем радиусе. Так как радиальное напряжение на ободе при пер-

вом расчете  $\sigma_{rb}^{(1)}$  не будет равно заданному значению, то проводят второй расчет, при котором центробежные силы и нагрев считают отсутствующими [в формулах (284) и (285) учитывают два первых члена]. Напряжения второго расчета умножают на коэффициент  $k$ , который определяют из равенства

$$\sigma_{rb}^{(1)} + k\sigma_{rb}^{(2)} = \sigma_{rb}. \quad (292)$$

Окончательные напряжения в диске являются суммой напряжений первого и второго расчета (последние умножают на  $k$ ). Если требуется раздельное определение напряжений от центробежных сил и температурных напряжений, то первый расчет выполняют дважды.

Математическое обоснование метода двух расчетов состоит в следующем. Напряжения первого расчета связаны с частным решением неоднородного дифференциального уравнения диска, напряжения второго расчета — с решением однородного уравнения.

Аппроксимация участками дисков гиперболического или конического профиля. Используют равенства, подобные (284) и (285), но основанные на точных решениях для дисков гиперболического или конического профиля. Так как соответствующие аналитические выражения весьма громоздки, то для практических расчетов составлены специальные графики.

Подобные графики были приведены в работах Черного и Бакланова, Риса, Тумаркина [14]; в последнее время они составлены заново [12].

Аппроксимация участками гиперболического или конического профиля не требует использования формул (290) и (291), так как сопряжение участков проводится плавно, без скачков.

**Методы конечных разностей.** В этих методах, впервые указанных для расчета дисков А. Стодолой, дифференциальные уравнения равновесия и совместности заменяют уравнениями в конечных разностях.

Если использовать приближенное интегрирование по «правилу прямоугольников», то можно получить систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{r, i+1} &= \frac{h_i \Delta r_i}{h_{i+1} r_{i+1}} \sigma_{\theta, i} + \frac{h_i r_i}{h_{i+1} r_{i+1}} \sigma_{r, i} - \frac{h_i r_i}{h_{i+1} r_{i+1}} \Delta r_i \rho \omega^2 r_i; \\ \sigma_{\theta, i+1} &= \nu_{i+1} \sigma_{r, i+1} + \sigma_{\theta, i} \frac{E_{i+1}}{E_i} \left[ 1 - \frac{(1 + \nu_i) \Delta r_i}{r_i} \right] - \\ &- \sigma_{r, i} \frac{E_{i+1}}{E_i} \left[ \nu_i - \frac{(1 + \nu_i) \Delta r_i}{r_i} \right] - E_{i+1} (\alpha_{i+1} t_{i+1} - \alpha_i t_i). \end{aligned}$$

Различные уточнения в методах конечных разностей получаются в результате более точных способов вычисления интегралов в уравнениях равновесия и совместности в интегральной форме (например, использование «правила трапеций» и т. д.).



**Интегральные методы.** Широкое практическое применение получили методы, использующие для расчета уравнения равновесия и совместности в интегральной форме или сводящие их к одному интегральному уравнению (методы Томпсона, Кинасошвили и др.)

Для решения используют *метод последовательных приближений* или *метод линейной аппроксимации*.

**Дополнительные вопросы.** Расчет дисков с несимметричными ободами и ступицей изложен в работе [5].

Напряжения в дисках с радиальными лопатками определяют методами, приведенными в работе [1].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961.
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. М., «Машиностроение», 1966.
3. Бицено К. Б. и Граммель Р. Техническая динамика. Т. 2, Л.—М., ГТТИ, 1952.
4. Вольмир А. С. Расчет пластинок. Справочник машиностроителя. Т. 3., Изд. 1-е. М., Машгиз, 1955.
5. Демьянушко И. В. Расчет дисков с несимметричным ободом и ступицей. Сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей». Вып. 3. М., «Машиностроение», 1966.
6. Кинасошвили Р. С. Расчет на прочность дисков турбомашин. М., Оборонгиз, 1954.
7. Коваленко А. Д. Круглые пластинки переменной толщины. М., Физматгиз, 1959.
8. Левин А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М.—Л., Госэнергоиздат, 1953.
9. Малинин Н. Н. Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962.
10. Малкин Я. Ф. Профилирование турбинных дисков. М., ОНТИ, 1937.
11. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. II. М., Машгиз, 1958.
12. Скубачевский Г. С. Авиационные газотурбинные двигатели. М., «Машиностроение», 1965.
13. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С., Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
14. Яновский М. И. Конструирование и расчет на прочность деталей паровых турбин. М., изд-во АН СССР, 1947.
15. Шиманский Ю. А. Справочник по строительной механике корабля. Т. 2. Л., Судпромгиз, 1958.
16. Flügge W. Handbook of engineering mechanics. New York—London, 1962.

## Глава 18

### ГИБКИЕ ПЛАСТИНКИ И МЕМБРАНЫ

#### ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ГИБКИЕ ПЛАСТИНКИ И МЕМБРАНЫ

##### Основные зависимости

Выражения для деформаций удлинения и сдвига в срединной поверхности [2]:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Координатные оси расположены в соответствии со схемой на рис. 1 гл. 17.

Деформации срединного слоя связаны уравнением совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Кривизны изогнутой срединной поверхности определяют по формулам (4) и (6) гл. 17.

Полные деформации произвольного слоя находят суммированием деформаций в срединной поверхности и деформаций изгиба:

$$\epsilon_{x,n} = \epsilon_x + \epsilon_{x,i}, \quad \epsilon_{y,n} = \epsilon_y + \epsilon_{y,i}, \quad \gamma_n = \gamma + \gamma_i; \quad (3)$$

деформации изгиба определяют по формулам (7) и (8) гл. 17.

Напряженное состояние пластинки складывается из напряжений изгиба, показанных на рис. 3 гл. 17, и напряжений, равномерно распределенных по сечению пластинки (напряжений в срединной поверхности, или мембранных напряжений).

Соотношения Гука для деформаций и напряжений в срединной поверхности

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}; \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}; \\ \gamma &= \frac{\tau}{G} = \frac{2\nu(1+\nu)}{E}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x);$$

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma. \quad (5)$$

Такие же соотношения справедливы для напряжений и деформаций изгиба [формулы (9) гл. 17]. Полные напряжения

$$\sigma_{x,n} = \sigma_x + \sigma_{x,u}; \quad \sigma_{y,n} = \sigma_y + \sigma_{y,u}; \quad \tau_n = \tau + \tau_u. \quad (6)$$

Элемент гибкой пластинки, находящейся под действием внешней поперечной нагрузки и всех внутренних усилий, показан на рис. 1. Через  $h$

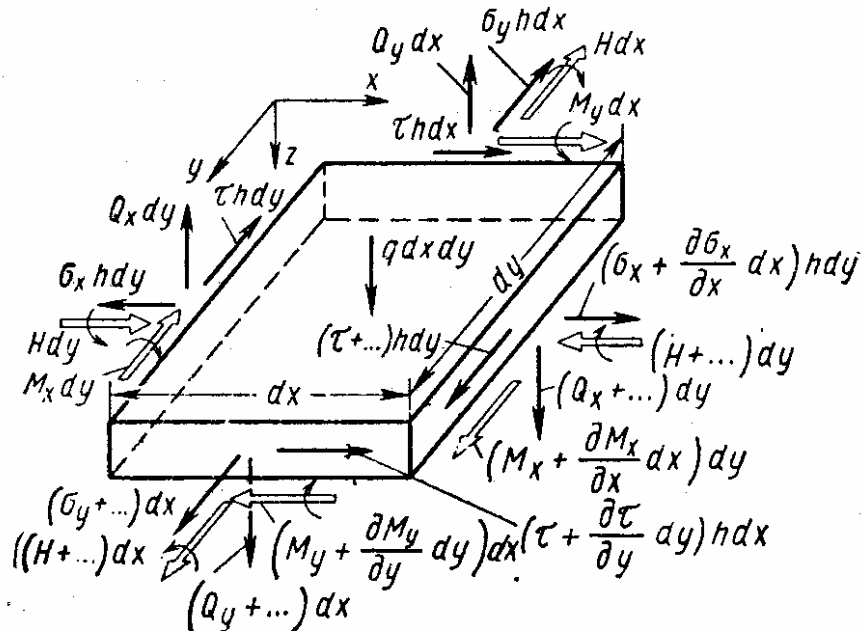


Рис. 1. Условия равновесия элемента пластинки

обозначена толщина пластинки. Светлыми стрелками нанесены векторы-моменты; их значения определяют по формулам (11)–(15) гл. 17.

Проектируя все силы на оси  $x$  и  $y$ , после упрощений получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Уравнение равновесия в моментах относительно оси  $y$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (8)$$

Уравнение равновесия в моментах относительно оси  $x$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (9)$$

Сумма проекций всех сил на ось  $z$  для деформированного состояния пластинки

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0. \quad (10)$$

После подстановки значений  $Q_x$  и  $Q_y$  из уравнений (8) и (9) в формулу (10), используя зависимости (12) и (15) гл. 17, получим

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = h \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2h\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q, \quad (11)$$

где  $\nabla^2$  — оператор,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (12)$$

Напряжения в срединной поверхности представляют как производные некоторой функции напряжений  $\Phi$ :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (13)$$

при подстановке выражений (13) в уравнения равновесия (7) последние выполняются.

После замены в равенстве (11) напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau$  через их значения в функции напряжений в срединной поверхности  $\Phi$  уравнение равновесия приобретает вид

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{q}{h}. \quad (14)$$

Подставляя в уравнение совместности деформаций (2) вместо  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\gamma$  выражения (4) и используя зависимости (13), получим

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) представляют основную систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок. Введем оператор  $L$ , который в применении к функциям  $w$ ,  $\Phi$  записывают так:

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (16)$$

тогда уравнения (14) и (15) можно записать в виде

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = L(w, \Phi) + \frac{q}{h}; \quad (17)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w). \quad (18)$$

В случае жестких пластинок необходимо принять  $\Phi \equiv 0$ , тогда уравнение (14) сводится к линейному уравнению (24) гл. 17.

При расчете мембран изгибной жесткостью можно пренебречь; уравнения (14) и (15) для этого случая принимают вид

$$-h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = q; \quad (19)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (20)$$

### Граничные условия

К р а й  $x = 0$  шарнирно оперт; тогда

$$(w)_{x=0} = 0; \quad (21)$$

$$(M_x)_{x=0} = 0. \quad (22)$$

Второе условие можно записать в виде.

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0. \quad (23)$$

К р а й  $x = 0$  защемлен. При этом

$$(w)_{x=0} = 0; \quad (24)$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (25)$$

Точки незагруженного края  $x = 0$  свободно смещаются вдоль оси  $z$ . В этом случае

$$R_x = 0. \quad (26)$$

Давление на подкрепляющее ребро  $R_x$  определяют по формуле (33) гл. 17. Условие (26) можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=0} = 0. \quad (27)$$

К р а й  $x = 0$  оперт на упругое ребро. При этом должно быть

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = R_x, \quad (28)$$

или

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \quad (29)$$

где  $EJ$  — жесткость ребра по отношению к изгибу в вертикальной плоскости.

Точки незагруженного края  $x=0$  свободно смещаются вдоль оси  $x$ . В этом случае напряжение  $\sigma_x$  вдоль края должно быть

$$(\sigma_x)_{x=0} \equiv \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0. \quad (30)$$

Точки незагруженного края  $x=0$  свободно смещаются вдоль оси  $y$ . При этом должно быть

$$(\tau)_{x=0} \equiv \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_{x=0} = 0. \quad (31)$$

Края  $x=0$  и  $x=a$  закреплены так, что взаимное смещение их точек вдоль оси  $x$  исключено. Тогда должно соблюдаться условие

$$u_{x=a} - u_{x=0} = 0.$$

Согласно первой из зависимостей (1) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\nu}{E} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Если учесть, что взаимное смещение точек краев  $x=a$  и  $x=0$  (при фиксированном значении  $y$ ) будет

$$u_{x=a} - u_{x=0} = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

то граничное условие в окончательном виде примет вид

$$\int_0^a \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0. \quad (32)$$

Взаимное смещение краев  $x=0$  и  $x=a$  вдоль оси  $x$  имеет фиксированное значение. Пусть относительное сближение краев равно  $e_x$ , т. е.

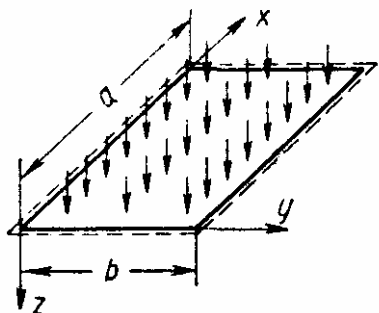
$$e_x = \frac{1}{a} (u_{x=a} - u_{x=0});$$

тогда

$$\frac{1}{a} \int_0^a \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = e_x \quad (33)$$

## Расчет

Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по контуру, нагружена давлением, равномерно распределенным по всей поверхности; контур пластинки не смещается. Координатные оси расположены, как показано на рис. 2. Пусть  $q$  — интенсивность поперечной нагрузки;  $h$  — толщина пластинки;  $f$  — стрела прогиба (в центре). Безразмерный прогиб в центре и безразмерное давление обозначим



$$\zeta = \frac{f}{h}; \quad q^* = \frac{q}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^4, \quad (34)$$

тогда соотношение для определения стрелы прогиба

$$C_1 \zeta^3 + C_2 \zeta = \frac{q^*}{16}. \quad (35)$$

Рис. 2. Прямоугольная пластинка под действием равномерно распределенного давления

Коэффициенты  $C_1, C_2$  приведены в табл. 1 [2].

Максимальные напряжения изгиба в центре и напряжения в срединной поверхности в центре:

$$\sigma_{x,u} = C_3 E \frac{4hf}{b^2}; \quad \sigma_{y,u} = C_4 E \frac{4hf}{b^2}; \quad (36)$$

$$\sigma_x = C_5 E \left( \frac{2f}{b} \right)^2; \quad \sigma_y = C_6 E \left( \frac{2f}{b} \right)^2. \quad (37)$$

Полные напряжения

$$\sigma_{x,n} = \sigma_{x,u} + \sigma_x; \quad \sigma_{y,n} = \sigma_{y,u} + \sigma_y.$$

Численные значения коэффициентов  $C_3—C_6$  см. в табл. 1.

1. Значения коэффициентов  $C_1—C_6$  в формулах (35)—(37) при  $\nu = 0,25$

$\frac{a}{b}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
1,0	1,82	1,33	1,645	1,645	0,615	0,615
1,1	1,53	1,11	1,416	1,587	0,518	0,600
1,2	1,34	0,96	1,242	1,544	0,448	0,592
1,3	1,21	0,84	1,107	1,510	0,392	0,584
1,4	1,11	0,76	1,000	1,484	0,351	0,581
1,5	1,05	0,70	0,913	1,462	0,315	0,574
1,6	1,00	0,65	0,843	1,444	0,288	0,571
1,7	0,95	0,60	0,784	1,429	0,263	0,568
1,8	0,93	0,57	0,735	1,417	0,246	0,567
1,9	0,90	0,54	0,693	1,407	0,230	0,566
2,0	0,88	0,52	0,658	1,398	0,217	0,566

На рис. 3—5 приведены данные для определения стрелы прогиба, напряжений в срединной поверхности и напряжений изгиба для квадратной пластинки по результатам уточненного решения [2]; на рис. 4—5 обозначено:  $A$  — угол пластинки;  $C$  — центр.

Прямоугольная пластинка шарнирно оперта по контуру и нагружена равномерно по всей поверхности; края пластинки свободно смещаются (см. рис. 2). Стрела прогиба и поперечная нагрузка связаны приближенным соотношением [2]

$$\frac{\pi^6}{256} \left(1 + \frac{1}{\lambda^4}\right) \zeta^3 + \frac{\pi^6}{192(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 \zeta = q^*, \quad (38)$$

где  $\lambda = \frac{a}{b}$  — отношение сторон.

Величины  $\zeta$  и  $q^*$  определяют по формулам (34).

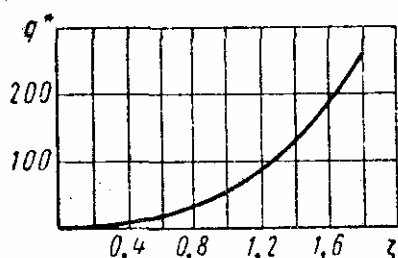


Рис. 3

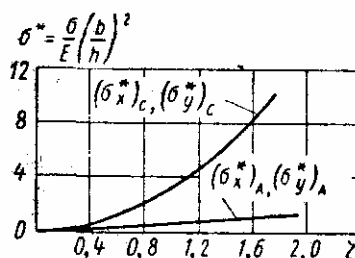


Рис. 4

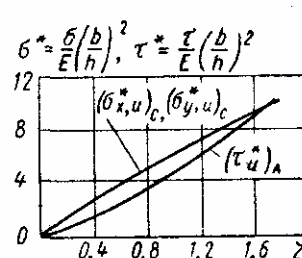


Рис. 5

Напряжения в срединной поверхности  $\sigma_y$  достигают наибольшего значения по абсолютной величине у кромок ( $x = 0$ ,  $x = a$ ) и по средней линии пластинки ( $x = \frac{a}{2}$ );

$$\sigma_y = E \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{b}\right)^2. \quad (39)$$

Максимальные изгибные напряжения

$$(\sigma_{y,u})_{\max} = \frac{\pi^2}{2(1-\nu^2)} E \frac{hf}{b^2} \left(1 + \frac{\nu}{\lambda^2}\right) \quad (40)$$

и имеют место в центре пластинки, при  $\nu = 0,3$  эти напряжения будут

$$\sigma_y^* = 1,23\zeta^2; \quad \sigma_{y,u}^* = 5,42 \left(1 + \frac{0,3}{\lambda^2}\right) \zeta; \quad (41)$$

здесь введены безразмерные величины

$$\sigma_y^* = \frac{\sigma_y}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^2; \quad \sigma_{y,u}^* = \frac{\sigma_{y,u}}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^2. \quad (42)$$

Полные напряжения определяют как сумму

$$\sigma_{y,n} = \sigma_y + \sigma_{y,u}. \quad (43)$$



Результаты уточненного решения для квадратной пластинки приведены на рис. 6 (для стрелы прогиба) и рис. 7 и 8 для напряжений в срединной поверхности и напряжений изгиба [2]. По-прежнему через  $A$  обозначен угол пластинки, через  $C$  — центр.

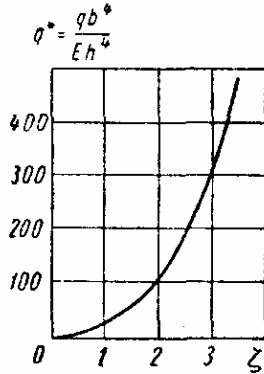


Рис. 6. Зависимость между безразмерным прогибом и безразмерной нагрузкой

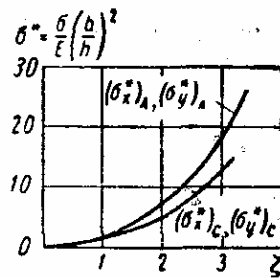


Рис. 7. Зависимость между безразмерным прогибом и напряжениями в срединной поверхности

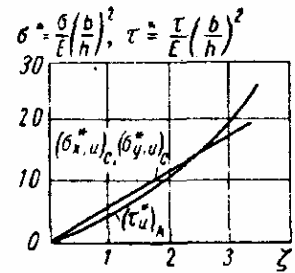


Рис. 8. Зависимость между безразмерным прогибом и напряжениями изгиба

Прямоугольная пластинка, защемленная по контуру, загружена равномерно распределенной нагрузкой; края пластинки неподвижны. Стрелу прогиба определяют из кубического уравнения [2]

$$\left[ 6,48 \left( \frac{1}{\lambda^4} + 1 \right) + 12,18 \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2} + 7,53 \left( 1 + \frac{0,6}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4} \right) \right] \xi^3 + 8,98 \left[ 3 \left( \frac{1}{\lambda^4} + 1 \right) + \frac{2}{\lambda^2} \right] \xi = q^*. \quad (44)$$

Напряжения в срединной поверхности равны сумме напряжений  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$ , найденных по формулам (48), и соответственно величин  $p_x^*$ ,  $p_y^*$ , которые вычисляют по формулам

$$p_x^* = \frac{3\pi^2}{32} \left( \frac{\nu}{\lambda^2} + 1 \right) \frac{1}{1 - \nu^2} \xi^2; \quad (45)$$

$$p_y^* = \frac{3\pi^2}{32} \left( \frac{1}{\lambda^2} + \nu \right) \frac{1}{1 - \nu^2} \xi^2. \quad (46)$$

Напряжения изгиба определяют по формулам теории жестких пластинок.

Результаты уточненного решения для квадратной пластинки показаны на рис. 9—11, где  $C$  — центр пластинки;  $B$  — середина стороны.

Прямоугольная пластинка, защемленная по контуру, загружена равномерно распределенной нагрузкой, края пластинки сво-

бно смещаются. Уравнение для определения стрелы прогиба при  $\nu = 0,3$  имеет вид

$$\left[ 6,48 \left( \frac{1}{\lambda^4} + 1 \right) + \frac{12,18}{(1 + \lambda^2)^2} \right] \zeta^3 + 8,98 \left[ 3 \left( \frac{1}{\lambda^4} + 1 \right) + \frac{2}{\lambda^2} \right] \zeta = q^*. \quad (47)$$

Максимальные напряжения в срединной поверхности будут в центре пластинки, эти напряжения определяют по формуле

$$\sigma_x^* = \sigma_y^* = \frac{\pi^2}{32\lambda^2} \left[ 5 + \frac{8}{\left( \frac{1}{\lambda^2} + 1 \right)^2} \right] \zeta^2. \quad (48)$$

В формулах (47) и (48) использованы обозначения к формулам (34) и (42).

Напряжения изгиба рассчитывают по формулам теории жестких пластинок.

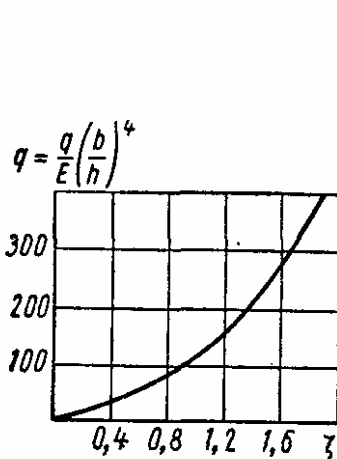


Рис. 9

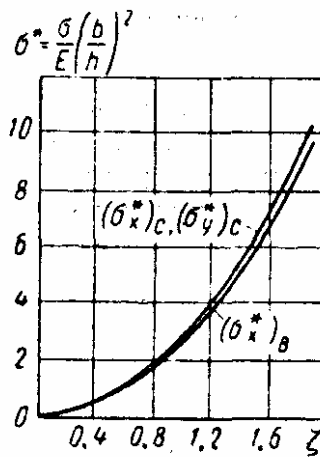


Рис. 10

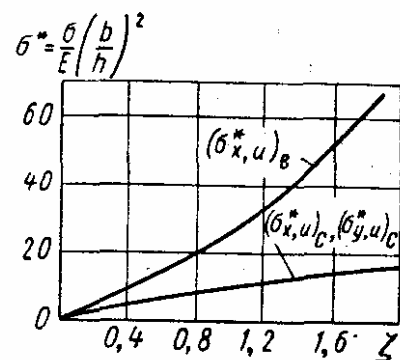


Рис. 11

Удлиненная пластинка нагружена равномерно распределенным поперечным давлением  $q$ ;  $a \gg b$  [2]. Будем пользоваться обозначениями к формулам (34) и (42). Параметр стрелы прогиба в случае шарнирного опирания длинных краев при отсутствии их смещения

$$\zeta = \frac{5}{32} q^* (1 - \nu^2) \psi_1; \quad (49)$$

если края защемлены, то

$$\zeta = \frac{1}{32} q^* (1 - \nu^2) \psi_2. \quad (50)$$

Напряжения в срединной поверхности  $\sigma_y$  (ось  $y$  параллельна короткой стороне пластинки)

$$\sigma_y^* = \frac{u^2}{3(1 - \nu^2)}. \quad (51)$$

Если края шарнирно оперты, то максимальные изгибные напряжения получают нижние волокна посередине пролета:

$$\sigma_{y,u}^* = \frac{3}{4} (1 - \nu^2) q^* \varphi_1 \quad (52)$$

При защемлении краев напряжения изгиба будут наибольшими у краев; для верхних волокон напряжения

$$\sigma_{y,u}^* = \frac{1}{2} (1 - \nu^2) q^* \chi; \quad (53)$$

для нижних волокон напряжения посередине пролета определяют по формуле

$$\sigma_{y,u}^* = \frac{1}{4} (1 - \nu^2) q^* \varphi_2. \quad (54)$$

Значения  $u$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\chi$  приведены в табл. 2 (для случаев не-смещающихся краев пластинки); в этой таблице через  $\Delta$  обозначена раз-ница между соседними значениями  $\lg [q^* (1 - \nu^2)]$ .

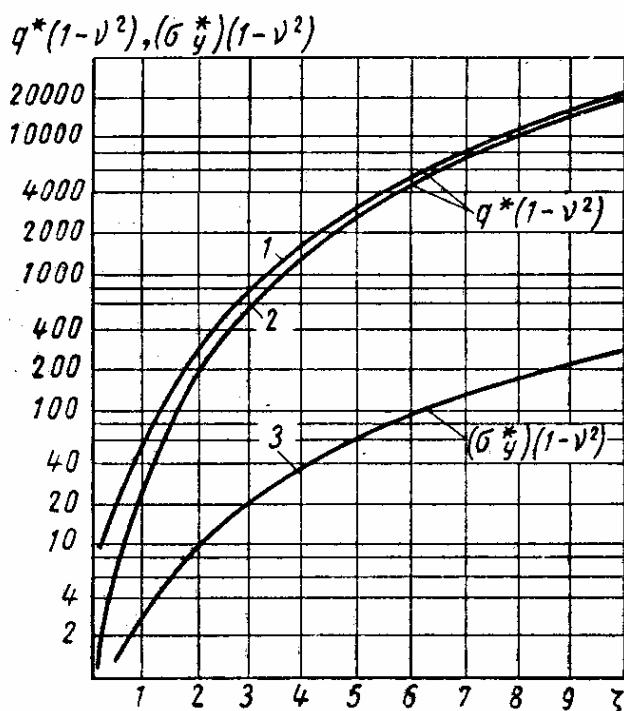


Рис. 12. Зависимость между нагрузкой, напряжениями в срединной поверхности и прогибом для удлиненных пластинок: 1 — с защемленными краями; 2 — с шарнирно опертыми краями; 3 — с защемленными и шарнирно опертыми краями

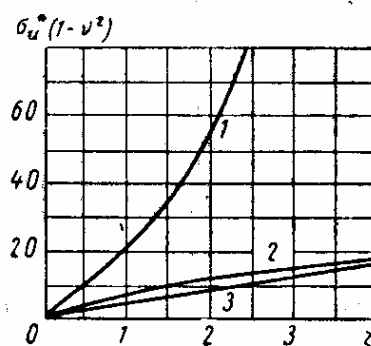


Рис. 13. Зависимость между напряжениями изгиба и прогибом для удлиненных пластинок:

1 — напряжения у защемленного края; 2 — напряжения посередине пролета для пластинок с защемленными краями; 3 — напряжения посередине пролета при шарнирно опертых краях

Зависимости между нагрузкой, напряжениями в срединной поверхности и прогибом показаны на рис. 12, а между напряжениями изгиба и прогибом — на рис. 13.

Квадратная мембрана, опертая шарнирно по контуру, нагружена по всей поверхности

2. Вспомогательные функции для расчета удлиненных пластинок

u	Нагрузка				Стрела прогиба		Напряжения		
	Шарнирные края $lg [q^* (1 - \nu^2)]$	$\Delta$	Защемленные края $lg [q^* (1 - \nu^2)]$	$\Delta$	Шарнирные края $\psi_1$	Защемленные края $\psi_2$	посередине пролета		у защемленного края $\chi$
							Шарнирные края $\psi_1$	Защемленные края $\psi_2$	
0	—		—		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,5	0,111	406	0,783	331	0,908	0,976	0,905	0,972	0,984
1,0	0,517	310	1,114	223	0,711	0,909	0,704	0,894	0,939
1,5	0,827	262	1,337	182	0,532	0,817	0,511	0,788	0,876
2,0	1,089	227	1,519	161	0,380	0,715	0,367	0,673	0,806
2,5	1,316	198	1,680	146	0,281	0,617	0,268	0,563	0,736
3,0	1,514	175	1,826	134	0,213	0,529	0,200	0,467	0,672
3,5	1,689	156	1,960	124	0,166	0,453	0,153	0,386	0,614
4,0	1,845	141	2,084	115	0,132	0,388	0,120	0,320	0,563
4,5	1,986	128	2,199	107	0,107	0,335	0,097	0,267	0,519
5,0	2,114	118	2,306	100	0,088	0,291	0,079	0,224	0,480
5,5	2,232	108	2,406	93	0,074	0,254	0,066	0,189	0,446
6,0	2,340	100	2,499	88	0,063	0,223	0,055	0,162	0,417
6,5	2,440	93	2,587	82	0,054	0,197	0,047	0,139	0,391
7,0	2,533	87	2,669	78	0,047	0,175	0,041	0,121	0,367
7,5	2,620	82	2,747	74	0,041	0,156	0,036	0,106	0,347
8,0	2,702	77	2,821	70	0,036	0,141	0,031	0,093	0,328
8,5	2,779	73	2,891	67	0,032	0,127	0,028	0,083	0,311
9,0	2,852	69	2,958	63	0,029	0,115	0,025	0,074	0,296
9,5	2,921	65	3,021	61	0,026	0,105	0,022	0,066	0,283
10	2,986	122	3,082	113	0,0235	0,0960	0,0200	0,0599	0,270
11	3,108	112	3,195	105	0,0195	0,0811	0,0166	0,0496	0,248
12	3,220	103	3,300	97	0,0164	0,0694	0,0139	0,0417	0,229
13	3,323	96	3,397	90	0,0140	0,0601	0,0118	0,355	0,213
14	3,419	90	3,487	85	0,0121	0,0525	0,0102	0,0306	0,199
15	3,509	83	3,572	80	0,0106	0,0462	0,00889	0,0267	0,187
16	3,592	78	3,652	75	0,00930	0,0410	0,00781	0,0235	0,176
17	3,670	74	3,727	71	0,00825	0,0366	0,00692	0,0208	0,166
18	3,744	70	3,798	67	0,00736	0,0329	0,00617	0,0185	0,158
19	3,814	67	3,865	63	0,00661	0,0297	0,00554	0,0166	0,150
20	3,881		3,928		0,00597	0,0270	0,00500	0,0150	0,142

равномерно распределенным давлением интенсивностью  $q$ ; края мембраны неподвижны. Применяем обозначения к формулам (34) и (42). Прогиб

$$\zeta = 0,285 \sqrt[3]{q^*}. \quad (55)$$

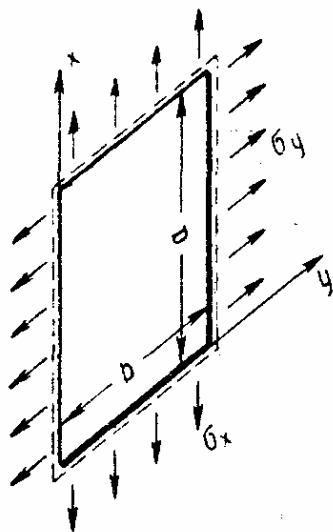
Напряжения в срединной поверхности для центра пластинки

$$\sigma_x^* = \sigma_y^* = 3,4 \zeta^2. \quad (56)$$

Прямоугольная мембрана, получившая предварительное натяжение в своей плоскости, нагружена равномерно распределенным давлением (рис. 14) [1]. Предварительные напряжения  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ .

Стрелу прогиба определяют по формуле

$$\xi = \frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\lambda^2} + 1} \cdot \frac{q^*}{\sigma^*}; \quad (57)$$



здесь

$$q^* = \frac{q}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^4; \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^2.$$

Удлиненная абсолютно гибкая пластинка нагружена равномерно распределенной нагрузкой; кромки неподвижны. Стрела прогиба

Рис. 14

$$\xi = 0,36 \sqrt[3]{q^* (1 - \nu^2)}. \quad (58)$$

Напряжение в срединной поверхности (в центре пластинки)

$$\sigma_y^* = \sqrt[3]{\frac{[q^* (1 - \nu^2)]^2}{24}}. \quad (59)$$

В формулах (58) и (59) использованы обозначения к формулам (34) и (42).

## КРУГЛЫЕ ГИБКИЕ ПЛАСТИНКИ И МЕМБРАНЫ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ

### Основные зависимости и граничные условия

Воспользуемся системой координат, принятой при рассмотрении изгиба жестких пластинок (см. рис. 18 гл. 17). Введем следующие обозначения:  $u$  — радиальное перемещение точек срединной поверхности;  $\epsilon_r$  — деформация удлинения в радиальном направлении;  $\epsilon_\varphi$  — деформация удлинения в направлении, перпендикулярном к радиусу. Деформации в срединной поверхности [2]

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2; \quad (60)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (61)$$

Деформация сдвига при осесимметричном изгибе равна нулю. Из зависимостей (60) и (61) вытекает уравнение совместности деформаций

$$\frac{d}{dr} (r \epsilon_\varphi - \epsilon_r) = -\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (62)$$

Кривизны  $\kappa_r$  и  $\kappa_\varphi$  срединной поверхности определяют по формулам (119)—(112) гл. 17; кривизна кручения  $\chi$  равна нулю.

Напряжения в срединной поверхности связаны с деформациями зависимостями

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi); \quad (63)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r). \quad (64)$$

Изгибающие моменты определяют выражениями (123)—(126) гл. 17. На рис. 15 показан элемент пластинки, ограниченный двумя радиаль-

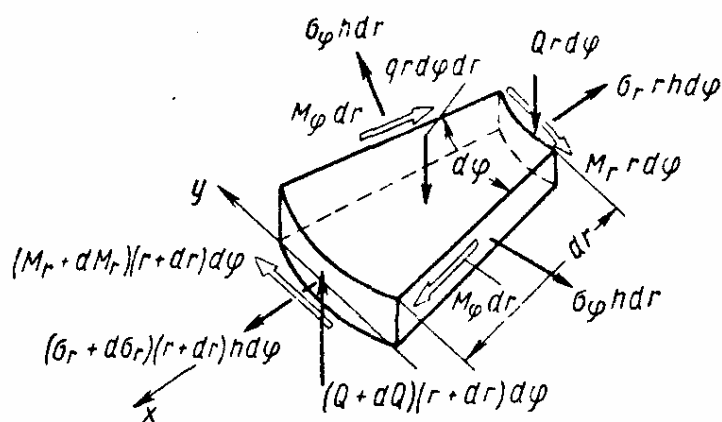


Рис. 15. Усилия в элементе пластинки

ными и двумя дугowymi сечениями со всеми действующими усилиями;  $q$  — интенсивность поперечной нагрузки.

Уравнение равновесия в проекциях на ось  $x$  (ось проведена через середину внешней дуги и совпадает с направлением радиуса)

$$\frac{d}{dr} (r \sigma_r) - \sigma_\varphi = 0. \quad (65)$$

Уравнение моментов относительно оси  $y$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\varphi}{r} = -Q. \quad (66)$$

Уравнение равновесия в проекциях на ось  $z$  (рис. 16) имеет следующий окончательный вид:

$$Q = \Psi - h \sigma_r \theta, \quad (67)$$

где  $\Psi$  — функция нагрузки:

$$\Psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (68)$$

Сопоставляя зависимости (66) и (67), получим

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\varphi}{r} = -\Psi + h\sigma_r\theta \quad (69)$$

Используя выражения (125) и (126) гл. 17 для изгибающих моментов, уравнение (69) приводим к виду

$$D \left( \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} \right) = -\Psi + h\sigma_r\theta \quad (70)$$

или

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \Psi + \frac{h}{r} \sigma_r \frac{dw}{dr} \quad (71)$$

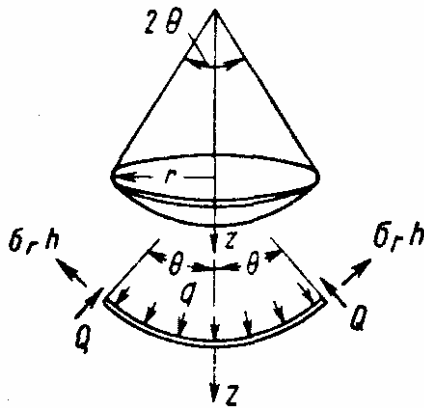


Рис. 16

Введем функцию напряжений  $\Phi$  по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr}; \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{dr^2}; \quad (72)$$

уравнение равновесия (65) при этом будет удовлетворено. Тогда выражение (71) будет иметь вид

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) = \Psi + \frac{h}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \cdot \frac{dw}{dr}; \quad (73)$$

оператор  $\nabla^2$  отвечает формуле

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right)$$

Выражения для деформаций, определяемые из зависимостей (63) и (64), подставим в уравнение (62), пользуясь функцией напряжений, уравнению совместности деформаций придадим следующий вид:

$$\frac{d^3\Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{E}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (74)$$

или

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = -\frac{E}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (75)$$

Следовательно, основная система дифференциальных уравнений для круглой гибкой пластины будет

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) = \Psi + \frac{h}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \cdot \frac{dw}{dr}; \quad (76)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = - \frac{E}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (77)$$

Для жесткой пластины малого прогиба уравнение (77) отпадает, а уравнение (76) переходит в уравнение (130) гл. 17.

Для абсолютно гибкой пластины в уравнении (76) можно пренебречь членом, содержащим  $D$ , тогда

$$\frac{h}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} = - \Psi; \quad (78)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = - \frac{E}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (79)$$

Рассмотрим граничные условия. При шарнирном опирании по контуру пластины радиуса  $b$

$$(w)_{r=b} = 0; \quad (80)$$

$$\left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = 0. \quad (81)$$

Если пластинка закреплена по контуру, то должно быть

$$(w)_{r=b} = 0; \quad (82)$$

$$\left( \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = 0. \quad (83)$$

Для пластины, не имеющей центрального отверстия, можно добавить условие отсутствия поворота нормали в центре пластины

$$(\theta)_{r=0} = - \left( \frac{dw}{dr} \right)_{r=0} = 0. \quad (84)$$

В случае, если смещение точек контура в радиальном направлении невозможно, должно выполняться условие

$$(u)_{r=b} = 0. \quad (85)$$

Используя зависимости (61), (63), (64) и (72), получим

$$\frac{u}{r} = E \left( \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \right), \quad (86)$$



а условие (85) можно записать в виде

$$\left( \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=b} = 0. \quad (87)$$

Условием, выражающим возможность свободного радиального смещения контура, будет

$$(\sigma_r)_{r=b} = \frac{1}{r} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=b} = 0 \quad (88)$$

Отметим еще одно условие для функции  $\Phi$  — условие ограниченности производной  $\frac{d\Phi}{dr}$  для всей площади пластинки, в частности, при  $r=0$ . Величина  $\sigma_r$  также является ограниченной, тогда из выражений (72) вытекает условие

$$\left( \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=0} = 0. \quad (89)$$

### Расчет

Круглая пластинка нагружена равномерно по всей площади [2]. Обозначим через  $q$  интенсивность поперечной нагрузки. Уравнение для определения стрелы прогиба (в центре) имеет вид

$$C_1 \xi^3 + C_2 \xi = q^*, \quad (90)$$

где

$$q^* = \frac{q}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^4; \quad (91)$$

здесь  $b$  — радиус пластинки;  $h$  — толщина.

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  приведены в табл. 3.

3. Коэффициенты  $C_1 - C_6$  в формулах (90), (92) и (93) при  $\nu = 0,3$

Граничные условия		$C_1$	$C_2$	В центре		У контура			
				$C_3 = C_4$	$C_5 = C_6$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
Шарнирное опирание по контуру	Контур свободно скользит	0,376	1,436	1,778	0,295	0	0,755	0	-0,427
	Контур не смещается	2,660	1,436	1,778	0,905	0	0,755	0,610	0,183
Защемление по контуру	Контур свободно скользит	0,857	5,862	2,860	0,500	4,400	1,320	0	-0,333
	Контур не смещается	2,762	5,862	2,860	0,976	4,400	1,320	0,476	0,145

Напряжения изгиба  $\sigma_{r,u}$ ,  $\sigma_{\varphi,u}$  и напряжения в срединной поверхности  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  находят по формулам

$$\sigma_{r,u} = C_3 E \frac{hf}{b^2}; \quad \sigma_{\varphi,u} = C_4 E \frac{hf}{b^2}; \quad (92)$$

$$\sigma_r = C_5 E \left( \frac{f}{b} \right)^2; \quad \sigma_\varphi = C_6 E \left( \frac{f}{b} \right)^2. \quad (93)$$

Полные напряжения

$$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,u} + \sigma_r; \quad \sigma_{\varphi,n} = \sigma_{\varphi,u} + \sigma_\varphi. \quad (94)$$

Значения коэффициентов  $C_3 - C_6$  приведены в табл. 3; знак минус относится к сжимающим напряжениям.

Круглая пластинка под действием поперечной силы  $P$ , сосредоточенной в центре [2]. Стрелу прогиба определяют из кубического уравнения

$$A\zeta^3 + B\zeta = P^*, \quad (95)$$

где

$$P^* = \frac{Pb^2}{\pi E h^4}.$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  приведены в табл. 4.

4. Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  в формулах (95)–(97),  $\nu = 0,3$

Условия закрепления контурных точек		A	B	В центре $\gamma=\delta$	У контура			
					$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Шарнирное закрепление	Точки контура свободно смещаются	0,157	0,577	0,407	0	0,606	0	—0,341
	Точки контура не смещаются	0,825	0,577	0,895	0	0,606	0,488	0,147
Защемление	Точки контура свободно смещаются	0,294	1,47	0,875	2,198	0,659	0	—0,250
	Точки контура не смещаются	0,651	1,47	1,232	2,198	0,659	0,357	0,107

Напряжения изгиба и напряжения в срединной поверхности находят по формулам

$$\sigma_{r,u}^* = \alpha \zeta, \quad \sigma_{\varphi,u}^* = \beta \zeta; \quad (96)$$

$$\sigma_r^* = \gamma \zeta^2; \quad \sigma_\varphi^* = \delta \zeta^2; \quad (97)$$

здесь введены безразмерные параметры

$$\sigma_{r,u}^* = \frac{\sigma_{r,u}}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^2; \quad \sigma_{\varphi,u}^* = \frac{\sigma_{\varphi,u}}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^2;$$

$$\sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^2; \quad \sigma_{\varphi}^* = \frac{\sigma_{\varphi}}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^2.$$

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  берут по табл. 4.

Круглая мембрана радиуса  $b$  нагружена равномерно распределенным поперечным давлением; контур мембраны не смещается. Величина прогиба в центре

$$f = 0,662h \sqrt[3]{\frac{q}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^4}. \quad (98)$$

Максимальное напряжение в центре

$$\sigma_{\max} = 0,423 \sqrt[3]{E \left( \frac{qb}{h} \right)^2}. \quad (99)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бубнов И. Г. Труды по теории пластин. М., Гостехиздат, 1953.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
3. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
4. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля. Т. 3., Л., Судпромгиз, 1962.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.

## Глава 19

# РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

## РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

### Основные положения

**Исходные гипотезы.** Теория изгиба пластинок за пределом упругости исходит из тех же геометрических представлений, что и теория упругих пластинок: а) срединная плоскость не удлиняется; ее точки получают лишь вертикальное смещение — прогиб  $w(x, y)$ ; б) прогиб  $w$  мал по сравнению с толщиной пластинки  $h$  (рис. 1); в) линейные элементы, перпендикулярные до деформации к срединной плоскости, после деформации переходят в линейные элементы, перпендикулярные к срединной поверхности.

Расчеты, основанные на этих предположениях, приводят к удовлетворительным результатам для пластинок средней толщины.

Согласно приведенным гипотезам составляющие смещения будут

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $z$  отсчитывают от срединной поверхности (см. рис. 1).

Компоненты деформации

$$\varepsilon_x = z\kappa_x; \quad \varepsilon_y = z\kappa_y; \quad \gamma_{xy} = 2z\kappa_{xy}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad (2)$$

здесь введены кривизны срединной поверхности

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

**Моменты и поперечные силы.** В поперечных сечениях пластинки напряжения приводятся к изгибающим моментам  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящему моменту  $H$  и поперечным силам  $Q_x$ ,  $Q_y$  (см. гл. 17).

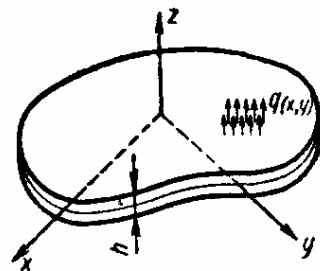


Рис. 1. Изгиб пластинки

Названные величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \quad (4)$$

где  $q(x, y)$  — распределенная нагрузка

Из равенств (4) вытекает уравнение

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \quad (5)$$

Работа деформации пластины (на единицу площади)

$$A = M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2H \kappa_{xy}. \quad (6)$$

Для всей пластины

$$\bar{A} = \iint A \, dx \, dy.$$

Контурные условия при упруго-пластическом изгибе имеют такой же вид, как и для упругой пластинки (см. гл. 17).

Приведенные выше уравнения необходимо дополнить соотношениями между моментами и кривизнами (или их скоростями); эти соотношения определяются зависимостями между напряжениями и деформациями.

### Идеально-пластические пластины. Предельная нагрузка

Если материал пластинки следует схеме жестко-пластического тела, то пластинка в момент достижения предельной нагрузки переходит в состояние пластического течения. При этом некоторые части пластинки остаются жесткими. В пластических же зонах выполняется условие пластичности Мизеса или Треска—Сен-Венана (см. гл. 3).

Вместо перемещений  $u, v, w$  следует теперь рассматривать скорости  $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ .

**Предельное состояние при условии текучести Мизеса.** Из уравнений теории пластического течения (см. гл. 3) и формул (2) следует, что по величине напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  по толщине пластинки постоянны и меняют лишь знак при переходе через нейтральную плоскость. Поэтому (для  $z > 0$ )

$$M_x = \frac{h^2}{4} \sigma_x; \quad M_y = \frac{h^2}{4} \sigma_y; \quad H = \frac{h^2}{4} \tau_{xy}; \quad (7)$$

Внося эти значения в условие текучести Мизеса, получаем предельное условие для пластинки

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3H^2 = M_T^2, \quad (8)$$

где  $M_T = \frac{\sigma_T h^2}{4}$  — предельный изгибающий момент на единицу длины сечения пластинки.

Из уравнений теории пластического течения (см. гл. 3) следуют зависимости для скоростей кривизн:

$$\dot{\kappa}_x = \lambda (2M_x - M_y); \quad \dot{\kappa}_y = \lambda (2M_y - M_x); \quad \dot{\kappa}_{xy} = 3\lambda H; \quad (9)$$

здесь  $\lambda$  — произвольный множитель (пропорциональный мощности пластической деформации).

Предельные нагрузки для некоторых случаев закрепления и нагружения пластинок приведены в табл. 1.

**Предельное состояние при условии текучести Треска—Сен-Венана.** Это условие имеет вид

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) = \sigma_T,$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — главные напряжения. Внося сюда соотношения (7), приходим к соответствующему предельному условию для пластинки

$$\max(|M_1|, |M_2|, |M_1 - M_2|) = M_T. \quad (10)$$

Зависимости для скоростей кривизны определяются законом ассоциированного пластического течения (см. гл. 3).

**Предельную нагрузку** находят из приведенных выше уравнений равновесия, предельного условия (8) или (10) и соответствующих зависимостей для скоростей кривизн. Решение этой системы уравнений связано со значительными трудностями (исключая случай осесимметричных пластинок). Весьма эффективно применение энергетических методов (см. гл. 3).

**Энергетические методы разыскания предельной нагрузки** следуют из общих экстремальных теорем (см. гл. 3). Пусть

$$q = tq_0; \quad q_0 = q_0(x, y),$$

где  $q_0(x, y)$  — фиксированное распределение давления;  $t$  — параметр нагрузки.

**Верхняя граница предельной нагрузки.** В соответствии с теоремой о верхней границе предельной нагрузки (см. гл. 3) всякое кинематически возможное поле скорости  $\dot{w}$  приводит к верхней границе предельной нагрузки — кинематически возможному коэффициенту предельной нагрузки

$$m_K \geq m_*, \quad (11)$$

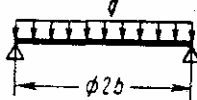
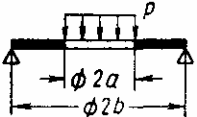
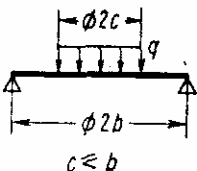
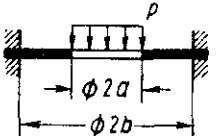
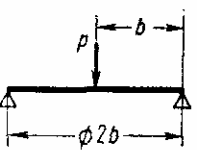
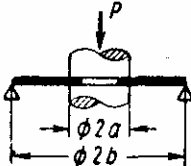
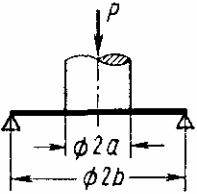
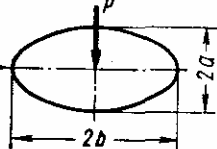
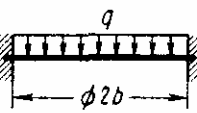
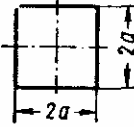
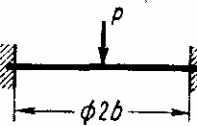
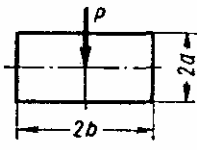
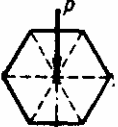
причем

$$m_K = \frac{2}{\sqrt{3}} M_T \frac{\iint (\dot{\kappa}_x^2 - \dot{\kappa}_x \dot{\kappa}_y + \dot{\kappa}_y^2 + \dot{\kappa}_{xy}^2) dx dy}{\iint q_0(x, y) \dot{w} dx dy}. \quad (12)$$

Интегрирование проводят по всей площади пластины. В пластине могут быть при этом жесткие зоны и могут возникать линии пластических шарниров.

**Нижняя граница предельной нагрузки.** Всякое распределение во всей пластине моментов  $M_x, M_y, H$ , удовлетворяющее

## 1. Формулы для определения предельных нагрузок для пластинок

Схема	Формула	Схема	Формула
<i>Круглые опертые пластинки</i>		<i>Круглые кольцевые пластинки</i>	
	$q = \frac{6M_T}{b^2}$		$P = 2\pi M_T$
	$q = \frac{6bM_T}{c^2(3b-2c)}$		$P = 2\pi M_T \times \frac{1 + \ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}}$
	$P = 2\pi M_T$		$P = \frac{2\pi M_T}{1 - \frac{a}{b}}$
<i>Круглые заделанные пластинки</i>		<i>Пластины различной формы, опертые по контуру</i>	
	$P = \frac{2\pi M_T}{1 - \frac{a}{b}}$		$P = \pi M_T \frac{a^2 + b^2}{ab}$
	$q = 11,3 \frac{M_T}{b^2}$		$0,86 < \frac{qa^2}{6M_T} < 1,06$
	$P = 4\pi M_T$		$P = 4M_T \frac{a^2 + b^2}{ab}$
			$P = 2M_T n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$
Примечание. Для полигональной пластинки n — число сторон.			

дифференциальному уравнению равновесия (5) при некотором значении  $m = m_s$ , силовым граничным условиям и неравенству:

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3H^2 \leq M_T^2$$

приводит к нижней границе

$$m_s \leq m_*. \quad (13)$$

**Осесимметричные пластины** (рис. 2). В случае изгиба осесимметричных пластин основные соотношения упрощаются. Предельное условие (8) принимает вид

$$M_r^2 - M_r M_\varphi + M_\varphi^2 = M_T^2, \quad (14)$$

где  $r, \varphi$  — полярные координаты; это — уравнение эллипса (рис. 3).

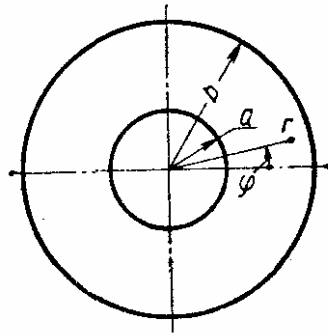


Рис. 2

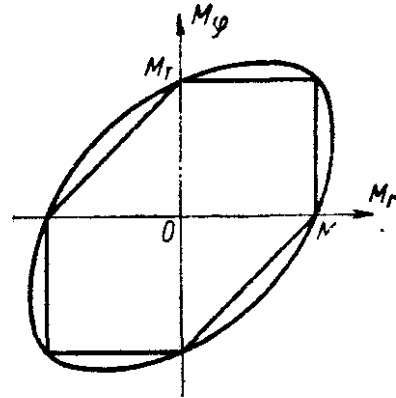


Рис. 3. Эллипс Мизеса и шестиугольник Треска—Сен-Венана

Дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = Q_r, \quad (15)$$

где поперечное усилие

$$Q_r = -\frac{1}{r} \int_a^r q r dr. \quad (16)$$

Соотношения (9) можно переписать в форме

$$\dot{\kappa}_r = \lambda (2M_r - M_\varphi); \quad \dot{\kappa}_\varphi = \lambda (2M_\varphi - M_r), \quad (17)$$

причем

$$\dot{\kappa}_r = -\frac{d^2 \dot{w}}{dr^2}; \quad \dot{\kappa}_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{d \dot{w}}{dr}. \quad (18)$$

Приведенные соотношения вместе с соответствующими граничными условиями позволяют определить изгибающие моменты, предельную нагрузку и картину течения в предельном состоянии.



Верхняя граница предельной нагрузки теперь определяется формулой

$$m_k = \frac{2}{\sqrt{3}} M_T \frac{\int_a^b [\dot{\kappa}_r^2 - \dot{\kappa}_r \dot{\kappa}_\varphi + \dot{\kappa}_\varphi^2]^{\frac{1}{2}} r dr}{\int_a^b q_0(r) r dr}. \quad (19)$$

При определении нижней границы необходимо исходить из уравнения равновесия (15), предельного условия (14) в форме неравенства и силовых граничных условий.

При условии текучести Треска — Сен-Венана решение значительно упрощается. Предельное условие имеет вид

$$\max(|M_r|, |M_\varphi|, |M_r - M_\varphi|) = M_T \quad (20)$$

и изображается на плоскости  $M_r, M_\varphi$  шестиугольником, вписанным в эллипс Мизеса (см. рис. 3). Скорости кривизн  $\dot{\kappa}_r, \dot{\kappa}_\varphi$  определяются ассоциированным законом течения [9].

### Упруго-пластический изгиб пластинок

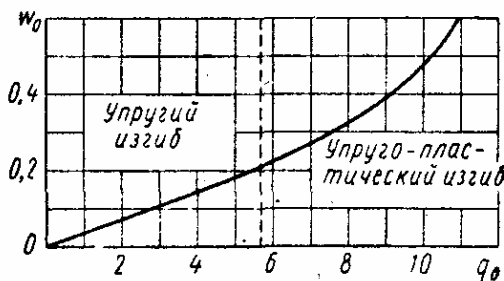
**Общие замечания.** Материал пластинки следует идеальной упруго-пластической схеме (см. гл. 3, рис. 4, а). При достаточно большой нагрузке пластинка испытывает упруго-пластический изгиб. При этом в пластинке будут сечения, деформируемые упруго и упруго-пластически. В областях пластинки, деформируемых упруго, прогиб описывается дифференциальным уравнением

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D}, \quad (21)$$

где  $\Delta \Delta$  — бигармонический оператор;  $D$  — жесткость пластины.

В упруго-пластических областях пластинки прогиб  $w$  определяется сложным нелинейным дифференциальным уравнением четвертого порядка. Интегрирование

Рис. 4. Зависимость прогиба от нагрузки при упруго-пластическом изгибе опертой круглой пластинки под действием равномерного давления



последнего может быть проведено трудоемкими численными методами или методом последовательных приближений [4]. Несколько более удобен вариационный метод.

**Осесимметричные пластинки.** Для осесимметричных пластинок задача упрощается, но требует все же значительных вычислений. На рис. 4 приведены результаты решения задачи упруго-пластического изгиба круглой пластинки, опертой по контуру и загруженной равномерным давлением  $q$ ; решение получено на основе теории упруго-пластических деформаций [8]. По оси ординат отложен безразмерный про-

гиб в центре  $w_0 = \frac{Gh\sqrt{3}}{2\sigma_T b^2} w$ , где  $G$  — модуль сдвига; по оси абсцисс

отложена безразмерная нагрузка  $q_0 = \frac{\sqrt{3}b^2}{M_T} q$ . При  $q_0 \leq 5,7$  пластинка деформируется упруго; при  $q_0 > 5,7$  прогиб нарастает быстрее чем нагрузка.

### Изгиб пластинок из упрочняющегося материала

**Основные соотношения.** Расчет упрочняющихся пластин по теории пластического течения требует большой вычислительной работы. Поэтому, как правило, используют уравнения теории упруго-пластических деформаций. Для упрощения задачи принимают условие несжимаемости. Уравнения изгиба пластин при общей зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций приведены в работе [4]. Эти зависимости существенно упрощаются для случая степенного закона

$$\gamma_i = B\tau_i^m \text{ или } \tau_i = \bar{B}\gamma_i^\mu, \quad (22)$$

где  $m, B$  — постоянные, причем  $\mu = \frac{1}{m}$ ;  $\bar{B} = B^{-\mu}$ .

На основании упругой аналогии (см. гл. 4) задачи о пластическом изгибе и ползучести пластин имеют аналогичные математические формулировки. Ползучесть изгибаемых пластин при степенном законе подробно рассмотрена на стр. (623), приводимые в ней решения можно переносить на случай пластической деформации пластин, если вместо скорости прогиба  $\dot{w}$  писать прогиб  $w$ , а постоянной  $B$  придавать значение, соответствующее закону (22).

Решения частных задач приведены в табл. 2.

При степенном законе зависимости между моментами и кривизнами имеют вид

$$M_x = D\kappa^{\mu-1} \left( \kappa_x + \frac{1}{2} \kappa_y \right); \quad M_y = D\kappa^{\mu-1} \left( \kappa_y + \frac{1}{2} \kappa_x \right);$$

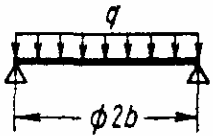
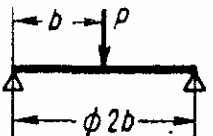

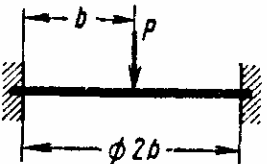
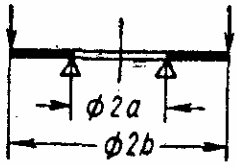
$$H = \frac{1}{2} D\kappa^{\mu-1} \kappa_{xy}, \quad (23)$$

где введены жесткость пластины  $D = \frac{\bar{B}h^{2+\mu}}{2+\mu}$  и параметр кривизны

$$\kappa = (\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_x \kappa_y + \kappa_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Внося зависимости (23) в уравнение (5), получим дифференциальное уравнение прогиба  $w$ ; это будет нелинейное уравнение четвертого порядка, переходящее при  $m = 1$  в классическое уравнение (21). Решение этого нелинейного уравнения наталкивается на большие трудности и реализуется численными способами или методом последовательных приближений (метод «упругих решений»).

## 2. Ползучесть круглых и кольцевых пластин

Схема	Скорость прогиба и напряжения
	<p>В центре</p> $\dot{w}_0 = \frac{11b^2}{12 \sqrt{13}} \left( \frac{5qb^2}{12 \sqrt{13} DS_1} \right)^m$ <p>График <math>S_1</math> на рис. 7. Напряжения вычисляются по формулам (31). Изгибающие моменты</p> $M_r = \frac{1}{6} qb^2 \left[ 1 + \frac{5}{16} K(m) \right] (1 - \rho^2);$ $M_\phi = \frac{1}{6} qb^2 \left[ 1 + \frac{5}{6} K(m) (1 - 3\rho^2) \right];$ <p>где <math>\rho = \frac{r}{b}</math>. График <math>K(m)</math> на рис. 8. Наибольшие напряжения в центре (<math>\rho = 0</math>)</p>
	<p>В центре</p> $\dot{w} = \frac{7}{12} b^2 \left( \frac{7P}{48\pi DS_3} \right)^m$ <p>График <math>S_3</math> на рис. 7</p>
	<p>В центре</p> $\dot{w}_0 = \frac{b^2}{4 \sqrt{13}} \left( \frac{qb^2}{12 \sqrt{13} DS_2} \right)^m$ <p>График <math>S_2</math> на рис. 7. Напряжения вычисляют по формулам (31), а изгибающие моменты по формулам (30), причем</p> $\dot{w} = \dot{w}_0 (1 - \rho^2)^2,$ <p>где</p> $\rho = \frac{r}{b}$
	<p>В центре</p> $\dot{w}_0 = \frac{b^2}{4} \left( \frac{P}{8\pi DS_4} \right)^m$ <p>График <math>S_4</math> на рис. 7.</p>
	<p>Наружного края <math>r = b</math></p> $\dot{w}_b = \frac{b^2}{12} \left( \frac{PK^{1+\mu}}{24\pi DS_5} \right)^m$ <p>где <math>P</math> — полное усилие. Графики <math>S_5</math> в зависимости от <math>\alpha</math> см. рис. 9; <math>\alpha = \frac{a}{b}</math>;</p> $K = \frac{36\alpha^2}{1 - \alpha^2} \ln^2 \alpha + 7(1 - \alpha^2)$

Вариационное уравнение прогиба пластинки, вытекающее из принципа минимума полной энергии (см. гл. 3), имеет вид

$$\iint \frac{D}{1+\mu} \kappa^{1+\mu} dx dy - A = \min. \quad (25)$$

Работу внешних сил для пластин, края которых оперты, заделаны или свободны, определяют по формуле

$$A = \iint q(x, y) w dx dy. \quad (26)$$

Первое слагаемое в выражении (25) — энергия деформации пластинки  $\bar{U}$ . Грубое приближенное решение легко получить из вариационного уравнения (25), полагая

$$w = cw_0,$$

где  $w_0$  — решение для соответствующей упругой задачи. Тогда из уравнения (25) следует, что

$$c = \left[ \frac{A(w_0)}{(1+\mu)\bar{U}(w_0)} \right]^m.$$

Более точные результаты можно получить, применяя модифицированный метод Ритца (см. гл. 3).

**Использование критерия Треска—Сен-Венана.** Определение прогибов осесимметричных пластин значительно упрощается при использовании критерия Треска—Сен-Венана и ассоциированного закона пластического течения (см. гл. 3). При этом возможен численный расчет прогибов с непосредственным использованием машинной диаграммы растяжения [3].

Целесообразно применение метода переменных параметров упругости, так как в данном случае можно построить решение упругой задачи с переменными значениями модуля  $E$  по толщине и радиусу пластинки. Сначала рассматривают решение при  $E = \text{const}$ , затем определяют секущий модуль (по найденному решению и закону деформации) и снова решают упругую задачу, но с вычисленным переменным модулем  $E$  и т. д. (см. работу [1]).

## РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК ПРИ ДЕФОРМАЦИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

### Уравнения ползучести изгибаемых пластинок

**Основные положения.** Исходные гипотезы геометрического характера в теории изгиба пластин в условиях ползучести — те же, что и в теории упруго-пластического изгиба (см. стр. 615). Если в основе расчета лежат уравнения теории старения (см. гл. 4), то расчеты ползучести пластин в принципе не отличаются от расчета упруго-пластического изгиба пластин при упрочнении; необходимо лишь, используя изохронные кривые ползучести (см. гл. 4), произвести ряд расчетов для различных моментов времени.

При использовании теории течения (см. гл. 4) вместо прогиба  $w$  следует вводить скорость прогиба  $\dot{w}$ . Зависимости (1)–(3) сохраняются, но нужно говорить о скоростях деформации  $\dot{\xi}_x, \dots$  и скоростях кривизн  $\dot{\kappa}_x, \dot{\kappa}_y, \dot{\kappa}_{xy}$ . Уравнения равновесия (4) и (5) переносятся без изменений. Мощность деформации пластины (на единицу площади)

$$\dot{A} = M_x \dot{\kappa}_x + M_y \dot{\kappa}_y + 2H \dot{\kappa}_{xy} \quad (27)$$

**Степенной закон ползучести.** В дальнейшем принимается степенной закон ползучести (22) и уравнения теории течения. Заметим, что при расчете установившейся ползучести выбор теории ползучести не имеет значения. Соотношения между моментами и скоростями кривизн имеют вид формул (23) и (24); необходимо лишь в этих формулах от кривизн перейти к их скоростям.

**Вариационное уравнение скорости прогиба пластины,** вытекающее из принципа минимума полной мощности (см. гл. 4), имеет вид

$$\iint \frac{D}{1+\mu} \dot{\kappa}^{1+\mu} dx dy - \iint q(x, y) \dot{w} dx dy = \min, \quad (28)$$

где

$$D = \frac{\bar{B} h^{2+\mu}}{2+\mu}.$$

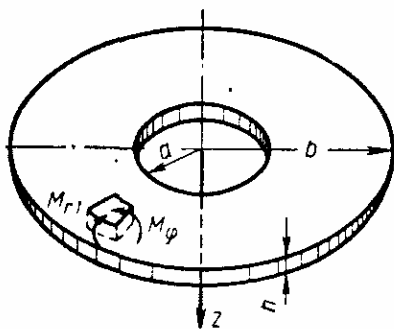
Это уравнение аналогично уравнению (25).

### Ползучесть осесимметричных пластинок

**Основные формулы.** В случае осесимметричного изгиба круглых пластинок (рис. 5) скорость прогиба  $\dot{w}(r)$ , а параметр скорости кривизны

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\left(\frac{d^2 \dot{w}}{dr^2}\right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\dot{w}}{dr}\right)^2}. \quad (29)$$

В радиальном и круговом сечениях на единицу длины действуют изгибающие моменты



$$M_r = -D \dot{\kappa}^{\mu-1} \left( \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{2r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right);$$

$$M_\phi = -D \dot{\kappa}^{\mu-1} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr} \right).$$

Рис. 5. Осесимметричная пластинка

(30)

Компоненты напряжения вычисляют через изгибающие моменты по формулам

$$\sigma_r = \bar{D} M_r z^\mu, \quad \sigma_\phi = \bar{D} M_\phi z^\mu \quad (z \geq 0). \quad (31)$$

В область отрицательных значений  $z$  напряжения продолжают нечетно, а

$$\bar{D} = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \left(\frac{h}{2}\right)^{-2(1+\mu)}.$$

Изгибающие моменты удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{d}{dr} (rM_r) - M_\varphi \right] + qr = 0. \quad (32)$$

Перерезывающее усилие

$$Q_r = -\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} (rM_r) - M_\varphi \right]. \quad (33)$$

Дифференциальное уравнение скорости прогиба пластинки. Согласно формулам (31) и (32)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left\{ \frac{d}{dr} \left[ D\dot{\chi}^{\mu-1} r \left( \frac{d^2 \dot{\omega}}{dr^2} + \frac{1}{2r} \frac{d\dot{\omega}}{dr} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - D\dot{\chi}^{\mu-1} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 \dot{\omega}}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d\dot{\omega}}{dr} \right) \right] \right\} - qr = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} & \text{жестко заделанный край } \dot{\omega} = 0; \frac{d\dot{\omega}}{dr} = 0; \\ & \text{шарнирно опертый край } \dot{\omega} = 0; M_r = 0; \\ & \text{свободный край } M_r = 0; Q_r = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Для решения уравнения (34) могут быть использованы различные численные методы, в частности — метод численного решения В. В. Соколовского [8]. Можно упростить уравнение для скорости прогиба на основе критерия максимального касательного напряжения и ассоциированного закона течения. Применяется также [6] метод Галеркина; в данной задаче этот метод приводит к тем же результатам, что и метод Ритца.

Вариационное уравнение скорости прогиба имеет вид

$$\delta \int_a^b \frac{2\pi D}{1+\mu} \dot{\chi}^{1+\mu} r dr - \delta \dot{A} = 0, \quad (36)$$

где вариация мощности заданных внешних сил

$$\delta \dot{A} = 2\pi \int_a^b q(r) \dot{\omega} r dr + 2\pi [rQ_r \delta \dot{\omega}]_a^b - 2\pi \left[ rM_r \delta \frac{d\dot{\omega}}{dr} \right]_a^b. \quad (37)$$

Скобки  $[\dots]_a^b$  означают, что из значения при  $r = b$  необходимо вычесть значение при  $r = a$ . Для граничных условий (35) обе квадратные скобки в формуле (37) равны нулю.

Если пластина изгибается сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в центре, то

$$\delta \dot{A} = P \delta \dot{w}_0, \quad (38)$$

где  $\dot{w}_0$  — скорость прогиба в центре пластины.

Для решения уравнения (36) целесообразно применить метод Ритца, полагая

$$\dot{w} = c_1 \dot{w}_1 + c_2 \dot{w}_2 + \dots,$$

где  $\dot{w}_1, \dot{w}_2, \dots$  — подходящие функции, удовлетворяющие тем или иным (в зависимости от задачи) однородным геометрическим условиям (35);  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные. Если удерживать только один параметр  $c_1$ , задача будет иметь простое решение (см. стр. 623). Решение можно улучшить при помощи модифицированного метода Ритца (см. гл. 3). Дополнительные указания приведены в работе [5].

**Вариационное уравнение для изгибающих моментов** вытекает из принципа минимума дополнительного рассеяния (см. гл. 4) и имеет вид

$$\int_a^b (M_r^2 - M_r M_\varphi + M_\varphi^2) r dr = \min. \quad (39)$$

Изгибающие моменты, входящие в уравнение (39), должны удовлетворять дифференциальному уравнению равновесия (32) и силовым граничным условиям (например,  $M_r = 0$  для опертого края). Изгибающий момент  $M_\varphi$  определяют из уравнения

$$M_\varphi = \frac{d}{dr} (r M_r) - \int_r^b q r dr + b Q_r(b),$$

где  $Q_r(b)$  — перерезывающее усилие на контуре  $r = b$ . Для решения вариационного уравнения (39) можно применить метод Ритца: задавая  $M_r$  в функции некоторого числа произвольных параметров, находить последние из условия минимума (39). Для приближенного определения напряженного состояния пластины в условиях ползучести вариационное уравнение (39) более пригодно, чем вариационное уравнение (36) для скорости прогиба.

Приближенное решение уравнения (39) можно искать также по схеме с множителем  $K(m)$  (см. гл. 4)

$$M_r = M_r^0 + K(m) (M_r' - M_r^0); \quad M_\varphi = M_\varphi^0 + K(m) (M_\varphi' - M_\varphi^0), \quad (40)$$

где  $M_r', M_\varphi'$  — изгибающие моменты в соответствующей упругой задаче;  $M_r^0, M_\varphi^0$  — моменты для идеально ползучей пластины (т. е. при  $m \rightarrow \infty$ ).

Тогда скорость прогиба (при условии, что внешний край оперт или заделан)

$$\dot{w} = \frac{b^2}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^m \int_0^1 D^{-m} (M_r^2 - M_r M_\phi + M_\phi^2)^{\frac{m-1}{2}} (2M_\phi - M_r) \rho d\rho.$$

**О неустановившейся ползучести пластин.** При использовании теории течения неустановившаяся ползучесть пластин может быть изучена по общему методу (см. гл. 4). Если исходить из теории старения (см. гл. 4), расчет неустановившейся ползучести может быть построен также с помощью функции  $\tau(t)$  или

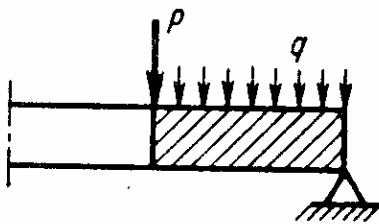


Рис. 6. Изгиб кольцевой пластинки

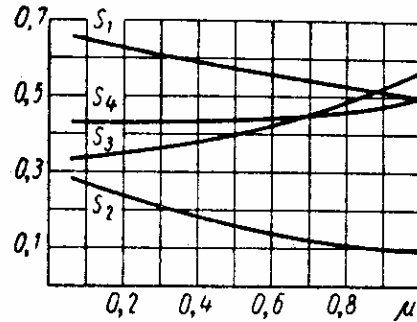


Рис. 7. Графики  $S_1 - S_4$

с помощью изохронных кривых ползучести для выбранных фиксированных моментов времени. Второй способ более трудоемок.

**Ползучесть узких кольцевых пластин.** Пусть относительно узкая кольцевая пластина  $\left( \frac{a}{b} > 0,5 \right)$  оперта только по одному внешнему или

внутреннему контуру и свободна по другому (рис. 6). Действуют распределенная нагрузка  $q$  и кон-

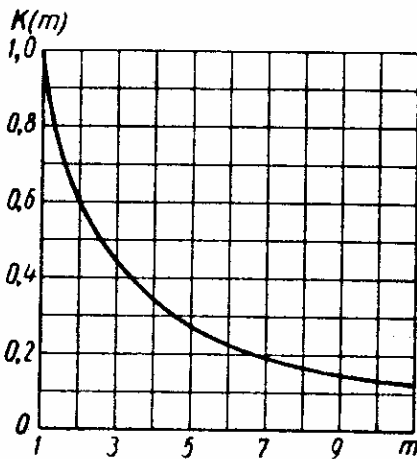


Рис. 8. График  $K(m)$

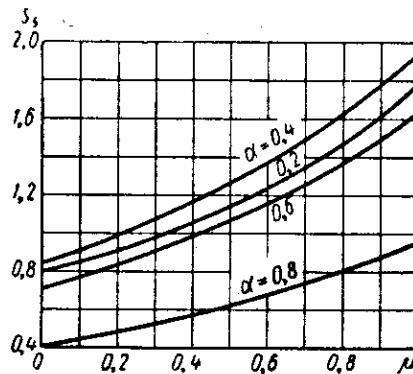


Рис. 9. Графики  $S_5$

турное усилие  $P$ , равномерно распределенное по краю. Напряжением  $\sigma_r$ , обращаемся в нуль при  $r = a$  и  $r = b$ , можно пренебрегать, и проводить расчет пластины как скручиваемого кольца. Тогда отлично от нуля только напряжение

$$\sigma_\phi = \bar{B}_1 \omega^\mu \frac{|z|^{\mu-1} z}{r^\mu}, \quad (41)$$



где  $\omega$  — угловая скорость поворота сечения. Величина  $\omega$ , определяемая по условию статической эквивалентности, будет

$$\omega = \left( \frac{M}{J} \right)^m, \quad (42)$$

где

$$J = \frac{2\bar{B}_1}{(2+\mu)(1-\mu)} (b^{1-\mu} - a^{1-\mu}) \left( \frac{h}{2} \right)^{2+\mu}.$$

Напомним, что

$$B = 3^{\frac{m+1}{2}} \bar{B}_1; \quad \bar{B}_1 = B_1^{-\mu}.$$

Изгибающий момент  $M$  определяют по формуле

$$M = Pa(b-a) + \frac{1}{6} q(b^3 + a^3 - 3a^2b). \quad (43)$$

Если пластинка оперта по наружному контуру, то скорость прогиба на внутреннем контуре

$$\dot{\omega} = (b-a)\omega \text{ при } r=a. \quad (44)$$

Максимальное напряжение будет при  $r=a$  и  $|z|=h$

$$\sigma_{\varphi, \max} = \bar{B}_1 \omega^\mu \left( \frac{h}{2a} \right)^\mu. \quad (45)$$

Распределение напряжений при  $m=1$  соответствует деформации упругого кольца. Неустановившуюся ползучесть кольца рассматривают согласно общему методу [5].

Изложенная схема расчета применима для расчета колец более сложного профиля, в частности для расчета ползучести различных фланцев, кольцевых крышек и т. д. [5, 6].

Скорость прогиба и напряжения для различных случаев нагружения и закрепления круглых и кольцевых пластинок приведены в табл. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б и р г е р И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961.
2. Г в о з д е в А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М., Гостройиздат, 1949.
3. Д у й д е н к о Б. Н. Расчет круглых пластин за пределами упругости. Изв. вузов СССР, «Машиностроение», № 2, 9, 10, 1964.
4. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
5. К а ч а н о в Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
6. М а л и н и н Н. Н. Расчеты на ползучесть. В кн. Пономарев С. Д. и др. «Расчеты на прочность в машиностроении». Т. II. М., Машгиз, 1958.
7. Р ж а н и ц ы н А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., Гостройиздат, 1954.
8. С о к о л о в с к и й В. В. Теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1950.
9. Х о д ж Ф. Пластический анализ конструкций.
10. V e n k a t r a m a n a H o d g e. Creep behaviour of circular plates. Journ. Appl. Mechan., T. 25, 1, 1958.
11. O d q v i s t u. Hult Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. Springer-Verlag, 1962.

# ● НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ОБОЛОЧКАХ

## Глава 20

### ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Ниже приведены основные зависимости теории тонких оболочек. Более подробно см. работы [3, 6, 7, 12, 15, 24, 27, 28 и 29].

#### ГЕОМЕТРИЯ ОБОЛОЧКИ

Оболочками в теории упругости называют тела, один из размеров которых — толщина — мал по сравнению с двумя другими. С геометрической стороны оболочка определяется ограничивающими ее *лицевыми* и, если она не замкнута, *боковыми* поверхностями. Обычно оболочку описывают, задавая ее *срединную* (равноудаленную от лицевых) *поверхность*, *граничный контур* последней и *толщину*. Будем считать, что боковая поверхность образуется отрезком (между лицевыми поверхностями) нормали к срединной поверхности, движущейся вдоль граничного контура. Тогда задание срединной поверхности, ее граничного контура и толщины оболочки полностью определяет геометрию оболочки.

Срединную поверхность отнесем к криволинейным координатам  $\alpha, \beta$ , задавая ее векторным равенством (рис. 1)

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta). \quad (1)$$

Введем единичные векторы, орты,  $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{n}$ , первые два из которых касательны к координатным линиям  $\alpha$  и  $\beta$ , а  $\vec{n}$  — вектор единичной нормали к срединной поверхности. Для ортогональных координат<sup>1</sup>

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}; \quad \vec{e}_\beta = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}; \quad \vec{n} = [\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta], \quad (2)$$

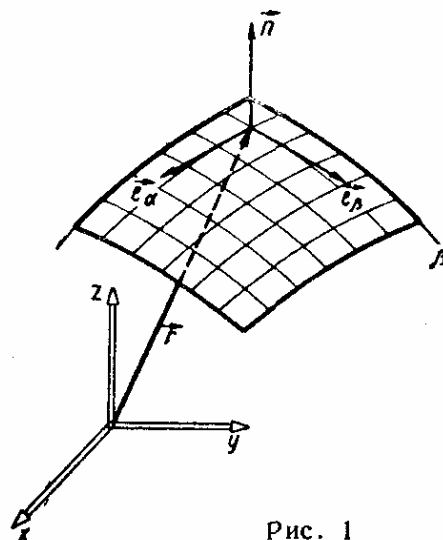


Рис. 1

<sup>1</sup> Соотношения для неортогональных координат приведены в работах [7, 29].

где

$$A = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|; \quad B = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right| \quad (3)$$

так называемые *параметры Ляме*, являющиеся масштабными множителями в формулах

$$ds_\alpha = A d\alpha; \quad ds_\beta = B d\beta, \quad (4)$$

связывающих приращения криволинейных координат с приращениями дуг соответствующих координатных линий.

Искривленность срединной поверхности характеризуется радиусами нормальной кривизны  $R_\alpha$ ,  $R_\beta$ ,  $R_{\alpha\beta}$ . Первая из них является радиусом плоской кривой, получающейся при пересечении срединной поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности и касательную к линии  $\alpha$ . Вторая, соответственно, является радиусом нормального сечения в направлении второй координатной линии. Введенные величины связаны с радиусом-вектором срединной поверхности и ортом нормали соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_\alpha} &= -\vec{n} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha A \partial \alpha}; & \frac{1}{R_{\alpha\beta}} &= \vec{n} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha B \partial \beta}; \\ \frac{1}{R_\beta} &= -\vec{n} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \beta B \partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Координатные линии, в которых  $\frac{1}{R_{\alpha\beta}} = 0$ , называют *линиями главных кривизн*.

С радиусами кривизны связана очень важная для понимания характера работы оболочки величина

$$K = \frac{1}{R_\alpha R_\beta} - \frac{1}{R_{\alpha\beta}^2}, \quad (6)$$

называемая *гауссовой кривизной* срединной поверхности. Примером оболочки, имеющей во всех своих точках положительную гауссову кривизну, может служить сферическая оболочка, нулевую — цилиндрическая и коническая, отрицательную — седлообразная. Встречаются оболочки и смешанной кривизны, например, торообразная (рис. 1 гл. 25).

Радиусы кривизны и параметры Ляме связаны между собой соотношениями Кодации—Гаусса

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{R_\beta} \right) + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B^2}{R_{\alpha\beta}} \right) &= \frac{1}{R_\beta} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{R_\beta} \right) + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A^2}{R_{\alpha\beta}} \right) &= \frac{1}{R_\alpha} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) &= \\ &= -AB \left( \frac{1}{R_\alpha R_\beta} - \frac{1}{R_{\alpha\beta}^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если граничный контур не совпадает с координатной линией и внешняя нормаль к нему составляет с координатной линией ( $\alpha$ ) некоторый угол  $\omega$ , то для направлений, характеризуемых (рис. 2) так называемой *тангенциальной нормалью*  $\vec{v}$  и касательной к контуру  $\vec{t}$ , кривизны (величины обратные радиусам кривизн) подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_v} &= \frac{\cos^2 \omega}{R_\alpha} - \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{R_{\alpha\beta}} + \frac{\sin^2 \omega}{R_\beta}; \\ \frac{1}{R_{vt}} &= \sin \omega \cos \omega \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) + \frac{\cos^2 \omega - \sin^2 \omega}{R_{\alpha\beta}}; \\ \frac{1}{R_t} &= \frac{\sin^2 \omega}{R_\alpha} + \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{R_{\alpha\beta}} + \frac{\cos^2 \omega}{R_\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Обозначим через  $h$  толщину оболочки и через  $R$  наименьший линейный размер срединной поверхности. Принято делить оболочки на *тонкие* и *толстые* в зависимости от величины отношения  $\frac{h}{R}$ . Обычно [15] оболочку относят к *тонким* при  $\frac{h}{R} < \frac{1}{20}$ . Эта оценка условная, ориентировочная. Теорию тонких оболочек применяют и при  $\frac{h}{R} \approx \frac{1}{5} \div \frac{1}{3}$ .

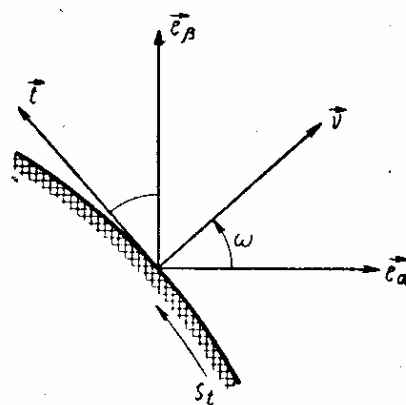


Рис. 2

## ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧКИ

В линейной теории рассматривают перемещения, малые по сравнению с толщиной. Будем определять положение точки в оболочке ее расстоянием от срединной поверхности по нормали ( $\zeta$ ) и координатами основания нормали ( $\alpha, \beta$ ). Введем *вектор смещения точек срединной поверхности*

$$\vec{V} = u\vec{e}_\alpha + v\vec{e}_\beta + w\vec{n} \quad (9)$$

и *вектор смещения произвольной точки оболочки*

$$\vec{V}^\zeta = U^\zeta\vec{e}_\alpha + V^\zeta\vec{e}_\beta + W^\zeta\vec{n}. \quad (10)$$

В теории тонких оболочек при рассмотрении деформации оболочки принимают *первую* (кинематическую) *гипотезу Кирхгофа*, согласно которой волокно, нормальное к срединной поверхности до деформации, остается нормальным к деформированной срединной поверхности, не меняя при этом своей длины. Сформулированная гипотеза дает следующую связь между смещениями точки оболочки и соответствующей ей точки срединной поверхности:

$$U^\zeta = u + \zeta\vartheta_\alpha; \quad V^\zeta = v + \zeta\vartheta_\beta; \quad W^\zeta = w; \quad (11)$$

здесь  $\vartheta_\alpha$  и  $\vartheta_\beta$  два из показанных на рис. 3 четырех углов, описывающих поворот (в процесс деформации) касательных к координатным линиям. При этом

$$\begin{aligned}\vartheta_\alpha &= -\frac{\partial w}{A \partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha} - \frac{v}{R_{\alpha\beta}}; & \vartheta_\beta &= -\frac{\partial w}{B \partial \beta} + \frac{v}{R_\beta} - \frac{u}{R_{\alpha\beta}}; \\ \omega_\alpha &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} u - \frac{w}{R_{\alpha\beta}}; \\ \omega_\beta &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} v - \frac{w}{R_{\alpha\beta}}.\end{aligned}\quad (12)$$

Величина

$$\Omega_n = \frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{2} = \frac{1}{2AB} \left\{ \frac{\partial B v}{\partial \alpha} - \frac{\partial A u}{\partial \beta} \right\} \quad (13)$$

является *средним поворотом окрестности* рассматриваемой точки срединной поверхности вокруг нормали к срединной поверхности.

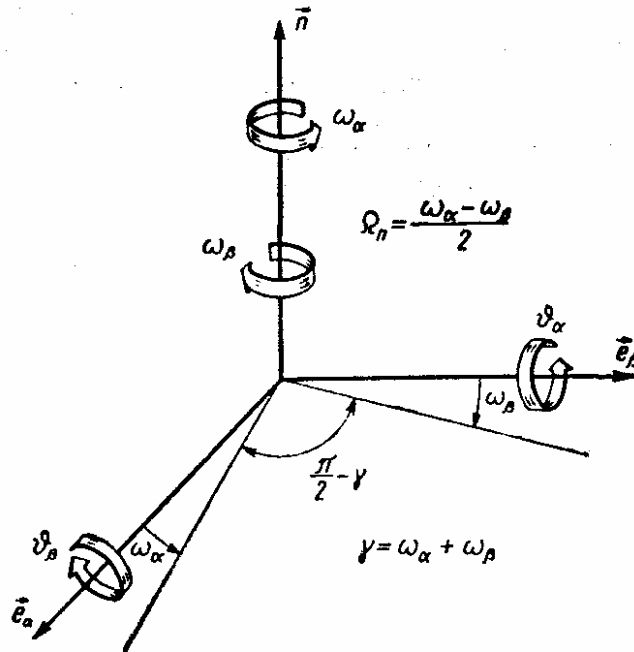


Рис. 3

Деформацию же срединной поверхности (ее растяжение и сжатие) описывают шесть компонентов деформации

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_\alpha &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha}; \\ \epsilon_\beta &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta};\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \omega_\alpha + \omega_\beta = \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) - \frac{2\omega}{R_{\alpha\beta}}; \\ \kappa_\alpha &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_\beta - \frac{\Omega_n}{R_{\alpha\beta}}; \\ \kappa_\beta &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta_\alpha + \frac{\Omega_n}{R_{\alpha\beta}}; \\ \tau &= \tau_\beta + \frac{\omega_\alpha}{R_\beta} + \frac{\varepsilon_\beta}{R_{\alpha\beta}} = \tau_\alpha + \frac{\omega_\beta}{R_\alpha} + \frac{\varepsilon_\alpha}{R_{\alpha\beta}}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_\alpha; \quad \tau_\beta = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta_\beta. \quad (15)$$

Величины  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$ ,  $\gamma$  обычно называют компонентами *тангенциальной* (иногда цепной, мембранной) деформации. При этом  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\beta$  являются относительными удлинениями волокон, совпадающих соответственно с координатными линиями  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $\gamma$  — характеризуют сдвиг срединной поверхности, т. е. уменьшение первоначально прямого угла между координатными линиями. Компоненты изгибной деформации  $\kappa_\alpha$ ,  $\kappa_\beta$  описывают изгиб срединной поверхности, а  $\tau$  — ее скручивание в процессе деформации.

Компоненты деформации не являются независимыми величинами, а подчиняются *уравнениям неразрывности* срединной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial B \kappa_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \kappa_\alpha - \\ &- \frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{\partial B \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A^2}{\partial \beta} \frac{\gamma}{2} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_\alpha \right) + \\ &+ \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial A \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial \alpha} \frac{\gamma}{2} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_\beta \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{R_\alpha} \cdot \frac{\gamma}{2} + \frac{A}{R_{\alpha\beta}} \varepsilon_\alpha \right) + \frac{\partial A}{\partial \beta} \left( \frac{1}{R_\beta} \cdot \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \varepsilon_\beta \right) = 0; \\ &\frac{\partial A \kappa_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial \alpha} \tau - \frac{\partial A}{\partial \beta} \kappa_\beta - \\ &- \frac{1}{R_\beta} \left( \frac{\partial A \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial \alpha} \frac{\gamma}{2} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_\beta \right) + \\ &+ \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial B \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A^2}{\partial \alpha} \frac{\gamma}{2} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_\alpha \right) + \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{R_\beta} \cdot \frac{\gamma}{2} + \frac{B}{R_{\alpha\beta}} \varepsilon_\beta \right) + \\
& + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{R_\alpha} \cdot \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \varepsilon_\alpha \right) = 0; \\
& \frac{\kappa_\beta}{R_\alpha} + \frac{2\tau}{R_{\alpha\beta}} + \frac{\kappa_\alpha}{R_\beta} + \frac{1}{AB} \times \\
& \times \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{A} \left( \frac{\partial B \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A^2}{\partial \beta} \frac{\gamma}{2} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_\alpha \right) + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{B} \left( \frac{\partial A \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial \alpha} \frac{\gamma}{2} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_\beta \right) \left. \right] - \\
& - \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \left[ \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) \frac{\gamma}{2} + \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta}{R_{\alpha\beta}} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

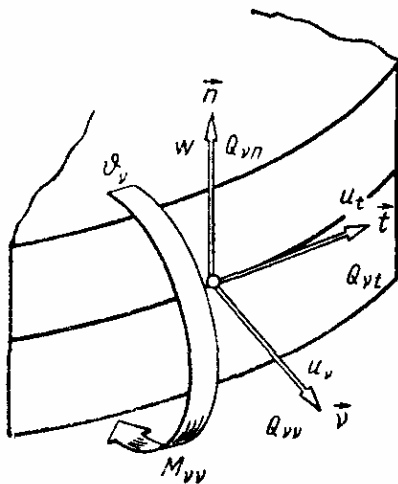


Рис. 4

выведенным из условия, что элемент срединной поверхности деформируется непрерывно. Уравнения (16) являются также условиями совместности, гарантирующими возможность по заданным компонентам деформации определить из системы уравнений (14)–(15) отвечающие им смещения.

Перемещения точек граничного элемента оболочки (рис. 4) определяют вектор смещений точек граничного контура

$$\vec{U} = u_v \vec{v} + u_t \vec{t} + w \vec{n} \tag{17}$$

и угол поворота граничного элемента вокруг касательной к граничному контуру  $\vartheta_v$ . При этом

$$u_v = u \cos \omega + v \sin \omega; \quad u_t = -u \sin \omega + v \cos \omega; \tag{18}$$

$$\vartheta_v = \vartheta_\alpha \cos \omega + \vartheta_\beta \sin \omega = -\frac{\partial w}{\partial s_v} + \frac{u_v}{R_v} - \frac{u_t}{R_{vt}}, \tag{19}$$

где  $\frac{\partial (\ )}{\partial s_v} = \frac{\cos \omega}{A} \cdot \frac{\partial (\ )}{\partial \alpha} + \frac{\sin \omega}{B} \cdot \frac{\partial (\ )}{\partial \beta}$  — производная по нормали к граничному контуру.

Деформацию граничного элемента описывают четыре компонента деформации

$$(\vec{\kappa}_t = -\kappa_{tt} \vec{v} + \kappa_{tv} \vec{t} - \kappa_{tn} \vec{n}); \tag{20}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_{tt} &= \cos^2 \omega \kappa_\beta - 2 \sin \omega \cos \omega \tau + \sin^2 \omega \kappa_\alpha + \\
 &+ \sin \omega \cos \omega \left[ \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) \frac{\gamma}{2} + \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta}{R_{\alpha\beta}} \right] - \frac{\varepsilon_{tv}}{R_{vt}}; \\
 \kappa_{tv} &= \sin \omega \cos \omega (\kappa_\beta - \kappa_\alpha) + (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \tau + \\
 &+ \left( \frac{\sin^2 \omega}{R_\alpha} - \frac{\cos^2 \omega}{R_\beta} \right) \frac{\gamma}{2} - \frac{\cos^2 \omega \varepsilon_\beta - \sin^2 \omega \varepsilon_\alpha}{R_{\alpha\beta}} - \frac{\varepsilon_{tv}}{R_t}; \\
 \kappa_{tn} &= - \frac{\cos \omega}{AB} \left\{ \frac{\partial B \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( A^2 \frac{\gamma}{2} \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_\alpha \right\} - \frac{\sin \omega}{AB} \left\{ \frac{\partial A \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( B^2 \frac{\gamma}{2} \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_\beta \right\} + \frac{\partial \varepsilon_{tv}}{\partial s_t}; \\
 \varepsilon_{tt} &= \cos^2 \omega \varepsilon_\beta - \sin \omega \cos \omega \gamma + \sin^2 \omega \varepsilon_\alpha,
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\varepsilon_{tv} = \sin \omega \cos \omega (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) + (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{\partial ( )}{\partial s_t} = - \frac{\sin \omega}{A} \cdot \frac{\partial ( )}{\partial \alpha} + \frac{\cos \omega}{B} \cdot \frac{\partial ( )}{\partial \beta} -$$

производная вдоль граничного контура;  $\varepsilon_{tt}$  — относительное удлинение граничного контура (см. рис. 4);  $\kappa_{tt}$  — искривление граничного элемента в своей плоскости;  $\kappa_{tn}$  — искривление из плоскости;  $\kappa_{tv}$  — скручивание граничного элемента.

### УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ. СТАТИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Используя малость толщины, в теории оболочек заменяют напряжения, действующие в нормальном сечении оболочки, статически эквивалентной системой усилий и моментов, приложенных в срединной поверхности. В результате такой замены рассматривают равновесие срединной поверхности, нагруженной: а) приведенной к срединной поверхности *поверхностной нагрузкой* (в расчете на единицу площади срединной поверхности)

$$\vec{q} = q_\alpha \vec{e}_\alpha + q_\beta \vec{e}_\beta + q_n \vec{n}; \quad (22)$$

б) *краевыми усилиями*

$$\vec{T}^{(v)} = T_{vv} \vec{v} + T_{vt} \vec{t} + T_{vn} \vec{n}; \quad (23)$$

в) *краевыми моментами*

$$\vec{M}^{(v)} = M_{vv} \vec{t} - M_{vt} \vec{v}. \quad (24)$$

В каждом нормальном сечении оболочки, проведенном в направлении координатной линии, указанная внешняя нагрузка



уравновешивается системой усилий и моментов (в расчете на единицу длины координатной линии)

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}^{(\alpha)} &= N_\alpha \vec{e}_\alpha + T_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta + Q_\alpha \vec{n}; & \vec{M}^{(\alpha)} &= M_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta - M_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha; \\ \vec{T}^{(\beta)} &= N_\beta \vec{e}_\beta + T_{\beta\alpha} \vec{e}_\alpha + Q_\beta \vec{n}; & \vec{M}^{(\beta)} &= M_{\beta\alpha} \vec{e}_\alpha - M_{\beta\alpha} \vec{e}_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Величины  $N_\alpha$ ,  $N_\beta$ ,  $T_{\alpha\alpha}$  — называют нормальными усилиями;  $T_{\alpha\beta}$ ,  $T_{\beta\alpha}$ ,  $T_{\alpha\beta}$  — сдвигающими, а  $Q_\alpha$ ,  $Q_\beta$ ,  $T_{\alpha\beta}$  — перерезывающими усилиями;  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$ ,  $M_{\alpha\beta}$  — изгибающими, а  $M_{\alpha\beta}$ ,  $M_{\beta\alpha}$ ,  $M_{\alpha\beta}$  — скручивающими моментами.

Положительные направления введенных статических величин показаны на рис. 5.

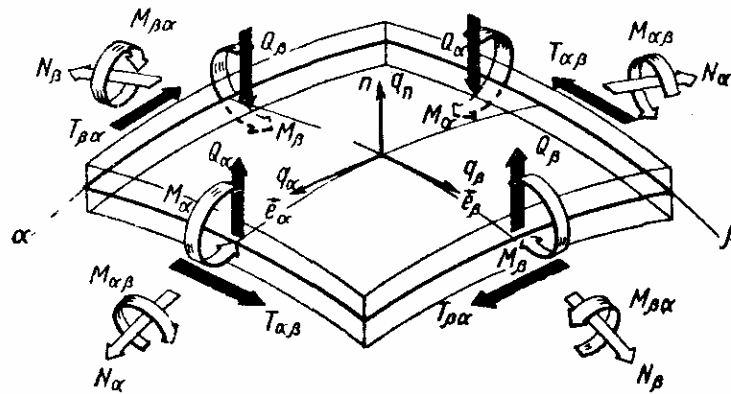


Рис. 5

Приравняв нулю главный вектор и главный момент всех действующих на элемент срединной поверхности воздействий, приходим к двум векторным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial B \vec{T}^{(\alpha)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial A \vec{T}^{(\beta)}}{\partial \beta} + AB \vec{q} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\partial B \vec{M}^{(\alpha)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial A \vec{M}^{(\beta)}}{\partial \beta} + [Q_\beta \vec{e}_\alpha - Q_\alpha \vec{e}_\beta + (T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}) \vec{n}] AB = 0, \quad (27)$$

равносильным шести скалярным. Последнее из них — шестое уравнение равновесия — имеет следующий вид:

$$T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} + \frac{M_\alpha - M_\beta}{R_{\alpha\beta}} = 0. \quad (28)$$

Как было показано в работе [15], полученное конечное (недифференциальное) соотношение является интегральной записью условия симметричности напряжений ( $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ ). Ему можно тождественно удовле-

творить, используя первую из симметричных статических величин В. В. Новожилова

$$\left. \begin{aligned} T &= T_{\alpha\beta} - \frac{1}{R_\beta} M_{\beta\alpha} + \frac{1}{R_{\alpha\beta}} M_\alpha = T_{\beta\alpha} - \frac{1}{R_\alpha} M_{\alpha\beta} + \frac{1}{R_{\alpha\beta}} M_\beta; \\ H &= \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{2} \approx M_{\alpha\beta} \approx M_{\beta\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Используя введенные симметричные величины и исключая из оставшихся пяти уравнений перерезывающие усилия  $Q_\alpha$  и  $Q_\beta$ , приходим к трем уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 T}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + \\ & + \frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{\partial B M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta \right) - \\ & - \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial A M_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{R_\alpha} H - \frac{A}{R_{\alpha\beta}} M_\beta \right) + \\ & + \frac{\partial A}{\partial \beta} \left( \frac{1}{R_\beta} H - \frac{1}{R_{\alpha\beta}} M_\alpha \right) + ABq_\alpha = 0; \\ & \frac{\partial A N_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 T}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + \\ & + \frac{1}{R_\beta} \left( \frac{\partial A M_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha \right) - \\ & - \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \left( \frac{\partial B M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{R_\beta} H - \frac{B}{R_{\alpha\beta}} M_\alpha \right) + \\ & + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{R_\alpha} H - \frac{1}{R_{\alpha\beta}} M_\beta \right) + ABq_\beta = 0; \\ & \frac{N_\alpha}{R_\alpha} - \frac{2T}{R_{\alpha\beta}} + \frac{N_\beta}{R_\beta} - \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{A} \left( \frac{\partial B M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \beta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{B} \left( \frac{\partial A M_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \left[ - \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) H + \frac{M_\alpha + M_\beta}{R_{\alpha\beta}} \right] = q_n. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно равенствам (23) и (24) на граничном контуре должны быть заданы пять статических величин  $T_{vv}$ ,  $T_{vt}$ ,  $T_{vn}$ ,  $M_{vv}$ ,  $M_{vt}$ . Однако порядок системы дифференциальных уравнений теории оболочек (восьмой) позволяет удовлетворить лишь четырем условиям на каждом краю. Чтобы преодолеть это противоречие, в теории тонких оболочек заменяют систему усилий-моментов (23) и (24) статически эквивалентной ей системой четырех приведенных величин (см. рис. 4)

$$\left. \begin{aligned} Q_{vv} &= T_{vv} - \frac{M_{vt}}{R_{vt}}; & Q_{vt} &= T_{vt} + \frac{M_{vt}}{R_t}; \\ Q_{vn} &= T_{vn} + \frac{dM_{vt}}{ds_t}; & M_{vv}; \\ \left( \frac{\partial}{\partial s_t} &= -\frac{\sin \omega}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\cos \omega}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Через усилия-моменты они выражаются по следующим формулам:

$$(\vec{Q}_v = Q_{vv}\vec{v} + Q_{vt}\vec{t} + Q_{vn}\vec{n}); \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{vv} &= \cos^2 \omega N_\alpha + 2 \sin \omega \cos \omega T + \sin^2 \omega N_\beta + \\ &+ \sin \omega \cos \omega \left[ \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) H - \frac{M_\alpha + M_\beta}{R_{\alpha\beta}} \right] - \frac{M_{vt}}{R_{vt}}; \\ Q_{vt} &= \sin \omega \cos \omega (N_\beta - N_\alpha) + (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) T + \\ &+ \left( \frac{\cos^2 \omega}{R_\beta} - \frac{\sin^2 \omega}{R_\alpha} \right) H + \frac{\sin^2 \omega M_\beta - \cos^2 \omega M_\alpha}{R_{\alpha\beta}} + \frac{M_{vt}}{R_t}; \\ Q_{vn} &= \frac{\cos \omega}{AB} \left( \frac{\partial B M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A^2 H}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta \right) + \\ &+ \frac{\sin \omega}{AB} \left( \frac{\partial A M_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B^2 H}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha \right) + \frac{\partial M_{vt}}{\partial s_t}; \\ M_{vv} &= \cos^2 \omega M_\alpha + 2 \sin \omega \cos \omega H + \sin^2 \omega M_\beta \\ [M_{vt} &= (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) H + \sin \omega \cos \omega (M_\beta - M_\alpha)]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Для случая, когда граничный контур совпадает с координатной линией  $\beta$  в соотношениях (18), (19), (21), (33) надо полагать  $\omega = 0$ , если же границей является линия  $\alpha$ , то  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .

По найденным усилиям и моментам значения напряжений определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \sigma_{\alpha}^{(p)} + \frac{\xi}{0,5h} \sigma_{\alpha}^{(u)}; & \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta}^{(p)} + \frac{\xi}{0,5h} \sigma_{\alpha\beta}^{(u)}; \\ \sigma_{\beta} &= \sigma_{\beta}^{(p)} + \frac{\xi}{0,5h} \sigma_{\beta}^{(u)},\end{aligned}\quad (34)$$

где равномерно распределенные по толщине напряжения

$$\sigma_{\alpha}^{(p)} = \frac{N_{\alpha}}{h}; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(p)} = \frac{T}{h}; \quad \sigma_{\beta}^{(p)} = \frac{N_{\beta}}{h} \quad (35)$$

обычно называют *тангенциальными* (цепными, мембранными), а линейно меняющиеся по толщине напряжения

$$\sigma_{\alpha}^{(u)} = \frac{6M_{\alpha}}{h^2}; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(u)} = \frac{6H}{h^2}; \quad \sigma_{\beta}^{(u)} = \frac{6M_{\beta}}{h^2} — \text{изгибными.} \quad (36)$$

При расчетах часто необходимо определить суммарные напряжения

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{+} &= \sigma_{\alpha}^{(p)} + \sigma_{\alpha}^{(u)}; & \sigma_{\alpha\beta}^{+} &= \sigma_{\alpha\beta}^{(p)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(u)}; & \sigma_{\beta}^{+} &= \sigma_{\beta}^{(p)} + \sigma_{\beta}^{(u)}; \\ \sigma_{\alpha}^{-} &= \sigma_{\alpha}^{(p)} - \sigma_{\alpha}^{(u)}; & \sigma_{\alpha\beta}^{-} &= \sigma_{\alpha\beta}^{(p)} - \sigma_{\alpha\beta}^{(u)}; & \sigma_{\beta}^{-} &= \sigma_{\beta}^{(p)} - \sigma_{\beta}^{(u)}.\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

При этом величины  $\sigma^{+}$  отвечают волокнам, примыкающим к внешней лицевой поверхности ( $\xi = +\frac{h}{2}$ ), а  $\sigma^{-}$  — к внутренней поверхности ( $\xi = -\frac{h}{2}$ ).

### СВЯЗЬ МЕЖДУ УСИЛИЯМИ-МОМЕНТАМИ И ДЕФОРМАЦИЕЙ

Связь между компонентами деформации и усилиями-моментами можно получить из обобщенного закона Гука, принимая статическую гипотезу Кирхгофа, согласно которой нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь по сравнению с основными напряжениями  $\sigma_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{\beta}$ . Получаемые при этом варианты физического закона отличаются один от другого различными малыми членами. В настоящее время считают, что наиболее последовательным является вариант, предложенный В. В. Новожиловым и несколько позже Л. И. Балабухом:

$$\left. \begin{aligned}N_{\alpha} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\alpha} + \nu\varepsilon_{\beta}); & M_{\alpha} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_{\alpha} + \nu\kappa_{\beta}); \\ N_{\beta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\beta} + \nu\varepsilon_{\alpha}); & M_{\beta} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_{\beta} + \nu\kappa_{\alpha}); \\ T &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma; & H &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau.\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Употребляемые в теории оболочек граничные условия очень разнообразны. Наиболее употребительные из этих условий следующие:

с в о б о д н ы й к р а й

$$Q_{vv} = Q_{vt} = Q_{vn} = 0; \quad M_{vv} = 0; \quad (39)$$

ш а р н и р н ы й, н е п о д в и ж н о о п е р т ы й к р а й

$$M_{vv} = 0; \quad u_v = u_t = w = 0; \quad (40)$$

ш а р н и р н ы й, с в о б о д н ы й в н о р м а л ь н о м н а п р а в л е н и и к р а й

$$M_{vv} = 0; \quad Q_{vn} = 0; \quad u_v = u_t = 0; \quad (41)$$

а б с о л ю т н о з а д е л а н н ы й к р а й

$$u_v = u_t = w = 0; \quad \vartheta_v = 0; \quad (42)$$

ж е с т к и й к р а й

$$\kappa_{tt} = \kappa_{tv} = \kappa_{tn} = 0; \quad \varepsilon_{tt} = 0 \quad (43)$$

(в отличие от предыдущего случая здесь край может смещаться как жесткое целое);

у п р у г о - п о д а т л и в ы й к р а й [29]

$$Q_{vv} = -\frac{\partial R}{\partial u_v}, \quad Q_{vt} = -\frac{\partial R}{\partial u_t}, \quad Q_{vn} = -\frac{\partial R}{\partial w},$$

$$M_{vv} = -\frac{\partial R}{\partial \vartheta_v}; \quad (44)$$

где

$$R = \frac{1}{2} (a_{11}u_v^2 + 2a_{12}u_vu_t + 2a_{13}u_vw + 2a_{14}u_v\vartheta_v + a_{22}u_t^2 +$$

$$+ 2a_{23}u_tw + 2a_{24}u_t\vartheta_v + a_{33}w^2 + 2a_{34}w\vartheta_v + a_{44}\vartheta_v^2) \quad (45)$$

— положительно определенная квадратичная форма — так называемый потенциал обобщенных краевых сил.

**Условия упругого сопряжения.** Большое значение в теории оболочек имеют условия упругого сопряжения  $n$  оболочек ( $n \geq 2$ ) на общей линии сопряжения. Пусть значок  $(k)$  сопровождает величины, относящиеся к  $k$ -й оболочке. Тогда условия сопряжения имеют следующий вид:

$$\sum_{k=1}^n \vec{Q}_v^{(k)} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{vv}^{(k)} \vec{t}^{(k)} = 0; \quad (46)$$

$$\vec{\kappa}_t^{(1)} = \vec{\kappa}_t^{(2)} = \dots = \vec{\kappa}_t^{(n)}, \quad \varepsilon_{tt}^{(1)} = \varepsilon_{tt}^{(2)} = \dots = \varepsilon_{tt}^{(n)}. \quad (47)$$

Первая группа соотношений выражает собой условие уравновешенности совокупности усилий и моментов, возникающих на краях сопрягаемых оболочек. Вторая отражает требование совместности деформации сопрягаемых краев. Последние называют *деформационными условиями упругого сопряжения*. Часто вместо них используют более привычные *геометрические условия сопряжения*

$$\vec{V}^{(1)} = \vec{V}^{(2)} = \dots = \vec{V}^{(n)}; \quad \vartheta_v^{(1)} = \vartheta_v^{(2)} = \dots = \vartheta_v^{(n)}. \quad (48)$$

Условия (43) и (47) более удобны, поскольку [см. формулы (2i)] они формулируются в терминах компонент деформации и для того, чтобы им удовлетворить, нет необходимости в предварительном определении смещений. Это особенно удобно в задачах, где нас интересует лишь напряженное состояние, но не жесткость оболочки. В задачах, где необходимо определять и смещения, удобно подчинить искомое решение сначала деформационным условиям, а уже затем по найденным компонентам деформации определить смещения. В многосвязных оболочках, ограниченных несколькими замкнутыми контурами, полностью заменить геометрические условия деформационными нельзя, поскольку в этом случае жесткое взаимное сближение контуров, определяющее напряженное состояние, не улавливается деформационными граничными условиями. Но и в этом случае все же целесообразно часть граничных условий формулировать как деформационные [28, 29].

Более подробно о граничных условиях см. в работах [15, 28, 29].

### МЕТОД СМЕЩЕНИЙ

Этот метод состоит в том, что выражения (14), (15) и (38) подставляют в уравнения равновесия (30). Полученную систему трех дифференциальных уравнений восьмого порядка в частных производных интегрируют при некотором варианте граничных условий, записанных через смещения и их производные. Следует, однако, заметить, что полученная система уравнений очень громоздка, даже для оболочек простой формы. Поэтому в статических задачах ее используют сравнительно редко.

### МЕТОД СИЛ. СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Более употребительным является метод сил. Он состоит в том, что к трем уравнениям равновесия (30) присоединяют уравнения неразрывности (16), записанные с помощью соотношений (38) через усилия и моменты. Получаемая при этом для шести искомых функций ( $N_\alpha$ ,  $T$ ,  $N_\beta$ ,  $M_\alpha$ ,  $H$ ,  $M_\beta$ ) система шести дифференциальных уравнений имеет также восьмой порядок. Эта система довольно сложна и содержит много малых, несущественных членов. Для ее упрощения обычно используют различные соображения физического характера, основанные на имеющемся представлении о характере работы оболочки. Широко используют и так называемую статико-геометрическую аналогию [7, 28, 29], согласно которой каждому статическому соотношению (величине) отвечают соответствующие геометрические (деформационные). Проявлением этой аналогии является то обстоятельство, что однородные уравнения равновесия (30) при  $q_\alpha = q_\beta = q_n = 0$  переходят в уравнения

неразрывности срединной поверхности (16) при замене статических величин ( $N_\alpha, N_\beta, T, M_\alpha, M_\beta, H$ ) соответственно на деформационные  $\left(\kappa_\beta, \kappa_\alpha, -\tau, -\varepsilon_\beta, -\varepsilon_\alpha, \frac{\gamma}{2}\right)$ .

Отмеченное свойство дает возможность ввести функции напряжения соотношениями

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= N_\alpha^* + Ehc\bar{\kappa}_\beta(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}); & T &= T^* - Ehc\bar{\tau}; \\ N_\beta &= N_\beta^* + Ehc\bar{\kappa}_\alpha; \\ M_\alpha &= M_\alpha^* - Ehc\bar{\varepsilon}_\beta; & M_\beta &= M_\beta^* - Ehc\bar{\varepsilon}_\alpha; \\ H &= H^* + Ehc\frac{\bar{\gamma}}{2} \quad \left(c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\right), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

здесь  $(N_\alpha^*, N_\beta^*, T^*, M_\alpha^*, M_\beta^*, H^*)$  — статическая система функций, удовлетворяющих уравнениям равновесия, а в остальном произвольная;  $(\bar{\kappa}_\beta, \bar{\kappa}_\alpha, \bar{\tau}, \bar{\varepsilon}_\beta, \bar{\varepsilon}_\alpha, \bar{\gamma})$  — компоненты деформации, построенные, однако, не по смещениям, а по некоторым функциям  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ . Выражения (49) удовлетворяют уравнениям равновесия при любых  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ . Поэтому последние и называют функциями напряжения (функциями Лурье—Гольденвейзера).

С помощью введенных функций напряжения граничным статическим величинам (32) и (33) можно придать следующий вид:

$$\vec{Q}_v = \vec{Q}_v^* - Ehc\vec{\kappa}_t; \quad M_{vv} = M_{vv}^* - Ehc\bar{\varepsilon}_{tt}, \quad (50)$$

где

$$\vec{Q}_v^* = Q_{vv}^* \vec{v} + Q_{vt}^* \vec{t} + Q_{vn}^* \vec{n}; \quad \vec{\kappa}_t = -\bar{\kappa}_{tt} \vec{v} + \bar{\kappa}_{tv} \vec{t} - \bar{\kappa}_{tn} \vec{n}. \quad (51)$$

Входящие сюда статические и деформационные величины подсчитывают с помощью равенств (33) и (21) по  $(N_\alpha^*, N_\beta^*, \dots)$  и  $(\bar{\varepsilon}_\alpha, \bar{\varepsilon}_\beta, \dots)$ .

Простейшим и наиболее важным частным случаем статической системы является безмоментное решение  $N_\alpha^*, N_\beta^*, T^*$  (при  $M_\alpha^* = M_\beta^* = H^* = 0$ ). Подробнее о статико-геометрической аналогии см. в работах [7, 28, 29].

## КОМПЛЕКСНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В развитие статико-геометрической аналогии введено понятие комплексной аналогии, согласно которой каждому статическому и геометрическому соотношению (величине) отвечают соответствующие комплексные. Введены следующие комплексные комбинации: комплексные смещения

$$\tilde{u} = u + i\bar{u}, \quad \tilde{v} = v + i\bar{v}, \quad \tilde{w} = w + i\bar{w} \quad (i = \sqrt{-1}); \quad (52)$$

комплексные усилия и моменты

$$\left. \begin{aligned} \tilde{N}_\alpha &= N_\alpha - iEhc\kappa_\beta; & \tilde{M}_\alpha &= M_\alpha + iEhc\epsilon_\beta; \\ \tilde{N}_\beta &= N_\beta - iEhc\kappa_\alpha; & \tilde{M}_\beta &= M_\beta + iEhc\epsilon_\alpha; \\ \tilde{T} &= T + iEhc\tau; & \tilde{H} &= H - iEhc\frac{\gamma}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

и комплексные граничные величины

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{vv} &= Q_{vv} - iEhc\kappa_{tt} = Q_{vv}^* - iEhc\tilde{\kappa}_{tt}; \\ \tilde{Q}_{vt} &= Q_{vt} + iEhc\kappa_{tv} = Q_{vt}^* + iEhc\tilde{\kappa}_{tv}; \\ \tilde{Q}_{vn} &= Q_{vn} - iEhc\kappa_{tn} = Q_{vn}^* - iEhc\tilde{\kappa}_{tn}; \\ \tilde{M}_{vv} &= M_{vv} + iEhc\epsilon_{tt} = M_{vv}^* + iEhc\tilde{\epsilon}_{tt}; \\ \vec{\tilde{Q}}_v &= \vec{Q}_v + iEhc\vec{\kappa}_t = \vec{Q}_v^* + iEhc\vec{\tilde{\kappa}}_t, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

здесь  $\tilde{\kappa}_{tt}$ ,  $\tilde{\kappa}_{tv}$ ,  $\tilde{\kappa}_{tn}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{tt}$  — величины из формул (14) и (21), построенные по комплексным смещениям  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$ .

С помощью соотношений физического закона (38) комплексные моменты могут быть выражены через комплексные усилия  $\tilde{N}_\alpha$ ,  $\tilde{N}_\beta$ ,  $\tilde{T}$ . При этом последние определяют из следующей системы уравнений в комплексных усилиях (четвертого порядка):

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial B\tilde{N}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A^2\tilde{T}}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{N}_\beta + \\ &+ ic \left( \frac{B}{R_\alpha} \cdot \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \alpha} - \frac{A}{R_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \beta} \right) + ABq_\alpha = 0; \\ &\frac{\partial A\tilde{N}_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B^2\tilde{T}}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{N}_\alpha + \\ &+ ic \left( \frac{A}{R_\beta} \cdot \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \beta} - \frac{B}{R_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \alpha} \right) + ABq_\beta = 0; \\ &\frac{\tilde{N}_\alpha}{R_\alpha} - 2 \frac{\tilde{T}}{R_{\alpha\beta}} + \frac{\tilde{N}_\beta}{R_\beta} - ic \Delta \tilde{N} = q_n, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right\}$$

и

$$\tilde{N} = \tilde{N}_\alpha + \tilde{N}_\beta. \quad (56)$$



Комплексные же компоненты деформации удовлетворяют системе уравнений в комплексных смещениях (также четвертого порядка):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_\alpha + ic(\tilde{\kappa}_\beta - \nu \tilde{\kappa}_\alpha) &= \frac{1}{Eh} \left( N_\alpha^* - \nu N_\beta^* + \frac{i}{c} M_\beta^* \right); \\ \tilde{\varepsilon}_\beta + ic(\tilde{\kappa}_\alpha - \nu \tilde{\kappa}_\beta) &= \frac{1}{Eh} \left( N_\beta^* - \nu N_\alpha^* + \frac{i}{c} M_\alpha^* \right); \\ \frac{\gamma}{2} - ic(1 + \nu) \tilde{\tau} &= \frac{1}{Eh} \left( (1 + \nu) T^* - \frac{i}{c} H^* \right), \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

которая может быть принята и в более упрощенной форме

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_\alpha + ic(\tilde{\kappa}_\alpha + \tilde{\kappa}_\beta) &= \frac{1}{Eh} \left( N_\alpha^* + N_\beta^* + \frac{i}{c} M_\beta^* \right); \\ \tilde{\varepsilon}_\alpha - \tilde{\varepsilon}_\beta &= \frac{i}{Ehc} (M_\beta^* - M_\alpha^*); \quad \tilde{\gamma} = -\frac{i}{Ehc} 2H^*. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Наконец для комплексных граничных величин справедливы следующие упрощенные выражения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{vv} &= \cos^2 \omega \tilde{N}_\alpha + 2 \sin \omega \cos \omega \tilde{T} + \sin^2 \omega \tilde{N}_\beta; \\ \tilde{Q}_{vt} &= \sin \omega \cos \omega (\tilde{N}_\beta - \tilde{N}_\alpha) + (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \tilde{T}; \\ \tilde{Q}_{vn} + i(1 + \nu) c \left\{ \frac{\partial \tilde{Q}_{vt}}{\partial s_t} - q_v \right\} &= ic \frac{\partial \tilde{N}}{\partial s_v}; \\ \tilde{M}_{vv} + i(1 + \nu) c \tilde{Q}_{vv} &= ic \tilde{N}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_v &= q_\alpha \cos \omega + q_\beta \sin \omega; \quad \tilde{N} = \tilde{N}_\alpha + \tilde{N}_\beta; \quad c = \frac{h}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}}; \\ \frac{\partial}{\partial s_v} &= \frac{\cos \omega}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\sin \omega}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}; \\ \frac{\partial}{\partial s_t} &= -\frac{\sin \omega}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\cos \omega}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Соотношения (55)–(59) приближенные. Характер использованных при их выводе упрощений, сопоставление с соответствующими «вещественными» соотношениями и проведенные многочисленные расчеты конкретных оболочек позволяют утверждать, что для большинства практически интересных случаев погрешность выписанных соотношений имеет тот же порядок, что и погрешность исходных допущений теории тонких оболочек.

Система (55) включает в себя как уравнения равновесия, так и уравнения совместности. Поэтому она может рассматриваться как разрешающая система теории оболочек. Метод, основанный на ее использо-

вании, называют *методом комплексных усилий*. После определения комплексных усилий обычные усилия и моменты находят по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= \operatorname{Re} \tilde{N}_\alpha; & M_\alpha &= -cJm \{ \tilde{N}_\beta + \nu \tilde{N}_\alpha \}; \\ N_\beta &= \operatorname{Re} \tilde{N}_\beta; & M_\beta &= -cJm \{ \tilde{N}_\alpha + \nu \tilde{N}_\beta \}; \\ T &= \operatorname{Re} \tilde{T}; & H &= c(1 - \nu) Jm \tilde{T}, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

где  $\operatorname{Re}$  обозначает вещественную, а  $Jm$  мнимую части соответствующей комплексной величины.

Перемещения определяют из приближенно совместной системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{Eh} \operatorname{Re} \{ \tilde{N}_\alpha - \nu \tilde{N}_\beta \}; & \kappa_\alpha &= -\frac{1}{Ehc} Jm \tilde{N}_\beta; \\ \epsilon_\beta &= \frac{1}{Eh} \operatorname{Re} \{ \tilde{N}_\beta - \nu \tilde{N}_\alpha \}; & \kappa_\beta &= -\frac{1}{Ehc} Jm \tilde{N}_\alpha, \\ \frac{\gamma}{2} &= \frac{1 + \nu}{Eh} \operatorname{Re} \tilde{T}; & \tau &= \frac{1}{Ehc} Jm \tilde{T}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Для удовлетворения геометрическим граничным условиям используют определяемые из последней системы смещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , при деформационных и статических граничных условиях — вещественные и мнимые части выражений (54).

В очень важном для расчетной практики случае, когда сопрягаются две оболочки одинаковой толщины  $hI = hII$  с равными упругими постоянными  $EI = EII$ ;  $\nu I = \nu II$  условия упругого сопряжения (46)—(47) можно согласно формуле (54) записать в комплексном виде

$$\vec{Q}_v^I = \vec{Q}_v^{II}, \quad \vec{M}_{vv}^I = \vec{M}_{vv}^{II}, \quad (63)$$

что серьезно упрощает проведение расчетов. Отметим, что использование условий (63) возможно и при стыковании оболочек под углом.

При использовании метода комплексных смещений исходной является система (57) [либо более простая (58)]. По найденным из нее комплексным смещениям  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  комплексные усилия подсчитывают по формулам

$$\tilde{N}_\alpha = N_\alpha^* - iEhc\tilde{\kappa}_\beta; \quad \tilde{N}_\beta = N_\beta^* - iEhc\tilde{\kappa}_\alpha; \quad \tilde{T} = T^* + iEhc\tilde{\tau}, \quad (64)$$

а усилия и моменты из формул (61).

Смещения находят решением приближенно совместной системы

$$\left. \begin{aligned} \kappa_\alpha &= \operatorname{Re} \tilde{\kappa}_\alpha; & \epsilon_\alpha &= \frac{1}{Eh} (\operatorname{Re} \tilde{N}_\alpha - \nu \operatorname{Re} \tilde{N}_\beta); \\ \kappa_\beta &= \operatorname{Re} \tilde{\kappa}_\beta; & \epsilon_\beta &= \frac{1}{Eh} (\operatorname{Re} \tilde{N}_\beta - \nu \operatorname{Re} \tilde{N}_\alpha); \\ \tilde{\tau} &= \operatorname{Re} \tilde{\tau}; & \gamma &= \frac{2(1 + \nu)}{Eh} \operatorname{Re} \tilde{T}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Понижение вдвое порядка разрешающих уравнений, отсутствие в них малых несущественных членов и обозримость формул делают комплексный метод удобным не только для теоретических исследований, но и при

расчетах конкретных оболочек. Широко используемые в расчетной практике уравнения Мейснера и уравнение пологих оболочек В. З. Власова являются частными случаями приведенных выше комплексных уравнений.

Из приведенных соотношений видно, что в комплексном методе речь идет не о функциях комплексной переменной, а об естественных, удобных комбинациях пар вещественных функций. Для пользования методом необходимо, по существу, помимо широко известных соотношений ( $i = \sqrt{-1}$ )

$$\left. \begin{aligned} (a + ib) \pm (c + id) &= (a \pm c) + i(b \pm d); \\ (a + ib)(c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc); \\ \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

знание формулы Эйлера

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y); \quad e^{x-iy} = e^x (\cos y - i \sin y). \quad (67)$$

Подробнее о применении комплексного метода, об его достоинствах и недостатках и области применения см. в работах [15, 28, 29].

### УРАВНЕНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВЛАСОВА

Во многих случаях общие разрешающие системы уравнений удается заменить более простой по структуре системой двух уравнений

$$\frac{1}{Eh} \Delta \Delta (\Phi) + D(w) = 0; \quad \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta \Delta (w) - D(\Phi) = q_n, \quad (68)$$

так называемыми уравнениями пологих оболочек Власова. Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Delta ( ) &= \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial ( )}{\partial \alpha} + \frac{\partial ( )}{\partial \beta} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial ( )}{\partial \beta} \right); \\ D ( ) &= \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial ( )}{\partial \alpha} \cdot \frac{B}{AR_\beta} \cdot \frac{\partial ( )}{\partial \alpha} + \frac{\partial ( )}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial ( )}{\partial \beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \frac{\partial ( )}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{A}{BR_\alpha} \cdot \frac{\partial ( )}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

При этом усилия определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}; \\ N_\beta &= -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}; \\ T &= \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

а моменты по обычным соотношениям (38), в которых, однако, под компонентами изгибных деформаций следует понимать упрощенные выражения

$$\left. \begin{aligned} \kappa_\alpha &= -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta}; \\ \kappa_\beta &= -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}; \\ \tau &= -\frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

отличающиеся от точных тем, что в них опущены слагаемые, зависящие от тангенциальных смещений  $u$  и  $v$ .

Можно исходить и из эквивалентного (68), комплексного уравнения

$$\Delta \Delta (\tilde{w}) + \frac{i}{c} D (\tilde{w}) = \frac{q_n}{Ehc^2}, \quad \left( c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \right), \quad (72)$$

где  $\tilde{w}$  — третье из комплексных смещений, связанное с  $w$  и  $\Phi$  соотношением

$$w = \omega + i\bar{\omega} = \omega + \frac{i}{Ehc} \Phi, \quad (73)$$

при этом

$$\left. \begin{aligned} \tilde{N}_\alpha &= iEhc \left[ \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} \right]; \\ \tilde{N}_\beta &= iEhc \left[ \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} \right]; \\ \tilde{T} &= -iEhc \left[ \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \beta} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Выписанные соотношения, помимо погрешности основных гипотез теории тонких оболочек, содержат и дополнительные погрешности. Последними можно пренебречь в задачах, где функции, характеризующие напряженно деформированное состояние, значительно возрастают при дифференцировании хотя бы по одной координате. Такое напряженное состояние реализуется, например, в не очень длинных цилиндрических оболочках и при краевом эффекте (см. стр. 651). Кроме того, отброшенные в формулах (70) и (71) члены содержат множителями кривизны  $\frac{1}{R_\alpha}$ ,  $\frac{1}{R_\beta}$ ,  $\frac{1}{R_{\alpha\beta}}$  и их производные. Поэтому выписанные упрощенные соотношения могут быть с успехом использованы и для расчета пологих оболочек.

Для непологих оболочек с напряженным состоянием, близким к безмоментному либо чисто изгибному, пользование уравнениями Власова может быть сопряжено со значительной погрешностью. В работе [29] предложена модификация уравнения (72), свободная от этого недостатка.

### БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ

Опуская в уравнениях равновесия (30) моменты, приходим к уравнениям безмоментной теории

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B N_{\alpha}^*}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A^2 T^*}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta}^* &= -ABq_{\alpha}; \\ \frac{\partial A N_{\beta}^*}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B^2 T^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha}^* &= -ABq_{\beta}; \\ \frac{N_{\alpha}^*}{R_{\alpha}} - 2 \frac{T^*}{R_{\alpha\beta}} + \frac{N_{\beta}^*}{R_{\beta}} &= q_n. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

После определения из них безмоментных усилий перемещения находят из уравнений [см. формулы (14), (38)].

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_{\alpha}^*) \quad \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} v^* + \frac{1}{R_{\alpha}} w^* &= \\ &= \frac{1}{Eh} (N_{\alpha}^* - \nu N_{\beta}^*), \\ (\varepsilon_{\beta}^*) \quad \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} u^* + \frac{1}{R_{\beta}} w^* &= \\ &= \frac{1}{Eh} (N_{\beta}^* - \nu N_{\alpha}^*); \\ (\gamma^*) \quad \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v^*}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u^*}{A} \right) - \\ - \frac{2}{R_{\alpha\beta}} w^* &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} T^*. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Каждая из систем (75) и (76) значительно проще соответствующих соотношений моментной теории. Для оболочек нулевой гауссовой кривизны (цилиндрических, конических) и линейчатых оболочек отрицательной кривизны их решение сводится к подсчету двух квадратур [1, 15, 29].

Для оболочек, образованных вращением кривых второго порядка вокруг их осей симметрии, каждая из систем сводится к гармоническому уравнению. При их решении может быть использована теория функций комплексного переменного [7].

К уравнениям (75) мы пришли, пренебрегая в уравнениях равновесия моментами и перерезывающими силами. Отсюда следует, что и в граничных условиях нужно пренебрегать моментом  $M_{\nu\nu}$  и перерезы-

вающим усилием  $Q_{vn}$ . Далее, мы лишены возможности распоряжаться отвечающими им обобщенными смещениями: углом поворота  $\vartheta_v$  и нормальным прогибом  $w$ , поскольку произвольное их задание вызывает появление реактивных изгибающего момента  $M_{vv}$  и перерезывающего усилия  $Q_{vn}$ , реализующих заданные  $\vartheta_v$  и  $w$ . Таким образом в рамках безмоментного решения на краю оболочки мы можем задавать лишь по одной величине из каждой пары обобщенная сила—обобщенное смещение

$$Q_{vv} \longleftrightarrow u_v; \quad Q_{vt} \longleftrightarrow u_t. \quad (77)$$

Уравнения (75) и (76) являются системами второго порядка. Решая первую из них, мы получаем две произвольные функции. Если имеются два граничных условия в усилиях (для оболочки с двумя краями), то с их помощью мы фиксируем указанный произвол. В противном случае, сохраняя в решении эти две произвольные функции и интегрируя систему (76), получаем еще две произвольные функции. С их помощью можно удовлетворить четырем геометрическим условиям. Существенным в сказанном является то, что могут быть удовлетворены только два статических условия, а два обязательно должны быть геометрическими.

Отмеченное принудительное задание двух геометрических граничных условий имеет глубокий физический смысл. Действительно, в решении уравнения (76) наряду с некоторым его частным решением входит и решение однородной системы

$$\varepsilon_\alpha^* = \varepsilon_\beta^* = \gamma^* = 0, \quad (78)$$

т. е. *перемещения чистого изгиба*. Роль упомянутых принудительных геометрических граничных условий как раз и сводится к ограничению этих перемещений. Если этого не сделать, то оболочка с незакрепленными краями будет вести себя не как несущая конструкция, а как подвижной механизм. В работе [30] приведены специализированные для безмоментного напряженного состояния деформационные и статические граничные условия.

Однако для очень длинных оболочек никакое закрепление краев не может существенно повлиять на напряженно-деформированное состояние вдали от краев. Так, например, в очень длинной цилиндрической оболочке некругового поперечного сечения, нагруженной равномерным давлением газа, вдали от краев устанавливается сильно изгибаемое напряженно-деформированное состояние, идентичное имеющему место в кольце того же сечения при постоянной по величине нагрузке, нормальной к оси кольца (в плоскости оси).

Усилия по безмоментной теории определяют из системы уравнений (75) вне зависимости от соотношений неразрывности срединной поверхности. Поэтому последние оказываются в большей или меньшей степени нарушенными. Это нарушение велико в местах быстрого изменения (тем более скачка) величин, характеризующих геометрию оболочки и внешнюю нагрузку  $R_\alpha, R_\beta, R_{\alpha\beta}; h; q_\alpha, q_\beta, q_n$ . Поэтому одним из условий применимости безмоментной теории является плавность этих величин.

Далее, расчетная практика и теоретический анализ [15, 18, 29] показали, что в местах изменения знака гауссовой кривизны поверхности имеют место значительные изгибающие моменты. Примером такой

оболочки может служить тор (см. гл. 25). Кроме того, на очень пологих участках оболочки (близких к пластине) нормальная к срединной поверхности нагрузка вызывает появление больших изгибающих напряжений.

При использовании безмоментной теории следует особо выделять края, совпадающие с *асимптотическими* линиями, вдоль которых равна нулю нормальная кривизна поверхности  $\frac{1}{R_t}$ . Примером асимптотической линии может служить образующая на цилиндрической поверхности.

На оболочках отрицательной кривизны через каждую точку срединной поверхности проходят две асимптоты. На оболочках нулевой кривизны они сливаются в одну. На оболочках же положительной кривизны асимптоты отсутствуют.

Асимптоты на оболочках нулевой кривизны обладают тем неприятным свойством, что вдоль них входящие в безмоментное решение произвольные функции остаются постоянными и не дают возможности, следовательно, удовлетворить граничным условиям рассматриваемой задачи.

На асимптотическом контуре оболочки отрицательной кривизны в безмоментном решении имеется одна произвольная функция, позволяющая удовлетворить лишь одному граничному условию.

Для того чтобы создать требуемые по безмоментному решению деформацию и нагрузку края, обычно ставят бортовые элементы (рантовые балки, кольца), подбирая их размеры так, чтобы как-то в среднем удовлетворить граничным условиям безмоментной задачи.

Сказанное выше может быть кратко сформулировано в виде следующих критериев безмоментности напряженного состояния:

1. Края оболочки должны быть свободны от перерезывающих сил и моментов, а их повороты и нормальные прогибы не должны быть стеснены. Следует предусматривать надлежащие бортовые подкрепления, обеспечивающие необходимые по безмоментному решению деформацию и нагрузку краев оболочки. Последнее особенно необходимо в случаях, когда граничный контур асимптотический.

2. Радиусы кривизны, граничный контур, толщина оболочки, компоненты поверхностной и краевой нагрузок должны быть плавными функциями. Следует также, по возможности, избегать применения оболочек со срединной поверхностью, меняющей знак Гауссовой кривизны, либо содержащей очень пологие (плоские) участки.

3. Перемещения чистого изгиба должны быть устранены путем надлежащего тангенциального закрепления краев. Нежелательны края с большими незакрепленными участками, а также очень длинные оболочки.

Безмоментное напряженное состояние является технически наиболее выгодным вследствие равномерности работы материала оболочки. Поэтому сформулированные условия следует рассматривать как «прочностные» рекомендации при конструировании тонкостенных конструкций. Конечно, не всегда они могут быть выполнены либо в силу специального назначения проектируемой конструкции, либо в силу других соображений (подчас не связанных с прочностью: технология, габариты, экономика и т. п.). Но они являются тем идеалом, к которому следует стремиться.

Обычно путем выбора геометрии оболочки и бортовых подкреплений удается добиться работы основной части оболочки в безмоментном напряженном состоянии, локализовав моментное напряженное состояние в узкой зоне, примыкающей к краю оболочки. Такое напряженное состояние называют поэтому краевым эффектом. Тонкостенную конструкцию следует считать удачной (в прочностном отношении), если напряжения краевого эффекта по величине не превосходят безмоментных напряжений.

### КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ

Как правило, безмоментное решение не дает возможности полностью удовлетворить всем граничным условиям общей (моментной) задачи. Если граничным контуром является неасимптотическая линия, то безмоментное решение удастся «подправить» краевым эффектом. *Краевым эффектом называют напряженно-деформированное состояние, при котором напряжения и смещения мало меняются вдоль контура, но быстро убывают в глубь области.*

Это своеобразное, характерное для тонких оболочек состояние объясняется взаимодействием двух свойств оболочки: ее кривизны и малой изгибной жесткости (см. работу [29], стр. 259). В книге [29] на стр. 255 введены коэффициенты податливости (жесткости) края и простые компактные формулы для основных напряжений, пригодные для оболочек общего вида, ограниченных произвольным неасимптотическим контуром.

В некоторых простейших случаях удастся разбить напряженное состояние на безмоментное и краевой эффект (обобщенный) в случае расчета асимптотического контура. Для цилиндрических и конических оболочек соответствующие соотношения приведены в работах [7, 15]. Для оболочек более общего вида построение обобщенного краевого эффекта становится очень сложным и метод деления напряженно-деформированного состояния на безмоментное и краевой эффект не упрощает расчет.

### ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Пусть температура оболочки изменилась на  $\theta = \theta(\alpha, \beta; \zeta)$  град. При этом каждый ее элементарный объем испытывает равномерное объемное расширение, определяемое коэффициентом линейного (температурного) расширения  $k = k(\alpha, \beta; \zeta)$ . Неравномерность нагрева и переменность коэффициента линейного расширения приводят к появлению температурных напряжений. Еще большие напряжения возникают при нагреве сочлененных оболочек разной жесткости или с резко различными коэффициентами линейного расширения. Возникающие напряжения (их обычно называют контактными) часто значительно превышают напряжения, обусловленные внешними силами, и вместе с последними существенно влияют на прочность конструкции.

При умеренных температурах, когда упругие постоянные и коэффициент линейного расширения изменяются незначительно, расчет оболочки на температурные воздействия не сложнее, чем на внешние силы. Приведенные выше соотношения сохраняют свой вид за исключением соотношений обобщенного закона Гука, которые необходимо дополнить



членами, отражающими влияние нагрева. В результате этого они принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{Eh} (N_\alpha - \nu N_\beta) + \varepsilon_T; & \kappa_\alpha &= \frac{12}{Eh^3} (M_\alpha - \nu M_\beta) + \kappa_T; \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{Eh} (N_\beta - \nu N_\alpha) + \varepsilon_T; & \kappa_\beta &= \frac{12}{Eh^3} (M_\beta - \nu M_\alpha) + \kappa_T; \\ \gamma &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} T; & \tau &= \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} H, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} k\theta d\zeta; \quad \kappa_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} k\theta\zeta d\zeta \quad (80)$$

— приведенные (по толщине) компоненты температурной деформации. В случае принятия линейного закона изменения температуры по толщине, т. е. при

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha, \beta; \zeta) &= \theta_0(\alpha, \beta) + \zeta\theta_1(\alpha, \beta) \\ k &= k(\alpha, \beta); \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\varepsilon_T = k\theta_0; \quad \kappa_T = k\theta_1. \quad (82)$$

При этом

$$\theta_0 = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2}; \quad \theta_1 = \frac{\theta^+ - \theta^-}{h}, \quad (83)$$

где  $\theta^+, \theta^-$  — изменения температуры внешней и внутренней поверхностей оболочки.

В работе [29] приведены выражения для соответствующих деформационных и комплексных величин. Там же рассмотрен вопрос о температурных полях, не вызывающих термоупругих напряжений, и о связи температурных смещений с дислокационными (многозначными). Более подробно о расчете оболочек на температурные воздействия см. в монографиях [5, 14, 23, 24, 29].

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

С математической стороны расчет оболочек сводится к решению системы уравнений в частных производных восьмого порядка с переменными коэффициентами и малыми множителями при старших производных. Граничные условия (условия периодичности, конечности решения) содержат производные от искомых функций до третьего порядка включительно. В ряде случаев при помощи метода разделения переменных задачу удастся свести к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений того же типа.

Для решения задач теории оболочек широко используют и совершенствуют целый арсенал имеющихся математических методов и приемов: вариационные и прямые методы математической физики [20, 21, 25, 29], интегральные уравнения (в том числе и сингулярные) [20,

21, 25], теория функций комплексной переменной (и обобщенные аналитические функции) [7, 1, 20, 21, 25], различные численные методы [20, 21, 25].

Наличие малого множителя при старших производных в разрешающих уравнениях стимулировало применение к теории оболочек (и дальнейшее развитие) различных асимптотических методов [7, 15, 29]. Последние целесообразно комбинировать с прямыми и численными методами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В е к у а И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. Мецниреба, Тбилиси, 1965.
2. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек и ее приложения к технике. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. В л а с о в В. З. Избранные труды. М., изд-во АН СССР. Т. 1, 1962, т. 2, 1962.
4. Влияние высоких температур на авиационные конструкции. Сб. статей под ред. Н. Хоффа. М., Оборонгиз, 1961.
5. Г е й т в у д Б. Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам. М., ИЛ, 1959.
6. Г е к к е л е р И. В. Статика упругого тела. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
7. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., ГИТТЛ, 1953.
8. Г р и г о р ь е в Л. Е. Судовые сосуды, работающие под давлением (определение напряжений и деформаций). Л., «Судостроение», 1965.
9. К а н С. Н. Прочность самолета. М., Оборонгиз, 1963.
10. К а н т о р о в и ч З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. М., Машгиз, 1960.
11. К у н П. Расчет на прочность оболочек в самолетостроении. М., Оборонгиз, 1961.
12. Л у р ь е в А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1947.
13. Л я в А. Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
14. Н о в а ц к и й В. Вопросы термоупругости. М., изд-во АН СССР, 1962.
15. Н о в о ж и л о в В. В. Теория тонких оболочек Л., Судпромгиз, 1962.
16. Оболочка. БСЭ, изд. 2-е, т. 30 (В. В. Новожилов).
17. О н и а ш в и л и О. Д. Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций. В сб. «Строительная механика в СССР» (1917—1957), М., Госстройиздат, 1959.
18. П о н о м а р е в С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М., Машгиз, 1958.
19. Р а б о т н о в Ю. Н. Пластинки и оболочки. В сб. «Механика в СССР за 30 лет». М.—Л., Гостехиздат, 1950.
20. Теория пластин и оболочек. Киев, изд-во АН УССР, 1962.
21. Теория оболочек и пластин. Ереван, изд-во АН АрмССР, 1964.
22. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1964.
23. Т и м о ш е н к о С. П. Пластины и оболочки. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
24. Т и м о ш е н к о С. П. Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
25. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Казань, изд. КазГУ, 1961.
26. У м а н с к и й А. А. Строительная механика самолета. М., Оборонгиз, 1961.
27. Ф л ю г г е В. Статика и динамика оболочек. М., Госстройиздат, 1961.
28. Ч е р н ы х К. Ф. Линейная теория оболочек Ч. 1, Л., изд. ЛГУ, 1962.
29. Ч е р н ы х К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2, Л., изд. ЛГУ, 1964.
30. Ч е р н ы х К. Ф. Простой краевой эффект и расчленение граничных условий в линейной теории тонких оболочек. Изв. АН СССР. Механика, № 1, 1965.

## Глава 21

# ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

## ГЕОМЕТРИЯ ОБОЛОЧКИ

Для оболочек вращения, срединная поверхность которых образуется вращением плоской кривой вокруг прямой, лежащей в той же плоскости, в качестве криволинейных координат удобно выбирать углы  $\theta$ ,  $\varphi$  (рис. 1).

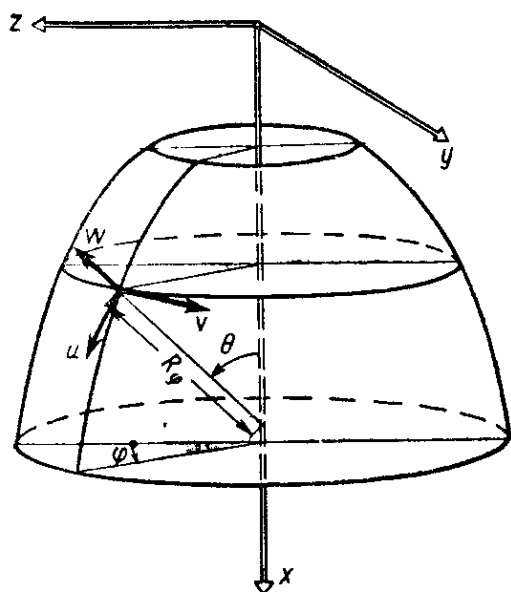


Рис. 1

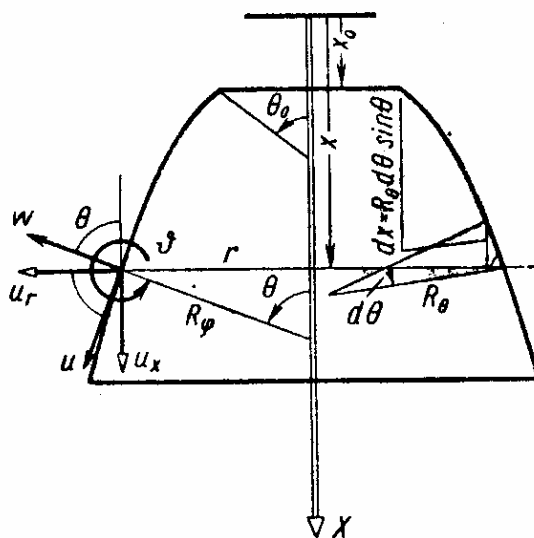


Рис. 2

Параметры Ляме (см. стр. 630) связаны с главными радиусами кривизны соотношениями

$$A = R_\theta(\theta), \quad B = R_\varphi(\theta) \sin \theta. \quad (1)$$

При этом радиусы кривизны удовлетворяют уравнению Кодаци—Гаусса

$$\frac{d R_\varphi \sin \theta}{d \theta} = R_\theta \cos \theta. \quad (2)$$

Из выпуклых оболочек вращения наиболее употребительны такие, срединные поверхности которых образованы вращением кривых второго порядка вокруг их осей симметрии. Для них

$$R_\theta = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{3/2}}; \quad R_\varphi = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{1/2}}. \quad (3)$$

При этом  $\chi = 0$  отвечает сфера,  $\chi = -1$  — параболоид,  $\chi > -1$  — эллипсоиды, а  $\chi < -1$  — гиперболоиды.

Иногда срединную поверхность относят к цилиндрическим координатам  $r, \varphi, x$ . Имеют место соотношения (рис. 2)

$$r = R_\varphi \sin \theta; \quad x - x_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} R_\theta \sin \theta \, d\theta. \quad (4)$$

### ДЕФОРМАЦИЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Перемещения срединной поверхности характеризуются величинами  $u, v, w$  или  $u_r, v, u_x$  (рис. 2), связанными между собой равенствами

$$u_r = u \cos \theta + w \sin \theta; \quad u_x = u \sin \theta - w \cos \theta. \quad (5)$$

Повороты краев оболочки, совпадающих соответственно с координатными линиями  $\varphi$  и  $\theta$ , выражаются через смещения следующими соотношениями:

$$\vartheta = -\frac{1}{R_\theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right); \quad \psi = -\frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \sin \theta v \right). \quad (6)$$

Деформацию срединной поверхности описывают шестью компонентами

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \theta + w \sin \theta \right); \\ \gamma &= \frac{1}{R_\theta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{R_\varphi \sin \theta} v - \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \\ \kappa_\theta &= -\frac{1}{R_\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) \right]; \\ \kappa_\varphi &= -\frac{1}{(R_\varphi \sin \theta)^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \\ &\quad - \frac{\cos \theta}{R_\theta R_\varphi \sin \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right); \\ \tau &= -\frac{1}{R_\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \sin \theta v \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{R_\theta R_\varphi \sin \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \cos \theta v \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

При этом  $\varepsilon_\theta$  характеризует растяжение срединной поверхности вдоль линии  $\theta$ ,  $\varepsilon_\varphi$  — растяжение вдоль линии  $\varphi$ ,  $\gamma$  — сдвиг срединной поверхности,  $\kappa_\theta$  и  $\kappa_\varphi$  — изгиб срединной поверхности соответственно вдоль линий  $\theta$  и  $\varphi$ ,  $\tau$  — ее кручение.

Деформация края оболочки, совпадающего с параллельным кругом, определяется четырьмя величинами (см. стр. 635)

$$\left. \begin{aligned} \kappa_r &= \frac{1}{r} \left\{ \vartheta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2} \right\}; & \kappa_x &= \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} \right\}; \\ \kappa_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \vartheta - \frac{1}{r} u_x \right); & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u_r \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

При этом первые две из них описывают изгиб (искривление) граничного элемента соответственно из плоскости параллельного круга  $\theta = \text{const}$  и в ней. Третья характеризует скручивание граничного элемента, а последняя — его растяжение.

Выписанные компоненты деформации края подсчитывают по величинам (7) с помощью следующих выражений:

$$\kappa_r = \kappa_\varphi \cos \theta + \kappa_{\varphi n} \sin \theta; \quad \kappa_x = \kappa_\varphi \sin \theta - \kappa_{\varphi n} \cos \theta; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\varphi\theta} &= \tau - \frac{\gamma}{R_\varphi}, \quad \kappa_{\varphi n} = \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \left( - \frac{\partial R_\varphi \sin \theta \varepsilon_\varphi}{R_\theta \partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \cos \theta \varepsilon_\theta \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Компоненты деформации удовлетворяют уравнениям неразрывности срединной поверхности

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial R_\varphi \sin \theta \kappa_\varphi}{\partial \theta} - R_\theta \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} - R_\theta \cos \theta \kappa_\theta - \frac{\partial R_\varphi \sin \theta \varepsilon_\varphi}{R_\theta \partial \theta} + \\ &\quad + \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \cos \theta \varepsilon_\theta = 0; \\ &R_\theta \frac{\partial \kappa_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \cdot \frac{\partial [(R_\varphi \sin \theta)^2 \tau]}{\partial \theta} + \frac{1}{R_\varphi} \left[ - R_\theta \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \varphi} + \right. \\ &\quad \left. + R_\varphi \sin \theta \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \cos \theta (R_\theta + R_\varphi) \gamma \right] = 0; \\ &\frac{\kappa_\varphi}{R_\theta} + \frac{\kappa_\theta}{R_\varphi} + \frac{1}{R_\theta R_\varphi \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial R_\varphi \sin \theta \varepsilon_\varphi}{R_\theta \partial \theta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \theta \varepsilon_\theta \right] + \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \left[ R_\theta \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2 R_\varphi \sin \theta} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{\partial^2 [(R_\varphi \sin \theta)^2 \gamma]}{\partial \theta \partial \varphi} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

## РАВНОВЕСИЕ ОБОЛОЧКИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Напряженное состояние в точке оболочки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии  $\xi$  (по нормали), определяется тремя компонентами:  $\sigma_\theta$  — нормальное напряжение на площадке с нормалью, параллельной координатной линии  $\theta$ ;  $\sigma_\varphi$  — соответствующая величина для линии  $\varphi$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}$  — касательное напряжение на тех же площадках.

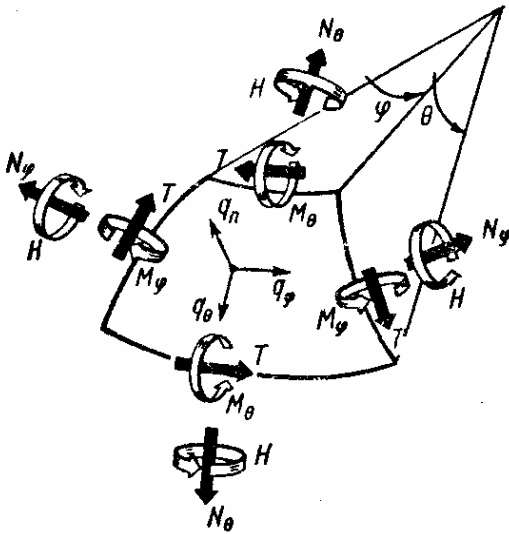


Рис. 3

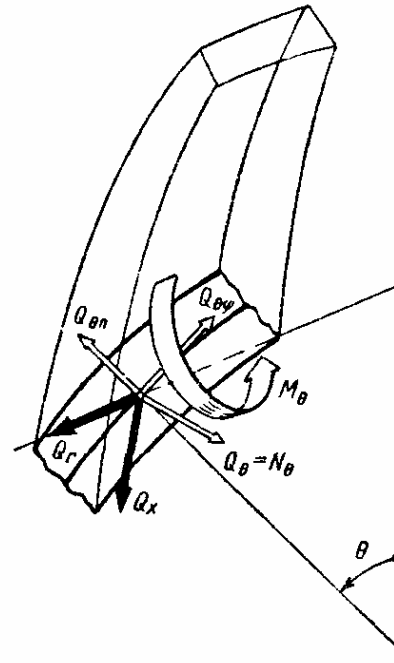


Рис. 4

Введенные напряжения связаны с усилиями и моментами следующими соотношениями:

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(p)} + \frac{\xi}{0,5h} \sigma_\theta^{(u)}; \quad \sigma_{\theta\varphi} = \sigma_{\theta\varphi}^{(p)} + \frac{\xi}{0,5h} \sigma_{\theta\varphi}^{(u)};$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^{(p)} + \frac{\xi}{0,5h} \sigma_\varphi^{(u)}, \quad (12)$$

где  $h$  — толщина оболочки;

$$\sigma_\theta^{(p)} = \frac{N_\theta}{h}; \quad \sigma_{\theta\varphi}^{(p)} = \frac{T}{h}; \quad \sigma_\varphi^{(p)} = \frac{N_\varphi}{h}; \quad (13)$$

$$\sigma_\theta^{(u)} = \frac{6M_\theta}{h^2}; \quad \sigma_{\theta\varphi}^{(u)} = \frac{6H}{h^2}; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \frac{6M_\varphi}{h^2}. \quad (14)$$

Положительные направления усилий и моментов показаны на рис. 3. Напряжения  $\sigma_\theta^{(p)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(p)}$ ,  $\sigma_{\theta\varphi}^{(p)}$  называют *тангенциальными* (цепными, мембранными), а  $\sigma_\theta^{(u)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(u)}$  —  $\sigma_{\theta\varphi}^{(u)}$  — *изгибными*. Максимальных

значений напряжения достигают либо во внешних волокнах оболочки (при  $\zeta = +\frac{h}{2}$ )

$$\sigma_{\theta}^{+} = \sigma_{\theta}^{(p)} + \sigma_{\theta}^{(u)}; \quad \sigma_{\theta\varphi}^{+} = \sigma_{\theta\varphi}^{(p)} + \sigma_{\theta\varphi}^{(u)}; \quad \sigma_{\varphi}^{+} = \sigma_{\varphi}^{(p)} + \sigma_{\varphi}^{(u)}, \quad (15)$$

либо во внутренних (при  $\zeta = -\frac{h}{2}$ )

$$\sigma_{\theta}^{-} = \sigma_{\theta}^{(p)} - \sigma_{\theta}^{(u)}; \quad \sigma_{\theta\varphi}^{-} = \sigma_{\theta\varphi}^{(p)} - \sigma_{\theta\varphi}^{(u)}; \quad \sigma_{\varphi}^{-} = \sigma_{\varphi}^{(p)} - \sigma_{\varphi}^{(u)}. \quad (16)$$

На границе, совпадающей с параллельным кругом ( $\theta = \text{const}$ ), можно задавать следующие статические величины (рис. 4):

$$Q_{\theta} = N_{\theta}; \quad Q_{\theta\varphi} = T + \frac{2H}{R_{\varphi}}; \quad M_{\theta};$$

$$Q_{\theta n} = \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \left( \frac{\partial R_{\varphi} \sin \theta M_{\theta}}{R_{\theta} \partial \theta} + 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \cos \theta M_{\varphi} \right). \quad (17)$$

Вместо  $Q_{\theta}$  и  $Q_{\theta n}$  удобнее рассматривать горизонтальное  $Q_r$  и вертикальное  $Q_x$  усилия

$$Q_r = \cos \theta Q_{\theta} + \sin \theta Q_{\theta n}; \quad Q_x = \sin \theta Q_{\theta} - \cos \theta Q_{\theta n}. \quad (18)$$

Усилия и моменты удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial R_{\varphi} \sin \theta N_{\theta}}{\partial \theta} + R_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} - R_{\theta} \cos \theta N_{\varphi} + \frac{\partial R_{\varphi} \sin \theta M_{\theta}}{R_{\theta} \partial \theta} + \\ & + 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \cos \theta M_{\varphi} = -R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta q_{\theta}; \\ & R_{\theta} \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \cdot \frac{\partial [(R_{\varphi} \sin \theta)^2 T]}{\partial \theta} + \\ & + \frac{1}{R_{\varphi}} \left[ R_{\theta} \frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} + 2 R_{\varphi} \sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + 2 \cos \theta (R_{\theta} + R_{\varphi}) H \right] = -R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta q_{\varphi}; \\ & \frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} + \frac{N_{\varphi}}{R_{\varphi}} - \frac{1}{R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial R_{\varphi} \sin \theta M_{\theta}}{R_{\theta} \partial \theta} + \right. \right. \\ & + \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \cos \theta M_{\varphi} \left. \right] + \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \left[ R_{\theta} \frac{\partial^2 M_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 [(R_{\varphi} \sin \theta)^2 H]}{\partial \theta \partial \varphi} \right] \left. \right\} = q_n, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

в которых через  $q_{\theta}$ ,  $q_{\varphi}$ ,  $q_n$  обозначены составляющие поверхностной нагрузки (рис. 3).

## ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Связь между компонентами деформации и усилиями-моментами устанавливается соотношениями обобщенного закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{Eh} (N_{\theta} - \nu N_{\varphi}) + \varepsilon_T; \quad \kappa_{\theta} = \frac{12}{Eh^3} (M_{\theta} - \nu M_{\varphi}) + \kappa_T; \\ \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{Eh} (N_{\varphi} - \nu N_{\theta}) + \varepsilon_T; \quad \kappa_{\varphi} = \frac{12}{Eh^3} (M_{\varphi} - \nu M_{\theta}) + \kappa_T; \\ \gamma &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} T; \quad \tau = \frac{12(1+\nu)}{Eh^3} H; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

здесь  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\varepsilon_T$ ,  $\kappa_T$  — температурные деформации, связанные с коэффициентом линейного (теплового) расширения  $\alpha$  и изменением температуры  $T$  соотношениями

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T d\xi; \quad \kappa_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T \xi d\xi. \quad (21)$$

В случае линейного по толщине оболочки изменения температуры

$$T(\theta, \varphi; \xi) = T_0(\theta, \varphi) + \xi T_1(\theta, \varphi) \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\theta, \varphi), \\ \varepsilon_T &= \alpha T_0; \quad \kappa_T = \alpha T_1. \end{aligned} \quad (23)$$

При этом

$$T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}; \quad T_1 = \frac{T^+ - T^-}{h}, \quad (24)$$

где  $T^+$  и  $T^-$  — изменения температуры соответственно на внешней и внутренней поверхностях оболочки.

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия, используемые при расчетах оболочек вращения, весьма разнообразны. Перечислим некоторые из них, наиболее употребимые.

С в о б о д н ы й к р а й

$$Q_r = Q_x = Q_{\theta\varphi} = 0; \quad M_{\theta} = 0. \quad (25)$$

Ш а р н и р н ы й, н е п о д в и ж н о о п е р т ы й к р а й

$$u_r = u_x = v = 0; \quad M_{\theta} = 0. \quad (26)$$

С к о л ь з я щ а я з а д е л к а (скользящий шарнир)

$$\begin{aligned} u_r &= 0; \quad \vartheta = 0; \quad Q_{\theta\varphi} = 0 \text{ (или } v = 0); \\ Q_x &= Q_0 \text{ (} Q_0 \text{ — заданная величина).} \end{aligned} \quad (27)$$

П о л н о с т ь ю з а д е л а н н ы й к р а й

$$u_r = u_x = v = 0; \quad \vartheta = 0. \quad (28)$$



## Жесткий край

$$\kappa_r = \kappa_x = \kappa_{\varphi\theta} = 0; \quad \varepsilon_{\varphi} = 0. \quad (29)$$

От предыдущего варианта граничных условий условия жесткого края отличаются тем, что они формулируются в терминах компонент деформации (см. стр. 656) и при их использовании не требуют предварительного определения смещений. Они особенно удобны в задачах, где нас интересует только напряженное состояние (см. стр. 641). Часто используют условия упругого сопряжения, подробно рассмотренные в гл. 1 т. II и в работах [6, 7, 9, 14].

## МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Выписанные зависимости позволяют определить напряжения и смещения, возникающие в оболочке, закрепленной по краям и нагруженной заданной внешней нагрузкой.

Замкнутость оболочки вращения по  $\varphi$ , независимость коэффициентов дифференциальных уравнений от  $\varphi$ , периодичность искомых и заданных величин позволяют применить метод разделения переменных. Состоит он в том, что все величины, как искомые, так и заданные, разлагаются в ряды Фурье вида

$$\Phi(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} [\Phi'_k(\theta) \cos k\varphi + \Phi''_k(\theta) \sin k\varphi]. \quad (30)$$

В силу взаимной ортогональности функций  $\cos k\varphi$ ,  $\sin k\varphi$  можно порознь рассмотреть каждую  $k$ -ю гармонику, т. е. случай, когда интересующие нас величины имеют следующую зависимость от  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_k \cos k\varphi; \quad v = v_k \sin k\varphi; \quad w = w_k \cos k\varphi; \\ u_r &= u_{r,k} \cos k\varphi; \quad u_x = u_{x,k} \cos k\varphi; \quad \vartheta = \vartheta_k \cos k\varphi; \\ \varepsilon_{\theta} &= \varepsilon_{\theta,k} \cos k\varphi; \quad \gamma = \gamma_k \sin k\varphi; \quad \varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi,k} \cos k\varphi; \\ \kappa_{\theta} &= \kappa_{\theta,k} \cos k\varphi; \quad \tau = \tau_k \sin k\varphi; \quad \kappa_{\varphi} = \kappa_{\varphi,k} \cos k\varphi; \\ \kappa_r &= \kappa_{r,k} \cos k\varphi; \quad \kappa_{\varphi\theta} = \kappa_{\varphi\theta,k} \sin k\varphi; \quad \kappa_x = \kappa_{x,k} \cos k\varphi; \\ N_{\theta} &= N_{\theta,k} \cos k\varphi; \quad T = T_k \sin k\varphi; \quad N_{\varphi} = N_{\varphi,k} \cos k\varphi; \\ M_{\theta} &= M_{\theta,k} \cos k\varphi; \quad H = H_k \sin k\varphi; \quad M_{\varphi} = M_{\varphi,k} \cos k\varphi; \\ Q_r &= Q_{r,k} \cos k\varphi; \quad Q_{\theta\varphi} = Q_{\theta\varphi,k} \sin k\varphi; \quad Q_x = Q_{x,k} \cos k\varphi; \\ q_{\theta} &= q_{\theta,k} \cos k\varphi; \quad q_{\varphi} = q_{\varphi,k} \sin k\varphi; \quad q_n = q_{n,k} \cos k\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Ниже приведены соотношения, которым удовлетворяют «амплитудные» множители  $u_k$ ;  $v_k$ ; . . . ;  $q_{n,k}$ . Случай, когда в равенствах (31) множители  $\cos k\varphi$  заменены на  $\sin k\varphi$  и наоборот, можно рассмотреть путем поворота осей  $y$  и  $z$  (см. работу [9]). В работе [14] оба случая рассмотрены одновременно.

Для  $k$ -х гармоник соотношения (5), (9), (12)—(16) и (20) сохраняют свою форму. Требуется лишь снабдить входящие в них величины индексом  $k$ . Остальные принимают следующий вид:

$$\vartheta_k = -\frac{1}{R_{\theta}} \left( \frac{dw_k}{d\theta} - u_k \right); \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta, k} &= \frac{1}{R_{\theta}} \left( \frac{du_k}{d\theta} + w_k \right); \\
 \varepsilon_{\varphi, k} &= \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} (kv_k + u_k \cos \theta + w_k \sin \theta); \\
 \gamma_k &= \frac{1}{R_{\theta}} \cdot \frac{dv_k}{d\theta} - \frac{\cos \theta}{R_{\varphi} \sin \theta} v_k - k \frac{u_k}{R_{\varphi} \sin \theta}; \\
 \kappa_{\theta, k} &= -\frac{1}{R_{\theta}} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{R_{\theta}} \left( \frac{dw_k}{d\theta} - u_k \right) \right]; \\
 \kappa_{\varphi, k} &= \frac{1}{(R_{\varphi} \sin \theta)^2} (k^2 w_k + k \sin \theta v_k) - \\
 &\quad - \frac{\cos \theta}{R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta} \left( \frac{dw_k}{d\theta} - u_k \right); \\
 \tau_k &= \frac{1}{R_{\theta}} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} (kw_k + \sin \theta v_k) \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta} (ku_k - \cos \theta v_k);
 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_{r, k} &= \frac{1}{r} \left\{ \vartheta_k - \frac{k^2}{r} u_{x, k} \right\}; \quad \kappa_{x, k} = \frac{1}{r^2} \{ kv_k + k^2 u_{r, k} \}; \\
 \kappa_{\varphi, k} &= -\frac{k}{r} \left\{ \vartheta_k - \frac{1}{r} u_{x, k} \right\}; \quad \varepsilon_{\varphi, k} = \frac{1}{r} \{ kv_k + u_{r, k} \};
 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\kappa_{\varphi n, k} = \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \left( -\frac{dR_{\varphi} \sin \theta \varepsilon_{\varphi, k}}{R_{\theta} d\theta} + k\gamma_k + \cos \theta \varepsilon_{\theta, k} \right); \quad (35)$$

$$Q_{\theta n, k} = \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \left( \frac{dR_{\varphi} \sin \theta M_{\theta, k}}{R_{\theta} d\theta} + 2kH_k - \cos \theta M_{\varphi, k} \right). \quad (36)$$

Уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{dR_{\varphi} \sin \theta N_{\theta, k}}{d\theta} + kR_{\theta} T_k - R_{\theta} \cos \theta N_{\varphi, k} + \frac{dR_{\varphi} \sin \theta M_{\theta, k}}{R_{\theta} d\theta} + \\
 &\quad + 2kH_k - \cos \theta M_{\varphi, k} = -R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta q_{\theta, k}; \\
 &-kR_{\theta} N_{\varphi, k} + \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \cdot \frac{d(R_{\varphi} \sin \theta)^2}{d\theta} T_k + \frac{1}{R_{\varphi}} \times \\
 &\times \left[ -kR_{\theta} M_{\varphi, k} + 2R_{\varphi} \sin \theta \frac{dH_k}{d\theta} + 2 \cos \theta (R_{\theta} + R_{\varphi}) H_k \right] = \\
 &\quad = -R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta q_{\varphi, k};
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{N_{\theta, k}}{R_{\theta}} + \frac{N_{\varphi, k}}{R_{\varphi}} - \frac{1}{R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta} \times \\ & \times \left\{ \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{d R_{\varphi} \sin \theta M_{\theta, k}}{R_{\theta} d\theta} + k H_k - \cos \theta M_{\varphi, k} \right] + \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \times \right. \\ & \times \left. \left[ -k^2 R_{\theta} M_{\varphi, k} + \frac{k}{R_{\varphi} \sin \theta} \frac{d (R_{\varphi} \sin \theta)^2 H_k}{d\theta} \right] \right\} = q_{n, k}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Уравнения неразрывности срединной поверхности

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d R_{\varphi} \sin \theta \kappa_{\varphi, k}}{d\theta} - k R_{\theta} \tau_k - R_{\theta} \cos \theta \kappa_{\theta, k} - \\ & - \frac{d R_{\varphi} \sin \theta \varepsilon_{\varphi, k}}{R_{\theta} d\theta} + k \gamma_k + \cos \theta \varepsilon_{\theta, k} = 0; \\ & -k R_{\theta} \kappa_{\theta, k} - \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \cdot \frac{d (R_{\varphi} \sin \theta)^2 \tau_k}{d\theta} + \\ & + \frac{1}{R_{\varphi}} \left[ k R_{\theta} \varepsilon_{\theta, k} + R_{\varphi} \sin \theta \frac{d \gamma_k}{d\theta} + \right. \\ & \left. + \cos \theta (R_{\theta} + R_{\varphi}) \gamma_k \right] = 0; \\ & \frac{\kappa_{\varphi, k}}{R_{\theta}} + \frac{\kappa_{\theta, k}}{R_{\varphi}} + \frac{1}{R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta} \times \\ & \times \left\{ \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{d R_{\varphi} \sin \theta \varepsilon_{\varphi, k}}{R_{\theta} d\theta} - \frac{k}{2} \gamma_k - \cos \theta \varepsilon_{\theta, k} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{R_{\varphi} \sin \theta} \left[ -k^2 R_{\theta} \varepsilon_{\theta, k} - \frac{k}{2 R_{\varphi} \sin \theta} \times \right. \\ & \times \left. \left. \frac{d (R_{\varphi} \sin \theta)^2 \gamma_k}{d\theta} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

### САМОУРАВНОВЕШЕННЫЕ НАГРУЗКИ ( $k \geq 2$ )

Внешние нагрузки, отвечающие  $k \geq 2$ , являются самоуравновешенными, в том смысле, что главный вектор и главный момент краевой нагрузки равны нулю на каждом граничном контуре. Соответствующие разрешающие уравнения представляют собой сложные и малообозримые системы обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка, с переменными коэффициентами, «засоренные» к тому же малыми, несущественными для расчета членами.

Наиболее простыми и свободными от малых членов являются соотношения, полученные В. В. Новожиловым,

$$\left. \begin{aligned} & G_k \{ \tilde{U}_k \} + k^2 \left[ 1 - i c \left( \frac{1}{R_{\theta}} - \frac{1}{R_{\varphi}} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \tilde{N}_k = f_k(\theta); \\ & -i c G_k \{ \tilde{N}_k \} + \tilde{N}_k + \left( \frac{1}{R_{\theta}} - \frac{1}{R_{\varphi}} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta} \tilde{U}_k = R_{\varphi} q_{n, k}; \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_k \{ \dots \} &= \frac{1}{R_\theta R_\varphi \sin \theta} \times \\ &\times \frac{d}{d\theta} \left( \frac{R_\varphi^2 \sin \theta}{R_\theta} \cdot \frac{d(\dots)}{d\theta} \right) - \frac{k^2 (\dots)}{R_\varphi \sin^2 \theta}; \\ f_k(\theta) &= \frac{1}{R_\theta R_\varphi \sin \theta} \left\{ \frac{d}{d\theta} [(q_{n,k} \cos \theta - \right. \\ &\left. - q_{\theta,k} \sin \theta) R_\varphi^3 \sin^2 \theta] + k q_{\varphi,k} R_\theta R_\varphi^2 \sin^2 \theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left( i = \sqrt{-1}; \quad c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}; \quad \tilde{N}_k = \tilde{N}_{\theta,k} + \tilde{N}_{\varphi,k} \right).$$

Определив из системы (39) вспомогательные функции, подсчитывают усилия и моменты

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta,k} &= \operatorname{Re} \tilde{N}_{\theta,k}; \quad M_{\theta,k} = -c \operatorname{Im} \{ \tilde{N}_{\varphi,k} + \nu \tilde{N}_{\theta,k} \}; \\ N_{\varphi,k} &= \operatorname{Re} \tilde{N}_{\varphi,k}; \quad M_{\varphi,k} = -c \operatorname{Im} \{ \tilde{N}_{\theta,k} + \nu \tilde{N}_{\varphi,k} \}; \\ T_k &= \operatorname{Re} \tilde{T}_k; \quad H_k = c(1-\nu) \operatorname{Im} \tilde{T}_k \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

( $\operatorname{Re}$  — вещественная часть,  $\operatorname{Im}$  — мнимая),

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{N}_{\theta,k} &= \frac{\tilde{U}_k}{R_\varphi \sin^2 \theta} + ic \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_\theta} \cdot \frac{d\tilde{N}_k}{d\theta}; \\ \tilde{N}_{\varphi,k} &= -\frac{\tilde{U}_k}{R_\varphi \sin^2 \theta} + \tilde{N}_k - ic \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_\theta} \cdot \frac{d\tilde{N}_k}{d\theta}; \\ k\tilde{T}_k &= -\frac{1}{R_\theta \sin \theta} \cdot \frac{d\tilde{U}_k}{d\theta} - ick^2 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_\varphi \sin \theta} \tilde{N}_k + \\ &+ R_\varphi (q_{n,k} \cos \theta - q_{\theta,k} \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Обобщение приведенных соотношений на случай температурного воздействия приведено в работе [14].

Основной интерес при расчете оболочек вращения представляют случаи  $k=0$  и  $k=1$ , называемые соответственно *осесимметричным* (симметричным) и *обратносимметричным*.

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СЛУЧАИ

Следует различать осесимметричное кручение и осесимметричный изгиб.

**Осесимметричное кручение оболочки** поверхностной нагрузкой и краевыми сдвигающими усилиями приводит к безмоментному напряженному состоянию, при котором [значок  $^0$  опускаем]

$$T(\theta) = - \frac{\frac{1}{2\pi} \mathfrak{M}_x^0 + \int_{\theta_0}^{\theta} R_{\theta} R_{\varphi}^2 \sin^2 \theta q_{\varphi} d\theta}{(R_{\varphi} \sin \theta)^2}; \quad (43)$$

$$v(\theta) = R_{\varphi} \sin \theta \left\{ \frac{2(1+\nu)}{Eh} \int_{\theta_0}^{\theta} T \frac{R_{\theta} d\theta}{R_{\varphi} \sin \theta} - \Omega_x \right\}; \quad (44)$$

где

$$\mathfrak{M}_x^0 = -2\pi (R_{\varphi} \sin \theta)_{\theta=\theta_0}^2 T(\theta_0) \quad (45)$$

— закручивающий момент, приложенный к краю оболочки  $\theta = \theta_0$ ;  $\Omega_x$  — угол поворота оболочки как жесткого целого вокруг оси вращения (рис. 5).

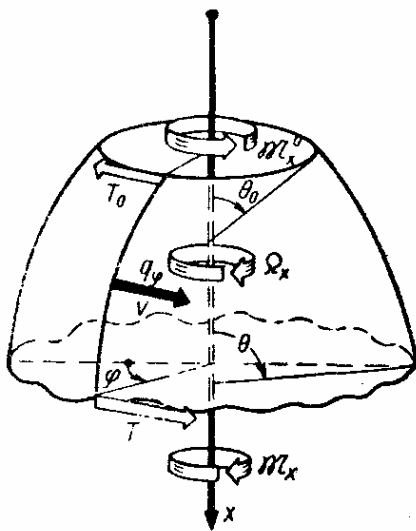


Рис. 5

В случае оболочки замкнутой сверху ( $\theta_0 = 0$ ) сохранение в выражении (43) закручивающего момента  $\mathfrak{M}_x^0$  означает приложение в вершине оболочки сосредоточенного момента. При его отсутствии следует полагать  $\mathfrak{M}_x^0 = 0$ . Сдвигающее напряжение подсчитывают по формуле

$$\sigma_{\theta\varphi} = \frac{T}{h}. \quad (46)$$

**Осесимметричный изгиб.** При симметричном изгибе напряженно-формированное состояние обычно удается разбить на безмоментное, термоупругое и краевой эффект. Снабжая величины первой группы значками  $^*$ , вторые —  $^T$ , а третьи —  $^K$ , получаем

$$N_{\theta} = N_{\theta}^*; \quad N_{\varphi} = N_{\varphi}^* + N_{\varphi}^K; \quad M_{\theta} = M_{\theta}^T + M_{\theta}^K; \quad M_{\varphi} = M_{\varphi}^T + M_{\varphi}^K; \quad (47)$$

$$\vartheta = \vartheta^* + \vartheta^T + \vartheta^K; \quad u_r = u_r^* + u_r^T + u_r^K; \quad u_x = u_x^* + u_x^T + u_x^K; \quad (48)$$

$$(u = u_r \cos \theta + u_x \sin \theta; \quad w = u_r \sin \theta - u_x \cos \theta);$$

$$Q_r = N_{\theta}^* \cos \theta + Q_r^K. \quad (49)$$

Безмоментные усилия подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta}^*(\theta) &= \frac{\frac{1}{2\pi} F_x^0 + \int_{\theta_1}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_{\theta} \sin \theta) R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta d\theta}{R_{\varphi} \sin^2 \theta}; \\ N_{\varphi}^*(\theta) &= R_{\varphi} q_n - \frac{R_{\varphi}}{R_{\theta}} N_{\theta}^*(\theta), \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где

$$F_x^0 = 2\pi R_{\varphi} (\theta_1) \sin^2 \theta_1 N_{\theta}^*(\theta_1) \quad (51)$$

— осевая сила, действующая в сечении параллельного круга  $\theta = \theta_1$  (рис. 6). В случае оболочки, замкнутой сверху ( $\theta_1 = 0$ ), следует положить  $F_x^0 = 0$ . Если же оболочка замкнута внизу, то из условия ограниченности напряжений при  $\theta = \pi$  получаем  $F_x^0 =$

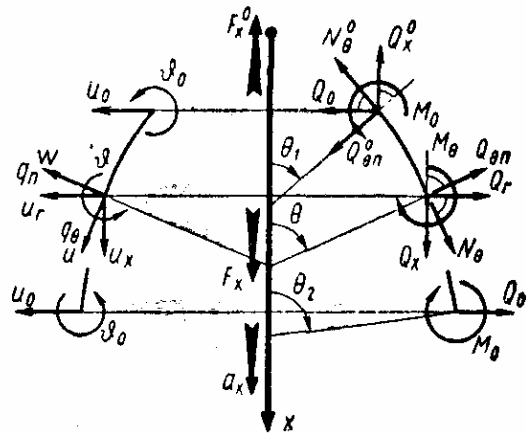


Рис. 6

$= -2\pi \int_{\theta_1}^{\pi} (q_n \cos \theta - q_{\theta} \sin \theta) \times$   
 $\times R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta d\theta$  и первую из формул (50) следует заменить следующей:

$$N_{\theta}^*(\theta) = \frac{1}{R_{\varphi} \sin^2 \theta} \int_{\pi}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_{\theta} \sin \theta) R_{\theta} R_{\varphi} \sin \theta d\theta. \quad (52)$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^* &= -\frac{1}{Eh} \cdot \frac{R_{\varphi}}{R_{\theta}} \left\{ \frac{d(N_{\theta}^* + N_{\varphi}^*)}{d\theta} + (1 + \nu) R_{\theta} q_{\theta} \right\}; \\ u_r^* &= \frac{R_{\varphi} \sin \theta}{Eh} (N_{\varphi}^* - \nu N_{\theta}^*); \\ u_x^* &= a_x - \frac{1}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \frac{R_{\varphi} \cos \theta}{R_{\theta}} \left[ \frac{d(N_{\theta}^* + N_{\varphi}^*)}{d\theta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + \nu) R_{\theta} q_{\theta} \right] - \sin \theta (N_{\theta}^* - \nu N_{\varphi}^*) \right\} R_{\theta} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

здесь  $a_x$  — осевое смещение оболочки как жесткого целого.

Температурные слагаемые определяют по формулам (см. работу [15] стр. 292)

$$\left. \begin{aligned} M_{\theta}^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ (1+\nu) \kappa_r + \right. \\ &+ \frac{1}{R_{\theta}} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \frac{R_{\varphi}}{R_{\theta}} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} \right) + \nu \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_{\theta}} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} \Big]; \\ M_{\varphi}^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ (1+\nu) \kappa_r + \right. \\ &+ \frac{\nu}{R_{\theta}} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \frac{R_{\varphi}}{R_{\theta}} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} \right) + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_{\theta}} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} \Big]; \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^T &= -\frac{R_{\varphi}}{R_{\theta}} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{d\theta}; \quad u_r^T = R_{\varphi} \sin \theta \varepsilon_r; \\ u_x^T &= -\int_{\theta_1}^{\theta} \left( \frac{R_{\varphi} \cos \theta}{R_{\theta}} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} - \sin \theta \varepsilon_r \right) R_{\theta} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

С приемлемой для практических расчетов точностью, пренебрегая величинами порядка  $\sqrt{\frac{h}{R}}$  по сравнению с 1, слагаемые, отвечающие *краевому эффекту*, можно записать

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi}^{\kappa} &= (A_1 \cos \beta_1 - B_1 \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \\ &+ (A_2 \cos \beta_2 + B_2 \sin \beta_2) e^{\beta_2}; \\ M_{\theta}^{\kappa} &= -c \left[ (B_1 \cos \beta_1 + A_1 \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \right. \\ &+ (B_2 \cos \beta_2 - A_2 \sin \beta_2) e^{\beta_2} \Big]; \\ M_{\varphi}^{\kappa} &= \nu M_{\theta}^{\kappa}; \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{\kappa} &= \sqrt{\frac{2c}{R_{\varphi}}} \cdot \frac{1}{2 \sin \theta} \left\{ [(-A_1 + B_1) \cos \beta_1 + \right. \\ &+ (A_1 + B_1) \sin \beta_1] e^{-\beta_1} + \\ &+ [(A_2 - B_2) \cos \beta_2 + (A_2 + B_2) \sin \beta_2] e^{\beta_2} \Big\}; \\ \vartheta^{\kappa} &= \frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{R_{\varphi}}{2c}} \left\{ [(A_1 + B_1) \cos \beta_1 + \right. \\ &+ (A_1 - B_1) \sin \beta_1] e^{-\beta_1} + \\ &+ [-(A_2 + B_2) \cos \beta_2 + (A_2 - B_2) \sin \beta_2] e^{\beta_2} \Big\}; \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} w^\kappa &= \frac{R_\varphi}{Eh} \left[ (A_1 \cos \beta_1 - B_1 \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \right. \\ &\quad \left. + (A_2 \cos \beta_2 + B_2 \sin \beta_2) e^{\beta_2} \right]; \\ u_r^\kappa &= w^\kappa \sin \theta; \quad u_x^\kappa = -w^\kappa \cos \theta \\ &\quad \left( c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \right); \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\beta_1 = \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{R_\theta d\theta}{\sqrt{2cR_\varphi}}; \quad \beta_2 = \int_{\theta_2}^{\theta} \frac{R_\theta d\theta}{\sqrt{2cR_\varphi}}, \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2). \quad (59)$$

Значения входящих в выражения (56)–(58) функций приведены в табл. 1 и на рис. 7. Приведенные выше формулы дают возможность из граничных значений на краях оболочки  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  определить постоянные  $A_1, A_2, B_1, B_2, a_x,$

$F_x^0$  и построить эпюры напряжений и смещений. Отметим, что согласно равенствам (34)

$$\kappa_r = \frac{1}{r} \vartheta; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} u_r, \quad (60)$$

т. е. горизонтальное смещение  $u_r$  и угол поворота  $\vartheta$  с точностью до множителя  $r = R\varphi \sin \theta$  совпадают с компонентами деформации края.

Поскольку  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , величины  $(-\beta_1)$  и  $\beta_2$  являются большими по абсолютной величине отрицательными величинами, обращающимися в нуль на отвечающих им краях. Поэтому функция  $e^{-\beta_1}$  по мере удаления от края  $\theta = \theta_1$  быстро затухает (этим и объясняется применяемый термин—краевой эффект). То же происходит и с  $e^{\beta_2}$  при удалении от края  $\theta = \theta_2$ .

Если края  $\theta_1$  и  $\theta_2$  отстоят один от другого на достаточно большом расстоянии, то взаимным влиянием краев можно пренебречь и удовлетворять граничным условиям на краю  $\theta = \theta_1$  за счет выбора  $A_1$  и  $B_1$ , а при  $\theta = \theta_2$  — за счет выбора  $A_2, B_2$ . Оболочки, для которых такое раздельное удовлетворение граничным условиям допустимо, называют *длинными*, в противном случае оболочку считают *короткой*. Указанное

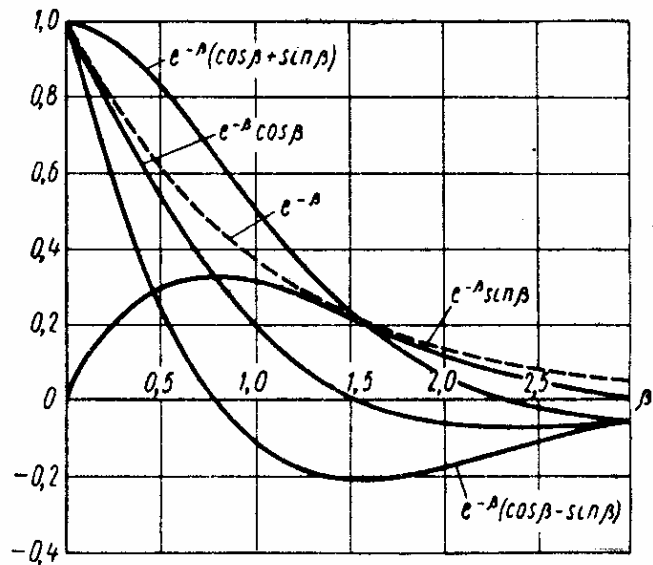


Рис. 7



1. Значение величин, входящих в формулы (56)—(58)

$\beta$	$e^{-\beta}$	$e^{-\beta} \cos \beta$	$e^{-\beta} \sin \beta$	$e^{-\beta} (\cos \beta - \sin \beta)$	$e^{-\beta} (\cos \beta + \sin \beta)$
0	1	1	0	1	1
0,25	0,779	0,755	0,192	0,563	0,947
0,50	0,606	0,532	0,291	0,241	0,823
0,75	0,472	0,346	0,321	0,025	0,667
1,00	0,368	0,199	0,310	-0,111	0,509
1,25	0,287	0,090	0,272	-0,182	0,362
1,50	0,223	0,015	0,222	-0,207	0,237
1,75	0,174	-0,031	0,171	-0,202	0,140
2,00	0,135	-0,056	0,123	-0,179	0,067
2,25	0,105	-0,066	0,082	-0,148	0,016
2,50	0,082	-0,066	0,049	-0,115	-0,017
2,75	0,064	-0,059	0,024	-0,083	-0,035
3,00	0,050	-0,050	0,007	-0,057	-0,043

разделение существенным образом зависит от принятой точности расчета. Пусть, например, мы задались точностью в 5%. Из табл. 1 видно, что при такой точности оболочку можно считать длинной, если

$$\beta_0 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R_\theta d\theta}{\sqrt{2cR_\Phi}} > 3. \quad (61)$$

Для коротких оболочек можно существенно облегчить работу, связанную с подчинением решения граничным условиям, если воспользоваться *методом начальных параметров*. Состоит он в том, что соотношения (56)—(58) преобразуют к виду (см. работу [8] к гл. 22)

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_\Phi^1}{R_\Phi} \omega^\kappa(\theta) &= C_1 K_0(\beta) - C_2 K_1(\beta) - C_3 K_2(\beta) - C_4 K_3(\beta), \\ \sqrt{\frac{R_\Phi^1}{R_\Phi}} \cdot \frac{\vartheta^\kappa(\theta)}{b} &= 4C_1 K_3(\beta) + C_2 K_0(\beta) + \\ &\quad + C_3 K_1(\beta) + C_4 K_2(\beta); \\ \frac{M_\theta^\kappa(\theta)}{Db^2} &= 4C_1 K_2(\beta) - 4C_2 K_3(\beta) + C_3 K_0(\beta) + C_4 K_1(\beta); \\ \sqrt{\frac{R_\Phi}{R_\Phi^1}} \cdot \frac{\sin \theta Q_r^\kappa(\theta)}{Db^3} &= \\ &= 4C_1 K_1(\beta) - 4C_2 K_2(\beta) - 4C_3 K_3(\beta) + C_4 K_0(\beta), \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} M_\Phi^\kappa &= \nu M_\theta^\kappa; \quad N_\Phi^\kappa = \frac{Eh}{R_\Phi} \omega^\kappa; \\ u_r^\kappa &= \omega^\kappa \sin \theta; \quad u_x^\kappa = -\omega^\kappa \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{R_{\theta} d\theta}{\sqrt{h R_{\varphi}}};$$

$$R_{\varphi}^1 = R_{\varphi}(\theta_1); \quad b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{h R_{\varphi}^1}}.$$

При  $\nu = 0,3$

$$b \approx \frac{1,285}{\sqrt{h R_{\varphi}^1}}$$

[см. формулы (47)–(49)]\*;

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= w^{\kappa}(\theta_1) = \frac{1}{\sin \theta_1} [u_r(\theta_1) - u_r^*(\theta_1) - u_r^r(\theta_1)]; \\ C_2 &= \frac{\vartheta^{\kappa}(\theta_1)}{b} = \frac{1}{b} [\vartheta(\theta_1) - \vartheta^r(\theta_1)]; \\ C_3 &= \frac{M_{\theta}^{\kappa}(\theta_1)}{D b^2} = \frac{1}{D b^2} [M_{\theta}(\theta_1) - M_{\theta}^r(\theta_1)]; \\ C_4 &= \frac{\sin \theta_1 Q_r^{\kappa}(\theta_1)}{D b^3} = \frac{\sin \theta_1}{D b^3} [Q_r(\theta_1) - \cos \theta_1 N_{\theta}^*(\theta_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned} K_0(\beta) &= \frac{1}{2} (e^{\beta} + e^{-\beta}) \cos \beta; \\ K_1(\beta) &= \frac{1}{4} [(e^{\beta} + e^{-\beta}) \sin \beta + (e^{\beta} - e^{-\beta}) \cos \beta]; \\ K_2(\beta) &= \frac{1}{4} (e^{\beta} - e^{-\beta}) \sin \beta; \\ K_3(\beta) &= \frac{1}{8} [(e^{\beta} + e^{-\beta}) \sin \beta - (e^{\beta} - e^{-\beta}) \cos \beta]. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Величины  $K_i$  — функции Крылова, значения которых приведены в табл. 2.

Задавая какие-либо две из граничных величин  $u_r(\theta_1)$ ,  $\vartheta(\theta_1)$ ,  $M_{\theta}(\theta_1)$ ,  $Q_r(\theta_1)$ , с помощью формул (64) находим два начальных параметра. Остальные два определяют, пользуясь выражениями (62) из граничных условий на краю  $\theta = \theta_2$ . Следовательно, основная трудность

\* Здесь в соотношениях (66) и (80), а также в аналогичных равенствах гл. 22–24 при определении постоянных краевого эффекта мы отбрасываем члены  $\vartheta^*(\theta_1)$ ,  $\vartheta^*(\theta_2)$ . Уточненные расчеты показывают, что сохранение указанных членов усложняет расчет, добавляя в искомое решение лишь малые члены. См. работу [14] стр. 124.

## 2. Функции А. Н. Крылова

$\beta$	$K_0(\beta)$	$K_1(\beta)$	$K_2(\beta)$	$K_3(\beta)$
0,40	0,9957	0,3996	0,0800	0,0107
0,42	0,9948	0,4196	0,0881	0,0123
0,44	0,9938	0,4394	0,0967	0,0142
0,46	0,9925	0,4593	0,1057	0,0162
0,48	0,9911	0,4791	0,1151	0,0184
0,50	0,9895	0,4989	0,1249	0,0208
0,52	0,9878	0,5187	0,1351	0,0234
0,54	0,9858	0,5384	0,1456	0,0262
0,56	0,9836	0,5582	0,1566	0,0292
0,58	0,9811	0,5778	0,1680	0,0325
0,60	0,9784	0,5974	0,1797	0,0360
0,62	0,9754	0,6169	0,1919	0,0397
0,64	0,9721	0,6364	0,2044	0,0436
0,66	0,9684	0,6558	0,2173	0,0479
0,68	0,9644	0,6751	0,2306	0,0524
0,70	0,9600	0,6944	0,2443	0,0571
0,72	0,9552	0,7135	0,2584	0,0621
0,74	0,9501	0,7326	0,2729	0,0674
0,76	0,9444	0,7515	0,2877	0,0730
0,78	0,9384	0,7704	0,3029	0,0789
0,80	0,9318	0,7891	0,3185	0,0851
0,82	0,9247	0,8077	0,3345	0,0917
0,84	0,9171	0,8261	0,3508	0,0985
0,86	0,9090	0,8443	0,3675	0,1057
0,88	0,9002	0,8624	0,3846	0,1132
0,90	0,8931	0,8803	0,4020	0,1211
0,92	0,8808	0,8980	0,4198	0,1293
0,94	0,8701	0,9155	0,4379	0,1379
0,96	0,8587	0,9328	0,4564	0,1468
0,98	0,8466	0,9499	0,4753	0,1562
1,00	0,8337	0,9667	0,4944	0,1658
1,02	0,8201	0,9832	0,5139	0,1759
1,04	0,8056	0,9995	0,5337	0,1864
1,06	0,7902	1,0154	0,5539	0,1973
1,08	0,7740	1,0311	0,5744	0,2086
1,10	0,7568	1,0464	0,5951	0,2202
1,12	0,7387	1,0613	0,6162	0,2323
1,14	0,7196	1,0759	0,6376	0,2449
1,16	0,6995	1,0901	0,6593	0,2579
1,18	0,6786	1,1039	0,6812	0,2713
1,20	0,6561	1,1173	0,7034	0,2851
1,22	0,6330	1,1306	0,7259	0,2996
1,24	0,6082	1,1426	0,7486	0,3142
1,26	0,5824	1,1545	0,7716	0,3294
1,28	0,5555	1,1659	0,7948	0,3450
1,30	0,5272	1,1767	0,8182	0,3612
1,32	0,4977	1,1870	0,8419	0,3778
1,34	0,4668	1,1966	0,8657	0,3948
1,36	0,4345	1,2056	0,8897	0,4124
1,38	0,4008	1,2139	0,9139	0,4304
1,40	0,3656	1,2216	0,9383	0,4489
1,42	0,3289	1,2286	0,9628	0,4680
1,44	0,2907	1,2333	0,9764	0,4882
1,46	0,2509	1,2402	1,0122	0,5075
1,48	0,2095	1,2448	1,0370	0,5280

Продолжение табл. 2

$\beta$	$K_0(\beta)$	$K_1(\beta)$	$K_2(\beta)$	$K_3(\beta)$
1,50	0,1664	1,2485	1,0619	0,5489
1,52	0,1216	1,2514	1,0870	0,5704
1,54	0,0746	1,2534	1,1120	0,5924
1,56	0,0268	1,2544	1,1371	0,6149
$\frac{\pi}{2}$	0,0000	1,2546	1,1506	0,6273
1,58	—0,0233	1,2545	1,1622	0,6379
1,60	—0,0753	1,2535	1,1872	0,6614
1,62	—0,1291	1,2514	1,2123	0,6854
1,64	—0,1849	1,2483	1,2373	0,7099
1,66	—0,2427	1,2440	1,2622	0,7349
1,68	—0,3026	1,2386	1,2871	0,7604
1,70	—0,3644	1,2321	1,3118	0,7862
1,72	—0,4284	1,2240	1,3363	0,8129
1,74	—0,4945	1,2148	1,3607	0,8398
1,76	—0,5628	1,2042	1,3849	0,8673
1,78	—0,6333	1,1923	1,4089	0,8952
1,80	—0,7060	1,1788	1,4326	0,9236
1,82	—0,7811	1,1640	1,4560	0,9525
1,84	—0,8584	1,1476	1,4791	0,9819
1,86	—0,9382	1,1296	1,5019	1,0117
1,88	—1,0203	1,1100	1,5243	1,0419
1,90	—1,1049	1,0888	1,5463	1,0727
1,92	—1,1920	1,0658	1,5679	1,1038
1,94	—1,2815	1,0411	1,5889	1,1354
1,96	—1,3736	1,0145	1,6095	1,1673
1,98	—1,4683	0,9861	1,6295	1,1997
2,00	—1,5656	0,9557	1,6489	1,2325
2,02	—1,6656	0,9235	1,6677	1,2657
2,04	—1,7682	0,8891	1,6859	1,2992
2,06	—1,8734	0,8528	1,7033	1,3331
2,08	—1,9815	0,8142	1,7199	1,3674
2,10	—2,0923	0,7735	1,7358	1,4019
2,12	—2,2058	0,7305	1,7509	1,4368
2,14	—2,3221	0,6852	1,7650	1,4719
2,16	—2,4413	0,6376	1,7783	1,5074
2,18	—2,5633	0,5876	1,7905	1,5431
2,20	—2,6882	0,5351	1,8018	1,5790
2,22	—2,8160	0,4800	1,8119	1,6151
2,24	—2,9466	0,4224	1,8209	1,6515
2,26	—3,0802	0,3621	1,8288	1,6880
2,28	—3,2167	0,2992	1,8354	1,7246
2,30	—3,3562	0,2334	1,8407	1,7614
2,32	—3,4986	0,1648	1,8447	1,7983
2,34	—3,6439	0,0935	1,8473	1,8352
2,36	—3,7922	0,0196	1,8484	1,8721
2,38	—3,9435	—0,0582	1,8480	1,9091
2,40	—4,0976	—0,1386	1,8461	1,9460
2,42	—4,2548	—0,2221	1,8425	1,9829
2,44	—4,4150	—0,3088	1,8372	2,0198
2,46	—4,5780	—0,3987	1,8301	2,0564
2,48	—4,7439	—0,4920	1,8212	2,0929
2,50	—4,9128	—0,5885	1,8104	2,2192
2,52	—5,0846	—0,6885	1,7976	2,1653
2,54	—5,2593	—0,7919	1,7829	2,2012
2,56	—5,4368	—0,8989	1,7660	2,2366

Продолжение табл. 2

$\beta$	$K_0(\beta)$	$K_1(\beta)$	$K_2(\beta)$	$K_3(\beta)$
2,58	—5,6172	—1,0094	1,7469	2,2718
2,60	—5,8003	—1,1236	1,7255	2,3065
2,62	—5,9862	—1,2415	1,7019	2,3408
2,64	—6,1748	—1,3630	1,6759	2,3746
2,66	—6,3661	—1,4884	1,6473	2,4078
2,68	—6,6580	—1,6477	1,6163	2,4404
2,70	—6,7565	—1,7509	1,5826	2,4724
2,72	—6,9556	—1,8880	1,5462	2,5037
2,74	—7,1571	—2,0291	1,5071	2,5343
2,76	—7,3611	—2,1743	1,4650	2,5640
2,78	—7,5673	—2,3236	1,4201	2,5928
2,80	—7,7759	—2,4770	1,3721	2,6208
2,82	—7,9866	—2,6346	1,3210	2,6477
2,84	—8,1995	—2,7965	1,2667	2,6736
2,86	—8,4144	—2,9626	1,2091	2,6984
2,88	—8,6312	—3,1331	1,1481	2,7219
2,90	—8,8471	—3,3079	1,0837	2,7443
2,92	—9,0708	—3,4871	1,0158	2,7653
2,94	—9,2923	—3,6707	0,9442	2,7849
2,96	—9,5158	—3,8588	0,8689	2,8030
2,98	—9,7407	—4,0513	0,7898	2,8196
3,00	—9,9669	—4,2484	0,7068	2,8346
3,02	—10,1943	—4,4500	0,6198	2,8479
3,04	—10,4225	—4,6557	0,5288	2,8593
3,06	—10,6516	—4,8669	0,4336	2,8690
3,08	—10,8815	—5,0823	0,3341	2,8766
3,10	—11,1119	—5,3022	0,2303	2,8823
3,12	—11,3427	—5,5268	0,1220	2,8858
3,14	—11,5919	—5,7559	0,0091	2,8872
$\pi$	—11,5919	—5,7743	0,0000	2,8872
3,16	—11,8045	—5,9897	—0,1083	2,8862
3,18	—12,0353	—6,2281	—0,2304	2,8828
3,20	—12,2656	—6,4710	—0,3574	2,8769
3,22	—12,4956	—6,7187	—0,4893	2,8685
3,24	—12,7373	—6,9709	—0,6262	2,8573
3,26	—12,9527	—7,2277	—0,7681	2,8434
3,28	—13,1795	—7,4890	—0,9153	2,8266
3,30	—13,4048	—7,7549	—1,0678	2,8067
3,32	—13,6285	—8,0252	—1,2255	2,7838
3,34	—13,8501	—8,8000	—1,3888	2,7577
3,36	—14,0695	—8,5792	—1,5576	2,7282
3,38	—14,2866	—8,8627	—1,7320	2,6953
3,40	—14,5008	—9,1506	—1,9121	2,6589
3,42	—14,7118	—9,4427	—2,0980	2,6188
3,44	—14,9197	—9,7391	—2,2899	2,5750
3,46	—15,1238	—10,0395	—2,4876	2,5272
3,48	—15,3238	—10,3440	—2,6915	2,4754
3,50	—15,5198	—10,6524	—2,9014	2,4195
3,52	—15,7108	—10,9647	—3,1176	2,3593
3,54	—15,8971	—11,2808	—3,3400	2,2948
3,56	—16,0780	—11,6007	—3,5689	2,2281
3,58	—16,2531	—11,9240	—3,8041	2,1519
3,60	—16,4218	—12,2507	—4,0458	2,0735

при удовлетворении граничным условиям состоит в решении системы двух алгебраических уравнений [вместо четырех при использовании выражений (56)—(58)].

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= w^\kappa(\theta_2) = \frac{1}{\sin \theta_2} [u_r(\theta_2) - u_r^*(\theta_2) - u_r^r(\theta_2)]; \\ d_2 &= \frac{\vartheta^\kappa(\theta_2)}{b} = \frac{1}{b} [\vartheta(\theta_2) - \vartheta^r(\theta_2)]; \\ d_3 &= \frac{M_\theta^\kappa(\theta_2)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2} [M_\theta(\theta_2) - M_\theta^r(\theta_2)]; \\ d_4 &= \frac{\sin \theta_2 Q_r^\kappa(\theta_2)}{Db^3} = \frac{\sin \theta_2}{Db^3} [Q_r(\theta_2) - \cos \theta_2 N_\theta^*(\theta_2)] \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

и

$$\rho = \sqrt{\frac{R_\varphi^1}{R_\varphi^2}}; \quad R_\varphi^2 = R_\varphi(\theta_2);$$

$$\bar{K}_i = K_i [\beta(\theta_2)] \quad (67)$$

$$(i = 0, 1, 2, 3),$$

рассмотрим некоторые наиболее важные варианты граничных условий.

К одному краю предложены распределенные изгибающий момент и перерезывающее усилие, а на другом — задано радиальное перемещение и угол поворота (рис. 8, а). В частности, если край  $\theta = \theta_2$  жестко заделан, следует полагать  $u_2 = 0$ ;  $\vartheta_2 = 0$ .

Удовлетворяя с помощью выражений (62) и (64) граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} M_\theta(\theta_1) &= M_1; & Q_r(\theta_1) &= Q_1; \\ u_r(\theta_2) &= u_2; & \vartheta(\theta_2) &= \vartheta_2, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

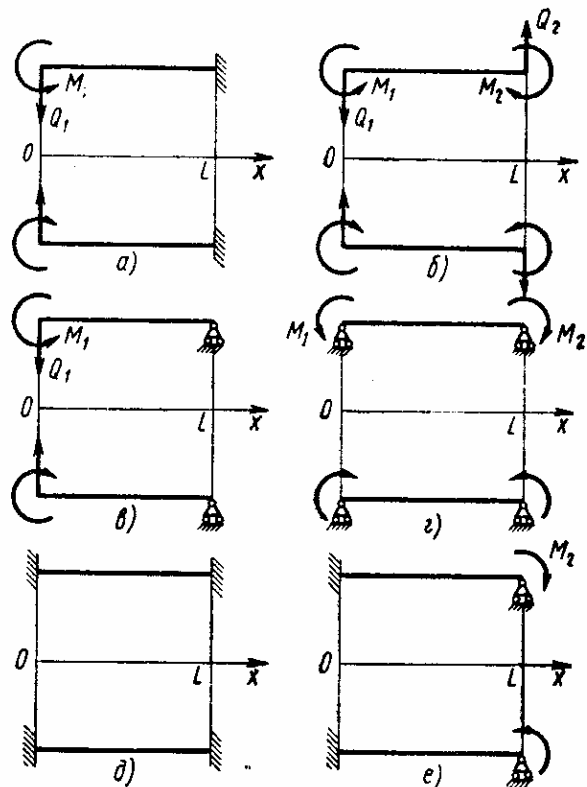


Рис. 8

находим

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{Db^2} [M_1 - M'_\theta(\theta_1)]; \\ C_4 &= \frac{\sin \theta_1}{Db^3} [Q_1 - \cos \theta_1 N'_\theta(\theta_1)]; \\ C_1 &= -C_4\varphi_1 - C_3\varphi_2 + \rho d_2\varphi_3 + \rho^2 d_1\varphi_4; \\ C_2 &= -C_4\varphi_2 - C_3\varphi_5 + \rho d_2\varphi_4 - \rho^2 d_1\varphi_6, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sin \theta_2} [u_2 - u'_r(\theta_2) - u''_r(\theta_2)];$$

$$d_2 = \frac{1}{b} [\vartheta_2 - \vartheta'(\theta_2)];$$

$$\varphi_1 = \frac{\bar{K}_1\bar{K}_2 - \bar{K}_0\bar{K}_3}{(\bar{K}_0)^2 + 4\bar{K}_1\bar{K}_3}; \quad \varphi_2 = \frac{(\bar{K}_1)^2 - \bar{K}_0\bar{K}_2}{(\bar{K}_0)^2 + 4\bar{K}_1\bar{K}_3};$$

$$\varphi_3 = \frac{\bar{K}_1}{(\bar{K}_0)^2 + 4\bar{K}_1\bar{K}_3}; \quad \varphi_4 = \frac{\bar{K}_0}{(\bar{K}_0)^2 + 4\bar{K}_1\bar{K}_3};$$

$$\varphi_5 = \frac{\bar{K}_0\bar{K}_1 + 4\bar{K}_2\bar{K}_3}{(\bar{K}_0)^2 + 4\bar{K}_1\bar{K}_3}; \quad \varphi_6 = \frac{4\bar{K}_3}{(\bar{K}_0)^2 + 4\bar{K}_1\bar{K}_3}.$$

Значения функций  $\varphi_1$ — $\varphi_6$  приведены в табл. 3. Подсчитав параметры  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ , находим с помощью формул (62) слагаемые, отвечающие краевому эффекту. Добавляя к ним соответствующие безмоментные и термоупругие слагаемые, получаем полное решение рассматриваемой задачи.

К обоим краям приложены распределенные моменты и радиальные усилия (рис. 8, б).

Удовлетворяя с помощью формул (64) и (62) граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} M_\theta(\theta_1) &= M_1; \quad Q_r(\theta_1) = Q_1; \\ M_\theta(\theta_2) &= M_2; \quad Q_r(\theta_2) = Q_2, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

находим

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{Db^2} [M_1 - M''_\theta(\theta_1)]; \\ C_4 &= \frac{\sin \theta_1}{Db^3} [Q_1 - \cos \theta_1 N''_\theta(\theta_1)]; \\ C_1 &= C_4\varphi_7 + C_3\varphi_8 + \frac{1}{\rho} d_4\varphi_9 - d_3\varphi_{10}; \\ C_2 &= C_4\varphi_8 + C_3\varphi_{11} + \frac{1}{\rho} d_4\varphi_{10} - d_3\varphi_{12}; \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

3. Значения функций  $\Psi_1—\Psi_{25}$ 

$\beta_2$	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$	$\Psi_5$	$\Psi_6$
0,40	0,0211	0,0794	0,3962	0,9873	0,3979	0,0424
0,60	0,0692	0,1736	0,5726	0,9378	0,5851	0,1380
0,80	0,1513	0,2867	0,6941	0,8197	0,7422	0,2994
1,00	0,2542	0,3909	0,7235	0,6239	0,8485	0,4963
1,20	0,3513	0,4616	0,6554	0,3849	0,9006	0,6690
1,40	0,4220	0,4938	0,5249	0,1571	0,9159	0,7716
1,60	0,4630	0,4999	0,3773	—0,0227	0,9171	0,7964
1,80	0,4823	0,4947	0,2429	—0,1455	0,9190	0,7612
2,00	0,4894	0,4879	0,1334	—0,2186	0,9260	0,6883
2,20	0,4911	0,4837	0,0504	—0,2534	0,9374	0,5955
2,40	0,4912	0,4827	—0,0088	—0,2608	0,9508	0,4954
2,60	0,4914	0,4842	—0,0483	—0,2492	0,9639	0,3964
2,80	0,4922	0,4871	—0,0718	—0,2254	0,9753	0,3039
3,00	0,4934	0,4904	—0,0830	—0,1948	0,9841	0,2216
3,14	0,4945	0,4926	—0,0853	—0,1713	0,9889	0,1706

$\beta_2$	$\Psi_7$	$\Psi_8$	$\Psi_9$	$\Psi_{10}$	$\Psi_{11}$	$\Psi_{12}$
0,40	—2,5082	—9,4291	—1,2594	—9,4162	—47,234	—47,034
0,60	—1,6727	—4,1976	—0,8349	—4,1674	—14,156	—13,854
0,80	—1,2536	—2,3739	—0,6203	—2,3214	—6,1494	—5,7514
1,00	—1,0092	—1,5514	—0,4926	—1,4688	—3,3683	—2,8720
1,20	—0,8496	—1,1161	—0,4043	—0,9980	—2,1782	—1,5853
1,40	—0,7395	—0,8652	—0,3380	—0,7066	—1,6050	—0,9199
1,60	—0,6626	—0,7162	—0,2849	—0,5114	—1,3124	—0,5400
1,80	—0,6073	—0,6228	—0,2396	—0,3717	—1,1572	—0,3058
2,00	—0,5687	—0,5670	—0,2000	—0,2675	—1,0761	—0,1550
2,20	—0,5422	—0,5339	—0,1644	—0,1876	—1,0349	—0,0557
2,40	—0,5246	—0,5154	—0,1323	—0,1255	—1,0154	0,0094
2,60	—0,5135	—0,5060	—0,1035	—0,0775	—1,0072	0,0504
2,80	—0,5069	—0,5017	—0,0782	—0,0410	—1,0044	0,0740
3,00	—0,5033	—0,5002	—0,0565	—0,0141	—1,0038	0,0847
3,14	—0,5019	—0,5000	—0,0433	0	—1,0037	0,0866

$\beta_2$	$\Psi_{13}$	$\Psi_{14}$	$\Psi_{15}$	$\Psi_{16}$	$\Psi_{17}$	$\Psi_{18}$	$\Psi_{19}$
0,40	—1,8785	—4,7095	—4,6879	—0,5019	—11,931	—11,681	—3,7541
0,60	—1,2551	—2,1158	—2,0707	—0,4988	—3,7660	—3,3913	—2,4913
0,80	—0,9472	—1,2263	—1,1469	—0,4948	—1,8517	—1,3544	—1,8517
1,00	—0,7687	—0,8344	—0,7114	—0,4881	—1,2310	—0,6136	—1,4554
1,20	—0,6569	—0,6410	—0,4665	—0,4761	—1,0061	—0,2739	—1,1747
1,40	—0,5850	—0,5426	—0,3110	—0,4571	—0,9305	—0,0931	—0,9554
1,60	—0,5398	—0,4952	—0,2038	—0,4300	—0,9173	+0,0122	—0,7719
1,80	—0,5128	—0,4764	—0,1259	—0,3946	—0,9300	0,0754	—0,6120
2,00	—0,4978	—0,4730	—0,0682	—0,3516	—0,9504	0,1116	—0,4704
2,20	—0,4924	—0,4772	—0,0257	—0,3031	—0,9701	0,1290	—0,3459
2,40	—0,4913	—0,4839	0,0045	—0,2521	—0,9854	0,1327	—0,2392
2,60	—0,4926	—0,4903	0,0246	—0,2016	—0,9955	0,1268	—0,1508
2,80	—0,4948	—0,4953	0,0365	—0,1543	—1,0011	0,1145	—0,0808
3,00	—0,4969	—0,4986	0,0421	—0,1123	—1,0034	0,0987	—0,0280
3,14	—0,4981	—0,5000	0,0431	—0,0863	—1,0037	0,0866	0



Продолжение табл. 3

$\beta_2$	$\Phi_{20}$	$\Phi_{21}$	$\Phi_{22}$	$\Phi_{23}$	$\Phi_{24}$	$\Phi_{25}$
0,40	-0,1331	2,5066	0,0668	2,4959	-0,5323	0,2672
0,60	-0,1993	1,6857	0,0994	1,6498	-0,7967	0,3977
0,80	-0,2639	1,2946	0,1306	1,2108	-1,0557	0,5223
1,00	-0,3252	1,0855	0,1587	0,9255	-1,3009	0,6349
1,20	-0,3806	0,9757	0,1812	0,7101	-1,5222	0,7248
1,40	0,4273	0,9274	0,1953	0,5315	-1,7093	0,7813
1,60	-0,4631	0,9173	0,1992	0,3774	-1,8525	0,7966
1,80	-0,4875	0,9289	0,1924	0,2455	-1,9500	0,7694
2,00	-0,5022	0,9503	0,1766	0,1367	-2,0089	0,7063
2,20	-0,5077	0,9691	0,1539	0,0522	-2,0309	0,6156
2,40	-0,5089	0,9849	0,1283	-0,0091	-2,0355	0,5132
2,60	-0,5075	0,9953	0,1023	-0,0498	-2,0299	0,4093
2,80	-0,5052	1,0011	0,0780	-0,0737	-2,0209	0,3119
3,00	-0,5031	1,0034	0,0565	-0,0846	-2,0123	0,2259
3,14	-0,5019	1,0037	0,0433	-0,0866	-2,0075	0,1732

где

$$d_3 = \frac{1}{Db^2} [M_2 - M'_0(\theta_2)]; \quad d_4 = \frac{\sin \theta_2}{Db^3} [Q_2 - \cos \theta_2 N'_0(\theta_2)];$$

$$\Phi_7 = \frac{\bar{K}_2 \bar{K}_1 - \bar{K}_3 \bar{K}_0}{4 [\bar{K}_1 \bar{K}_3 - (\bar{K}_2)^2]}, \quad \Phi_8 = \frac{4 (\bar{K}_3)^2 + \bar{K}_2 \bar{K}_0}{4 [\bar{K}_1 \bar{K}_3 - (\bar{K}_2)^2]},$$

$$\Phi_9 = \frac{\bar{K}_3}{4 [\bar{K}_1 \bar{K}_3 - (\bar{K}_2)^2]},$$

$$\Phi_{10} = \frac{\bar{K}_2}{4 [\bar{K}_1 \bar{K}_3 - (\bar{K}_2)^2]}, \quad \Phi_{11} = \frac{\bar{K}_0 \bar{K}_1 + 4 \bar{K}_2 \bar{K}_3}{4 [\bar{K}_1 \bar{K}_3 - (\bar{K}_2)^2]},$$

$$\Phi_{12} = \frac{\bar{K}_1}{4 [\bar{K}_1 \bar{K}_3 - (\bar{K}_2)^2]}.$$

Значения функций  $\Phi_7$ — $\Phi_{12}$  приведены в табл. 3.

Один край нагружен распределенными моментом и радиальным усилием, на другом — задан момент и радиальное смещение (рис. 8, в). В случае шарнирного опирания  $u_2 = 0$ ,  $M_2 = 0$ .

Удовлетворяя с помощью формул (64) и (62) граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} M_0(\theta_1) &= M_1; & Q_r(\theta_1) &= Q_1; \\ M_0(\theta_2) &= M_2; & u_r(\theta_2) &= u_2, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{Db^2} [M_1 - M_\theta^r(\theta_1)]; \\ C_4 &= \frac{\sin \theta_1}{Db^2} [Q_1 - \cos \theta_1 N_\theta^*(\theta_1)]; \\ C_1 &= C_4 \varphi_{13} + C_3 \varphi_{14} - d_3 \varphi_{15} + \rho^2 d_1 \varphi_{16}; \\ C_2 &= C_4 \varphi_{14} + C_3 \varphi_{17} - d_3 \varphi_{18} + \rho^2 d_1 \varphi_{19}, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sin \theta_1} [u_2 - u_r^*(\theta_2) - u_r^r(\theta_2)]; \\ d_3 &= \frac{1}{Db^2} [M_2 - M_\theta^r(\theta_2)]; \\ \varphi_{13} &= \frac{(\bar{K}_1)^2 + 4(\bar{K}_3)^2}{4(\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2)}; \quad \varphi_{14} = \frac{\bar{K}_0 \bar{K}_1 + 4\bar{K}_2 \bar{K}_3}{4(\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2)}; \\ \varphi_{15} &= \frac{\bar{K}_1}{4(\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2)}; \\ \varphi_{16} &= \frac{\bar{K}_3}{\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2}; \quad \varphi_{17} = \frac{(\bar{K}_0)^2 + 4(\bar{K}_2)^2}{4(\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2)}; \\ \varphi_{18} &= \frac{\bar{K}_0}{4(\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2)}; \quad \varphi_{19} = \frac{\bar{K}_2}{\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2}. \end{aligned}$$

Значения функций  $\varphi_{13} - \varphi_{19}$  приведены в табл. 3.

Оба края нагружены распределенным моментом и заданы радиальные смещения (рис. 8, з). В случае, если оба края шарнирно оперты, следует положить

$$M_1 = M_2 = 0; \quad u_1 = u_2 = 0.$$

Удовлетворяя с помощью формул (64) и (62) граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} M_\theta(\theta_1) &= M_1; \quad u_r(\theta_1) = u_1; \\ M_\theta(\theta_2) &= M_2; \quad u_r(\theta_2) = u_2, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\sin \theta_1} [u_1 - u_r^*(\theta_1) - u_r^r(\theta_1)]; \\ C_3 &= \frac{1}{Db^2} [M_1 - M_\theta^r(\theta_1)]; \\ C_2 &= C_3 \varphi_{20} + C_1 \varphi_{21} - d_3 \varphi_{22} - d_1 \rho^2 \varphi_{23}; \\ C_4 &= -C_3 \varphi_{21} + C_1 \varphi_{24} + d_3 \varphi_{23} - d_1 \rho^2 \varphi_{25}, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sin \theta_1} [u_2 - u_r^*(\theta_2) - u_r'(\theta_2)];$$

$$d_3 = \frac{1}{Db^2} [M_2 - M_0'(\theta_2)];$$

$$\varphi_{20} = \frac{\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2}{(\bar{K}_1)^2 + 4(\bar{K}_3)^2}; \quad \varphi_{21} = \frac{\bar{K}_0 \bar{K}_1 + 4\bar{K}_2 \bar{K}_3}{(\bar{K}_1)^2 + 4(\bar{K}_3)^2};$$

$$\varphi_{22} = \frac{\bar{K}_3}{(\bar{K}_1)^2 + 4(\bar{K}_3)^2}; \quad \varphi_{23} = \frac{\bar{K}_1}{(\bar{K}_1)^2 + 4(\bar{K}_3)^2};$$

$$\varphi_{24} = \frac{4(\bar{K}_0 \bar{K}_3 - \bar{K}_1 \bar{K}_2)}{(\bar{K}_1)^2 + 4(\bar{K}_3)^2}; \quad \varphi_{25} = \frac{4\bar{K}_3}{(\bar{K}_1)^2 + 4(\bar{K}_3)^2}.$$

Значения функций  $\varphi_{20}$ — $\varphi_{25}$  приведены в табл. 3.

На краях заданы радиальные смещения и углы поворота (рис. 8, д). При жесткой заделке краев следует положить  $u_1 = u_2 = 0$ ;  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ . Удовлетворяя с помощью формул (64) и (62) граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u_r(\theta_1) &= u_1; & \vartheta(\theta_1) &= \vartheta_1; \\ u_r(\theta_2) &= u_2; & \vartheta(\theta_2) &= \vartheta_2, \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\sin \theta_1} [u_1 - u_r^*(\theta_1) - u_r'(\theta_1)]; \\ C_2 &= \frac{1}{b} [\vartheta_1 - \vartheta'(\theta_1)]; \\ C_3 &= 4 [C_2 \varphi_7 - C_1 \varphi_8 + \rho d_2 \varphi_9 + \rho^2 d_1 \varphi_{10}]; \\ C_4 &= 4 [-C_2 \varphi_8 + C_1 \varphi_{11} - \rho d_2 \varphi_{10} - \rho^2 d_1 \varphi_{12}], \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sin \theta_2} [u_2 - u_r^*(\theta_2) - u_r'(\theta_2)]; \quad d_2 = \frac{1}{b} [\vartheta_2 - \vartheta'(\theta_2)].$$

Значения функций  $\varphi_7$ — $\varphi_{12}$  приведены в табл. 3.

На одном краю заданы радиальное смещение и угол поворота, на другом — заданы момент и радиальное смещение (рис. 8, е).

В частности, если край  $\theta = \theta_1$  жестко заделан, следует полагать  $u_1 = 0$ ,  $\vartheta_1 = 0$ ; если край  $\theta = \theta_2$  шарнирно оперт, следует полагать  $u_2 = 0$ ,  $M_2 = 0$ .

Удовлетворяя с помощью формул (64) и (62) граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u_r(\theta_1) &= u_1; \quad \vartheta(\theta_1) = \vartheta_1, \\ u_r(\theta_2) &= u_2; \quad M_\theta(\theta_2) = M_2, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\sin \theta_1} [u_1 - u_r^*(\theta_1) - u_r^r(\theta_1)], \\ C_2 &= \frac{1}{b} [\vartheta_1 - \vartheta^r(\theta_1)]; \\ C_3 &= -4C_1\varphi_{14} + 4C_2\varphi_{13} + 4\rho^2 d_1\varphi_{15} + d_3\varphi_{16}; \\ C_4 &= 4C_1\varphi_{17} - 4C_2\varphi_{14} - 4\rho^2 d_1\varphi_{18} - d_3\varphi_{19}, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sin \theta_2} [u_2 - u_r^*(\theta_2) - u_r^r(\theta_2)]; \quad d_3 = \frac{1}{Db^2} [M_2 - M_\theta^r(\theta_2)].$$

Значения функций  $\varphi_{13}$ — $\varphi_{19}$  приведены в табл. 3.

В случае *очень коротких* оболочек (см. стр. 695) соотношения (62) следует заменить зависимостями, аналогичными (17а) и (18а) гл. 22.

Для *длинных* оболочек имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^r + \alpha_{11}(Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{12}(M_0 - M_0^r); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^r + \alpha_{12}(Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{22}(M_0 - M_0^r), \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_r(\theta_0); \quad u_0^* = u_r^*(\theta_0); \quad u_0^r = u_r^r(\theta_0); \quad \vartheta_0 = \vartheta(\theta_0); \\ \vartheta_0^r &= \vartheta^r(\theta_0); \quad M_0 = M_\theta(\theta_0); \\ M_0^r &= M_\theta^r(\theta_0); \quad Q_0 = Q_r(\theta_0); \quad Q_0^* = Q_r^*(\theta_0); \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mu 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left(\frac{r_0}{h}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sin \theta_0} \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{r_0}{h}\right) \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= \mu 4 [3(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{r_0}{h}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_0}} \cdot \frac{1}{Eh^2} \times \\ &\quad \times [r_0 = R_\varphi(\theta_0) \sin \theta_0] \\ \left[ \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 12(1-\nu^2) \left(\frac{r_0}{h}\right)^2 \frac{1}{(Eh)^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

а  $\mu = -1$  на краю  $\theta_0 = \theta_1$ ,  $\mu = +1$  на краю  $\theta_0 = \theta_2$  ( $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ). Полные напряжения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(u)} &= \sigma_{\theta}^{r(u)} + \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \times \\ &\quad \times \sigma_k \sin \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_{\varphi}^{(u)} &= \sigma_{\varphi}^{r(u)} + \nu \left[ \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sigma_k \sin \beta e^{-\beta} \right]; \\ \sigma_{\theta}^{(p)} &= \sigma_{\theta}^{*(p)} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_{\theta}^{(p)} &= \sigma_{\theta}^{*(p)}, \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^r)}{h^2}; \\ \sigma_k &= 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r_0}{h}} \sqrt{\sin \theta_0} \frac{Q_0 - Q_0^*}{h}; \\ \sigma_{\theta}^{r(u)} &= \frac{6M_{\theta}^r}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi}^{r(u)} = \frac{6M_{\varphi}^r}{h^2}; \\ \sigma_{\theta}^{*(p)} &= \frac{N_{\theta}^*}{h}; \quad \sigma_{\varphi}^{*(p)} = \frac{N_{\varphi}^*}{h}; \\ \beta &= \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left| \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_{\theta} d\theta}{\sqrt{h | R_{\varphi} |}} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Смещения и угол поворота определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_r^* + u_r^r + \frac{R_{\varphi} \sin \theta}{E} \times \\ &\times \left\{ -\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \right\}; \\ u_x &= u_x^* + u_x^r - \frac{R_{\varphi} \cos \theta}{E} \times \\ &\times \left\{ -\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{E} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta^* + \vartheta^I + \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E} \sqrt{\frac{R_\varphi}{h}} \times \\ &\times \left\{ \mu \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \cos \beta e^{-\beta} - \sigma_k (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Приведенные соотношения значительно упрощают расчет длинных оболочек. В случае статических граничных условий (заданы  $Q_0$  и  $M_0$ ) напряжения подсчитывают по формулам (83), а соотношения (85) дают значения смещений и угла поворота. В случае геометрических граничных условий, условий упругого сопряжения или смешанных (когда задается одна геометрическая величина и одна статическая) из системы (80) определяют величины  $(Q_0 - Q_0^*)$ ,  $(M_0 - M_0')$ , после чего напряжения подсчитывают по формулам (83), а смещения и угол поворота — по соотношениям (85).

### ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ ( $k = 1$ )

Кроме осесимметричного случая несамоуравновешенную краевую нагрузку дает и так называемый *обратносимметричный* случай ( $k = 1$ ). Его иногда называют также случаем *антисимметричной* или *ветровой* нагрузки. Так же, как и в осесимметричном случае, напряженно-деформированное состояние удастся представить в виде суммы безмоментного, термоупругого состояний и краевого эффекта. При этом

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta, 1} &= N_{\theta, 1}^*; \quad N_{\varphi, 1} = N_{\varphi, 1}^* + N_{\varphi, 1}^\kappa; \quad T_1 = T_1^*; \\ M_{\theta, 1} &= M_{\theta, 1}^I + M_{\theta, 1}^\kappa; \quad M_{\varphi, 1} = M_{\varphi, 1}^I + M_{\varphi, 1}^\kappa; \\ H_1 &= H_1^I; \\ u_{r, 1} &= u_{r, 1}^* + u_{r, 1}^I + u_{r, 1}^\kappa; \\ u_{x, 1} &= u_{x, 1}^* + u_{x, 1}^I + u_{x, 1}^\kappa; \\ v_1 &= v_1^* + v_1^I; \quad \vartheta_1 = \vartheta_1^* + \vartheta_1^I + \vartheta_1^\kappa; \\ Q_{r, 1} &= \cos \theta N_{\theta, 1}^* + Q_{r, 1}^\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

**Безмоментная часть решения.** Безмоментные усилия подсчитываются по формулам (см. работу [14] стр. 140)

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta, 1}^* &= \frac{W}{R_\theta \sin^2 \theta}; \quad N_{\varphi, 1}^* = R_\varphi q_{n, 1} - \frac{W}{R_\theta \sin^2 \theta}; \\ T_1^* &= -\frac{1}{R_\theta \sin \theta} \frac{dW}{d\theta} + R_\varphi (q_{n, 1} \cos \theta - q_{\theta, 1} \sin \theta), \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

где

$$W = \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \left\{ \frac{1}{\pi} \mathfrak{M}_y^0 + \frac{1}{\pi} F_z^0 \int_{\theta_1}^{\theta} R_\theta \sin \theta d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\theta_1}^{\theta} \Phi(\theta) R_\theta \sin \theta d\theta \right\}; \quad (88)$$

$$\Phi(\theta) = (q_{n,1} \cos \theta - q_{\theta,1} \sin \theta) R_\varphi^2 \sin \theta - \int_{\theta_1}^{\theta} (q_{n,1} \sin \theta + \\ + q_{\theta,1} \cos \theta - q_{\varphi,1}) R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta \quad (89)$$

Величины

$$F_z^0 = \pi R_\varphi(\theta_1) \sin \theta_1 [\cos \theta_1 N_{\theta,1}^*(\theta_1) - T_1^*(\theta_1)]; \quad (90)$$

$$\mathfrak{M}_y^0 = \pi R_\varphi^2(\theta_1) \sin^3 \theta_1 N_{\theta,1}^*(\theta_1) \quad (91)$$

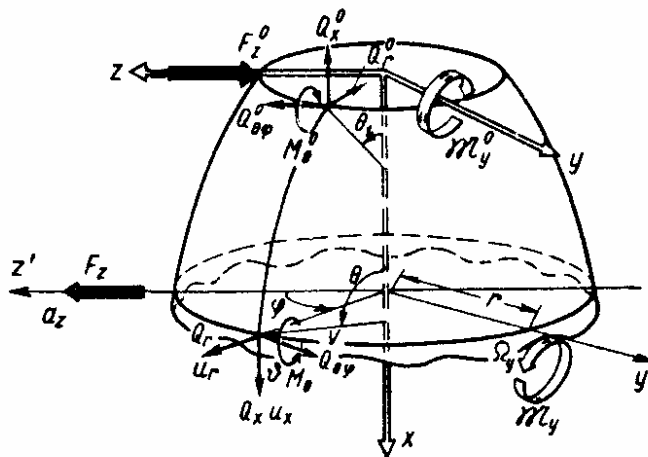


Рис. 9

являются составляющими главного вектора и главного момента, усилий и изгибающего момента, приложенных к краю  $\theta = \theta_1$ . Положительные направления этих величин показаны на рис. 9.

В обратносимметричном случае та же роль, что  $\vartheta$  в симметричном случае, играет упругий поворот

$$\chi = \vartheta_1 - \frac{u_{x,1}}{R_\varphi \sin \theta}, \quad (92)$$

представляющий собой полный поворот (в меридиональном сечении  $\varphi = 0$ )  $\vartheta_1$  за вычетом поворота параллельного круга как жесткого целого, на угол  $\frac{u_{x,1}}{R_\varphi \sin \theta}$  (см. работу [14] стр. 136). Эта величина является деформационной (см. формулы (34)). Аналогично величину  $u_r$  из симметричного случая заменяет также деформационная величина

$$R_\varphi \sin \theta \varepsilon_{\varphi,1} = r\omega. \quad (93)$$

Обе величины не содержат в себе перемещений оболочки как жесткого целого.

Геометрические безмоментные величины подсчитывают по формулам

$$\begin{aligned}
 \chi^* &= \frac{1}{Eh} \left\{ -\frac{R_\varphi^2 \sin \theta}{R_\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \frac{N_{\theta, 1}^* + N_{\varphi, 1}^*}{R_\varphi \sin \theta} \right) + \right. \\
 &\quad + (1 + \nu) \left[ -\frac{1}{R_\theta R_\varphi \sin^3 \theta} \cdot \frac{d R_\varphi \sin \theta W}{d\theta} + \right. \\
 &\quad \left. \left. + R_\varphi (q_{n, 1} \operatorname{ctg} \theta - 2q_{\theta, 1}) \right] \right\}; \\
 \vartheta_1^* &= \chi^* + \frac{u_{x, 1}^*}{R_\varphi \sin \theta}; \\
 u_{x, 1}^* &= R_\varphi \sin \theta \left\{ \Omega_y - \frac{1}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_\theta} \times \right. \right. \\
 &\times \frac{d(N_{\theta, 1}^* + N_{\varphi, 1}^*)}{d\theta} + (1 + \nu) \left( \frac{N_{\theta, 1}^*}{R_\theta} + \frac{N_{\varphi, 1}^*}{R_\varphi} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{R_\varphi \sin^2 \theta} (N_{\theta, 1}^* + N_{\varphi, 1}^*) - (1 + \nu) \times \\
 &\times \left[ -\frac{\cos \theta}{R_\theta R_\varphi^2 \sin^4 \theta} \cdot \frac{d R_\varphi \sin \theta W}{d\theta} + \frac{W}{R_\theta R_\varphi \sin^2 \theta} + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \operatorname{ctg} \theta (q_{n, 1} \operatorname{ctg} \theta - 2q_{\theta, 1}) \right] \right\} R_\theta d\theta; \\
 u_{r, 1}^* &= a_z + \frac{1}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \frac{R_\varphi \sin \theta}{R_\theta} \frac{d(N_{\theta, 1}^* + N_{\varphi, 1}^*)}{d\theta} + \right. \\
 &\quad + (1 + \nu) \left[ -\cos \theta \left( N_{\varphi, 1}^* + \frac{R_\varphi}{R_\theta} N_{\theta, 1}^* \right) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{R_\theta R_\varphi \sin^2 \theta} \frac{d(R_\varphi \sin \theta W)}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{R_\theta \sin^2 \theta} W - \\
 &\quad \left. \left. - R_\varphi \sin \theta (q_{n, 1} \operatorname{ctg} \theta - 2q_{\theta, 1}) \right] - Eh \frac{u_{x, 1}^*}{R_\varphi} \right\} R_\theta d\theta; \\
 v_1^* &= \frac{R_\varphi \sin \theta}{Eh} (N_{\varphi, 1}^* - \nu N_{\theta, 1}^*) - u_{r, 1}^*; \\
 r\omega^* &= \frac{R_\varphi \sin \theta}{Eh} (N_{\varphi, 1}^* - \nu N_{\theta, 1}^*),
 \end{aligned} \tag{49}$$



где  $a_z$  — жесткое смещение оболочки в направлении оси  $Z$ ;  $\Omega_y$  — ее жесткий поворот вокруг оси  $y$ .

В случае оболочки, замкнутой сверху ( $\theta_1 = 0$ ), следует положить  $F_z^0 = 0$ ;  $M_y^0 = 0$ . Для оболочки же, замкнутой снизу ( $\theta_2 = \pi$ ), выражение (86) необходимо заменить на следующее:

$$W = \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \int_{\pi}^{\theta} \Phi(\theta) R_\theta \sin \theta d\theta, \quad (95)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) = & (q_{n,1} \cos \theta - q_{\theta,1} \sin \theta) R_\varphi^2 \sin \theta - \\ & - \int_{\pi}^{\theta} (q_{n,1} \sin \theta + q_{\theta,1} \cos \theta - q_{\varphi,1}) R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (96)$$

Термоупругие слагаемые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M_{\theta,1}^T = & -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1+\nu) \kappa_{r,1} + \frac{1}{R_\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \times \right. \\ & \times \left( \frac{R_\varphi}{R_\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_{T,1}}{d\theta} \right) + \left( \frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_\varphi} \right) \frac{\varepsilon_{T,1}}{\sin^2 \theta} + \\ & \left. + \nu \left( \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_{T,1}}{d\theta} - \frac{\varepsilon_{T,1}}{R_\varphi \sin^2 \theta} \right) \right\}; \\ M_{\varphi,1}^T = & -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1+\nu) \kappa_{r,1} + \right. \\ & \left. + \nu \left[ \frac{1}{R_\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \frac{R_\varphi}{R_\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_{T,1}}{d\theta} \right) + \left( \frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_\varphi} \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\varepsilon_{T,1}}{\sin^2 \theta} \right] + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_{T,1}}{d\theta} - \frac{\varepsilon_{T,1}}{R_\varphi \sin^2 \theta} \right\}; \\ H_1^T = & \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{R_\theta \sin \theta} \cdot \frac{d\varepsilon_{T,1}}{d\theta} - \frac{\cos \theta}{R_\varphi \sin^2 \theta} \varepsilon_{T,1} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

$$\chi^T = -\frac{R_\varphi}{R_\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_{T,1}}{d\theta} + \operatorname{ctg} \theta \varepsilon_{T,1}; \quad (r\omega)^T = R_\varphi \sin \theta \varepsilon_{T,1}; \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{x,1}^T = & -R_\varphi \sin \theta \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_{T,1}}{d\theta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R_\varphi \sin^2 \theta} \varepsilon_{T,1} \right\} R_\theta d\theta; \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{r,1}^I &= \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \frac{R_{\varphi} \sin \theta}{R_{\theta}} \cdot \frac{d\varepsilon_{r,1}}{d\theta} - \frac{u_{x,1}^I}{R_{\varphi}} \right\} R_{\theta} d\theta; \\ \vartheta_1^I &= \chi^I + \frac{u_{x,1}^I}{R_{\varphi} \sin \theta}; \quad v_1^I = R_{\varphi} \sin \theta \varepsilon_{r,1} - u_{r,1}^I. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

С той же точностью, что и для симметричного случая, слагаемые, отвечающие краевому эффекту, записывают

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi,1}^{\kappa} &= (A_1 \cos \beta_1 - B_1 \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \\ &\quad + (A_2 \cos \beta_2 + B_2 \sin \beta_2) e^{\beta_2}; \\ M_{\theta,1}^{\kappa} &= -c [(B_1 \cos \beta_1 + A_1 \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \\ &\quad + (B_2 \cos \beta_2 - A_2 \sin \beta_2) e^{\beta_2}]; \\ M_{\varphi,1}^{\kappa} &= v M_{\theta,1}^{\kappa}; \\ \chi^{\kappa} &= \frac{1}{Eh} \sqrt{\frac{R_{\varphi}}{2c}} \{ [(A_1 + B_1) \cos \beta_1 + \\ &\quad + (A_1 - B_1) \sin \beta_1] e^{-\beta_1} + [-(A_2 + B_2) \times \\ &\quad \times \cos \beta_2 + (A_2 - B_2) \sin \beta_2] e^{\beta_2} \}; \\ (r\omega)^{\kappa} &= \frac{R_{\varphi} \sin \theta}{Eh} [(A_1 \cos \beta_1 - B_1 \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \\ &\quad + (A_2 \cos \beta_2 + B_2 \sin \beta_2) e^{\beta_2}]; \\ Q_{r,1}^{\kappa} &= \sqrt{\frac{2c}{R_{\varphi}}} \cdot \frac{1}{2 \sin \theta} \times \\ &\quad \times \{ [(-A_1 + B_1) \cos \beta_1 + (A_1 + B_1) \sin \beta_1] e^{-\beta_1} + \\ &\quad + [(A_2 - B_2) \cos \beta_2 + (A_2 + B_2) \sin \beta_2] e^{\beta_2} \}; \\ u_{r,1}^{\kappa} &= (r\omega)^{\kappa}; \quad u_{x,1}^{\kappa} = -\operatorname{ctg} \theta (r\omega)^{\kappa}; \\ \omega_1^{\kappa} &= \frac{1}{\sin \theta} (r\omega)^{\kappa}; \quad \vartheta_1^{\kappa} \approx \chi^{\kappa}, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

$$\text{где } \sigma = \frac{h}{\sqrt{12(1-v^2)}};$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt[4]{3(1-v^2)} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{R_{\theta} d\theta}{\sqrt{h R_{\varphi}}}; \\ \beta_2 &= \sqrt[4]{3(1-v^2)} \int_{\theta_2}^{\theta} \frac{R_{\theta} d\theta}{\sqrt{h R_{\varphi}}} \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Значения входящих в выражения (100) функций даны в табл. 1 и на рис. 7. Приведенные выше выражения дают возможность из граничных условий на краях оболочки  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  определить постоянные  $A_1, A_2, B_1, B_2; F_z^0, M_y^0, a_z, \Omega_y$  и построить эпюры напряжений и смещений. Так же, как и в симметричном случае, в зависимости от взаимного расстояния между краями, оболочки делят на короткие и длинные; при этом критерий (61) сохраняет силу.

Для коротких оболочек можно использовать формулы (62)—(79), заменяя в них величины

$$\omega, \vartheta, M_\theta, Q_r; M_\varphi, N_\varphi, u_r, u_x$$

с различными значками соответственно на

$$R_\varphi \omega; \chi; M_{\theta, 1}, Q_{r, 1}; M_{\varphi, 1}; N_{\varphi, 1}; u_{r, 1}; u_{x, 1}.$$

Для очень коротких оболочек (см. стр. 695) указанную замену следует проводить в зависимостях, аналогичных соотношениям (17а) гл. 22.

Для длинных оболочек имеют место следующие более простые формулы:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^r + \alpha_{11} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{12} (M_0 - M_0^r); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^r + \alpha_{12} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{22} (M_0 - M_0^r), \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

где, как и в симметричном случае,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mu 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{r_0}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sin \theta_0} \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \left( \frac{r_0}{h} \right) \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= \mu 4 [3(1-\nu^2)]^{3/4} \sqrt{\frac{r_0}{h}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_0}} \cdot \frac{1}{Eh^2}; \\ \Delta &= \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 12 \left( 1 - \nu^2 \left( \frac{r_0}{h} \right)^2 \frac{1}{(Eh)^2} \right. \\ &\quad \left. [r_0 = R_\varphi(\theta_0) \sin \theta_0], \right. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

а  $\mu = -1$  на краю  $\theta_0 = \theta_1$ ;  $\mu = +1$  на краю  $\theta_0 = \theta_2$ ; но

$$u_0 = (r\omega)_{\theta=\theta_0}; \vartheta_0 = \chi(\theta_0); M_0 = M_{\theta, 1}(\theta_0); Q_0 = Q_{r, 1}(\theta_0) \quad (104)$$

(с соответствующими значками).

Полные напряжения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta,1}^{(u)} &= \sigma_{\theta,1}^{r(u)} + \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} \times \\ &\quad \times \sigma_k \sin \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_{\varphi,1}^{(u)} &= \sigma_{\varphi,1}^{r(u)} + v \left[ \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-v^2)}} \times \right. \\ &\quad \times \sigma_k \sin \beta e^{-\beta} \left. \right]; \\ \sigma_{\theta,1}^{(p)} &= \sigma_{\varphi,1}^{*(p)} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} - \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{3} \times \\ &\quad \times \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_{\theta,1}^{(p)} &= \sigma_{\theta,1}^{*(p)}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{(p)} = \sigma_{\theta\varphi,1}^{*(p)}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{(u)} = \sigma_{\theta\varphi,1}^{r(u)}, \end{aligned} \right\} (105)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^r)}{h^2}; \quad \sigma_k = 2 \sqrt[4]{3(1-v^2)} \sqrt{\frac{r_0}{h}} \sqrt{\sin \theta_0} \times \\ &\quad \times \frac{Q_0 - Q_0^*}{h}; \\ \sigma_{\theta,1}^{r(u)} &= \frac{6M_{\theta,1}^r}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi,1}^{r(u)} = \frac{6M_{\varphi,1}^r}{h^2}; \quad \sigma_{\theta,1}^{*(p)} = \frac{N_{\theta,1}^*}{h}; \\ \sigma_{\varphi,1}^{*(p)} &= \frac{N_{\varphi,1}^*}{h}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{ru} = \frac{6H_{\theta\varphi,1}^r}{h^2}; \\ \beta &= \sqrt[4]{3(1-v^2)} \left| \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{R_{\theta} d\theta}{\sqrt{h R_{\varphi}}} \right|. \end{aligned} \right\} (106)$$

Смещения и угол поворота определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} u_{r,1} &= u_{r,1}^* + u_{r,1}^r + \frac{R_{\varphi} \sin \theta}{E} \left\{ - \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{3} \times \right. \\ &\quad \times \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \left. \right\}; \\ u_{x,1} &= u_{x,1}^* + u_{x,1}^r - \frac{R_{\varphi} \cos \theta}{E} \left\{ - \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{3} \times \right. \\ &\quad \times \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \left. \right\}; \end{aligned} \right\} (107)$$

$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_1^* + v_1^T; \\
 \theta_1 &= \theta_1^* + \theta_1^T + \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E} \sqrt{\frac{R_\Phi}{h}} \left\{ \mu \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sigma_{M_0} \cos \beta e^{-\beta} - \sigma_k (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\}.
 \end{aligned} \quad (107)$$

Примеры использования приведенных выше формул к расчету конкретных оболочек даны в гл. 22—25.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. М., Машгиз, 1962.
2. Аронсон А. Я. и др. Расчет на прочность деталей гидротурбин. М. — Л., «Машиностроение», 1965.
3. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1964.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения к технике. М. — Л., ГИТТЛ, 1949.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., ГИТТЛ, 1953.
6. Григорьев Л. Я. Судовые сосуды, работающие под давлением (определение напряжений и деформаций). Л., «Судостроение», 1965.
7. Канторович З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. М., Машгиз, 1960.
8. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., ГИТТЛ, 1947.
9. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
10. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М., Машгиз, 1958.
11. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки. М. — Л., Гостехиздат, 1948.
12. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
13. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М., Госстройиздат, 1961.
14. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Изд. ЛГУ, 1962.
15. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Изд. ЛГУ, 1964.
16. Черных К. Ф. Уравнения Мейснера в случае обратнoсимметричной нагрузки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. 1959, № 6.

---

## Глава 22

### РАСЧЕТ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК \*

В главе рассмотрены тонкие круговые цилиндрические оболочки постоянной толщины, находящиеся под действием осесимметричных и обратносимметричных внешних нагрузок и нагрева.

В случае нагрузок, отличных от симметричных и обратносимметричных, следует пользоваться соотношениями гл. 21, полагая в них

$$R_{\varphi} = R; \quad \frac{1}{R_{\theta}} = 0; \quad \frac{d}{R_{\theta} d\theta} = \frac{d}{dx}.$$

Если какая-либо из величин, характеризующих геометрию оболочки, нагрузку и термоупругие свойства материала, изменяется значком в сечении  $x = x_0$ , можно разбить оболочку на две и упруго сопрячь решения для каждой из них. Вопросы упругого сопряжения круговой цилиндрической оболочки с соосными оболочками вращения, а также подкрепления ее упругими кольцами рассмотрены в гл. 1 т. 2.

Приведенные в настоящей главе формулы могут быть использованы и для оболочек с толщиной, плавно меняющейся по  $x$  и не зависящей от  $\varphi$ . При этом в соотношениях безмоментного и термоупругого состояний следует заменить постоянную  $h$  на текущее значение толщины  $h(x)$ , внося последнее под знак интегрирования в выражениях для смещений. В соотношениях же краевого эффекта под  $h = h(x_0)$  следует понимать значение толщины на рассматриваемом краю. При быстроменяющейся толщине надо использовать уточненные соотношения (см. гл. 5, т. 2 а также работы [1, 6]).

Цилиндрические пластины (в том числе и пологие) рассмотрены в работах [4, 10, 14, 15, 17]; о цилиндрических оболочках некругового сечения см. в работе [10].

Полезно также ознакомиться с соответствующими разделами следующих обзорных работ [17, 19] гл. 20.

Существует также целый ряд универсальных программ, позволяющих рассчитывать цилиндрические оболочки на ЭЦВМ (см. т. II, гл. 3).

Принятые обозначения:

- $E$  — модуль упругости в  $\text{дан/см}^2$ ;
- $\nu$  — коэффициент Пуассона в  $\text{см/см}$ ;
- $h$  — толщина оболочки в  $\text{см}$ ;

---

\* Написана при участии Е. И. Михайловского.

- $R$  — радиус срединной поверхности оболочки в см;  
 $x$  — расстояние по образующей от края оболочки (рис. 1) в см;  
 $L$  — длина оболочки в см;  
 $u, v, w$  — смещения точек срединной поверхности в см;  
 $\vartheta$  — угол поворота края оболочки в рад ( $1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$ );  
 $N_x, N_\varphi$  — нормальные усилия;  
 $T$  — сдвигающее усилие;  
 $Q_r$  — перерезывающее усилие (рис. 2) в дан/см;  
 $M_x, M_\varphi$  — изгибающие моменты;  
 $H$  — крутящий момент (рис. 2) в дан·см/см;

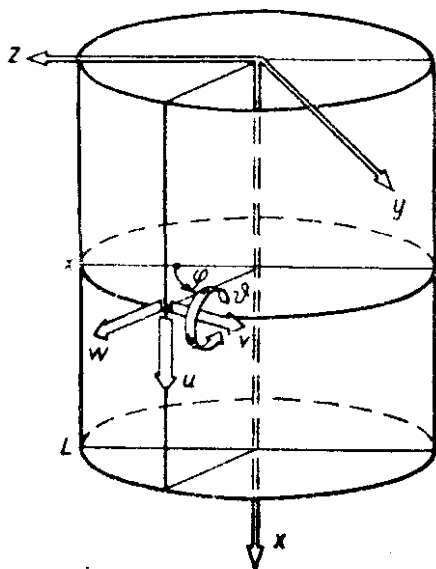


Рис. 1

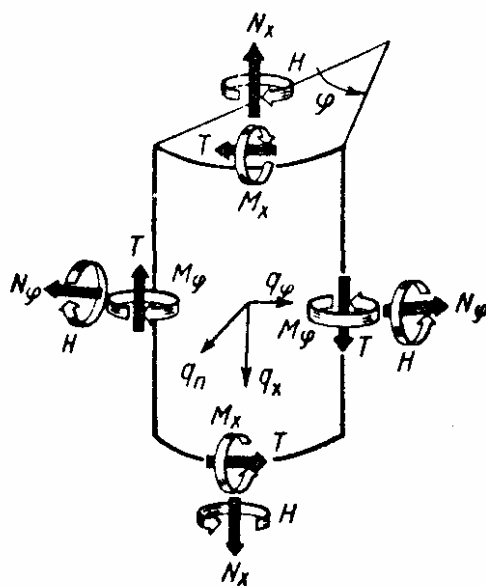


Рис. 2

$\sigma_x^{(p)} = \frac{N_x}{h}$ ;  $\sigma_{x\varphi}^{(p)} = \frac{T}{h}$ ;  $\sigma_\varphi^{(p)} = \frac{N_\varphi}{h}$  — тангенциальные (цепные, мембранные) напряжения в дан/см<sup>2</sup>;

$\sigma_x^{(u)} = \frac{6M_x}{h^2}$ ;  $\sigma_{x\varphi}^{(u)} = \frac{6H}{h^2}$ ;  $\sigma_\varphi^{(u)} = \frac{6M_\varphi}{h^2}$  — изгибные напряжения в дан/см<sup>2</sup>;

$\sigma_x^+ = \sigma_x^{(p)} + \sigma_x^{(u)}$ ;  $\sigma_{x\varphi}^+ = \sigma_{x\varphi}^{(p)} + \sigma_{x\varphi}^{(u)}$ ;  $\sigma_\varphi^+ = \sigma_\varphi^{(p)} + \sigma_\varphi^{(u)}$  — напряжения в наружном слое оболочки (рис. 3);

$\sigma_x^- = \sigma_x^{(p)} - \sigma_x^{(u)}$ ;  $\sigma_{x\varphi}^- = \sigma_{x\varphi}^{(p)} - \sigma_{x\varphi}^{(u)}$ ;  $\sigma_\varphi^- = \sigma_\varphi^{(p)} - \sigma_\varphi^{(u)}$  — напряжения во внутреннем слое оболочки;

$a_x, a_z$  — перемещения оболочки как жесткого целого в направлении осей  $X, Z$  (рис. 4—6) в см;

$\Omega_x, \Omega_y$  — жесткие повороты оболочки вокруг осей  $x, y$  в рад;

$F_x^0, F_z^0$  — составляющие главного вектора усилий, приложенных к краю оболочки  $x = 0$  (рис. 4—6), в дан;

$M_x^0, M_y^0$  — составляющие главного момента усилий и моментов, приложенных к краю  $x = 0$  (центром приведения является центр круга  $x = 0$ ), в дан.см;

$q_x, q_\varphi, q_n$  — составляющие поверхностной нагрузки (рис. 2) в дан/см<sup>2</sup>;

$\alpha$  — коэффициент линейного (температурного) расширения в 1/град;

$T^+, T^-$  — изменения температуры на внешней и внутренней поверхностях оболочки по сравнению с начальной температурой (при которой отсутствуют напряжения);

$$\varepsilon_T = \alpha \frac{T^+ + T^-}{2}; \quad \kappa_T = \alpha \frac{T^+ - T^-}{h}$$

компоненты температурной деформации при линейном законе изменения температуры по толщине [при нелинейном законе см. формулы (80) гл. 20].

Осесимметричными (симметричными) называют случаи, когда напряженно-деформированное состояние не зависит от  $\varphi$ . Следует различать осесимметричный изгиб и осесимметричное кручение.

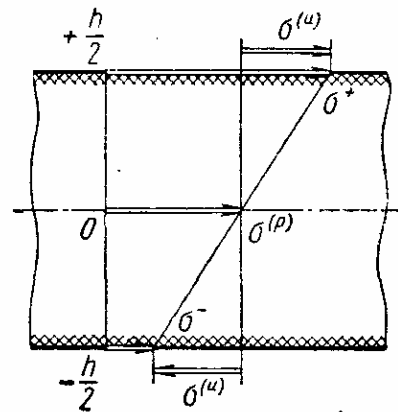


Рис. 3

### ОСЕССИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ

Для плавных нагрузок напряженно-деформированное состояние может быть разбито (см. гл. 20) на *безмоментное*, относящиеся к нему величины помечены значком \*, *термоупругое* (значок <sup>T</sup>) и *краевой эффект* (значок <sup>κ</sup>). Перемещения чистого изгиба в симметричном случае сводятся к жесткому смещению  $a_x$ .

Осесимметричный изгиб характеризуется следующими величинами:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N_x^*; \quad N_\varphi = N_\varphi^* + N_\varphi^\kappa; \quad M_x = M_x^T + M_x^\kappa; \\ M_\varphi &= M_\varphi^T + M_\varphi^\kappa; \quad Q_r = Q_r^\kappa; \\ u &= u^* + u^T; \quad w = w^* + w^T + w^\kappa; \quad \vartheta = \vartheta^* + \vartheta^T + \vartheta^\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Безмоментная часть решения

$$N_x^*(x) = \frac{F_x^0}{2\pi R} - \int_0^x q_x dx'; \quad N_\varphi^*(x) = Rq_n; \quad (2)$$

$$[F_x^0 = 2\pi R N_x^*(0)];$$



$$\left. \begin{aligned} \vartheta^* &= -\frac{R}{Eh} \left( R \frac{dq_n}{dx} + \nu q_x \right); & w^* &= \frac{R}{Eh} (N_\varphi^* - \nu N_x^*); \\ u^* &= \frac{1}{Eh} \int_0^x (-\nu N_\varphi^* + N_x^*) dx' + a_x. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся в расчетной практике виды нагрузки.

*Осевая растягивающая (сжимающая) сила*

$$(F_x^0 = P; \quad q_n = q_x = 0),$$

$$N_x^* = \frac{P}{2\pi R}; \quad N_\varphi^* = 0; \quad (4)$$

$$\vartheta^* = 0; \quad w^* = -\frac{\nu P}{2\pi Eh}, \quad u^* = \frac{P}{2\pi Eh} \cdot \frac{x}{R} + a_x. \quad (5)$$

*Равномерное давление с осевой силой*

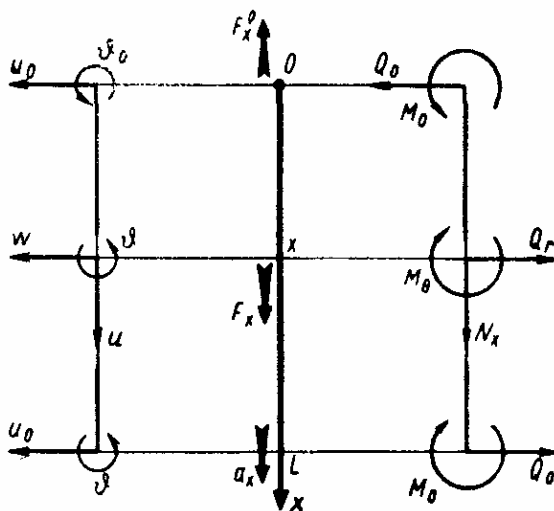


Рис. 4

$$\left. \begin{aligned} (F_x^0 &= P; \\ q_n &= p = \text{const}; \quad q_x = 0) \\ N_x^* &= \frac{P}{2\pi R}; \quad N_\varphi^* = pR; \\ \vartheta^* &= 0; \\ w^* &= \frac{1}{Eh} \left( pR^2 - \frac{\nu P}{2\pi} \right); \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

$$u^* = \frac{1}{Eh} \left( -\nu p R^2 + \frac{P}{2\pi} \right) \frac{x}{R} + a_x.$$

Если на краю  $x = 0$  установлена крышка или оболочка, воспринимающая давление, то  $P = \pi R^2 p$  и

$$N_x^* = p \frac{R}{2}; \quad N_\varphi^* = pR; \quad (7)$$

$$\vartheta^* = 0; \quad w^* = \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh}; \quad u^* = \frac{1-2\nu}{Eh} \cdot \frac{pR^2}{2} \cdot \frac{x}{R} + a_x. \quad (8)$$

*Собственный вес оболочки (ось оболочки вертикальна).* Пусть  $q = \text{const}$  — вес оболочки, приходящийся на единицу ее срединной поверхности (в  $\text{дан/см}^2$ ). Тогда

$$q_x = q; \quad q_n = 0; \quad F_x^0 = 0$$

и

$$N_x^* = -qx; \quad N_\varphi^* = 0; \quad (9)$$

$$\vartheta^* = -\frac{\nu Rq}{Eh}; \quad w^* = \frac{\nu}{Eh} qRx; \quad u^* = -\frac{1}{Eh} \cdot \frac{q}{2} x^2 + a_x. \quad (10)$$

Гидростатическое давление (ось оболочки вертикальна).

Если цилиндрическая оболочка полностью заполнена тяжелой жидкостью с удельным весом  $\gamma_{ж}$  (в  $\text{дан/см}^3$ ), то давление на стенку по параллельному кругу  $x$  определяется весом столба жидкости над этим сечением, т. е.

$$q_n = \gamma_{ж} x \quad (q_x = 0; \quad F_x^0 = 0).$$

При этом

$$N_x^* = 0; \quad N_\varphi^* = \gamma_{ж} Rx; \quad (11)$$

$$\vartheta^* = -\frac{\gamma_{ж} R^2}{Eh}; \quad w^* = \frac{\gamma_{ж} R^2}{Eh} x; \quad u^* = -\frac{\nu \gamma_{ж} R}{2Eh} x^2 + a_x. \quad (12)$$

Термоупругие слагаемые определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_x^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ (1+\nu) \kappa_T + R \frac{d^2 \varepsilon_T}{dx^2} \right]; \\ M_\varphi^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ (1+\nu) \kappa_T + \nu R \frac{d^2 \varepsilon_T}{dx^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\vartheta^T = -R \frac{d\varepsilon_T}{dx}; \quad w^T = R\varepsilon_T; \quad u^T = \int_0^x \varepsilon_T dx, \quad (14)$$

где

$$\varepsilon_T(x) = \alpha \frac{T^+ + T^-}{2}; \quad \kappa_T(\nu) = \alpha \frac{T^+ - T^-}{h}. \quad (15)$$

Краевой эффект. Цилиндрические оболочки делят на *длинные*, для которых можно пренебрегать взаимным влиянием краев, и *короткие*, для которых этого нельзя делать (см. гл. 21, стр. 668).

Если приемлема 10%-ная погрешность расчета, то оболочку можно считать длинной при

$$bL > 2. \quad (16)$$

Для 5%-ной погрешности

$$bL > 3 \quad (16a)$$

$$\left( b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}; \quad \text{при } \nu = 0,3 \text{ принимают } b \approx \frac{1,285}{\sqrt{Rh}} \right).$$

Основные соотношения для коротких цилиндрических оболочек

$$\left. \begin{aligned} \omega^\kappa(x) &= C_1 K_0(\beta) - C_2 K_1(\beta) - C_3 K_2(\beta) - C_4 K_3(\beta); \\ \frac{\vartheta^\kappa(x)}{b} &= 4C_1 K_3(\beta) + C_2 K_0(\beta) + C_3 K_1(\beta) + C_4 K_2(\beta); \\ \frac{M_x^\kappa(x)}{Db^2} &= 4C_1 K_2(\beta) - 4C_2 K_3(\beta) + C_3 K_0(\beta) + C_4 K_1(\beta); \\ \frac{Q_r^\kappa(x)}{Db^3} &= 4C_1 K_1(\beta) - 4C_2 K_2(\beta) - 4C_3 K_3(\beta) + C_4 K_0(\beta); \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$M_\varphi^\kappa = \nu M_x^\kappa; \quad N_\varphi = \frac{Eh}{R_\varphi} \omega^\kappa, \quad (18)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad \beta = bx; \quad b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{Rh}} \text{ при } \nu = 0,3;$$

$$C_1 = \omega^\kappa(0) = \omega(0) - \omega^*(0) - \omega^r(0);$$

$$C_3 = \frac{M_x^\kappa(0)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2} [M_x(0) - M_x^r(0)], \quad (19')$$

$$C_2 = \frac{\vartheta^\kappa(0)}{b} = \frac{1}{b} [\vartheta(0) - \vartheta^r(0)]; \quad C_4 = \frac{Q_r^\kappa(0)}{Db^3} = \frac{1}{Db^3} [Q_r(0)].$$

В формулах (17)  $K_0(\beta)$ ,  $K_1(\beta)$ ,  $K_2(\beta)$  и  $K_3(\beta)$  — функции А. Н. Крылова (см. гл. 21).

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \omega^\kappa(L) = \omega(L) - \omega^*(L) - \omega^r(L); \\ d_3 &= \frac{M_x^\kappa(L)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2} [M_x(L) - M_x^r(L)]; \\ d_2 &= \frac{\vartheta^\kappa(L)}{b} = \frac{1}{b} [\vartheta(L) - \vartheta^r(L)]; \\ d_4 &= \frac{Q_r^\kappa(L)}{Db^3} = \frac{1}{Db^3} [Q_r(L)]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Задавая теперь на каждом из краев по две из величин  $\omega$ ,  $\vartheta$ ,  $M_x$ ,  $Q_r$ , находим с помощью соотношений (17)–(19)  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ , тем самым определяя решение краевого эффекта. Добавляя затем к нему безмоментные и термоупругие слагаемые, получаем полное решение рассматриваемой задачи.

При рассмотрении конкретных задач полезно использовать соотношения (68)–(79) и рис. 8, приведенные в гл. 21. При этом следует полагать  $\rho = 1$ , а для постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4; d_1, d_2, d_3, d_4$  использовать выражения (19), (20). В граничных же условиях (68)–(78) величины

$$u_r(\theta_1), \vartheta(\theta_1), M_\theta(\theta_1), \theta_r(\theta_1); u_r(\theta_2), \vartheta(\theta_2), M_\theta(\theta_2), Q_r(\theta_2)$$

надо заменять соответственно на

$$w(0), \vartheta(0), M_x(0), Q_r(0), w(L), \vartheta(L), M_x(L), Q_r(L).$$

Иногда в расчетной практике встречаются *очень короткие* оболочки [2]. При расчете таких оболочек с использованием соотношений (17) появляются малые разности близких величин. Если пренебрегать слагаемыми порядка  $(bL)^4$  по сравнению с единицей, то соотношения (17) для очень коротких оболочек следует брать в виде [9]

$$\left. \begin{aligned} w^\kappa(x) &= C_1 - C_2\beta - \frac{1}{2} C_3\beta^2 - \frac{1}{6} C_4\beta^3; \\ \frac{\vartheta^\kappa(x)}{b} &= \frac{2}{3} C_1\beta^3 + C_2 + C_3\beta + \frac{1}{2} C_4\beta^2; \\ \frac{M_x^\kappa(x)}{Db^2} &= 2C_1\beta^2 - \frac{2}{3} C_2\beta^3 + C_3 + C_4\beta; \\ \frac{Q_r^\kappa(x)}{Db^3} &= 4C_1\beta - 2C_2\beta^2 - \frac{2}{3} C_3\beta^3 + C_4. \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Для *длинных* оболочек приведенные выше соотношения значительно упрощаются. Так,

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= w_0^* + w_0^r + \alpha_{11}Q_0 + \alpha_{12}(M_0 - M_0^r); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^r + \alpha_{12}Q_0 + \alpha_{22}(M_0 - M_0^r), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= w(x_0); & w_0^* &= w_0^*(x_0); & w_0^r &= w^r(x_0); \\ \vartheta_0 &= \vartheta(x_0); & \vartheta_0^r &= \vartheta^r(x_0); \\ Q_0 &= Q_r(x_0); & M_0 &= M_x(x_0); & M_0^r &= M_x^r(x_0); \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

перемещение, угол поворота и силовые факторы на краю  $x = x_0$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mu 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{h} \cdot \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= \mu 4 \left[ 3(1-\nu^2) \right]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{R}{h}} \cdot \frac{1}{Eh^2}; \\ \left[ \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 12(1-\nu^2) \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{1}{(Eh)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В этих формулах следует положить  $\mu = -1$  на краю  $x_0 = 0$ ,  $\mu = +1$  на краю  $x_0 = L$ .

Полные напряжения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)} &= \sigma_x^r(u) + \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \\ &\quad - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sigma_\kappa \sin \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_\varphi^{(u)} &= \sigma_\varphi^r(u) + \nu \left[ \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sigma_\kappa \sin \beta e^{-\beta} \right]; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= \sigma_\varphi^{*(p)} + \mu \sigma_\kappa \cos \beta e^{-\beta} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_x^{(p)} &= \sigma_x^{*(p)}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^r)}{h^2}; \quad \sigma_\kappa = 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{Q_0}{h}; \\ \sigma_x^r(u) &= \frac{6M_x^r}{h^2}; \quad \sigma_\varphi^r(u) = \frac{6M_\varphi^r}{h^2}; \quad \sigma_\varphi^{*(p)} = \frac{N_\varphi^*}{h}; \\ \sigma_x^{*(p)} &= \frac{N_x^*}{h}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\beta = \mu b(x_0 - x); \quad b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{Rh}} \quad (\text{при } \nu = 0,3)$$

(см. также табл. 1 гл. 21).

Перемещения и угол поворота

$$\begin{aligned} w = w^* + w^r + \frac{R}{E} \left\{ -\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \right. \\ \left. + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \right\}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta^* + \vartheta^r + \frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{R}{h}} \times \\ \times \left\{ \mu \frac{2\sqrt{3}(1-\nu^2)}{3} \sigma_{M_0} \cos \beta e^{-\beta} - \sigma_k (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\}; \end{aligned}$$

$$u = u^* + u^r.$$

В случае статических граничных условий (заданы  $Q_0$  и  $M_0$ ) напряжения определяют по формулам (24), а смещения и угол поворота — по формулам (26). В случае же геометрических граничных условий или условий упругого сопряжения (гл. 1 т. II) из соотношений (21) находят величины  $Q_0$ ,  $M_0$ , после чего уже определяют напряжения и смещения.

### ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КРУЧЕНИЕ

При осесимметричном кручении в оболочке имеет место безмоментное напряженное состояние, описываемое формулами (рис. 5)

$$T(x) = -\frac{\mathfrak{M}_x^0}{2\pi R^2} - \int_0^x q_\varphi dx; \quad (27)$$

$$v(x) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \int_0^x T dx - R\Omega_x; \quad (28)$$

$$(\mathfrak{M}_x^0 = -2\pi R^2 T_0; \quad T_0 = T(0));$$

$$\sigma_{x\varphi} = \frac{T}{h}. \quad (29)$$

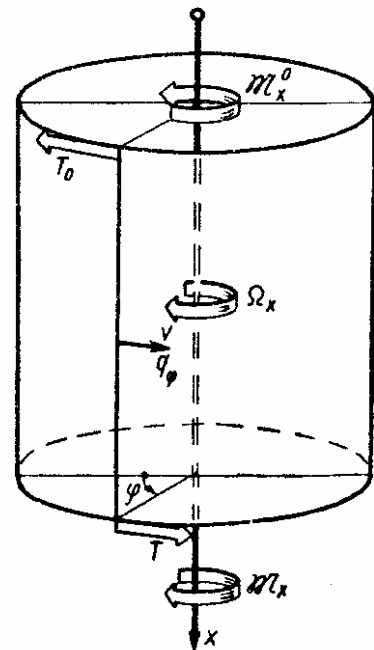


Рис. 5

### ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Обратносимметричным (иногда антисимметричным, ветровым) называют случай, когда искомые и заданные величины имеют следующую зависимость от  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \cos \varphi; & v &= v_1 \sin \varphi; & w &= w_1 \cos \varphi; & \vartheta &= \vartheta_1 \cos \varphi; \\ N_x &= N_{x,1} \cos \varphi; & T &= T_1 \sin \varphi; & N_\varphi &= N_{\varphi,1} \cos \varphi; \\ & & M_x &= M_{x,1} \cos \varphi; \\ H &= H_1 \sin \varphi; & M_\varphi &= M_{\varphi,1} \cos \varphi; & Q_r &= Q_{r,1} \cos \varphi; \\ q_x &= q_{x,1} \cos \varphi; & q_\varphi &= q_{\varphi,1} \sin \varphi; & q_n &= q_{n,1} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

При плавных нагрузках напряженно-деформированное состояние можно разбить на *безмоментное* (со значком  $*$ ), *термоупругое* (со значком  $^T$ ) и *краевой эффект* (со значком  $^K$ ).

При этом

$$\left. \begin{aligned} N_{x,1} &= N_{x,1}^*; & N_{\varphi,1} &= N_{\varphi,1}^* + N_{\varphi,1}^K; & T_1 &= T_1^*; \\ M_{x,1} &= M_{x,1}^T + M_{x,1}^K; & M_{\varphi,1} &= M_{\varphi,1}^T + M_{\varphi,1}^K; & H_1 &= H_1^T; \\ Q_{r,1} &= Q_{r,1}^K; & w_1 &= w_1^* + w_1^T + w_1^K; & u_1 &= u_1^* + u_1^T; \\ v_1 &= v_1^* + v_1^T; & \vartheta_1 &= \vartheta_1^* + \vartheta_1^T + \vartheta_1^K. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Безмоментное решение

$$N_{x,1}^* = \frac{W}{R}; \quad N_{\varphi,1}^* = Rq_{n,1}; \quad T_1^* = -\frac{dW}{dx} - Rq_{x,1}. \quad (32)$$

где

$$W = \frac{1}{\pi R} (\mathfrak{M}_y^0 + F_z^0 x) + \int_0^x \frac{1}{R} \Phi(x) dx; \quad (33)$$

$$\frac{1}{R} \Phi(x) = -Rq_{x,1} - \int_0^x (q_{n,1} - q_{\varphi,1}) dx. \quad (34)$$

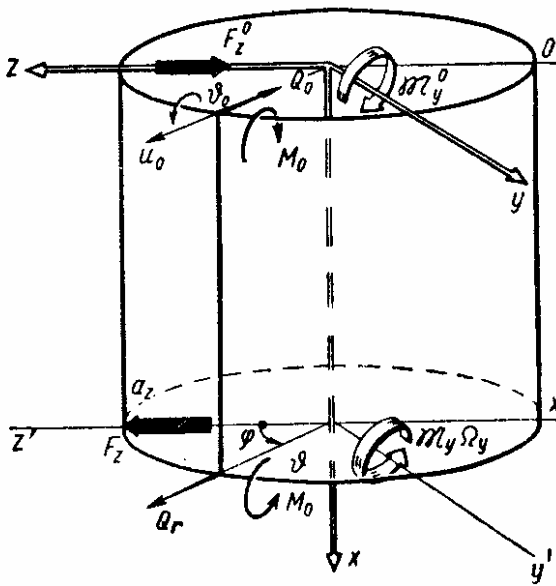


Рис. 6

к краю  $x = 0$ , связаны с краевыми значениями безмоментных усилий соотношениями (рис. 6)

Составляющие главного вектора и главного момента, усилий и момента, приложенных

$$F_z^0 = -\pi R T_1^*(0); \quad \mathfrak{M}_y^0 = \pi R^2 N_{x,1}^*(0). \quad (35)$$

Случай, когда сила  $F$  и момент  $\mathfrak{M}$  направлены под произвольным углом, может быть рассмотрен с помощью приведенных ниже формул поворотом осей  $YZ$  и наложением решений (см. пример 12 гл. 1, т. II).

Перемещения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 u_1^* &= \frac{1}{Eh} \int_0^x (N_{x,1}^* - \nu N_{\varphi,1}^*) dx' + R\Omega_y; \\
 w_1^* &= \frac{1}{Eh} \int_0^x \left\{ R \frac{d(N_{x,1}^* + N_{\varphi,1}^*)}{dx'} + \right. \\
 &+ (1 + \nu) \left( \frac{dW}{dx'} + 2Rq_{x,1} \right) \left. \right\} dx' - \frac{1}{R} \int_0^x u_1^* dx' + a_z; \\
 v_1^* &= \frac{R}{Eh} (N_{\varphi,1}^* - \nu N_{x,1}^*) - w_1^*; \\
 \vartheta_1^* &= -\frac{1}{Eh} \left\{ R \frac{d(N_{x,1}^* + N_{\varphi,1}^*)}{dx} + \right. \\
 &+ (1 + \nu) \left( \frac{dW}{dx} + 2Rq_{x,1} \right) \left. \right\} + \frac{u_1^*}{R},
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где  $a_z$  — жесткое смещение оболочки вдоль оси  $Z$ , а  $\Omega_y$  — жесткий поворот вокруг оси  $Y$ .

В обратносимметричном случае ту же роль, что  $\vartheta$  в симметричном случае, играет упругий поворот

$$\chi = \vartheta_1 - \frac{u_1}{R}, \quad (37)$$

представляющий собой полный поворот (в осевой плоскости  $\varphi = 0$ )  $\vartheta_1$ , за вычетом поворота поперечного сечения как жесткого целого на угол  $\frac{u_1}{R}$  (см. работу [17] стр. 136). Аналогично, ту же роль, что и  $u_r$  в симметричном случае, играет величина

$$(R\omega) = v_1 + w_1. \quad (38)$$

Величины  $\chi$  и  $(R\omega)$  являются деформационными, не изменяющимися при смещении оболочки как жесткого целого.

Для введенных величин имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 R\omega^* &= v_1^* + w_1^* = \frac{R}{Eh} (N_{\varphi,1}^* - \nu N_{x,1}^*); \\
 \chi^* &= \vartheta_1^* - \frac{u_1^*}{R} = -\frac{1}{Eh} \left\{ R \frac{d(N_{x,1}^* + N_{\varphi,1}^*)}{dx} + \right. \\
 &+ (1 + \nu) \left( \frac{dW}{dx} + 2Rq_{x,1} \right) \left. \right\}.
 \end{aligned} \quad (39)$$



Для наиболее интересного случая изгиба оболочки краевыми усилиями ( $q_{x,1} = q_{\varphi,1} = q_{n,1} = 0$ ) приведенные выше формулы принимают вид

$$N_{x,1}^* = \frac{1}{\pi R^2} \{ \mathfrak{M}_y^0 + F_z^0 x \}; \quad N_{\varphi,1}^* = 0; \quad T_1^* = -\frac{1}{\pi R} F_z^0; \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{\pi E h R^2} \left\{ \mathfrak{M}_y^0 x + \frac{1}{2} F_z^0 x^2 \right\} + R \Omega_y; \\ w_1^* &= -\frac{1}{2\pi R^3 E h} x^2 \mathfrak{M}_y^0 + \\ &+ \frac{1}{\pi R E h} \left[ (2 + \nu) x - \frac{x^3}{6 R^2} \right] F_z^0 - \Omega_y x + a_z; \\ v_1^* &= -\frac{\nu}{\pi R E h} \{ \mathfrak{M}_y^0 + F_z^0 x \} - w_1^*; \\ \vartheta_1^* &= -\frac{2 + \nu}{\pi R E h} F_z^0 + \frac{u_1^*}{R}; \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\chi^* = -\frac{2 + \nu}{\pi R E h} F_z^0; \quad R \omega^* = -\frac{\nu}{\pi R E h} \{ \mathfrak{M}_y^0 + F_z^0 x \}. \quad (42)$$

Термоупругие слагаемые

$$\left. \begin{aligned} M_{x,1}^T &= -\frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \left\{ (1 + \nu) \left( \varepsilon_{T,1} - \frac{\varepsilon_{T,1}}{R} \right) + R \frac{d^2 \varepsilon_{T,1}}{dx^2} \right\}; \\ M_{\varphi,1}^T &= -\frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \left\{ (1 + \nu) \left( \varepsilon_{T,1} - \frac{\varepsilon_{T,1}}{R} \right) + \nu R \frac{d^2 \varepsilon_{T,1}}{dx^2} \right\}; \\ H_1^T &= \frac{E h^3}{12(1 + \nu)} \left\{ \frac{d \varepsilon_{T,1}}{dx} \right\}; \\ u_1^T &= \int_0^x \varepsilon_{T,1} dx; \quad v_1^T = R \varepsilon_{T,1} - w_1^T; \\ w_1^T &= R \varepsilon_{T,1} - \frac{1}{R} \int_0^x \left[ \int_0^x \varepsilon_{T,1} dx \right] dx; \\ \vartheta_1^T &= -R \frac{d \varepsilon_{T,1}}{dx} + \frac{u_1^T}{R}; \\ \omega^T &= \varepsilon_{T,1}; \\ \chi^T &= -R \frac{d \varepsilon_{T,1}}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Величины  $\varepsilon_{T,1}$  и  $\kappa_{T,1}$  связаны (при линейном изменении температуры по толщине) с температурой на внешней поверхности оболочки  $T^+ = T_1^+ \cos \theta$  и внутренней  $T^- = T_1^- \cos \varphi$  соотношениями

$$\varepsilon_{T,1} = \alpha \frac{T_1^+ + T_1^-}{2}; \quad \kappa_{T,1} = \alpha \frac{T_1^+ - T_1^-}{h}, \quad (44)$$

при нелинейном законе см. формулы (82) гл. 20.

**Краевой эффект.** Для коротких оболочек [удовлетворяющих критериям (16) и (16a)], соотношения краевого эффекта имеют вид, аналогичный выражениям (17) и (18):

$$\left. \begin{aligned} R\omega^\kappa(x) &= C_1 K_0(\beta) - C_2 K_1(\beta) - C_3 K_2(\beta) - C_4 K_3(\beta); \\ \frac{\chi^\kappa(x)}{b} &= 4C_1 K_3(\beta) + C_2 K_0(\beta) + C_3 K_1(\beta) + C_4 K_2(\beta); \\ \frac{M_{x,1}(x)}{Db^2} &= 4C_1 K_2(\beta) - 4C_2 K_2(\beta) + C_3 K_0(\beta) + C_4 K_1(\beta); \\ \frac{Q_{r,1}^\kappa(x)}{Db^3} &= 4C_1 K_1(\beta) - 4C_2 K_2(\beta) - 4C_3 K_3(\beta) + C_4 K_0(\beta); \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\vartheta_1^\kappa = \chi^\kappa, \quad \omega_1^\kappa = R\omega^\kappa; \quad M_{\varphi,1}^\kappa = \nu M_{x,1}^\kappa; \quad N_{\varphi,1}^\kappa = \frac{Eh}{R} (R\omega^\kappa), \quad (46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad \beta = bx; \\ b &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{Rh}} \quad \text{при } \nu = 0,3; \\ C_1 &= R\omega^k(0) = R[\omega(0) - \omega^*(0) - \omega^T(0)]; \\ C_3 &= \frac{M_{x,1}^\kappa(0)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2} [M_{x,1}(0) - M_{x,1}^T(0)]; \\ C_2 &= \frac{\chi^\kappa(0)}{b} = \frac{1}{b} [\chi(0) - \chi^T(0)]; \\ C_4 &= \frac{Q_{r,1}^\kappa(0)}{Db^3} = \frac{1}{Db^3} [Q_{r,1}(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= R\omega^\kappa(L) = R[\omega(L) - \omega^*(L) - \omega^r(L)]; \\ d_2 &= \frac{\chi^\kappa(L)}{b} = \frac{1}{b}[\chi(L) - \chi^r(L)]; \\ d_3 &= \frac{M_{x,1}^\kappa(L)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2}[M_{x,1}(L) - M_{x,1}^r(L)]; \\ d_4 &= \frac{Q_{r,1}^\kappa(L)}{Db^3} = \frac{1}{Db^3}[Q_{r,1}(L)]. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Выписанные выше соотношения дают возможность решить рассматриваемую краевую задачу. Определению подлежат три группы произвольных постоянных:

первая группа

$$F_y^0, \quad M_z^0;$$

вторая группа

$$C_1, C_2, C_3, C_4;$$

третья группа

$$a_z, \quad \Omega_y.$$

Постоянные первой группы обычно либо задают, либо подсчитывают по формулам (35). Во вторую группу (см. стр. 701) входят две статические величины и две деформационные. Примером использования последних могут служить условия жесткого края  $R\omega = 0$ ,  $\chi = 0$ . Если же граничные условия сформулированы в перемещениях, то деформационные граничные величины могут быть подсчитаны по формулам (37) и (38).

Выражения (45)–(48) совершенно аналогичны осесимметричному случаю; они позволяют сравнительно легко удовлетворить граничным условиям в случае короткой оболочки. При рассмотрении конкретных задач можно использовать соотношения (68)–(77) и рис. 8 гл. 21. При этом следует полагать  $\rho = 1$ , а под постоянными  $C_1, C_2, C_3, C_4; d_1, d_2, d_3, d_4$  понимать выражения (47) и (48). В граничных же условиях (68)–(78) гл. 21 величины  $u_r(\theta_1), \vartheta(\theta_1), M_\theta(\theta_1), Q_r(\theta_1); u_r(\theta_2), \vartheta(\theta_2), M_\theta(\theta_2), Q_r(\theta_2)$  надо заменять соответственно на  $r\omega(0), \chi(0), M_{x,1}(0), Q_{r,1}(0); r\omega(L), \chi(L), M_{x,1}(L), Q_{r,1}(L)$ .

Если не интересует жесткость конструкции (величины перемещений и угла поворота), то после определения постоянных второй группы подсчитывают напряжения, и задача решена.

В случае, если необходимо знать и жесткость, приходится рассматривать и смещения и определять входящие в них постоянные третьей группы. При этом следует использовать то обстоятельство, что перемещения

$$u_1 = u_1^* + u_1^r; \quad v_1 = v_1^* + v_1^r \quad (49)$$

можно считать независимыми от краевого эффекта.

Для длинных оболочек все соотношения значительно упрощаются. Так,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^r + \alpha_{11} Q_0' + \alpha_{12} (M_0 - M_0^r); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^r + \alpha_{12} Q_0 + \alpha_{22} (M_0 - M_0^r), \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где, как и в симметричном случае,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mu 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{h} \right) \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= \mu 4 [3(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{1}{Eh^2} \\ \left( \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 12(1-\nu^2) \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{1}{(Eh)^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Величина  $\mu = -1$  на краю  $x_0 = 0$ ,  $\mu = +1$  на краю  $x_0 = L$  ( $0 \leq x \leq L$ ), но

$$u_0 = R\omega(x_0); \quad \vartheta_0 = \chi(x_0); \quad M_0 = M_{x,1}(x_0); \quad Q_0 = Q_{r,1}(x_0) \quad (52)$$

(с соответствующими значками).

Напряжения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,1}^{(u)} &= \sigma_{x,1}^{r(u)} + \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \\ &\quad - \mu \frac{3}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sigma_k \sin \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_{\varphi,1}^{(u)} &= \sigma_{\varphi,1}^{r(u)} + \nu \left[ \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \mu \frac{3}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sigma_k \sin \beta e^{-\beta} \right]; \\ \sigma_{\varphi,1}^{(p)} &= \sigma_{\varphi,1}^{*(p)} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} - \\ &\quad - \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_{x,1}^{(p)} &= \sigma_{x,1}^{*(p)}; \quad \sigma_{x\varphi,1}^{(p)} = \sigma_{x\varphi,1}^{*(p)}; \quad \sigma_{x\varphi,1}^{(u)} = \sigma_{x\varphi,1}^{r(u)}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^T)}{h^2}; \quad \sigma_k = 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \cdot \frac{Q_0}{h}; \\
 \sigma_{x,1}^{T(u)} &= \frac{6M_{x,1}^T}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi,1}^{T(u)} = \frac{6M_{\varphi,1}^T}{h^2}; \quad \sigma_{x\varphi,1}^{T(u)} = \frac{6H_1^T}{h^2}; \\
 \sigma_{x,1}^{*(p)} &= \frac{N_{x,1}^*}{h}; \quad \sigma_{\varphi,1}^{*(p)} = \frac{N_{\varphi,1}^*}{h}; \quad \sigma_{x\varphi,1}^{*(p)} = \frac{T_1^*}{h}; \\
 \beta &= \mu b(x_0 - x); \quad b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{Rh}} \quad (\text{при } \nu = 0,3).
 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Суммарные перемещения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 w_1 &= w_1^* + w_1^T + \frac{R}{E} \left\{ -\frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \right\}; \\
 u_1 &= u_1^* + u_1^T; \quad v_1 = v_1^* + v_1^T; \\
 \vartheta_1 &= \vartheta_1^* + \vartheta_1^T + \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E} \sqrt{\frac{R}{h}} \left\{ \mu \frac{2\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{3} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sigma_{M_0} \cos \beta e^{-\beta} - \sigma_k (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

В случае очень коротких оболочек надлежит пользоваться соотношениями (17а).

### ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

**Пример 1\*.** Кручение цилиндрической оболочки. Пусть цилиндрическая оболочка (рис. 7), закрепленная на одном конце  $x = 0$ , закручивается на другом усилиями  $T$ , создающими закручивающий момент

$$\mathfrak{M}_x = -2\pi R^2 T.$$

Тогда, поскольку поверхностная нагрузка отсутствует, из соотношений (27)–(29) следует

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{\mathfrak{M}_x}{2\pi R^2 h} = \frac{T}{h}; \\
 v &= -\frac{(1+\nu)\mathfrak{M}_x}{\pi E R^2 h^2} x = \frac{2(1+\nu)}{Eh} T x.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.** Длинная цилиндрическая оболочка, нагруженная давлением газа. Пусть оболочка длинная [удовлетворяется критерий (16) и (16а) и можно пренебречь взаимным влиянием краев]

\* См. также примеры гл. 1 т. II.

нагружена давлением газа и закрыта крышкой. Безмоментные величины определяют по формулам (7) и (8):

$$N_x^* = \frac{pR}{2} ; \quad N_\varphi^* = pR ;$$

$$\vartheta^* = 0; \quad w^* = \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} ; \quad u^* = \frac{1-2\nu}{Eh} \cdot \frac{pR^2}{2} \cdot \frac{x}{R} + a_x.$$

Рассмотрим два характерных случая закрепления краев.

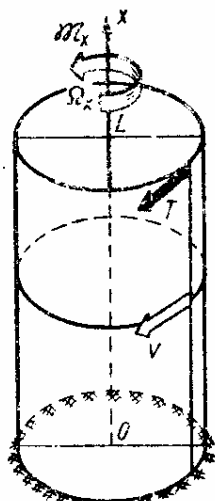


Рис. 7

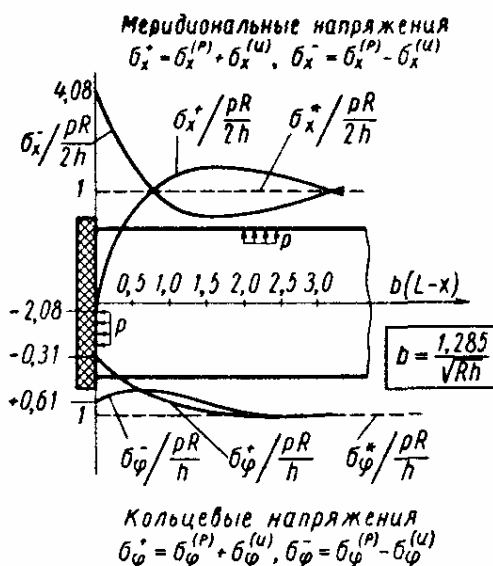


Рис. 8

Край жестко заделан (рис. 8). Граничные условия  $w_0 = w(L) = 0$ ;  $\vartheta_0 = \vartheta(L) = 0$  придают системе (21) вид

$$\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} + \alpha_{11}Q_0 + \alpha_{12}M_0 = 0;$$

$$\alpha_{12}Q_0 + \alpha_{22}M_0 = 0.$$

Решая ее относительно  $Q_0$  и  $M_0$ , получаем, используя формулы (25).

$$\sigma_{M_0} = -\frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{pR}{h} ; \quad \sigma_K = -(2-\nu) \frac{pR}{h}.$$

Согласно же формулам (24) и (26):

$$\sigma_x^{(u)} = \left\{ -\frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{h} ; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_x^{(u)} ;$$

$$\sigma_\varphi^{(p)} = \left\{ 1 - \frac{2-\nu}{2} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{h} ; \quad \sigma_x^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{pR}{h} ;$$

$$R\vartheta = 2\sqrt[4]{\frac{3}{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}} \cdot \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} \sin \beta e^{-\beta};$$

$$w = \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} \{1 - (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}\}; \quad u = u^*.$$

здесь

$$\beta = \frac{4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{Rh} (L-x)$$

(см. табл. 1 гл. 21).

Максимальные напряжения имеют место во внутренних продольных волокнах оболочки на ее краях. При этом

$$\sigma_{\max} = \sigma_x^-(L) = \sigma_x^{(p)}(L) - \sigma_x^{(u)}(L) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right\} \frac{pR}{h}.$$

Меридиональные напряжения  
 $\sigma_x^+ = \sigma_x^{(p)} + \sigma_x^{(u)}$ ;  $\sigma_x^- = \sigma_x^{(p)} - \sigma_x^{(u)}$

При  $\nu = 0,3$   $\sigma_{\max} \approx 2,04 \frac{pR}{h}$ .

Эпюры напряжений для  $\nu = 0,3$  показаны на рис. 8.

Края шарнирно оперты (рис. 9). В рассматриваемом случае  $M_0 = M_x(L) = 0$ ,  $w_0 = w(L) = 0$ ; систему (21) запишем в виде

$$\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} + \alpha_{11} Q_0 = 0;$$

$$\alpha_{12} Q_0 = \Phi_0.$$

Из первого уравнения, используя формулы (24) и (25), получаем

$$\sigma_{M_0} = 0; \quad \sigma_\kappa = -\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR}{h};$$

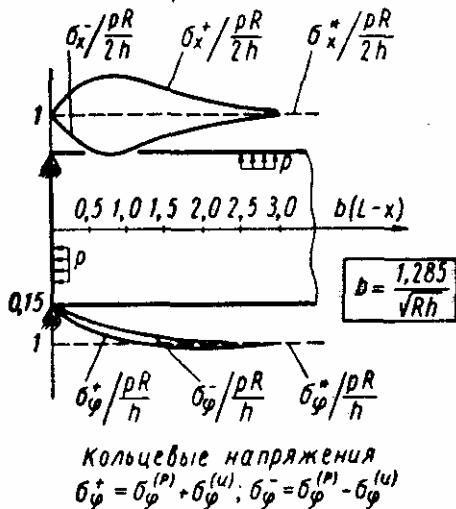


Рис. 9

$$\sigma_x^{(u)} = \left\{ \frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sin \beta e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{h}; \quad \sigma_\phi^{(u)} = \nu \sigma_x^{(u)};$$

$$\sigma_\phi^{(p)} = \left\{ 1 - \frac{2-\nu}{2} \cos \beta e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{h}; \quad \sigma_x^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{pR}{h};$$

$$R\Phi = \frac{4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}} \cdot \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta};$$

$$w = \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} (1 - \cos \beta e^{-\beta}); \quad u = u^*.$$

Эпюры напряжений для  $\nu = 0,3$  приведены на рис. 9.

**Пример 3.** Длинная цилиндрическая оболочка с постоянным по длине перепадом температуры.

Пусть в круговой цилиндрической оболочке (рис. 10) со свободными концами имеется постоянное вдоль оси температурное поле, линейно меняющееся по толщине и достигающее на поверхностях значений  $T^+$  и  $T^-$ , тогда согласно формулам (13) — (15)

$$\Phi T = 0; \quad w^T = \alpha R \frac{T^+ + T^-}{2}; \quad M_x^T = M_\phi^T = -\frac{Eh^2 \alpha}{12(1-\nu)} (T^+ - T^-)$$

[при нелинейном законе изменения температуры по толщине следует в соотношениях (13) — (14) понимать под  $\varepsilon_T$  и  $\kappa_T$  выражения (80) гл. 20)].

Трубу считаем длинной [см. неравенства (16) и (16a)], все величины со значком\* опускаем ввиду отсутствия поверхностной нагрузки. Используя соотношения (24) и учитывая граничные условия свободного края, получаем

$$[M_x(0) = M_x(L) = 0; \quad Q_r(0) = Q_r(L) = 0];$$

$$\sigma_{M_0} = \frac{E\alpha(T^+ - T^-)}{2(1-\nu)}; \quad \sigma_k = 0;$$

$$\sigma_x^{(u)} = -\frac{E\alpha(T^+ - T^-)}{2(1-\nu)} \{1 - (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}\};$$

$$\sigma_\varphi^{(u)} = -\frac{E\alpha(T^+ - T^-)}{2(1-\nu)} \{1 - \nu(\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}\};$$

$$\sigma_\varphi^{(p)} = -\frac{E\alpha(T^+ - T^-)}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \right\}; \quad \sigma_x^{(p)};$$

$$w = \alpha R \left\{ \frac{T^+ + T^-}{2} - \frac{T^+ - T^-}{2(1-\nu)} \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \right\};$$

$$\vartheta = \mu \frac{\alpha(T^+ - T^-)}{1-\nu} \frac{[3(1-\nu^2)]^{3/4}}{3} \sqrt{\frac{R}{h}} \cos \beta e^{-\beta}.$$

Здесь при рассмотрении края  $x = 0$

$$\mu = -1; \quad \beta = \frac{4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{x}{\sqrt{Rh}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{Rh}} x \quad (\text{при } \nu = 0,3);$$

на краю  $x = L$

$$\mu = +1; \quad \beta = \frac{4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{(L-x)}{\sqrt{Rh}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{Rh}} (L-x) \quad (\text{при } \nu = 0,3).$$

Максимальные напряжения будут во внешних предельных волокнах на концах трубы

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_\varphi^+ = (\sigma_\varphi^{(p)} + \sigma_\varphi^{(u)}) \Big|_{x=0} = \\ &= -\frac{E\alpha(T^+ - T^-)}{2(1-\nu)} \left\{ 1 - \nu + \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \right\}; \end{aligned}$$

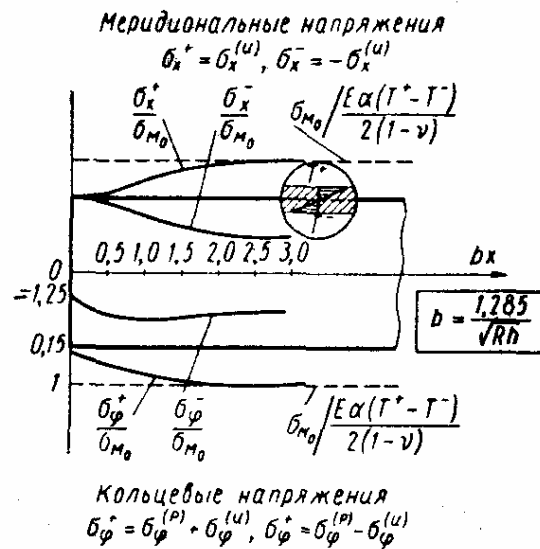


Рис. 10

при  $\nu = 0,3$

$$\sigma_{\max} \approx -1,25 \frac{E\alpha(T^+ - T^-)}{2(1-\nu)}.$$

Следовательно, напряжения на краях трубы на 25% превосходят их значения  $(-\sigma_\varphi^T = -\sigma_\varphi^T)$  вдали от краев.

Эпюры напряжений показаны на рис. 10.

\*



**Пример 4.** Цилиндрическая оболочка, закрытая жесткими крышками (рис. 11). Пусть края длинной цилиндрической оболочки, находящейся под внутренним давлением, прикреплены к жестким крышкам, смещающимся одна относительно другой на заданное расстояние  $\Delta$ , т. е.

$$w(0) = u(0) = 0; \quad \phi(0) = 0; \quad w(L) = 0; \quad u(L) = \Delta, \quad \phi(L) = 0.$$

Прежде всего, поскольку  $u(x) \equiv u^*(x)$  (не зависит от краевого эффекта), из формул (6а) и краевых условий  $u^*(0) = 0$ ;  $u^*(L) = \Delta$  находим

$$a_x = 0; \quad P = 2\pi \left( \nu p R^2 + \frac{EhR}{L} \Delta \right).$$

Теперь из соотношений (6) следует

$$\sigma_x^*(p) = \frac{P}{2\pi R h}; \quad \sigma_\phi^*(p) = \frac{pR}{h};$$

$$u^* = \frac{1}{Eh} \left( \frac{P}{2\pi R} - \nu p R \right) x; \quad w^* = \left\{ (1 - \nu^2) - \nu \frac{Eh\Delta}{pRL} \right\} \frac{pR^2}{Eh}; \quad \phi^* = 0. \quad (56)$$

На обоих краях

$$u_0^* = w^*(0) = w^*(L) = \left\{ (1 - \nu^2) - \nu \frac{Eh\Delta}{pRL} \right\} \frac{pR^2}{Eh}.$$

Формулы для напряжений и смещений получим, заменяя в примере 2 (при жестко заделанном крае) в выражениях краевого эффекта  $\frac{(2-\nu)}{2}$  на  $\left\{ (1 - \nu^2) - \nu \frac{Eh\Delta}{pRL} \right\}$ , а безмоментные величины — выражениями (56).

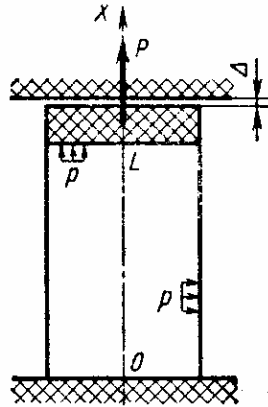


Рис. 11

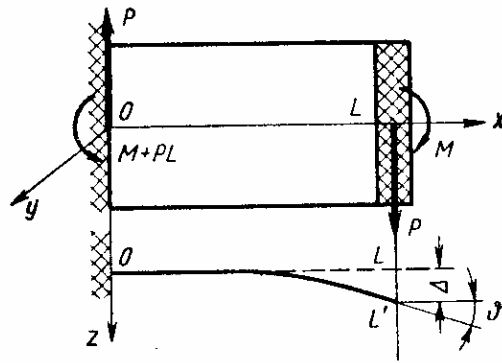


Рис. 12

**Пример 5.** Тонкостенная цилиндрическая консоль (рис. 12), заделанная по одному краю ( $x=0$ ) и закрытая на другом ( $x=L$ ) очень жесткой диафрагмой, к которой приложены сила  $P$  и изгибающий момент  $M$ .

Согласно рис. 12 и 6

$$M_y^0 = -M - PL; \quad F_z^0 = P. \quad (57)$$

Граничные условия

$$u_1(0) = v_1(0) = w_1(0) = 0; \quad \phi_1(0) = 0 \quad (58)$$

(абсолютная заделка),

$$w(L) = 0; \quad \chi(L) = 0 \quad (59)$$

(жесткий край).

Из формул (41) и (57) имеем

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{\pi E h R^2} \left[ \frac{1}{2} P x^2 - (M + PL) x \right] + R \Omega_y; \\ v_1^* &= \frac{\nu}{\pi R E h} [(M + PL) - Px] - \frac{1}{\pi R E h} \left( \frac{x^2}{2R^2} \right) \times \\ &\times (M + PL) - \frac{1}{\pi R E h} \left[ (2 + \nu) x - \frac{x^3}{6R^2} \right] P + \Omega_y x - a_z. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Для определения жесткости консоли на изгиб необходимо подсчитать величины

$$\Delta = \omega_1(L) \text{ и } \vartheta = -\vartheta_1(L). \quad (61)$$

Покажем, что жесткость консоли полностью определяется безмоментным решением [8].

Прежде всего, поскольку согласно формулам (31)  $u_1 = u_1^*$ ;  $v_1 = v_1^*$ , удовлетворяя с помощью выражений (60) первым двум из граничных условий (58), находим

$$\Omega_y = 0; \quad a_z = \frac{\nu(M + PL)}{\pi R E h}. \quad (62)$$

Далее из формул (37), (38), (59) и (61) следует

$$\begin{aligned} \Delta &= R\omega(L) = v_1(L) = -v_1^*(L); \\ \vartheta &= -\chi(L) = \frac{u_1(L)}{R} = -\frac{u_1^*(L)}{R}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения (60), получаем с учетом формул (62)

$$\begin{aligned} \Delta &= \gamma_{11}P + \gamma_{12}M; \\ \vartheta &= \gamma_{12}P + \gamma_{22}M, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{\pi E h} \left[ 2(1 + \nu) \frac{L}{R} + \frac{1}{3} \left( \frac{L}{R} \right)^3 \right]; \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{2\pi E h R} \left( \frac{L}{R} \right)^2; \quad \gamma_{22} = \frac{1}{\pi E h R^2} \cdot \frac{L}{R}. \end{aligned}$$

Полученные с помощью одного лишь безмоментного решения коэффициенты жесткости консоли пригодны как для длинных консолей, так и для коротких.

Далее из соотношений (40) и (42) получаем с учетом соотношений (57)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,1}^*(p) &= -\frac{1}{\pi R^2 h} [P(L - x) + M]; \quad \sigma_{\varphi,1}^*(p) = 0; \quad \sigma_{x\varphi,1}^*(p) = -\frac{P}{\pi R h}; \\ R\omega^*(x) &= \frac{\nu}{\pi R E h} [P(L - x) + M]. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Пусть консоль короткая [см. критерий (16) и (16a)]. Удовлетворяя с помощью выражений (47) и (48) граничным условиям (59) и следующим из равенств (58):

$$\omega(0) = 0; \quad \chi(0) = 0,$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{\nu(M + PL)}{\pi R E h}; \quad C_2 = 0; \\ d_1 &= -\frac{\nu M}{\pi R E h}; \quad d_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Из формул (77) гл. 21 следует

$$C_3 = \frac{4\nu}{\pi R E h} [(M + PL) \varphi_8 - M \varphi_{10}];$$

$$C_4 = -\frac{4\nu}{\pi R E h} [(M + PL) \varphi_{11} - M \varphi_{12}]$$

(значения функций  $\varphi_8 - \varphi_{12}$  приведены в табл. 3 гл. 21).

Максимальные напряжения имеют место у заделки консоли ( $x = 0$ ) и согласно (63) и (30) будут

$$\sigma_x^{(u)} = \frac{6\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \pi R^2 h} [(M + PL) \varphi_8 - M \varphi_{10}] \cos \varphi; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_x^{(u)};$$

$$\sigma_x^{(p)} = -\frac{1}{\pi R^2 h} (PL + M) \cos \varphi; \quad \sigma_\varphi^{(p)} = \nu \sigma_x^{(p)};$$

$$\sigma_{x\varphi}^{(p)} = -\frac{1}{\pi R h} P \sin \varphi; \quad \sigma_{x\varphi}^{(u)} = 0.$$

При достаточно больших  $L$  (см. табл. 3 и формулы (71) гл. 21)

$$\varphi_8 \approx -\frac{1}{2}; \quad \varphi_{10} \approx 0; \quad \varphi_{11} \approx -1; \quad \varphi_{12} \approx 0;$$

из выражений (65) следуют формулы для напряжений в корне *длинной консоли*

$$\sigma_x^{(u)} = -\frac{3\nu}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \pi R^2 h} (M + PL) \cos \varphi; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_x^{(u)};$$

$$\sigma_x^{(p)} = -\frac{1}{\pi R^2 h} (PL + M) \cos \varphi; \quad \sigma_\varphi^{(p)} = \nu \sigma_x^{(p)};$$

$$\sigma_{x\varphi}^{(p)} = -\frac{1}{\pi R h} P \sin \varphi; \quad \sigma_{x\varphi}^{(u)} = 0.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1964.
2. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. Машгиз, М., 1959.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения к технике. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
5. Григорьев Л. Я. Судовые сосуды, работающие под давлением. (определение напряжений и деформаций). Л., «Судостроение», 1965.
6. Канторович З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. М., Машгиз, 1960.
7. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1947.
8. Михайловский Е. И. К расчету коротких оболочек вращения. Сб. «Исследования по упругости и пластичности», сб. 6, изд. ЛГУ, 1967.
9. Михайловский Е. И. Расчет элементов автоклава (определение напряжений). Труды ВНИИСтроммаш, сб. 7, 1967.
10. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
11. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М., Машгиз, 1958.
12. Прочность цилиндрических оболочек. М., Оборонгиз, 1959.
13. Соколов В. И. Основы расчета и конструирования деталей и узлов пищевого оборудования. М., Машгиз, 1963.
14. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
15. Тимошенко С. П., Войновский - Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
16. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М., Госстройиздат, 1961.
17. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Изд. ЛГУ, 1962.
18. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Изд. ЛГУ, 1964.

## Глава 23

### РАСЧЕТ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК \*

Рассмотрим прямые усеченные конические оболочки кругового сечения. Предполагаем, что они являются тонкими непологими, имеют постоянную толщину и находятся под действием плавных осесимметричных или обратносимметричных внешних нагрузок (температурных полей).

В случае нагрузок, отличных от осесимметричных и обратносимметричных, следует пользоваться приведенными в гл. 21 зависимостями, полагая в них (рис. 1)

$$\frac{1}{R_0} = 0; \quad R_\varphi = s \operatorname{tg} \alpha_k; \quad \frac{d}{R_0 d\theta} = \frac{d}{ds}.$$

Если какая-либо из величин, характеризующих геометрию оболочки, нагрузку, упругие и термоупругие свойства материала, изменяется скачком на параллельном круге  $s = \text{const}$ , можно разбить оболочку на две и упруго сопрячь решения для каждой из частей. Вопросы упругого сопряжения конической оболочки с соосными оболочками вращения, а также подкрепления ее упругими кольцами рассмотрены в гл. 1 т. II. Сосредоточенным нагрузкам посвящена гл. 2 т. II. Пологие конические оболочки ( $\alpha_k > 80-85^\circ$ ) рассмотрены в работах [2, 3, 5, 6].

Приведенные в настоящей главе формулы могут быть использованы и при расчете оболочек с толщиной, плавно меняющейся по  $s$  и не зависящей от  $\varphi$ . Для этого в соотношениях безмоментного и термоупругого состояний следует заменить постоянную  $h$  на текущее значение толщины  $h(s)$ , внося последнее под знак интеграла в выражениях для смещений. В соотношениях же краевого эффекта под  $h = h(s_0)$  следует понимать значение толщины на рассматриваемом краю. При быстроизменяющейся толщине следует пользоваться уточненными соотношениями (см. гл. 5 т. II).

Кроме приведенных в гл. 22, использованы следующие обозначения:

$\alpha_k$  — угол конусности (рис. 1) в  $\text{рад}$ ;

$s$  — расстояние от воображаемой вершины конуса (рис. 1) в  $\text{см}$ ;

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u \sin \alpha_k + w \cos \alpha_k; & u_x &= u \cos \alpha_k - w \sin \alpha_k; \\ (u &= u_r \sin \alpha_k + u_x \cos \alpha_k; & w &= u_2 \cos \alpha_k - u_x \sin \alpha_k) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

\* Написана при участии В. М. Малькова.

горизонтальное и вертикальное смещения;  $N_s$ ,  $N_\varphi$ ,  $T$ ,  $Q_s$  — соответственно нормальные, сдвигающее и перерезывающее усилия (рис. 2 и 4) в  $\text{дан/см}$ ;

$$Q_r = N_s \sin \alpha_K + Q_s \cos \alpha_K; \quad Q_x = N_s \cos \alpha_K - Q_s \sin \alpha_K \quad (2)$$

горизонтальное и вертикальное усилия;

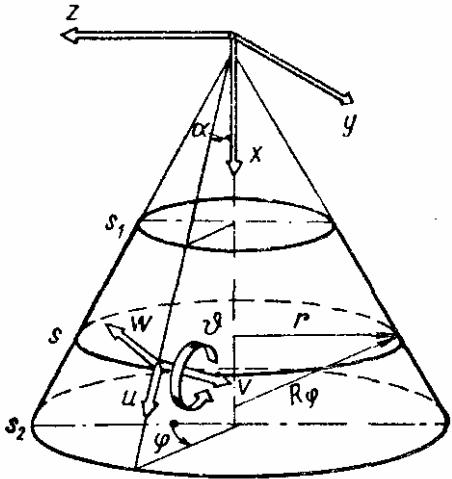


Рис. 1

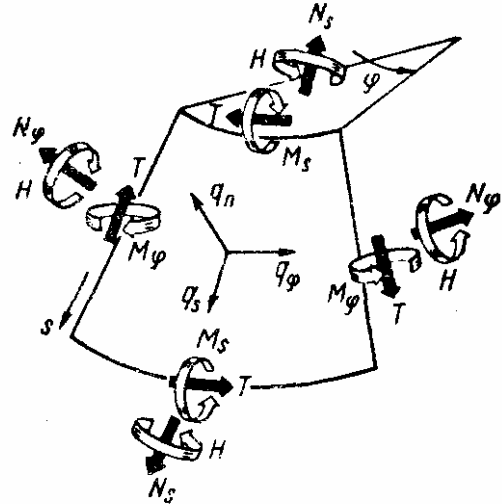


Рис. 2

$M_s$ ,  $M_\varphi$  — изгибающие моменты;  $H$  — скручивающий момент (рис. 2) в  $\text{дан} \cdot \text{см/см}$ .

$$\sigma_s^{(p)} = \frac{N_s}{h}, \quad \sigma_{s\varphi}^{(p)} = \frac{T}{h}, \quad \sigma_\varphi^{(p)} = \frac{N_\varphi}{h}$$

тангенциальные (цепные, мембранные) напряжения в срединном слое оболочки (рис. 3) в  $\text{дан/см}^2$ ;

$$\sigma_s^{(u)} = \frac{6M_s}{h^2}; \quad \sigma_{s\varphi}^{(u)} = \frac{6H}{h^2}; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \frac{6M_\varphi}{h^2}$$

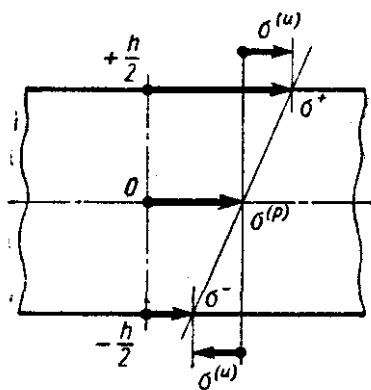


Рис. 3

изгибные напряжения в  $\text{дан/см}^2$ ;

$$\sigma_s^+ = \sigma_s^{(p)} + \sigma_s^{(u)}; \quad \sigma_{s\varphi}^+ = \sigma_{s\varphi}^{(p)} + \sigma_{s\varphi}^{(u)};$$

$$\sigma_\varphi^+ = \sigma_\varphi^{(p)} + \sigma_\varphi^{(u)}$$

напряжения в наружном слое оболочки (рис. 3);

$$\sigma_s^- = \sigma_s^{(p)} - \sigma_s^{(u)}; \quad \sigma_{s\varphi}^- = \sigma_{s\varphi}^{(p)} - \sigma_{s\varphi}^{(u)};$$

$$\sigma_\varphi^- = \sigma_\varphi^{(p)} - \sigma_\varphi^{(u)}$$

напряжения во внутреннем слое оболочки;

$F_x^0$ ,  $F_z^0$  — составляющие главного вектора усилий, приложенны к краю оболочки  $s = s_1$  (рис. 4, 8), в  $\text{дан}$ ;

$M_x^0, M_y^0$  — составляющие главного момента усилий и момента, приложенных к краю оболочки  $s = s_1$  (точкой приведения является центр круга  $s = s_1$ ), в  $\text{дан} \cdot \text{см}$ ;

$q_s, q_\varphi, q_n$  — составляющие поверхностной нагрузки (рис. 2) в  $\text{дан}/\text{см}^2$ .

Осесимметричным называют напряженно-деформированное состояние, не зависящее от угла  $\varphi$ . Следует различать осесимметричный изгиб и осесимметричное кручение.

### ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ

Для плавных нагрузок напряженно-деформированное состояние может быть разбито на *безмоментное*, помечаемое значком \*, *термоупругое* (значок  $^T$ ) и *краевой эффект* (значок  $^K$ ). Перемещения чистого изгиба в симметричном случае сводится к жесткому смещению  $u_x$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} N_s &= N_s^*; & N_\varphi &= N_\varphi^* + N_\varphi^K; & M_s &= M_s^T + M_s^K; \\ & & M_\varphi &= M_\varphi^T + M_\varphi^K; \\ \vartheta &= \vartheta^* + \vartheta^T + \vartheta^K; & u_r &= u_r^* + u_r^T + u_r^K; \\ & & u_x &= u_x^* + u_x^T + u_x^K; \\ u &= u_r \sin \alpha_K + u_x \cos \alpha_K; \\ w &= u_r \cos \alpha_K - u_x \sin \alpha_K; \\ Q_r &= N_s^* \sin \alpha_K + Q_r^K. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Безмоментные усилия подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_s^*(s) &= \frac{\frac{1}{2\pi} F_x^0 + \sin \alpha_K \int_{s_1}^s (q_n \sin \alpha_K - q_s \cos \alpha_K) s ds}{s \sin \alpha_K \cos \alpha_K}; \\ N_\varphi^*(s) &= s \operatorname{tg} \alpha_K q_n, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$F_x^0 = 2\pi s_1 \sin \alpha_K \cos \alpha_K N_s^*(s_1) \quad (5)$$

осевая сила, действующая на краю конуса  $s = s_1$  (рис. 4). Далее

$$\begin{aligned} \vartheta^* &= -\frac{1}{Eh} s \operatorname{tg} \alpha_K \left[ \frac{d(N_s^* + N_\varphi^*)}{ds} + (1 + \nu) q_s \right]; \\ u_r^* &= \frac{s \sin \alpha_K}{Eh} \{N_\varphi^* - \nu N_s^*\}; \end{aligned}$$

$$u_x^* = a_x - \frac{1}{Eh} \int_{s_1}^s \left\{ s \frac{\sin^2 \alpha_K}{\cos \alpha_K} \left[ \frac{d(N_s^* + N_\varphi^*)}{ds} + (1 + \nu) q_s \right] - \cos \alpha_K (N_s^* - \nu N_\varphi^*) \right\} ds. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся в расчетной практике виды нагрузок.

*Осевая растягивающая (сжимающая) сила* (см. рис. 4)

$$F_x^0 = P \quad (q_n = q_s = 0). \quad (7)$$

Для нее

$$\left. \begin{aligned} N_s^* &= \frac{P}{2\pi \sin \alpha_K \cos \alpha_K s}; \\ N_\varphi^* &= 0; \\ \vartheta^* &= \frac{P}{2\pi E h \cos^2 \alpha_K s}; \\ u_r^* &= -\frac{\nu P}{2\pi E h \cos \alpha_K}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

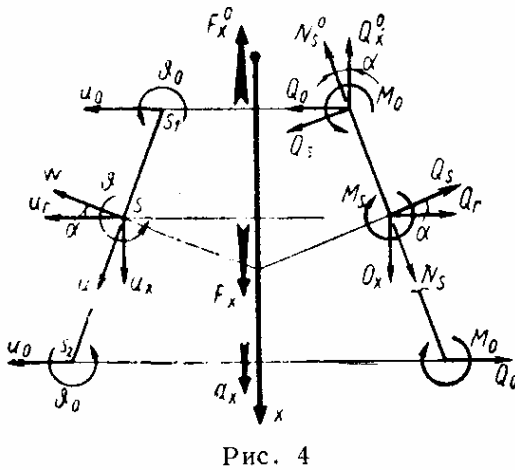


Рис. 4

$$u_x^* = a_x + \frac{P}{2\pi E h \sin \alpha_K \cos^2 \alpha_K} \ln \frac{s}{s_1}.$$

*Равномерное давление с осевой силой* (см. рис. 4)

$$F_x^0 = P; \quad q_n = p; \quad q_s = 0; \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} N_s^* &= \frac{p \operatorname{tg} \alpha_K}{2} \cdot \frac{s^2 - s_1^2}{s} + \frac{P}{2\pi \sin \alpha_K \cos \alpha_K s}; \\ N_\varphi^* &= p \operatorname{tg} \alpha_K s; \\ \vartheta^* &= -\frac{p \operatorname{tg}^2 \alpha_K}{2Eh} s \left( 3 + \frac{s_1^2}{s^2} \right) + \frac{P}{2\pi E h \cos^2 \alpha_K s}; \\ u_r^* &= \frac{p \sin^2 \alpha_K}{2Eh \cos \alpha_K} s \left[ (2 - \nu) s + \nu \frac{s_1^2}{s} \right] - \frac{\nu P}{2\pi E h \cos \alpha_K}; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$u_x^* = a_x + \frac{P}{2\pi E h \sin \alpha_K \cos^2 \alpha_K} \times \left\{ \begin{aligned} &\times \ln \frac{s}{s_1} - \frac{p}{2Eh} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha_K} \times \\ &\times \left\{ [3 \sin^2 \alpha_K - (1 - 2\nu) \cos^2 \alpha_K] \frac{s^2 - s_1^2}{2} + s_1^2 \ln \frac{s}{s_1} \right\} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Если на краю  $s = s_1$  установлена крышка, либо присоединена оболочка, воспринимающая давление (рис. 5), то

$$P = \pi (s_1 \sin \alpha_K)^2 p \quad (11)$$

и

$$\left. \begin{aligned} N_s^* &= \frac{p \operatorname{tg} \alpha_K}{2} s; \\ N_\varphi^* &= p \operatorname{tg} \alpha_K s; \\ \vartheta^* &= -\frac{3p \operatorname{tg}^2 \alpha_K}{2Eh} s; \\ u_r^* &= \frac{(2 - \nu) p \sin^2 \alpha_K s^2}{2Eh \cos \alpha_K}; \\ u_x^* &= a_x - \frac{p}{4Eh} \cdot \frac{\sin \alpha_K}{\cos^2 \alpha_K} \times \\ &\times [3 \sin^2 \alpha_K - (1 - 2\nu) \cos^2 \alpha_K] (s^2 - s_1^2). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

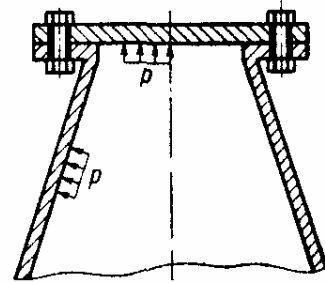


Рис. 5

**Гидростатическое давление.** Пусть коническая оболочка  $s_1 \leq s \leq s_2$  наполнена тяжелой жидкостью с удельным весом  $\gamma_{ж}$  (в  $\text{дан/см}^3$ ). Давление на стенку по параллельному кругу  $s$  определяется весом столба жидкости над этим сечением

$$q_n = \gamma_{ж} (s - s_1) \cos \alpha_K \quad (q_s = 0; \quad F_x^0 = 0). \quad (13)$$

Для этой нагрузки

$$\left. \begin{aligned} N_s^* &= \gamma_{ж} \sin \alpha_K \left[ \frac{s^2}{3} - \frac{s_1 s}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{s_1^3}{s} \right]; \\ N_\varphi^* &= \gamma_{ж} \sin \alpha_K (s - s_1) s; \\ \vartheta^* &= -\frac{\gamma_{ж} \sin^2 \alpha_K}{Eh \cos \alpha_K} s \left[ \frac{8}{3} s - \frac{3}{2} s_1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{s_1^3}{s^2} \right]; \\ u_r^* &= \frac{\gamma_{ж} \sin^2 \alpha_K}{Eh} s \times \\ &\times \left[ \left(1 - \frac{\nu}{3}\right) s^2 - \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) s_1 s - \frac{\nu}{6} \cdot \frac{s_1^3}{s} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$



$$u_x^* = a_x - \frac{\gamma_{\kappa} \sin \alpha_{\kappa}}{Eh \cos \alpha_{\kappa}} \times \left\{ \sin^2 \alpha_{\kappa} \left[ \frac{8}{9} s^3 - \frac{3}{4} s_1 s^2 - \frac{5}{36} s_1^3 \right] - \right. \\ \left. - \cos^2 \alpha_{\kappa} \left[ \frac{1}{9} (1 - 3\nu) s^3 - \frac{1}{4} (1 - 2\nu) s_1 s^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{36} (5 - 6\nu) s_1^3 \right] - \frac{1}{6} s_1^3 \ln \frac{s}{s_1} \right\}. \quad (14)$$

Собственный вес оболочки. Пусть  $q$  — вес оболочки, приходящийся на единицу площади ее срединной поверхности, в  $\text{дан/см}^2$ . Тогда (рис. 6)

$$q_s = q \cos \alpha_{\kappa}; \quad q_n = -q \sin \alpha_{\kappa} \quad (15)$$

и

$$\left. \begin{aligned} N_s^* &= -\frac{q}{2 \cos \alpha_{\kappa}} \left( s - \frac{s_1^2}{s} \right); \\ N_{\varphi}^* &= -\frac{q \sin^2 \alpha_{\kappa}}{\cos \alpha_{\kappa}} s; \\ \vartheta^* &= -\frac{q \sin \alpha_{\kappa}}{Eh \cos^2 \alpha_{\kappa}} s \left\{ (2 + \nu) \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s_1^2}{s^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^* &= \frac{q \operatorname{tg} \alpha_{\kappa}}{Eh} \left\{ \frac{\nu}{2} - \sin^2 \alpha_{\kappa} \right\} s^2 - \frac{\nu}{2} s_1^2; \\ u_x^* &= a_x + \frac{q}{2Eh \cos^2 \alpha_{\kappa}} \times \\ &\times \left\{ \left[ \left( \frac{1}{2} + \sin^2 \alpha_{\kappa} \right) (\sin^2 \alpha_{\kappa} - \cos^2 \alpha_{\kappa}) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left( s^2 - s_1^2 \right) + s_1^2 \ln \frac{s}{s_1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Термоупругие слагаемые определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_s^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ (1+\nu) \left( \kappa_r + \operatorname{tg} \alpha_{\kappa} \frac{d\varepsilon_r}{ds} \right) + \right. \\ &\quad \left. + s \operatorname{tg} \alpha_{\kappa} \frac{d^2 \varepsilon_r}{ds^2} \right]; \\ M_{\varphi}^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ (1+\nu) \left( \kappa_r + \operatorname{tg} \alpha_{\kappa} \frac{d\varepsilon_r}{ds} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \nu s \operatorname{tg} \alpha_{\kappa} \frac{d^2 \varepsilon_r}{ds^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^r &= -s \operatorname{tg} \alpha_\kappa \frac{d\varepsilon_r}{ds}; \\ u_r^r &= s \sin \alpha_\kappa \varepsilon_r; \\ u_x^r &= -\frac{\sin^2 \alpha_\kappa}{\cos \alpha_\kappa} s \varepsilon_r + \frac{1}{\cos \alpha_\kappa} \int \varepsilon_r ds. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

При температуре, меняющейся линейно вдоль оси вращения и при незакрепленных краях, температурная деформация конуса не сопровождается напряжениями [7, 2].

**Краевой эффект.** Оболочки принято делить на *длинные* и *короткие*. Первые выгодно отличаются от вторых тем свойством, что для них можно пренебречь влиянием воздействий, приложенных к одному краю на напряженно-деформированное состояние возле другого края.

Если длина конической оболочки вдоль образующей такова, что отвечающие краям оболочки значения  $s_1$ ,  $s_2$  подчиняются условию

$$(V s_2 - V s_1) > 0,8 \sqrt{h \operatorname{tg} \alpha_\kappa}, \quad (20)$$

то с *точностью* до 10% оболочку можно считать длинной. Если задаться более высокой 5%-ной *точностью* расчета, то условие (20) заменяют следующим:

$$(V s_2 - V s_1) > 1,2 \sqrt{h \operatorname{tg} \alpha_\kappa}. \quad (21)$$

Для *коротких* конических оболочек слагаемые краевого эффекта можно записать

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_1}{s} \omega^\kappa(s) &= C_1 K_0(\beta) - C_2 K_1(\beta) - C_3 K_2(\beta) - C_4 K_3(\beta); \\ \sqrt{\frac{s_1}{s}} \cdot \frac{\vartheta^\kappa(s)}{b} &= 4C_1 K_3(\beta) + C_2 K_0(\beta) + C_3 K_1(\beta) + C_4 K_2(\beta); \\ \frac{M_s^\kappa(s)}{D b^2} &= 4C_1 K_2(\beta) - 4C_2 K_3(\beta) + C_3 K_0(\beta) + C_4 K_1(\beta); \\ \sqrt{\frac{s}{s_1}} \cdot \frac{\cos \alpha_\kappa Q_r^\kappa(s)}{D b^3} &= 4C_1 K_1(\beta) - 4C_2 K_2(\beta) - \\ &\quad - 4C_3 K_3(\beta) + C_4 K_0(\beta); \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$M_\varphi^\kappa = \nu M_s^\kappa; \quad N_\varphi^\kappa = \frac{E h}{s \operatorname{tg} \alpha_\kappa} \omega^\kappa;$$

$$u_r^\kappa = \cos \alpha_\kappa \omega^\kappa; \quad u_x^\kappa = -\sin \alpha_\kappa \omega^\kappa, \quad (23)$$

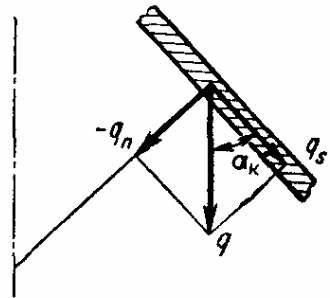


Рис. 6

где

$$\beta = 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_1}}{\sqrt{h} \operatorname{tg} \alpha_\kappa};$$

$$b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hs_1 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{hs_1 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}} \quad (\text{при } \nu = 0,3); \quad (24)$$

$K_0(\beta)$ ,  $K_1(\beta)$ ,  $K_2(\beta)$ ,  $K_3(\beta)$  — функции Крылова, значения которых приведены в табл. 2 гл. 21;

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= w^\kappa(s_1) = \frac{1}{\cos \alpha_\kappa} [u_r(s_1) - u_r^*(s_1) - u_r^r(s_1)]; \\ C_2 &= \frac{\vartheta^\kappa(s_1)}{b} = \frac{1}{b} [\vartheta(s_1) - \vartheta^r(s_1)]; \\ C_3 &= \frac{M_s^\kappa(s_1)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2} [M_s(s_1) - M_s^r(s_1)]; \\ C_4 &= \frac{\cos \alpha_\kappa Q_r^\kappa(s_1)}{Db^3} = \frac{\cos \alpha_\kappa}{Db^3} [Q_r(s_1) - \sin \alpha_\kappa N_s^*(s_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Задавая какие-либо две из граничных величин  $u_r(s_1)$ ;  $\vartheta(s_1)$ ,  $M_s(s_1)$ ,  $Q_r(s_1)$  с помощью формул (25) находим два начальных параметра (например,  $C_1$  и  $C_2$ ). Остальные два ( $C_3$  и  $C_4$ ) находят по формулам (22) из граничных условий на краю  $s_2$ . При рассмотрении конкретных задач следует использовать соотношения (66)–(79) гл. 21, полагая в них

$\rho = \sqrt{\frac{s_1}{s}}$  и заменяя величины (с разными значками)  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\sin \theta_1$ ,  $\sin \theta_2$ ,  $M_\theta$  соответственно на  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\cos \alpha_\kappa$ ,  $\cos \alpha_\kappa$ ,  $M_s$ .

Для длинных оболочек приведенные выше соотношения значительно упрощаются. Так,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^r + \alpha_{11}(Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{12}(M_0 - M_0^r); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^r + \alpha_{12}(Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{22}(M_0 - M_0^r), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_r(s_0); \quad u_0^* = u_r^*(s_0); \quad u_0^r = u_r^r(s_0); \\ \vartheta_0 &= \vartheta(s_0); \quad \vartheta_0^r = \vartheta^r(s_0); \\ M_0 &= M_s(s_0); \quad M_0^r = M_s^r(s_0); \quad Q_0 = Q_r(s_0); \quad Q_0^* = Q_r^*(s_0); \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mu \cdot 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\cos \alpha_\kappa} \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h} \right) \frac{1}{Eh}; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{22} &= \mu \cdot 4 [3(1 - \nu^2)]^{\frac{3}{4}} \left( \frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha_\kappa}} \cdot \frac{1}{Eh^2} \\ \left[ \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 12(1 - \nu^2) \left( \frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h} \right)^2 \frac{1}{(Eh)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Полагаем  $\mu = -1$  на краю  $s_0 = s_1$ ;  $\mu = +1$  на краю  $s_0 = s_2$  ( $s_1 \leq s \leq s_2$ ).

Полные напряжения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^{(u)} &= \sigma_s^T(u) + \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \\ &\quad - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \sigma_\kappa \sin \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_\varphi^{(u)} &= \sigma_\varphi^T(u) + \nu \left[ \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \sigma_\kappa \sin \beta e^{-\beta} \right]; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= \sigma_\varphi^*(p) + \mu \sigma_\kappa \cos \beta e^{-\beta} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_s^{(p)} &= \sigma_s^*(p), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^T)}{h^2}; \\ \sigma_\kappa &= 2 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)} \sqrt{\frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h}} \sqrt{\cos \alpha_\kappa} \frac{Q_0 - Q_0^*}{h}; \\ \sigma_s^T(u) &= \frac{6M_s^T}{h^2}; \quad \sigma_\varphi^T(u) = \frac{6M_\varphi^T}{h^2}; \\ \sigma_s^*(p) &= \frac{N_s^*}{h}; \quad \sigma_s^*(p) = \frac{N_\varphi^*}{h}; \\ \beta &= \frac{2 \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}}{\sqrt{h \operatorname{tg} \alpha_\kappa}} \left| \sqrt{s} - \sqrt{s_0} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Смещения и угол поворота

$$\left. \begin{aligned} w &= w^* + w^T + w^\kappa; & u_r &= u_r^* + u_r^T + u_r^\kappa; \\ \vartheta &= \vartheta^* + \vartheta^T + \vartheta^\kappa; & u_x &= u_x^* + u_x^T + u_x^\kappa; \\ u &= u^* + u^T & (u &= u_r \sin \alpha_\kappa + u_x \cos \alpha_\kappa), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w^\kappa &= \frac{s \operatorname{tg} \alpha_\kappa}{E} \left\{ -\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \right\}; \\ \vartheta^\kappa &= \frac{4\sqrt{3(1-\nu^2)}}{E} \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} \alpha_\kappa}{h}} \left\{ \mu \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sigma_{M_0} \cos \beta e^{-\beta} - \sigma_k (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\}; \\ u_r^\kappa &= w^\kappa \cos \alpha_\kappa; \quad u_x^\kappa = -w^\kappa \sin \alpha_\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Приведенные соотношения значительно упрощают расчет длинных оболочек. В случае, если заданы статические величины, из формул (30) определяют  $\sigma_{M_0}$ ,  $\sigma_k$ , а затем по приведенным выше формулам подсчитывают

напряжения и смещения. В случае же заданных геометрических граничных величин  $(Q_0 - Q_0^*)$  и  $(M_0 - M_0^*)$  определяют решением системы (26), а затем уже подсчитывают напряжения и смещения.

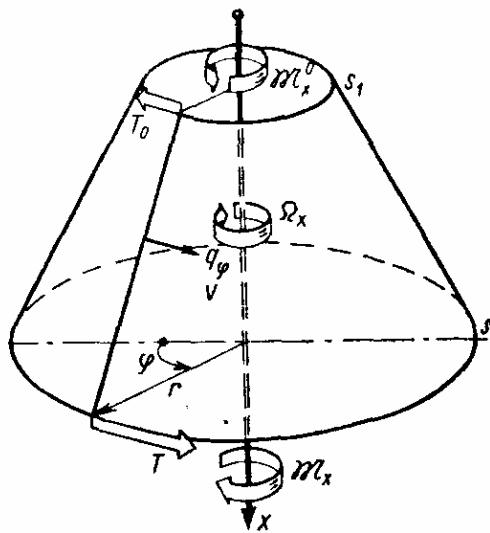


Рис. 7

### ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КРУЧЕНИЕ

При осесимметричном кручении (рис. 7) в оболочке имеет место безмоментное напряженное состояние, описываемое формулами

$$T(s) = - \frac{\frac{1}{2\pi \sin^2 \alpha_\kappa} \mathfrak{M}_x^0 + \int_{s_1}^s s^2 q_\varphi ds}{s^2}. \quad (33)$$

$$v(s) = s \left\{ \frac{2(1+\nu)}{Eh} \int_{s_1}^s T \frac{ds}{s} - \sin \alpha_\kappa \Omega_x \right\}; \quad (34)$$

$$[\mathfrak{M}_x^0 = -2\pi s_1^2 \sin^2 \alpha_\kappa T(s_1)]; \quad (35)$$

$$\sigma_{s\varphi} = \frac{T}{h}. \quad (36)$$

## ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Обратносимметричным (иногда антисимметричным, ветровым) называют случай, когда искомые и заданные величины имеют следующую зависимость от угла  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \cos \varphi; \quad v = v_1 \sin \varphi; \quad w = w_1 \cos \varphi; \quad u_r = u_{r,1} \cos \varphi; \\ u_x &= u_{x,1} \cos \varphi; \quad \vartheta = \vartheta_1 \cos \varphi; \quad N_s = N_{s,1} \cos \varphi; \\ N_\varphi &= N_{\varphi,1} \cos \varphi; \\ T &= T_1 \sin \varphi; \quad M_s = M_{s,1} \cos \varphi; \quad M_\varphi = M_{\varphi,1} \cos \varphi; \\ H &= H_1 \sin \varphi; \\ Q_r &= Q_{r,1} \cos \varphi; \quad q_s = q_{s,1} \cos \varphi; \quad q_\varphi = q_{\varphi,1} \sin \varphi; \\ q_n &= q_{n,1} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

При плавных нагрузках напряженно-деформированное состояние можно представить в виде суммы *безмоментного*\*, термоупругого<sup>†</sup> состояний и *краевого эффекта*<sup>κ</sup>. Перемещения чистого изгиба в рассматриваемом случае сводится к жесткому смещению оболочки  $a_z$  и жесткому повороту  $\Omega_y$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} N_{s,1} &= N_{s,1}^*; \quad N_{\varphi,1} = N_{\varphi,1}^* + N_{\varphi,1}^\kappa; \quad T_1 = T_1^*; \\ M_{s,1} &= M_{s,1}^T + M_{s,1}^\kappa; \quad M_{\varphi,1} = M_{\varphi,1}^T + M_{\varphi,1}^\kappa; \quad H_1 = H_1^T; \\ Q_{r,1} &= N_{s,1}^* \sin \alpha_\kappa + Q_{r,1}^\kappa; \quad \vartheta_1 = \vartheta_1^* + \vartheta_1^T + \vartheta_1^\kappa; \\ u_{r,1} &= u_{r,1}^* + u_{r,1}^T + u_{r,1}^\kappa; \quad u_{x,1} = u_{x,1}^* + u_{x,1}^T + u_{x,1}^\kappa; \\ w_1 &= w_1^* + w_1^T + w_1^\kappa; \quad u_1 = u_1^* + u_1^T; \quad v_1 = v_1^* + v_1^T. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Безмоментные усилия подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_{s,1}^* &= \frac{W}{s \sin \alpha_\kappa \cos \alpha_\kappa}; \quad N_{\varphi,1}^* = s \operatorname{tg} \alpha_\kappa \cdot q_{n,1}; \\ T_1^* &= -\frac{1}{\cos \alpha_\kappa} \cdot \frac{dW}{ds} + s \operatorname{tg} \alpha_\kappa (q_{n,1} \sin \alpha_\kappa - q_{s,1} \cos \alpha_\kappa), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где

$$W = \frac{1}{\pi s \sin \alpha_\kappa} \left\{ \mathfrak{M}_y^0 + F_z^0 \cos \alpha_\kappa (s - s_1) + \pi \cos \alpha_\kappa \int_{s_1}^s \Phi(s) ds \right\}; \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (q_{n,1} \sin \alpha_\kappa - q_{s,1} \cos \alpha_\kappa) s^2 \frac{\sin^2 \alpha_\kappa}{\cos \alpha_\kappa} - \\ &- \sin \alpha_\kappa \int_{s_1}^s (q_{n,1} \cos \alpha_\kappa + q_{s,1} \sin \alpha_\kappa - q_{\varphi,1}) s ds. \end{aligned} \quad (41)$$

Составляющие главного вектора и главного момента, усилий и изгибающего момента, приложенных к краю, связаны с краевыми значениями безмоментных усилий соотношениями (рис. 8)

$$F_z^0 = \pi s_1 \sin \alpha_\kappa [N_{s,1}^*(s_1) \sin \alpha_\kappa - T_1^*(s_1)];$$

$$\mathfrak{M}_y^0 = \pi s_1^2 \sin^2 \alpha_\kappa \cos \alpha_\kappa N_{s,1}^*(s_1). \quad (42)$$

Случай, когда перерезывающая сила  $F$  и момент  $\mathfrak{M}$  направлены под произвольным углом, могут быть сведены к рассматриваемому поворотом осей  $Y, Z$  и наложением решений (см. пример 12 гл. 1 т. II).

Смещения и угол поворота находят по формулам

$$\left. \begin{aligned} u_{x,1}^* &= s \sin \alpha_\kappa \left\{ \Omega_y - \frac{1}{Eh} \int_{s_1}^s \left\{ \operatorname{tg} \alpha_\kappa \frac{d(N_{s,1}^* + N_{\varphi,1}^*)}{ds} + \right. \right. \\ &\quad + \frac{1+\nu}{s \operatorname{tg} \alpha_\kappa} N_{\varphi,1}^* - \frac{1}{s \sin \alpha_\kappa \cos \alpha_\kappa} (N_{s,1}^* + N_{\varphi,1}^*) - \\ &\quad - (1+\nu) \left[ -\frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha_\kappa} \cdot \frac{d(sW)}{ds} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{tg} \alpha_\kappa (q_{n,1} \operatorname{tg} \alpha_\kappa - 2q_{s,1}) \right] \right\} ds; \\ u_{r,1}^* &= a_z + \frac{1}{Eh} \int_{s_1}^s \left\{ s \sin \alpha_\kappa \frac{d(N_{s,1}^* + N_{\varphi,1}^*)}{ds} + \right. \\ &\quad + (1+\nu) \left[ -\sin \alpha_\kappa N_{\varphi,1}^* + \frac{1}{s \cos \alpha_\kappa} \cdot \frac{d(sW)}{ds} - \right. \\ &\quad \left. \left. - s \sin \alpha_\kappa (q_{n,1} \operatorname{tg} \alpha_\kappa - 2q_{s,1}) \right] - Eh \frac{\operatorname{ctg} \alpha_\kappa}{s} u_{x,1}^* \right\} ds; \\ \vartheta_1^* &= \chi^* + \frac{u_{x,1}^*}{s \sin \alpha_\kappa}; \\ v_1^* &= \frac{s \sin \alpha_\kappa}{Eh} (N_{\varphi,1}^* - \nu N_{s,1}^*) - u_{r,1}^*; \\ u_1^* &= u_{r,1}^* \sin \alpha_\kappa + u_{x,1}^* \cos \alpha_\kappa; \\ w_1^* &= u_{r,1}^* \cos \alpha_\kappa - u_{x,1}^* \sin \alpha_\kappa, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где  $a_z$  — жесткое смещение оболочки вдоль оси  $Y$ , а  $\Omega_y$  — ее жесткий поворот вокруг оси  $Y$  (см. рис. 8).

В обратносимметричном случае ту же роль, что  $\vartheta$  в симметричном случае, играет упругий поворот

$$\chi = \vartheta_1 - \frac{u_{x,1}}{s \sin \alpha_K}, \quad (44)$$

представляющий собой полный поворот  $\vartheta_1$  (в осевой плоскости  $\varphi = 0$ ), за вычетом поворота поперечного сечения как жесткого целого на угол  $\frac{u_{x,1}}{s \sin \alpha_K}$  (см. работу [12], стр. 136). Аналогично, ту же роль, что и  $u_r$  в симметричном случае, играет величина

$$s \sin \alpha_K \cdot \omega = v_1 + u_{r,1}. \quad (45)$$

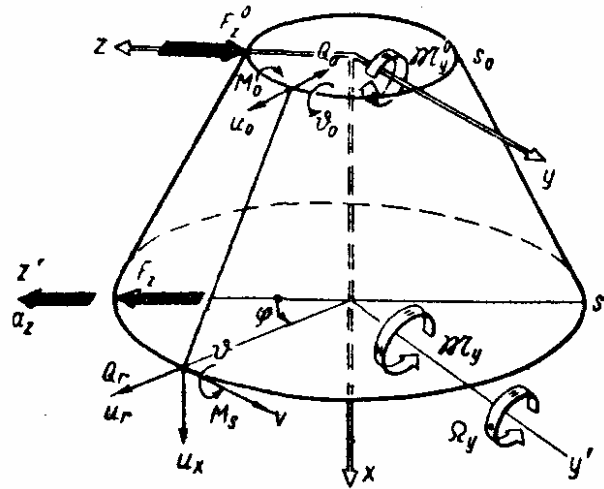


Рис. 8

Обе они являются деформационными (см. стр. 660), не изменяющимися при смещении оболочки как жесткого целого.

Для введенных величин имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \chi^* &= \frac{1}{Eh} \left\{ -s^2 \operatorname{tg} \alpha_K \frac{d}{ds} \left( \frac{N_{s,1}^* + N_{\varphi,1}^*}{s} \right) + (1 + \nu) \times \right. \\ &\times \left[ -\frac{1}{s \cos^2 \alpha_K} \frac{d(sW)}{ds} + s \operatorname{tg} \alpha_K (q_{n,1} \operatorname{tg} \alpha_K - 2q_{s,1}) \right] \Bigg\}; \\ \omega^* &= \frac{1}{Eh} (N_{\varphi,1}^* - \nu N_{s,1}^*). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Для наиболее часто применяемого случая изгиба оболочки краевыми усилиями и моментами ( $q_{s,1} = q_{\varphi,1} = q_{n,1} = 0$ ) приведенные выше формулы значительно упрощаются, принимая вид

$$\left. \begin{aligned} N_{s,1}^* &= \frac{1}{\pi s^2 \sin^2 \alpha_K \cos \alpha_K} \{ \mathfrak{M}_y^0 + F_z^0 \cos \alpha_K (s - s_1) \}; \\ N_{\varphi,1}^* &= 0; \\ T_1^* &= \frac{1}{\pi s^2 \sin \alpha_K \cos \alpha_K} \{ \mathfrak{M}_y^0 - F_z^0 s_1 \cos \alpha_K \}; \\ \chi^* &= \frac{1}{Eh} \left\{ \frac{3}{\pi s^2 \sin \alpha_K \cos^2 \alpha_K} \mathfrak{M}_y^0 + \frac{(1 - \nu) s - 3s_1}{\pi s^2 \sin \alpha_K \cos \alpha_K} F_z^0 \right\}; \\ r \omega^* &= -\frac{\nu s \sin \alpha_K}{Eh} N_{s,1}^*; \end{aligned} \right\} \quad (47)$$



$$\begin{aligned}
u_{x,1}^* &= s \sin \alpha_\kappa \Omega_y - \frac{1}{\pi E h \cos^2 \alpha_\kappa} \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha_\kappa}{2 \sin^2 \alpha_\kappa} \times \\
&\times \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s_1^2} \right) \mathfrak{M}_y^0 - \frac{1}{\pi E h \cos \alpha_\kappa} \left( \frac{1 - \nu \sin^2 \alpha_\kappa}{\sin^2 \alpha_\kappa} \times \right. \\
&\times \left. \frac{s_1 - s}{s_1} - \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha_\kappa}{2 \sin^2 \alpha_\kappa} \cdot \frac{s_1^2 - s^2}{ss_1} \right) F_z^0; \\
u_{r,1}^* &= a_z - \cos \alpha_\kappa (s - s_1) \Omega_y + \frac{1}{\pi E h \sin \alpha_\kappa \cos \alpha_\kappa} \times \\
&\times \left[ \frac{s_1^2 - s^2}{ss_1^2} - \frac{(s_1 - s)^2}{2ss_1^2 \sin^2 \alpha_\kappa} \right] \mathfrak{M}_y^0 + \frac{1}{\pi E h \sin \alpha_\kappa} \times \\
&\times \left[ \frac{s^2 - s_1^2}{ss_1} + \frac{1}{\sin^2 \alpha_\kappa} \ln \frac{s}{s_1} + \frac{1}{2 \sin^2 \alpha_\kappa} \times \right. \\
&\times \left. \frac{s_1^2 - s^2}{ss_1} - \nu \frac{s_1 - s}{s_1} \right] F_z^0; \\
\vartheta_1^* &= \chi^* + \frac{u_{x,1}^*}{s \sin \alpha_\kappa}; \\
v_1^* &= \frac{s \sin \alpha_\kappa}{E h} (N_{\varphi,1}^* - \nu N_{s,1}^*) - u_{r,1}^* = r \omega^* - u_{r,1}^*; \\
u_1^* &= u_{r,1}^* \sin \alpha_\kappa + u_{x,1}^* \cos \alpha_\kappa; \quad \omega_1^* = \omega_{r,1}^* \cos \alpha_\kappa - \\
&\quad - u_{x,1}^* \sin \alpha_\kappa.
\end{aligned} \tag{47}$$

Термоупругие слагаемые определяют по формулам

$$\begin{aligned}
M_{s,1}^T &= - \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \times \\
&\times \left\{ (1 + \nu) \left[ \kappa_{T,1} + \operatorname{tg} \alpha_\kappa \frac{d\varepsilon_{T,1}}{ds} - \frac{\varepsilon_{T,1}}{s \sin \alpha_\kappa \cos \alpha_\kappa} \right] + \right. \\
&\quad \left. + s \operatorname{tg} \alpha_\kappa \frac{d^2 \varepsilon_{T,1}}{ds^2} \right\}; \\
M_{\varphi,1}^T &= - \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \times \\
&\times \left\{ (1 + \nu) \left[ \kappa_{T,1} + \operatorname{tg} \alpha_\kappa \frac{d\varepsilon_{T,1}}{ds} - \frac{\varepsilon_{T,1}}{s \sin \alpha_\kappa \cos \alpha_\kappa} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \nu s \operatorname{tg} \alpha_\kappa \frac{d^2 \varepsilon_{T,1}}{ds^2} \right\};
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\left. \begin{aligned}
 H_1^T &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha_\kappa} \left( \frac{d\varepsilon_{T,1}}{ds} - \frac{\varepsilon_{T,1}}{s} \right) \right\}; \\
 \chi^T &= -s \operatorname{tg} \alpha_\kappa \frac{d\varepsilon_{T,1}}{ds} + \operatorname{tg} \alpha_\kappa \varepsilon_{T,1}; \quad \omega^T = \varepsilon_{T,1}; \\
 u_{x,1}^T &= -\frac{\sin^2 \alpha_\kappa}{\cos \alpha_\kappa} s \cdot \varepsilon_{T,1} + \frac{s}{\cos \alpha_\kappa} \int \frac{\varepsilon_{T,1}}{s} ds; \\
 u_{r,1}^T &= \sin \alpha_\kappa s \varepsilon_{T,1} - \frac{1}{\sin \alpha_\kappa} \int \left\{ \int \frac{\varepsilon_{T,1}}{s} ds \right\} ds; \\
 \vartheta_1^T &= \chi^T + \frac{u_{x,1}^T}{s \sin \alpha_\kappa}; \quad v_1^T = s \sin \alpha_\kappa \varepsilon_{T,1} - u_{r,1}^T; \\
 u_1^T &= u_{r,1}^T \sin \alpha_\kappa + u_{x,1}^T \cos \alpha_\kappa; \\
 \omega_1^T &= u_{r,1}^T \cos \alpha_\kappa - u_{x,1}^T \sin \alpha_\kappa.
 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Здесь величины  $\varepsilon_{T,1}$ ;  $\chi_{T,1}$  при линейном распределении температуры по толщине связаны с температурой на внешней поверхности оболочки  $T^+ = T_1^+ \cos \varphi$  и внутренней  $T^- = T_1^- \cos \varphi$  соотношениями

$$\varepsilon_{T,1} = \alpha \frac{T_1^+ + T_1^-}{2}; \quad \chi_{T,1} = \alpha \frac{T_1^+ - T_1^-}{h} \quad (49)$$

[при нелинейном законе распределения температуры по толщине следует пользоваться соотношениями (80) гл. 20].

К р а е в о й э ф ф е к т. Слагаемые краевого эффекта для коротких оболочек

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{s_1}{s} [s \operatorname{tg} \alpha_\kappa \omega^\kappa(s)] &= C_1 K_0(\beta) - C_2 K_1(\beta) - C_3 K_2(\beta) - C_4 K_3(\beta); \\
 \sqrt{\frac{s_1}{s}} \cdot \frac{\chi^\kappa(s)}{b} &= 4C_1 K_3(\beta) + C_2 K_0(\beta) + C_3 K_1(\beta) + C_4 K_2(\beta); \\
 \frac{M_{s,1}^\kappa(s)}{Db^2} &= 4C_1 K_2(\beta) - 4C_2 K_3(\beta) + C_3 K_0(\beta) + C_4 K_1(\beta); \\
 \sqrt{\frac{s}{s_1}} \cdot \frac{\cos \alpha_\kappa Q_{r,1}^\kappa(s)}{Db^3} &= 4C_1 K_1(\beta) - 4C_2 K_2(\beta) - \\
 &\quad - 4C_3 K_3(\beta) + C_4 K_0(\beta);
 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$M_{\varphi,1}^\kappa = \nu M_{s,1}^\kappa; \quad N_{\varphi,1}^\kappa = Eh \omega^\kappa; \quad \vartheta_1^\kappa = \chi^\kappa;$$

$$\omega_1^\kappa = s \operatorname{tg} \alpha_\kappa \omega^\kappa; \quad u_{r,1}^\kappa = s \sin \alpha_\kappa \omega^\kappa;$$

$$u_{x,1}^\kappa = -s \frac{\sin^2 \alpha_\kappa}{\cos \alpha_\kappa} \omega^\kappa,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{h \operatorname{tg} \alpha_\kappa}} (\sqrt{s} - \sqrt{s_1}); \quad b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hs_1 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}} \approx \\ &\approx \frac{1,285}{\sqrt{hs_1 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}} \quad (\text{при } \nu = 0,3); \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$K_0(\beta)$ ,  $K_1(\beta)$ ,  $K_2(\beta)$ ,  $K_3(\beta)$  — функции Крылова, значения которых приведены в табл. 2 гл. 21.

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= s_1 \operatorname{tg} \alpha_\kappa \omega^\kappa(s_1) = s_1 \operatorname{tg} \alpha_\kappa [\omega(s_1) - \omega^*(s_1) - \omega^T(s_1)]; \\ C_2 &= \frac{\chi^\kappa(s_1)}{b} = \frac{1}{b} [\chi(s_1) - \chi^T(s_1)]; \\ C_3 &= \frac{M_{s,1}^\kappa(s_1)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2} [M_{s,1}(s_1) - M_{s,1}^T(s_1)]; \\ C_4 &= \frac{\cos \alpha_\kappa Q_{r,1}^\kappa(s_1)}{Db^3} = \frac{\cos \alpha_\kappa}{Db^3} [Q_{r,1}(s_1) - \\ &\quad - \sin \alpha_\kappa N_{s,1}^*(s_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Приведенные выше соотношения дают возможность решить краевую задачу. Напомним, что всего определению подлежат три группы величин:

первая группа  $F_z^0, \mathfrak{M}_y^0$ ;

вторая группа  $C_1, C_2, C_3, C_4$ ;

третья группа  $a_z, \Omega_y$ .

Постоянные первой группы задают непосредственно или подсчитывают по формулам (42). Во вторую группу входят две статические и две деформационные величины. Примером использования последних могут служить условия жесткого края  $\omega = 0, \chi = 0$ . Если граничные условия сформулированы в перемещениях, то деформационные граничные величины можно подсчитать по формулам (44) и (45) (о деформационных граничных условиях см. стр. 660). Формулы (46)–(48) и соотношения (66)–(79) гл. 21 позволяют сравнительно легко удовлетворять граничным условиям для короткой конической оболочки. Необходимо только

в последних считать  $\rho = \sqrt{\frac{s_1}{s}}$  и заменить величины (с разными знаками)  $\sin \theta_1, \sin \theta_2, \omega, \vartheta, M_\theta, Q_r, M_\varphi, N_\varphi, u_r, u_x$  соответственно на  $\cos \alpha_\kappa, \cos \alpha_\kappa, s \operatorname{tg} \alpha_\kappa \omega, \chi, M_{s,1}, Q_{r,1}, M_{\varphi,1}, N_{\varphi,1}, u_{r,1}, u_{x,1}$ .

Если не интересует жесткость конструкции (величина перемещений и угла поворота), то после определения постоянных второй группы подсчитывают напряжения и на этом расчет заканчивают.

В случаях, когда необходимо определить жесткость, приходится рассматривать смещения и находить постоянные третьей группы. При этом используют то обстоятельство, что перемещения

$$u_1 = u_1^* + u_1^T; \quad v_1 = v_1^* + v_1^T \quad (53)$$

не зависят от краевого эффекта.

Как и в симметричном случае, для длинных оболочек [см. критерий (28) и (21)] расчет значительно упрощается. Так,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^T + \alpha_{11} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{12} (M_0 - M_0^T); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^T + \alpha_{12} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{22} (M_0 - M_0^T), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где, как и в симметричном случае,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mu 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\cos \alpha_\kappa} \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2 \sqrt{3(1-\nu^2)} \left( \frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h} \right) \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= \mu 4 [3(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h}} \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha_\kappa}} \frac{1}{Eh^2}; \\ \left[ \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 12(1-\nu^2) \left( \frac{s_0 \sin \alpha_\kappa}{h} \right)^2 \frac{1}{(Eh)^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

а  $\mu = -1$  на краю  $s_0 = s_1$ ,  $\mu = +1$  на краю  $s_0 = s_2$  ( $s_1 \leq s \leq s_2$ ), но

$$u_0 = s_0 \sin \alpha \omega(s_0); \quad \vartheta_0 = \chi(s_0); \quad M_0 = M_{s,1}(s_0);$$

$$Q_0 = Q_{r,1}(s_0) \quad (56)$$

(с соответствующими значками).

Общие напряжения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{s,1}^{(u)} &= \sigma_{s,1}^T(u) + \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \\ &\quad - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sigma_\kappa \sin \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_{\varphi,1}^{(u)} &= \sigma_{\varphi,1}^T(u) + \nu \left[ \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sigma_\kappa \sin \beta e^{-\beta} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi, 1}^{(p)} &= \sigma_{\varphi, 1}^{*(p)} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_{s, 1}^{(p)} &= \sigma_{s, 1}^{*(p)}; \quad \sigma_{s\varphi, 1}^{(p)} = \sigma_{s\varphi, 1}^{*(p)}; \quad \sigma_{s\varphi, 1}^{(u)} = \sigma_{s\varphi, 1}^{T(u)}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^T)}{h^2}; \quad \sigma_k = 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{s_0 \operatorname{tg} \alpha}{h}} \times \\ &\quad \times \sqrt{\cos \alpha_K} \frac{Q_0 - Q_0^*}{h}; \\ \sigma_{s, 1}^{T(u)} &= \frac{6M_{s, 1}^T}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi, 1}^{T(u)} = \frac{6M_{\varphi, 1}^T}{h^2}; \quad \sigma_{s, 1}^{*(p)} = \frac{N_{s, 1}^*}{h}; \\ \sigma_{\varphi, 1}^{*(p)} &= \frac{N_{\varphi, 1}^*}{h}; \quad \sigma_{s, \varphi 1}^{T(u)} = \frac{6H_1^T}{h^2}; \\ \beta &= \frac{2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{h \operatorname{tg} \alpha_K}} |\sqrt{s_0} - \sqrt{s}|. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Смещения и угол поворота

$$\left. \begin{aligned} u_{r, 1} &= u_{r, 1}^* + u_{r, 1}^T + \\ &\quad + \frac{s \sin \alpha_K}{E} \left\{ - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \right\}; \\ u_{x, 1} &= u_{x, 1}^* + u_{x, 1}^T - \\ &\quad - \frac{s \sin^2 \alpha_K}{E \cos \alpha_K} \left\{ - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \right\}; \\ v_1 &= v_1^* + v_1^T; \quad w_1 = w_1^* + w_1^T; \\ \vartheta_1 &= \vartheta_1^* + \vartheta_1^T + \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E} \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} \alpha_K}{h}} \times \\ &\quad \times \left\{ \mu \frac{2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \cos \beta e^{-\beta} - \sigma_k (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

**Пример 1.** Коническая оболочка, заделанная на одном краю и закручиваемая моментом, приложенным к другому краю (рис. 9).

Поскольку поверхностная нагрузка отсутствует ( $q_\varphi = 0$ ), закручивающий момент на краю  $s = s_2$   $\mathfrak{M}_x(s_2) = \mathfrak{M}_x^0$ . Из соотношений (33) — (36), с учетом граничного условия на краю  $s = s_1$  [ $v(s_1) = 0$ ], имеем

$$T(s) = -\frac{1}{s^2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_x^0}{2\pi \sin^2 \alpha_\kappa}; \quad \sigma_{s\varphi} = -\frac{1}{s^2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_x^0}{2\pi h \sin^2 \alpha_\kappa};$$

$$v(s) = \frac{1+\nu}{Eh} \cdot \frac{s_1^2 - s^2}{s_1^2 s} \cdot \frac{\mathfrak{M}_x^0}{2\pi \sin^2 \alpha_\kappa}.$$

Краевое сдвигающее усилие связано с закручивающим моментом соотношением

$$T(s_2) = -\frac{\mathfrak{M}_x^0}{2\pi s_2^2 \sin^2 \alpha_\kappa}.$$

**Пример 2.** Длинная коническая оболочка с различного вида закрепления краев под действием внутреннего равномерного давления.

Полагая, что на краю ( $s = s_1$ ) установлена крышка, воспринимающая давление, рассмотрим два вида закрепления края  $s = s_2$  (случай сопряжения конической оболочки с упругим кольцом и оболочками другого вида рассмотрены в примерах гл. 1 т. II).

Напряженно-деформированное состояние в оболочке складывается из безмоментного и краевого эффекта. Безмоментное решение определяется формулами (12).

*Заделанный край.* Граничные условия  $u_0 = u_r(s_2) = 0$ ;  $\vartheta_0 = \vartheta(s_2) = 0$  согласно формулам (26), (12) приводят к системе

$$\alpha_{11} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{12} M_0 = -\frac{2-\nu}{2Eh} \cdot \frac{ps_2^2 \sin^2 \alpha_\kappa}{\cos \alpha_\kappa};$$

$$\alpha_{12} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{22} M_0 = 0.$$

Решив эту систему и учитывая соотношения (28), (30), найдем

$$\sigma_h = -(2-\nu) \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}{h}; \quad \sigma_{M_0} = -\frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}{h}.$$

Из формул (12) и (29) следует

$$\sigma_s^{(p)} = \frac{s}{s_2} \cdot \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}{2h}; \quad \sigma_\varphi^{(p)} = \left[ \frac{s}{s_2} - \frac{2-\nu}{2} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right] \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}{h};$$

$$\sigma_s^{(u)} = -\frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_\kappa}{h}; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_s^{(u)},$$

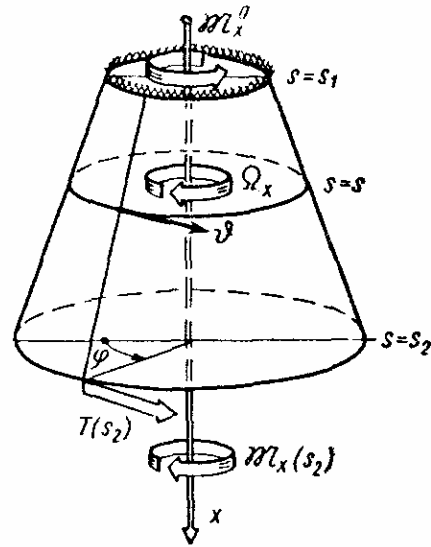


Рис. 9

здесь  $\beta = \frac{2}{\sqrt{h \operatorname{tg} \alpha_K}} \sqrt{3(1-\nu^2)} | \sqrt{s} - \sqrt{s_2} |$  (см. табл. 1, гл. 21),

из формул (12), (31) и (32) находим

$$w = \left\{ \frac{3}{4} s^2 + \frac{1+2\nu}{4} s_2^2 - \frac{2-\nu}{2} s_2 s (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{p \operatorname{tg}^2 \alpha_K}{Eh};$$

$$\vartheta = -\frac{3ps \operatorname{tg}^2 \alpha_K}{2Eh} + \frac{(2-\nu)}{E} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{h}} \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} \alpha_K}{h}} \sin \beta e^{-\beta} \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_K}{h}.$$

Максимальное напряжение на краю  $s=s_2$  на внутренней стороне оболочки

$$\sigma_{\max} = \sigma_s^-(s_2) = \sigma_s^{(p)} - \sigma_s^{(u)} = \left[ 1 + \frac{3(2-\nu)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right] \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_K}{2h}.$$

Эпюры напряжений для случая  $\alpha_K = 45^\circ$ ;  $\frac{s_2 \operatorname{tg} \alpha_K}{h} = 50$ ;  $\nu = 0,3$  приведены на рис. 10.

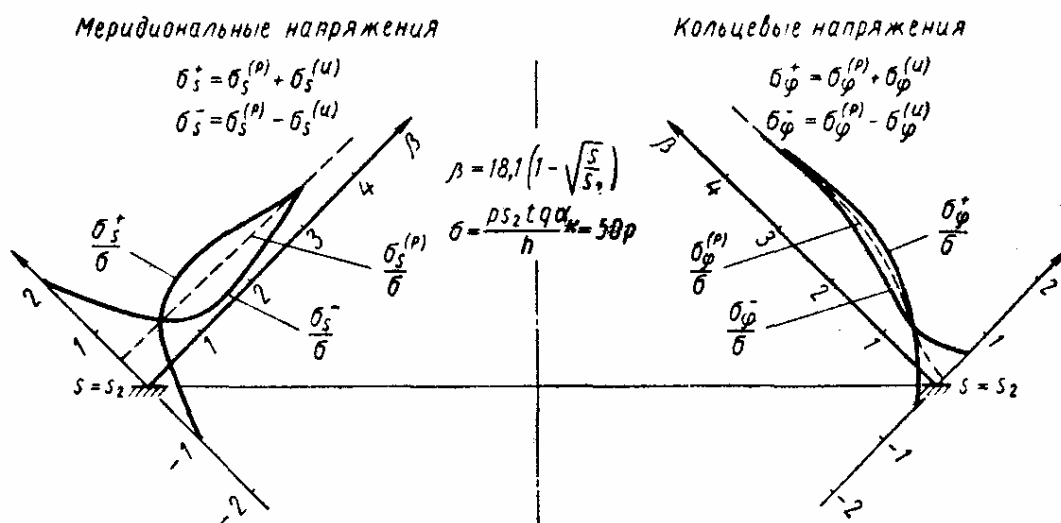


Рис. 10

**Шарнирно опертый край.** Граничные условия в рассматриваемом случае  $u_0 = u_r(s_2) = 0$ ;  $M_0 = M_s(s_2) = 0$  приводят к системе

$$\alpha_{11} (Q_0 - Q_0^*) = -\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{ps_2^2 \sin^2 \alpha_K}{Eh \cos \alpha_K};$$

$$\alpha_{12} (Q_0 - Q_0^*) = \vartheta_0.$$

Решая ее и используя формулы (28) и (30), получаем

$$\sigma_k = -\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_K}{h}; \quad \sigma_{M_0} = 0.$$

Из равенств (12), (29) и (30) следует

$$\sigma_s^{(p)} = \frac{ps \operatorname{tg} \alpha_K}{2h}; \quad \sigma_\varphi^{(p)} = \left( \frac{s}{s_2} - \frac{2-\nu}{2} \cos \beta e^{-\beta} \right) \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_K}{h};$$

$$\sigma_s^{(u)} = \frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sin \beta e^{-\beta} \frac{ps_2 \operatorname{tg} \alpha_K}{h}; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_s^{(u)}.$$

Из формул (12), (31) и (32) находим

$$w = \left[ \frac{3}{4} s^2 + \frac{1-2\nu}{4} s_2^2 - \frac{2-\nu}{2} s_2 s \cos \beta e^{-\beta} \right] \frac{p \operatorname{tg}^2 \alpha_K}{Eh};$$

$$\vartheta = -\frac{3ps \operatorname{tg}^2 \alpha_K}{2Eh} + \frac{4(2-\nu)\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2Eh} \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} \alpha_K}{h}} \times$$

$$\times (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} ps_2 \operatorname{tg} \alpha_K.$$

Эпюры напряжений для случая  $\alpha_K = 45^\circ$ ;  $\frac{s_2 \operatorname{tg} \alpha_K}{h} = 50$ ;  $\nu = 0,3$  приведены на рис. 11.

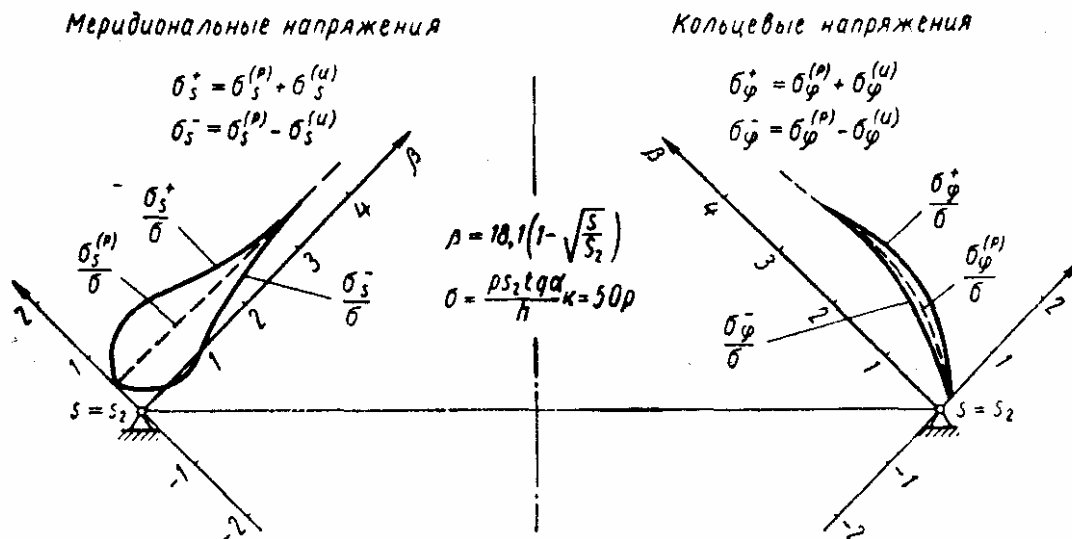


Рис. 11

**Пример 3.** Коническая оболочка при линейном изменении температуры по толщине оболочки. Пусть температура меняется линейно по толщине оболочки и равна на внешней поверхности оболочки  $T^+$ , а на внутренней  $-T^-$ .

Поскольку поверхностная и краевая нагрузки отсутствуют, напряженно-деформированное состояние оболочки определяется только температурными слагаемыми и краевым эффектом.

Согласно формулам (18) и (19)

$$M_s^T = M_\varphi^T = \frac{\alpha^T E h^2}{6(1-\nu)} \cdot \frac{T^+ - T^-}{2};$$

$$\vartheta^T = 0; \quad u_r^T = \alpha_T s \sin \alpha_K \frac{T^+ + T^-}{2}; \quad u_x^T = \alpha_T s \cos \alpha_K \frac{T^+ + T^-}{2}.$$

$$\text{Из формул (1) получаем } u^T = \alpha s \frac{T^+ + T^-}{2}; \quad w^T = 0.$$



Учитывая граничные условия на краях оболочки

$$M_s(s_1) = M_s(s_2) = 0; \quad Q_r(s_1) = Q_r(s_2) = 0,$$

находим

$$\sigma_K = 0; \quad \sigma_{M_0} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{T^+ - T^-}{2}.$$

По формулам (29) и (30) подсчитываем напряжения

$$\sigma_s^{(p)} = 0; \quad \sigma_\varphi^{(p)} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{T^+ - T^-}{2} \cdot \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta};$$

$$\sigma_s^{(u)} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{T^+ - T^-}{2} \{1 - (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}\};$$

$$\sigma_\varphi^{(u)} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \cdot \frac{T^+ - T^-}{2} \{1 - \nu (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}\}.$$

Используя формулы (31) и (32), вычисляем перемещения

$$u_r = \alpha s \sin \alpha_K \left\{ \frac{T^+ + T^-}{2} - \frac{T^+ - T^-}{2} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \right\};$$

$$\vartheta = \mu \sqrt{\frac{s \operatorname{tg} \alpha_K}{h}} \cdot \frac{2 [3(1-\nu^2)]^{3/4}}{3} \cdot \frac{\alpha}{1-\nu} \cdot \frac{T^+ - T^-}{2} \cos \beta e^{-\beta}.$$

В приведенных выше формулах для края  $s = s_1$

$$\mu = -1; \quad \beta = \frac{4}{2} \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{h \operatorname{tg} \alpha_K}} | \sqrt{s} - \sqrt{s_1} |,$$

$$\text{для края } s = s_2; \quad \mu = +1; \quad \beta = \frac{4}{2} \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{h \operatorname{tg} \alpha_K}} | \sqrt{s} - \sqrt{s_2} |.$$

Например, при  $T^+ - T^- = 100^\circ \text{C}$ ;  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ дан/см}^2$ ;  $\nu = 0,3$ ;

$$\sigma_{\max} = \sigma_\varphi^+ \Big|_{s=s_1}^{s=s_2} = (\sigma_\varphi^{(p)} + \sigma_\varphi^{(u)}) \Big|_{s=s_1}^{s=s_2} = 2250 \text{ дан/см}^2.$$

Отсюда видно, что уже при умеренных температурах термические напряжения могут достигать значительной величины и, накладываясь на напряжения от внешних нагрузок, существенно влиять на прочность конструкции.

Эпюры напряжений для случая  $\alpha_K = 45^\circ$ ;  $\frac{s_2 \operatorname{tg} \alpha_K}{h} = 50$ ;  $\nu = 0,3$  приведены на рис. 12.

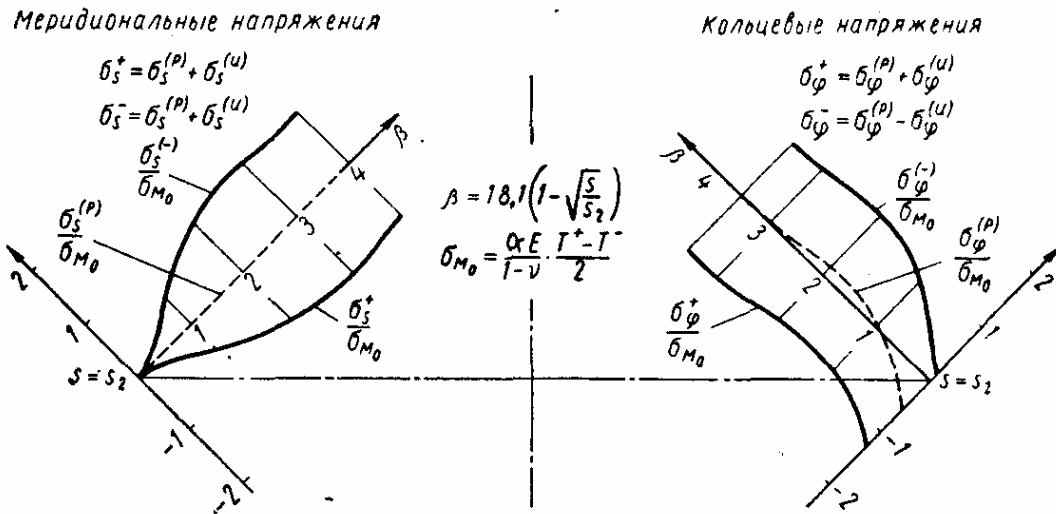


Рис. 12

**Пример 4.** Коническая оболочка при заданном расхождении (сближении) краев под действием равномерного внутреннего давления.

Рассмотрим длинную коническую оболочку, края которой закрыты абсолютно жесткими крышками, смещающимися одна относительно другой на заданное расстояние  $\delta$  под действием равномерного внутреннего давления и осевой силы  $P$ , приложенной к крышкам (рис. 13).

Граничные условия

$$\left. \begin{aligned} u_r(s_1) = u_x(s_1) = 0; \quad \vartheta(s_1) = 0; \\ u_r(s_2) = 0; \quad u_x(s_2) = \delta; \quad \vartheta(s_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Поскольку  $u(s) \equiv u^*(s)$  (не зависит от краевого эффекта)  $[u(s) = u_r(s) \sin \alpha_K + u_x(s) \cos \alpha_K]$ , из равенств (61) получаем

$$u_r^*(s_1) \sin \alpha_K + u_x^*(s_1) \cos \alpha_K = 0;$$

$$u_r^*(s_2) \sin \alpha_K + u_x^*(s_2) \cos \alpha_K = \delta \cos \alpha_K.$$

Подставив сюда решение (10), находим

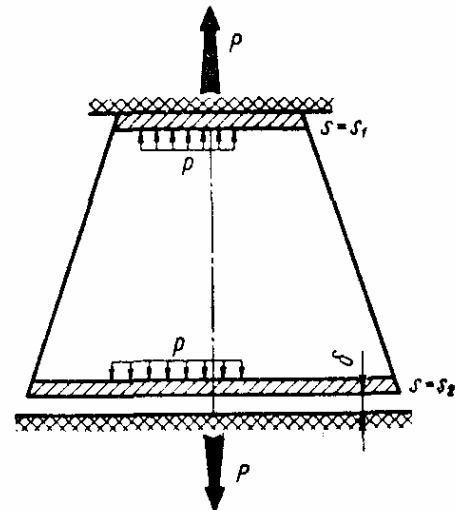


Рис. 13

$$P = \frac{2\pi E h \sin \alpha_K \cos^2 \alpha_K}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \delta + \pi \sin^2 \alpha_K \left( \frac{s_2^2}{s_1^2} - \frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{s_2^2 - s_1^2}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \right) p;$$

$$a_x = \frac{\nu \sin^2 \alpha_K}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \delta - \frac{\sin^3 \alpha_K}{2 E h \cos^2 \alpha_K} \left[ (2-\nu) \frac{s_2^2}{s_1^2} + \frac{\nu(1-2\nu)}{2} \cdot \frac{s_2^2 - s_1^2}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \right] p.$$

Напряжения определяют по формулам (29), в которых

$$\sigma_s^T(u) = \sigma_\varphi^T(u) = 0;$$

$$\sigma_s^*(p) = \frac{s^2 - s_1^2}{2s^2} \cdot \frac{ps \operatorname{tg} \alpha_K}{h} + \frac{P}{2\pi h s \sin \alpha_K \cos \alpha_K}; \quad \sigma_\varphi^*(p) = \frac{ps \operatorname{tg} \alpha_K}{h}.$$

Кроме того, из системы (26) находим

$$\sigma_K = \frac{\mu \nu P}{\pi h s_0 \sin \alpha_K \cos \alpha_K} - \frac{\mu p \operatorname{tg} \alpha_K}{h} \left[ (2 - \nu) s_0 + \nu \frac{s_1^2}{s_0} \right];$$

$$\sigma_{M_0} = \frac{3\nu P}{\sqrt{3(1-\nu^2)} 2\pi h s_0 \sin \alpha_K \cos \alpha_K} - \frac{3}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[ (2 - \nu) s_0 + \nu \frac{s_1^2}{s_0} \right] \frac{p \operatorname{tg} \alpha_K}{h}.$$

**Пример 5.** Расчет конической консоли. Рассмотрим длинную коническую консоль (рис. 14), заделанную по краю ( $s = s_2$ ) и закрытую на другом краю ( $s = s_1$ ) абсолютно жесткой диафрагмой. К диафрагме приложена сила  $P$  и изгибающий момент  $M$ . Согласно рис. 8 получаем

$$\mathfrak{M}_y^0 = -M; \quad F_z^0 = -P. \quad (62)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$\omega(s_1) = 0; \quad \chi(s_1) = 0 \text{ (жесткий край);} \quad (63)$$

$$u_{r,1}(s_2) = u_{x,1}(s_2) = v_1(s_2) = 0; \quad \phi_1(s_2) = 0 \quad (64)$$

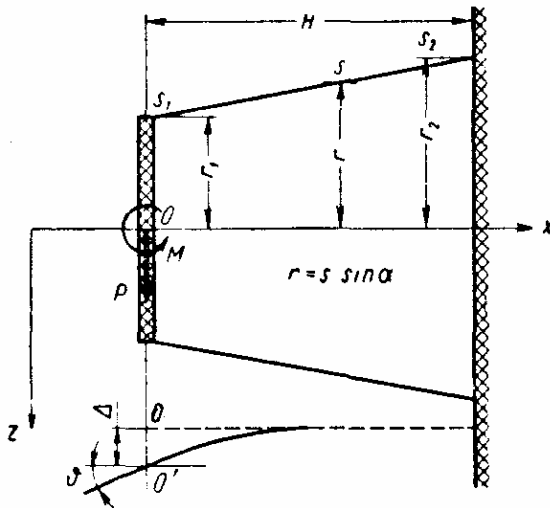


Рис. 14

(абсолютная заделка).

Используя формулы (44) и (45), условия (64) заменим следующими:

$$\omega(s_2) = 0; \quad \chi(s_2) = 0; \quad u_{r,1}(s_2) = u_{x,1}(s_2) = 0.$$

Подставляя равенства (62) в формулы (47), получаем

$$\left. \begin{aligned} N_{s,1}^* &= -\frac{M + P(s - s_1) \cos \alpha_K}{\pi s^2 \sin^2 \alpha_K \cos \alpha_K}; \quad N_{\varphi,1}^* = 0; \\ T_1^* &= \frac{-M + P s_1 \cos \alpha_K}{\pi s^2 \sin \alpha_K \cos \alpha_K}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Из выражений (66), (38), (46) следует:  
на краю  $s = s_1$

$$Q_0^*(s_1) = Q_{r,1}^*(s_1) = -\frac{M}{\pi s_1^2 \sin \alpha_K \cos \alpha_K};$$

$$u_0^*(s_1) = s_1 \sin \alpha_K \omega^*(s_1) = -\frac{\nu s_1}{Eh} Q_0^*(s_1);$$

на краю  $s = s_2$

$$Q_0^*(s_2) = Q_{r,1}^*(s_2) = - \frac{M + P(s_2 - s_1) \cos \alpha_K}{\pi s_2^2 \sin \alpha_K \cos \alpha_K};$$

$$u_0^*(s_2) = s_2 \sin \alpha_K \omega^*(s_2) = - \frac{\nu s_2}{Eh} Q_0^*(s_2).$$

Определяя теперь из системы (54) значения величин  $(Q_0 - Q_0^*)$  и  $M_0$  и подставляя их в формулы (59), получаем для обоих краев  $s = s_1$  и  $s = s_2$  однотипные выражения

$$\sigma_{M_0} = \frac{3\nu}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \cdot \frac{Q_0^*}{h \sin \alpha_K}; \quad \sigma_k = \mu \cdot 2\nu \frac{Q_0^*}{h \sin \alpha_K}.$$

С помощью равенств (57) можно теперь подсчитать напряжения. Жесткость консоли на изгиб характеризуют величины  $\Phi = \Phi_1(s_1)$  и  $\Delta = u_{r,1}(s_1)$  (см. рис. 14). Используя соотношения (47) и граничные условия (63) и (65), получаем на краях консоли

$$u_{r,1}(s_0) = u_{r,1}^*(s_0) + \frac{\nu s_0}{Eh} Q_0^*(s_0);$$

$$u_{x,1}(s_0) = u_{x,1}^*(s_0) - \frac{\nu s_0 \operatorname{tg} \alpha_K}{Eh} Q_0^*(s); \quad (67)$$

$$\Phi_1(s_0) = \chi(s_0) + \frac{u_{x,1}(s_0)}{s_0 \sin \alpha_K} = \frac{u_{x,1}^*(s_0)}{s_0 \sin \alpha_K} - \frac{\nu}{Eh} \cdot \frac{Q_0^*(s_0)}{\cos \alpha_K} \quad (68)$$

(здесь  $s_0 = s_1$  — жесткий край и  $s = s_2$  — заделка).

Подставляя затем найденные значения постоянных в выражения (67) и (68), получаем величины

$$\Delta = \gamma_{11}P + \gamma_{12}M; \quad \Phi = \gamma_{12}P + \gamma_{22}M,$$

где коэффициенты жесткости консоли подсчитывают по формулам

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\pi Eh \sin \alpha_K} \left\{ (1+\nu) \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_2^2} - \frac{1}{\sin^2 \alpha_K} \left[ \frac{s_2 - s_1}{s_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(s_2 - s_1)^2}{2s_2^2} + \ln \frac{s_1}{s_2} \right] \right\};$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2\pi Eh \sin^3 \alpha_K \cos \alpha_K} \cdot \frac{(s_2 - s_1)^2}{s_1 s_2^2} \left[ 1 - 2(1+\nu) \sin^2 \alpha_K \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} \right];$$

$$\gamma_{22} = \frac{1 + 2(1+\nu) \sin^2 \alpha_K}{2\pi Eh \sin^3 \alpha_K \cos^2 \alpha_K} \cdot \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. А р о н с о н А. Я. и др. Расчет на прочность деталей гидротурбин. М., «Машиностроение», 1965.
  2. Б и р г е р И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1964.
  3. Г р и г о р е н к о Я. И., П о л и щ у к Т. И. Решение задачи об антисимметричной деформации конической оболочки линейно-переменной толщины на БЭСМ-2М. «Прикладная механика». Т. 1, вып. 2, 1965.
  4. Г р и г о р ь е в Д. Е. Судовые сосуды, работающие под давлением (определение напряжений и деформаций). Л., Судостроение, 1965.
  5. К а н т о р о в и ч З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. М., Машгиз, 1960.
  6. К о в а л е н к о А. Д., Г р и г о р е н к о Я. М., И л ь и н Л. А. Теория тонких конических оболочек и ее приложения в машиностроении. Киев, изд-во АН УССР, 1963.
  7. Л у р ь е А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1947.
  8. П о н о м а р е в С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2, М., Машгиз, 1958.
  9. С о к о л о в В. И. Основы расчета и конструирования деталей и узлов пищевого оборудования М., Машгиз, 1963.
  10. Т и м о ш е н к о С. П., В о й н о в с к и й - К р и г е р С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
  11. Ф л ю г г е В. Статика и динамика оболочек. М., Госстройиздат, 1961.
  12. Ч е р н ы х К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1 и 2. Изд. ЛГУ, 1962, 1964.
-

## Глава 24

### РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК \*

Рассмотрим тонкие непологие сферические оболочки постоянной толщины, находящиеся под действием плавных осесимметричных или обратносимметричных внешних нагрузок и температурных полей.

В случае нагрузок, отличных от симметричных и обратносимметричных, следует пользоваться приведенными в гл. 21 соотношениями, полагая в них

$$R_\theta = R_\varphi = R.$$

Если какая-либо из величин, характеризующих геометрию оболочки, нагрузку и термоупругие свойства материала, изменяется скачком на параллельном круге  $\theta = \text{const}$ , можно разбить оболочку на две и упруго сопрячь решения для каждой из частей. Вопросы упругого сопряжения сферической оболочки с соосными оболочками вращения, а также подкрепления ее упругими кольцами рассмотрены в гл. 1 т. II. Сосредоточенным нагрузкам посвящена гл. 2 т. II. Пологие сферические оболочки рассмотрены в работах [3, 4, 9, 17].

Приведенные в настоящей главе формулы могут быть использованы и при расчете оболочек с толщиной, плавно меняющейся по  $\theta$  и не зависящей от  $\varphi$ . Для этого в соотношениях безмоментного и термоупругого состояний следует заменить постоянную  $h$  на текущее значение толщины  $h(\theta)$ , внося последнее под знак интеграла в выражениях для смещений. В соотношениях же краевого эффекта под  $h = h(\theta_0)$  следует понимать значение толщины на рассматриваемом краю. При быстроменяющейся толщине следует пользоваться уточненными соотношениями (см. гл. 5, т. II, а также [1, 3]).

В настоящей главе, кроме приведенных в гл. 22, использованы следующие обозначения:

$R$  — радиус срединной поверхности в см;

$\theta, \varphi$  — углы (рис. 1, 4) в рад;

$$(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi);$$

$$u_r = u \cos \theta + w \sin \theta; \quad u_x = u \sin \theta - w \cos \theta \quad (1)$$

— горизонтальное и вертикальное смещения,

$$u = u_r \cos \theta + u_x \sin \theta;$$

$$w = u_r \sin \theta - u_x \cos \theta;$$

---

\* Написано при участии Х. И. Кругляковой.

$N_\theta$ ,  $N_\varphi$ ,  $T$ ,  $Q_\theta$  — соответственно нормальные, сдвигающее и перерезывающее усилия (рис. 2, 4) в *дан/см*;

$$Q_r = N_\theta \cos \theta + Q_\theta \sin \theta; \quad Q_x = N_\theta \sin \theta - Q_\theta \cos \theta — \quad (2)$$

горизонтальное и вертикальное усилия;

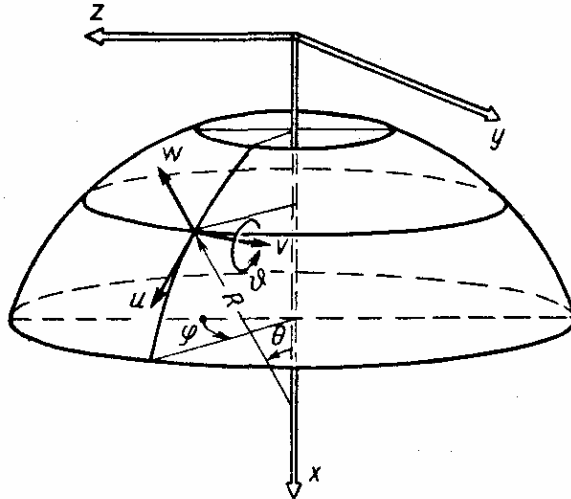


Рис. 1

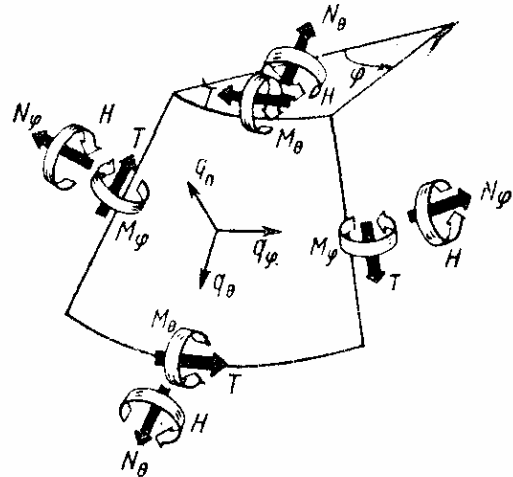


Рис. 2

$M_\theta$ ,  $M_\varphi$ ,  $H$  — соответственно изгибающие и скручивающий моменты (рис. 2) в *дан·см/см*;

$\sigma_\theta^{(p)} = \frac{N_\theta}{h}$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}^{(p)} = \frac{T}{h}$ ;  $\sigma_\varphi^{(p)} = \frac{N_\varphi}{h}$  — тангенциальные (цепные, мембранные) напряжения в срединном слое оболочки (рис. 3) в *дан/см²*;

$\sigma_\theta^{(u)} = \frac{6M_\theta}{h^2}$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}^{(u)} = \frac{6H}{h^2}$ ;  $\sigma_\varphi^{(u)} = \frac{6M_\varphi}{h^2}$  — изгибные напряжения;

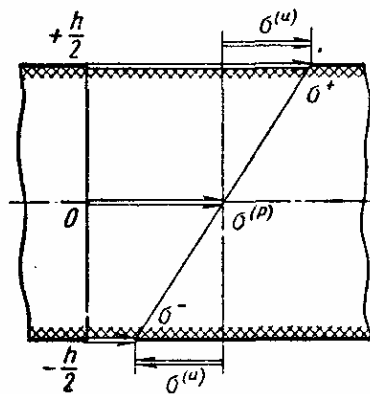


Рис. 3

$\sigma_\theta^+ = \sigma_\theta^{(p)} + \sigma_\theta^{(u)}$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}^+ = \sigma_{\theta\varphi}^{(p)} + \sigma_{\theta\varphi}^{(u)}$ ;  $\sigma_\varphi^+ = \sigma_\varphi^{(p)} + \sigma_\varphi^{(u)}$  — напряжения в наружном слое оболочки (рис. 3);

$\sigma_\theta^- = \sigma_\theta^{(p)} - \sigma_\theta^{(u)}$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}^- = \sigma_{\theta\varphi}^{(p)} - \sigma_{\theta\varphi}^{(u)}$ ;  $\sigma_\varphi^- = \sigma_\varphi^{(p)} - \sigma_\varphi^{(u)}$  — напряжения во внутреннем слое;

$a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  — перемещения оболочки как жесткого целого в направлении осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (рис. 4, 7, 8) в *см*;

$\Omega_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega_z$  — углы поворота оболочки как жесткого целого вокруг тех же осей (рис. 4, 7, 8) в *рад*;

$F_x^\circ$ ,  $F_y^\circ$ ,  $F_z^\circ$  — составляющие главного вектора усилий, приложенных к краю оболочки  $\theta = \theta_1$  (рис. 4, 7, 8), в *дан*;

$M_x^\circ$ ,  $M_y^\circ$ ,  $M_z^\circ$  — составляющие главного момента усилий и моментов, приложенных к краю оболочки  $\theta = \theta_1$  (точкой приведения является центр круга  $\theta = \theta_1$ ), в *дан·см*;

$q_\theta$ ,  $q_\varphi$ ,  $q_n$  — составляющие поверхностной нагрузки (рис. 2) в  $\text{дан/см}^2$ .

Осесимметричным (симметричным) называют напряженно-деформированное состояние, не зависящее от  $\varphi$ .

### ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ

Для плавных нагрузок напряженно-деформированное состояние можно разбить на *безмоментное*, *термоупругое* и *краевой эффект* (соответствующие им величины отмечены значками \*,  $\tau$ ,  $\kappa$ ). При этом

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= N_\theta^*; \quad N_\varphi = N_\varphi^* + N_\varphi^\kappa; \quad M_\theta = M_\theta^\tau + M_\theta^\kappa; \quad M_\varphi = M_\varphi^\tau + M_\varphi^\kappa; \\ \vartheta &= \vartheta^* + \vartheta^\tau + \vartheta^\kappa; \quad u_r = u_r^* + u_r^\tau + u_r^\kappa; \quad u_x = u_x^* + u_x^\tau + u_x^\kappa \\ (u &= u_r \cos \theta + u_x \sin \theta; \quad w = u_r \sin \theta - u_x \cos \theta); \\ Q_r &= N_\theta^* \cos \theta + Q_r^\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Безмоментные усилия подсчитывают по формулам

$$N_\theta^*(\theta) = \frac{\frac{1}{2\pi R} F_x^\circ + R \int_{\theta_1}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_\theta \sin \theta) \sin \theta d\theta}{\sin^2 \theta}; \quad (4)$$

$$N_\varphi^*(\theta) = Rq_n - N_\theta^*.$$

где

$$F_x^\circ = 2\pi R \sin^2 \theta_1 N_\theta(\theta_1) \quad (5)$$

— осевая сила, действующая в сечении параллельного круга  $\theta = \theta_1$ . В случае сферы, замкнутой сверху ( $\theta_1 = 0$ ), следует положить  $F_x^\circ = 0$ . Если же оболочка замкнута снизу ( $\theta_2 = \pi$ ), первое из соотношений (4) необходимо заменить следующим:

$$N_\theta^*(\theta) = \frac{R}{\sin^2 \theta} \int_{\pi}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_\theta \sin \theta) \sin \theta d\theta. \quad (6)$$

Далее,

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^* &= -\frac{R}{Eh} \left[ \frac{dq_n}{d\theta} + (1 + \nu) q_\theta \right]; \\ u_r^* &= \frac{R \sin \theta}{Eh} (N_\varphi^* - \nu N_\theta^*); \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

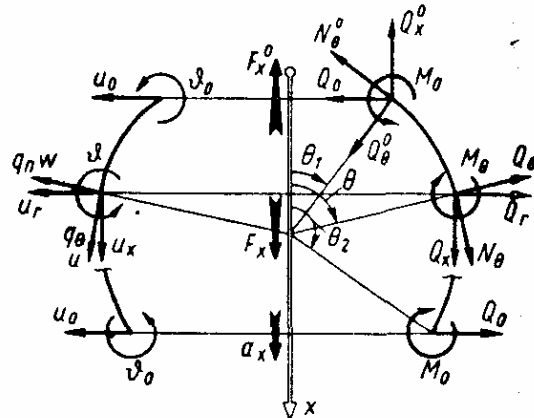


Рис. 4



$$u_x^* = a_x - \frac{R}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ R \cos \theta \left[ \frac{dq_n}{d\theta} + (1 + \nu) q_\theta \right] - \right. \\ \left. - \sin \theta (N_\theta^* - \nu N_\varphi^*) \right\} d\theta. \quad (7)$$

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся в расчетной практике виды нагрузок.

*Осевая растягивающая (сжимающая) сила* (см. рис. 4)

$$F_x^\circ = P, \quad q_n = q_\theta = 0. \quad (8)$$

Для нее

$$N_\theta^* (\theta) = -N_\varphi^* (\theta) = \frac{P}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta}; \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^* &= 0; \quad u_r^* = -\frac{1+\nu}{2\pi Eh} P \frac{1}{\sin \theta}; \\ u_x^* &= a_x + \frac{1+\nu}{2\pi Eh} P \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

*Равномерное давление с осевой силой* (см. рис. 4)

$$q_n = p; \quad q_\theta = 0; \quad F_x^\circ = P; \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\theta^* &= \frac{pR}{2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta_1 - \frac{P}{\pi R^2 p}}{\sin^2 \theta} \right\}; \\ N_\varphi^* &= \frac{pR}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin^2 \theta_1 - \frac{P}{\pi R^2 p}}{\sin^2 \theta} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^* &= 0, \quad u_r^* = \frac{pR^2}{2Eh} \sin \theta \left\{ (1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{\sin^2 \theta_1 - \frac{P}{\pi R^2 p}}{\sin^2 \theta} \right\}; \\ u_x^* &= a_x + \frac{pR^2}{2Eh} \left\{ (1 - \nu) (\cos \theta_1 - \cos \theta) - (1 + \nu) \times \right. \\ &\quad \times \left( \sin^2 \theta_1 - \frac{P}{\pi R^2 p} \right) \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} \left. \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Если на краю  $\theta = \theta_1$  установлена крышка, либо присоединена оболочка, воспринимающая давление (рис. 5), то

$$P = \pi (R \sin \theta_1)^2 p; \quad (14)$$

$$N_\theta^* (\theta) = N_\varphi^* (\theta) = \frac{pR}{2}; \quad (15)$$

$$\vartheta^* = 0; \quad u_r^* = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} \sin \theta;$$

$$u_x^* = a_x + \frac{pR^2}{Eh} \cdot \frac{1-\nu}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta). \quad (16)$$

*Гидростатическое давление.* Пусть сферический сегмент  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta$  наполнен тяжелой жидкостью с удельным весом  $\gamma_{жс}$  (в  $\text{дан/см}^3$ ). Давление

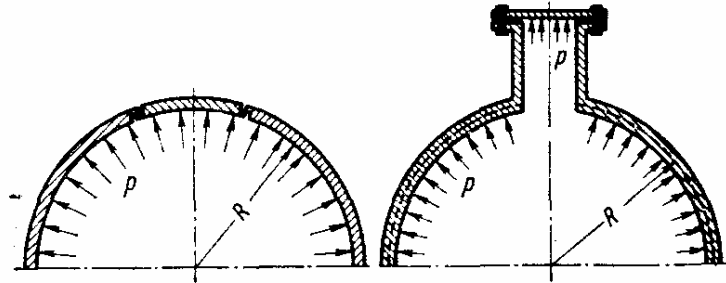


Рис. 5

на стенку по параллельному кругу  $\theta$  определяется весом столба жидкости над этим сечением:

$$q_n = R\gamma_{жс} (\cos \theta_1 - \cos \theta) \quad (q_\theta = 0; F_x^\circ = 0). \quad (17)$$

Для этой нагрузки

$$N_\theta^* = \frac{R^2 \gamma_{жс}}{\sin^2 \theta} \left\{ \cos \theta_1 \frac{\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta}{2} - \frac{\cos^3 \theta_1 - \cos^3 \theta}{3} \right\}; \quad (18)$$

$$N_\varphi^* = R^2 \gamma_{жс} (\cos \theta_1 - \cos \theta) - N_\theta^*;$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^* &= -\frac{R^2 \gamma_{жс}}{Eh} \sin \theta; \quad u_r^* = \frac{R \sin \theta}{Eh} (N_\varphi^* - \nu N_\theta^*); \\ u_x^* &= a_x - \frac{R^3 \gamma_{жс}}{Eh} \left[ \frac{1+\nu}{6} \cos^2 \theta_1 + \frac{1-\nu}{2} \cos \theta_1 \cos \theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2-\nu}{3} \cos^2 \theta + \frac{1+\nu}{2} \left( \cos \theta_1 - \frac{\cos^3 \theta_1}{3} \right) \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+\nu}{3} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В случае замкнутой внизу сферы ( $\theta_2 = \pi$ ) уже не может выполняться условие  $F_x^0 = 0$ . Из условия равновесия в этом случае следует

$$F_x^0 = \pi R^3 \gamma_{ж} \left( \frac{2}{3} + \cos \theta_1 - \frac{\cos^3 \theta_1}{3} \right).$$

Складывая выражения (18) и (19) с соответствующими им формулами (9)–(10), получаем

$$\left. \begin{aligned} N_\theta^* &= R^2 \gamma_{ж} \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta_1 + \frac{\cos^3 \theta + 1}{3 \sin^2 \theta} \right\}; \\ N_\varphi^* &= R^2 \gamma_{ж} \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta_1 - \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta + 1}{3 \sin^2 \theta} \right\}; \\ u_r^* &= \frac{R^3 \gamma_{ж}}{Eh} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \cos \theta_1 \sin \theta - \sin \theta \cos \theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+\nu}{3} \cdot \frac{\cos^3 \theta + 1}{\sin \theta} \right\}; \\ u_x^* &= a_x - \frac{R^3 \gamma_{ж}}{Eh} \left[ \frac{1+\nu}{6} \cos^2 \theta_1 + \frac{1-\nu}{2} \cos \theta_1 \cos \theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2-\nu}{3} \cos^2 \theta - \frac{1+\nu}{3} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+\nu}{3} \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_1} \right]; \\ \vartheta^* &= - \frac{R^2 \gamma_{ж}}{Eh} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

**Собственный вес оболочки.** Пусть  $q$  — вес оболочки, приходящийся на единицу площади ее срединной поверхности в  $\text{дан/см}^2$ , тогда (рис. 6

$$q_\theta = q \sin \theta; \quad q_n = -q \cos \theta; \quad F_x^0 = 0; \quad (21)$$

$$N_\theta^* = -qR \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

$$N_\varphi^* = -qR \left( \cos \theta - \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right); \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta^* &= -(2 + \nu) \frac{qR}{Eh} \sin \theta; \\
 u_r^* &= -\frac{qR^2}{Eh} \sin \theta \left[ \cos \theta - (1 + \nu) \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right]; \\
 u_x^* &= a_x - \frac{qR^2}{Eh} \left\{ (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \nu) \left[ \cos \theta_1 \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} - \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_1} \right] \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Термоупругие слагаемые подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 M_\theta^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times \\
 &\times \left[ (1 + \nu) \kappa_T + \frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 \varepsilon_T}{d\theta^2} + \nu \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R} \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} \right]; \\
 M_\varphi^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times \\
 &\times \left[ (1 + \nu) \kappa_T + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{d^2 \varepsilon_T}{d\theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R} \cdot \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} \right];
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\vartheta^T = -\frac{d\varepsilon_T}{d\theta}; \quad u_r^T = R \sin \theta \varepsilon_T;$$

$$u_x^T = -R \cos \theta \varepsilon_T;$$

$$u^T = 0; \quad w^T = R\varepsilon_T. \quad (25)$$

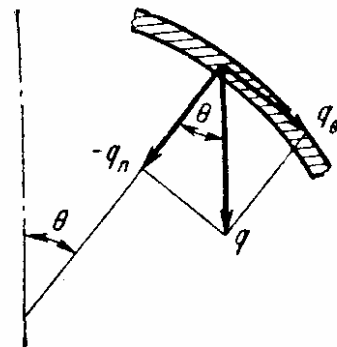


Рис. 6

При температуре, меняющейся линейно вдоль оси вращения, и незакрепленных краях температурное расширение сферы не сопровождается напряжениями [10, 20].

Краевой эффект. Оболочки делят на *короткие* и *длинные*. Для длинных оболочек можно пренебречь влиянием воздействий, приложенных к одному краю, на напряженно-деформированное состояние возле второго края.

Если длина оболочки вдоль меридиана такова, что отвечающие верхнему и нижнему краям оболочки углы подчиняются условию (при  $\nu = 0,3$ )

$$\theta_2 - \theta_1 > 1,65 \sqrt{\frac{h}{R}}, \quad (26)$$

то с точностью до 10% такую оболочку можно считать длинной. При принятии более высокой 5%-ной точности расчета условие (26) заменяют следующим:

$$\theta_2 - \theta_1 > 2,3 \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (27)$$

Для коротких оболочек слагаемые краевого эффекта можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} w^\kappa(\theta) &= C_1 K_0(\beta) - C_2 K_1(\beta) - C_3 K_2(\beta) - C_4 K_3(\beta); \\ \frac{\vartheta^\kappa(\theta)}{b} &= 4C_1 K_3(\beta) + C_2 K_0(\beta) + C_3 K_1(\beta) + C_4 K_2(\beta); \\ \frac{M_\theta^\kappa(\theta)}{Db^2} &= 4C_1 K_2(\beta) - 4C_2 K_3(\beta) + C_3 K_0(\beta) + C_4 K_1(\beta); \\ \frac{\sin \theta Q_r^\kappa(\theta)}{Db^3} &= 4C_1 K_1(\beta) - 4C_2 K_2(\beta) - 4C_3 K_3(\beta) + C_4 K_0(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} M_\varphi^\kappa &= \nu M_\theta^\kappa, \quad N_\varphi^\kappa = \frac{Eh}{R} w^\kappa; \\ u_r^\kappa &= w^\kappa \sin \theta; \quad u_x = -w^\kappa \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}} (\theta - \theta_1); \\ b &= \frac{\frac{4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}}{\sqrt{hR}} \approx \frac{1,285}{\sqrt{hR}} \quad (\text{при } \nu = 0,3); \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2); \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$K_0(\beta)$ ,  $K_1(\beta)$ ,  $K_2(\beta)$ ,  $K_3(\beta)$  — функции Крылова, значения которых приведены в табл. 2 гл. 21;

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= w^\kappa(\theta_1) = \frac{1}{\sin \theta_1} [u_r(\theta_1) - u_r^*(\theta_1) - u_r^T(\theta_1)]; \\ C_2 &= \frac{\vartheta^\kappa(\theta_1)}{b} = \frac{1}{b} [\vartheta(\theta_1) - \vartheta^T(\theta_1)]; \\ C_3 &= \frac{M_\theta^\kappa(\theta_1)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2} [M_\theta(\theta_1) - M_\theta^T(\theta_1)]; \\ C_4 &= \frac{\sin \theta_1 Q_r^\kappa(\theta_1)}{Db^3} = \frac{\sin \theta_1}{Db^3} [Q_r(\theta_1) - \sin \theta_1 N_\theta^*(\theta_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Задавая какие-либо две из граничных величин  $u_r(\theta_1)$ ,  $\vartheta(\theta_1)$ ,  $M_\theta(\theta_1)$ ,  $Q_r(\theta_1)$  с помощью формул (31), находим два начальных параметра

(например,  $C_1$  и  $C_2$ ). Остальные два ( $C_3$  и  $C_4$ ) находим из формул (28) по граничным условиям на краю  $\theta = \theta_2$ . При решении конкретных задач следует использовать соотношения (66)–(79) гл. 21, полагая в них  $\rho = 1$ .

Для длинных оболочек приведенные выше соотношения значительно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^r + \alpha_{11} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{12} (M_0 - M_0^r); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^r + \alpha_{12} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{22} (M_0 - M_0^r), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_r(\theta_0); \quad u_0^* = u_r^*(\theta_0); \quad u_0^r = u_r^r(\theta_0); \\ \vartheta_0 &= \vartheta(\theta_0); \quad \vartheta_0^r = \vartheta^r(\theta_0); \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= M_\theta(\theta_0); \quad M_0^r = M_\theta^r(\theta_0); \quad Q_0 = Q_r(\theta_0); \\ Q_0^* &= N_\theta^*(\theta)_0 \cos \theta_0; \\ \alpha_{11} &= \mu 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta_0 \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{h} \right) \sin \theta_0 \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= \mu 4 [3(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{R}{h}} \cdot \frac{1}{Eh^2}; \\ \left[ \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 12(1-\nu^2) \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{(Eh)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Принимаем  $\mu = -1$  на краю  $\theta_0 = \theta_1$ ,  $\mu = +1$  на краю  $\theta_0 = \theta_2$  ( $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ). Полные напряжения подсчитывают по формулам (см. табл. 1 гл. 21)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^{(u)} &= \sigma_\theta^{r(u)} + \sigma_{M_\theta} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \\ &\quad - \mu \frac{3}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sigma_\kappa \sin \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_\varphi^{(u)} &= \sigma_\varphi^{r(u)} + \nu \left[ \sigma_{M_\theta} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \mu \frac{3}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sigma_\kappa \sin \beta e^{-\beta} \right]; \\ \sigma_\theta^{(p)} &= \sigma_\varphi^{*(p)} + \mu \sigma_\kappa \cos \beta e^{-\beta} - \\ &\quad - \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_\theta} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \quad \sigma_\theta^{(p)} = \sigma_\theta^{*(p)}; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^T)}{h^2}; \\
 \sigma_\kappa &= 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \sin \theta_0 \frac{Q_0 - Q_0^*}{h}; \\
 \sigma_\theta^T(u) &= \frac{6M_\theta^T}{h^2}; \quad \sigma_\varphi^T(u) = \frac{6M_\varphi^T}{h^2}; \\
 \sigma_\theta^*(p) &= \frac{N_\theta^*}{h}; \quad \sigma_\varphi^*(p) = \frac{N_\varphi^*}{h}; \\
 \beta &= \mu^4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} (\theta_0 - \theta) \\
 (\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} &\approx 1,285 \text{ при } \nu = 0,3).
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Перемещения и угол поворота определяют из соотношений

$$\left. \begin{aligned}
 w &= w^* + w^T + w^\kappa; \quad u_r = u_r^* + u_r^T + \sin \theta \cdot w^\kappa; \\
 \vartheta &= \vartheta^* + \vartheta^T + \vartheta^\kappa; \quad u_x = u_x^* + u_x^T - \cos \theta \cdot w^\kappa; \\
 u &= u^* + u^T; \quad (u = u_r \cos \theta + u_x \sin \theta; \\
 &\quad w = u_r \sin \theta - u_x \cos \theta),
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 w^\kappa &= \frac{R}{E} \left[ \mu \sigma_\kappa \cos \beta e^{-\beta} - \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{3} \times \right. \\
 &\quad \times \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \Big]; \\
 \vartheta^\kappa &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E} \sqrt{\frac{R}{h}} \left[ \mu \frac{2\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
 &\quad \times \cos \beta e^{-\beta} - \sigma_\kappa (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \Big].
 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

### ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КРУЧЕНИЕ

При осесимметричном кручении (рис. 7) в оболочке имеет место безмоментное напряженное состояние, описываемое формулами

$$T(\theta) = - \frac{\frac{1}{2\pi R^2} \mathfrak{M}_x^0 + R \int_{\theta_1}^{\theta} q_\varphi \sin^2 \theta \, d\theta}{\sin^2 \theta}; \quad (39)$$

$$v(\theta) = R \sin \theta \left\{ \frac{2(1+\nu)}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{1}{\sin \theta} T d\theta - \Omega_x \right\}. \quad (40)$$

$$[\mathfrak{M}_x^0 = -2\pi R^2 \sin^2 \theta_1 T_0; T_0 = T(\theta_1)]; \quad (41)$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \frac{T}{h}. \quad (42)$$

В случае оболочки, замкнутой сверху ( $\theta_1 = 0$ ), в равенстве (39) следует положить  $\mathfrak{M}_x^0 = 0$  (условие отсутствия в вершине сферы сосредоточенного крутящего момента). Если же оболочка замкнута внизу ( $\theta_2 = \pi$ ), то формулу (39) следует заменить следующей:

$$T(\theta) = \frac{R \int_{\theta}^{\pi} q_{\varphi} \sin^2 \theta d\theta}{\sin^2 \theta}. \quad (43)$$

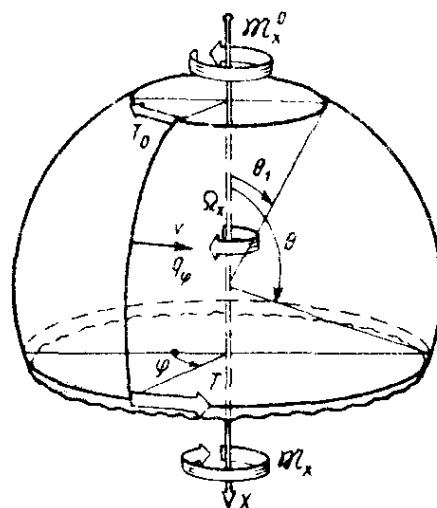


Рис. 7

### ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Обратносимметричным (антисимметричным, ветровым) называют случай, когда искомые и заданные величины имеют следующую зависимость от угла  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \cos \varphi, & v &= v_1 \sin \varphi; \\ \omega &= \omega_1 \cos \varphi; & u_r &= u_{r,1} \cos \varphi; \\ u_x &= u_{x,1} \cos \varphi, & \vartheta &= \vartheta_1 \cos \varphi; \\ N_{\theta} &= N_{\theta,1} \cos \varphi; & N_{\varphi} &= N_{\varphi,1} \cos \varphi; \\ T &= T_1 \sin \varphi; & M_{\theta} &= M_{\theta,1} \cos \varphi; \\ M_{\varphi} &= M_{\varphi,1} \cos \varphi; & H &= H_1 \sin \varphi; \\ Q_r &= Q_{r,1} \cos \varphi; & q_{\theta} &= q_{\theta,1} \cos \varphi; \\ q_{\varphi} &= q_{\varphi,1} \sin \varphi; & q_n &= q_{n,1} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Для плавных нагрузок напряженно-деформированное состояние можно разбить на безмоментное, термоупругое и краевой эффект (перемещения чистого изгиба в обратносимметричном случае сводятся к жесткому смещению  $a_z$  и повороту  $\Omega_y$ ). При этом

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta,1} &= N_{\theta,1}^*; & N_{\varphi,1} &= N_{\varphi,1}^* + N_{\varphi,1}^{\kappa}; & T_1 &= T_1^*; \\ M_{\theta,1} &= M_{\theta,1}^{\tau} + M_{\theta,1}^{\kappa}; & M_{\varphi,1} &= M_{\varphi,1}^{\tau} + M_{\varphi,1}^{\kappa}; \\ H_1 &= H_1^{\tau}; \end{aligned} \right\} \quad (45)$$



$$\left. \begin{aligned} Q_{r,1} &= N_{\theta,1}^* \cos \theta + Q_{r,1}^{\kappa}; \quad \vartheta_1 = \vartheta_1^* + \vartheta_1^I + \vartheta_1^{\kappa}; \\ u_{r,1} &= u_{r,1}^* + u_{r,1}^I + u_{r,1}^{\kappa}; \quad u_{x,1} = u_{x,1}^* + u_{x,1}^I + u_{x,1}^{\kappa}; \\ \omega_1 &= \omega_1^* + \omega_1^I + \omega_1^{\kappa}; \quad u_1 = u_1^* + u_1^I; \quad v_1 = v_1^* + v_1^I. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Безмоментные усилия подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta,1}^* &= \frac{W}{R \sin^2 \theta}; \quad N_{\varphi,1}^* = R q_{n,1} - \frac{W}{R \sin^2 \theta}; \\ T_1^* &= -\frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{dW}{d\theta} + R (q_{n,1} \cos \theta - q_{\theta,1} \sin \theta), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

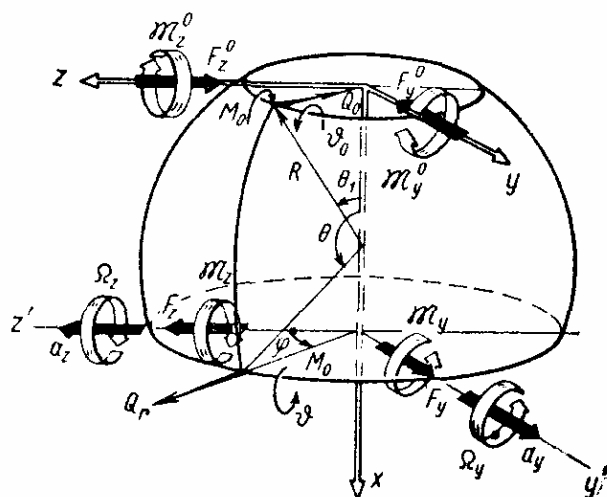


Рис. 8

где

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{\pi R \sin \theta} \left\{ M_y^0 + F_z^0 R (\cos \theta_1 - \cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \pi R \int_{\theta_1}^{\theta} \Phi(\theta) \sin \theta d\theta \right\}; \\ \Phi(\theta) &= R^2 \left\{ (q_{n,1} \cos \theta - q_{\theta,1} \sin \theta) \sin \theta - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta_1}^{\theta} (q_{n,1} \sin \theta + q_{\theta,1} \cos \theta - q_{\varphi,1}) \sin \theta d\theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Составляющие главного вектора и главного момента усилий и изгибающего момента, приложенных к краю  $\theta = \theta_1$ , связаны с краевыми значениями безмоментных усилий соотношениями (см. рис. 8)

$$\begin{aligned} F_z^0 &= \pi R \sin \theta_1 [\cos \theta_1 N_{\theta,1}^* (\theta_1) - T_1^* (\theta_1)]; \\ \mathfrak{M}_y^0 &= \pi R^2 \sin^3 \theta_1 N_{\theta,1}^* (\theta_1). \end{aligned} \quad (48)$$

Случай, когда сила  $F$  и момент  $\mathfrak{M}$  направлены под произвольными углами, может быть сведен к рассматриваемому поворотом осей  $Y$ ,  $Z$  и наложением решений (см. пример 12 гл. 1 т. II).

Ту же роль, что и  $\vartheta$  в симметричном случае, играет упругий поворот

$$\chi = \vartheta_1 - \frac{u_{x,1}}{R \sin \theta}, \quad (49)$$

представляющий собой полный поворот (в меридиональной плоскости  $\varphi = 0$ )  $\vartheta_1$ , за вычетом поворота параллельного круга как жесткого целого на угол  $\frac{u_{x,1}}{R \sin \theta}$  (см. работу [19] стр. 136). Аналогично, ту же роль, что  $u_r$  в симметричном случае, играет деформационная величина

$$R \sin \theta \omega = v_1 + u_{r,1}. \quad (50)$$

В выражения (49) и (50) не входят перемещения оболочки как жесткого целого. Эти величины, а также перемещения и угол поворота подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \omega^* &= \frac{1}{Eh} (N_{\varphi,1}^* - \nu N_{\theta,1}^*); \\ \chi^* &= \frac{1}{Eh} \left\{ -R \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \frac{q_{n,1}}{\sin \theta} \right) + (1 + \nu) \times \right. \\ &\times \left[ -\frac{1}{R \sin^3 \theta} \frac{d \sin \theta W}{d\theta} + R (q_{n,1} \operatorname{ctg} \theta - 2q_{\theta,1}) \right] \Big\}; \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{x,1}^* &= R \sin \theta \left\{ \Omega_y - \frac{1}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \operatorname{ctg} \theta \frac{d R q_{n,1}}{d\theta} + \right. \right. \\ &+ (\nu - \operatorname{ctg}^2 \theta) R q_{n,1} - (1 + \nu) \left[ -\frac{\cos \theta}{R \sin^4 \theta} \times \right. \\ &\times \left. \frac{d (\sin \theta W)}{d\theta} + \frac{W}{R \sin^2 \theta} + R \operatorname{ctg} \theta (q_{n,1} \operatorname{ctg} \theta - 2q_{\theta,1}) \right] \Big\} d\theta \Big\}; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{r,1}^* &= a_z + \frac{R}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \sin \theta \frac{dRq_{n,1}}{d\theta} + (1 + \nu) \left[ -Rq_{n,1} \cos \theta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{R \sin^2 \theta} \cdot \frac{d(\sin \theta W)}{d\theta} + \frac{\cos \theta W}{R \sin^2 \theta} - R \sin \theta (q_{n,1} \operatorname{ctg} \theta - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2q_{\theta,1}) \right] - Eh \frac{u_{x,1}^*}{R} \right\} d\theta; \\
 v_1^* &= \frac{R \sin \theta}{Eh} (N_{\varphi,1}^* - \nu N_{\theta,1}^*) - u_{r,1}^*; \\
 \vartheta_1^* &= \chi^* + \frac{u_{x,1}^*}{R \sin \theta}; \quad u_1^* = u_{r,1}^* \cos \theta + u_{x,1}^* \sin \theta; \\
 w_1^* &= u_{r,1}^* \sin \theta - u_{x,1}^* \cos \theta.
 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

В случае сферы, замкнутой сверху ( $\theta_1 = 0$ ), следует положить  $F_z^0 = 0$ . Для сферы, замкнутой внизу, вместо выражения (47) надо использовать

$$W = \frac{1}{\sin \theta} \int_{\pi}^{\theta} \Phi(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi(\theta) &= R^2 \left\{ (q_{n,1} \cos \theta - q_{\theta,1} \sin \theta) \sin \theta - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\pi}^{\theta} (q_{n,1} \sin \theta + q_{\theta,1} \cos \theta - q_{\varphi,1}) \sin \theta d\theta \right\}. \quad (54)
 \end{aligned}$$

Для практически наиболее интересного частного случая изгиба оболочки краевыми воздействиями ( $q_{\theta,1} = q_{\varphi,1} = q_{n,1} = 0$ ) приведенные выше формулы значительно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\theta,1}^* &= -N_{\varphi,1}^* = \frac{1}{\pi R^2 \sin^3 \theta} \mathfrak{M}_y^0 + \\
 &\quad + \frac{1}{\pi R \sin^3 \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta) F_z^0; \\
 T_1^* &= \frac{\cos \theta}{\pi R^2 \sin^3 \theta} \mathfrak{M}_y^0 - \frac{1}{\pi R} \cdot \frac{1 - \cos \theta_1 \cos \theta}{\sin^3 \theta} F_z^0;
 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \chi^* &= -\frac{1+\nu}{\pi E h R \sin^2 \theta} F_z^0; \quad \omega^* = -\frac{(1+\nu)}{E h} N_{\theta,1}^*; \\
 u_{x,1}^* &= R \sin \theta \left\{ \Omega_y^0 - \frac{1+\nu}{E h} \left[ \left( \frac{\cos \theta_1}{\pi R} F_z^0 + \frac{1}{\pi R^2} \mathfrak{M}_y^0 \right) \times \right. \right. \\
 &\quad \times \left( \frac{\cos \theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta_1}{2 \sin^2 \theta_1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} \right) + \frac{1}{\pi R} F_z^0 \times \\
 &\quad \left. \left. \times \left( \frac{1}{\sin^2 \theta_1} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta_1^* &= \chi^* + \frac{u_{x,1}^*}{R \sin \theta}; \\
 u_{r,1}^* &= a_z - R \Omega_y (\cos \theta_1 - \cos \theta) + \frac{1+\nu}{2\pi E h} \times \\
 &\quad \times \left\{ F_z^0 \left[ (1 + \cos \theta_1 \cos \theta) \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} + \left( 1 + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) (\cos \theta_1 - \cos \theta) \right] + \frac{1}{R} \mathfrak{M}_y^0 \times \right. \\
 &\quad \times \left[ \cos \theta \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} (\cos \theta_1 - \cos \theta) + \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \left( \frac{1}{\sin^2 \theta_1} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \right] \right\};
 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$v_1^* = \frac{R \sin \theta}{E h} (N_{\varphi,1}^* - \nu N_{\theta,1}^*) - u_{r,1}^*;$$

$$u_1^* = u_{r,1}^* \cos \theta + u_{x,1}^* \sin \theta; \quad w_1^* = u_{r,1}^* \sin \theta - u_{x,1}^* \cos \theta.$$

Термоупругие слагаемые определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_{\theta,1}^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1+\nu) \kappa_{r,1} + \frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 \varepsilon_{r,1}}{d\theta^2} + \nu \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R} \cdot \frac{d\varepsilon_{r,1}}{d\theta} - \frac{\varepsilon_{r,1}}{R \sin^2 \theta} \right) \right\}; \\ M_{\varphi,1}^T &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1+\nu) \kappa_{r,1} + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{d^2 \varepsilon_{r,1}}{d\theta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R} \frac{d\varepsilon_{r,1}}{d\theta} - \frac{\varepsilon_{r,1}}{R \sin^2 \theta} \right\}; \\ H_1^T &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{d\varepsilon_{r,1}}{d\theta} - \frac{\cos \theta}{R \sin^2 \theta} \varepsilon_{r,1} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi^T &= -\frac{d\varepsilon_{r,1}}{d\theta} + \operatorname{ctg} \theta \varepsilon_{r,1}; \quad \omega^T = \varepsilon_{r,1}; \\ u_{x,1}^T &= -R \cos \theta \varepsilon_{r,1}; \quad u_{r,1}^T = R \sin \theta \varepsilon_{r,1}; \\ u_1^T &= 0; \quad v_1^T = 0; \quad \omega_1^T = R \varepsilon_{r,1}; \quad \vartheta_1 = -\frac{d\varepsilon_{r,1}}{d\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Здесь величины  $\varepsilon_{r,1}$ ;  $\kappa_{r,1}$  связаны, в случае линейного по толщине изменения температуры, с температурой на внешней поверхности  $T^+ = T_1^+ \cos \varphi$  и внутренней  $T^- = T_1^- \cos \varphi$  соотношениями [в случае нелинейного закона изменения температуры используются формулы (80) гл. 20]

$$\varepsilon_{r,1} = \alpha \frac{T_1^+ + T_1^-}{2}; \quad \kappa_{r,1} = \alpha \frac{T_1^+ - T_1^-}{h}, \quad (61)$$

здесь  $\alpha$  — коэффициент линейного (температурного) расширения в  $1/\text{град}$ .

Краевой эффект. Слагаемые краевого эффекта для коротких оболочек могут быть приняты в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} R\omega^\kappa(\theta) &= C_1 K_0(\beta) - C_2 K_1(\beta) - C_3 K_2(\beta) - C_4 K_3(\beta); \\ \frac{\chi^\kappa(\theta)}{b} &= 4C_1 K_3(\beta) + C_2 K_0(\beta) + C_3 K_1(\beta) + C_4 K_2(\beta); \\ \frac{M_{\theta,1}^\kappa(\theta)}{Db^2} &= 4C_1 K_2(\beta) - 4C_2 K_3(\beta) + C_3 K_0(\beta) + C_4 K_1(\beta); \\ \frac{\sin \theta Q_{r,1}^\kappa(\theta)}{Db^3} &= 4C_1 K_1(\beta) - 4C_2 K_2(\beta) - 4C_3 K_3(\beta) + C_4 K_0(\beta); \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\varphi, 1}^{\kappa} &= \nu M_{\theta, 1}^{\kappa}; \quad N_{\varphi, 1}^{\kappa} = Eh\omega^{\kappa}; \quad \omega_1^{\kappa} = R\omega^{\kappa}; \\ u_{r, 1}^{\kappa} &= R \sin \theta \omega^{\kappa}; \quad u_{x, 1}^{\kappa} = -R \cos \theta \omega^{\kappa}; \quad \vartheta_1^{\kappa} = \chi^{\kappa}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} (\theta - \theta_1); \quad b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{hR}} \approx \\ &\approx \frac{1,285}{\sqrt{hR}} \text{ (при } \nu = 0,3) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2); \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$K_0(\beta)$ ,  $K_1(\beta)$ ,  $K_2(\beta)$ ,  $K_3(\beta)$  — функции Крылова, значения которых приведены в табл. 2 гл. 21;

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= R\omega^{\kappa}(\theta_1) = \frac{1}{\sin \theta_1} [u_{r, 1}(\theta_1) - u_{r, 1}^*(\theta_1) - u_{r, 1}^r(\theta_1)]; \\ C_2 &= \frac{\chi^{\kappa}(\theta_1)}{b} = \frac{1}{b} [\chi(\theta_1) - \chi^r(\theta_1)]; \\ C_3 &= \frac{M_{\theta, 1}^{\kappa}(\theta_1)}{Db^2} = \frac{1}{Db^2} [M_{\theta, 1}(\theta_1) - M_{\theta, 1}^r(\theta_1)]; \\ C_4 &= \frac{\sin \theta_1 Q_{r, 1}^{\kappa}(\theta_1)}{Db^3} = \frac{\sin \theta_1}{Db^3} [Q_{r, 1}(\theta_1) - \cos \theta_1 N_{\theta, 1}^*(\theta_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Приведенные выше соотношения дают возможность решить краевую задачу. Напомним, что всего подлежат определению три группы произвольных постоянных:

- первая группа  $F_z^0$ ,  $M_y^0$ ;
- вторая группа  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ;
- третья группа  $a_z$ ,  $\Omega_y$ .

Постоянные первой группы задают или подсчитывают по формулам (48).

Во вторую группу входят две статические и две деформационные величины. Примером использования последних могут служить условия жесткого края  $\omega = 0$ ,  $\chi = 0$ . Если граничные условия сформулированы в перемещениях, то деформационные граничные величины можно подсчитать по формулам (49) и (50) (о деформационных граничных условиях см. стр. 660). Формулы (62)–(65) и соотношения (66)–(79) гл. 21 позволяют сравнительно легко удовлетворить граничным условиям для короткой сферической оболочки. Необходимо только в последних положить  $\rho = 1$  и заменить величины (с различными значками)

$$\omega, \vartheta, M_{\theta}, Q_r; \quad M_{\varphi}, N_{\varphi}, u_r, u_x$$

соответственно на

$$R\omega, \chi, M_{\theta, 1}, Q_{r, 1}; \quad M_{\varphi, 1}, N_{\varphi, 1}, u_{r, 1}, u_{x, 1}.$$

Если не интересует жесткость конструкции (величины перемещений и угла поворота), то после определения постоянных второй группы подсчитывают напряжения и на этом решение задачи заканчивают.

В случаях, когда необходимо рассчитать смещения, определяют постоянные третьей группы. При нахождении последних следует использовать то обстоятельство, что перемещения

$$u_1 = u_1^* + u_1^r, \quad v_1 = v_1^* + v_1^r \quad (66)$$

можно считать независимыми от краевого эффекта.

Как и в симметричном случае, для длинных оболочек [см. критерий (26) и (27)] расчет значительно упрощается. Так,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^r + \alpha_{11} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{12} (M_0 - M_0^r); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^r + \alpha_{12} (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{22} (M_0 - M_0^r), \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

где, как и в симметричном случае,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mu 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta_0 \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{h} \right) \sin \theta_0 \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= \mu 4 [3(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{R}{h}} \cdot \frac{1}{Eh^2} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

$$\left[ \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 12(1-\nu^2) \left( \frac{R}{h} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{(Eh)^2} \right],$$

а  $\mu = -1$  на краю  $\theta_0 = \theta_1$ ,  $\mu = +1$  на краю  $\theta_0 = \theta_2$  ( $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ), но

$$u_0 = (R\omega)_{\theta=\theta_0}; \quad \vartheta_0 = \chi(\theta_0); \quad M_0 = M_{\theta,1}(\theta_0); \quad Q_0 = Q_{r,1}(\theta_0) \quad (69)$$

(с соответствующими значками).

Полные напряжения подсчитывают по формулам (см. табл. 1 гл. 21)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta,1}^{(u)} &= \sigma_{\theta,1}^r + \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \mu \frac{3}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sigma_{\kappa} \times \\ &\quad \times \sin \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_{\varphi,1}^{(u)} &= \sigma_{\varphi,1}^r + \nu \left[ \sigma_{M_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} - \mu \frac{3}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sigma_{\kappa} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \beta e^{-\beta} \right]; \\ \sigma_{\varphi,1}^{(p)} &= \sigma_{\varphi,1}^{*(p)} + \mu \sigma_{\kappa} \cos \beta e^{-\beta} - \\ &\quad - \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_{\theta,1}^{(p)} &= \sigma_{\theta,1}^{*(p)}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{(p)} = \sigma_{\theta\varphi,1}^{*(p)}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{(u)} = \sigma_{\theta\varphi,1}^r, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M'_0)}{h^2}; \\
 \sigma_k &= 2 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \sin \theta_0 \frac{Q_0 - Q_0^*}{h}; \\
 \sigma_{\theta, 1}^{(u)} &= \frac{6M_{\theta, 1}^I}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi, 1}^{(u)} = \frac{6M_{\varphi, 1}^I}{h^2}; \\
 \sigma_{\theta, 1}^{*(p)} &= \frac{N_{\theta, 1}^*}{h}; \quad \sigma_{\varphi, 1}^{*(p)} = \frac{N_{\varphi, 1}^*}{h}; \dots; \\
 \sigma_{\theta\varphi, 1}^{(u)} &= \frac{6H_1^I}{h^2}; \quad \sigma_{\theta\varphi, 1}^{*(p)} = \frac{T_1^*}{h}; \\
 \beta &= \mu \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} (\theta_0 - \theta) \\
 \left[ \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \approx 1,285 \text{ при } \nu = 0,3 \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Смещения и угол поворота

$$\left. \begin{aligned}
 u_{r, 1} &= u_{r, 1}^* + u_{r, 1}^I + \frac{R \sin \theta}{E} \left\{ -\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
 &\quad \times (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \left. \right\} \\
 u_{x, 1} &= u_{x, 1}^* + u_{x, 1}^I - \frac{R \cos \theta}{E} \left\{ -\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
 &\quad \times (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} + \mu \sigma_k \cos \beta e^{-\beta} \left. \right\}; \\
 v_1 &= v_1^* + v_1^I; \quad w_1 = w_1^* + w_1^I; \\
 \vartheta_1 &= \vartheta_1^* + \vartheta_1^I + \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{E} \times \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{R}{h}} \left\{ \mu \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
 &\quad \times \cos \beta e^{-\beta} - \sigma_k (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \left. \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

### СЛУЧАЙ МАЛОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО ОТВЕРСТИЯ

В случае, если угол  $\theta_0 = \theta_1$  (рис. 4) мал (примерно  $10-15^\circ$ ), приведенными выше для краевого эффекта соотношениями пользоваться уже нельзя. Необходимо переходить к более сложной, так называемой бесселевой асимптотике.



При этом для симметричного случая в выражениях (32) коэффициенты податливости принимают:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta_1 \frac{\Phi_0 \bar{\Phi}_0 + \Psi_0 \bar{\Psi}_0}{\gamma_0} \cdot \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -\sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{R}{h} \sin \theta_1 \frac{\varphi_0}{\gamma_0} \cdot \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= [12(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{\psi_0}{\gamma_0} \cdot \frac{1}{Eh^2}, \end{aligned} \right\} (73)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \ker x_0 - \frac{1-\nu}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{kei}' x_0; \\ \bar{\Phi}_0 &= \ker x_0 - \frac{1+\nu}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{kei}' x_0; \\ \Psi_0 &= \operatorname{kei} x_0 + \frac{1-\nu}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker' x_0; \\ \bar{\Psi}_0 &= \operatorname{kei} x_0 + \frac{1+\nu}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker' x_0; \\ \varphi_0 &= \ker x_0 \cdot \ker' x_0 + \operatorname{kei} x_0 \operatorname{kei}' x_0; \\ \psi_0 &= (\ker' x_0)^2 + (\operatorname{kei}' x_0)^2; \\ \gamma_0 &= \Phi_0 \operatorname{kei}' x_0 - \Psi_0 \ker' x_0 \\ &\quad \left( x_0 = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \theta_1 \right). \end{aligned} \right\} (74)$$

Значения входящих в выписанные соотношения функций Томсона нулевого порядка  $\ker x$ ,  $\operatorname{kei} x$  и их производных  $\ker' x$ ,  $\operatorname{kei}' x$  приведены в табл. 1.

1. Функции  $\ker x$ ,  $\operatorname{kei} x$  и их производные

$x$	$\ker x$	$\operatorname{kei} x$	$\ker' x$	$\operatorname{kei}' x$
0,0	$\infty$	-0,7854	$-\infty$	0
0,1	2,4205	-0,7768	-9,9610	0,1460
0,2	1,7331	-0,7581	-4,9229	0,2229
0,3	1,3372	-0,7331	-3,2199	0,2743
0,4	1,0626	-0,7038	-2,3521	0,3095
0,5	0,8559	-0,6716	-1,8198	0,3332
0,6	0,6931	-0,6374	-1,4565	0,3482
0,7	0,5614	-0,6022	-1,1909	0,3563
0,8	0,4529	-0,5664	-0,9873	0,3590
0,9	0,3625	-0,5305	-0,8259	0,3574

Продолжение табл. 1

$x$	$\ker x$	$\ker x$	$\ker' x$	$\ker' x$
1,0	0,2867	—0,4950	—0,6946	0,3524
1,1	0,2228	—0,4601	—0,5859	0,3445
1,2	0,1689	—0,4262	—0,4946	0,3345
1,3	0,1234	—0,3933	—0,4172	0,3227
1,4	0,08513	—0,3617	—0,3511	0,3096
1,5	0,05293	—0,3314	—0,2942	0,2956
1,6	0,02603	—0,3026	—0,2451	0,2809
1,7	0,00369	—0,2752	—0,2027	0,2658
1,8	—0,01470	—0,2494	—0,1659	0,2504
1,9	—0,02966	—0,2251	—0,1341	0,2351
2,0	—0,04166	—0,2024	—0,1066	0,2193
2,1	—0,05111	—0,1812	—0,08282	0,2048
2,2	—0,05834	—0,1614	—0,06234	0,1901
2,3	—0,06367	—0,1431	—0,04475	0,1759
2,4	—0,06737	—0,1262	—0,02971	0,1621
2,5	—0,06969	—0,1107	—0,01693	0,1489
2,6	—0,07082	—0,09644	—0,00614	0,1363
2,7	—0,07097	—0,08342	0,00290	0,1242
2,8	—0,07030	—0,07157	0,01040	0,1129
2,9	—0,06894	—0,06082	0,01653	0,1021
3,0	—0,06703	—0,05112	0,02148	0,09204
3,1	—0,06468	—0,04240	0,02537	0,08259
3,2	—0,06198	—0,03458	0,02836	0,07378
3,3	—0,05903	—0,02762	0,03056	0,06558
3,4	—0,05590	—0,02145	0,03207	0,05799
3,5	—0,05264	—0,01600	0,03299	0,05098
3,6	—0,04932	—0,01123	0,03341	0,04454
3,7	—0,04597	—0,00708	0,03340	0,03864
3,8	—0,04265	—0,00349	0,03304	0,03325
3,9	—0,03937	—0,00041	0,03238	0,02835
4,0	—0,03618	0,00220	0,03148	0,02391
4,1	—0,03308	0,00438	0,03038	0,01991
4,2	—0,03011	0,00619	0,02913	0,01631
4,3	—0,02726	0,00766	0,02777	0,01310
4,4	—0,02456	0,00882	0,02632	0,01024
4,5	—0,02200	0,00972	0,02481	0,00772
4,6	—0,01960	0,01038	0,02328	0,00549
4,7	—0,01734	0,01083	0,02173	0,00355
4,8	—0,01525	0,01110	0,02019	0,00186
4,9	—0,01330	0,01121	0,01868	0,00042
5,0	—0,01151	0,01119	0,01719	—0,00082
5,1	—0,00986	0,01105	0,01575	—0,00186
5,2	—0,00836	0,01082	0,01437	—0,00273
5,3	—0,00699	0,01051	0,01304	—0,00343
5,4	—0,00575	0,01014	0,01177	—0,00400
5,5	—0,00463	0,00972	0,01058	—0,00444
5,6	—0,00363	0,00925	0,00945	—0,00477
5,7	—0,00274	0,00876	0,00839	—0,00500
5,8	—0,00195	0,00826	0,00740	—0,00515
5,9	—0,00126	0,00774	0,00648	—0,00522
6,0	—0,00065	0,00722	0,00563	—0,00522
6,1	—0,00013	0,00670	0,00485	—0,00518
6,2	+0,00032	0,00618	0,00413	—0,00508
6,3	0,00070	0,00568	0,00348	—0,00495
6,4	0,00102	0,00519	0,00288	—0,00479
6,5	0,00128	0,00472	0,00235	—0,00460

Продолжение табл. 1

$x$	$\ker x$	$\operatorname{kei} x$	$\ker' x$	$\operatorname{kei}' x$
6,6	0,00149	0,00427	0,00187	—0,00439
6,7	0,00165	0,00384	0,00144	—0,00417
6,8	0,00178	0,00344	0,00105	—0,00394
6,9	0,00186	0,00306	0,00072	—0,00370
7,0	0,00192	0,00270	0,00042	—0,00346
7,1	0,00195	0,00237	0,00016	—0,00322
7,2	0,00196	0,00206	—0,00006	—0,00298
7,3	0,00194	0,00177	—0,00025	—0,00274
7,4	0,00191	0,00151	—0,00041	—0,00252
7,5	0,00186	0,00127	—0,00054	—0,00230
7,6	0,00180	0,00105	—0,00065	—0,00208
7,7	0,00173	0,00085	—0,00073	—0,00188
7,8	0,00165	0,00067	—0,00080	—0,00169
7,9	0,00157	0,00051	—0,00085	—0,00151
8,0	0,00148	0,00037	—0,00088	—0,00134
8,1	0,00140	0,00024	—0,00090	—0,00118
8,2	0,00131	0,00013	—0,00091	—0,00103
8,3	0,00122	0,00004	—0,00090	—0,00089
8,4	0,00113	—0,00004	—0,00089	—0,00076
8,5	0,00104	—0,00011	—0,00087	—0,00065
8,6	0,00095	—0,00017	—0,00085	—0,00054
8,7	0,00087	—0,00022	—0,00082	—0,00044
8,8	0,00079	—0,00026	—0,00079	—0,00036
8,9	0,00071	—0,00029	—0,00075	—0,00028
9,0	0,00064	—0,00032	—0,00071	—0,00021
9,1	0,00057	—0,00034	—0,00067	—0,00014
9,2	0,00050	—0,00035	—0,00063	—0,00009
9,3	0,00044	—0,00036	—0,00059	—0,00004
9,4	0,00038	—0,00036	—0,00054	—0,00000
9,5	0,00033	—0,00036	—0,00050	0,00003
9,6	0,00028	—0,00035	—0,00046	0,00006
9,7	0,00024	—0,00034	—0,00042	0,00009
9,8	0,00020	—0,00033	—0,00039	0,00011
9,9	0,00016	—0,00032	—0,00035	0,00013
10,0	0,00013	—0,00031	—0,00032	0,00014

Напряжения подсчитывают по формулам [см. соотношения (36)]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta}^{(u)} = & \sigma_{\theta}^{r(u)} + \left( \sigma_{M_0} \operatorname{kei}' x_0 - \frac{3}{V 6(1-\nu^2)} \sigma_{\kappa} \Psi_0 \right) \times \\
 & \times \frac{\left[ \ker x - \frac{1-\nu}{V 12(1-\nu^2)} V \frac{h}{R} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{kei}' x \right]}{\gamma_0} + \\
 & + \left( -\sigma_{M_0} \ker' x_0 + \frac{3}{V 6(1-\nu^2)} \sigma_{\kappa} \Phi_0 \right) \times \\
 & \times \frac{\left[ \operatorname{kei} x + \frac{1-\nu}{V 12(1-\nu^2)} V \frac{h}{R} \operatorname{ctg} \theta \ker' x \right]}{\gamma_0}; \quad (75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi}^{(u)} &= \sigma_{\varphi}^{(u)} + \left( \sigma_{M_0} \operatorname{kei}' x_0 - \frac{3}{\sqrt{6(1-v^2)}} \sigma_{\kappa} \Psi_0 \right) \times \\
&\times \frac{\left[ v \operatorname{ker} x + \frac{1-v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{kei}' x \right]}{\gamma_0} + \\
&+ \left( -\sigma_{M_0} \operatorname{ker}' x_0 + \frac{3}{\sqrt{6(1-v^2)}} \sigma_{\kappa} \Phi_0 \right) \times \\
&\times \frac{\left[ v \operatorname{kei} x - \frac{1-v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ker}' x \right]}{\gamma_0}; \\
\sigma_{\theta}^{(p)} &= \sigma_{\theta}^{*(p)} + \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \sigma_{\kappa} \operatorname{ctg} \theta \times \\
&\times \frac{\Phi_0 \operatorname{kei}' x - \Psi_0 \operatorname{ker}' x}{2\gamma_0} + \frac{\sqrt[4]{12(1-v^2)}}{6} \sqrt{\frac{h}{R}} \sigma_{M_0} \operatorname{ctg} \theta \times \\
&\times \frac{\operatorname{kei}' x_0 \operatorname{ker}' x - \operatorname{ker}' x_0 \operatorname{kei} x}{\gamma_0}; \\
\sigma_{\varphi}^{(p)} &= \sigma_{\varphi}^{*(p)} + \left( \sigma_{\kappa} \Phi_0 - \frac{\sqrt{6(1-v^2)}}{3} \sigma_{M_0} \operatorname{ker}' x_0 \right) \times \\
&\times \frac{\left[ \operatorname{ker} x - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{kei}' x \right]}{\sqrt{2}\gamma_0} + \\
&+ \left( \sigma_{\kappa} \Psi_0 - \frac{\sqrt{6(1-v^2)}}{3} \sigma_{M_0} \operatorname{kei}' x_0 \right) \times \\
&\times \frac{\left[ \operatorname{kei} x + \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ker}' x \right]}{\sqrt{2}\gamma_0}; \\
&\left( x = \sqrt[4]{12(1-v^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \theta \right).
\end{aligned} \tag{75}$$

Смещения и угол поворота

$$\begin{aligned}
 u_r = u_r^* + u_r^T + \frac{R \sin \theta}{E} & \left\{ \left( \sigma_\kappa \Phi_0 - \frac{\sqrt{6(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \ker' x_0 \right) \times \right. \\
 & \times \frac{\left[ \ker x - \frac{1+\nu}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{kei}' x \right]}{\sqrt{2}\gamma_0} + \\
 & + \left( \sigma_\kappa \Psi_0 - \frac{\sqrt{6(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \operatorname{kei}' x_0 \right) \times \\
 & \times \frac{\left[ \operatorname{kei} x + \frac{1+\nu}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \ker' x \right]}{\sqrt{2}\gamma_0} \left. \right\}; \\
 u_x = u_x^* + u_x^T - \frac{R \cos \theta}{E} & \left\{ \sigma_\kappa \frac{\Phi_0 \ker x + \Psi_0 \operatorname{kei} x}{\sqrt{2}\gamma_0} - \right. \\
 & - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \frac{\ker' x_0 \ker x + \operatorname{kei}' x_0 \operatorname{kei} x}{\gamma_0} \left. \right\}; \\
 \vartheta = \vartheta^* + \vartheta^T - \frac{4\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E} & \sqrt{\frac{R}{h}} \left\{ \sigma_\kappa \frac{\Phi_0 \ker' x + \Psi_0 \operatorname{kei}' x}{\sqrt{2}\gamma_0} - \right. \\
 & - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \frac{\ker' x_0 \ker' x + \operatorname{kei}' x_0 \operatorname{kei}' x}{\gamma_0} \left. \right\}.
 \end{aligned} \quad (76)$$

Для обратносимметричного случая коэффициенты податливости в формулах (67) находят из равенств

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \frac{4\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E} \left( \frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta_1 \frac{\Phi_1 \bar{\Phi}_1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1}{\gamma_1} \cdot \frac{1}{E}; \\
 \alpha_{12} &= -\sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{R}{h} \sin \theta_1 \frac{\Phi_1}{\gamma_1} \cdot \frac{1}{Eh}; \\
 \alpha_{22} &= [12(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}} \left( \frac{R}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Psi_1}{\gamma_1} \cdot \frac{1}{Eh^2},
 \end{aligned} \quad (77)$$

здесь

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \ker_1 x_0 + \frac{1-\nu}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[ \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{R} \times \right. \\
 & \times \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \operatorname{kei}_1 x_0 - \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{kei}'_1 x_0 \left. \right];
 \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_1 &= \ker_1 x_0 + \frac{1+v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \left[ \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \cdot \frac{h}{R} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \operatorname{kei}_1 x_0 - \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{kei}'_1 x_0 \right]; \\
\Psi_1 &= \operatorname{kei}_1 x_0 - \frac{1-v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \left[ \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \cdot \frac{h}{R} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \ker_1 x_0 - \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker'_1 x_0 \right]; \\
\bar{\Psi}_1 &= \operatorname{kei}_1 x_0 - \frac{1+v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \left[ \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \cdot \frac{h}{R} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \ker_1 x_0 - \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker'_1 x_0 \right]; \\
\varphi_1 &= (\ker_1 x_0 \ker'_1 x_0 + \operatorname{kei}_1 x_0 \operatorname{kei}'_1 x_0) - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 (\ker_1^2 x_0 + \operatorname{kei}_1^2 x_0); \\
\psi_1 &= \left[ \ker'_1 x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker_1 x_0 \right]^2 + \\
&\quad + \left[ \operatorname{kei}'_1 x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{kei}_1 x_0 \right]^2; \\
\gamma_1 &= \Phi_1 \left[ \operatorname{kei}'_1 x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{kei}_1 x_0 \right] - \\
&\quad - \Psi_1 \left[ \ker'_1 x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker_1 x_0 \right] \\
&\quad \left( x_0 = \sqrt[4]{12(1-v^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \theta_1 \right).
\end{aligned} \tag{78}$$

Значения функций Томсона первого рода  $\ker_1 x$ ,  $\ker'_1 x$  и их производных подсчитывают с помощью табл. 1 по формулам

$$\left. \begin{aligned} \ker_1 x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\ker' x - \ker'_1 x); \\ \ker'_1 x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\ker' x + \ker'_1 x); \\ \ker''_1 x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\ker x + \ker_1 x) - \frac{\ker_1 x}{x}; \\ \ker''_1 x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\ker x - \ker_1 x) - \frac{\ker_1 x}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Напряжения находят из следующих выражений [см. формулы (71)]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta,1}^{(u)} &= \sigma_{\theta,1}^{r,(u)} + \left( -\frac{3}{\sqrt{6(1-\nu^2)}} \sigma_{\kappa} \frac{\Psi_1}{\gamma_1} + \right. \\ &+ \sigma_{M_0} \frac{\ker'_1 x_0 - \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker_1 x_0}{\gamma_1} \Big) \times \\ &\times \left[ \ker_1 x - \frac{1-\nu}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \ker'_1 x + \right. \\ &+ \left. \frac{1-\nu}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \ker_1 x \right] + \\ &+ \left( \frac{3}{\sqrt{6(1-\nu^2)}} \sigma_{\kappa} \frac{\Phi_1}{\gamma_1} - \sigma_{M_0} \times \right. \\ &\times \frac{\ker'_1 x_0 - \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker_1 x_0}{\gamma_1} \Big) \times \\ &\times \left[ \ker_1 x + \frac{1-\nu}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \ker'_1 x - \right. \\ &- \left. \frac{1-\nu}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \ker_1 x \right]; \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi, 1}^{(u)} = \sigma_{\varphi, 1}^{\tau(u)} + & \left( \frac{3}{\sqrt{6(1-v^2)}} \sigma_{\kappa} \frac{\Psi_1}{\gamma_1} - \right. \\
& \left. - \sigma_{M_0} \frac{\text{kei}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta_1 \text{kei}_1 x_0}{\gamma_1} \right) \times \\
& \times \left[ v \text{ker}_1 x - \frac{1-v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta \text{kei}_1' x + \right. \\
& \left. + \frac{1-v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \text{kei}_1 x \right] + \\
& + \left( - \frac{3}{\sqrt{6(1-v^2)}} \sigma_{\kappa} \frac{\Phi_1}{\gamma_1} + \sigma_{M_0} \times \right. \\
& \times \frac{\text{ker}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta_1 \text{ker}_1 x_0}{\gamma_1} \left. \right) \times \\
& \times \left[ v \text{kei}_1 x - \frac{1-v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta \text{ker}_1' x - \right. \\
& \left. - \frac{1-v}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \text{ker}_1 x \right];
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\sigma_{\theta\varphi, 1}^{(u)} = \sigma_{\theta\varphi, 1}^{\tau(u)};$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta, 1}^{(p)} = \sigma_{\theta, 1}^{*(p)} + & \left( - \sigma_{\kappa} \frac{\Psi_1}{\sqrt{2}\gamma_1} + \frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{3} \times \right. \\
& \times \sigma_{M_0} \frac{\text{kei}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta_1 \text{kei}_1 x_0}{\gamma_1} \left. \right) \times \\
& \times \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \left[ \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta \text{ker}_1' x - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-v^2)}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \text{ker}_1 x \right] +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left( \sigma_k \frac{\Phi_1}{\sqrt{2} \gamma_1} - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
& \times \frac{\ker'_1 x_0 - \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker_1 x_0}{\gamma_1} \Bigg) \times \\
& \times \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[ \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{kei}'_1 x - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \operatorname{kei}_1 x \right]; \\
\sigma_{\varphi, 1}^{(p)} = \sigma_{\varphi, 1}^{*(p)} & + \left( \sigma_k \frac{\Psi_1}{\sqrt{2} \gamma_1} - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
& \times \frac{\operatorname{kei}'_1 x_0 - \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{kei}_1 x_0}{\gamma_1} \Bigg) \times \\
& \times \left[ \operatorname{kei}_1 x + \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \ker'_1 x - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \ker_1 x \right] + \\
& + \left( \sigma_k \frac{\Phi_1}{\sqrt{2} \gamma_1} - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
& \times \frac{\ker'_1 x_0 - \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \ker_1 x_0}{\gamma_1} \Bigg) \times \\
& \times \left[ \ker_1 x - \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{kei}'_1 x + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \operatorname{kei}_1 x \right]; \\
& \sigma_{\theta \varphi, 1}^{(p)} = \sigma_{\theta \varphi, 1}^{*(p)}.
\end{aligned} \tag{80}$$

Перемещения и угол поворота подсчитывают по формулам

$$\begin{aligned}
 u_{r,1} = & u_{r,1}^* + u_{r,1}^T + \frac{R \sin \theta}{E} \left\{ \left( \sigma_{\kappa} \frac{\Psi_1}{\sqrt{2} \gamma_1} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \right. \\
 & \left. \times \frac{\text{kei}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta_1 \text{kei}_1 x_0}{\gamma_1} \right) \times \\
 & \times \left[ \text{kei}_1 x + \frac{1+\nu}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta \text{ker}_1' x \right] + \\
 & + \left( \sigma_{\kappa} \frac{\Phi_1}{\sqrt{2} \gamma_1} - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{\text{ker}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta_1 \text{ker}_1 x_0}{\gamma_1} \right) \times \\
 & \times \left[ \text{ker}_1 x - \frac{1+\nu}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta \text{kei}_1' x \right] \Bigg\}; \\
 u_{x,1} = & u_{x,1}^* + u_{x,1}^T - \frac{R \cos \theta}{E} \times \\
 & \times \left\{ \sigma_{\kappa} \frac{\Psi_1 \text{kei}_1 x + \Phi_1 \text{ker}_1 x}{\sqrt{2} \gamma_1} - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
 & \times \left[ \frac{\left( \text{kei}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta_1 \text{kei}_1 x_0 \right) \text{kei}_1 x}{\gamma_1} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\left( \text{ker}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ctg } \theta_1 \text{ker}_1 x_0 \right) \text{ker}_1 x}{\gamma_1} \right] \right\};
 \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}
\chi_1 = \chi_1^* + \chi_1' - \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{E} \sqrt{\frac{R}{h}} & \left\{ \left( \sigma_\kappa \frac{\Psi_1}{\gamma_1 \sqrt{2}} - \right. \right. \\
& - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \\
& \times \frac{\operatorname{kei}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{kei}_1 x_0}{\gamma_1} \Bigg) \times \\
& \times \left[ \operatorname{kei}_1' x - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{kei}_1 x \right] + \\
& + \left( \sigma_\kappa \frac{\Phi_1}{\gamma_1 \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
& \times \frac{\operatorname{ker}_1' x_0 - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta_1 \operatorname{ker}_1 x_0}{\gamma_1} \Bigg) \times \\
& \times \left[ \operatorname{ker}_1' x - \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ker}_1 x \right] \Bigg\}; \\
\vartheta_1 = \chi_1 + \frac{u_{\chi,1}}{R \sin \theta} & \left( x = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \theta \right).
\end{aligned} \tag{81}$$

### ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

**Пример 1\*.** Замкнутая сферическая оболочка при действии нормального давления (рис. 9). Поскольку в рассматриваемом случае края отсутствуют, безмоментное решение (11)–(13) при  $P = 0$ ;  $\theta_1 = 0$ ;  $a_\chi = 0$  дает полное решение

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = \sigma_\varphi &= \frac{pR}{2h}; \\
\Phi &= 0; \quad u = 0; \\
\omega &= \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh},
\end{aligned}$$

здесь под  $p$  понимают избыточное давление, при этом  $p > 0$  при внутреннем и  $p < 0$  при наружном давлении. В случае внешнего давления необходимо провести расчет оболочки на устойчивость. Отметим, что для нормального давления сферическая форма оболочки является оптимальной (оболочкой равного сопротивления).

\* См. также примеры гл. 1 т. 2.

**Пример 2.** Замкнутая сферическая оболочка при равномерном перепаде температуры по толщине (рис. 10). Температура меняется линейно по толщине. Тогда согласно формулам (4), (24) и (25) получаем

$$\sigma_{\theta}^{(p)} = \sigma_{\varphi}^{(p)} = 0;$$

$$\sigma_{\theta}^{(u)} = \sigma_{\varphi}^{(u)} = - \frac{E\alpha (T^+ - T^-)}{2(1-\nu)};$$

$$\vartheta = 0; u = 0;$$

$$w = \alpha \frac{T^+ + T^-}{2} R.$$

В рассматриваемом случае термоупругое решение, будучи периодическим по  $\theta$  и конечным, дает полное решение задачи. При этом жесткое смещение оболочки вдоль оси фиксировано требованием, чтобы центр сферической оболочки при нагреве не перемещался.

Из приведенных формул видно, что равномерный (по  $\theta$ ) перепад тем-

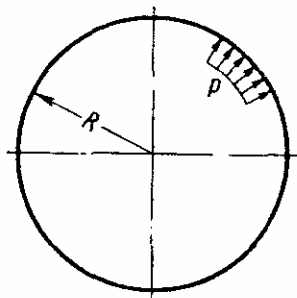


Рис. 9

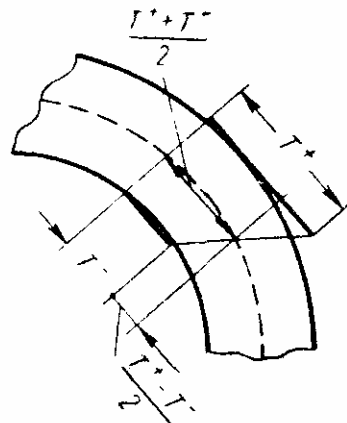


Рис. 10

пературы  $(T^+ - T^-)$ , не меняя геометрических размеров оболочки, приводит к появлению изгибных напряжений. Среднее же (по толщине) изменение температуры  $\frac{1}{2} (T^+ - T^-)$ , не вызывая напряжений, равномерно расширяет оболочку. Последнее относится и к случаю равномерно нагретой сферы  $T^+ = T^-$ . Отсутствие напряжения в последнем случае является проявлением следующего общего свойства упругого тела с незакрепленными границами: при температуре, изменяющейся линейно вдоль какого-либо пространственного направления, тело расширяется без возникновения в нем напряжений (см. например, [20] стр. 286).

Температурные напряжения могут достигать значительной величины. Так, например, при

$$T^+ - T^- = 100^\circ \text{C}; \alpha = 12 \cdot 10^{-3} 1/\text{град}; E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ дан/см}^2; \nu = 0,3$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = - \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{2 \cdot 0,7} = -1800 \text{ дан/см}^2.$$

**Пример 3.** Сферическая оболочка, заделанная на одном краю и закручиваемая моментом на другом (рис. 11). Полагая в соотношениях (39)–(42)  $q_\varphi = 0$ ;  $v(\theta_2) = 0$ , имеем

$$\sigma_{\theta\varphi} = -\frac{m_x^0}{2\pi R^2 h} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta};$$

$$v = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{m_x^0}{2\pi R h} \sin \theta \left[ \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta_2}{\sin^2 \theta_2} + \ln \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right) \right].$$

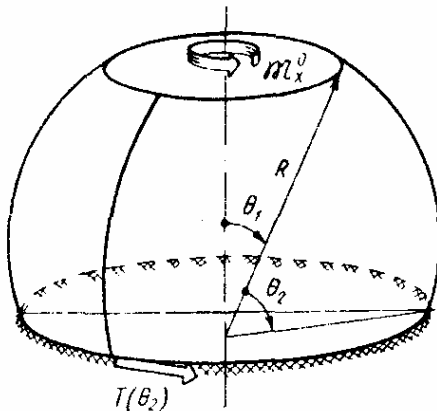


Рис. 11

При этом (рис. 11) краевое сдвигающее усилие связано с закручивающим моментом соотношением  $T(\theta_2) = -\frac{m_x^0}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta_2}$ .

**Пример 4.** Сферическая крышка с различного вида закреплениями края при действии равномерного внутреннего давления. Поскольку сферическая крышка замкнута в вершине, в формулах (11)–(13) следует положить  $\theta_1 = 0$ ;  $F_x^0 = 0$ . Тогда

$$N_\theta^* = N_\varphi^* = \frac{pR}{2}; \quad Q_r^* = \frac{pR}{2} \cos \theta;$$

$$u_r^* = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} \sin \theta;$$

$$u_x^* = a_x + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} (1 - \cos \theta).$$

Рассмотрим три характерных условия закрепления края (случаи сопряжения с упругим кольцом и оболочками другого вида рассмотрены в примерах гл. 1 т. II).

**Крышка, заделанная по краю.** Граничные условия  $u_0 = u_r(\theta_2) = 0$ ;  $\varphi_0 = \varphi(\theta_2) = 0$  придают системе (32) следующий вид:

$$\frac{1-\nu}{2} \sin \theta_2 \frac{pR^2}{Eh} + a_{11} (Q_0 - Q_0^*) + a_{12} M_0 = 0;$$

$$a_{12} (Q - Q_0^*) + a_{22} M_0 = 0.$$

Решая ее относительно  $M_0$  и  $(Q - Q_0^*)$ , получаем [используя формулы (34) и (36)]

$$\sigma_{M_0} = -\frac{3(1-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{pR}{h}; \quad \sigma_k = -(1-\nu) \frac{pR}{h}$$

и согласно зависимостям (35) находим

$$\sigma_\theta^{(u)} = \left\{ -\frac{3(1-\nu)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_\theta^{(u)};$$

$$\sigma_\varphi^{(p)} = \left\{ 1 - (1-\nu) (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_\theta^{(p)} = \frac{pR}{2h};$$

$$\beta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} (\theta_2 - \theta) \quad (\text{см. табл. 1 гл. 21}).$$

Эпюры напряжений для  $\theta_2 = 45^\circ$ ;  $\frac{R}{h} = 50$ ;  $\nu = 0,3$  приведены на рис. 12. Максимальных значений напряжения достигают в опорном сечении  $\theta = \theta_2$  на внутренней стороне крышки. При этом (в общем случае)

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\theta}^-(\theta_2) = \sigma_{\theta}^{(p)}(\theta_2) - \sigma_{\theta}^{(u)}(\theta_2) = \left\{ 1 + \frac{3(1-\nu)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right\} \frac{pR}{2h},$$

при

$$\nu = 0,3 \quad \sigma_{\max} = 2,27 \frac{pR}{2h}.$$

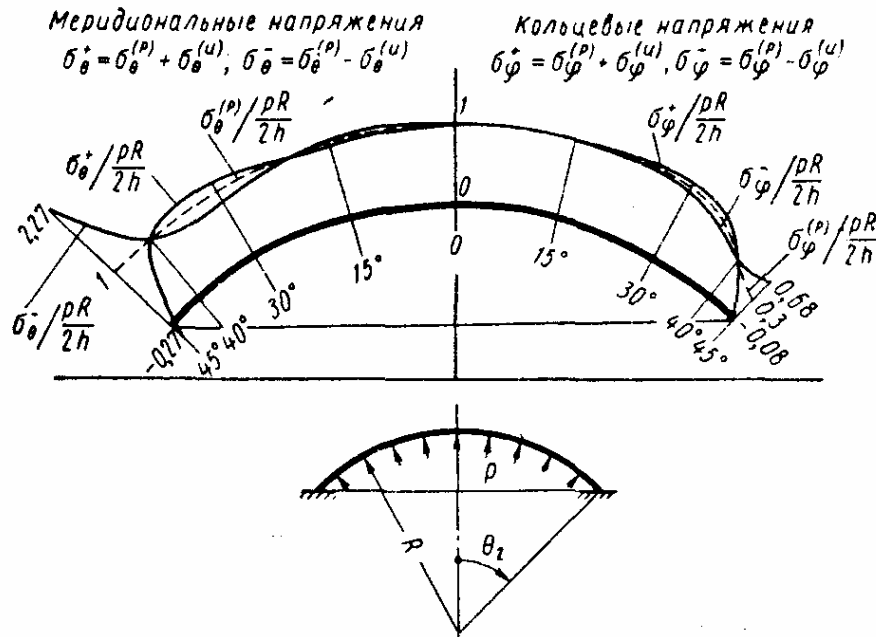


Рис. 12

По формулам (37) и (38) определяя  $a_x$  из условия  $u_x(\theta_2) = 0$ , находим

$$u = 0; \quad w = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} [1 - (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}];$$

$$\vartheta = \sqrt{\frac{4}{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}} (1-\nu) \frac{pR}{Eh} \sin \beta e^{-\beta}.$$

Крышка, шарнирно опертая по краю (рис. 13).

В рассматриваемом случае  $M_\theta = M_\theta(\theta_2) = 0$ ;  $u_\theta = u_r(\theta_2) = 0$  и система уравнений (32) записывается в виде

$$\frac{1-\nu}{2} \sin \theta_2 \frac{pR^2}{Eh} + \alpha_{11} (Q_0 - Q_0^*) = 0;$$

$$\alpha_{12} (Q_0 - Q_0^*) = \vartheta_0.$$

Из первого уравнения, используя формулы (35) и (37), получаем

$$\sigma_{M_\theta} = 0; \quad \sigma_K = -(1-\nu) \frac{pR}{2h};$$

$$\sigma_{\theta}^{(u)} = \left\{ \frac{3(1-\nu)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sin \beta e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_{\varphi}^{(u)} = \nu \sigma_{\theta}^{(u)};$$

$$\sigma_{\varphi}^{(p)} = \left\{ 1 - (1-\nu) \cos \beta e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_{\theta}^{(p)} = \frac{pR}{2h}.$$

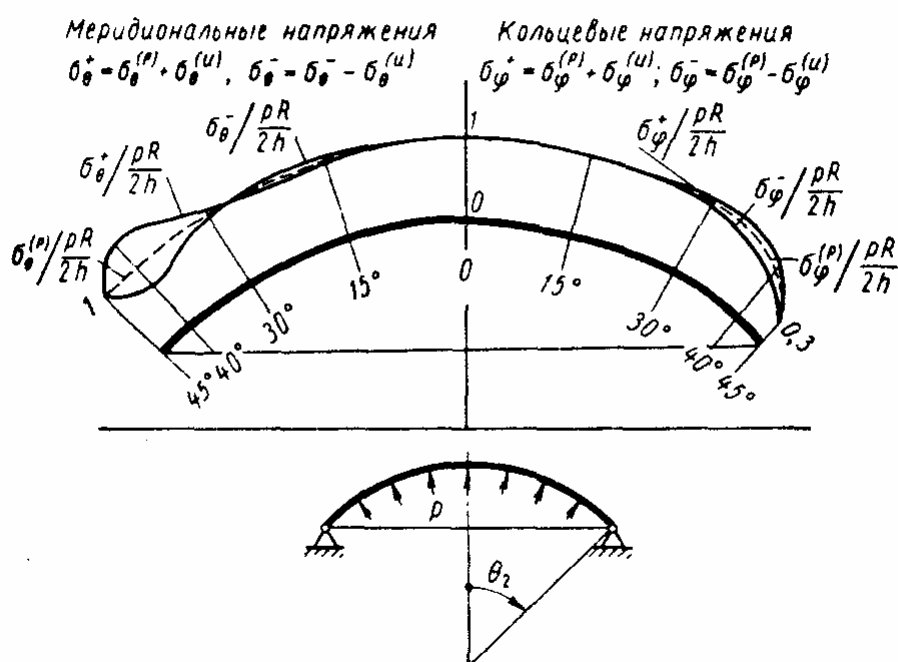


Рис. 13

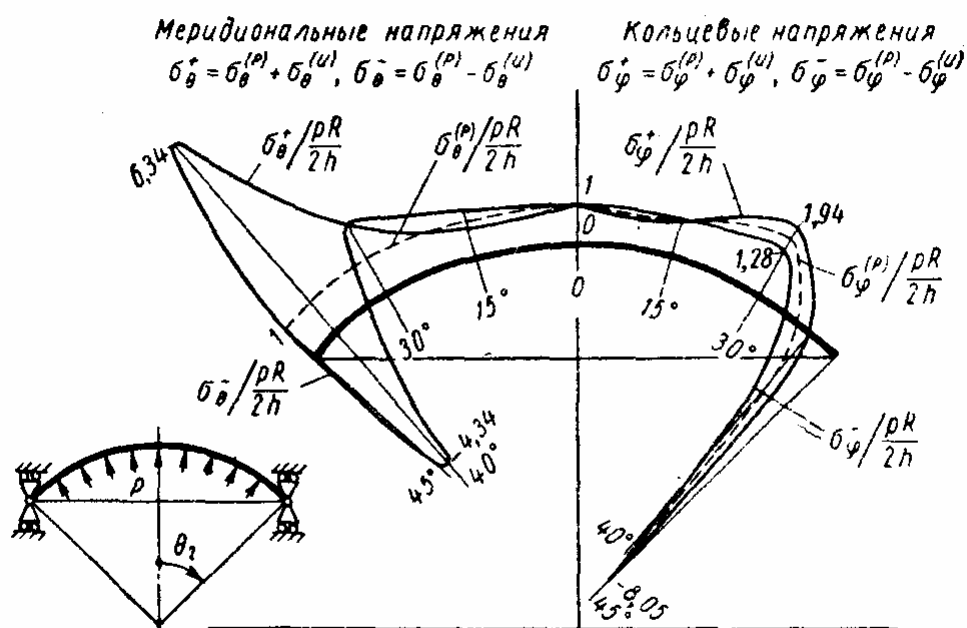


Рис. 14

Эпюры напряжений для случая  $\theta_2 = 45^\circ$ ;  $\frac{R}{h} = 50$ ;  $\nu = 0,3$  показаны на рис. 13. По формулам (37) и (38), определяя  $a_x$  из условия  $u_x(\theta_2) = 0$ , находим

$$u = 0; w = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} (1 - \cos \beta e^{-\beta});$$

$$\vartheta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{1-\nu}{2} \frac{pR}{Eh} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}.$$

Крышка, свободно опертая по краю (рис. 14).

Из граничных условий  $M_0 = M_\theta(\theta_2) = 0$ ;  $Q_0 = Q_r(\theta_2) = 0$ , используя формулы (35), (36) и (33), находим

$$\sigma_{M_0} = 0; \sigma_k = -\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \sin 2\theta_2 \frac{pR}{2h};$$

$$\sigma_\theta^u = \left\{ \frac{3}{4\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{R}{h}} \sin 2\theta_2 \sin \beta e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{2h}; \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_\theta^{(u)};$$

$$\sigma_\varphi^{(p)} = \left\{ 1 - \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \sin 2\theta_2 \cos \beta e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{2h}, \sigma_\theta^{(p)} = \frac{pR}{2h}.$$

По формулам (37) и (38), определяя  $a_x$  из условия  $u_x(\theta_2) = 0$ , находим

$$u = \frac{pR^2}{2Eh} \left[ (1-\nu) - \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \sin 2\theta_2 \right] \cos \theta_2 \sin \theta;$$

$$w = \frac{pR^2}{2Eh} \left[ (1-\nu)(1 - \cos \theta_2 \cos \theta) + \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \times \right.$$

$$\left. \times \sin 2\theta_2 (\cos \theta_2 \cos \theta - \cos \beta e^{-\beta}) \right];$$

$$\vartheta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sin 2\theta_2 \frac{pR^2}{2Eh^2} (\cos \beta +$$

$$+ \sin \beta) e^{-\beta}.$$

Эпюры напряжений при  $\theta_2 = 45^\circ$ ;  $\frac{R}{h} = 50$ ;  $\nu = 0,3$  показаны на рис. 14.

Сопоставление рис. 12–14 показывает, что при надлежаще закреплённом крае напряжения краевого эффекта являются величинами того же порядка, что и безмоментные. При свободном крае дополнительные напряжения могут значительно превышать основные — безмоментные (см. работу [20] стр. 269).

**Пример 5.** Сферические оболочки с жестким центром. Оболочка с малым жестким центром (рис. 15), нагруженная равномерным давлением.

Частное решение можно принять в виде (15)–(16). На краю  $\theta_0 = \theta_1$  имеют место условия жесткого края  $u_0 = u_r(\theta_1) = 0$ ;  $\vartheta_0 = \vartheta(\theta_1) = 0$ . Пусть  $R = 154$  см;  $h = 4,76$  см;  $\theta_1 = 6^\circ$ ;  $p = 4,2$  дан/см<sup>2</sup>. По формулам (73), (74) и табл. 1 подсчитываем коэффициенты податливости

$$x_0 = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \theta_1 = 1,09;$$

$$\ker x_0 = 0,229; \ker' x_0 = -0,596;$$

$$\ker x_0 = -0,464; \ker' x_0 = 0,345;$$

$$a_{11} = -7,15 \frac{1}{E}; a_{12} = -6,5 \frac{1}{Eh}; a_{22} = -32 \frac{1}{Eh^2}.$$

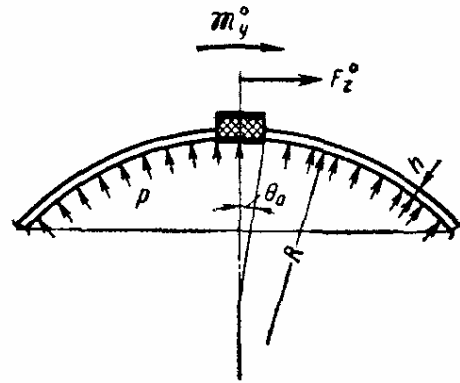


Рис. 15



Разрешая теперь систему (32) при краевых условиях задачи, получаем из соотношений (36)

$$\sigma_{M_0} = -33,8 \text{ дан/см}^2, \quad \sigma_k = 41,5 \text{ дан/см}^2.$$

Подсчитанные по формулам (75) эпюры напряжений показаны на рис. 16. Максимальные напряжения возникают на внутренней поверхности в месте заделки:  $\bar{\sigma}_1 = 134 \text{ дан/см}^2$ .

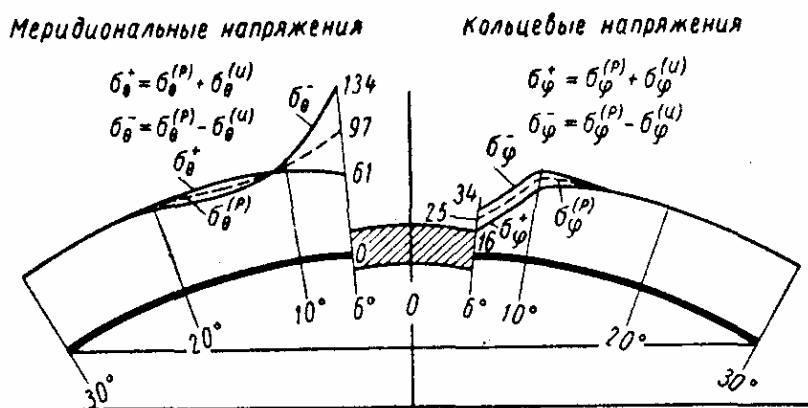


Рис. 16

Представление о напряженном состоянии в рассматриваемой оболочке дают следующие формулы:

$$\sigma_{\theta}^{(p)} = l_2 \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_{\varphi}^{(p)} = \nu \sigma_{\theta}^{(p)}; \quad \sigma_{\theta}^{(u)} = l_3 \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_{\varphi}^{(u)} = \nu \sigma_{\theta}^{(u)},$$

определяющие величины напряжений в месте соединения оболочки с жестким центром. Коэффициенты  $l_2, l_3$  при различных значениях тонкостенности  $\left(\frac{R}{h}\right)$  и угла  $\theta^0$  даны в табл. 2. Там же даются значения коэффициентов  $l_0, l_1$  в формулах

$$\sigma_{\varphi}^{(p)} = l_1 \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_{\varphi}^{(u)} = l_0 \frac{pR}{2h}.$$

## 2. Значения коэффициентов $l_0-l_3$

$\frac{R}{h}$	$\theta^0$	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
20	5	0,717	2,35	1,45	—0,337
	10	1,130	3,10	1,36	—0,602
	15	1,340	4,02	1,29	—0,764
	30	1,530	7,42	1,17	—1,005
	45	1,610	12,20	1,11	—1,120
	60	1,650	20,56	1,07	—1,200
50	5	0,994	2,75	1,39	—0,506
	10	1,330	4,14	1,28	—0,776
	15	1,460	5,72	1,21	—0,917
	30	1,580	11,24	1,12	—1,097
	45	1,630	18,87	1,07	—1,180
	60	1,660	32,14	1,04	—1,230

Продолжение табл. 2

$\frac{R}{h}$	$\theta^\circ$	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
100	5	1,180	3,29	1,34	—0,644
	10	1,430	5,40	1,22	—0,895
	15	1,520	7,68	1,16	—1,008
	30	1,610	15,57	1,08	—1,150
	45	1,640	26,40	1,05	—1,200
	60	1,660	45,20	1,03	—1,240
200	5	1,330	4,12	1,28	—0,776
	10	1,510	7,22	1,17	—0,990
	15	1,570	10,50	1,12	—1,079
	30	1,620	21,70	1,06	—1,180
	45	1,640	37,00	1,04	—1,220
	60	1,660	63,60	1,02	—1,250
500	5	1,400	5,88	1,21	—0,925
	10	1,570	10,90	1,12	—1,085
	15	1,600	16,10	1,08	—1,150
	30	1,640	33,90	1,04	—1,210
	45	1,650	58,20	1,02	—1,240
	60	1,660	100,20	1,01	—1,260

определяющих кольцевые и изгибные напряжения на краю сферической оболочки с малым неподкрепленным отверстием.

Оболочка с малым жестким центром нагружена приложенными к жесткому центру изгибающим моментом  $M_y^0 = 155\,000$  дан·см и сдвигающей силой  $F_z^0 = 4200$  дан (рис. 8 и 15).

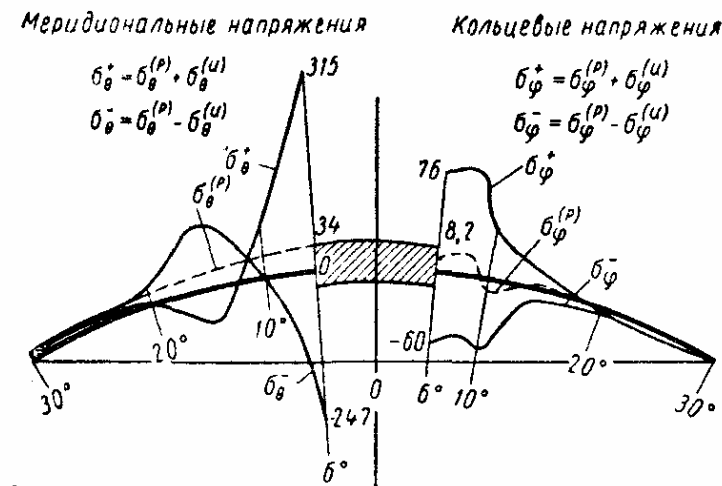


Рис. 17

Используя соотношения (77)—(80), (67) и (71), получаем эпюры напряжений, показанные на рис. 17.

Из этого следует, что при удалении от края в оболочке довольно быстро устанавливается безмоментное напряженное состояние. На другом краю

оболочки безмоментные напряжения следует дополнить решением краевого эффекта в зависимости от конкретных граничных условий на этом краю ( $\theta_0 = \theta_2$ ) точно так, как это было сделано в примере 4. Так как в рассмотренных примерах оболочка предполагалась достаточно длинной, оба края ее могут быть рассмотрены независимо.

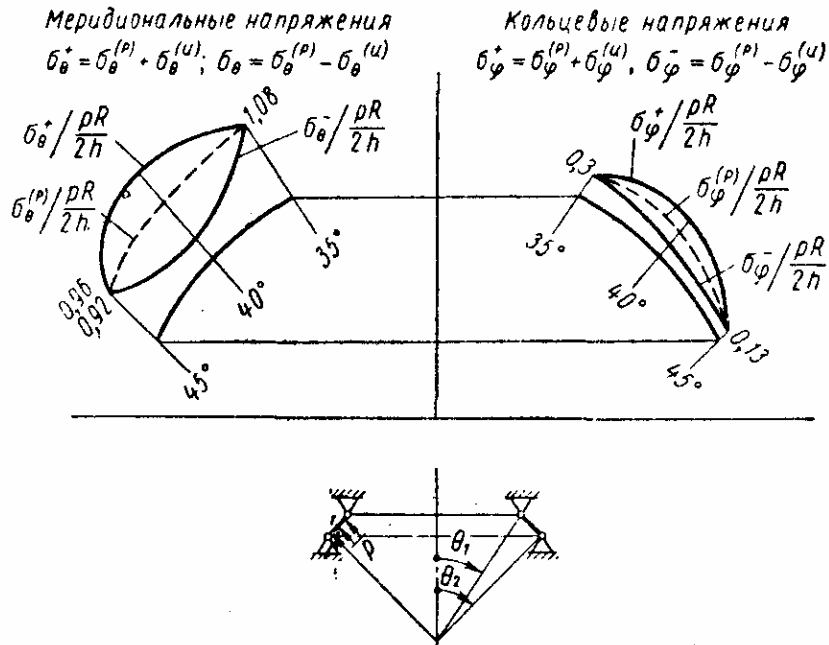


Рис. 18

**Пример 6.** Короткая сферическая оболочка под действием равномерного давления.

Пусть короткий сферический пояс (рис. 18) шарнирно оперт по краям, причем  $\theta_1 = 35^\circ$ ;  $\theta_2 = 45^\circ$ ;  $\frac{R}{h} = 50$ ;  $\nu = 0.3$ . Граничным условиям рассматриваемой задачи

$$M_\theta(\theta_1) = 0; \quad M_\theta(\theta_2) = 0;$$

$$u_r(\theta_1) = 0; \quad u_r(\theta_2) = 0$$

отвечает случай, показанный на рис. 8, г гл. 21 [формулы (74)–(75)]. Эпюры напряжений, полученные с помощью формул (26) и (75) гл. 21, приведены на рис. 18.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1964.
2. Ватсон Т. Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
3. Векуа И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. Тбилиси, Мецниреба, 1965.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения к технике. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
5. Геккелер И. В. Статика упругого тела. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., ГИТТЛ, 1953.
7. Григорьев Л. Я. Судовые сосуды, работающие под давлением (определение напряжений и деформаций). Л., «Судостроение», 1965.
8. Канторович З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. М., Машгиз, 1960.
9. Круглякова В. И. Оболочки вращения с малым центральным отверстием под действием симметричной и антисимметричной нагрузок. В сб. «Исследование по упругости и пластичности». Изд. ЛГУ, 4, 1965.
10. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., ГИТТЛ, 1947.

## *Литература*

---

11. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
12. Носова Л. Н. Таблицы функций Томсона и их первых производных. М., Изд. АН СССР, 1960.
13. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М., Машгиз, 1958.
14. Розенберг Л. Б., Беспалько Л. А. Концентрация напряжений в сферическом днище около кругового отверстия. ДАН СССР, № 2, 1959.
15. Соколов Ф. А. Сферическая оболочка под действием осесимметричной нагрузки. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1962.
16. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
17. Тимошенко С. П. Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
18. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М., Госстройиздат, 1961.
19. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Изд. ЛГУ, 1962.
20. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Изд. ЛГУ, 1964.
21. Шевляков Ю. А. Напряжения в сферическом днище, ослабленном круговым вырезом. Инж. сб., т. 24, 1956.
22. Ямке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.

## Глава 25

### РАСЧЕТ ТОРООБРАЗНЫХ ОБОЛОЧЕК \*

Рассмотрим тонкие торообразные оболочки кругового сечения постоянной толщины (замкнутые по  $\varphi$ ), находящиеся под действием плавных осесимметричных и обратносимметричных внешних нагрузок и температур. При рассмотрении общих случаев исходные зависимости можно получить из соотношений гл. 21, если в них положить (рис. 1)

$$R_\theta = b = \alpha a; \quad R_\varphi = \frac{a + b \sin \theta}{\sin \theta} = a \frac{1 + \alpha \sin \theta}{\sin \theta}, \quad (1)$$

где  $\alpha = \frac{b}{a}$ .

Приведенные в главе зависимости получены методом асимптотического интегрирования и справедливы при следующем (ориентировочном) условии:

$$\lambda^3 > 5 \div 6, \quad (2)$$

где

$$\lambda = \sqrt[6]{12(1 - \nu^2)} (\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}; \quad \beta = \frac{b}{h}. \quad (3)$$

Это условие может быть нарушено либо вследствие малости величины  $\alpha = \frac{b}{a}$ , либо недостаточно большой величины  $\beta = \frac{b}{h}$  (толстая оболочка). В первом случае следует использовать метод рядов [7, 15, 17]. Толстые торообразные оболочки рассмотрены в работе [8].

Если какая-либо из величин, характеризующих геометрию оболочки, внешнюю нагрузку (температуру) и упругие (термоупругие) свойства, претерпевает скачок на параллельных кругах  $\theta = \text{const}$ , то торообразную оболочку следует разбить на части, и решения для каждой из таких частей упруго сопрягают по упомянутым параллельным кругам. Вопросы, связанные с упругим сопряжением частей торообразных оболочек как между собой, так и с другими соосными оболочками вращения и упругими кольцами рассмотрены в гл. 1 т. II, в частности, там приведены упрощенные формулы для прикидочного расчета сильфонов. Расчету сильфонов посвящены работы [6, 13, 18—26].

---

\* Написано при участии В. А. Шаминой.

Если толщина оболочки плавно меняется по  $\theta$  и не зависит от  $\varphi$ , можно использовать приведенные ниже формулы, заменяя при этом в соотношениях основного и термоупругого состояний постоянную  $h$  на текущее значение толщины  $h(\theta)$ , внося последнее под знак интеграла в выражениях для смещений. В соотношениях же краевого эффекта под  $h = h(\theta_0)$  следует понимать значение толщины на рассматриваемом краю.

Обзор литературы (до 1962 г.) по линейной теории торообразных оболочек дан в работе [17].

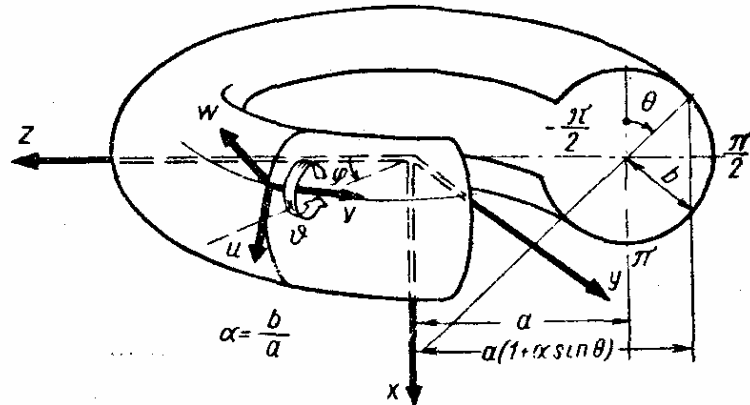


Рис. 1

Кроме приведенных в гл. 22, использованы следующие обозначения:  
 $a$  — радиус круговой оси тора в см;  
 $b$  — радиус меридионального сечения тора в см;  
 $u_r = u \cos \theta + w \sin \theta$ ;  $u_x = u \sin \theta - w \cos \theta$  — горизонтальное и вертикальное смещения (рис. 4);

$N_\theta$ ,  $N_\varphi$ ,  $T$ ,  $Q_\theta$  — соответственно нормальные, сдвигающее и перерезывающее усилия (рис. 2) в дан/см;

$Q_r = N_\theta \cos \theta + Q_\theta \sin \theta$ ;  $Q_x = N_\theta \sin \theta - Q_\theta \cos \theta$  — горизонтальное и вертикальное усилия (рис. 4);

$M_\theta$ ,  $M_\varphi$ ,  $H$  — изгибающие и скручивающий моменты (рис. 2) в дан·см/см;

$\sigma_\theta^{(p)} = \frac{N_\theta}{h}$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}^{(p)} = \frac{T}{h}$ ;  $\sigma_\varphi^{(p)} = \frac{N_\varphi}{h}$  — тангенциальные (цепные, мембранные) напряжения оболочки (рис. 3) в дан/см<sup>2</sup>;

$\sigma_\theta^{(u)} = \frac{6M_\theta}{h^2}$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}^{(u)} = \frac{6H}{h^2}$ ;  $\sigma_\varphi^{(u)} = \frac{6M_\varphi}{h^2}$  — изгибные напряжения;  
 $\sigma_\theta^+ = \sigma_\theta^{(p)} + \sigma_\theta^{(u)}$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}^+ = \sigma_{\theta\varphi}^{(p)} + \sigma_{\theta\varphi}^{(u)}$ ;  $\sigma_\varphi^+ = \sigma_\varphi^{(p)} + \sigma_\varphi^{(u)}$  — напряжения в наружном слое оболочки (рис. 3);

$\sigma_\theta^- = \sigma_\theta^{(p)} - \sigma_\theta^{(u)}$ ;  $\sigma_{\theta\varphi}^- = \sigma_{\theta\varphi}^{(p)} - \sigma_{\theta\varphi}^{(u)}$ ;  $\sigma_\varphi^- = \sigma_\varphi^{(p)} - \sigma_\varphi^{(u)}$  — напряжения во внутреннем слое оболочки;

$F_x^0$ ,  $F_z^0$  — составляющие главного вектора усилий, приложенных к краю оболочки  $\theta = \theta_1$  (рис. 4 и 7), в дан;

$M_x^0$ ,  $M_y^0$  — составляющие главного момента усилий и момента, приложенных к краю оболочки  $\theta = \theta_1$  (с точкой приведения в центре круга  $\theta = \theta_1$ ) в дан·см (рис. 6 и 7);

$q_\theta, q_\varphi, q_n$  — составляющие поверхностной нагрузки (рис. 2) в  $\text{дан/см}^2$ ;

$\alpha_T$  — коэффициент линейного (температурного) расширения в  $1/\text{град}$ .

Участки торообразной оболочки, примыкающие к параллельным кругам  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  (рис. 1), по своей работе напоминают кольцевые пластины и не могут безмоментным образом воспринимать несамоуравновешенные нагрузки, например осевую силу. В окрест-

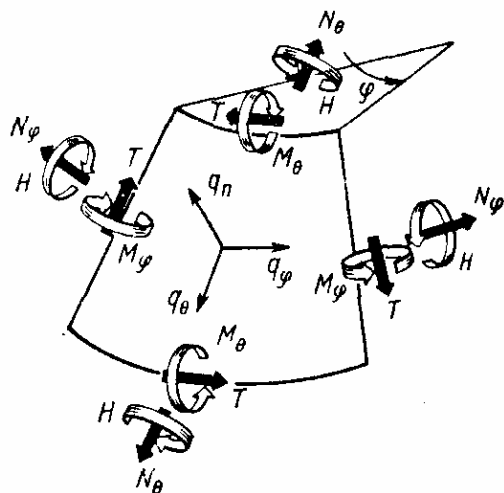


Рис. 2

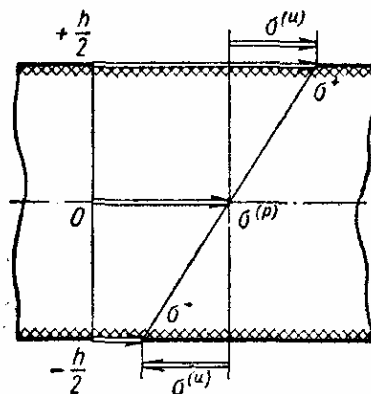


Рис. 3

ностях этих линий, примерно  $-20^\circ < \theta < 20^\circ$ ,  $160^\circ < \theta < 200^\circ$ , возникает сложное моментное напряженное состояние, для описания которого приходится привлекать более сложный, чем обычно, математический аппарат [14, 16, 17, 18].

### ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ

Напряженно-деформированное состояние удобно разбить на сумму *основного* напряженного состояния, отвечающего поверхностной и не-

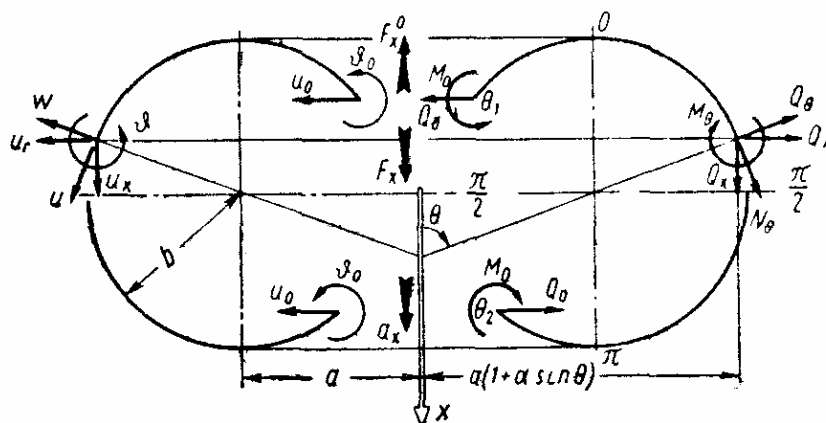


Рис. 4

самоуравновешенной краевой нагрузке (относящиеся к нему величины помечены значком \*), термоупругого (значок  $T$ ), отвечающего темпера-

турным воздействиям, и *краевого эффекта* (значок  $\kappa$ ). При этом (рис. 4)

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= N_\theta^* + N_\theta^r; & N_\varphi &= N_\varphi^* + N_\varphi^r + N_\varphi^\kappa; \\ M_\theta &= M_\theta^* + M_\theta^r + M_\theta^\kappa; & M_\varphi &= M_\varphi^* + M_\varphi^r + M_\varphi^\kappa; \\ Q_r &= Q_r^* + Q_r^r + Q_r^\kappa; & \vartheta &= \vartheta^* + \vartheta^r + \vartheta^\kappa; \\ u_r &= u_r^* + u_r^r + u_r^\kappa; & u_x &= u_x^* + u_x^r + u_x^\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**Основное состояние.** В случаях, когда оболочка *не содержит* окрестностей линий  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  (см. стр. 778),

$$\left. \begin{aligned} N_\theta^* &= \frac{b \int_{\theta_1}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_\theta \sin \theta) (1 + \alpha \sin \theta) d\theta}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)} + \\ &+ \frac{F_x^0}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)}; \\ N_\varphi^* &= \frac{a (1 + \alpha \sin \theta)}{\sin \theta} q_n - \\ &- \frac{a \int_{\theta_1}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_\theta \sin \theta) (1 + \alpha \sin \theta) d\theta}{\sin^2 \theta} - \frac{F_x^0}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\alpha \sin^2 \theta}; \\ Q_r^* &= N_\theta^* \cos \theta; & M_\theta^* &= M_\varphi^* = 0; \\ \vartheta^* &= 0; & u_r^* &= \frac{a (1 + \alpha \sin \theta)}{Eh} (N_\varphi^* - \nu N_\theta^*); \\ u_x^* &= a_x + \frac{b}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} (N_\theta^* - \nu N_\varphi^*) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В частности, для *равномерного нормального давления* ( $q_n = p = \text{const}$ ;  $q_\theta = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} N_\theta^* &= \frac{pb}{2} \left[ \frac{2 + \alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} - \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} \cdot \frac{2 + \alpha \sin \theta_1}{1 + \alpha \sin \theta_1} \right] + \\ &+ \frac{F_x^0}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$



$$\left. \begin{aligned}
 N_{\varphi}^* &= \frac{pb}{2} \left[ 1 + \frac{\sin \theta_1}{\alpha} \cdot \frac{2 + \alpha \sin \theta_1}{\sin^2 \theta} \right] - \frac{F_x^0}{2\pi b} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta}; \\
 Q_r^* &= N_{\theta}^* \cos \theta; \quad M_{\theta}^* = M_{\varphi}^* = 0; \\
 \psi^* &= 0; \quad u_r^* = \frac{a(1 + \alpha \sin \theta)}{Eh} (N_{\varphi}^* - \nu N_{\theta}^*); \\
 u_x^* &= a_x + \frac{b}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} (N_{\theta}^* - \nu N_{\varphi}^*) \sin \theta d\theta.
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если оболочка содержит часть окрестности  $-20^\circ \leq \theta \leq 20^\circ$ , то формулы (5)–(6) следует заменить такими:

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\theta}^* &= \frac{b \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_{\theta} \sin \theta) (1 + \alpha \sin \theta) d\theta}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)} + \\
 &\quad + \frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{1}{(1 + \alpha \sin \theta) \sin \theta} - \\
 &\quad - \frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{\varphi(\theta) \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \left\{ \lambda m E [-\lambda \omega(\theta)] + \frac{1}{\omega(\theta)} \right\}; \\
 N_{\varphi}^* &= \frac{a(1 + \alpha \sin \theta)}{\sin \theta} q_n - \\
 &\quad - \frac{a \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_{\theta} \sin \theta) (1 + \alpha \sin \theta) d\theta}{\sin^2 \theta} - \\
 &\quad - \frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\alpha \sin^2 \theta} - \frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\alpha} \times \\
 &\quad \times \left\{ -\lambda^2 \varphi(\theta) \omega'(\theta) / m E' [-\lambda \omega(\theta)] + \right. \\
 &\quad \quad + \lambda \varphi'(\theta) / m E [-\lambda \omega(\theta)] + \\
 &\quad \quad \left. + \frac{\varphi'(\theta)}{\omega(\theta)} - \frac{\varphi(\theta) \omega'(\theta)}{\omega^2(\theta)} \right\}; \\
 M_{\theta}^* &= \frac{1}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} \cdot \frac{Ph\lambda^2}{2\pi b} [\varphi(\theta) \omega'(\theta)] Re E' [-\lambda \omega(\theta)];
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi}^* &= \nu M_{\theta}^*; \\
 Q_r^* &= N_{\theta}^* \cos \theta - \frac{P\lambda \sin^2 \theta}{2\pi a (1 + \alpha \sin \theta)} \varphi(\theta) \times \\
 &\quad \times \left[ \operatorname{Im} E[-\lambda \omega(\theta)] + \frac{1}{\lambda \omega(\theta)} \right]; \\
 \theta^* &= -\sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{P\lambda}{2\pi E h^2} \varphi(\theta) \operatorname{Re} E[-\lambda \omega(\theta)]; \\
 u_r^* &= \frac{a(1 + \alpha \sin \theta)}{Eh} (N_{\varphi}^* - \nu N_{\theta}^*); \\
 u_x^* &= a_x + \frac{b}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} (N_{\theta}^* - \nu N_{\varphi}^*) \sin \theta d\theta.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь возможны три случая, показанные на рис. 5:

а)  $\theta_0 = 0$  и  $P$  — осевая сила, действующая в сечении  $\theta = 0$ , если оболочка содержит линию  $\theta = 0$  (рис. 5, а); при этом имеет место зависимость

$$\begin{aligned}
 P &= F_x^0 - 2\pi ab \int_0^{\theta_1} (q_n \cos \theta - \\
 &\quad - q_{\theta} \sin \theta) (1 + \alpha \sin \theta) d\theta; \tag{8}
 \end{aligned}$$

б)  $\theta_0 = \theta_1$ ;  $P = F_x^0$  (рис. 5, б);

в)  $\theta_0 = \theta_2$ ;  $P = F_x$  (рис. 5, в).

В двух последних случаях

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_x^0 + 2\pi ab \int_{\theta_1}^{\theta_2} (q_n \cos \theta - \\
 &\quad - q_{\theta} \sin \theta) (1 + \alpha \sin \theta) d\theta. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Значения функций  $\varphi(\theta)$ ,  $\omega(\theta)$ ,  $\omega'(\theta)$ ,  $[\varphi(\theta) \omega'(\theta)]$  приведены в табл. 1—4.

Значения функций  $\operatorname{Re} E(y)$ ,  $\operatorname{Im} E(y)$ ,  $\operatorname{Re} E'(y)$ ,  $\operatorname{Im} E'(y)$  для положительного аргумента даны

в табл. 5. При  $y < 0$  необходимо использовать следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{Re} E(-y) &= \operatorname{Re} E(y); & \operatorname{Re} E'(-y) &= -\operatorname{Re} E'(y); \\
 \operatorname{Im} E(-y) &= -\operatorname{Im} E(y); & \operatorname{Im} E'(-y) &= \operatorname{Im} E'(y).
 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

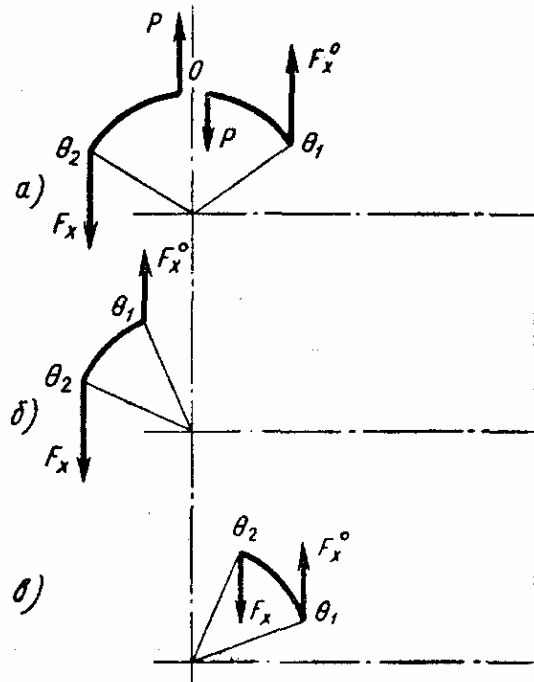


Рис. 5

$$1. \text{ Значения функции } \varphi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(\theta)(1 + \alpha \sin \theta)}}$$

$\theta^\circ$	$\alpha$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
90	1,1025	1,0704	1,0417	1,0160	0,9928	0,9714
80	1,0782	1,0452	1,0200	0,9953	0,9730	0,9526
70	1,0581	1,0295	1,0037	0,9806	0,9593	0,9399
60	1,0418	1,0158	0,9922	0,9709	0,9513	0,9332
50	1,0285	1,0057	0,9848	0,9658	0,9481	0,9317
40	1,0179	0,9990	0,9814	0,9650	0,9498	0,9354
30	1,0099	0,9952	0,9814	0,9682	0,9559	0,9441
20	1,0044	0,9942	0,9846	0,9752	0,9663	0,9577
10	1,0013	0,9960	0,9909	0,9859	0,9812	0,9764
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
—10	1,0013	1,0064	1,0119	1,0175	1,0229	1,0288
—20	1,0044	1,0150	1,0258	1,0377	1,0496	1,0625
—30	1,0099	1,0266	1,0426	1,0606	1,0798	1,1010
—40	1,0179	1,0384	1,0612	1,0856	1,1128	1,1435
—50	1,0285	1,0534	1,0815	1,1126	1,1481	1,1888
—60	1,0418	1,0708	1,1036	1,1409	1,1843	1,2358
—70	1,0581	1,0909	1,1278	1,1703	1,2208	1,2817
—80	1,0782	1,1133	1,1539	1,2003	1,2568	1,3257
—90	1,1025	1,1395	1,1818	1,2315	1,2912	1,3659

$$2. \text{ Значения функции } \omega(\theta, \alpha) = \operatorname{sign} \theta \left[ \frac{3}{2} \int_0^{|\theta|} \sqrt{\frac{|\sin \theta|}{1 + \alpha \sin \theta}} d|\theta| \right]^{\frac{2}{3}}$$

$\theta^\circ$	$\alpha$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
90	1,4780	1,4440	1,4130	1,3850	1,3600	1,3360
80	1,3310	1,3020	1,2760	1,2520	1,2300	1,2100
70	1,1780	1,1550	1,1330	1,1140	1,0950	1,0780
60	1,0200	1,0020	0,9847	0,9691	0,9546	0,9411
50	0,8568	0,8436	0,8311	0,8196	0,8087	0,7984
40	0,6900	0,6812	0,6728	0,6649	0,6575	0,6503
30	0,5202	0,5150	0,5101	0,5054	0,5009	0,4965
20	0,3481	0,3457	0,3434	0,3411	0,3390	0,3369
10	0,1744	0,1738	0,1732	0,1726	0,1721	0,1715
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
—10	—0,1744	—0,1750	—0,1756	—0,1763	—0,1769	—0,1776
—20	—0,3481	—0,3505	—0,3531	—0,3558	—0,3585	—0,3613
—30	—0,5202	—0,5257	—0,5317	—0,5375	—0,5437	—0,5507
—40	—0,6900	—0,6997	—0,7100	—0,7208	—0,7323	—0,7454
—50	—0,8568	—0,8714	—0,8873	—0,9042	—0,9230	—0,9440
—60	—1,0200	—1,0400	—1,0620	—1,0870	—1,1140	—1,1450
—70	—1,1780	—1,2050	—1,2340	—1,2660	—1,3030	—1,3460
—80	—1,3310	—1,3640	—1,4020	—1,4410	—1,4880	—1,5450
—90	—1,4780	—1,5170	—1,5600	—1,6100	—1,6670	—1,7390

3. Значения функции  $\omega'(\theta, \alpha) = \sqrt{\frac{\sin \theta}{(1 + \alpha \sin \theta) \omega(\theta; \alpha)}}$

$\theta^\circ$	$\alpha$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
90	0,8226	0,7934	0,7680	0,7453	0,7247	0,7064
80	0,8602	0,8298	0,8030	0,7792	0,7579	0,7385
70	0,8932	0,8624	0,8356	0,8112	0,7898	0,7701
60	0,9214	0,8918	0,8658	0,8422	0,8208	0,8014
50	0,9456	0,9181	0,8940	0,8718	0,8515	0,8329
40	0,9652	0,9416	0,9201	0,9003	0,8819	0,8649
30	0,9804	0,9616	0,9440	0,9275	0,9120	0,8976
20	0,9912	0,9781	0,9655	0,9536	0,9421	0,9311
10	0,9975	0,9910	0,9844	0,9779	0,9713	0,9652
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
—10	0,9975	1,0047	1,0120	1,0190	1,0270	1,0346
—20	0,9912	1,0051	1,0200	1,0350	1,0510	1,0686
—30	0,9804	1,0006	1,0220	1,0460	1,0720	1,1000
—40	0,9652	0,9909	1,0190	1,0510	1,0870	1,1270
—50	0,9456	0,9758	1,0096	1,0490	1,0940	1,1470
—60	0,9214	0,9548	0,9931	1,0380	1,0910	1,1550
—70	0,8932	0,9276	0,9684	1,0170	1,0750	1,1480
—80	0,8602	0,8949	0,9352	0,9849	1,0449	1,1210
—90	0,8226	0,8558	0,8951	0,9420	0,9999	1,0720

4. Значения функции  $\varphi(\theta) \omega'(\theta)$

$\theta^\circ$	$\alpha$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
90	0,9069	0,8492	0,8000	0,7572	0,7195	0,6862
80	0,9275	0,8709	0,8191	0,7755	0,7374	0,7035
70	0,9451	0,8878	0,8387	0,7955	0,7576	0,7238
60	0,9599	0,9059	0,8590	0,8177	0,7808	0,7479
50	0,9725	0,9236	0,8804	0,8420	0,8073	0,7760
40	0,9825	0,9406	0,9030	0,8688	0,8376	0,8090
30	0,9901	0,9570	0,9264	0,8980	0,8718	0,8474
20	0,9956	0,9724	0,9506	0,9300	0,9104	0,8917
10	0,9988	0,9869	0,9754	0,9641	0,9530	0,9424
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
—10	0,9988	1,0111	1,0240	1,0368	1,0505	1,0644
—20	0,9956	1,0202	1,0463	1,0740	1,1035	1,1354
—30	0,9901	1,0272	1,0655	1,1094	1,1575	1,2111
—40	0,9825	1,0290	1,0814	1,1410	1,2096	1,2887
—50	0,9725	1,0279	1,0919	1,1671	1,2560	1,3636
—60	0,9599	1,0224	1,0960	1,1842	1,2921	1,4273
—70	0,9451	1,0119	1,0922	1,1902	1,3124	1,4714
—80	0,9275	0,9963	1,0791	1,1822	1,3132	1,4861
—90	0,9069	0,9752	1,0578	1,1601	1,2911	1,4642

5. Значения функций  $ReE(y)$ ,  $ReE'(y)$ ,  $ImE(y)$ ,  $ImE'(y)$ 

$y$	$ReE(y)$	$ReE'(y)$	$ImE(y)$	$ImE'(y)$
0,00	-1,288	0,000	0,000	0,939
0,05	-1,287	0,050	0,047	0,937
0,10	-1,283	0,100	0,094	0,932
0,15	-1,277	0,149	0,140	0,924
0,20	-1,268	0,197	0,186	0,913
0,25	-1,257	0,245	0,231	0,899
0,30	-1,244	0,292	0,276	0,882
0,35	-1,228	0,337	0,320	0,862
0,40	-1,210	0,380	0,362	0,839
0,45	-1,190	0,422	0,403	0,813
0,50	-1,168	0,462	0,443	0,785
0,55	-1,144	0,500	0,482	0,755
0,60	-1,118	0,535	0,519	0,723
0,65	-1,090	0,568	0,554	0,683
0,70	-1,061	0,599	0,588	0,652
0,75	-1,030	0,627	0,619	0,614
0,80	-0,998	0,652	0,649	0,574
0,85	-0,965	0,675	0,677	0,534
0,90	-0,931	0,695	0,702	0,493
0,95	-0,896	0,712	0,726	0,450
1,00	-0,860	0,726	0,747	0,407
1,05	-0,823	0,737	0,767	0,364
1,10	-0,786	0,745	0,784	0,321
1,15	-0,749	0,750	0,799	0,278
1,20	-0,711	0,753	0,812	0,235
1,25	-0,673	0,753	0,822	0,193
1,30	-0,636	0,750	0,830	0,151
1,35	-0,599	0,745	0,836	0,110
1,40	-0,562	0,737	0,841	0,070
1,45	-0,525	0,727	0,844	0,031
1,50	-0,489	0,715	0,846	-0,007
1,55	-0,454	0,700	0,845	-0,043
1,60	-0,419	0,683	0,842	-0,078
1,65	-0,385	0,664	0,837	-0,111
1,70	-0,352	0,644	0,831	-0,142
1,75	-0,320	0,623	0,823	-0,171
1,80	-0,290	0,601	0,814	-0,198
1,85	-0,261	0,578	0,804	-0,222
1,90	-0,232	0,554	0,793	-0,244
1,95	-0,204	0,529	0,780	-0,264
2,00	-0,178	0,503	0,766	-0,282
2,05	-0,153	0,476	0,751	-0,298
2,10	-0,130	0,449	0,736	-0,313
2,15	-0,108	0,421	0,720	-0,326
2,20	-0,088	0,394	0,703	-0,337
2,25	-0,069	0,366	0,686	-0,346
2,30	-0,051	0,339	0,669	-0,353
2,35	-0,035	0,312	0,651	-0,358
2,40	-0,020	0,286	0,639	-0,361
2,45	-0,006	0,260	0,615	-0,362
2,50	0,006	0,235	0,597	-0,362
2,55	0,017	0,211	0,579	-0,361
2,60	0,027	0,188	0,561	-0,358
2,65	0,036	0,165	0,543	-0,354
2,70	0,044	0,144	0,525	-0,349
2,75	0,050	0,123	0,508	-0,342
2,80	0,056	0,104	0,491	-0,335

Продолжение табл. 5

$y$	$ReE(y)$	$ReE'(y)$	$ImE(y)$	$ImE'(y)$
2,85	0,061	0,086	0,475	—0,327
2,90	0,065	0,069	0,459	—0,318
2,95	0,068	0,053	0,443	—0,308
3,00	0,070	0,038	0,428	—0,298
3,05	0,071	0,024	0,413	—0,287
3,10	0,072	0,011	0,399	—0,276
3,15	0,073	0,000	0,386	—0,264
3,20	0,073	—0,010	0,373	—0,253
3,25	0,072	—0,019	0,360	—0,241
3,30	0,071	—0,027	0,348	—0,230
3,35	0,069	—0,034	0,337	—0,218
3,40	0,067	—0,040	0,327	—0,206
3,45	0,065	—0,045	0,317	—0,195
3,50	0,063	—0,050	0,307	—0,184
3,55	0,060	—0,053	0,298	—0,173
3,60	0,058	—0,056	0,290	—0,163
3,65	0,056	—0,058	0,282	—0,152
3,70	0,053	—0,059	0,275	—0,142
3,75	0,050	—0,059	0,268	—0,132
3,80	0,047	—0,059	0,261	—0,123
3,85	0,044	—0,059	0,255	—0,114
3,96	0,041	—0,058	0,250	—0,106
3,90	0,038	—0,057	0,246	—0,098
4,00	0,035	—0,056	0,242	—0,090
4,05	0,032	—0,054	0,238	—0,083
4,10	0,029	—0,052	0,234	—0,077
4,15	0,027	—0,050	0,230	—0,071
4,20	0,024	—0,048	0,226	—0,066
4,25	0,022	—0,046	0,223	—0,061
4,30	0,020	—0,043	0,220	—0,057
4,35	0,018	—0,040	0,218	—0,053
4,40	0,016	—0,038	0,215	—0,049
4,45	0,014	—0,035	0,213	—0,046
4,50	0,012	—0,032	0,210	—0,043
4,55	0,011	—0,030	0,208	—0,040
4,60	0,009	—0,027	0,206	—0,038
4,65	0,008	—0,025	0,205	—0,036
4,70	0,007	—0,022	0,203	—0,034
4,75	0,006	—0,020	0,201	—0,033
4,80	0,005	—0,018	0,200	—0,031
4,85	0,004	—0,016	0,198	—0,030
4,90	0,003	—0,014	0,197	—0,029
4,95	0,003	—0,012	0,195	—0,029
5,00	0,002	—0,010	0,195	—0,028

В случае равномерного нормального давления

$$\begin{aligned}
 N_{\theta}^* &= \frac{pb}{2} \left[ \frac{2 + \alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} - \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \cdot \frac{2 + \alpha \sin \theta_0}{1 + \alpha \sin \theta} \right] + \\
 &+ \frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{1}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)} - \frac{P}{2\pi a} \cdot \frac{\varphi(\theta) \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \times \\
 &\times \left\{ \lambda m E [-\lambda \omega(\theta)] + \frac{1}{\omega(\theta)} \right\}; \\
 N_{\varphi}^* &= \frac{pb}{2} \left[ 1 + \frac{\sin \theta_0}{\alpha} \cdot \frac{2 + \alpha \sin \theta_0}{\sin^2 \theta} \right] - \frac{P}{2\pi b} \times \\
 &\times \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{P}{2\pi b} \left\{ -\lambda^2 \varphi(\theta) \omega'(\theta) \operatorname{Im} E' [-\lambda \omega(\theta)] + \right. \\
 &+ \lambda \varphi'(\theta) \operatorname{Im} E [-\lambda \omega(\theta)] + \frac{\varphi'(\theta)}{\omega(\theta)} - \frac{\varphi(\theta) \omega'(\theta)}{\omega^2(\theta)} \left. \right\}; \\
 M_{\theta}^* &= \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{Ph\lambda^2}{2\pi b} [\varphi(\theta) \omega'(\theta)] \times \\
 &\times \operatorname{Re} E' [-\lambda \omega(\theta)]; \quad M_{\varphi}^* = \nu M_{\theta}^*; \\
 Q_r^* &= N_{\theta}^* \cos \theta - \frac{P\lambda \sin^2 \theta}{2\pi a (1 + \alpha \sin \theta)} \varphi(\theta) \times \\
 &\times \left[ \operatorname{Im} E [-\lambda \omega(\theta)] + \frac{1}{\lambda \omega(\theta)} \right]; \\
 \theta^* &= -\sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{P\lambda}{2\pi E h^2} \varphi(\theta) \operatorname{Re} E [-\lambda \omega(\theta)]; \\
 u_r^* &= \frac{a(1 + \alpha \sin \theta)}{Eh} (N_{\varphi}^* - \nu N_{\theta}^*); \\
 u_x^* &= a_x + \frac{b}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} (N_{\theta}^* - \nu N_{\varphi}^*) \sin \theta d\theta.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Случай, когда оболочка содержит окрестность  $160^\circ < \theta < 200^\circ$ , могут быть рассмотрены с помощью приведенных выше формул, если переменить направление оси  $X$  (изменить направление отсчета угла  $\theta$ ). Если же торообразная оболочка содержит обе окрестности ( $-20^\circ < \theta < 20^\circ$  и  $160^\circ < \theta < 200^\circ$ ), то ее рассекают на две части плоскостью  $\theta = \frac{\pi}{2} \left( -\frac{\pi}{2} \right)$  и построенные для каждой части решения упруго сопрягают. Если при этом оболочка и нагрузка симметричны относительно плоскости сечения, то вместо условий упругого сопряжения используют условия симметрии (см. пример 2).

Термоупругое состояние. Основные зависимости:

$$\begin{aligned}
 N_0^r &= -\frac{Eh^2\lambda}{V\sqrt{12(1-\nu^2)}b} \cdot \frac{\cos\theta}{1+\alpha\sin\theta} \varphi(\theta) \operatorname{Re}E[-\lambda\omega(\theta)] C; \\
 N_\varphi^r &= \frac{Eh^2\lambda^2}{V\sqrt{12(1-\nu^2)}\alpha b} [\varphi(\theta)\omega'(\theta)] \operatorname{Re}E'[-\lambda\omega(\theta)] C; \\
 M_0^r &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1+\nu)\kappa_T + \frac{1}{b\alpha} \times \right. \\
 &\times \left[ -\frac{\cos\theta(1-\nu\alpha\sin\theta)}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} + \frac{1+\alpha\sin\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{d^2\varepsilon_T}{d\theta^2} \right] + \\
 &+ \frac{1}{b\alpha} \left[ \frac{[\varphi(\theta)\omega'(\theta)]}{\omega^2(\theta)} - \frac{\nu\alpha\cos\theta}{1+\alpha\sin\theta} \cdot \frac{\varphi(\theta)}{\omega(\theta)} + \right. \\
 &+ \lambda^2 [\varphi(\theta)\omega'(\theta)] \operatorname{Im}E'[-\lambda\omega(\theta)] - \\
 &\left. - \frac{\nu\alpha\cos\theta}{1+\alpha\sin\theta} \lambda\varphi(\theta) \operatorname{Im}E[-\lambda\omega(\theta)] \right] C \Big\}; \\
 M_\varphi^r &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1+\nu)\kappa_T + \frac{1}{b\alpha} \times \right. \\
 &\times \left[ -\frac{\cos\theta(\nu-\alpha\sin\theta)}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} + \nu \frac{1+\alpha\sin\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{d^2\varepsilon_T}{d\theta^2} \right] + \\
 &+ \frac{1}{b\alpha} \left[ \frac{\nu[\varphi(\theta)\omega'(\theta)]}{\omega^2(\theta)} - \frac{\alpha\cos\theta}{1+\alpha\sin\theta} \cdot \frac{\varphi(\theta)}{\omega(\theta)} + \right. \\
 &+ \nu\lambda^2 [\varphi(\theta)\omega'(\theta)] \operatorname{Im}E'[-\lambda\omega(\theta)] - \\
 &\left. - \frac{\alpha\cos\theta}{1+\alpha\sin\theta} \lambda\varphi(\theta) \operatorname{Im}E[-\lambda\omega(\theta)] \right] C \Big\}; \\
 Q_r^r &= -\frac{Eh^2\lambda}{bV\sqrt{12(1-\nu^2)}} C \cdot \operatorname{Re}E[-\lambda\omega(\theta)] \varphi(\theta) \frac{1}{1+\alpha\sin\theta}; \\
 \vartheta^r &= -\frac{1+\alpha\sin\theta}{\alpha\sin\theta} \cdot \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} + \\
 &+ \varphi(\theta) \left[ \frac{1}{\alpha\omega(\theta)} + \frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{Im}E[-\lambda\omega(\theta)] \right] C; \\
 u_r^r &= a(1+\alpha\sin\theta) \left\{ \varepsilon_T + \frac{[\varphi(\theta)\omega'(\theta)]}{\lambda} \operatorname{Re}E'[-\lambda\omega(\theta)] \right\} C; \\
 u_x^r &= b \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ \varepsilon_T \sin\theta + \left[ \frac{\lambda\cos\theta}{\alpha} \varphi(\theta) \operatorname{Im}E[-\lambda\omega(\theta)] \right] C \right\} d\theta,
 \end{aligned} \tag{12}$$

здесь в случае, если оболочка не содержит окрестности особых точек, следует полагать  $C = 0$ .



Если оболочка содержит окрестности особых точек, следует поступать так, как указано на стр. 781. Величину  $C$  при этом принимают для случаев, показанных на рис. 5:

рис. 5, а  $\left( \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} \right)_{\theta=0}$

рис. 5, б  $\left( \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_1}$

рис. 5, в  $\left( \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_2}$

Краевой эффект. Соотношения краевого эффекта имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_r^\kappa &= \frac{b\omega'(\theta)(1+\alpha\sin\theta)}{\lambda^2} \{ -A_1 \operatorname{Re} h_1' [-i\lambda\omega(\theta)] + \\ &+ B_1 \operatorname{Im} h_1' [-i\lambda\omega(\theta)] - A_2 \operatorname{Re} h_2' [-i\lambda\omega(\theta)] + \\ &+ B_2 \operatorname{Im} h_2' [-i\lambda\omega(\theta)] \}; \\ \theta^\kappa &= A_1 \operatorname{Re} h_1 [-i\lambda\omega(\theta)] - B_1 \operatorname{Im} h_1 [-i\lambda\omega(\theta)] + \\ &+ A_2 \operatorname{Re} h_2 [-i\lambda\omega(\theta)] - B_2 \operatorname{Im} h_2 [-i\lambda\omega(\theta)]; \\ M_\theta^\kappa &= \frac{Eh^3\lambda\omega'(\theta)}{12(1-\nu^2)b} \{ A_1 \operatorname{Im} h_1' [-i\lambda\omega(\theta)] + \\ &+ B_1 \operatorname{Re} h_1' [-i\lambda\omega(\theta)] + A_2 \operatorname{Im} h_2' [-i\lambda\omega(\theta)] + \\ &+ B_2 \operatorname{Re} h_2' [-i\lambda\omega(\theta)] \}; \\ Q_r^\kappa &= \frac{Eh^2}{V12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{a(1+\alpha\sin\theta)} \times \\ &\times \{ A_1 \operatorname{Im} h_1 [-i\lambda\omega(\theta)] + B_1 \operatorname{Re} h_1 [-i\lambda\omega(\theta)] + \\ &+ A_2 \operatorname{Im} h_2 [-i\lambda\omega(\theta)] + B_2 \operatorname{Re} h_2 [-i\lambda\omega(\theta)] \}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\theta^\kappa &\approx 0; \quad M_\varphi^\kappa = \nu M_\theta^\kappa; \quad N_\varphi^\kappa = \frac{Eh}{a(1+\alpha\sin\theta)} u_r^\kappa; \\ u_x^\kappa &= b \int_{\theta_1}^{\theta} \cos\theta \{ A_1 \operatorname{Re} h_1 [-i\lambda\omega(\theta)] - B_1 \operatorname{Im} h_1 \times \\ &\times [-i\lambda\omega(\theta)] + A_2 \operatorname{Re} h_2 [-i\lambda\omega(\theta)] - B_2 \operatorname{Im} h_2 [-i\lambda\omega(\theta)] \} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Помимо  $\omega(\theta)$  и  $\omega'(\theta)$  (см. табл. 2 и 3), сюда входят вещественные и мнимые части функций Эйри  $\operatorname{Re} h_1(iy)$ ,  $\operatorname{Im} h_1(iy)$ , ... и их производных  $\operatorname{Re} h_1'(iy)$ ,  $\operatorname{Im} h_1'(iy)$ , ... Их значения для  $y > 0$  приведены в табл. 6.

6. Значения функции Эйри  $h_1$ 

$y$	$Reh_1$	$Imh_1$	$Reh'_1$	$Imh'_1$
0	0,0000	—1,074	0,6783	0,3916
0,1	—0,0390	—1,007	0,6782	0,3865
0,2	—0,0770	—0,9388	0,6773	0,3719
0,3	—0,1131	—0,8711	0,6749	0,3494
0,4	—0,1466	—0,8039	0,6703	0,3201
0,5	—0,1770	—0,7372	0,6630	0,2855
0,6	—0,2036	—0,6714	0,6524	0,2468
0,7	—0,2262	—0,6068	0,6384	0,2053
0,8	—0,2446	—0,5438	0,6207	0,1623
0,9	—0,2587	—0,4828	0,5993	0,1187
1,0	—0,2684	—0,4241	0,5742	0,0757
1,1	—0,2738	—0,3681	0,5457	0,0342
1,2	—0,2753	—0,3150	0,5141	—0,0050
1,3	—0,2729	—0,2653	0,4798	—0,0412
1,4	—0,2672	—0,2192	0,4433	—0,0739
1,5	—0,2583	—0,1767	0,4052	—0,1025
1,6	—0,2468	—0,1381	0,3660	—0,1268
1,7	—0,2331	—0,1035	0,3264	—0,1466
1,8	—0,2176	—0,07285	0,2870	—0,1620
1,9	—0,2008	—0,04610	0,2483	—0,1729
2,0	—0,1832	—0,02316	0,2108	—0,1796
2,1	—0,1651	—0,00388	0,1751	—0,1823
2,2	—0,1468	0,01194	0,1416	—0,1813
2,3	—0,1289	0,02453	0,1106	—0,1772
2,4	—0,1115	0,03416	0,08241	—0,1702
2,5	—0,09493	0,04111	0,05716	—0,1609
2,6	—0,07938	0,04569	0,03497	—0,1498
2,7	—0,06502	0,04821	0,01587	—0,1373
2,8	—0,05195	0,04897	—0,00017	—0,1239
2,9	—0,04025	0,04828	—0,01326	—0,1100
3,0	—0,02995	0,04641	—0,02358	—0,09605
3,1	—0,02103	0,04365	—0,03131	—0,08229
3,2	—0,01347	0,04023	—0,03670	—0,06907
3,3	—0,007192	0,03638	—0,04002	—0,05662
3,4	—0,002114	0,03228	—0,04154	—0,04512
3,5	0,001867	0,02812	—0,04155	—0,03470
3,6	0,004865	0,02401	—0,04033	—0,02546
3,7	0,006999	0,02008	—0,03814	—0,01742
3,8	0,008389	0,01641	—0,03523	—0,01059
3,9	0,009155	0,01305	—0,03183	—0,004929
4,0	0,009412	0,01005	—0,02815	—0,000379
4,1	0,009265	0,007429	—0,02436	0,003146
4,2	0,008813	0,005182	—0,02060	0,005748
4,3	0,008143	0,003305	—0,01699	0,007537
4,4	0,007329	0,001776	—0,01362	0,008629
4,5	0,006436	0,000571	—0,01055	0,009139
4,6	0,005517	—0,000346	—0,007836	0,009179
4,7	0,004613	—0,001009	—0,005482	0,008854
4,8	0,003755	—0,001454	—0,003498	0,008261
4,9	0,002967	—0,001720	—0,001872	0,007484
5,0	0,002261	—0,001840	—0,000582	0,006597
5,1	0,001649	—0,001847	0,000401	0,005663
5,2	0,001129	—0,001769	0,001112	0,004729
5,3	0,000702	—0,001632	0,001588	0,003834
5,4	0,000360	—0,001458	0,001868	0,003006
5,5	0,000098	—0,001263	0,001989	0,002264
5,6	—0,000096	—0,001064	0,001987	0,001618
5,7	—0,000229	—0,000870	0,001892	0,001072
5,8	—0,000313	—0,000688	0,001734	0,000625
5,9	—0,000358	—0,000524	0,001536	0,000272
6,0	—0,000371	—0,000381	0,001318	0,000004

7. Значения функции Эйри  $h_2$ 

$y$	$Reh_2$	$Imh_2$	$Reh'_2$	$Imh'_2$
0	0,0000	1,074	0,6783	-0,3916
0,1	0,0390	1,142	0,6784	-0,3860
0,2	0,0768	1,210	0,6793	-0,3683
0,3	0,1122	1,278	0,6817	-0,3372
0,4	0,1437	1,347	0,6862	-0,2912
0,5	0,1699	1,415	0,6933	-0,2290
0,6	0,1889	1,485	0,7033	-0,1492
0,7	0,1991	1,556	0,7159	-0,0503
0,8	0,1983	1,629	0,7309	0,0692
0,9	0,1845	1,702	0,7473	0,2108
1,0	0,1553	1,778	0,7635	0,3762
1,1	0,1084	1,885	0,7775	0,5670
1,2	0,0410	1,933	0,7862	0,7849
1,3	-0,0495	2,012	0,7859	1,032
1,4	-0,1663	2,090	0,7715	1,309
1,5	-0,3123	2,166	0,7371	1,617
1,6	-0,4908	2,237	0,6752	1,959
1,7	-0,7051	2,299	0,5768	2,333
1,8	-0,9585	2,350	0,4317	2,740
1,9	-1,254	2,384	0,2274	3,178
2,0	-1,595	2,393	-0,0499	3,644
2,1	-1,984	2,371	-0,4162	4,133
2,2	-2,422	2,307	-0,8893	4,637
2,3	-2,911	2,189	-1,489	5,144
2,4	-3,451	2,004	-2,236	5,628
2,5	-4,038	1,736	-3,153	6,098
2,6	-4,668	1,367	-4,262	6,496
2,7	-5,334	0,8764	-5,587	6,795
2,8	-6,022	0,2416	-7,149	6,952
2,9	-6,717	-0,5619	-8,965	6,910
3,0	-7,395	-1,560	-11,05	6,601
3,1	-8,026	-2,781	-13,40	5,944
3,2	-8,569	-4,250	-16,02	4,842
3,3	-8,976	-5,992	-18,87	3,184
3,4	-9,183	-8,031	-21,92	0,842
3,5	-9,117	-10,38	-25,09	-2,327
3,6	-8,685	-13,05	-28,26	-6,478
3,7	-7,783	-16,03	-31,28	-11,78
3,8	-6,286	-19,29	-33,94	-18,40
3,9	-4,054	-22,79	-35,95	-26,49
4,0	-0,933	-26,45	-36,97	-36,22
4,1	3,248	-30,14	-36,53	-47,68
4,2	8,664	-33,69	-34,10	-60,94
4,3	15,49	-36,87	-29,02	-75,96
4,4	23,91	-39,38	-20,50	-92,57
4,5	34,05	-40,83	-7,66	-110,5
4,6	46,03	-40,74	10,49	-129,1
4,7	59,87	-38,52	35,05	-147,6
4,8	75,51	-33,47	67,15	-164,8
4,9	92,74	-24,80	107,9	-179,1
5,0	111,16	-11,57	158,3	-188,3
5,1	130,1	7,22	219,3	-189,7
5,2	148,7	32,65	291,1	-179,7
5,3	165,6	65,81	373,8	-154,2
5,4	178,7	107,7	466,1	-108,1
5,5	186,3	159,3	566,0	-35,8
5,6	184,9	221,0	669,5	69,4
5,7	171,1	293,1	770,7	214,2
5,8	140,5	374,8	861,2	405,9
5,9	88,2	464,6	929,2	651,1
6,0	8,3	559,4	959,4	955,7

При  $y < 0$  следует пользоваться соотношениями

$$\left. \begin{aligned} Reh_1(-iy) &= Reh_2(iy); & Imh_1(-iy) &= -Imh_2(iy); \\ Reh_2(-iy) &= Reh_1(iy); & Imh_2(-iy) &= -Imh_1(iy); \\ Reh'_1(-iy) &= Reh'_2(iy); & Imh'_1(-iy) &= -Imh'_2(iy); \\ Reh'_2(-iy) &= Reh'_1(iy); & Imh'_2(-iy) &= -Imh'_1(iy). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Произвольные постоянные  $A_1, B_1, A_2, B_2$  определяются при удовлетворении граничным условиям на краях  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ .

Торообразные оболочки можно делить на *длинные*, для которых граничные условия на краях удовлетворяются независимо одно от другого, и *короткие*, не обладающие этим свойством.

Ориентировочным критерием, позволяющим считать оболочку длинной, является выполнение неравенств:

при 5%-ной погрешности расчета

$$|\omega(\theta_2) - \omega(\theta_1)| > \frac{4,0}{\lambda}; \quad (16)$$

при 10%-ной погрешности

$$|\omega(\theta_2) - \omega(\theta_1)| > \frac{3,0}{\lambda}. \quad (16a)$$

Для длинной оболочки на краю  $\theta = \theta_1$

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^r + \alpha_{11}(Q_0 - Q_0^* - Q_0^r) + \alpha_{12}(M_0 - M_0^* - M_0^r); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^* + \vartheta_0^r + \alpha_{12}(Q_0 - Q_0^* - Q_0^r) + \alpha_{22}(M_0 - M_0^* - M_0^r), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{a}{\alpha} \lambda \omega'_0 (1 + \alpha \sin \theta_1)^2 \frac{[Reh'_{10}]^2 + [Imh'_{10}]^2}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} \cdot \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{12} &= -\sqrt{12(1-\nu^2)} a (1 + \alpha \sin \theta_1) \times \\ &\quad \times \frac{Reh_{10}Reh'_{10} + Imh_{10}Imh'_{10}}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} \cdot \frac{1}{Eh^2}; \\ \alpha_{22} &= 12(1-\nu^2) \frac{b}{\lambda \omega'_0} \cdot \frac{[Reh_{10}]^2 + [Imh_{10}]^2}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} \cdot \frac{1}{Eh^3}; \\ \Delta &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{E^2h^4} (1 + \alpha \sin \theta)^2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_r(\theta_1); \quad \vartheta_0 = \vartheta(\theta_1); \quad Q_0 = Q_r(\theta_1); \quad M_0 = M_\theta(\theta_1); \dots \\ Reh_{10} &= Reh_1(-i\lambda\omega(\theta_1)); \dots; \\ Imh'_{10} &= Imh'_1(-i\lambda\omega(\theta_1)); \\ \omega'_0 &= \omega'(\theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Напряжения подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^{(u)} &= \sigma_\theta^{*(u)} + \sigma_\theta^r(u) + \sigma_{M_0} \frac{\omega'}{\omega_0} \frac{Reh_{10}Imh'_1 - Imh_{10}Reh'_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} + \\ &+ \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sigma_k \frac{\omega'}{\omega_0} \cdot \frac{Imh'_{10}Reh'_1 - Reh'_{10}Imh'_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}}; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= \sigma_\varphi^{*(p)} + \sigma_\varphi^r(p) + \sigma_k \frac{\omega'}{\omega_0} \cdot \frac{Reh'_{10}Reh'_1 + Imh'_{10}Imh'_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} - \\ &- \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \frac{\omega'}{\omega_0} \cdot \frac{Reh_{10}Reh'_1 + Imh_{10}Imh'_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}}; \\ \sigma_\theta^{(p)} &= \sigma_\theta^{*(p)}, \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \sigma_\varphi^{*(u)} + \sigma_\varphi^r(u) + \nu(\sigma_\theta^{(u)} - \sigma_\theta^{*(u)} - \sigma_\theta^r(u)), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^* - M_0^r)}{h^2}; \\ \sigma_k &= \frac{\lambda\omega'_0}{\alpha} (1 + \alpha \sin \theta_1) \frac{Q_0 - Q_0^* - Q_0^r}{h}; \\ Reh_1 &= Reh_1(-i\lambda\omega(\theta)), \dots, Imh'_1 = \\ &= Imh'_1(-i\lambda\omega(\theta)); \\ \sigma_\theta^{*(p)} &= \frac{N_\theta^*}{h}; \quad \sigma_\varphi^{*(p)} = \frac{N_\varphi^*}{h}; \\ \sigma_\varphi^r(p) &= \frac{N_\varphi^r}{h}, \quad \sigma_\varphi^r(u) = \frac{6M_\varphi^r}{h^2}; \quad \sigma_\theta^r(u) = \frac{6M_\theta^r}{h^2}; \\ \sigma_\theta^{*(u)} &= \frac{6M_\theta^*}{h^2}; \quad \sigma_\varphi^{*(u)} = \frac{6M_\varphi^*}{h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Смещения и углы поворота

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta &= \vartheta^* + \vartheta^r + \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh} \cdot \frac{b}{\lambda\omega_0} \left[ \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \times \right. \\
 &\quad \times \sigma_{M_0} \frac{Reh_{10}Reh_1 + Imh_{10}Imh_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} - \\
 &\quad \left. - \sigma_k \frac{Reh'_{10}Reh_1 + Imh'_{10}Imh_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} \right]; \\
 u_r &= u_r^* + u_r^r + \frac{a(1+\alpha \sin \theta)}{E} \cdot \frac{\omega'}{\omega_0} \left\{ - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
 &\quad \times \frac{Reh_{10}Reh'_1 + Imh_{10}Imh'_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} + \sigma_k \frac{Reh'_{10}Reh'_1 + Imh'_{10}Imh'_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} \Big\}; \\
 u_x &= u_x^* + u_x^r + \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh} \cdot \frac{b^2}{\lambda\omega_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \cos \theta \left\{ \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} \times \right. \\
 &\quad \times \frac{Reh_{10}Reh_1 + Imh_{10}Imh_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} - \sigma_k \frac{Reh'_{10}Reh_1 + Imh'_{10}Imh_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} \Big\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

При статических граничных условиях непосредственно задают  $Q_0$  и  $M_0$ , при геометрических — задают  $u_0$  и  $\vartheta_0$ , а  $Q_0$  и  $M_0$  определяют при решении системы (17).

Если рассматривают край  $\theta = \theta_2$ , то в приведенных выше соотношениях необходимо заменить  $\theta_1$  на  $\theta_2$ , а  $h_1$  на  $h_2$ .

### ОСЕССИММЕТРИЧНОЕ КРУЧЕНИЕ

При осесимметричном кручении (рис. 6) в оболочке имеет место безмоментное напряженное состояние, описываемое следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned}
 T(\theta) &= - \frac{\frac{1}{2\pi a^2} \mathfrak{M}_x^0 + b \int_{\theta_1}^{\theta} (1 + \alpha \sin \theta)^2 q_{\varphi} d\theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2}; \\
 v(\theta) &= a(1 + \alpha \sin \theta) \left\{ \frac{2(1 + \nu)\alpha}{Eh} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{T d\theta}{1 + \alpha \sin \theta} - \Omega_x \right\}; \\
 [\mathfrak{M}_x^0 &= -2\pi a^2 (1 + \alpha \sin \theta_1)^2 T(\theta_1)]; \\
 \sigma_{\varphi} &= \sigma_{\varphi}^{(p)} = \frac{T}{h}.
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

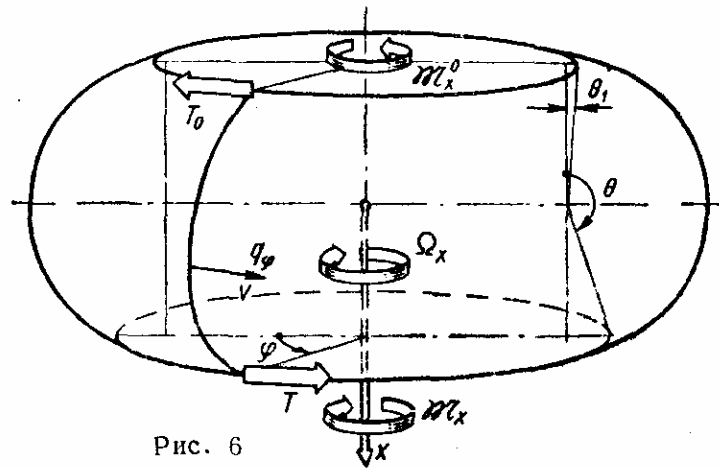


Рис. 6

### ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

В обратносимметричном (антисимметричном, ветровом) случае искомые и заданные величины имеют следующую зависимость от угла  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_{r,1} \cos \varphi; & u_x &= u_{x,1} \cos \varphi; & v &= v_1 \sin \varphi; & \vartheta &= \vartheta_1 \cos \varphi; \\ N_\theta &= N_{\theta,1} \cos \varphi; & N_\varphi &= N_{\varphi,1} \cos \varphi; & T &= T_1 \sin \varphi; & M_\theta &= \\ & & & & & & = M_{\theta,1} \cos \varphi; \\ M_\varphi &= M_{\varphi,1} \cos \varphi; & H &= H_1 \sin \varphi; & Q_r &= Q_{r,1} \cos \varphi; \\ q_\theta &= q_{\theta,1} \cos \varphi; & q_\varphi &= q_{\varphi,1} \sin \varphi; & q_n &= q_{n,1} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Напряженно-деформированное состояние разбиваем на *основное* (величины со значком \*), *термоупругое* (значок  $T$ ) и *краевой эффект* (значок  $\kappa$ ). При этом

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta,1} &= N_{\theta,1}^*; & N_{\varphi,1} &= N_{\varphi,1}^* + N_{\varphi,1}^T + N_{\varphi,1}^\kappa; & T_1 &= T_1^*; \\ M_{\theta,1} &= M_{\theta,1}^* + M_{\theta,1}^T + M_{\theta,1}^\kappa; & M_{\varphi,1} &= M_{\varphi,1}^* + M_{\varphi,1}^T + \\ & & & + M_{\varphi,1}^\kappa; & H_1 &= H_1^T; \\ Q_{r,1} &= Q_{r,1}^* + Q_{r,1}^T + Q_{r,1}^\kappa; & \vartheta_1 &= \vartheta_1^* + \vartheta_1^T + \vartheta_1^\kappa; \\ u_{r,1} &= u_{r,1}^* + u_{r,1}^T + u_{r,1}^\kappa; \\ u_{x,1} &= u_{x,1}^* + u_{x,1}^T + u_{x,1}^\kappa; & v_1 &= v_1^* + v_1^T + v_1^\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

**Основное состояние.** Ограничимся рассмотрением наиболее важного в расчетной практике случая, когда поверхностная нагрузка отсутствует, а краевая может давать в сечении  $\theta_1$  главный вектор  $F_z^0$  и главный момент  $\mathfrak{M}_y^0$  (рис. 7).

При этом главный момент и главный вектор в произвольном сечении  $\theta$  определяются соотношениями

$$F_z = F_z^0; \quad \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_y^0 - b (\cos \theta - \cos \theta_1) F_z^0. \quad (26)$$

В случаях, когда момент  $M_y$  и сила  $F_z$  направлены под произвольным углом, оболочку можно рассчитать по приводимым ниже формулам путем поворота осей и наложением решений (см. гл. 1 т. II).

Так же как и в симметричном случае, следует различать два варианта: когда оболочка не содержит окрестностей  $-20^\circ < \theta < 20^\circ$  и  $160^\circ < \theta < 200^\circ$  и когда содержит их полностью или частично.

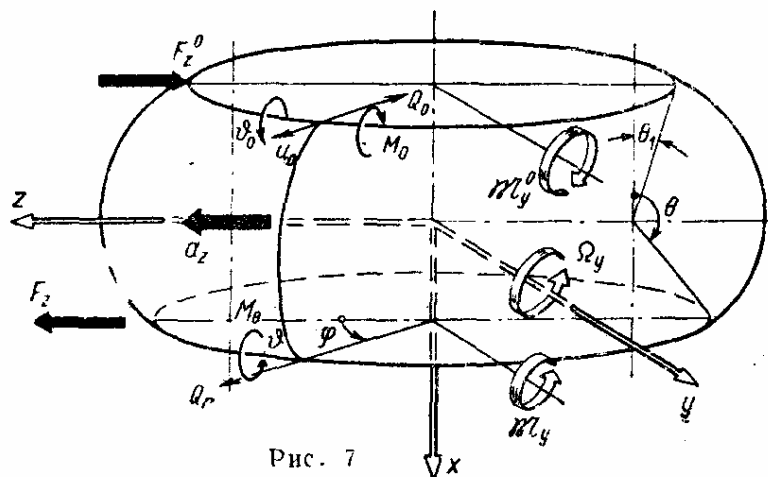


Рис. 7

Если оболочка не содержит указанные окрестности, применяют формулы

$$\begin{aligned}
N_{\theta, 1}^* &= \frac{1}{\pi a^2 (1 + \alpha \sin \theta)^2 \sin \theta} [\mathfrak{M}_y^0 + F_z^0 b (\cos \theta_1 - \cos \theta)]; \\
N_{\varphi, 1}^* &= -\frac{1}{\pi a b (1 + \alpha \sin \theta) \sin^2 \theta} [\mathfrak{M}_y^0 + F_z^0 b (\cos \theta_1 - \cos \theta)]; \\
T_1^* &= \frac{1}{\pi a b (1 + \alpha \sin \theta)^2 \sin \theta} \{ \mathfrak{M}_y^0 \alpha \cos \theta - \\
&\quad - F_z^0 b [\sin \theta + \alpha (1 - \cos \theta \cos \theta_1)] \}; \\
M_{\theta, 1}^* &= M_{\varphi, 1}^* = H_1^* = 0; \\
Q_{r, 1}^* &= \frac{1}{\pi a^2} \cdot \frac{\mathfrak{M}_y^0 - F_z^0 b (\cos \theta - \cos \theta_1)}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)^2} \cos \theta; \\
\vartheta_1^* &= \frac{u_{x, 1}^*}{a (1 + \alpha \sin \theta)}; \\
u_{x, 1}^* &= \frac{a (1 + \alpha \sin \theta)}{E h} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \times \\
&\quad \times (N_{\theta, 1}^* - \nu N_{\varphi, 1}^*) d\theta + \Omega_y a (1 + \alpha \sin \theta); \\
u_{r, 1}^* &= b \int_{\theta}^{\theta_1} \left[ \frac{N_{\theta, 1}^* - \nu N_{\varphi, 1}^*}{E h} \cos \theta - \frac{u_{x, 1}^* \sin \theta}{a (1 + \alpha \sin \theta)} \right] d\theta + a_z.
\end{aligned}
\tag{27}$$



Если оболочка содержит окрестность  $-20^\circ < \theta < 20^\circ$  (см. стр. 778), то

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi, 1}^* &= -\frac{1}{\pi ab} \left\{ \frac{\mathfrak{M}_y^0 - bF_z^0 (\cos \theta - \cos \theta_1)}{\sin^2 \theta (1 + \alpha \sin \theta)} - \right. \\
 &\quad - [\mathfrak{M}_y^0 - bF_z^0 (1 - \cos \theta_1)] \varphi(\theta) \omega'(\theta) \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{\omega^2} + \lambda^2 ImE'(-\lambda \omega(\theta)) \right] \Bigg\}; \\
 N_{\theta, 1}^* &= \frac{1}{\pi a^2} \left\{ \frac{\mathfrak{M}_y^0 - bF_z^0 (\cos \theta - \cos \theta_1)}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)^2} - \right. \\
 &\quad - [\mathfrak{M}_y^0 - bF_z^0 (1 + \cos \theta_1)] \frac{\varphi(\theta) \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{\omega(\theta)} + \lambda ImE(-\lambda \omega(\theta)) \right] \Bigg\}; \\
 T_1^* &= \frac{1}{\pi ab} \left\{ \mathfrak{M}_y^0 \frac{\alpha \cos \theta}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)^2} - F_z^0 b \times \right. \\
 &\quad \times \frac{\sin \theta + \alpha (1 - \cos \theta \cos \theta_1)}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)^2} - [\mathfrak{M}_y^0 - bF_z^0 (1 - \cos \theta_1)] \times \\
 &\quad \times \frac{\alpha \varphi(\theta)}{1 + \alpha \sin \theta} \left[ \frac{1}{\omega(\theta)} + \lambda ImE(-\lambda \omega(\theta)) \right] \Bigg\}; \\
 M_{\theta, 1}^* &= \frac{\alpha}{a\pi\lambda} [\mathfrak{M}_y^0 - bF_z^0 (1 - \cos \theta_1)] \times \\
 &\quad \times \varphi(\theta) \omega'(\theta) ReE'[-\lambda \omega(\theta)]; \\
 M_{\varphi, 1}^* &\approx \nu M_{\theta, 1}^*; \quad H_1^* = 0; \\
 Q_{r, 1}^* &= \frac{1}{a^2 \pi} \left\{ \frac{\mathfrak{M}_y^0 - bF_z^0 (\cos \theta - \cos \theta_1)}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)^2} \cos \theta - \right. \\
 &\quad - [\mathfrak{M}_y^0 - bF_z^0 (1 - \cos \theta_1)] \frac{\varphi(\theta)}{1 + \alpha \sin \theta} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{\omega(\theta)} + \lambda ImE(-\lambda \omega(\theta)) \right] \Bigg\};
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1^* &= -\frac{\lambda \sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi a E h^2} \{ \mathfrak{M}_y^0 - b(1 + \cos \theta_1) F_z^0 \} \times \\
&\quad \times \varphi(\theta) \operatorname{Re} E [-\lambda \omega(\theta)] + \Omega_y; \\
u_{r,1}^* &= -\frac{\alpha \lambda \sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi E h^2} \{ \mathfrak{M}_y^0 - b(1 - \cos \theta_1) F_1^0 \} \times \\
&\quad \times \left[ \alpha \cos \theta \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\cos \theta \varphi(\theta) \operatorname{Re} E [-\lambda \omega(\theta)]}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{(\sin \theta + \alpha) \varphi(\theta) \operatorname{Re} E [-\lambda \omega(\theta)]}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta \right] + \\
&\quad + b \cos \theta \Omega_y + a_z; \\
u_{x,1}^* &= -\frac{\alpha \lambda \sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi E h^2} \{ \mathfrak{M}_y^0 - b(1 - \cos \theta_1) F_z^0 \} \times \\
&\quad \times (1 + \alpha \sin \theta) \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\cos \theta \varphi(\theta) \operatorname{Re} E (-\lambda \omega(\theta))}{1 + \alpha \sin \theta} \times \\
&\quad \times d\theta + a(1 + \alpha \sin \theta) \Omega_y; \\
v_1^* &\approx -u_{r,1}^*.
\end{aligned} \tag{28}$$

В обратносимметричном случае ту же роль, что и  $\vartheta$  в симметричном, играет упругий поворот края

$$\chi = \vartheta_1 - \frac{u_{x,1}}{a(1 + \alpha \sin \theta)}, \tag{29}$$

представляющий собой полный поворот  $\vartheta_1$  (в осевой плоскости  $\varphi=0$ ) за вычетом поворота поперечного сечения ( $\theta = \text{const}$ ) как жесткого целого на угол  $\frac{u_{x,1}}{a(1 + \alpha \sin \theta)}$  [см. формулу (92) гл. 21]. Аналогично, ту же роль, что и  $u_r$  в симметричном случае, играет величина

$$a(1 + \alpha \sin \theta) \gamma = v_1 + u_{r,1}. \tag{30}$$

Обе величины являются деформационными (см. гл. 22), не изменяющимися при перемещении оболочки, как жесткого целого.

Для основного напряженного состояния

$$\left. \begin{aligned} \chi^* &= -\frac{\lambda \sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi a E h^2} \left\{ \mathfrak{M}_y^0 - b(1 + \cos \theta_1) F_z^0 \right\} \varphi(\theta) \times \\ &\quad \times \operatorname{Re} E[-\lambda \omega(\theta)]; \\ a(1 + \alpha \sin \theta) \gamma^* &= \frac{\lambda^2}{\pi b E h} \left\{ \mathfrak{M}_x^0 - b(1 - \cos \theta_1) F_z^0 \right\} \times \\ &\quad \times [\varphi(\theta) \omega'(\theta)] \operatorname{Im} E'[-\lambda \omega(\theta)] (1 - \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Значения функций, входящих в выписанные соотношения, приведены в табл. 1—5 [см. также зависимости (10)].

Термоупругое состояние. Основные зависимости

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi, 1}^T &= -\frac{E h^2 \lambda^2}{b \alpha \sqrt{12(1-\nu^2)}} [\varphi(\theta) \omega'(\theta)] \operatorname{Re} E'[-\lambda \omega(\theta)] C; \\ N_{\theta, 1}^T &= T_1^T = 0; \quad H_1^T \approx 0; \\ M_{\theta, 1}^T &= -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1 + \nu) \kappa_T + \frac{1}{\alpha b} \left[ \frac{1 + \alpha \sin \theta}{\sin \theta} \times \right. \right. \\ &\quad \times \frac{d^2 \varepsilon_T}{d\theta^2} - \frac{\cos \theta (1 - \nu \alpha \sin \theta)}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} + \\ &\quad \left. \left. + \alpha \left( 1 + \frac{(1 - \nu \alpha \sin \theta) \cos^2 \theta}{(1 + \alpha \sin \theta) \sin^2 \theta} \right) \varepsilon_T \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha b} \left[ -[\varphi(\theta) \omega'(\theta)] \left( \frac{1}{\omega^2(\theta)} + \lambda^2 \operatorname{Im} E'[-\lambda \omega(\theta)] \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + \nu) \varphi(\theta) \left( \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \cdot \frac{1}{\omega(\theta)} + \alpha \operatorname{Im} E[-\lambda \omega(\theta)] \right) \right] \right\} C; \\ M_{\varphi, 1}^T &= -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1 + \nu) \kappa_T + \frac{1}{\alpha b} \left[ \nu \frac{(1 + \alpha \sin \theta)}{\sin \theta} \times \right. \right. \\ &\quad \times \frac{d^2 \varepsilon_T}{d\theta^2} - \frac{\cos \theta (\nu - \alpha \sin \theta)}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{d\varepsilon_T}{d\theta} + \\ &\quad \left. \left. + \alpha \left( \nu + \frac{(\nu - \alpha \sin \theta) \cos^2 \theta}{(1 + \alpha \sin \theta) \sin^2 \theta} \right) \varepsilon_T \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha b} \left[ -\nu [\varphi(\theta) \omega'(\theta)] \left( \frac{1}{\omega^2} + \lambda^2 \operatorname{Im} E'[-\lambda \omega(\theta)] \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + \nu) \varphi(\theta) \left( \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \cdot \frac{1}{\omega(\theta)} + \lambda \operatorname{Im} E[-\lambda \omega(\theta)] \right) \right] \right\} C; \\ Q_{r, 1}^T &= \frac{E h^2 \lambda}{b \sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{\varphi(\theta) \operatorname{Re} E(-\lambda \omega(\theta))}{1 + \alpha \sin \theta} C; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 \chi^r &= \operatorname{ctg} \theta \cdot \varepsilon_r - \frac{1 + \alpha \sin \theta}{\alpha \sin \theta} \cdot \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} - \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\varphi(\theta)}{\omega(\theta)} + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda \varphi(\theta) \operatorname{Im} E[-\lambda \omega(\theta)] \right] C; \\
 \gamma^r &= - \frac{h \lambda^2}{b \alpha \sqrt{12(1-\nu^2)}} [\varphi(\theta) \omega'(\theta)] \operatorname{Re} E'[-\lambda \omega(\theta)] C; \\
 u_{x,1}^r &= b(1 + \alpha \sin \theta) \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{1}{1 + \alpha \sin \theta} (\varepsilon_r \sin \theta + \chi^r \cos \theta) d\theta; \\
 u_{r,1}^r &= b \int_{\theta_1}^{\theta} \left\{ - \frac{\nu \cos \theta}{Eh} N_{\varphi,1}^r - \sin \theta \left( \chi^r + \frac{u_{x,1}^r}{a(1 + \alpha \sin \theta)} \right) \right\} d\theta; \\
 \theta_1^r &= \chi^r + \frac{u_{x,1}^r}{a(1 + \alpha \sin \theta)},
 \end{aligned} \tag{32}$$

здесь для оболочек, не содержащих окрестностей линий  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  (см. стр. 778), следует полагать  $C = 0$ .

Если оболочка содержит окрестность  $-20^\circ < \theta < 20^\circ$ , то величину  $C$  принимают:

для схемы на рис. 5, а

$$\left[ \alpha \varepsilon_r - \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} \right]_{\theta=0};$$

для схемы на рис. 5, б

$$\left[ \alpha \varepsilon_r - \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} \right]_{\theta=\theta_1};$$

для схемы на рис. 5, в

$$\left[ \alpha \varepsilon_r - \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} \right]_{\theta=\theta_2}.$$

Величины  $\varepsilon_r, \chi_r$  связаны, при линейном изменении температуры по толщине оболочки, с температурой на внешней поверхности оболочки  $T^+ = T_1^+ \cos \varphi$  и внутренней  $T^- = T_1^- \cos \varphi$  соотношениями

$$\varepsilon_r = \alpha_T \frac{T_1^+ + T_1^-}{2}; \quad \chi_r = \alpha_T \frac{T_1^+ - T_1^-}{h}. \tag{33}$$

Краевой эффект

$$\left. \begin{aligned} \gamma^\kappa &= \frac{\alpha \omega'(\theta)}{\lambda^2} \{ -A_1 \operatorname{Re} h_1' [-i\lambda \omega(\theta)] + B_1 \operatorname{Im} h_1' [-i\lambda \omega(\theta)] - \\ &\quad - A_2 \operatorname{Re} h_2' [-i\lambda \omega(\theta)] + B_2 \operatorname{Im} h_2' [-i\lambda \omega(\theta)] \}; \\ \chi^\kappa &= A_1 \operatorname{Re} h_1 [-i\lambda \omega(\theta)] - B_1 \operatorname{Im} h_1 [-i\lambda \omega(\theta)] + \\ &\quad + A_2 \operatorname{Re} h_2 [-i\lambda \omega(\theta)] - B_2 \operatorname{Im} h_2 [-i\lambda \omega(\theta)]; \\ \frac{M_{\theta,1}^\kappa}{D} &= \frac{\lambda \omega'(\theta)}{b} \{ A_1 \operatorname{Im} h_1' [-i\lambda \omega(\theta)] + B_1 \operatorname{Re} h_1' [-i\lambda \omega(\theta)] + \\ &\quad + A_2 \operatorname{Im} h_2' [-i\lambda \omega(\theta)] + B_2 \operatorname{Re} h_2' [-i\lambda \omega(\theta)] \}; \\ \frac{Q_{r,1}^\kappa}{D} &= \frac{\lambda^3}{b^2 (1 + \alpha \sin \theta)} \{ A_1 \operatorname{Im} h_1 [-i\lambda \omega(\theta)] + \\ &\quad + B_1 \operatorname{Re} h_1 [-i\lambda \omega(\theta)] + A_2 \operatorname{Im} h_2 [-i\lambda \omega(\theta)] + \\ &\quad + B_2 \operatorname{Re} h_2 [-i\lambda \omega(\theta)] \}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}.$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi,1}^\kappa &= E h \gamma^\kappa; \quad M_{\varphi,1}^\kappa = \nu M_{\theta,1}^\kappa; \quad \vartheta_1^\kappa = \chi^\kappa; \\ u_{x,1}^\kappa &= b (1 + \alpha \sin \theta) \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \chi^\kappa d\theta; \\ u_{r,1}^\kappa &= b \left\{ \alpha \cos \theta \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \chi^\kappa d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin \theta + \alpha}{1 + \alpha \sin \theta} \chi^\kappa d\theta \right\}; \\ v_1^\kappa &\approx -u_{r,1}^\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Входящие сюда вещественные и мнимые части функций Ханкеля  $h_1$ ,  $h_2$  и их производные  $h_1'$ ,  $h_2'$  подсчитывают с помощью табл. 4 и соотношений (15).

Произвольные постоянные  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  определяют при подчинении величин (25) граничным условиям на краях  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ .

Для длинных оболочек [см. критерий (16) и (16а)] на краю  $\theta = \theta_1$  справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0^* + u_0^T + \alpha_{11} (Q_0 - Q_0^* - Q_0^T) + \alpha_{12} (M_0 - M_0^* - M_0^T); \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0^* + \vartheta_0^T + \alpha_{12} (Q_0 - Q_0^* - Q_0^T) + \alpha_{22} (M_0 - M_0^* - M_0^T), \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где коэффициенты податливости  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{22}$  подсчитывают по формулам (18), другие величины находят из зависимостей

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= a(1 + \alpha \sin \theta_1) \gamma(\theta_1); \quad \vartheta_0 = \chi(\theta_1); \quad Q_0 = Q_{r,1}(\theta_1); \\ M_0 &= M_{\theta,1}(\theta_1), \dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(с различными знаками).

Полные напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta,1}^{(u)} &= \sigma_{\theta,1}^{*(u)} + \sigma_{\theta,1}^{\tau(u)} + \sigma_{M_0} \frac{\omega'}{\omega_0} \cdot \frac{Reh_{10} Imh'_1 - Imh_{10} Reh'_1}{Reh_{10} Imh'_{10} - Imh_{10} Reh'_{10}} + \\ &+ \frac{3}{V 3(1-v^2)} \sigma_k \frac{\omega'}{\omega_0} \cdot \frac{Imh'_{10} Reh'_1 - Reh'_{10} Imh'_1}{Reh_{10} Imh'_{10} - Imh_{10} Reh'_{10}}; \\ \sigma_{\varphi,1}^{(p)} &= \sigma_{\varphi,1}^{*(p)} + \sigma_{\varphi,1}^{\tau(p)} + \sigma_k \frac{\omega'}{\omega_0} \cdot \frac{Reh'_{10} Reh'_1 + Imh'_{10} Imh'_1}{Reh_{10} Imh'_{10} - Imh_{10} Reh'_{10}} - \\ &- \frac{V 3(1-v^2)}{3} \sigma_{M_0} \frac{\omega'}{\omega_0} \cdot \frac{Reh_{10} Reh'_1 + Imh_{10} Imh'_1}{Reh_{10} Imh'_{10} - Imh_{10} Reh'_{10}}; \\ \sigma_{\theta,1}^{(p)} &= \sigma_{\theta,1}^{*(p)}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{(p)} = \sigma_{\theta\varphi,1}^{*(p)}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{(u)} \approx 0; \\ \sigma_{\varphi,1}^{(u)} &= \sigma_{\varphi,1}^{*(u)} + \sigma_{\varphi,1}^{\tau(u)} + v(\sigma_{\theta,1}^{(u)} - \sigma_{\theta,1}^{*(u)} - \sigma_{\theta,1}^{\tau(u)}). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{6(M_0 - M_0^* - M_0^r)}{h^2}; \\ \sigma_k &= \frac{\lambda \omega_0}{\alpha} (1 + \alpha \sin \theta_1) \frac{Q_0 - Q_0^* - Q_0^r}{h}; \\ Reh_1 &= Reh_1[-i\lambda\omega(\theta)]; \dots; Imh'_1 = Imh'_1[-i\lambda\omega(\theta)]; \\ \omega' &= \omega'(\theta); \\ \sigma_{\theta,1}^{*(p)} &= \frac{N_{\theta,1}^*}{h}; \quad \sigma_{\varphi,1}^{*(p)} = \frac{N_{\varphi,1}^*}{h}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{*(p)} = \frac{T_1^*}{h}; \\ \sigma_{\theta,1}^{*(u)} &= \frac{6M_{\theta,1}^*}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi,1}^{*(u)} = \frac{6M_{\varphi,1}^*}{h^2}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{*(u)} = \frac{6H_1^*}{h^2}; \\ \sigma_{\theta,1}^{\tau(p)} &= \frac{N_{\theta,1}^r}{h}; \quad \sigma_{\varphi,1}^{\tau(p)} = \frac{N_{\varphi,1}^r}{h}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{\tau(p)} = \frac{T_1^r}{h}; \\ \sigma_{\theta,1}^{\tau(u)} &= \frac{6M_{\theta,1}^r}{h^2}; \quad \sigma_{\varphi,1}^{\tau(u)} = \frac{6M_{\varphi,1}^r}{h^2}; \quad \sigma_{\theta\varphi,1}^{\tau(u)} = \frac{6H_1^r}{h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Смещения и угол поворота

$$\left. \begin{aligned}
 u_{x,1} &= u_{x,1}^* + u_{x,1}^T + b(1 + \alpha \sin \theta) \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \chi^\kappa d\theta; \\
 u_{r,1} &= u_{r,1}^* + u_{r,1}^T + b \left\{ \alpha \cos \theta \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \chi^\kappa d\theta - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin \theta + \alpha}{1 + \alpha \sin \theta} \chi^\kappa d\theta \right\}; \\
 v_1 &= v_1^* + v_1^T + b \left\{ -\alpha \cos \theta \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\cos \theta \cdot \chi^\kappa}{1 + \alpha \sin \theta} d\theta - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin \theta + \alpha}{1 + \alpha \sin \theta} \chi^\kappa d\theta \right\}; \\
 \vartheta_1 &= \vartheta_1^* + \vartheta_1^T + \chi^\kappa.
 \end{aligned} \right\} (40)$$

где

$$\chi^\kappa = \frac{\lambda^2}{E\alpha\omega'_0} \left[ \frac{V3(1-\nu^2)}{3} \sigma_{M_0} \frac{Reh_{10}Reh_1 + Imh_{10}Imh_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} - \right. \\
 \left. - \sigma_\kappa \frac{Reh'_{10}Reh'_1 + Imh'_{10}Imh_1}{Reh_{10}Imh'_{10} - Imh_{10}Reh'_{10}} \right].$$

Если рассматривают край  $\theta = \theta_2$ , то в приведенных выше соотношениях необходимо заменить  $\theta_1$  на  $\theta_2$ , а  $h_1$  на  $h_2$ .

## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся в расчетной практике виды торообразных оболочек (см. также примеры гл. 1 т. II). Напомним, что рассматриваем оболочки, удовлетворяющие критерию (2).

**Пример 1.** Закрытая торообразная оболочка под равномерным давлением (рис. 8).

Проделанный анализ показал (см. работу [16] стр. 334], что при  $\alpha$ , не очень близких к 1, для определения напряжений можно использовать безмоментное решение Фепля

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^{(p)} = \frac{1 + 0,5\alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \cdot \frac{pb}{h}; \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{pb}{h}, \quad (41)$$

следующее из формул (11) при  $P = 0$  и  $\theta_0 = 0$ .

**Пример 2.** Растяжение полного трубчатого компенсатора осевой силой (рис. 9).

В сечении  $\theta = \frac{\pi}{2}$  имеют место следующие условия симметрии:

$$\vartheta \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0; \quad Q_r \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (42)$$

В сечении  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  обычно принимают аналогичные условия

$$\vartheta \left( -\frac{\pi}{2} \right) = 0; \quad Q_r \left( -\frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (43)$$

Первое из них оправдывается тем, что цилиндрическая труба, примыкающая к краю компенсатора, обычно обладает значительно большей изгибной жесткостью, чем край компенсатора. Второе оправдывается тем, что край цилиндрической трубы, работающий на изгиб, не может создать значительного распора. Уточненный расчет показал, что замена условий (43) более точными условиями упругого сопряжения тора с трубой существенно не изменяет максимальных значений напряжений и жесткости рассматриваемого компенсатора.

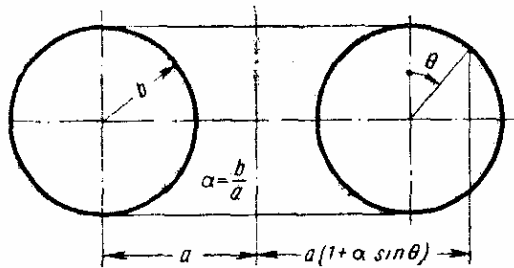


Рис. 8

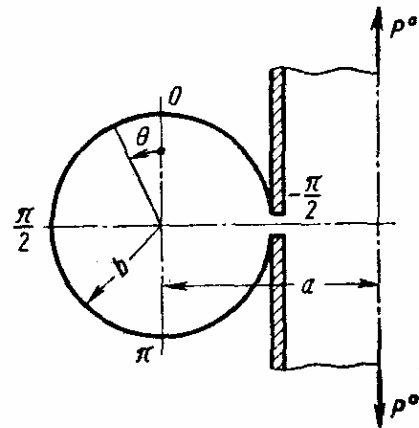


Рис. 9

Принятие граничных условий (43) дает возможность ограничиться рассмотрением основного состояния [формулы (11) при  $p = 0$ ].

С помощью некоторых преобразований из этих формул можно получить простые асимптотические формулы Кларка для максимальных напряжений и жесткости компенсатора (см. работы [17] стр. 277 и [18]):

в точке  $\theta_* = 0$

$$\frac{(\sigma_{\varphi}^{(p)})_{\max}}{\sigma_V} = 2,15 (1 - \nu^2) \frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{3} \beta \frac{2}{3}; \quad (44)$$

в точках  $\theta_* = \pm \frac{1,225}{\lambda}$

$$\frac{(\sigma_{\theta}^{(u)})_{\max}}{\sigma_V} = \pm 2,99 (1 - \nu^2) - \frac{1}{6} \alpha - \frac{1}{3} \beta \frac{2}{3} [\varphi(\theta_*) \omega'(\theta_*)]; \quad (45)$$

здесь  $\sigma_V = \frac{P^0}{2\pi a h}$  — напряжение, возникающее в цилиндрической трубе радиуса  $a$  и толщины  $h$ , растягиваемой той же силой  $P^0$ .

Величину расхождения кромок компенсатора

$$\delta_V = 2 \left[ u_x \left( \frac{\pi}{2} \right) - u_x \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

подсчитывают по формуле

$$\delta_V = \frac{2}{\lambda^2} \delta_0. \quad (45)$$



где

$$\delta_0 = \frac{12(1-\nu^2)b^3P^0}{2Eh^3a} \quad (47)$$

Для рассматриваемого ниже конкретного компенсатора  $\delta_V = 0,0727\delta_0$ ; соответствующее экспериментальное значение [20]  $\delta_V = 0,0825\delta_0$ . Формулы (44)–(47) удобны для прикидочных расчетов и могут быть применены для предварительного определения параметров проектируемых компенсаторов. При рассмотрении трубчатых компенсаторов с малыми значениями  $\lambda$  полезно обращаться к графикам, составленным Далом (см. работы [17] стр. 284 и [20]).

На рис. 10 приведены подсчитанные по формулам (11) графики основных напряжений для компенсатора с параметрами:

$$a = 21,6 \text{ см}; \quad b = 5,49 \text{ см}; \quad h = 0,17 \text{ см};$$

$$\nu = 0,3; \quad E = 2,04 \cdot 10^6 \text{ даН/см}^2;$$

$$\lambda = 3,02; \quad \alpha = 0,254$$

$$\left( \beta = \frac{b}{h} = 32,3; \quad \lambda^3 = 27,5 \right)$$

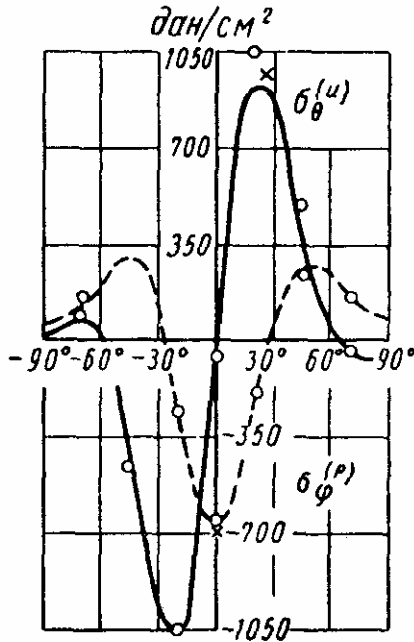


Рис. 10

при сжимающей силе  $P^0 = -454 \text{ даН}$ . Кружками показаны экспериментальные значения напряжений. Крестиками нанесены максимальные значения напряжений, подсчитанные по асимптотическим формулам.

**Пример 3.** Полный трубчатый компенсатор под действием осевой силы и равномерного давления. Если на полный трубчатый компенсатор действуют осевая сила и равномерное давление, причем  $\sigma_V = \frac{P}{2\pi ah}$  и  $\sigma_P =$

$= \frac{pb}{h}$  — величины одного порядка, то для расчета следует использовать соотношения (11). К напряжениям же по формулам (44)

и (45) необходимо добавить значения напряжений из формул (41), подсчитанных в точках  $\theta_*$ . Соотношения (46) и (47) для расхождения кромок остаются в силе.

**Пример 4.** Полный трубчатый компенсатор под действием линейно изменяющейся по толщине и постоянной вдоль меридиана температуры. Пусть на внешней и внутренней поверхностях компенсатора поддерживаются постоянные температуры  $T^+$  и  $T^-$ . Тогда

$$\varepsilon_T = \alpha_T \frac{T^+ + T^-}{2} = \text{const} \quad \kappa_T = \alpha_T \frac{T^+ - T^-}{h} = \text{const}.$$

В рассматриваемом случае формулы (12) и формулы для тангенциальных и изгибных напряжений (см. обозначения) дают

$$\sigma_\theta^I(u) = \sigma_\phi^I(u) = -\frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)}(T^+ - T^-); \quad \sigma_\theta^I(r) = \sigma_\phi^I(r) = 0;$$

$$Q_r^I = 0; \quad \Phi^I = 0; \quad u_r^I = \alpha\alpha_T(1 + \alpha \sin \theta) \frac{T^+ + T^-}{2};$$

$$u_\theta^I = -\alpha\alpha_T \cos \theta \frac{T^+ + T^-}{2}.$$

Выписанное решение удовлетворяет граничным условиям (42) и (43). Поэтому его можно считать полным решением рассматриваемой задачи [с учетом сказанного в примере 2 относительно приближенности выполнения условий (43)].

Полученные зависимости показывают, что средняя температура  $\frac{T^+ + T^-}{2}$  обуславливает изменение формы срединной поверхности, а температурный перепад  $(T^+ - T^-)$  определяет величину возникающих в оболочке изгибных напряжений. Пусть, например,

$(T^+ - T^-) = 100^\circ \text{C}$ ;  $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ дан/см}^2$ ;  $\nu = 0,3$ , тогда

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = - \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{2 \cdot 0,7} = -1800 \text{ дан/см}^2.$$

Следовательно, в оболочке при сравнительно умеренных температурах могут возникать значительные термические напряжения. Накладываясь на напряжения от внешних нагрузок, они могут существенно влиять на прочность компенсатора.

**Пример 5.** Изгиб четверти тора распределенным краевым моментом (рис. 11).

Рассмотрим четверть тора, изгибаемого равномерно распределенным изгибающим моментом, приложенным в сечении  $\theta = 0$ . Поскольку поверхностная нагрузка отсутствует, а краевая самоуравновешена (дает на каждом краю нулевые главный вектор и главный момент), рассмотрению подлежат лишь соотношения краевого эффекта (13)–(22).

Удовлетворяя с их помощью граничным условиям

$$M_\theta(0) = M_0; \quad Q_r(0) = 0; \quad (48)$$

$$M_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad Q_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (48a)$$

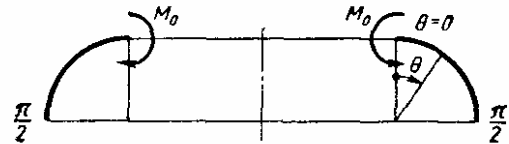


Рис. 11

находим значения постоянных  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , после чего уже не трудно определить все интересующие нас величины.

Если выполняется критерий (16) и оболочку можно считать длинной, следует воспользоваться соотношениями (17)–(22) и аналогичными им, записанными для края  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ . Поскольку на последнем краю выполняются однородные (нулевые) условия (48a), краевой эффект на краю  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  отсутствует.

Соотношения же (20)–(22) с учетом граничных условий (48) при  $\theta_1 = 0$  дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\theta^{(u)}}{\sigma_{M_0}} &= 1,474 \omega'(\theta) \operatorname{Re} h_1' [i\lambda \omega'(\theta)]; & \sigma_\varphi^{(u)} &= \nu \sigma_\theta^{(u)}; \\ \frac{\sigma_\varphi^{(p)}}{\sigma_{M_0}} &= -0,852 \sqrt{1-\nu^2} \omega'(\theta) \operatorname{Im} h_1' [i\lambda \omega(\theta)]; & \sigma_\theta^{(p)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\left( \sigma_{M_0} = \frac{6M_0}{h^2} \right);$$

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -0,852 \sqrt{1-\nu^2} \frac{a\sigma_{M_0}}{Eh} (1 + \alpha \sin \theta) \omega'(\theta) \operatorname{Im} h_1' [i\lambda \omega(\theta)]; \\ \delta_V = u_x(0) - u_x\left(\frac{\pi}{2}\right) &= - \frac{2(1-\nu^2) b^2 \sigma_{M_0}}{0,678 E h \lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \operatorname{Im} h_1 [i\lambda \omega(\theta)] d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Используя асимптотические свойства функции  $h_1(\lambda y)$ , можно получить следующие простые асимптотические зависимости (см. работы [17] стр. 294 и [18]):

$$(\sigma_{\varphi}^{(p)})_{\max} = \sigma_{\varphi}^{(p)}(0) = -0,333\sigma_{M_0}; \quad (51)$$

$$\delta_V = 0,720 \sqrt{1 - \nu^2} \cdot \lambda \frac{\alpha \sigma_{M_0}}{E}. \quad (52)$$

Основные напряжения для оболочки с параметрами  $\lambda^3 = 6,61$  ( $\lambda = 1,88$ ),  $\alpha = 0,1$  показаны на рис. 12. Кривая с точками отвечает напряжениям, подсчитанным по формулам (13) и (14). Линии с крестиками показывают те же вели-

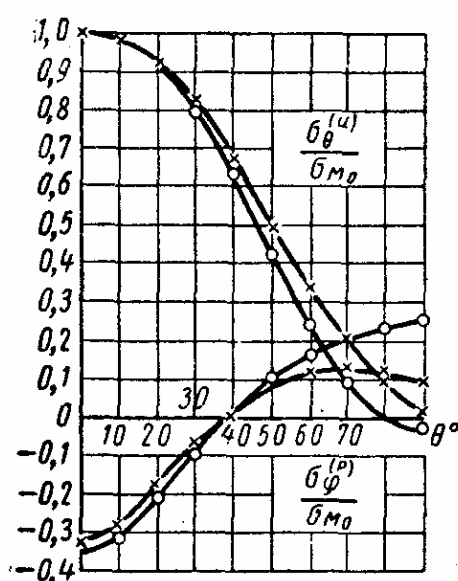


Рис. 12

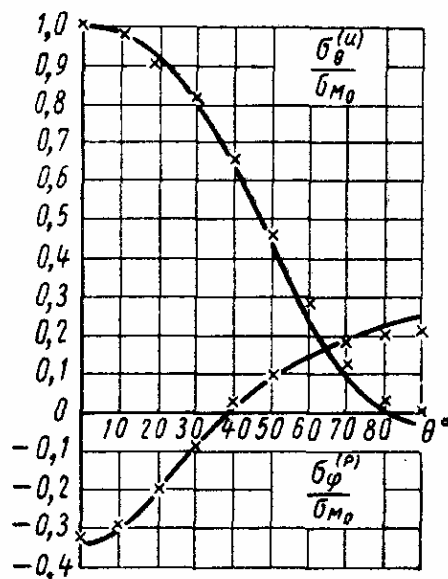


Рис. 13

чины, подсчитанные по формулам (49), не учитывающим взаимного влияния краев. Заметное расхождение кривых связано с тем, что рассматриваемую оболочку нельзя считать длинной [см. критерий (16)].

Напряжения для оболочки с параметрами  $\lambda^3 = 27,5$  ( $\lambda = 3,02$ ),  $\alpha = 0,254$  показаны на рис. 13. Для нее критерий (16) выполняется, поэтому можно

пользоваться более простыми формулами (49). На рис. 12 кружочком показаны максимальные кольцевые напряжения, подсчитанные по формуле (51).



Рис. 14

Пример 6. Изгиб четверти тора распределенным горизонтальным усилием (распором рис. 14). Как и в преды-

дущем примере, следует использовать соотношения (13)–(14) для коротких оболочек и (17)–(22) для длинных. В первом случае постоянные  $A_1, B_1, A_2, B_2$  определяют при подчинении выражений граничным условиям

$$M_{\theta}(0) = 0; \quad Q_r(0) = Q_0; \quad M_{\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad Q_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (53)$$

(22) Для длинной оболочки [если выполняется критерий (16)] из формул (17) — следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{\varphi}^{(p)}}{\sigma_H} &= -\frac{\lambda \omega'(\theta)}{\alpha} \{0,930 Re h_1' [i\lambda \omega(\theta)] + 0,537 Im h_1' [i\lambda \omega(\theta)]\}; \quad \sigma_{\theta}^{(p)} = 0; \\ \frac{\sigma_{\theta}^{(u)}}{\sigma_H} &= \frac{6\lambda \omega'(\theta)}{\alpha \sqrt{12(1-\nu^2)}} \{-0,930 Im h_1' [i\lambda \omega(\theta)] + 0,537 Re h_1' [i\lambda \omega(\theta)]\}; \\ \sigma_H &= \frac{Q_0}{h} \quad \sigma_{\varphi}^{(u)} = \nu \sigma_{\theta}^{(u)}; \\ u_r &= -(1 + \alpha \sin \theta) \omega'(\theta) \frac{\lambda a \sigma_H}{E \alpha} \{0,930 Re h_1' [i\lambda \omega(\theta)] + \\ &\quad + 0,537 Im h_1' [i\lambda \omega(\theta)]\}; \\ \delta_V &= u_x(0) - u_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{ba \sigma_H \sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \times \\ &\quad \times \{0,930 Re h_1 [i\lambda \omega(\theta)] + 0,537 Im h_1 [i\lambda \omega(\theta)]\} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Можно пользоваться также следующими простыми асимптотическими формулами:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\varphi}^{(p)})_{\max} &= \sigma_{\varphi}^{(p)}(0) = -1,27 (1-\nu^2)^{\frac{1}{6}} \alpha^{-\frac{2}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} \sigma_H; \\ (\sigma_{\theta}^{(u)})_{\max} &= \sigma_{\theta}^{(u)}(\theta_*) = 0,825 (1-\nu^2)^{-\frac{1}{3}} \alpha^{-\frac{2}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} \omega'(\theta_*) \sigma_H. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где  $\theta_*$  находят по табл. 2 из равенства

$$\omega(\theta_*) = \frac{1,58}{\lambda}.$$

Далее

$$\delta_V = 2,14 (1-\nu^2)^{\frac{1}{3}} \alpha^{-\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} \frac{a \sigma_H}{E}. \quad (56)$$

На рис. 15 показаны эпюры напряжений для оболочки с параметрами  $\lambda^3 = 6,61$  ( $\lambda = 1,88$ ),  $\alpha = 0,1$ , подсчитанные по формулам (13) и (14) (кривые с точками) и по формулам (54) (кривые с крестиками); на рис. 16 даны напряжения для оболочки с параметрами  $\lambda^3 = 27,5$  ( $\lambda = 3,02$ ),  $\alpha = 0,254$ . Для этой оболочки можно использовать формулы (54), не учитывающие взаимное влияние краев. На рис. 15, 16 полыми кружками показаны максимальные значения напряжений, подсчитанные по асимптотическим формулам (55).

**Пример 7.** Изгиб трубчатого компенсатора моментом (рис. 17). Примем следующие граничные условия:

$$\chi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad Q_{r,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad \chi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad Q_{r,1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (57)$$

Первые два следуют из симметрии рассматриваемой задачи. Край трубы обладает значительно большей, чем край компенсатора, изгибной жесткостью.

Поэтому можно приближенно полагать, что край оболочки  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  поворачивается как жесткое целое. А это означает, что его упругий поворот равен нулю, т. е. приближенно выполняется условие  $\chi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Условие  $Q_{r,1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$  также приближенно выполняется, поскольку край цилиндри-

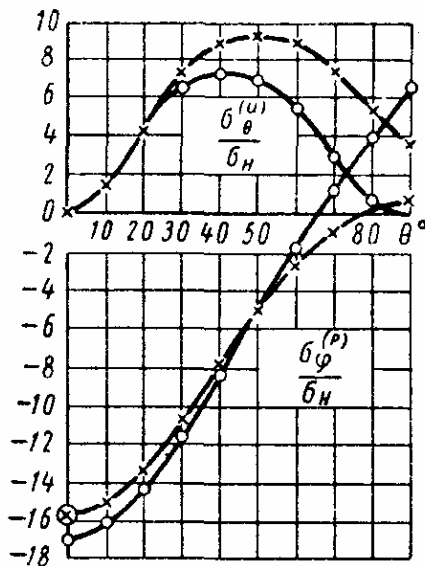


Рис. 15

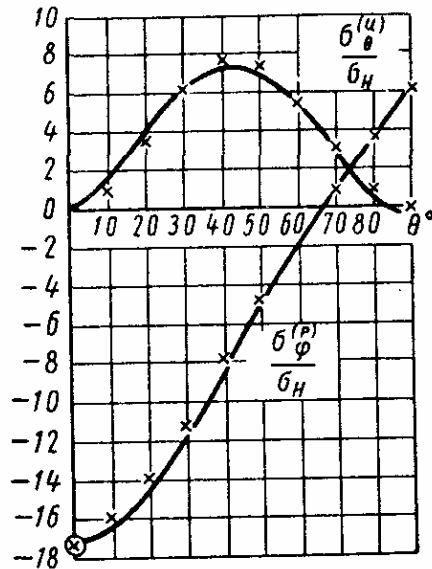


Рис. 16

ческой трубы, работая на изгиб, не может создать значительного распора. Уточненные расчеты показывают, что замена условий (57) более точными условиями упругого сопряжения с цилиндрической трубой мало влияет на максимальные значения напряжений и жесткость компенсатора.

Принятие граничных условий (57) дает возможность ограничиться рассмотрением основного состояния, описываемого формулами (28) при  $F_z^0 = 0$ .

Для максимальных значений напряжений и жесткости компенсатора на изгиб справедливы следующие простые асимптотические формулы:

в точке  $\theta_* = 0$

$$\frac{(\sigma_{\phi,1}^{(p)})_{\max}}{\sigma_{\text{н}}} = 2,15 (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{3}} \alpha - \frac{1}{3} \beta^{\frac{2}{3}}; \quad (58)$$

в точках  $\theta_* = \mp \frac{1,225}{\lambda}$

$$\frac{(\sigma_{\theta,1}^{(u)})_{\max}}{\sigma_{\text{н}}} = \pm 2,99 (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{6}} \alpha - \frac{1}{3} \beta^{\frac{2}{3}} [\varphi(\theta_*) \omega'(\theta_*)]. \quad (59)$$

Здесь

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{m_y}{\pi h a^2}.$$

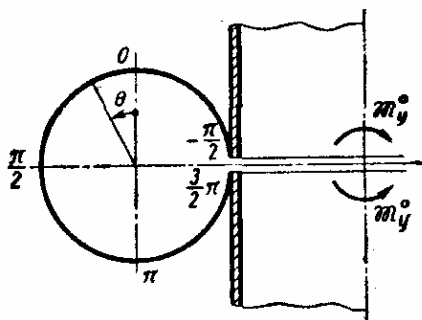


Рис. 17

Жесткость оболочки на изгиб

$$\Omega m = \vartheta_1 \left( \frac{3}{2} \pi \right) - \vartheta_1 \left( -\frac{\pi}{2} \right)$$

подсчитывают по формуле

$$\Omega m = \frac{2}{\lambda^3} \frac{12 (1 - \nu^2) \alpha^3}{E h^3} m_y^0 \quad (60)$$

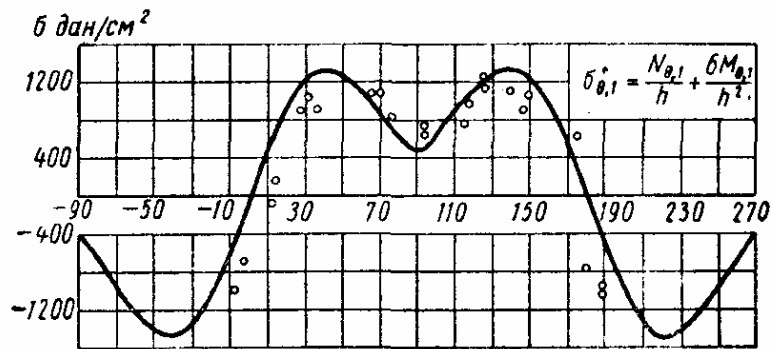


Рис. 18

Графики суммарных напряжений во внешних волокнах компенсатора (сечение  $\varphi = 0$ ), подсчитанные по формулам (28) и (39), показаны на рис. 18 и 19. Параметры оболочки

$$a = 23,35 \text{ см}; \quad h = 0,2 \text{ см}; \quad \nu = 0,3; \quad m_y^0 = -14,4 \cdot 10^3 \text{ дан} \cdot \text{см};$$

$$\lambda^3 = 4,75 (\lambda = 1,68); \quad \alpha = 0,111.$$

Крестиками показаны экспериментальные значения напряжений, полученные В. К. Наумовым.

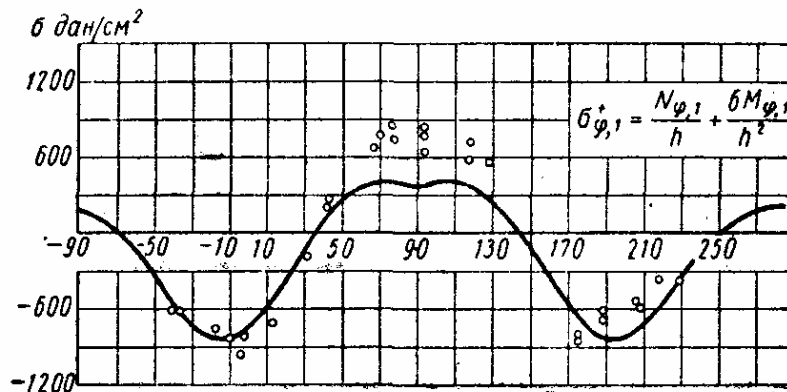


Рис. 19

**Пример 8.** Сдвиг трубчатого компенсатора силой (рис. 20). Примем следующие граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \gamma \left( \frac{\pi}{2} \right) &= 0; & M_{\vartheta, 1} \left( \frac{\pi}{2} \right) &= 0; \\ \gamma \left( -\frac{\pi}{2} \right) &= 0; & M_{\vartheta, 1} \left( -\frac{\pi}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Первые два из них выполняются в силу кососимметричности напряженного состояния относительно плоскости  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ). Третье можно считать приближенно выполняющимся в силу того, что толщина цилиндрической трубы обычно значительно больше толщины компенсатора. Четвертое условие может быть оправдано тем, что край цилиндрической трубы, работая на изгиб,

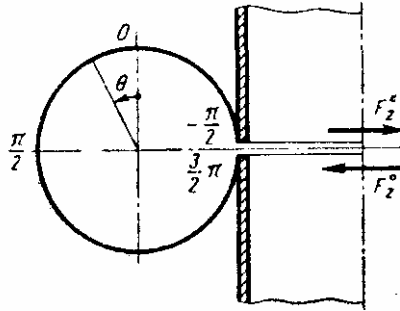


Рис. 20

не может создать значительный изгибающий момент (если для сравнения взять случай жесткого защемления края). Как показывают уточненные расчеты, замена условий (61) более точными условиями упругого сопряжения с цилиндрической трубой, мало влияет на максимальные значения напряжений и жесткость компенсатора на срез.

Приняв граничные условия (61), можно ограничиться основным решением (28) при  $m_y^0 = 0$ ;  $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ . При этом справедливы следующие простые асимптотические формулы в точке  $\theta_* = 0$ :

$$\frac{(\sigma_{\varphi, 1}^{(p)})_{\max}}{\sigma_F} = 2,15 (1 - \nu^2)^{\frac{1}{3}} (\alpha \beta)^{\frac{2}{3}};$$

в точках  $\theta_* = \mp \frac{1,225}{\lambda}$

$$\frac{(\sigma_{\theta, 1}^{(u)})_{\max}}{\sigma_F} = \pm 2,99 (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{6}} (\alpha \beta)^{\frac{2}{3}} [\varphi(\theta_*) \omega'(\theta_*)],$$

здесь

$$\sigma_F = -\frac{F_z^0}{\pi a h}.$$

Податливость компенсатора на сдвиг (срез)

$$U_F = u_{r, 1} \left( \frac{3\pi}{2} \right) - u_{r, 1} \left( -\frac{\pi}{2} \right)$$

определяют по формуле

$$U_F = \frac{2}{\lambda^3} \frac{12 (1 - \nu^2) \alpha^2 b^2}{E h^3} F_z^0.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. М., Машгиз, 1962.
2. Аронсон А. Я. и др. Расчет на прочность деталей гидротурбин. М.—Л., «Машиностроение», 1965.
3. Булгаков В. Н. Статика тороидальных оболочек. Киев, изд-во АН УССР, 1962.
4. Григорьев А. Е. Судовые сосуды, работающие под давлением (определение напряжений и деформаций). Л., «Судостроение», 1965.
5. Каплан Ю. И. Деформация торообразных оболочек. Сб. «Расчет пространственных конструкций». VIII, М., Госстройиздат, 1962.
6. Лаупа А., Вейл Н. Расчет компенсаторов с U-образными гофрами. Труды американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. Т. 29, сер. Е, № 1, М., «Мир», 1962.
7. Лахтин А. А. Расчет торообразной оболочки при осесимметричной нагрузке. Труды Уральского политехнического института. Сб. 71, 1959.
8. Наумов В. К. Расчет стенки корпуса паровой турбины. Исследование элементов паровых и газовых турбин и осевых компенсаторов. Труды Ленинградского металлического завода. Вып. 6. М.—Л. Машгиз, 1960.
9. Наумов В. К. Графики расчета торообразных элементов. Труды Ленинградского металлического завода. Вып. 6. М.—Л., Машгиз, 1960.
10. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
11. Палатников Е. А. Расчет осевых компенсаторов, вводимых в трубопроводы. М., Оборонгиз, 1957.
12. Рудис М. А. Расчет вращающихся торообразных оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1961.
13. Сепетоски, Пирсон и др. Программирование задач об осесимметричных тонкостенных оболочках. Труды американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. Т. 29, сер. Е, № 4, М., «Мир», 1962.
14. Тумаркин С. А. Асимптотическое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переходной точкой и его приложения к расчетам торообразных оболочек и лопастей. ПММ. Т. 23. Вып. 6, 1959.
15. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного машиностроения. М., Оборонгиз, 1949.
16. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Изд. ЛГУ, 1964.
17. Черных К. Ф., Шамин В. А. Расчет торообразных оболочек. Сб. «Исследования по упругости и пластичности», 2, изд. ЛГУ, 1963.
18. Clark R. A. On The theory of thin elastic toroidal shells. J. Math. a. Phys., 1950, vol. 29.
19. Clark R. A., Gilroy T. G., Reissner E. Stresses and deformations of toroidal shells of elliptical cross section. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, no. 1.
20. Dahl N. C. Toroidal — shell expansion joints. J. appl. mech., vol. 20, No. 4, 1953.
21. Grubitsch W. Festigkeitsberechnung von Kompensatoren, «Maschinenbautechnik», No. 12, 1962.
22. Marsal P. V., Turner C. E. Elastic Solution in the Limit Analysis of Shells of Revolution with Special Reference to Expansion Bellows J. of Mechanical Engineering, Science, vol. 3, 1961.



23. Palmer P. J. An Approximate Analysis Giving Design Data for Corrugated Pipes. «Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers», London, England, vol. 174, 1960.

24. Salzmann F. Über die Nachgiebigkeit von Wellrohrexpansionen. schweizerische Bauzeitung, vol. 127, 1946.

25. Turner C. E. Stress and Deformations Deflection Studies of Flat — Plate and Toroidal Expansion Bellows, Subjected to Axial Eccentric, or Internal Pressure Loading, J. of Mechanical Engineering, Science, vol. 2, 1959.

26. Turner C. E., Ford H. Stress and Deflection Studies of Pipeline Expansion Bellows, Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers, London, England, vol. 174, 1960.

---

**ПРЕДМЕТНЫЙ  
АЛФАВИТНЫЙ  
УКАЗАТЕЛЬ**

## А

- Автофретаж труб 68
- Аналоги гидродинамические 254, 255, 269
- Аналогия мембранная Прандтля 253, 254, 269, 271, 274, 276, 277, 281, 513
- статико-геометрическая 641, 642
- упругая 97, 101, 102, 524
- Анизотропия деформационная 50
- криволинейная 24

## Б

- Балки двухслойные — Изгиб 469, 470
- двухслойные с поперечными связями и без связей сдвига — Изгиб 471—474
- из материала с разным сопротивлением растяжению и сжатию — Расчет 510
- консольные — Ползучесть при изгибе установившаяся 520; — Прогибы 218; — Расчет 143, 509
- консольные короткие — Изгиб 79, 80, 87
- консольные многослойные — Расчет 477
- на упругом основании — Расчет 580
- на упругом основании бесконечные и полубесконечные — Расчет 225—227
- однопролетные — Ползучесть при изгибе установившаяся 520; 521; — Прогибы 219; 223; — Расчет 143
- Балки при упруго-пластических деформациях 505, 525
- Влияние осевой силы 510
- Закон деформирования 507, 509, 511
- Изгиб 505—511
- Моменты изгибающие 506
- Моменты изгибающие предельные 507, 508
- Нагрузки предельные 509
- Напряжения — Распределение 505, 509, 509
- — Эпюры 507
- Прогибы 507, 510, 511
- Работа дополнительная 510
- Сечения поперечные — Моменты инерции обобщенные 507, 508
- Уравнения оси изогнутой 509
- Шарниры пластические 507

Балки со стенкой, работающей на сдвиг, и поясами — Расчет 466

- составные многослойные — Демпфирование конструктивное 474—478; — Изгиб 466, 467, 469, 471; — Прогибы 469, 471; — Силы трения между слоями 474, 475, 478
- составные с накладками — Расчет 476, 477

Балки статически неопределимые — Моменты изгибающие — Эпюры 486, 496—498

- Расчет методом сил 485—487
- — Интегралы Мора — Вычисление по правилу Верещагина 482, 486
- — Уравнения трех моментов 486, 487

— Реакции опор 496—498

— Степень статической неопределимости 485

Балки статически неопределимые многопролетные неразрезные — Расчет методом сил 485—487

- однопролетные — Расчет методом перемещений 496—498; — Расчет методом сил 487

Брусья кривые — см *Кривые стержни*

## В

Валы круглые — Расчет 514; — Сечения поперечные — Характеристики 202, 508

- с выточкой кольцевой — Концентрация напряжений 524, 525

— с канавкой полукруглой — Концентрация напряжений 524, 525; — Кручение 258—260, 262

Величины случайные — Распределения и их функции 170, 171, 176

Выносливость — Пределы 152, 159

— — Влияние концентрации напряжений 153

Вязко-упругость линейная 134—144

## Д

Деваторы деформаций 18, 20, 147

- напряжений 13—15, 59, 147

Деформации — Деваторы 18, 20, 147;

- Тензор 16—18

— дисков 587, 589, 595

- малые 17, 21, 130; — Компоненты 18, 19; — Условия сплошности Сен-Венана 18—21; — Формулы Коши 17

- натуральные 19
- неупругие — Скорости — Тензор 20, 21
- нитей гибких 195, 197
- Деформации оболочек (тонких) 631—635**
  - Гипотеза Кирхгофа 631, 639
  - Компоненты — Выражения упрощенные 647
  - — — Связь с усилиями-моментами 639
  - Компоненты для граничного элемента 632, 633
  - Компоненты для срединной поверхности 634, 635
  - Условия совместности 634
- Деформации оболочек вращения 654—688; — Компоненты 655, 656; — Связь с усилиями-моментами по общему закону Гука 659**
  - оболочек тангенциальные (мембранные, цепные) — Компоненты 633
  - оболочек температурные 659; — Компоненты 652
  - осесимметричные 87, 88, 562—573
  - пластинок и мембран прямоугольных гибких 597—599
  - пластические 58, 61, 92, 96, 155; — Кривые схематизированные 58, 59; — Работа 61, 62; — Скорости 68, 69, 72
  - плоские 32, 41, 75—83, 116; — Скорости 76—78; — Уравнения в цилиндрических координатах 33; — Уравнения основные 76, 117
  - ползучести 95, 97; — Компоненты и скорость 92, 96, 98
  - сдвига — Кривые 58; — Скорости 69, 145
  - сдвига в стержнях — Влияние на прогибы 216—219
  - сред вязко-пластических 144, 145
  - сред сплошных 16—19; — Скорости 20, 21
  - сред упруго-вязких 134—141, 146, 147
  - стержней 183, 184, 197, 198, 200
  - стержней естественно закрученных 442—447, 463
  - стержней кривых 432; — Энергия потенциальная 438
  - стержней призматических при кручении — Уравнения совместности дифференциальные 240, 241
  - тел вязких 133, 134
  - упругие 58, 61, 92, 104; — Закон Гука 22—24, 64, 114, 132, 133; — Потенциал 22, 23
- Деформации упруго-пластические 65—68, 98, 99, 104, 149, 504**
  - Работа дополнительная 73
  - Связь с напряжениями температурными 125—130
  - Теория — Закон степенной 505, 507, 509, 511, 512
  - — — Принципы минимума 72, 73, 516
  - — — Связь с термопластичностью 125—130
  - — — Теорема о приспособляемости 71,
- — — Уравнения Генки 64, 65, 74, 75, 126, 133, 514
- Учет при расчете пластинок 615—623
- Учет при расчете стержней 504—517
- Диски — Деформации относительные 587—589**
  - Напряжения 588—590, 594, 595
  - Перемещения радиальные 590
  - Равновесие элемента — Условия 588
  - Растяжение (сжатие) осесимметричное 586—596
  - Расчет — Методы интегральные 596
  - — Методы конечных разностей 595
  - Сжатие сосредоточенными силами 39, 40
  - Уравнения дифференциальные 590
  - Уравнения равновесия 588, 595
  - Уравнения совместности деформаций 588, 589, 595
  - Уравнения упругости 587
  - Условия краевые 589, 594
- Диски вращающиеся — Расчет 144**
  - гиперболического профиля — Расчет 592, 595
  - конического профиля — Расчет 593, 595
  - переменной толщины 593; — Напряжения 594; — Профили — Методы аппроксимации 593, 595; — Расчет — Методы 594—596
  - постоянной толщины с отверстием центральным — Расчет 590, 591
  - постоянной толщины сплошные — Расчет 591, 592
  - с отверстием — Расчет 29
  - тонкие — Напряжения температурные 120, 121, 126
- Долговечность систем механических 166**
  - Расчет при напряжениях циклических 161, 175—177
  - Расчет при процессах случайных 176

## Ж

- Жидкости неньютоновские 133, 134**
  - ньютоновские 132, 133

## И

- Изгиб балок двухслойных 469, 470**
  - балок двухслойных с поперечными связями и без связей сдвига 471—474
  - балок консольных коротких 79, 80, 87
  - балок составных многослойных 469, 471, 476, 477
  - колец круговых 288—297, 309—334
  - компенсаторов трубчатых полных 807—809
  - мембран круглых 608—614
  - мембран прямоугольных 597—608
  - оболочек вращения осесимметричный 664—681; — Случай обратнo-симметричный 681—688

- оболочек конических осесимметричный 713—720; — Случай обратносимметричный 721—728
- оболочек сферических осесимметричный 739—746, 750—760; — Случай обратносимметричный 747—755, 760—766
- оболочек торообразных осесимметричный 779—793; — Случай обратносимметричный 794—802
- оболочек цилиндрических круговых осесимметричный 691—697; — Случай обратносимметричный 697—704
- пластинок — см. под их наименованиями, например: *Пластины прямоугольные* — Изгиб; *Пластины треугольные* — Изгиб
- плит толстых 586
- полос с надрезами или отверстием 79, 80
- при ползучести неустановившейся 521, 522
- при ползучести установившейся 519—523
- продольно-поперечный 229—238
- слоя тонкого между плитами 82
- стержней — см. под их наименованиями, например: *Кривые стержни* — Изгиб; *Стержни, естественно закрученные* — Изгиб
- торов 805—807
- упруго-пластический 505—512, 620, 621
- Интегралы Мора 219—223, 439, 482; — Вычисление по правилу Верещагина 222, 223
- Фурье 41

## К

- Клинья — Вдавливание без трения 82, 83
- Давление одностороннее предельное 80, 81
- Напряжения касательные и нормальные 210—212
- Напряжения температурные 207
- Расчет под действием сосредоточенной силы 39
- Смятие жесткой плоскостью 83
- Колеса с жесткой ступицей и жестким соединением спиц 382, 399
- Нагружение моментами 385, 387—390
- Нагружение силами касательными 386, 388, 389
- Нагружение силами радиальными 382—385, 387, 389, 391—395
- Расчетные схемы и формулы — Таблицы при малом числе спиц 390—395
- Смещения и усилия — Определение 383—390, 399—402
- Колеса с жесткой ступицей и шарнирным соединением спиц 367
- Расчетные схемы и формулы — Таблицы 377—382
- Сечения обода — Выбор 367
- Кольца круговые — см. *Круговые кольца*

Кольцевые системы с большим числом спиц и жестким соединением их с кольцами 396

- Нагружение силами радиальными 401, 402
- Нагрузка элементарная первая 397, 399, 400
- Обозначения 365, 396
- Сечения обода — Выбор 402
- Смещения и усилия — Определение 396—398
- — Определение при абсолютно жестком внутреннем кольце 399—402

— Уравнения основные 396—399

Кольцевые системы с большим числом спиц и шарнирным соединением их с кольцами 396, 402

- Нагружение силами радиальными 405, 406, 408—411
- Нагрузка элементарная первая 405—408
- Нагрузка элементарная вторая 412, 413
- Нагрузка элементарная третья 413—415
- Нагрузки равномерно распределенные 405—409, 411
- Смещения и усилия — Определение 403—415
- Уравнения основные и их решение 402—404
- — Постоянные — Определение 405, 406, 412—415

Кольцевые системы с малым числом спиц и жестким соединением их с кольцами 382

- Нагружение моментами 385, 387—390
- Нагружение силами касательными 386, 388, 389
- Нагружение силами радиальными 382—385, 387, 389, 391—395
- Нагрузки равномерно распределенные 390
- Расчетные схемы и формулы — Таблицы при жесткой ступице 390—395
- Смещения и усилия — Определение 383—390

Кольцевые системы с малым числом спиц и шарнирным соединением их с кольцами 365

- Нагрузка элементарная первая 368, 371, 373—376
- Нагрузка элементарная вторая 369, 372, 373, 375, 376
- Нагрузка элементарная третья 370, 372, 373, 376
- Нагрузки произвольные 368, 370, 372
- Обозначения 365
- Расчетные схемы и формулы — Таблицы 367—376
- — Таблицы при жесткой ступице 377—382
- Сечения обода — Выбор 367
- Смещения и их коэффициенты — Определение 366, 367
- Усилия — Определение 365

- Компенсаторы** трубчатые — Изгиб 807—809
- Растяжение силой осевой 803, 804
  - Расчет — Примеры 802—805, 807—810
  - Сдвиг 809, 810
- Концентрация напряжений** — Влияние на предел выносливости 153; — Коэффициенты эффективные 153, 159, 160
- — вокруг сферической полости в поле растяжения 44
  - — у выточек и канавок валов 524, 525
  - — у выточек остроугольных с радиусом закругления дна 153
  - — у отверстий 53
  - — у отверстий криволинейных произвольных 54—56
  - — у углов контура поперечного сечения 252, 260, 269, 274, 283—286
- Кривые стержни** 430 — см. также *Круговые стержни*
- Бимоменты внешние 431
  - Гипотеза плоских сечений 431, 432, 437
  - Деформации 432
  - — Энергия потенциальная 438
  - Деформации и изгиб упруго-пластический 511, 512
  - Изгиб 39, 431—439
  - Моменты кручения свободного и стесненного 431
  - Напряжения касательные при изгибе 437, 438
  - Напряжения нормальные при изгибе 432—434, 439
  - — Распределение 437
  - Напряжения температурные 434
  - Перемещения 439
  - Ползучесть установившаяся 522, 523
  - Равновесие участков — Условия 432, 437
  - Растяжение центральной силой 437
  - Ралаксация напряжений 523
  - Сечения поперечные — Моменты инерции и площадь приведенные 434
  - — Радиусы кривизны 434—436
  - Центр тяжести приведенный 432—436
- Круговые кольца** 117, 287, 309; — Изгиб 288—297, 309—334; — Расчет — Методы 309, 310, 312, 318, 335; — Уравнения в перемещениях 289, 290; — Уравнения дифференциальные и их решение 288—297, 309—312
- — гибкие — Влияние начального прогиба 344, 345; — Расчет — Примеры 342—344; — Уравнения равновесия и их решение 340—345
- Круговые кольца, нагруженные в их плоскости** 312
- Нагрузка элементарная 312—317, 336, 337, 342
  - Смещения и усилия при нагрузке первой 313
  - — Коэффициенты — Графики 314
  - Смещения и усилия при нагрузке элементарной 315, 316
  - — Коэффициенты — Графики 314, 316, 317
  - Смещения и усилия при нагрузках простейших — Схемы и формулы — Таблицы 320—334
  - Уравнения и их решение 309, 311
- Круговые кольца, нагруженные перпендикулярно их плоскости** 312, 316, 355
- Нагрузка элементарная 312, 316, 318, 319
  - Нагрузка элементарная шестая 312, 320
  - Расчет — Последовательность 358
  - Смещения и усилия 316, 318—320, 355—357
  - Уравнения и их решение 310, 311
- Круговые кольца переменной жесткости** — Уравнения и их решение 335, 336
- — с подсоединенной цилиндрической оболочкой 361; — Нагружение моментами 363, 364; — Нагружение силами 362, 363
  - — с произвольным расположением осей инерции 358; — Силовые факторы начальные и их коэффициенты 359—361
  - — составные 335; — Расчет — Примеры 336—339; — Усилия и моменты изгибающие — Схемы и формулы 339, 340
  - — тонкостенные — Изгиб плоский — Формулы расчетные и графики 346—349
  - — тонкостенные, нагруженные перпендикулярно их плоскости — Расчет — Последовательность 358; — Смещения и усилия 355—357
- Круговые стержни** 287
- Изгиб 287—309
  - Классификация по кривизне 289
  - Обозначения 287, 288
  - Расчет — Методы 289, 290
  - Уравнения в перемещениях 289, 290
- Круговые стержни гибкие** — Влияние начального прогиба 344, 345; — Уравнения равновесия и их решение 340—345
- — нагруженные в их плоскости 289—295; — Расчетные схемы и формулы — Таблицы 300—305; — Смещения и усилия — Определение 295—300
  - — нагруженные перпендикулярно их плоскости 289, 291—295; — Расчетные схемы и формулы — Таблицы 305—309; — Смещения и усилия — Определение 295—297
  - — переменной жесткости — Смещения и усилия — Определение 295—297
  - — статически неопределимые — Расчет 297—300, 309
  - — тонкостенные — Изгиб плоский — Формулы расчетные и графики 346—349

**Круговые стержни тонкостенные, нагруженные перпендикулярно их плоскости 346**

- Бимоменты 350, 354
- Моменты стесненного кручения 350, 354
- Расчет — Примеры 353—355
- Смещения 351—353, 355
- Углы закручивания относительные 351—353
- Усилия 353, 354

**Кручение валов круглых с полукруглой канавкой 258—260, 262**

- идеально-пластическое 513—515
- оболочек вращения осесимметричное 664
- оболочек конических осесимметричное 720, 729
- оболочек сферических осесимметричное 746, 747, 768
- оболочек торообразных осесимметричное 793, 794
- оболочек цилиндрических круговых осесимметричное 697, 704
- при ползучести неустановившейся 525
- при ползучести установившейся 523—525
- профилей прокатных 260—267
- стержней — см. под их наименованиями, например *Стержни призматические* — Кручение; *Стержни тонкостенные* — Кручение
- стесненное 276, 350, 354, 418—423; — Действие бимоментов и продольной нагрузки 424—430
- упруго-пластическое 514
- упругое 513

**Крышки сферические — Расчет 768—771****М****Мембраны квадратные, шарнирно опертые по контуру — Расчет при давлении равномерно распределенном 606, 607**

- круглые 526, 608; — Деформации и напряжения 608—610; — Изгиб 608—614; — Расчет при давлении равномерно распределенном 614; Уравнения дифференциальные и равновесия 609, 611; — Условия граничные 611, 612

**Мембраны прямоугольные 526, 597**

- Деформации и напряжения 597—599
- Изгиб 597—608
- Равновесие элемента — Условия 253, 598, 599
- Расчет при давлении, равномерно распределенном 607, 608
- Уравнения равновесия 598, 599
- Условия граничные 600, 601

**Металлы — Ползучесть — см. Ползучесть металлов****Модуль сдвига 24, 25**

- упрочнения 58
- упругости 24, 25; — Зависимость от температуры 114, 121

**Н****Надежность систем механических 164**

- Меры 164, 178
- — Пересчет — Графики 165
- Определение по надежности элементов 166—168
- Понятия основные 164—166
- Расчет 169, 178, 179
- Связь с выбором коэффициентов запаса 179—181
- Связь с интенсивностью отказов 166
- Связь с прочностью 168, 169
- Теория 164—181
- Уровень 164

**Напряжения 11**

- Девиаторы 13—15, 59, 147
- Закон степенной при деформациях упруго-пластических 505, 507, 509, 511, 512
- Интенсивность 14
- Компоненты 14, 49
- — Зависимость от деформаций упругих — Закон Гука 22—24, 64, 114, 132, 133
- — Уравнения равновесия 15, 16, 115
- — Формулы Коши 12
- Концентрация — см. *Концентрация напряжений*
- Линии разрыва или скольжения 76, 77
- Принцип минимума Кастильяно 31, 72, 73
- Релаксация 137, 519, 522, 523
- Тензор 11, 12, 52
- — Инварианты 13, 14
- Уравнения при деформации плоской 76, 77
- Функция в координатах полярных 38, 39
- Функция Эри 35, 41, 788, 800
- — Таблицы 789, 790

**Напряжения в дисках 588—590, 594, 595**

- в мембранах и пластинках круглых гибких 608—610
- в мембранах и пластинках прямоугольных гибких 597—599
- в оболочках — см. *Оболочки (тонкие)* — Напряжения: *Оболочки вращения* — Напряжения
- главные 12, 13; — Уравнения в плоском напряженном состоянии 14
- касательные 13, 46, 80, 81, 96; — Интенсивность 14, 25, 69, 145; — Распределение — *Диаграмма Мора* 15
- касательные в клиньях 210—212
- касательные в стержнях 208, 209, 212, 521
- касательные в стержнях естественно закрученных 450, 453—455
- касательные в стержнях кривых 437, 438

- касательные при кручении — см. *Стержни призматические* — Напряжения при кручении касательные; *Стержни тонкостенные* — Напряжения касательные при кручении
- нормальные 12, 44; — Распределение — Диаграмма Мора 15
- нормальные в клиньях 210—212
- нормальные в стержнях 197—200
- нормальные в стержнях естественно закрученных 449, 450, 453, 454, 464
- нормальные в стержнях кривых 432—434, 439; — Распределение 437
- нормальные при кручении стесненном 418, 419, 426
- остаточные 72, 127, 155
- сред вязко-пластических 144, 145
- сред сплошных 11—16
- сред упруго-вязких 134—141, 146, 147
- тел вязких 133, 134
- Напряжения температурные** 115; — Влияние ползучести и релаксация 130; — Компоненты 123
  - в дисках тонких 120, 121, 125
  - в клиньях 207
  - в пластинах 121, 122
  - в пластинах упруго-пластических 128
  - в полосах длинных 121
  - в полупространстве при источнике тепла на его поверхности 123
  - в ребрах охлаждающих 119
  - в стержнях 183, 184, 206—208, 434
  - в трубах 117—119, 125
  - в трубах при упруго-пластическом состоянии 128—130
  - в цилиндрах много- и одноосевых 117
  - в шарах полых 123, 125
  - в шарах полых при упруго-пластическом состоянии 130
  - в шарах тонкостенных 124
  - неустановившиеся 125
  - при деформациях упруго-пластических 125—130
- Напряжения циклические** — Изменение по времени 151; — Циклы асимметричные 154
  - циклические неоднородные — Влияние на долговечность 161
  - циклические разрушающие — Определение по статической теории 158, 159
  - циклические со случайными амплитудами — Влияние на долговечность 175—177
- Нити гибкие** 187
  - Деформации 195, 197
  - Прогибы 188—195
  - Прогибы максимальные 193, 195, 196
  - Равновесие элементов — Условия 188
  - Распор 188—190
  - Расчет без учета упругости и собственного веса 189—193
  - Расчет длины 188, 189, 191, 192, 194—196
  - Расчет под действием нагрузки распределенной произвольной 193
  - Расчет под действием нагрузки распределенной равномерно 192, 193, 195—197
  - Расчет под действием сил поперечных нескольких 190—192
  - Расчет под действием силы поперечной 189, 190
  - Расчет под действием силы поперечной, приложенной в середине пролета 194—196
  - Расчет с учетом собственного веса 193, 194
  - Расчет с учетом упругости материала 194—196
  - Расчет с учетом упругости материала и температуры 196, 197
  - Углы наклона 188—190, 194
  - Усилия перерезывающие 188, 189
- Нити гибкие пологие** — Расчет 192, 193, 195, 196

## О

- Оболочки (тонкие)** 629, 631
  - Векторы смещения 631, 634
  - Величины граничные комплексные 643, 644
  - Величины граничные статические 635—638, 642
  - Геометрия 629—631, 651
  - Деформации — см. *Деформации оболочек (тонких)*
  - Конструирование — Рекомендации 650
  - Контур граничный 629, 650
  - — Величины статические 635—638, 642
  - — Точки — Векторы смещений 634
  - Кривизны 631, 547, 650
  - Линии асимптотические 650
  - Моменты 645, 646
  - Моменты изгибающие и скручивающие 636
  - Моменты комплексные 643
  - Моменты краевые 635
  - Нагрузки поверхностные 635
  - Напряжения 639
  - — Функции Лурье—Гольденвейзера 642
  - Параметры Ламе 630
  - Перемещения 645, 648
  - Перемещения чистого изгиба 649, 650
  - Поверхности 629
  - Поверхность срединная 629, 631
  - — Деформации — Компоненты 632, 633
  - — Нагрузки 635
  - — Уравнения неразрывности 633, 634
  - — Уравнения равновесия 635—638, 641, 642
  - Радиусы кривизны 630, 650
  - Силы краевые обобщенные — Потенциал 640
  - Смещения 645, 655, 680, 687
  - — Векторы 631, 634



- Смещения комплексные 642, 644, 647
- Смещения обобщенные 649
- Состояние напряженное — Критерии безмоментности 650
- Состояние термоупругое 651, 652
- Теория — см. *Теория оболочек*
- Теория безмоментная 648—650
- Углы поворота 632, 634
- Уравнения — см. *Теория оболочек (тонких)* — Уравнения
- Усилия 645, 646
- Усилия безмоментные 648, 649
- Усилия комплексные 643, 645
- Усилия краевые 635
- Усилия нормальные, сдвигающие и перерезывающие 636
- Усилия-моменты 635, 638
- — Связь с компонентами деформации 639
- Условия граничные 640, 641, 648, 649
- Условия сопряжения упругого 640, 641, 645, 660
- Элементы граничные — Деформации — Компоненты 634, 635
- — Углы поворота 634
- Эффект краевой 647, 651
- Оболочки вращения 654**
  - Величины — Разложение в ряды Фурье 660
  - Величины статические 658
  - Геометрия 654, 655
  - Деформации 654—688
  - Изгиб осесимметричный 664—681
  - — Случай обратносимметричный 681—688
  - — Деформации 656
  - Кручение осесимметричное 664
  - Моменты 658, 663
  - Нагрузки антисимметричные (ветровые) 681
  - Нагрузки внешние самоуравновешенные 662, 663
  - Нагрузки поверхностные 658
  - Напряжения — Определение — Метод разделения переменных 660—662
  - Напряжения изгибные и тангенциальные (мембранные) 657, 658
  - Напряжения полные 680, 687
  - Параметры Ламе 654
  - Перемещения 655
  - Поверхность срединная — Виды 655
  - — Деформации 655, 656
  - — Уравнения неразрывности 656, 662
  - Поворот упругий 682
  - Равновесие 657
  - — Уравнения 658, 661
  - Радиусы кривизны 654
  - Слагаемые температурные (термоупругие) 666, 674, 684, 685
  - Смещения 667, 680, 687
  - — Определение — Метод разделения переменных 660—662
  - Теория — см. *Теория оболочек вращения*
  - Углы поворота 655, 665, 667, 680, 681, 687, 688
  - Усилия 658, 663
  - Усилия безмоментные 665, 681, 682
  - Усилия-моменты — Связь с компонентами деформации 659
  - Условия граничные 659, 660, 673—681
  - Эффект краевой 666, 667, 669, 674, 685
- Оболочки вращения длинные 667; —**
  - Расчет 679—681, 686—688
  - — короткие 667; — Расчет 668, 669, 673, 679, 686
  - — с краем жестко заделанным — Расчет 673, 674, 678
  - — с краем шарнирно опертым — Расчет 676—678
- Оболочки конические 711**
  - Давления равномерные гидростатические 715
  - Давления равномерные с осевой силой 714, 733
  - Изгиб осесимметричный 713—720
  - — Случай обратносимметричный 721—728
  - Кручение осесимметричное 710, 729
  - Нагрузки — Виды 714—716
  - Обозначения 711—713
  - Поворот упругий 723
  - Расчет 711—728
  - — Примеры 729—735
  - Силы осевые растягивающие (сжимающие) 713, 714, 733
  - Смещения 712, 713, 719, 720, 722, 728, 732
  - Состояние термоупругое 713, 716, 717, 724, 725, 731, 732
  - Углы поворота 713—716, 719—722, 728
  - Усилия безмоментные 713—716, 721—724
  - Эффект краевой 713, 717—720, 725—731
- Оболочки конические длинные — Расчет 718—720, 727—731**
  - — длинные консольные — Расчет 734, 735
  - — короткие — Расчет 717, 718, 725—727
  - — с краем заделанным — Расчет 729, 730, 734, 735
  - — с краем шарнирно опертым — Расчет 730, 731
- Оболочки пологие — Уравнение Власова 646—648**
- Оболочки сферические 737, 738**
  - Давление равномерное гидростатическое 741, 742
  - Давление равномерное с осевой силой 740, 741
  - Изгиб осесимметричный 739—746, 750—760
  - — Случай обратносимметричный 747—755, 760—766
  - Кручение осесимметричное 746, 747, 768
  - Нагрузки — Виды 740—743
  - Обозначения 735—739
  - Поворот упругий 749—751, 766
  - Расчет 737—755
  - — Примеры 766—774

- Силы осевые растягивающие (сжимающие) 739, 740
- Смещения 737, 746, 749, 750, 755, 760, 765
- Состояние термоупругое 739, 743, 752, 767
- Углы поворота как жесткое целое 738, 747
- Углы поворота края 739—741, 746, 755, 760, 765, 766
- Усилия безмоментные 739—743, 748—751
- Эффект краевой 743—746, 752—755, 768—771, 774
- Оболочки сферические длинные** — Расчет 745, 746, 754, 755, 768—771
  - замкнутые — Расчет 766, 767
  - короткие — Расчет 744, 745, 752—754, 774
  - с краем заделанным — Расчет 768, 769
  - с краем шарнирно опертым — Расчет 769—771
  - с отверстием центральным малым — Расчет 755—766, 771—774
- Оболочки толстые** 631
  - тонкие — см. *Оболочки (тонкие)*
- Оболочки торообразные** 776—778
  - Давления равномерные нормальные 779, 786
  - Изгиб осесимметричный 779—793
    - — Случай обратносимметричный 794—802
  - Кручение осесимметричное 793, 794
  - Обозначения 777, 778
  - Поворот упругий 797, 798, 802
  - Расчет 776—802
    - Примеры 802—810
  - Силы осевые 781
  - Смещения 777, 793, 797, 800, 802
  - Состояние основное 779—786, 794—798, 803, 804, 808
  - Состояние термоупругое 778, 787, 788, 798, 799, 804, 805
  - Углы поворота 780, 781, 786, 793, 797, 802
  - Эффект краевой 779, 788, 791—793, 800—802
    - Функция Эри — Таблицы 788, 789
- Оболочки торообразные длинные** — Расчет 791—793, 800—802, 805
  - замкнутые — Расчет под равномерным давлением 802
- Оболочки цилиндрические круговые** 689—691
  - Давления равномерные гидростатические 693
  - Давления равномерные с осевой силой 692
  - Изгиб осесимметричный 691—697
    - — Случай обратносимметричный 697—704
  - Кручение осесимметричное 697, 704
  - Нагрузки — Виды 692, 693
  - Обозначения 689—691
  - Поворот упругий 699, 700
  - Расчет 689—704
    - Примеры 704—710
  - Расчет на ЭИВМ 689
    - Расчет с подкрепляющими круговыми кольцами 361—364
  - Силы осевые растягивающие (сжимающие) 692
  - Смещения 690, 697, 699, 704
  - Состояние термоупругое 691, 693, 700, 701, 706, 707
  - Углы поворота 690—693, 695—697, 699, 704
  - Усилия безмоментные 691—693, 698—700
  - Эффект краевой 693—697, 701
- Оболочки цилиндрические круговые длинные** — Расчет 693, 695, 703, 704—708, 710
  - закрытые крышками жесткими — Расчет 708
  - консольные — Расчет 708—710
  - короткие — Расчет 693—695, 701, 702, 704, 709, 710
  - с краем заделанным — Расчет 704, 705, 708—710
  - с краем шарнирно опертым — Расчет 706
- Отверстия** — Концентрация напряжений 53
  - криволинейные произвольные — Концентрация напряжений 54—56
- Отказы систем механических** 164, 171, 178
  - Вероятность 165
  - Закон распределения экспоненциальный 166
  - Интенсивность и частота 165, 166
  - Классификация 168

## П

- Пластинки** 526; — Изгиб упруго-пластический 620, 621; — Напряжения температурные 121, 122; — Расчет в условиях ползучести 623, 624; — Расчет при деформациях упруго-пластических 615—623
  - абсолютно гибкие — Расчет 611
  - гибкие — см. *Пластинки круглые гибкие; Пластинки прямоугольные гибкие*
  - идеально-пластические — Изгиб 616—620; — Нагрузки предельные 617—620; — Состояния предельные при условиях текучести 616, 617, 620; — Уравнения дифференциальные 619
  - идеально-пластические осесимметричные — Изгиб 619, 620
  - из упрочняющегося материала — Изгиб 621, 623
  - квадратные — Изгиб 536, 543, 544, 555, 563, 618
  - квадратные с отверстием круговым — Растяжение 86
- Пластинки круглые** — см. также *Диски*
  - Деформации осесимметричные 563—579
    - Изгиб 563—579
  - Кривизны 563, 564
  - Моменты изгибающие 564, 565
  - Равновесие элемента — Условия 564

- Расчет при нагрузке равномерно распределенной в центральной части 571
- Расчет при нагрузке равномерно распределенной по всей площади 566, 567
- Расчет при нагрузке равномерно распределенной по окружности 571, 572
- Расчет при нагрузке силой, сосредоточенной в центре 572, 584, 585
- Силы перерезывающие 565
- Уравнения основные 563—565
- Условия граничные 565
- Пластины круглые гибкие 608**
  - Деформации и напряжения 608—610
  - Изгиб 608—614
  - Равновесие элемента — Условия 609
  - Расчет при давлении равномерно распределенном 612, 613
  - Расчет при нагрузке силой, сосредоточенной в центре 613, 614
  - Уравнения дифференциальные 611
  - Уравнения равновесия 609
  - Условия граничные 611, 612
- Пластины круглые, защемленные по контуру — Нагрузки предельные 618; — Расчет 566, 567, 571, 572**
  - шарнирно опертые по контуру — Расчет 566, 569—572, 618, 620
- Пластины круглые кольцевые — Нагрузки предельные 618; — Расчет в условиях ползучести 624—628; — Расчет при нагрузке произвольной осесимметричной 572; — Уравнения скорости прогиба 624—626**
  - защемленные по контуру внешнему — Нагрузки предельные 618; — Расчет 568—570
  - защемленные по контуру внутреннему — Расчет 566
  - со свободным контуром — Расчет 568—570
  - узкие — Расчет 627, 628
  - шарнирно опертые по контуру — Расчет при нагрузке моментами 567, 568
- Пластины круглые на упругом основании — Изгиб 583, 584**
  - круглые на упругом основании неограниченные — Расчет 585
  - на упругом основании — Изгиб 579—585
  - по форме параллелограмма — Расчет 578, 579
  - по форме сектора круга — Расчет 573—575
- Пластины прямоугольные 516**
  - Деформации 527, 528
  - Изгиб 526—563
  - Кривизны сечений 527
  - Моменты изгибающие и крутящие 528, 529
  - Напряжения касательные и нормальные 528, 529
  - Равновесие элемента — Условия 529 530
  - Расчет 532—563
  - Силы поперечные 529
  - Уравнения основные 526—530
  - Условия граничные 530, 531
  - Обозначения 532
- Пластины прямоугольные гибкие 597; — Деформации и напряжения 597—599; — Изгиб 597—608; — Расчет при давлении равномерно распределенном 602—606; — Уравнения дифференциальные и равновесия 598—600; — Условия граничные 600, 601**
  - защемленные по контуру — Расчет 604, 605
  - шарнирно опертые по контуру — Расчет 602, 603, 606
- Пластины прямоугольные, защемленные по двум краям длинным — Расчет при давлении гидростатическом 555, 557; — Расчет при давлении равномерном 548, 549**
  - по двум краям смежным — Расчет при давлении равномерном 552, 553
  - по контуру — Расчет при давлении гидростатическом 556, 558; — Расчет при давлении равномерном 554, 557; — Расчет при силе, сосредоточенной в центре 554, 558
  - по одному краю и тремя шарнирно опертыми краями — Расчет при давлении гидростатическом 551, 552, 555, 557; — Расчет при давлении равномерном 549—551
  - по одному краю со свободным и двумя шарнирно опертыми краями — Расчет при давлении равномерном 554, 559, 560; — Расчет при нагрузке силой сосредоточенной 552, 553
  - по трем краям и свободным краем — Расчет при давлении гидростатическом 556, 561; — Расчет при давлении равномерном 555, 561
  - по трем краям и шарнирно опертым краем — Расчет при давлении гидростатическом 556, 559; — Расчет при давлении равномерном 554, 558, 559
- Пластины прямоугольные на упругом основании — Расчет 579—581**
  - на упругом основании бесконечные — Расчет 581, 583
  - со свободным краем — Расчет 552—556, 559—561; — Условия граничные 531
- Пластины с одним рядом отверстий — Растяжение 87**
  - с отверстием круговым — Равновесие упругое или упруго-пластическое 85
- Пластины прямоугольные шарнирно опертые по двум краям и двумя свободными краями — Расчет при давлении равномерном 555, 562**
  - по двум краям и двумя упруго опертыми краями — Расчет при давлении равномерном 555, 563

- по двум краям с зашпеленным и свободным краями — Расчет при давлении равномерном 554, 559, 560; — Расчет при нагрузке силой сосредоточенной 552, 553
- Пластины прямоугольные шарнирно опертые по контуру** — Нагрузки предельные 618
- Расчет при давлении гидростатическом 535—539
- Расчет при давлении равномерном 532—535
- Расчет при нагреве неравномерном 547
- Расчет при нагрузке в виде призмы треугольной 540, 541
- Расчет при нагрузке моментами по краям 547, 548
- Расчет при нагрузке, равномерно распределенной по оси симметрии 543—545
- Расчет при нагрузке, равномерно распределенной по площади центральной части 541—543
- Расчет при силе, сосредоточенной в любой точке 543, 545, 580, 581
- Расчет при силе, сосредоточенной в центре 546, 547
- Расчет при силе, сосредоточенной на оси симметрии 545—547
- Условия граничные 530
- Пластины прямоугольные шарнирно опертые по трем краям и зашпеленным краем** — Расчет при давлении гидростатическом 551, 552, 555, 557; — Расчет при давлении равномерном 549—551
- по трем краям и свободным краем — Расчет при давлении гидростатическом 556, 561; — Расчет при давлении равномерном 554, 560
- Пластины тонкие** — Состояние напряженное плоское 33, 34, 84—87, 119, 120; — Условия пластичности Мизеса 84; — Условия пластичности Треска—Сен-Венана 85
- треугольные равносторонние — Расчет при давлении гидростатическом или равномерном 577; 578; — Расчет при нагрузке моментами или силой сосредоточенной 575, 576
- треугольные равносторонние зашпеленные — Расчет 577, 578
- треугольные равносторонние шарнирно опертые — Расчет 575—577
- упруго-пластические — Напряжения температурные 128
- Пластичность** — Теория — см. *Теория пластичности*; — Условия — см. *Текущность* — Условия
- идеальная 64, 65, 67
- переменная 72
- Плиты толстые** 526
- Изгиб 586
- Ползучесть** — Влияние на температурные напряжения 130
- Время разрушения (прочность длительная) 109—112
- Деформации 95, 97
- — Компоненты и скорость 92, 96, 98
- Задачи граничные 98
- Закон степенной 624
- Кривые — Подобие 91, 99, 105
- Теория — см. *Теория ползучести*
- Ползучесть металлов** 89—92, 146; — Влияние на температурные напряжения 130; — Кривые 89, 90, 91; — Скорости — Зависимость от напряжений и температуры 90—92
- обратная 89, 147
- при нагружении повторном 90
- при напряженном состоянии сложном 92
- Ползучесть неуставившаяся** 104—106, 108, 627; — Задача релаксационная 105; — Задачи — Решение по теории старения 106; — Уравнения дифференциальные — Решение «методом шагов» 104
- при заданных нагрузках 518; — Уравнения вариационные — Решение 104, 105
- при изгибе стержней 521, 522
- Ползучесть пластинок** 623, 624
- пластинок круглых кольцевых 624—626
- пластинок круглых кольцевых узких 627, 628
- при напряженном состоянии одноосном — Кривые изохронные 95; — Уравнения 92—96
- при напряженном состоянии сложном 92; — Уравнения 96—98
- решеток стержневых статически неопределимых 518, 519
- решеток стержневых статически определимых 517
- сред упруго-вязких наследственных 140—142
- труб неравномерно нагретых 109
- труб толстостенных 107—109
- труб тонкостенных 92, 106, 107, 109
- труб тонкостенных с доньшками 106, 107
- установившаяся 107, 108; — Задачи основная и смешанная 102; — Уравнения 97, 100; — Уравнения — Методы решения 102—104; — Уравнения вариационные 100, 101
- установившаяся при изгибе балок консольных и однопролетных 520, 521
- установившаяся при изгибе стержней 519—523
- установившаяся при кручении стержней призматических 523—525
- Полости сферические** — Напряжения местные в поле растяжения 44
- Полосы** — Сжатие — Задача плоская 37, 38
- бесконечные — Задача плоская 41
- длинные — Напряжения температурные 121
- с вырезами круговыми — Нагрузки растягивающие предельные 71

- с надрезами с круговым основанием — Расчет 78—80, 86
- с надрезами угловыми острыми — Расчет 79, 80, 86
- с отверстием круговым — Расчет 79
- с разрезами — Расчет 78
- Полупространство** — Давление круглого жесткого штампа 47; — Нагрузки распределенные — Действие 46; — Напряжения температурные при источнике тепла на поверхности 123
- упругое — Силы сосредоточенные — Действие 45, 46
- Поля температурные** 114
- неосесимметричные 118
- нестационарные 125
- осесимметричные 118—120
- Пределы выносливости** 152, 159; — Влияние концентрации напряжений 153
- текучести 58, 169
- Профили двутавровые** 268
- Воздействие бипары 429
- Жесткость при кручении 263, 266, 267
- Изгиб упруго-пластический 507, 508, 510
- Сечения поперечные — Характеристики 204, 436, 508
- Профили прокатные** 260, 268, 417
- Жесткость при кручении 266, 267
- Кручение 260—267
- Напряжения при кручении касательные максимальные — Таблицы 261—265
- Сечения поперечные — Моменты сопротивления при кручении 261—265
- — Характеристики геометрические 202—204
- Профили тонкостенные открытые** — см. *Стержни тонкостенные открытые*
- трубчатые (закрытые) — см. *Стержни тонкостенные трубчатые*
- Процессы случайные** — Плотность спектральная 175
- Распределения и их функции 170, 171, 176, 177
- Функции корреляционные 172
- Характеристики — Определение 173, 174
- Характеристики выбросов 175
- Прочность** — Коэффициенты запаса в расчетах практических 180, 181
- Коэффициенты запаса нормативные — Выбор 179, 180
- Зависимость от надежности 181
- Связь с теорией надежности 168, 169
- Характеристики статические — Определение 169—171, 178
- Прочность длительная** 109—112

## Р

- Разрушения в условиях ползучести** — Время 109—112
- вязкие 89; — Время 110
- смешанные 112

- хрупкие (малодеформационные) 89, 110—112
- Разрушения усталостные** — см. *усталостные разрушения*
- Рамы статически неопределимые** — Расчет методом перемещений 501
- многоэтажные со стенками вертикальными — Расчет методом перемещений 495, 499, 500; — Расчет методом сил 489
- плоские — Расчет методом перемещений 494; — Расчет методом сил 487—490; — Расчет методом смешанным 501, 502
- плоскопространственные — Моменты изгибающие и крутящие — Эпюры 491, 492; — Расчет методом сил 490, 491
- прямоугольные — Расчет методом сил 488
- Растяжение** — Кривые деформаций упруго-пластических 504
- дисков (пластинок круглых осесимметричное) 586—596
- компенсаторов трубчатых полных 803, 804
- одноосное 14, 44, 133; — Кривые 58, 59
- пластин с отверстиями 85—87
- полос с надрезами 78, 86
- полос с отверстием 79
- стержней 183—187
- стержней естественно закрученных 446, 447, 452, 453, 463
- стержней кривых 437
- Ребра охлаждающие** — Напряжения температурные 119
- Релаксация моментов крутящих** 525
- напряжений 105, 106, 137, 519, 522, 523; — Кривые 89, 90, 94
- напряжений температурных 130
- Рессоры** — Расчет 475
- Решетки стержневые статически неопределимые** — Ползучесть 518, 519; — Релаксация напряжений 519; — Расчет 505
- статически определимые 505; — Ползучесть 517

## С

- Сдвиг** 14; — Деформации 58, 69, 145, 216—219; — Модуль 24, 25; — Скорости — Интенсивность 21
- компенсаторов трубчатых полных 809, 810
- перешейка прямоугольного 80, 81
- слоя тонкого между плитами 81, 82
- Сжатие** — Кривые деформаций упруго-пластических 504
- дисков осесимметричное 586—596
- дисков сосредоточенными силами 39, 40
- объемное тело твердых 58
- одноосное 14, 44, 133
- полос — Задача плоская — Решение 37, 38

- слой тонкого между плитами 81, 82
- стержней силами сосредоточенными 183
- Симметрия упругая** — Случаи 23—25
- Системы кольцевые** — см. *Кольцевые системы*
- механические — Долговечность 166; — Долговечность — Расчет 161, 175—177; — Надежность — см. *Надежность систем механических*; — Отказы 164—166, 168, 171, 178; — Ресурс нормативный 166; — Элементы — Виды соединений 166, 167
- стержневые простейшие 184; — Усилия и реакции 185, 186
- Системы стержневые статически неопределимые** 183, 480 — см. также *Решетки статически неопределимые*
- Моменты изгибающие 482, 494
- — Эпюры 486, 488, 489, 492, 496—498, 502
- Расчет методом перемещений 480, 494—501
- — Зависимости основные для одного стержня 494, 495
- — Уравнения канонические 495
- Расчет методом сил 480—493
- — Алгоритм Гаусса 482—484
- — Интегралы Мора 482
- — Уравнения канонические 480—484, 488
- — Уравнения канонические в матричной форме 484, 485, 490
- — Уравнения трех моментов 486, 487
- — Формулы Мора для коэффициентов 481, 482, 490, 493
- Расчет методом смешанным 480, 501
- — Уравнения канонические 502
- Степень статической неопределимости 481, 485, 487, 491
- Усилия в элементах 482, 500
- Системы стержневые шарнирные** — см. *Решетки стержневые*
- Спицы** 365
- Расчет при жестком соединении с ободом 384, 390—396, 400
- Расчет при шарнирном соединении с ободом 365, 368—382, 406, 411
- Среды вязко-пластические Бингама** 144, 145; — Течение в трубах 145, 146
- пластичные 134
- сплошные — Деформации 16—21; — Напряжения 11—16; — Перемещения — Условия сплошности (неразрывности) Сен-Венана 18, 21; — Сдвиги и удлинения малые 17; — Удлинения относительные — Скорости 20
- Среды упруго-вязкие Кельвина (или Фойхта)** 138, 146; — Деформации и напряжения 134, 135; — Колебания 136; — Модели 135, 139
- наследственные Больцмана 139, 143; — Деформации и напряжения 140, 141; — Ползучесть — Ядра 140—142
- наследственные нелинейные — Деформации и напряжения 146, 147
- обобщенные линейные — Деформации и напряжения 137—139; — Модели 137; — Модели многоэлементные 138, 139; — Уравнения общие 139
- релаксирующие Максвелла 138, 146; — Деформации и напряжения 136, 137; — Модели 136, 139
- Старение** — Теория 94, 98, 99, 106
- Статистика математическая** — Методы — Применение в теории устойчивых разрушений 156—160
- — Применение для определения характеристик внешних нагрузок 171—175, 178
- — Применение для определения характеристик прочности 169—171, 178
- Понятия основные 169—171
- Стержни** 183
- Деформации 183, 184, 197, 198, 200
- Деформации сдвига — Влияние на прогибы 216—219
- Изгиб 199, 200, 212—223
- Изгиб продольно-поперечный 229, 230
- Линия упругая — Уравнения 232—235
- — Уравнения в интегральной форме 215, 218
- — Уравнения дифференциальные 212—214, 216, 217
- — Уравнения с учетом деформаций сдвига 216—219
- Линия упругая пространственная 216, 221
- Моменты изгибающие 232—236
- Напряжения касательные 208, 209, 212, 521
- Напряжения нормальные 197—200
- Напряжения температурные 183, 184, 206—208, 434
- Ползучесть при изгибе неустановившаяся 521, 522
- Ползучесть при изгибе установившаяся 519—521
- Прогибы 212—216
- — Влияние деформаций сдвига 216—219
- — Влияние сил перерезывающих 218—220
- — Определение при помощи интеграла Мора 219—223
- Прогибы в условиях ползучести установившейся — Скорость 519—521
- Равновесие элементов — Условия 213
- — Условия при действии усилия вдоль оси 229
- Рассеяние дополнительное 520, 522
- Растяжение силами распределенными 184, 187
- Растяжение силами сосредоточенными 183, 184

- Расчет при деформациях упруго-пластических 504—517
- Релаксация напряжений 522
- Сечения поперечные — Линия нейтральная 200
- — Моменты инерции 202—204
- — Моменты инерции обобщенные 507, 508
- — Моменты сопротивления при изгибе 202—204
- — Оси центральные 198
- — Радиусы кривизны 435, 436
- — Характеристики геометрические 200—205
- — Характеристики упруго-геометрические 205, 206
- — Центр жесткости 213
- — Центр тяжести — Координаты 202—204
- Сжатие силами сосредоточенными 183
- Силы перерезывающие 217—220
- Схемы нагружения 214—216, 222, 223, 232—235
- Углы поворота сечений — Определение с помощью интеграла Мора 221
- Углы сдвига сечений 217
- Удлинения относительные 197
- Условия краевые при изгибе продольно-поперечном 230
- Стержни в поле центробежных сил —** Расчет 187
- Стержни естественно закрученные 440**
  - Деформации 442—447, 463
  - Закрученность относительная 441, 443
  - Закрученность сильная — Оценка влияния 463, 464
  - Изгиб 444—446, 457, 461, 464
  - Косинусы направляющие осей координат 440
  - Коэффициенты жесткости 443, 448
  - Коэффициенты податливости 443, 449, 452, 454, 457
  - — Расчетные формулы — Таблицы 458—460
  - Кручение 447, 453, 462
  - Напряжения касательные 450, 453—455
  - Напряжения нормальные 449, 450, 453, 454, 464
  - Определения основные 440, 441
  - Прогибы 445, 461, 464
  - Равновесие элемента 442, 456
  - Раскрутка 462, 463
  - Растяжение 446, 447, 452, 453, 463
  - Сечения поперечные 457
  - Соотношения геометрические 441, 442, 454, 456, 457
  - — Расчетные формулы — Таблицы 458—460
  - Теория Кирхгофа—Клебша 443—446
  - Теория общая — Решения приближенные 448—454
  - — Решения точные 446, 447
  - Углы наклона винтовых волокон 452
  - Удлинения винтовых волокон 463
  - Уравнения в неподвижной системе координат 455, 456
- Уравнения равновесия и физические 442, 443, 456
- Энергия потенциальная единицы длины 450
- Стержни естественно закрученные двусимметричного сечения —** Расчет 444—447, 464
  - консольные — Расчет 445, 446, 457, 461, 464
  - несимметричного сечения — Расчет 457, 461
  - прямоугольного удлиненного сечения — Расчет 447, 448, 464
  - удлиненного сечения — Теория техническая 454—461
  - эллиптического сечения — Расчет 444, 450—454
- Стержни кривые — см. Кривые стержни**
  - круглого сечения — Ползучесть установившаяся при кручении 523; — Расчет 212, 514; — Сечения поперечные — Характеристики 202, 508
  - круговые — см. Круговые стержни
- Стержни на упругом основании —** Изгиб 223, 224; — Изгиб продольно-поперечный 236—238; — Линия упругая — Уравнения 224, 228; — Прогибы 227; — Равновесие 224
  - бесконечные и полубесконечные — Действие системы сил 227; — Изгиб 225—227; — Прогибы, углы поворота и моменты изгибающие 225, 226
  - конечной длины — Изгиб 227—229; — Линия упругая — Уравнения — Интегрирование по методу начальных параметров 227, 228, 236—238; — Случаи нагружения 228, 229
- Стержни нагретые равномерно —** Изгиб 212; — Линия упругая — Уравнения 212, 213
  - переменного сечения — Напряжения касательные 212; — Прогибы 216
  - постоянного сечения — Изгиб продольно-поперечный 230, 231—236; — Линия упругая — Уравнения — Интегрирование по методу начальных параметров 214, 215; — Напряжения касательные 209, 212; — Прогибы 231; — Растяжение 187
- Стержни призматические 239**
  - Деформации — Уравнения совместности 240, 241
  - Жесткость при кручении 247—251, 256, 260
  - — Формула Сен-Венана приближенная 268
  - Кручение 239—255, 268, 513
  - — Аналогии гидродинамические 254, 255, 269
  - — Аналогия мембранная 253, 254, 269, 513
  - — Функция Сен-Венана 248—250, 258

- Кручение идеально-пластическое 513—515
- Кручение при ползучести 523—525
- Кручение с дополнительным осевым растяжением 514
- Кручение упруго-пластическое 514
- Кручение упругое 513
- Моменты крутящие 247, 248
- — Релаксация 525
- Напряжения при кручении — Уравнение Пуассона 242, 248, 251, 259, 270
- — Уравнения равновесия дифференциальные 240, 241
- — Функция Прандтля 242, 243, 246, 252, 254—257, 259, 270, 278
- Напряжения при кручении касательные 251, 257
- — Концентрация 252
- — Распределение 241
- — Уравнения дифференциальные 241, 242
- — Циркуляция — Теорема Бердта 243, 245, 246, 254, 516
- Напряжения при кручении касательные в вершинах углов контура поперечного сечения 251—253
- Напряжения при кручении касательные максимальные 248, 257, 260—265
- Перемещения — Определение 244, 245
- — Функция 248—250
- Ползучесть при кручении 523—525
- Сечения поперечные — Деформация 258, 275, 276
- — Жесткость при кручении 261—265, 267
- — Моменты сопротивления кручению 248, 261—265
- — Углы контура — Напряжения касательные при кручении 251—253
- Углы закручивания (крутка) 242
- Уравнения дифференциальные основные 240—242
- — Решение общее 242—245
- Условия граничные на боковой поверхности и торцах 239, 240, 242, 243, 251
- **Стержни призматические** полые — Жесткость при кручении 248, 250, 267; — Кручение — Аналогия мембранная 254; — Напряжения при кручении касательные 261, 264, 265
- — прямоугольные — Кручение 255—258, 262, 274, 275
- — упрочняющиеся — Кручение упруго-пластическое 514, 516
- Стержни прямоугольные** — Изгиб упруго-пластический 508
- Кручение идеально-пластическое 515
- Напряжения касательные 209
- Напряжения температурные 207
- Прогибы 217
- Сечения поперечные — Характеристики геометрические 202, 508
- Стержни растягиваемые** — Теория течения 92, 93, 96—99
- — с заделанными концами — Напряжения температурные 183, 184
- Стержни составные многослойные** 466, 467
- Демпфирование конструкционное 474—478
- Изгиб 467—469, 471
- Прогибы 469, 471
- Силы трения между слоями 474, 475, 478
- Усилия в каждом слое 468
- Усилия касательные — Уравнения дифференциальные 467, 468
- Стержни тонкостенные** 268, 417 — см. также *Профили прокатные*
- Бимоменты внешние 423, 426—429
- — Интенсивность 430
- Жесткость при кручении 267, 270, 271, 273, 275, 276, 281, 418
- Коэффициенты поправочные 266, 269, 275
- Кручение 266—286, 418
- — Аналогия мембранная 271, 274, 276, 277, 281
- Кручение стесненное 276, 418—423
- — Уравнения дифференциальные и их решение 420, 424—426, 430
- Кручение стесненное при действии бимоментов и продольной нагрузки 426—430
- Моменты крутящие 271, 274, 282
- Моменты кручения свободного 420, 426—428
- Моменты кручения стесненного 420, 423, 427, 428
- Напряжения касательные при кручении 270, 277
- — Концентрация 260, 269, 274, 283—286
- — Циркуляция — Теорема Бердта 279, 280, 281, 283
- Напряжения касательные при кручении максимальные 271, 273, 281, 283—286
- Напряжения касательные при кручении стесненном 420, 426
- Напряжения нормальные при кручении стесненном 418, 419, 426
- Сечения поперечные — Деформация 275, 276, 417, 418
- — Моменты секториальные 420, 422
- — Площади секториальные 418, 419, 421
- — Центры изгиба, кручения, жесткости 417, 419, 421
- Углы закручивания погонные 418
- Углы профиля входящие — Напряжения касательные — Концентрация 260, 269, 274, 283—286
- Условия граничные при кручении стесненном 423, 424
- Стержни тонкостенные замкнутые** (трубчатые) — см. *Стержни тонкостенные трубчатые*
- — круговые — см. *Круговые стержни тонкостенные*



- открытые — Кручение 269—271, 273, 276, 281, 283, 284; — Кручение идеально-пластическое 515; — Ползучесть установившаяся при кручении 523
  - открытые с профилями из полосок прямоугольных и трапецеидальных — Кручение 272—276
  - открытые с профилями криволинейными — Кручение 268—270; — Кручение — Формулы Гриффитса—Прескота 271, 272 274
  - Стержни тонкостенные трубчатые (замкнутые) 276**
    - Жесткость при кручении 280, 281
    - Изгиб упруго-пластический 508
    - Кручение 276—281, 284—286
    - Кручение идеально-пластическое 515
    - Линия профиля средняя 277, 279
    - Напряжения касательные при кручении 277—281
    - — Концентрация 284, 285
    - Напряжения касательные при кручении максимальные 284—286
    - Особенности 276, 281
    - Ползучесть установившаяся при кручении 523
    - Сечения поперечные — Характеристики геометрические 202, 508
    - Углы профиля входящие — Напряжения касательные — Концентрация 284, 285
    - Условия граничные 278
  - Стержни тонкостенные трубчатые с многосвязными профилями — Кручение 281—283**
    - трубчатые трехсвязные — Расчет — Примеры 281—283
    - упрочняющиеся — Кручение упруго-пластическое 516, 517
  - Стержни трубчатые — см. также Стержни тонкостенные трубчатые; — Трубы**
    - Кручение идеально-пластическое 515
    - Напряжения касательные 209
    - Ползучесть установившаяся при кручении 523
    - Прогибы 217, 219
  - Стержни упруго-вязкие — Колебания продольные 136**
- Т**
- Текучесть 62**
    - Пределы 58, 169
    - Условия 59, 60, 65, 126, 134
    - Условия Мизеса 60, 64, 67, 76, 84, 87, 128, 513, 616, 619
    - Условия Треска—Сен-Венана 60, 76, 85, 88, 129, 513, 617, 619, 620, 623
  - Тела анизотропные — Анизотропия деформационная 59**
    - Анизотропия криволинейная 24
    - Задача плоская 41
    - Задачи пространственные 47
    - Условия текучести 60
  - Тела вязкие линейные (жидкости ньютоновские) 132, 133**
    - вязкие нелинейные (жидкости неньютоновские) 133, 134
  - вязко-пластические — Деформации и напряжения 144, 145; — Модели 144; — Течение в трубах 145, 146
  - жестко-пластические 63; — Деформация плоская 75; — Нагрузки предельные 70, 71, 78, 80, 81; — Принципы экстремальные 68—70
  - жестко-упрочняющиеся 63
  - изотропные 24, 47, 52, 104, 114; — Условия текучести 58, 59; — Энергия потенциальная упругая 25
  - ортотропные 23
  - полубесконечные — Напряжения и перемещения 45, 46
  - твердые — Критерии нагружения и загрузки 61; — Пластичность — Теория — см. *Теория пластичности*; — Свойства механические 58—61; — Сжатие объемное 58
  - трансверсально-изотропные 24, 47
  - Тела упругие — Деформации — см. Деформации упругие**
    - Коэффициент Пуассона 24, 25
    - — Зависимость от температуры 114, 124
    - Нагрузки — Системы статически эквивалентные 29
    - Перемещения — Принцип минимума 30, 31
    - Постоянные упругие 22, 25, 37
    - Потенциал упругий 23
    - Рассеяние дополнительное 101, 103
    - Симметрия упругая — Случаи 23—25
    - Состояние напряженное — Зависимость от упругих постоянных 37
    - Состояние напряженное осесимметричное 38
    - Состояние напряженное плоское 33, 34, 41
    - Условия граничные 29, 36, 49
    - Условия начальные 29
    - Энергия потенциальная — см. *Энергия потенциальная тел упругих*
  - Тела упругие нелинейные — Кривые и уравнения деформирования 133**
    - упругие неравномерно нагретые — Перемещения 115, 122; — Приспособляемость 127, 128; — Работа дополнительная 127; — Термоупругость — см. *Термоупругость*; — Энергия полная — Принцип минимума 126
    - упруго-вязкие простые — Модели 132; — Теория 132—134
    - упруго-вязкие сложные линейные — Модели 135—139; — Принцип Вольтерра 142, 143; — Теория 134—144
    - упруго-вязкие сложные нелинейные — Модели 144, 146; — Теория 144—147
    - упруго-вязко-пластические 145; — Модели 146
    - упруго-пластические — Модели 144; — Приспособляемость — Теоремы 71, 72

- Тензор деформаций** в средах сплошных 16—18  
 — напряжений в средах сплошных 11, 12, 52; — Инварианты 13, 14  
 — скорости деформаций неупругих 20, 21
- Теория деформаций упруго-пластических** — Закон степенной 505, 507, 509, 511, 512  
 — — Принципы минимума 72, 73, 516  
 — — Связь с термопластичностью 125—130  
 — — Теорема о приспособляемости 71, 72  
 — — Уравнения Генки 64, 65, 74, 75, 126, 130, 514
- Теория надежности систем механических** 164—181; — Аспекты механические — Схемы структурные 168; — Задачи 166, 169; — Приложение к вопросам прочности 168, 169; — Применение методов статистики математической 169—175, 178  
 — наследственности (упругого последствия) 96, 106
- Теория оболочек (тонких)** 629  
 — Вариант комплексный 642—646  
 — Величины граничные комплексные 643, 644  
 — Величины граничные статистические 635—638, 642  
 — Использование аналогии статико-геометрической 641, 642  
 — Метод сил 641, 642  
 — Метод смещений 641  
 — Метод усилий комплексных 643, 645, 646  
 — Уравнения в комплексных смещениях 644  
 — Уравнения в комплексных усилиях 643  
 — Уравнения в частных производных восьмого порядка — Методы решения 652, 653  
 — Уравнения Мейснера 646  
 — Уравнения неразрывности поверхности срединной 633, 634  
 — Уравнения общие 629—653  
 — Уравнения равновесия 635—638, 641, 642, 644  
 — Уравнения совместности 634, 644  
 — Условия граничные 640, 641, 648, 649  
 — Условия применимости 631  
 — Условия сопряжения упругого 640, 641, 645, 660  
 — Формула Эйлера 646
- Теория оболочек безмоментная** 648—650  
 — вращения — Метод начальных параметров 668, 669, 673; — Уравнения — Решение 660—662; — Уравнения неразрывности срединной поверхности 656, 662; — Уравнение Новожилова 662, 663; — Уравнения равновесия 658, 661  
 — пологих — Уравнения Власова 646, 647
- Теория пластичности** 58—88, 144  
 — Задача плоская 75—83  
 — Задачи технологические 83  
 — Метод нагрузок дополнительных 74  
 — Метод Ритца модифицированный 73, 74  
 — Методы общие 74, 75  
 — Методы энергетические нахождения предельных нагрузок 70, 71  
 — Принципы экстремальные 68—70  
 — Теорема Мелана 72, 127  
 — Теоремы общие 68, 71—73  
 — Уравнения 61—65, 87  
 — Уравнения Прандтля—Рейса 62, 126  
 — Уравнения Сен-Венана—Мизеса 63
- Теория ползучести** 89—112, 146  
 — Аналогия упругая 97, 101, 102, 524  
 — Задачи граничные 98  
 — Закон степенной 624  
 — Применение теории наследственности 96, 106  
 — Применение теории старения 94, 98, 99, 106  
 — Применение теории течения 92, 93, 96—99  
 — Применение теории упрочнения 95, 97  
 — Уравнения — Системы 98—100  
 — Уравнения в состоянии напряженном одноосном 92—96  
 — Уравнения в состоянии напряженном сложном 96—98  
 — Уравнения в состоянии неустановившемся — Решение 104, 105  
 — Уравнения в состоянии установившемся 97, 100  
 — — Решение — Методы 102—104  
 — Уравнения вариационные 98—101, 104, 105
- Теория старения** 94, 98, 99, 106
- Теория стержней естественно закрученных** Кирхгофа—Клебша 443—446  
 — общая — Решения приближенные 448—454; — Решения точные 446, 447  
 — техническая 454—461
- Теория течения стержней растягиваемых** 92, 93, 96—99  
 — упруго-вязких тел простых 132—134  
 — упруго-вязких тел сложных линейных 134—144; — Принцип Вольтерра 142, 143  
 — упруго-вязких тел сложных нелинейных 144—147  
 — упрочнения 95—98, 100
- Теория упругости** 22—51  
 — Задача внутренняя 47  
 — Задача основная первая и вторая 29, 36, 37, 40, 43, 48, 49—51, 56  
 — Задача основная смешанная 29, 53  
 — Задача плоская 32—40  
 — — Решение с помощью функций комплексного переменного 40  
 — — Сведения дополнительные 47—56  
 — — Условия граничные 36  
 — — Уравнения в напряжениях или смещениях 34, 35

- Задача плоская для области много-  
связной 48, 50, 51
  - Задача плоская для области одно-  
связной 47
  - — Отображение конформное 49
  - Задача плоская для полос 97, 98
  - Задача плоская для полос беско-  
нечных и для тел анизотропных 41
  - Задача плоская Ламе о трубе тол-  
стостенной 38, 143
  - Задачи 22
  - — Решение — Методы вариацион-  
ные 30—32
  - Задачи осесимметричные 42—47
  - — Уравнения в координатах сфе-  
рических 43
  - — Уравнения в координатах цилин-  
дрических 42, 43
  - Закон Гука 22—24, 64, 114, 132, 133
  - Постоянные 22, 24, 25
  - Постоянные Ламе 24, 135
  - Принцип Гамильтона 31
  - Принцип Кастильяно 31, 72, 73
  - Принцип Сен-Венана 29, 32, 34
  - — Условия применимости 38
  - Принцип минимума потенциальной  
энергии 26, 30, 31
  - Принципы вариационные 26, 30—32
  - Теорема Кастильяно 31, 505, 510,  
511
  - — Обобщения 101
  - Теоремы общие (Бетти, Клапейрона)  
30, 31
  - Уравнения — Решение — Теорема  
единственности 30, 51
  - Уравнения Бельтрами-Мичелла 27,  
28, 34
  - Уравнения в координатах ортого-  
нальных криволинейных 27, 28, 49
  - Уравнения в координатах сфериче-  
ских 43
  - Уравнения в координатах цилин-  
дрических 27, 28, 42, 43
  - Уравнения в напряжениях 27, 28,  
30, 34, 35
  - Уравнения в перемещениях 26, 27,  
34
  - Уравнения интегральные Шерма-  
на—Лауричелла 50, 51
  - Уравнения Ламе 26, 27, 30, 34, 35,  
66
  - — Решение Папковича—Нейбера  
27
  - Условия Гельдера 51
  - Условия граничные 29, 36, 49, 56
  - Условия начальные 29
  - Теория упругости моментная** 52—56; —  
Задача плоская 52, 53; — Задачи  
граничные 53, 54
  - — с тензором напряжений несимме-  
тричным 52
  - Теория усталости** 149—155
  - Гипотезы 160—162
  - Уравнения кинетические 155, 160,  
161
  - Теория усталостных разрушений ста-  
тистическая** 156—158
  - Применение 158—160
  - Фактор масштабный 153
  - Термопластичность** 114, 125 —130
  - Принципы минимума 126, 127
  - Связь с теорией деформаций упруго-  
пластических 125—130
  - Уравнения 126
  - Уравнения вариационные 126, 127
  - Термоупругость** 114—125 — см. также  
*Напряжения температурные*
  - Задача осесимметричная 122—124
  - Задача плоская 116—122
  - Задачи динамические и квазистати-  
ческие 125
  - Задачи при зависящих от темпера-  
туры упругих постоянных 124
  - Закон Гука 114
  - Постоянные — Зависимость от тем-  
пературы 114, 124
  - Принцип Кастильяно 116
  - Принцип минимума потенциальной  
энергии 115
  - Теория о взаимности работ 115
  - Уравнения 114
  - Уравнения в напряжениях или пе-  
ремещениях 115, 122, 123
  - Уравнения вариационные 115, 116
  - Термоупругость оболочек** 651, 652
  - — вращения 666, 674, 684, 685
  - — конических 713, 716, 717, 724,  
725, 731, 732
  - — сферических 739, 743, 752, 767
  - — торообразных 778, 787, 788, 798,  
799, 804, 805
  - — цилиндрических 691, 693, 700,  
701, 706, 707
  - Торы** — Изгиб моментом краевым 805,  
806
  - Изгиб усилием горизонтальным  
806, 807
  - Трубы** — Автофрезаж (упрочнение) 68
  - Напряжения температурные 117—  
119, 125
  - Напряжения температурные при  
упруго-пластическом состоянии  
128—130
  - Течение сред вязко-пластических  
145, 146
  - Трубы неравномерно нагретые** — Пол-  
зучесть 109
  - — толстостенные — Задача Ламе 38,  
143; — Ползучесть 107—109,  
110; — Разрушения вязкие —  
Время 110; — Расчет 29
  - — тонкостенные — Ползучесть 92,  
106, 107, 109, 110; — Разрушения  
вязкие — Время 110; — Состоя-  
ние напряженное плоское 59
  - — тонкостенные с доньями —  
Ползучесть 106, 107; — Расчет  
66—68
  - — упрочняющиеся — Состояние на-  
пряженное 68
- У**
- Удар тепловой** 125
  - Упрочнение** 62, 68, 504
  - Модуль 58
  - Теория 95—98, 100
  - Условия 60, 61, 64, 126, 514
  - Эффект Баушингера 59

- Упругость** — Модуль — см. *Модуль упругости*  
 — Теория — см. *Теория упругости*  
**Усталостные испытания** 150, 151  
 — Результаты — Графики 151  
 — — Обработка 152, 153  
**Усталостные разрушения** 149, 150  
 — Гипотезы суммирования 160—162  
 — Меры 160, 162, 176  
 — Модель процесса накопления 155  
 — Накопление при неоднократном циклическом нагружении 160  
 — Описание процесса математическое 155  
 — Сопротивление — Факторы влияющие 153, 154  
 — Теория статистическая 156—158  
 — — Применение 158—160  
 — — Фактор масштабный 153  
 — Трактовка как случайного марковского процесса 154, 155  
**Усталостные трещины** 149, 150, 155, 156  
**Усталость** — Кривые 150, 151, 157, 159, 177  
 — — Аппроксимации аналитические 152  
 — — Свойства статистические 156  
 — Понятия основные 149—153  
 — Теория 149—155  
 — — Гипотезы 160—162  
 — — Уравнения кинетические 155, 160, 161

## Ф

- Фермы** 184; — Усилия и реакции 185, 186  
 — — статически неопределимые — Расчет методом сил 491, 493—495  
**Функции** Крылова 227, 228, 238, 669, 694, 718, 726, 744, 753; — Производные 228; — Таблицы 670—672  
 — — Лурье—Гольдсвейзера 642  
 — — Томпсона 756, 762; — Таблицы 756—758  
 — — комплексного переменного — Теория — Использование 40

- — корреляционные процессов случайных 172  
 — — распределения величин и процессов случайных 170, 176  
**Функция** Прандтля (напряжений при кручении) 242, 243, 246, 252, 254—257, 259, 270, 278  
 — — Сен-Венанна 248—250, 258  
 — — Эри 35, 41, 788, 800 — Таблицы 789, 790

## Ц

- Цилиндры** многосвязные — Напряжения температурные 117  
 — — односвязные — Напряжения температурные 117

## Ш

- Шары** полные — Напряжения температурные 123, 135; — Расчет 43, 44  
 — — полые — Напряжения температурные 130; — Расчет 65, 66  
 — — тонкостенные — Напряжения температурные 124  
**Швеллеры** 269  
 — — Жесткость при кручении 263, 266  
**Штамп** круглые жесткие — Давление на полупространство 47  
 — — плоские — Вдавливание без трения 82

## Э

- Энергия** полная тел упругих неравномерно нагретых — Принцип минимума 126  
**Энергия** потенциальная стержней естественно закрученных 450  
 — — стержней кривых 438  
 — — тел упругих 23; — Принцип минимума 26, 30, 31, 115; — Теорема Клапейрона 30; — Уравнения 25  
**Эстакады рамные** — Расчет 501

**«ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ,  
КОЛЕБАНИЯ»**

Справочник, том 1

Под ред. И. А. Биргера  
и Я. Г. Пановко

Редактор издательства Д. В. Баженов

Технический редактор Т. Ф. Соколова

Корректор В. П. Крылова

Художник А. Я. Михайлов

---

Сдано в производство 19/VI 1967 г.

Подписано к печати 5/III 1968 г.

Т-05337. Тираж 40 000 экз.

Печ. л. 43,68 Бум. л. 13.

Уч.-изд. л. 52,8. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>

Цена 3 руб. Зак. № 1656.

---

Издательство «МАШИНОСТРОЕНИЕ»,  
Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3

---

Ленинградская типография № 6  
Главполиграфпрома Комитета  
по печати при Совете Министров СССР  
Ленинград, ул. Моисеенко, 10