

ПРОЧНОСТЬ • УСТОЙЧИВОСТЬ • КОЛЕБАНИЯ

2



ПРОЧНОСТЬ УСТОЙЧИВОСТЬ

• КОЛЕБАНИЯ

Том 2

СПРАВОЧНИК В ТРЕХ ТОМАХ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ:

И. А. Биргера и Я. Г. Пановко



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**С. А. Амбарцумян, В. Л. Бидерман,
И. А. Биргер, В. В. Болотин, А. С. Вольмир,
Л. М. Качанов, Я. Г. Пановко, В. И. Феодосьев**



Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. Под ред. д-ра техн. наук И. А. Биргера и чл.-корр. АН Латвийской ССР Я. Г. Пановко.

Во втором томе изложены методы расчета на прочность составных, анизотропных, трехслойных и армированных пластинок и оболочек, толстостенных цилиндров.

Книга предназначена для инженеров-конструкторов, расчетчиков-прочнистов машиностроительных заводов, проектных организаций, научно-исследовательских институтов. Она может быть полезна также студентам и преподавателям вузов.

Рис. 339. Табл. 37. Библ. 220 названий.

А В Т О Р Ы Т О М А:

Александров А. Я., д-р техн. наук, проф., заслуженный деятель науки и техники РСФСР; Амбарцумян С. А., академик АН Армянской ССР; Бидерман В. Л., д-р техн. наук, проф.; Биргер И. А., д-р техн. наук, проф.; Вольмир А. С., д-р техн. наук, проф.; Даревский В. М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Демьянушко И. В., канд. техн. наук; Кильдибеков И. Г., инж.; Куршин Л. М., д-р техн. наук; Макушин В. М., проф.; Розенблюм В. И., д-р техн. наук; Савельев Н. Г., канд. техн. наук; Савин Н. Г., академик АН УССР; Черных К. Ф., д-р техн. наук, проф.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ПЛАСТИНКАМ И ОБОЛОЧКАМ

Г л а в а 1. Составные оболочки вращения (К. Ф. Черных)	7
Расчет упругих колец	7
Сопряжение двух оболочек через упругое кольцо	9
Оболочки, подкрепленные по краю упругим кольцом	19
Сопряжение оболочек и их частей	24
Оболочки при разрывных температурных нагрузках	26
Составные торообразные оболочки	33
Жесткость тонкостенной консоли, подкрепленной на краю упру- гим кольцом	39
Действие произвольно направленной обратнoсимметричной на- грузки	41
Сферический резервуар на цилиндрической опоре	43
Влияние несоосности и различия в диаметрах составных оболочек	45
Литература	47
 Г л а в а 2. Оболочки под действием локальных нагрузок (В. М. Да- ревский)	 49
Введение	49
Сосредоточенные и распределенные по линии нагрузки	50
Цилиндрические оболочки	53
Местные напряжения при действии сосредоточенных нагрузок	53
Перемещения при действии сосредоточенных сил	58
Местные напряжения при действии краевых локальных нагрузок	62
Местные напряжения в цилиндрической оболочке, нагру- женной по отрезку линии кривизны	65
Свободно опертая оболочка, нагруженная по образующей	69
Свободно опертая оболочка под действием элементарных на- грузок	73
Выбор подкрепляющих накладок при действии локальных на- грузок	91
Оболочки произвольной формы под действием сосредоточенных нагрузок	93
Литература	95
 Г л а в а 3. Расчет оболочек при упруго-пластических деформациях и деформациях ползучести (В. И. Розенблюм)	 97
Расчет оболочек при упруго-пластических деформациях	97
Оболочки из упрочняющегося материала	97
Несущая способность тонких оболочек (жестко-пластический анализ)	100
Дополнительные сведения по расчету пластических оболочек	107
Расчет оболочек при ползучести	114
Установившаяся ползучесть	114
Неустановившаяся ползучесть	116
Ползучесть безмоментных оболочек	118
Литература	119

Г л а в а 4. Расчет круглых пластинок и оболочек вращения переменной толщины при упругих и упруго-пластических деформациях (И. А. Биргер, И. В. Демьянушко)	121
Изотропные круглые пластинки переменной толщины	121
Конструктивно-ортотропные круглые пластинки	127
Расчет оболочек вращения переменной толщины при упруго-пластических деформациях	133
Литература	146
 АНИЗОТРОПНЫЕ И АРМИРОВАННЫЕ ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ	
Г л а в а 5. Анизотропные пластинки (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков)	147
Основные соотношения теории изгиба	147
Изгиб прямоугольной пластинки	149
Изгиб эллиптической и круглой пластинок	151
Литература	151
 Г л а в а 6. Анизотропные оболочки вращения (С. А. Амбарцумян)	152
Общие положения и исходные соотношения	152
Безмоментная теория однослойных анизотропных оболочек вращения	158
Общая теория симметрично нагруженных ортотропных оболочек вращения	167
Частное решение и асимптотическое интегрирование уравнения (89)	173
Краевой эффект в анизотропных оболочках. Длинные оболочки вращения	178
Литература	186
 Г л а в а 7. Анизотропные цилиндрические оболочки (А. С. Амбарцумян)	187
Общие положения и исходные соотношения	187
Безмоментная теория однослойных оболочек	188
Техническая теория круговых цилиндрических оболочек, составленных из произвольного числа анизотропных слоев	192
Интегрирование уравнений технической теории методом двойных тригонометрических рядов	203
Литература	210
 Г л а в а 8. Пластины и оболочки из ориентированных стеклопластиков (В. Л. Бидерман)	211
Введение	211
Упруго-вязкие свойства связующего	211
Упругость ориентированного стеклопластика при плоском напряженном состоянии	215
Упругость ортотропного стеклопластика при одноосном напряженном состоянии	221
Зависимость деформаций анизотропного стеклопластика от времени	223
Прочность ортогонально армированного стеклопластика при плоском напряженном состоянии	226
Изотропные при плоском нагружении конструкции слоистого стеклопластика	228
Упругость армированного стеклопластика при изгибе	231
Оболочки оптимальной конструкции	232
Сетчатые оболочки вращения	235
Оболочки вращения, полученные многослойной непрерывной намоткой	237
Литература	241

ТРЕХСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ

Обозначения	243
Глава 9. Расчетные схемы и упругие параметры заполнителей (А. Я. Александров, Л. М. Куршин)	245
Общие сведения	245
Конструктивные формы. Особенности работы и расчет	245
Расчетные схемы, основные гипотезы, методы решения задач	248
Порядок расчета	256
Приведенные упругие параметры заполнителей	256
Сотовый заполнитель	256
Заполнитель типа гофра	258
Складчатый заполнитель	260
Заполнитель из армированного пенопласта	265
Глава 10. Расчет на устойчивость и изгиб (А. Я. Александров, Л. М. Куршин)	268
Расчет на общую устойчивость	268
Пластины в условиях цилиндрического изгиба	268
Прямоугольные плоские и цилиндрические панели	274
Замкнутые цилиндрические оболочки	280
Прогибы и напряжения при поперечном и продольно-поперечном изгибе	290
Пластины в условиях цилиндрического изгиба	290
Прямоугольные пластины	294
Местная устойчивость элементов панели	296
Порядок расчета	296
Сотовый заполнитель	297
Заполнитель типа гофра	300
Складчатый заполнитель	304
Заполнитель из пенопласта	305
Заполнитель из армированного пенопласта	306
Глава 11. Прочность заполнителя. Выбор оптимальных параметров панели. Примеры расчета (А. Я. Александров, Л. М. Кур- шин)	309
Проверка прочности заполнителя	309
Сотовый заполнитель	309
Заполнитель типа гофра и складчатый	310
Заполнитель из пенопласта	310
Оптимальные параметры панели	311
Пластины с заполнителем из неармированного и армированного пенопласта при продольном сжатии в условиях цилиндриче- ского изгиба	311
Пластины с сотовым заполнителем при продольном сжатии в условиях цилиндрического изгиба	314
Пластины и пологие оболочки при различных условиях опи- рания	317
Примеры расчета	320
Пример 1. Проверочный расчет пластины с сотовым запол- нителем	320
Пример 2. Определение оптимальных параметров панели	324
Литература	326

МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И РАСЧЕТ
ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

Глава 12. Концентрация напряжения около отверстий (Г. Н. Са- вин)	327
Введение	327
Напряжения около одного отверстия в изотропной среде	327
Влияние анизотропии материала	333
Напряжения возле двух отверстий	336

Напряжения возле ряда отверстий	338
Концентрация напряжений около отверстий с учетом моментных напряжений	340
Влияние подкрепляющих колец	343
Влияние вязко-упругих свойств материала	347
Появление возле отверстий пластических зон и трещин	351
Нелинейные (упругие) задачи концентрации напряжений	356
Изгиб тонких плит с отверстиями, свободными от внешних усилий	361
Изгиб тонких плит с подкрепленным круговым отверстием	362
Динамические задачи	363
Напряжения возле отверстий в тонких упругих оболочках	366
Напряженное состояние в окрестности эллипсоидальной полости	375
Литература	379
 Г л а в а 13. Теория контактных деформаций (В. М. Макушин, Н. Г. Савельев)	381
Перемещения граничных точек соприкасающихся тел	382
Деформация соприкасающихся тел в общем случае точечного контакта	383
Результаты экспериментальной проверки теории контакта	395
 Г л а в а 14. Напряженное состояние деталей в местах контакта (В. М. Макушин, Н. Г. Савельев)	396
Эллиптическая и круговая площадки контакта	396
Площадка контакта в виде полосы, ограниченной параллельными линиями	402
Влияние касательных сил на напряженное состояние в зоне кон- такта	405
Примеры расчета	406
Литература	414
 Г л а в а 15. Плоская деформация толстостенных цилиндров (В. Л. Бидерман)	416
Цилиндры, нагруженные давлением	416
Прессовые соединения	419
Скрепление цилиндров	420
Температурные напряжения в цилиндрах	422
Литература	424
 Г л а в а 16 Деформация цилиндров при переменной по длине осесим- метричной нагрузке (В. Л. Бидерман)	425
Основные уравнения	425
Точные решения задачи	427
Элементарные решения	427
Синусоидальная нагрузка на цилиндр	428
Несинусоидальная нагрузка сплошного цилиндра	431
Напряжения вблизи торца сплошного цилиндра	434
Вариационный метод расчета полых цилиндров	439
Основные уравнения	439
Цилиндр конечной длины. Выполнение условий на торцах	449
Примеры расчета и некоторые числовые результаты	450
Литература	455
 Предметный алфавитный указатель (М. З. Рафес, К. М. Хась- минская)	456

• ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ПЛАСТИНКАМ И ОБОЛОЧКАМ

Глава 1

СОСТАВНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ *

Рассмотрим некоторые характерные случаи упругого сопряжения оболочек, приведенных в гл. 22—25 т. 1, между собой, а также с упругими кольцами. Оболочки вращения, сопрягаемые с кольцевыми пластинками, рассматриваются в работах [1, 3, 16, 17, 18, 20].

РАСЧЕТ УПРУГИХ КОЛЕЦ

Рассмотрим сплошное круговое кольцо, поперечные размеры которого малы по сравнению с радиусом ([20] стр. 203, [13]). Тонкостенные кольца, а также кольца с вытянутым в каком-либо направлении поперечным сечением здесь не рассматриваются.

Примем следующие обозначения (рис. 1):

- r_k — расстояние от оси вращения до центра тяжести поперечного сечения кольца в см;
- ξ, ζ — координаты поперечного сечения в см;
- φ — координата оси кольца в рад;
- F — площадь поперечного сечения кольца в см²;
- J_v — момент инерции поперечного сечения кольца относительно радиальной оси, проходящей через центр тяжести, в см⁴;
- $W_{кр}$ — момент сопротивления на кручение поперечного сечения кольца в см³;
- J_d — момент инерции поперечного сечения кольца на кручение в см⁴;
- u_k — радиальное перемещение центра тяжести в см;
- ϑ_k — угол поворота поперечного сечения в рад;
- Q_k — погонное радиальное усилие (распор), действующее на кольцо, в дан/см;
- M_k — крутящий момент, действующий на единицу длины кольца, в дан·см/см;
- E_k — модуль упругости в дан/см²;
- ν_k — коэффициент Пуассона в см/см;

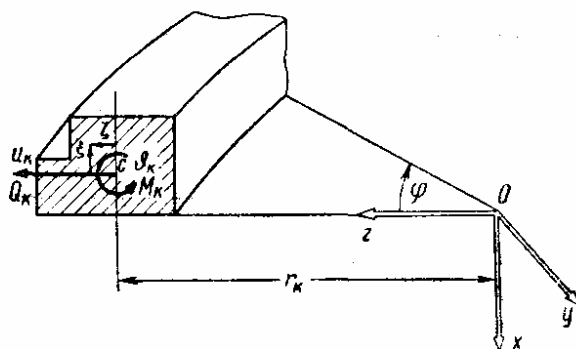


Рис. 1

* Глава написана при участии Е. И. Михайловского.

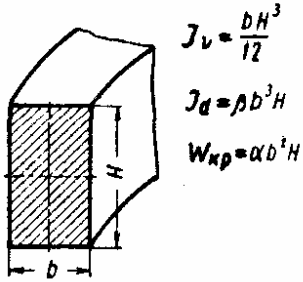
T^k — изменение температуры в кольце по сравнению с начальной температурой (при которой отсутствуют напряжения).

Далее принимаем следующий линейный закон изменения температуры по поперечному сечению кольца:

$$T^k = T_{(0)}^k + \xi T_{(1)}^k + \zeta T_{(2)}^k. \quad (1)$$

Для кольца прямоугольного сечения моменты инерции и моменты сопротивления на кручение приведены в табл. 1.

1. Моменты инерции и моменты сопротивления прямоугольного сечения при кручении

 $J_v = \frac{bH^3}{12}$ $J_d = \beta b^3 H$ $W_{кр} = \alpha b^2 H$											
$\frac{H}{b}$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333

Симметричный случай. Радиальное смещение кольца u_k и угол поворота сечения ϑ_k связаны с крутящим моментом M_k и распором Q_k соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \beta_k T_{(0)}^k r_k + \frac{r_k^2}{E_k F_k} Q_k; \\ \vartheta_k &= \beta_k T_{(1)}^k r_k + \frac{r_k^2}{E_k J_v} M_k. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Напряжения в продольных волокнах кольца определяют по формулам

$$\sigma = \frac{r_k Q_k}{F} + \frac{r_k M_k}{J_v} \xi - E_k \beta_k T_{(2)}^k \zeta. \quad (3)$$

Обратносимметричный случай. Пусть

$$T^k = \{T_{(0)}^k, 1 + \xi T_{(1)}^k, 1 + \zeta T_{(2)}^k, 1\} \cos \varphi. \quad (4)$$

Упругий поворот сечения (см. гл. 21 т. 1) обозначим, как и в симметричном случае, через ϑ_k . Под u_k будем понимать величину, связанную с относительным удлинением оси кольца ε_k соотношением

$$r_k \varepsilon_k = u_k \cos \varphi, \quad (5)$$

и пусть крутящий момент и распор меняются по закону

$$M_{\kappa} \cos \varphi, \quad Q_{\kappa} \cos \varphi. \quad (6)$$

Для обратносимметричного случая можно использовать рис. 1, если рассматривать его как сечение кольца плоскостью $\varphi = 0$.

Деформационные величины связаны соотношениями [13, 20] *

$$\left. \begin{aligned} u_{\kappa} &= \beta_{\kappa} T_{(0),1}^{\kappa} r_{\kappa} + \frac{r_{\kappa}^2 Q_{\kappa}}{E_{\kappa} F}; \\ \vartheta_{\kappa} &= \beta_{\kappa} T_{(1),1}^{\kappa} r_{\kappa} + \frac{r_{\kappa}^2 M_{\kappa}}{E_{\kappa} \left(J_v + \frac{1}{2(1+\nu_{\kappa})} J_d \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Напряжения в продольных волокнах кольца подсчитывают по формуле

$$\sigma = \left\{ \frac{r_{\kappa} Q_{\kappa}}{F} + \frac{r_{\kappa} M_{\kappa}}{J_v + \frac{1}{2(1+\nu_{\kappa})} J_d} \xi - E_{\kappa} \beta_{\kappa} T_{(2),1}^{\kappa} \right\} \cos \varphi. \quad (8a)$$

Максимальные сдвигающие напряжения

$$\tau = \frac{M_{\kappa} r_{\kappa}}{W_{\kappa p} \left[1 + 2(1+\nu_{\kappa}) \frac{J_v}{J_d} \right]}. \quad (8b)$$

СОПРЯЖЕНИЕ ДВУХ ОБОЛОЧЕК ЧЕРЕЗ УПРУГОЕ КОЛЬЦО

Выпишем условия упругого сопряжения двух длинных оболочек, стыкующихся по параллельному кругу через упругое кольцо. При этом рассмотрим два варианта.

В а р и а н т 1. В сопрягаемой оболочке I (рис. 2, а) координата, к которой отнесен меридиан оболочки, увеличивается по мере приближения к месту сопряжения. При этом в соотношениях, приведенных в т. 1: (80)—(85) гл. 21, (21)—(26) гл. 22, (26)—(32) гл. 23, (32)—(38) гл. 24 необходимо положить $\mu = 1$. При этом для всех типов оболочек вращения (за исключением пологих и торообразных)

$$\left. \begin{aligned} u_0^I &= u_0^{*I} + u_0^{\tau I} + \alpha_{11}^I (Q_0^I - Q_0^{*I}) + \alpha_{12}^I (M_0^I - M_0^{\tau I}); \\ \vartheta_0^I &= \vartheta_0^{\tau I} + \alpha_{12}^I (Q_0^I - Q_0^{*I}) + \alpha_{22}^I (M_0^I - M_0^{\tau I}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

* В работах [13, 20] формула для определения u_{κ} записана иначе: в знаменателе второго слагаемого вместо $E_{\kappa} F$ записано $E_{\kappa} \left(F + \frac{J_{\theta}}{r_{\kappa}^2} \right)$, где J_{θ} —

момент инерции сечения кольца относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости кольца. При малых поперечных размерах кольца величиной J_{θ} можно пренебречь.

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}^I &= 2 \sqrt[4]{3(1-\nu_I^2)} \left(\frac{r_0^I}{h_I} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sin \theta_0^I} \frac{1}{E_I}; \\ \alpha_{12}^I &= -2 \sqrt{3(1-\nu_I^2)} \left(\frac{r_0^I}{h_I} \right) \frac{1}{E_I h_I}; \\ \alpha_{22}^I &= 4 [3(1-\nu_I^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{r_0^I}{h_I}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_0^I}} \frac{1}{E_I h_I^2}; \\ \left[\Delta^I &= \alpha_{11}^I \alpha_{22}^I - (\alpha_{12}^I)^2 = 12(1-\nu_I^2) \left(\frac{r_0^I}{h_I} \right)^2 \frac{1}{(E_I h_I)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

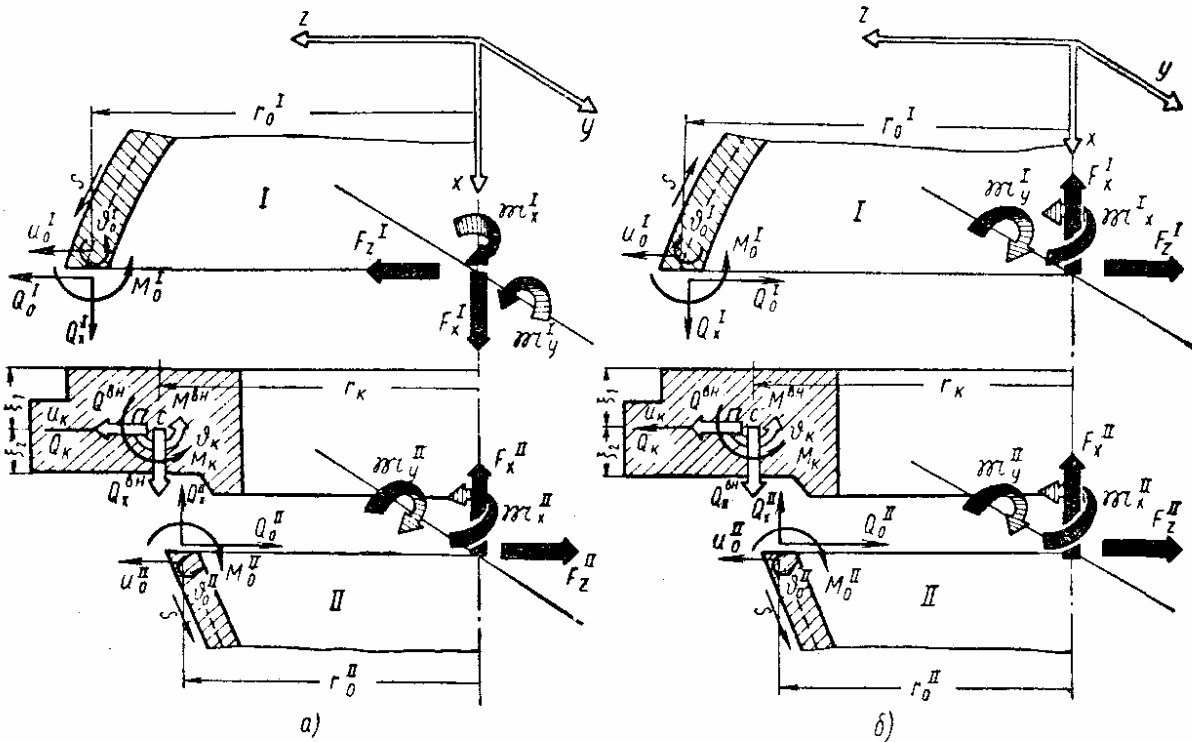


Рис. 2

В оболочке II значение координаты уменьшается по мере приближения к месту сопряжения. Поэтому для нее $\mu = -1$ и

$$\left. \begin{aligned} u_0^{II} &= u_0^{*II} + u_0^{\tau II} + \alpha_{11}^{II} (Q_0^{II} - Q_0^{*II}) + \alpha_{12}^{II} (M_0^{II} - M_0^{\tau II}); \\ \vartheta_0^{II} &= \vartheta_0^{\tau II} + \alpha_{12}^{II} (Q_0^{II} - Q_0^{*II}) + \alpha_{22}^{II} (M_0^{II} - M_0^{\tau II}), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}^{II} &= -2 \sqrt[4]{3(1-\nu_{II}^2)} \left(\frac{r_0^{II}}{h_{II}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sin \theta_0^{II}} \frac{1}{E_{II}}; \\ \alpha_{12}^{II} &= -2 \sqrt[4]{3(1-\nu_{II}^2)} \left(\frac{r_0^{II}}{h_{II}} \right) \frac{1}{E_{II} h_{II}}; \\ \alpha_{22}^{II} &= -4 [3(1-\nu_{II}^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{r_0^{II}}{h_{II}}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_0^{II}}} \frac{1}{E_{II} h_{II}^2}; \\ \left[\Delta^{II} = \alpha_{11}^{II} \alpha_{22}^{II} - (\alpha_{12}^{II})^2 = 12(1-\nu_{II}^2) \left(\frac{r_0^{II}}{h_{II}} \right)^2 \frac{1}{(E_{II} h_{II})^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Составляя условия равновесия узла (оболочка—кольцо—оболочка) и условия совместности его деформации (рис. 2, а), получаем в симметричном случае следующие условия упругого сопряжения [см. формулы (46) и (48) гл. 20]:

$$\left. \begin{aligned} Q_0^I - Q_0^{II} + Q_\kappa &= Q^{\theta H} \quad (F_x = 2\pi r Q_x); \\ M_0^I - M_0^{II} + M_\kappa + \xi_1 Q_0^I + \xi_2 Q_0^{II} + \\ + \frac{r_0^I - r_\kappa}{2\pi r_0^I} F_x^I + \frac{r_\kappa - r_0^{II}}{2\pi r_0^{II}} F_x^{II} &= M^{\theta H}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$u_0^I - \vartheta_\kappa \xi_1 = u_0^{II} + \vartheta_\kappa \xi_2 = u_\kappa; \quad \vartheta_0^I = \vartheta_0^{II} = \vartheta_\kappa; \quad (14)$$

$$F_x^I - F_x^{II} = F_x^{\theta H}; \quad u_x^I = u_x^{II} (= u_x^\kappa); \quad (15)$$

здесь $Q^{\theta H}$, $M^{\theta H}$, $F_x^{\theta H}$ — соответственно радиальное усилие, крутящий момент и осевая сила, приложенные непосредственно к кольцу; u_x^κ — вертикальное (осевое) смещение кольца.

В реальных конструкциях обычно можно пренебречь в выписанных соотношениях подчеркнутыми членами и принять их в следующем упрощенном виде:

$$Q_0^I - Q_0^{II} + Q_\kappa = Q^{\theta H}; \quad M_0^I - M_0^{II} + M_\kappa = M^{\theta H}; \quad (16)$$

$$u_0^I = u_0^{II} = u_\kappa; \quad \vartheta_0^I = \vartheta_0^{II} = \vartheta_\kappa. \quad (17)$$

Следует, однако, отметить, что часто учет отброшенных величин вносит в расчет значительные поправки. Это особенно важно для слагаемых, содержащих F_x^I и F_x^{II} , см. пример 13. Рекомендуется после расчета с помощью упрощенных условий сопряжения (16)—(17) проверить, с какой точностью найденные значения граничных величин удовлетворяют уточненным условиям сопряжения (13)—(14).

В *обратносимметричном случае* [см. формулы в т. 1: (102)—(107) гл. 21, (50)—(55) гл. 22, (54)—(60) гл. 23, (67)—(72) гл. 24] соотношения (9)—(12) и (16), (17) сохраняют силу. Вместо формул (15) применяют следующие (см. рис. 2, а):

$$\left. \begin{aligned} F_z^I - F_z^{II} &= F_z^{\text{вн}}; & \mathfrak{M}_y^I - \mathfrak{M}_y^{II} &= \mathfrak{M}_y^{\text{вн}}; \\ \vartheta_1^I &= \vartheta_1^{II}; & u_{r,1}^I &= u_{r,1}^{II}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

здесь $F_z^{\text{вн}}$, $\mathfrak{M}_y^{\text{вн}}$ — составляющие главного вектора и главного момента внешних воздействий, приложенных непосредственно к кольцу.

В а р и а н т 2. В обеих оболочках значения координат уменьшаются по мере приближения к месту сопряжения (рис. 2, б). В этом случае $\mu^I = \mu^{II} = -1$ соотношения (9), (11) и (12) сохраняют свой вид, а вместо коэффициентов (10) следует принять

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}^I &= -2 \sqrt[4]{3(1-\nu_1^2)} \left(\frac{r_0^I}{h_1} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sin \theta_0^I} \frac{1}{E_1}; \\ \alpha_{12}^I &= -2 \sqrt[4]{3(1-\nu_1^2)} \left(\frac{r_0^I}{h_1} \right) \frac{1}{E_1 h_1}; \\ \alpha_{22}^I &= -4 [3(1-\nu_1^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{r_0^I}{h_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_0^I}} \cdot \frac{1}{E_1 h_1^2}; \\ \left[\Delta^I &= \alpha_{11}^I \alpha_{22}^I - (\alpha_{12}^I)^2 = 12(1-\nu_1^2) \left(\frac{r_0^I}{h_1} \right)^2 \frac{1}{(E_1 h_1)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Мы не будем выписывать точных условий сопряжения, которые могут быть составлены самостоятельно читателем с помощью рис. 2, б. Упрощенные же условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -Q_0^I - Q_0^{II} + Q_\kappa &= Q^{\text{вн}}; & M_0^I - M_0^{II} + M_\kappa &= M^{\text{вн}}; \\ u_0^I &= u_0^{II} = u_\kappa; & -\vartheta_0^I &= \vartheta_0^{II} = \vartheta_\kappa. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Кроме того, для *симметричного случая*

$$-F_x^I - F_x^{II} = F_x^{\text{вн}}; \quad u_x^I = u_x^{II}. \quad (21)$$

Для *обратносимметричного случая*

$$\left. \begin{aligned} -F_z^I - F_z^{II} &= F_z^{\text{вн}}; & -\mathfrak{M}_y^I - \mathfrak{M}_y^{II} &= \mathfrak{M}_y^{\text{вн}}; \\ -\vartheta_1^I &= \vartheta_1^{II}; & u_{r,1}^I &= u_{r,1}^{II}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Пусть (для симметричного случая):

- 1) можно принять $r_0^I \approx r_0^{II} \approx r_\kappa$;
- 2) оболочки и кольцо сделаны из одного материала, т. е. $E_I = E_{II} = E_\kappa = E$; $\nu_I = \nu_{II} = \nu_\kappa = \nu$;

- 3) температурные воздействия отсутствуют;
 4) имеет место вариант 1 (см. выше);
 5) кольцо свободно от внешних воздействий.
 Тогда из формул (9)—(12) следует (рис. 3)

$$\left. \begin{aligned} u_0^I &= \alpha_{11} (Q_0^I - Q_0^{*I}) + \alpha_{12} M_0^I + u_0^{*I}; \\ \theta_0^I &= \alpha_{12} (Q_0^I - Q_0^{*I}) + \alpha_{22} M_0^I; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} u_0^{II} &= -\alpha_{11} \delta^3 \frac{\sqrt{\cos \alpha_2}}{\sqrt{\cos \alpha_1}} (Q_0^{II} - Q_0^{*II}) + \alpha_{12} \delta^4 M_0^{II} + u_0^{*II}; \\ \theta_0^{II} &= \alpha_{12} \delta^4 (Q_0^{II} - Q_0^{*II}) - \alpha_{22} \delta^5 \frac{\sqrt{\cos \alpha_1}}{\sqrt{\cos \alpha_2}} M_0^{II}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= 2\rho k^3 \sqrt{\cos \alpha_1} \frac{1}{E}; \\ \alpha_{12} &= -2\rho^2 k^2 \frac{1}{Eh_1}; \\ \alpha_{22} &= 4\rho^3 k \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha_1}} \frac{1}{Eh_1^2}; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}; \quad k = \sqrt{\frac{r_0}{h_1}}; \\ \rho &= \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \approx 1,285 \\ &\text{при } \nu = 0,3; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_0^I; \quad \alpha_2 = \theta_0^{II} - \frac{\pi}{2}. \quad (27)$$

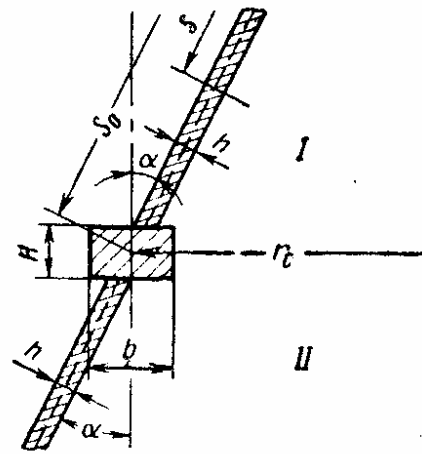


Рис. 3

Подставляя теперь полученные выражения в условия сопряжения (16)—(17), приходим с помощью соотношения (2) к следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} &\left(\alpha_{11} + \frac{r_0^2}{EF} \right) (Q_0^I - Q_0^{*I}) - \frac{r_0^2}{EF} (Q_0^{II} - Q_0^{*II}) + \\ &\quad + \alpha_{12} M_0^I = \frac{r_0^2}{EF} (Q_0^{*II} - Q_0^{*I}) - u_0^{*I}; \\ &\alpha_{12} (Q_0^I - Q_0^{*I}) + \left(\alpha_{22} + \frac{r_0^2}{EJ_v} \right) M_0^I - \frac{r_0^2}{EJ_v} M_0^{II} = 0; \\ &\frac{r_0^2}{EF} (Q_0^I - Q_0^{*I}) - \left(\alpha_{11} \delta^3 \frac{\sqrt{\cos \alpha_2}}{\sqrt{\cos \alpha_1}} + \frac{r_0^2}{EF} \right) \times \\ &\quad \times (Q_0^{II} - Q_0^{*II}) + \alpha_{12} \delta^4 M_0^{II} = \frac{r_0^2}{EF} (Q_0^{*II} - Q_0^{*I}) - u_0^{*II}; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} & \alpha_{12} \delta^4 (Q_0^{II} - Q_0^{*II}) + \frac{r_0^2}{E J_v} M_0^I - \\ & - \left(\alpha_{22} \delta^5 \frac{V \overline{\cos \alpha_1}}{V \overline{\cos \alpha_2}} + \frac{r_0^2}{E F_v} \right) M_0^{II} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Разрешая выписанную систему, получаем, используя равенства (84) гл. 21 т. 1 и пренебрегая малыми членами вида $\frac{\lambda}{\mu k^2}$ по сравнению с 1,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0}^I &= -\frac{1}{\Lambda} \left\{ \Lambda_{11} \frac{\lambda}{h_1} (Q_0^{*I} - Q_0^{*II}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{E}{r_0} [\Lambda_{12} u_0^{*I} + \Lambda_{13} u_0^{*II}] \right\} \frac{3}{\rho^2}; \\ \sigma_{M_0}^{II} &= -\frac{1}{\Lambda} \left\{ \Lambda_{21} \frac{\lambda}{h_1} (Q_0^{*I} - Q_0^{*II}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{E}{r_0} [\Lambda_{22} u_0^{*I} + \Lambda_{23} u_0^{*II}] \right\} \frac{3}{\rho^2}; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k^I &= -\frac{2}{\Lambda} \left\{ \Lambda_{31} \frac{\lambda}{h_1} (Q_0^{*I} - Q_0^{*II}) + \frac{E}{r_0} [\Lambda_{32} u_0^{*I} + \Lambda_{33} u_0^{*II}] \right\}; \\ \sigma_k^{II} &= \frac{2}{\Lambda} \left\{ \Lambda_{41} \frac{\lambda}{h_1} (Q_0^{*I} - Q_0^{*II}) + \frac{E}{r_0} [\Lambda_{42} u_0^{*I} + \Lambda_{43} u_0^{*II}] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= 1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \left(V \overline{\cos \alpha_1} + \frac{1}{\delta^5} V \overline{\cos \alpha_2} \right) + \\ & + \frac{6\lambda\mu}{\rho^4} \left[\frac{(\delta V \overline{\cos \alpha_1} + V \overline{\cos \alpha_2})^2}{\delta^5 V \overline{\cos \alpha_1} V \overline{\cos \alpha_2}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\delta^4} \right)^2 \right]; \\ \Lambda_{11} &= 1 + \frac{6\mu k}{\rho^3 \delta^4} \left(\frac{1}{\delta} V \overline{\cos \alpha_2} + V \overline{\cos \alpha_1} \right); \\ \Lambda_{12} &= 1 + \frac{6\mu k}{\rho^3 \delta^5} V \overline{\cos \alpha_2} - \frac{3\lambda\mu}{\rho^4 \delta^4} \left(1 - \frac{1}{\delta^4} \right); \\ \Lambda_{13} &= \frac{6\mu k}{\rho^3 \delta^4} V \overline{\cos \alpha_1} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4 \delta^4} \left(1 - \frac{1}{\delta^4} \right); \\ \Lambda_{21} &= 1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \left(\frac{1}{\delta} V \overline{\cos \alpha_2} + V \overline{\cos \alpha_1} \right); \\ \Lambda_{22} &= \frac{6\mu k}{\rho^3 \delta} V \overline{\cos \alpha_2} - \frac{3\lambda\mu}{\rho^4} \left(1 - \frac{1}{\delta^4} \right); \\ \Lambda_{23} &= 1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} V \overline{\cos \alpha_1} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4} \left(1 - \frac{1}{\delta^4} \right); \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{31} &= 1 + \frac{3\mu k}{\rho^3} \left[\frac{2}{\delta^5} \sqrt{\cos \alpha_2} + \left(1 + \frac{1}{\delta^4} \right) \sqrt{\cos \alpha_1} \right]; \\
\Lambda_{32} &= 1 + \frac{3\mu k}{\rho^3} \left(\frac{2}{\delta^5} \sqrt{\cos \alpha_2} + \sqrt{\cos \alpha_1} \right) + \\
&\quad + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4 \delta^3} \left(\frac{1}{\delta^5} + \frac{\sqrt{\cos \alpha_1}}{\sqrt{\cos \alpha_2}} \right); \\
\Lambda_{33} &= \frac{3\mu k}{\rho^3 \delta^4} \sqrt{\cos \alpha_1} - \frac{3\lambda\mu}{\rho^4 \delta^3} \left(\frac{1}{\delta^5} + \frac{\sqrt{\cos \alpha_1}}{\sqrt{\cos \alpha_2}} \right); \\
\Lambda_{41} &= 1 + \frac{3\mu k}{\rho^3} \left[2 \sqrt{\cos \alpha_1} + \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{\delta^4} \right) \sqrt{\cos \alpha_2} \right]; \\
\Lambda_{42} &= \frac{3\mu k}{\rho^3 \delta} \sqrt{\cos \alpha_2} - \frac{3\lambda\mu}{\rho^4} \left(1 + \frac{1}{\delta^5} \frac{\sqrt{\cos \alpha_2}}{\sqrt{\cos \alpha_1}} \right); \\
\Lambda_{43} &= 1 + \frac{3\mu k}{\rho^3} \left(2 \sqrt{\cos \alpha_1} + \frac{1}{\delta^5} \sqrt{\cos \alpha_2} \right) + \\
&\quad + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4} \left(1 + \frac{1}{\delta^5} \frac{\sqrt{\cos \alpha_2}}{\sqrt{\cos \alpha_1}} \right);
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\left. \begin{aligned}
\lambda &= \frac{r_0 h_1}{F}; & \mu &= \frac{r_0 h_1^3}{12J_v}; & \delta &= \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}; \\
k &= \sqrt{\frac{r_0}{h_1}}; & \rho &= \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}.
\end{aligned} \right\} \tag{32}$$

Имея выражения для σ_{M_0} и σ_k , нетрудно по формулам, приведенным в т. 1: (83), (85) гл. 21, (24), (26) гл. 22, (29), (32) гл. 23, (35), (38) гл. 24, подсчитать напряжения и смещения в рассматриваемой оболочке.

В частном случае очень жесткого кольца, устремляя в выписанных соотношениях $\lambda \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$, получаем случай заделанных краев. При этом

$$\sigma_{M_0}^I = -\frac{3}{\rho^2} \cdot \frac{E}{r_0} u_0^{*I}; \quad \sigma_k^I = \frac{2}{3} \rho^2 \sigma_{M_0}^I = -2 \frac{E}{r_0} u_0^{*I}; \tag{33}$$

$$\sigma_{M_0}^{II} = -\frac{3}{\rho^2} \cdot \frac{E}{r_0} u_0^{*II}; \quad \sigma_k^{II} = -\frac{2}{3} \rho^2 \sigma_{M_0}^{II} = 2 \frac{E}{r_0} u_0^{*II} \tag{34}$$

$$[\rho = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}]$$

Формулы (23)—(34) сохраняют силу и для обратносимметричного случая, если в равенствах (32) под μ понимать следующее выражение:

$$\mu = \frac{r_0 h_1^3}{12 \left[J_v + \frac{1}{2(1+\nu_k)} J_d \right]}.$$

Пример 1. Коническая оболочка с кольцевым ребром. В рассматриваемом случае (рис. 3)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha; \quad h_1 = h_2 = h; \quad \delta = 1; \\ \Lambda = 1 + \frac{12\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{24\lambda\mu}{\rho^4}; \\ \Lambda_{11} = 1 + \frac{12\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha}; \quad \Lambda_{21} = 1 + \frac{12\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha}; \\ \Lambda_{12} = 1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha}; \quad \Lambda_{22} = \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha}; \\ \Lambda_{13} = \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha}; \quad \Lambda_{23} = 1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} \\ \left[\rho = \frac{4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Для кольца прямоугольного сечения (см. табл. 1) получаем согласно равенствам (32)

$$\lambda = \frac{r_0}{b} \cdot \frac{h}{H}, \quad \mu = \frac{r_0}{b} \left(\frac{h}{H} \right)^3.$$

Предполагая, что конус со стороны своей вершины закрыт крышкой, либо соединен с оболочкой, воспринимающей давление газа p , получаем согласно формулам (12), (27) гл. 23

$$N_s^* = \frac{p \operatorname{tg} \alpha}{2} s; \quad N_\varphi^* = p \operatorname{tg} \alpha s; \quad (36)$$

$$Q_0^{*I} = Q_0^{*II} = \frac{pr_0}{2} \operatorname{tg} \alpha; \quad u_0^{*I} = u_0^{*II} = \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pr_0^2}{Eh \cos \alpha}. \quad (37)$$

Последние соотношения записаны с учетом равенства $s_0 \sin \alpha = r_0$. Подставляя полученные выражения в формулы (29) и (30), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0}^I = \sigma_{M_0}^{II} = -\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{3}{\rho^2} K \frac{pr_0}{h \cos \alpha}; \\ \sigma_k^I = \frac{2}{3} \rho^2 \sigma_{M_0}^I; \quad \sigma_k^{II} = -\frac{2}{3} \rho^2 \sigma_{M_0}^{II}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где

$$K = \frac{\rho k \sqrt{\cos \alpha}}{2\lambda + \rho k \sqrt{\cos \alpha}}.$$

Поскольку согласно формуле (36) и рис. 3

$$\sigma_s^*(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s_0} \cdot \frac{pr_0}{h \cos \alpha}; \quad \sigma_\varphi^*(p) = \frac{s}{s_0} \cdot \frac{pr_0}{h \cos \alpha}.$$

то полные напряжения в окрестности ребра подсчитывают по формулам (29) гл. 23 т. 1, которые записывают (см. табл. 1 гл. 21 т. 1) так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^{(u)} &= \left\{ -\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} K (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{pr_0}{h \cos \alpha}; \\ \sigma_\phi^{(p)} &= \left\{ \frac{s}{s_0} - \frac{2-\nu}{2} K (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{pr_0}{h \cos \alpha}; \\ \sigma_s^{(p)} &= \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s_0} \right\} \frac{pr_0}{h \cos \alpha}, \quad \sigma_\phi^{(u)} = \nu \sigma_s^{(u)}, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где для первого участка

$$\beta = \frac{2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{V h \operatorname{tg} \alpha} (V s_0 - V s),$$

для второго

$$\beta = \frac{2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{V h \operatorname{tg} \alpha} (V s - V s_0).$$

Пример 2. Круговая цилиндрическая оболочка с единичным упругим ребром (рис. 4). Обе части оболочки можно считать длинными [см. критерий (16) и (16а) гл. 22 т. 1]. Если нагрузкой является нормальное давление и торцы оболочки снабжены крышками либо присоединены к оболочкам, воспринимающим осевое давление газа p , то решение такой задачи получается из соотношений (38) и (39), если в последних положить

$$\alpha = 0; \quad \frac{s}{s_0} = 1; \quad r_0 = R.$$

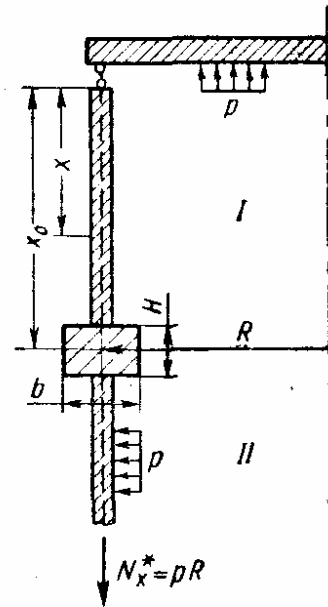


Рис. 4

При этом напряжения в окрестности ребра подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)} &= \left\{ -\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} K (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{h}; \\ \sigma_\phi^{(u)} &= \nu \sigma_x^{(u)}; \\ \sigma_\phi^{(p)} &= \left\{ 1 - \frac{2-\nu}{2} K (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta} \right\} \frac{pR}{h}; \\ \sigma_s^{(p)} &= \left\{ \frac{1}{2} \right\} \frac{pR}{h}, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где для первого участка

$$\beta = \frac{4 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{V R h} (x_0 - x);$$

для второго

$$\beta = \frac{4 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{V R h} (x - x_0).$$

При этом

$$K = \frac{\rho k}{2\lambda + \rho k}. \quad (41)$$

Для ребра прямоугольного сечения (см. табл. 1)

$$\lambda = \frac{R}{b} \cdot \frac{h}{H}; \quad \mu = \frac{R}{b} \left(\frac{h}{H} \right)^3.$$

Отметим, что, заменяя в выписанных соотношениях (39) величину $\frac{2-\nu}{2}$ на 1, получаем решения для цилиндрической оболочки с незакрытыми краями. Случай, когда сопрягаемые через кольцо оболочки короткие, следует рассматривать особо. При этом необходимо использовать формулы (62)–(67) гл. 21, (17)–(20) гл. 22, (22)–(25) гл. 23, (28)–(31) гл. 24 т. 1, удовлетворяя с их помощью условиям упругого сопряжения узла (15)–(22).

Пример 3. Круговая цилиндрическая оболочка, подкрепленная равномерно поставленными упругими кольцами. Круговая цилиндрическая оболочка подкреплена часто поставленными, равномерно распределенными одинаковыми кольцами (бандажами). Предполагая, что концы трубы воспринимают осевое (продольное) давление газа и оболочка нагрета до некоторой постоянной по толщине и вдоль оси температуры T , имеем из соотношений (8), (14) гл. 22 т. 1

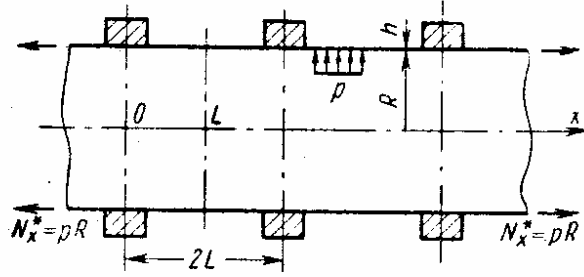


Рис. 5

$$\left. \begin{aligned} w^* &= \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{ER}; \\ \vartheta^* &= 0; \quad w^T = \alpha RT; \\ \vartheta^T &= 0; \quad M_x^T = M_\varphi^T = 0, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где α — коэффициент линейного расширения материала оболочки.

Вследствие неизменности вдоль оси внешней нагрузки и периодичности расположения ребер, достаточно рассмотреть участок оболочки $0 \leq x \leq L$ (рис. 5) для которого согласно с формулами (2) имеют место следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(0) &= 0; \quad w(0) = \frac{R^2}{E_\kappa F} 2Q_0 + \beta_\kappa RT_{(0)}^\kappa; \\ \vartheta(L) &= 0; \quad Q_r(L) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Из равенств (19) и (20) гл. 22 т. 1 следует

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{R^2}{E_\kappa F} 2Q_0 - \frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} - \Delta w^T; \quad c_2 = 0; \\ c_3 &= \frac{1}{Db^2} M_0; \quad c_4 = \frac{1}{Db^3} Q_0; \quad d_2 = 0; \quad d_4 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta w^T &= R \left(\alpha T - \beta_\kappa T_{(0)}^\kappa \right); \\ D &= \frac{Eh^3}{4\rho^4}; \quad b = \frac{\rho}{\sqrt{Rh}}; \quad \rho = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \approx 1,285 \quad (\text{при } \nu = 0,3). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Из второго и четвертого уравнений (17) и (20) гл. 22 т. 1 имеем

$$\begin{aligned} d_2 &= 4C_1 \bar{K}_3 + C_2 \bar{K}_0 + C_3 \bar{K}_1 + C_4 \bar{K}_2; \\ d_4 &= 4C_1 \bar{K}_1 - 4C_2 \bar{K}_2 - 4C_3 \bar{K}_3 + C_4 \bar{K}_0 \end{aligned} \quad [\bar{K}_i = K_i(bL)].$$

Подставляя сюда выражения (44), приходим к системе

$$\begin{aligned} \left(8 \frac{\bar{K}_3 R^2}{E_\kappa F} + \frac{\bar{K}_2}{Db^3} \right) Q_0 + \frac{\bar{K}_1}{Db^2} M_0 &= \left[2(2-\nu) \frac{pR^2}{Eh} + 4 \Delta w^T \right] \bar{K}_3; \\ \left(8 \frac{\bar{K}_1 R^2}{E_\kappa F} + \frac{\bar{K}_0}{Db^3} \right) Q_0 - \frac{4\bar{K}_3}{Db^2} M_0 &= \left[2(2-\nu) \frac{pR^2}{Eh} + 4 \Delta w^T \right] \bar{K}_1. \end{aligned}$$

решение которой имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \frac{(2-\nu) p R + \frac{2E}{k^2} \Delta w^T}{2(2\lambda + \rho k \varphi_{21})}; \\ M_0 &= \frac{1}{4b} \cdot \frac{2(2-\nu) p R \varphi_{20} + \frac{E}{k^2} \Delta w^T \varphi_{24}}{2\lambda + \rho k \varphi_{21}}, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где $\lambda = \frac{ERh}{E_k F}$, $k = \sqrt{\frac{R}{h}}$ — значения функций φ_{20} , φ_{21} , φ_{24} , приведенные в табл. 3 гл. 21 т. 1.

После определения Q_0 и M_0 по формулам (44) подсчитывают постоянные C_1 , C_3 , C_4 . Затем по формулам (17) и (18) гл. 22 т. 1 находят слагаемые краевого эффекта. Добавляя к ним безмоментные и термоупругие слагаемые, получаем полное решение рассматриваемой задачи.

Для очень жесткого кольца в соотношениях (44) и (46) необходимо положить $\lambda \rightarrow 0$, $E_k F \rightarrow \infty$. В результате получаем для короткой оболочки длиной $2L$ (рис. 5), заделанной по краям,

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{2-\nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh} - \Delta w^T; \quad C_2 = 0; \\ C_3 &= \frac{1}{Db^3} \cdot \frac{2(2-\nu) p R \varphi_{20} + \frac{E}{k^2} \Delta w^T \varphi_{24}}{4\rho k \varphi_{21}}; \\ C_4 &= \frac{1}{Db^3} \cdot \frac{(2-\nu) p R + \frac{2E}{k^2} \Delta w^T}{2\rho k \varphi_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

В случае редко поставленных ребер [см. критерий (16) и (16а) гл. 22 т. 1], используя следующие предельные значения функций

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \varphi_{20} = -\frac{1}{2}; \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \varphi_{21} = 1; \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \varphi_{24} = -2,$$

находим

$$Q_0 = -\frac{(2-\nu) p R + \frac{2E}{k^2} \Delta w^T}{2(2\lambda + \rho k)}; \quad M_0 = -\frac{1}{4b} \cdot \frac{(2-\nu) p R + \frac{2E}{k^2} \Delta w^T}{2\lambda + \rho k}$$

Нетрудно проверить, что найденные выражения отвечают рассмотренному в примере 2 случаю длинной цилиндрической оболочки с одним бандажом.

ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННЫЕ ПО КРАЮ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Длинная оболочка подкреплена по краю кольцом, к которому приложена внешняя нагрузка: распределенный изгибающий момент $M^{\theta H}$ и распор $Q^{\theta H}$. Условия сопряжения края оболочки и кольца (рис. 6, а) для оболочки, отнесенной к координате, увеличивающейся по мере приближения к краю,

$$Q_0 + Q_k = Q^{\theta H}; \quad M_0 + M_k = M^{\theta H}; \quad u_0 = u_k; \quad \vartheta_0 = \vartheta_k, \quad (48)$$

с помощью соотношений (2) и (9) могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\alpha_{11} + \frac{\lambda k^2}{E} \right) (Q_0 - Q_0^*) + \alpha_{12} M_0 &= \frac{r_0^2}{EF} (Q^{\theta H} - Q_0^*) - u_0^*; \\ \alpha_{12} (Q_0 - Q_0^*) + \left(\alpha_{12} + \frac{12\mu k^2}{Eh^2} \right) M_0 &= \frac{r_0^2}{EJ_v} M^{\theta H}, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Для оболочки, отнесенной к координате, уменьшающейся при приближении к краю (рис. 6, б),

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{3}{\rho^2} \cdot \frac{\left[\frac{\lambda}{h} (Q^{\text{вн}} + Q_0^*) - \frac{E}{r_0} u_0^* \right] + \left(\frac{k \sqrt{\cos \alpha}}{\rho} + \frac{\lambda}{2\rho^2} \right) \frac{12\mu}{h^2} M^{\text{вн}}}{1 + \frac{6k\mu}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ \sigma_k &= - \frac{2 \left(\frac{3\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + 1 \right) \left[\frac{\lambda}{h} (Q^{\text{вн}} + Q_0^*) - \frac{E}{r_0} u_0^* \right] + \frac{k \sqrt{\cos \alpha}}{\rho} \cdot \frac{12\mu}{h^2} M^{\text{вн}}}{1 + \frac{6k\mu}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}. \end{aligned} \right\} (51)$$

Если внешняя нагрузка сводится только к моменту и распору, приложенным к кольцу, то возможны два случая.

1. Координата увеличивается по мере приближения к краю:

$$\sigma_{M_0} = l_{11}\sigma_{M_0}^{\text{вн}} + l_{12}\sigma_k^{\text{вн}}; \quad \sigma_k = l_{21}\sigma_{M_0}^{\text{вн}} + l_{22}\sigma_k^{\text{вн}}, \quad (52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} l_{11} &= \frac{\frac{6\mu k \sqrt{\cos \alpha}}{\rho^3} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ l_{12} &= \frac{\frac{3\lambda}{2\rho^3 k \sqrt{\cos \alpha}}}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ l_{21} &= \frac{\frac{2\mu k \sqrt{\cos \alpha}}{\rho}}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ l_{22} &= \frac{\frac{\lambda}{k\rho \sqrt{\cos \alpha}} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ \sigma_{M_0}^{\text{вн}} &= \frac{6M^{\text{вн}}}{h^2}; \quad \sigma_k^{\text{вн}} = 2\rho k \sqrt{\cos \alpha} \frac{Q^{\text{вн}}}{h}. \end{aligned} \right\} (53)$$

Редукционные коэффициенты (53) характеризуют снижение краевых воздействий на оболочку вследствие того, что кольцо часть нагрузки «берет на себя».

Определяя перемещение и поворот сечения кольца по формулам

$$u_k = \frac{\lambda k^2}{E} (Q^{\theta H} - Q_0); \quad \vartheta_k = \frac{12\mu k^2}{Eh^2} (M^{\theta H} - M_0),$$

получаем с учетом (52), (53) [см. также (84) гл. 21 т. 1]

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \alpha'_{11} Q^{\theta H} + \alpha'_{12} M^{\theta H}; \\ \vartheta_k &= \alpha'_{21} Q^{\theta H} + \alpha'_{22} M^{\theta H}, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где величины

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{11} &= \frac{\lambda k^2}{E} \cdot \frac{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ \alpha'_{12} = \alpha'_{21} &= - \frac{6\lambda\mu k^2}{E\rho^2 h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ \alpha'_{22} &= \frac{12\mu k^2}{Eh^2} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda}{\rho k} \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

являются коэффициентами податливости края, подкрепленного кольцами, причем

$$u_0 = u_k; \quad \vartheta_0 = \vartheta_k. \quad (56)$$

2. Координата уменьшается по мере приближения к краю, вместо формул (52) и (56) следует использовать формулы

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= l_{11}\sigma_{M_0}^{\theta H} + l_{12}\sigma_k^{\theta H}; \quad \sigma_k = -l_{21}\sigma_{M_0}^{\theta H} - l_{22}\sigma_k^{\theta H}; \\ u_0 &= u_k; \quad \vartheta_0 = -\vartheta_k. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Если к кольцу не прикладываются внешние воздействия, то возможны два случая:

1. Координата возрастает по мере приближения к краю:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= - \frac{3}{\rho^2} \cdot \frac{\lambda \frac{Q_0^*}{h} + \frac{E}{r_0} u_0^*}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ \sigma_k &= - \frac{2 \left(1 + \frac{3\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} \right) \left(\lambda \frac{Q_0^*}{h} + \frac{E}{r_0} u_0^* \right)}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

2. Координата убывает:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{3}{\rho^2} \cdot \frac{\lambda \frac{Q_0^*}{h} - \frac{E}{r_0} u_0^*}{1 + \frac{6\mu k}{Q^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}; \\ \sigma_k &= - \frac{2 \left(1 + \frac{3\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} \right) \left[\lambda \frac{Q_0^*}{h} - \frac{E}{r_0} u_0^* \right]}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda\mu}{\rho^4}}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Пример 4. Сферическая крышка, подкрепленная упругим кольцом (рис. 7). В качестве расчетной нагрузки примем нормальное давление газа. Тогда из формул (15), (16), (33) гл. 24 т. 1 следует

$$N_\theta^* = N_\varphi^* = \frac{\rho R}{2}; \quad Q_0^* = \frac{\rho R}{2} \cos \theta_0; \quad u_0^* = u_r(\theta_0) = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\rho R^2 \sin \theta_0}{Eh}. \quad (60)$$

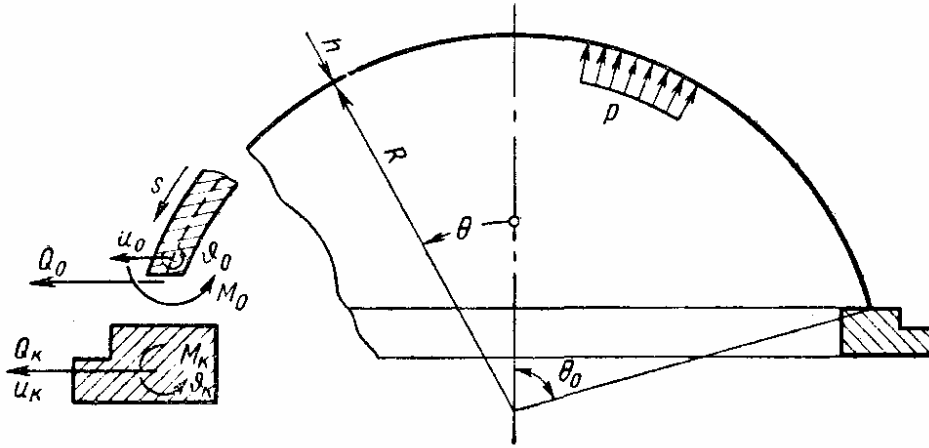


Рис. 7

Подставляя выписанные выражения в формулы (58) и учитывая, что $r_0 = R \sin \theta_0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0} &= \frac{1 + \frac{\cos \theta_0}{1-\nu} \lambda}{1 + \frac{6\mu k}{Q^3} \sqrt{\sin \theta_0} + \frac{3\lambda\mu}{Q^4}} \bar{\sigma}_{M_0}; \\ \sigma_k &= - \frac{\left(1 + \frac{3\mu k}{Q^3} \sqrt{\sin \theta_0} \right) \left(1 + \frac{\cos \theta_0}{1-\nu} \lambda \right)}{1 + \frac{6\mu k}{Q^3} \sqrt{\sin \theta_0} + \frac{3\lambda\mu}{Q^4}} \bar{\sigma}_k, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

где (см. пример 4 гл. 24 т. 1) величины

$$\bar{\sigma}_{M_0} = - \frac{3(1-\nu)}{2Q^2} \cdot \frac{\rho R}{h}; \quad \bar{\sigma}_k = - (1-\nu) \frac{\rho R}{h} \quad (62)$$

отвечают заделке края (очень жесткое кольцо). Теперь для расчета сферической оболочки, подкрепленной кольцом, можно воспользоваться решением, приведенным в примере 4 гл. 24 т. 1, принимая в нем в качестве σ_{M_0} и σ_k выражения (61).

СОПРЯЖЕНИЕ ОБОЛОЧЕК И ИХ ЧАСТЕЙ

Две длинные оболочки упруго сопряжены и имеют одинаковые упругие постоянные. При отсутствии температурных воздействий можно

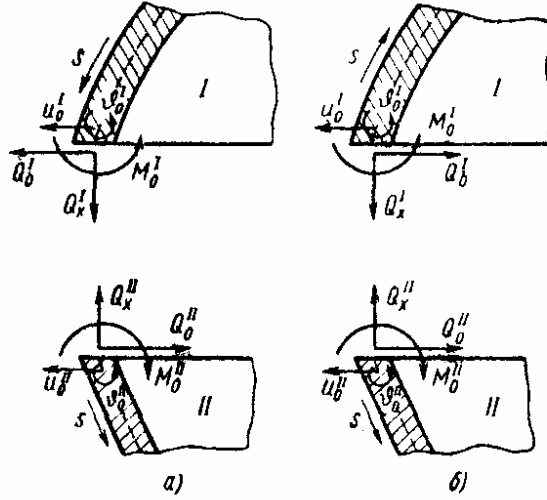


Рис. 8

воспользоваться соотношениями (23)–(27). Условия упругого сопряжения (рис. 8, а)

$$Q_0^I = Q_0^{II} = Q_0; M_0^I = M_0^{II} = M_0; u_0^I = u_0^{II}; \vartheta_0^I = \vartheta_0^{II} \quad (63)$$

приводят к системе

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} \left(1 + \delta^3 \sqrt{\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}} \right) Q_0 + \alpha_{12} (1 - \delta^4) M_0 = \\ = \alpha_{11} \left(Q_0^{*I} + \delta^3 \sqrt{\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}} Q_0^{*II} \right) + (u_0^{*II} - u_0^{*I}); \\ \alpha_{12} (1 - \delta^4) Q_0 + \alpha_{22} \left(1 + \delta^5 \sqrt{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}} \right) M_0 = \\ = \alpha_{12} (Q_0^{*I} - \delta^4 Q_0^{*II}). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Решая ее и используя формулы (84) гл. 21, находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0}^I &= \frac{\Lambda_1 \left(\frac{Q_0^{*II}}{h_2} - \delta^2 \frac{Q_0^{*I}}{h_1} \right) + \Lambda_2 \frac{E}{r_0} (u_0^{*II} - u_0^{*I})}{\Lambda'}; \\ \sigma_k^I &= \frac{\Lambda_3 \left(\frac{Q_0^{*II}}{h_2} - \delta^2 \frac{Q_0^{*I}}{h_1} \right) + \Lambda_4 \frac{E}{r_0} (u_0^{*II} - u_0^{*I})}{\Lambda'}; \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

$$\sigma_{M_0}^{II} = \delta^4 \sigma_{M_0}^I; \sigma_k^{II} = \frac{-\Lambda_5 \left(\frac{Q_0^{*II}}{h_2} - \delta^2 \frac{Q_0^{*I}}{h_1} \right) + \Lambda_6 \frac{E}{r_0} (u_0^{*II} - u_0^{*I})}{\Lambda'}, \quad (66)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \Lambda' &= (1 + \delta^4)^2 + 2\delta^3 \left(\sqrt{\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}} + \delta^2 \sqrt{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}} \right); \\
 \Lambda_1 &= \frac{6k\delta}{Q} (\sqrt{\cos \alpha_2} + \delta \sqrt{\cos \alpha_1}); \quad \Lambda_2 = \frac{3}{Q^2} (1 - \delta^4); \\
 \Lambda_3 &= 2\rho k\delta [2\sqrt{\cos \alpha_2} + \delta(1 + \delta^4)\sqrt{\cos \alpha_1}]; \\
 \Lambda_4 &= 2 \left(1 + \delta^5 \sqrt{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}} \right); \\
 \Lambda_5 &= 2\rho k\delta [2\delta^5 \sqrt{\cos \alpha_1} + (1 + \delta^4)\sqrt{\cos \alpha_2}]; \\
 \Lambda_6 &= 2\delta^3 \left(\delta^5 + \sqrt{\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}} \right); \\
 \left(k &= \sqrt{\frac{r_0}{h_1}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Подсчитав по приведенным формулам $\sigma_{M_0}^I, \sigma_k^I; \sigma_{M_0}^{II}, \sigma_k^{II}$, с помощью формул (83), (85) гл. 21, (24), (26) гл. 22, (29), (32) гл. 23, (35), (38) гл. 24 определяем напряжения и смещения.

Пример 5. Цилиндрический сосуд со скачкообразно меняющейся толщиной. Толщина стенки цилиндрического сосуда, подверженного давлению газа p , претерпевает скачок в сечении x_0 (рис. 9), причем обе части цилиндра можно считать длинными. В этом случае [см. формулу (8) гл. 22 т. 1]

$$Q_0^{*I} = Q_0^{*II} = 0; \quad u_0^{*I} = \frac{2 - \nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh_1};$$

$$u_0^{*II} = \frac{2 - \nu}{2} \cdot \frac{pR^2}{Eh_2}$$

и формулы (65)–(67) дают

$$\sigma_{M_0}^I = -\frac{3(2 - \nu)}{2Q^2} \cdot \frac{(1 - \delta^2)(1 - \delta^4)}{(1 + \delta^4)^2 + 2\delta^3(1 + \delta^2)} \cdot \frac{pR}{h_1};$$

$$\sigma_k^I = -(2 - \nu) \frac{(1 + \delta^5)(1 - \delta^2)}{(1 + \delta^4) + 2\delta^3(1 + \delta^2)} \cdot \frac{pR}{h_1};$$

$$\sigma_{M_0}^{II} = -\frac{3(2 - \nu)}{2Q^2} \cdot \frac{\delta^2(1 - \delta^2)(1 - \delta^4)}{(1 + \delta^4)^2 + 2\delta^3(1 + \delta^2)} \cdot \frac{pR}{h_2};$$

$$\sigma_k^{II} = -(2 - \nu) \frac{\delta(1 + \delta^5)(1 - \delta^2)}{(1 + \delta^4) + 2\delta^3(1 + \delta^2)} \cdot \frac{pR}{h_2}.$$

Теперь для подсчета напряжений и смещений следует использовать формулы (63)–(65) гл. 22 т. 1.

Пример 6. Цилиндрическая оболочка (обечайка) со стандартным эллиптическим днищем. Рассмотрим цилиндрическую оболочку под давлением, закрытую полным эллиптическим днищем той же толщины ($\delta = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = 1$).

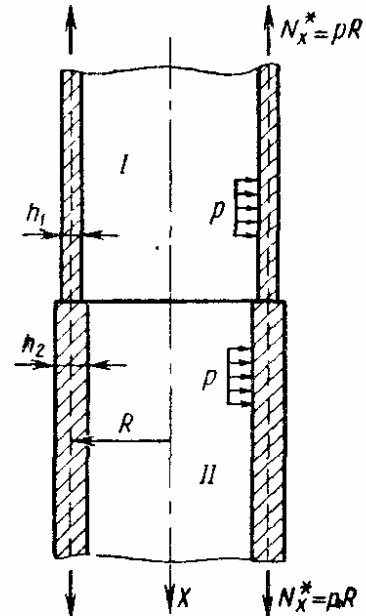


Рис. 9

По котельным нормам используют эллиптические днища с высотой, равной $\frac{1}{2} r_0$. Для таких днищ (близким к днищам равного сопротивления [20])

$$R_\theta = \frac{2r_0}{(1+3\sin^2 \theta)^{3/2}}; \quad R_\varphi = \frac{2r_0}{(1+3\sin^2 \theta)^{1/2}}.$$

Согласно формулам (50), (53) гл. 21 т. 1 ($q_n = p$; $q_\theta = 0$)

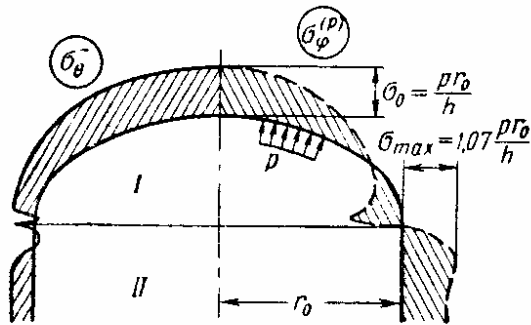


Рис. 10

$$\left. \begin{aligned} N_\theta^{*I} &= \frac{pr_0}{(1+3\sin^2 \theta)^{1/2}}; \\ N_\varphi^{*I} &= \frac{(1-3\sin^2 \theta) pr_0}{(1+3\sin^2 \theta)^{1/2}}; \\ Q_0^{*I} &= Q_0^{*II} = 0; \\ u_0^{*I} &= -\frac{(2+\nu) pr_0^2}{2Eh}; \\ u_0^{*II} &= \frac{(2-\nu) pr_0^2}{2Eh}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Формулы (65)–(67) дают

$$\sigma_{M_0}^I = 0; \quad \sigma_k^I = \frac{pr_0}{h}; \quad \sigma_{M_0}^{II} = 0; \quad \sigma_k^{II} = \frac{pr_0}{h}. \quad (69)$$

По полученным выражениям с помощью формул (67) и (83), (85) гл. 21 т. 1 и подсчитывают напряжения и смещения. Эпюры характерных напряжений показаны на рис. 10.

ОБОЛОЧКИ ПРИ РАЗРЫВНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАГРУЗКАХ

В оболочке температура или ее производные претерпевают скачок в некотором сечении $\theta = \theta_0$ (рис. 11), причем обе части оболочки можно считать длинными [см. критерий (61) гл. 21 т. 1]. Считая, что внешняя нагрузка отсутствует, получаем согласно формулам (102) гл. 21 т. 1:

для первого участка

$$\left. \begin{aligned} u_0^I &= \alpha_{11} Q_0^I + \alpha_{12} (M_0^I - M_0^{rI}) + u_0^{rI}; \\ \vartheta_0^I &= \alpha_{12} Q_0^I + \alpha_{22} (M_0^I - M_0^{rI}) + \vartheta_0^{rI}; \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

для второго участка

$$\left. \begin{aligned} u_0^{II} &= -\alpha_{11} Q_0^{II} + \alpha_{12} (M_0^{II} - M_0^{rII}) + u_0^{rII}; \\ \vartheta_0^{II} &= \alpha_{12} Q_0^{II} - \alpha_{22} (M_0^{II} - M_0^{rII}) + \vartheta_0^{rII}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= 2\rho k^3 \sqrt{\sin \theta_0} \frac{1}{E}; \quad \alpha_{22} = -2\rho^2 k^2 \frac{1}{Eh}; \\ \alpha_{22} &= 4\rho^3 k \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_0}} \cdot \frac{1}{Eh^2}; \\ \rho &= \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}; \quad k = \sqrt{\frac{r_0}{h}}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Условия упругого сопряжения обоих участков

$$Q_0^I = Q_0^{II} = Q_0; \quad M_0^I = M_0^{II} = M_0; \quad u_0^I = u_0^{II}; \quad \vartheta_0^I = \vartheta_0^{II} \quad (73)$$

приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} 2\alpha_{11}Q_0 &= \alpha_{12}(M_0^{I'} - M_0^{II'}) + (u_0^{I'} - u_0^{II}); \\ 2\alpha_{22}M_0 &= \alpha_{22}(M_0^{I'} + M_0^{II'}) + (\vartheta_0^{I'} - \vartheta_0^{II}). \end{aligned}$$

Из них, пользуясь соотношениями (106) гл. 21 т. 1, находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k &= \frac{\rho^2}{6} (\sigma_{M_0}^{I'} - \sigma_{M_0}^{II'}) + \frac{E}{2r_0} (u_0^{I'} - u_0^{II}); \\ \sigma_{M_0} &= \frac{1}{2} (\sigma_{M_0}^{I'} + \sigma_{M_0}^{II'}) + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{\rho^3 k} E (\vartheta_0^{I'} - \vartheta_0^{II}), \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

где

$$\sigma_{M_0}^{I'} = \frac{6M_0^{I'}}{h^2}, \quad \sigma_{M_0}^{II'} = \frac{6M_0^{II'}}{h^2}.$$

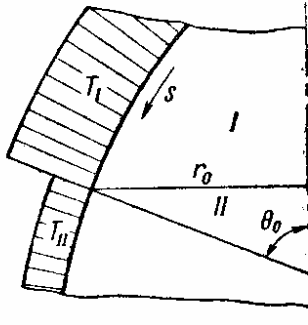


Рис. 11

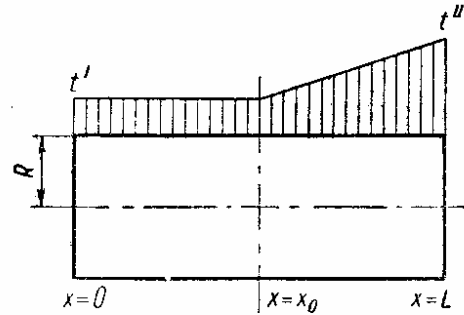


Рис. 12

Пример 7. Цилиндрическая оболочка с кусочно-линейно изменяющейся температурой. Пусть оболочка может быть разбита на две части, так что (рис. 12) на первом участке $T^+ = T^- = t^I$, а на втором $T^+ = T^- = t^I + (t^{II} - t^I) \frac{x - x_0}{L - x_0}$ (t^I, t^{II} — постоянные).

Считая обе части длинными, получаем согласно формулам (13)–(15) гл. 22 т. 1

$$\left. \begin{aligned} M_x^{I'} &= M_\varphi^{I'} = M_x^{II'} = M_\varphi^{II'} = 0; \quad w^{I'} = \alpha R t^I; \quad \vartheta^{I'} = 0; \\ w^{II'} &= \alpha R \left\{ t^I + (t^{II} - t^I) \frac{x - x_0}{L - x_0} \right\}; \\ \vartheta^{II'} &= -\alpha (t^{II} - t^I) \frac{R}{L - x_0}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Отсюда следует (в сечении $x = x_0$)

$$\sigma_{M_0}^{rI} = \sigma_{M_0}^{rII} = 0; \quad u_0^{rII} - u_0^{rI} = 0; \quad \vartheta_0^{rI} = 0;$$

$$\vartheta_0^{rII} = -\alpha (t^{II} - t^I) \frac{R}{L - x_0}$$

и

$$\sigma_k = 0; \quad \sigma_{M_0} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{E\alpha (t^{II} - t^I)}{q^2 k} \cdot \frac{R}{L - x_0}.$$

Согласно формулам (24) гл. 22 т. 1

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)} &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{E\alpha (t^{II} - t^I)}{3 \frac{4}{[3(1-\nu^2)]}} \sqrt{\frac{h}{R}} \cdot \frac{R}{L - x_0} (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_\varphi^{(u)} &= \nu \sigma_x^{(u)}; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{E\alpha (t^{II} - t^I)}{4 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \cdot \frac{R}{L - x_0} (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \quad \sigma_x^{(p)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

причем для первого участка

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} (x_0 - x);$$

для второго

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} (x - x_0).$$

Максимальными являются изгибные напряжения в сечении $x = x_0$

$$\sigma_{\max} = |\sigma_x^{(u)}(x_0)| = |\sigma_{M_0}|.$$

В примерах 8 и 9 рассмотрены случаи, когда температура и коэффициент линейного расширения изменяются скачком. Полученные по теории тонких оболочек решения недостаточны для суждения о прочности конструкции. В рассматриваемом случае может возникнуть (в зоне перехода) сложное объемное напряженное состояние [см. работу [5]].

Пример 8. Цилиндрическая оболочка с температурой, изменяющейся скачком. Такую оболочку можно разбить на две части, так что на первом участке $T^+ = T^- = t^I$, а на втором — $T^+ = T^- = t^{II}$.

Согласно формулам (13)–(15) гл. 22 т. 1

$$\left. \begin{aligned} M_x^{rI} &= M_\varphi^{rI} = M_x^{rII} = M_\varphi^{rII} = 0; \\ w^{rI} &= \alpha t^I R; \quad \vartheta^{rI} = 0; \quad w^{rII} = \alpha t^{II} R; \quad \vartheta^{rII} = 0 \\ \text{и} \\ \sigma_{M_0}^{rI} &= \sigma_{M_0}^{rII} = 0; \quad \vartheta_0^{rI} = \vartheta_0^{rII} = 0; \\ u_0^{rI} &= \alpha t^I R; \quad u_0^{rII} = \alpha t^{II} R. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Из формул (74)

$$\sigma_k = \frac{E\alpha (t^{II} - t^I)}{2}; \quad \sigma_{M_0} = 0.$$

Согласно формулам (24)–(25) гл. 22 т. 1 и (77) для первого участка ($0 \leq x \leq x_0$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)} &= -\frac{3}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} E\alpha (t^{II} - t^I) \sin \beta e^{-\beta}; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_x^{(u)}; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= \frac{E\alpha (t^{II} - t^I)}{2} \cos \beta e^{-\beta}; \quad \sigma_x^{(p)} = 0; \\ \beta &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} (x_0 - x); \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

для второго участка ($x_0 \leq x \leq L$) напряжения меняют знак, а

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} (x - x_0).$$

Рассмотрим оболочку, составленную из двух длинных частей, имеющих различную толщину, упругие постоянные и коэффициент линейного расширения, нагретую на постоянную температуру T_0 . Другие внешние воздействия отсутствуют.

Согласно соотношениям (80) гл. 21 т. 1

для первого участка

$$\left. \begin{aligned} u_0^I &= \alpha_{11}^I Q_0^I + \alpha_{12}^I (M_0^I - M_0^{rI}) + u_0^{rI}; \\ \vartheta_0^I &= \alpha_{12}^I Q_0^I + \alpha_{22}^I (M_0^I - M_0^{rI}) + \vartheta_0^{rI}, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^I &= 2\sqrt[4]{3(1+\nu_1^2)} \left(\frac{r_0}{h_1}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\cos \alpha_1} \frac{1}{E_1}; \\ \alpha_{12}^I &= -2\sqrt[4]{3(1-\nu_1^2)} \left(\frac{r_0}{h_1}\right) \frac{1}{E_1 h_1}; \\ \alpha_{22}^I &= 4[3(1-\nu_1^2)]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{r_0}{h_1}} \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha_1}} \cdot \frac{1}{E_1 h_1^2}; \\ u_0^{rI} &= \alpha_1 r_0 T_0; \quad \vartheta_0^{rI} = 0; \quad M_0^{rI} = 0; \end{aligned}$$

для второго участка

$$\left. \begin{aligned} u_0^{II} &= \alpha_{11}^{II} Q_0^{II} + \alpha_{12}^{II} (M_0^{II} - M_0^{rII}) + u_0^{rII}; \\ \vartheta_0^{II} &= \alpha_{12}^{II} Q_0^{II} + \alpha_{22}^{II} (M_0^{II} - M_0^{rII}) + \vartheta_0^{rII}, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{II} &= -2\sqrt[4]{3(1-\nu_2^2)} \left(\frac{r_0}{h_2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\cos \alpha_2} \frac{1}{E_2}; \\ \alpha_{12}^{II} &= -2\sqrt[4]{3(1-\nu_2^2)} \left(\frac{r_0}{h_2}\right) \frac{1}{E_2 h_2}; \end{aligned}$$

$$\alpha_{22}^{II} = -4 \left[3 (1 - \nu_2^2) \right]^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{r_0}{h_2}} \cdot \frac{1}{E_2 h_2^2}; \quad u_0^{II} = \alpha_2 r_0 T_0;$$

$$\vartheta_0^{II} = 0; \quad M_0^{II} = 0.$$

Удовлетворяя с помощью выписанных выражений условиям упругого сопряжения частей

$$M_0^I = M_0^{II} = M_0; \quad Q_0^I = Q_0^{II} = Q_0; \quad u_0^I = u_0^{II}; \quad \vartheta_0^I = \vartheta_0^{II},$$

приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{11}^I - \alpha_{11}^{II}) Q_0 + (\alpha_{12}^I - \alpha_{12}^{II}) M_0 &= (\alpha_2 - \alpha_1) r_0 T_0; \\ (\alpha_{12}^I - \alpha_{12}^{II}) Q_0 + (\alpha_{22}^I - \alpha_{22}^{II}) M_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Решая ее и используя соотношения (84) гл. 21 т. 1, получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0}^I &= \frac{1}{\delta^4} \sigma_{M_0}^{II} = \frac{3E_1 (\alpha_2 - \alpha_1) T_0}{\sqrt{3 (1 - \nu_1^2)}} \Psi_1; \\ \sigma_k^I &= \frac{\kappa n}{\delta^3} \sigma_k^{II} = 2E_1 (\alpha_2 - \alpha_1) T_0 \Psi_2, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1 - \lambda \delta^2 n}{(1 + \lambda \delta^2 n^2)^2 + 2\lambda \delta n \left(\delta^2 \kappa + \frac{n^2}{\kappa} \right)}; \\ \Psi_2 &= \frac{1 + \lambda \delta^3 n \kappa}{(1 + \lambda \delta^2 n^2)^2 + 2\lambda \delta n \left(\delta^2 \kappa + \frac{n^2}{\kappa} \right)}; \\ \delta &= \sqrt[4]{\frac{h_1}{h_2}}; \quad \lambda = \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1^2} \bigg/ \frac{E_2 h_2}{1 - \nu_2^2}; \quad n = \sqrt[4]{\frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_2^2}}; \\ \kappa &= \sqrt{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

После подсчета по приведенным формулам величин $\sigma_{M_0}^I$, σ_k^I , $\sigma_{M_0}^{II}$, σ_k^{II} напряжения и смещения определяют (в зависимости от вида оболочки) по формулам, приведенным в т. 1: (83), (85) гл. 21, (24), (26) гл. 22, (29), (32) гл. 23 и (35), (38) гл. 24.

Пример 9. Цилиндрическая оболочка, части которой различаются лишь коэффициентом линейного расширения (рис. 13). Для рассматриваемой оболочки в соотношениях (82)–(83) следует положить $\delta = \lambda = n = \kappa = 1$. В результате получим

$$\sigma_{M_0}^I = \sigma_{M_0}^{II} = 0; \quad \sigma_k^I = \sigma_k^{II} = \frac{E (\alpha_2 - \alpha_1) T_0}{2}. \quad (84)$$

Формулы, приведенные на стр. 705 гл. 22 т. 1, дают для первого участка

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)} &= -\frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{E(\alpha_2 - \alpha_1)T_0}{2} \sin \beta e^{-\beta}; \quad \sigma_\varphi^{(u)} = \nu \sigma_x^{(u)}; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= \frac{E(\alpha_2 - \alpha_1)T_0}{2} \cos \beta e^{-\beta}; \quad \sigma_x^{(p)} = 0; \\ \beta &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} (x_0 - x), \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

а для второго напряжения меняют знак и

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} (x - x_0).$$

Пример 10. Круговая цилиндрическая оболочка с температурой, линейно меняющейся на коротком участке (рис. 14). Пусть оболочка может быть разбита на три участка так, что равномерная по толщине оболочки температура изменяется по закону

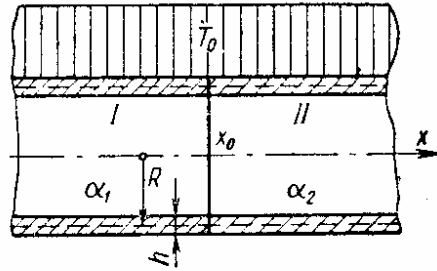


Рис. 13

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} T_0 & x \leq -\frac{1}{2} L; \\ -T_0 \frac{x}{L} & -\frac{1}{2} L \leq x \leq \frac{1}{2} L; \\ -\frac{1}{2} T_0 & \frac{1}{2} L \leq x. \end{cases} \quad (86)$$

Наложением на рассматриваемое температурное поле постоянной температуры можно получить линейный переход от участка с одной произвольной постоянной температурой к участку с другой, также произвольной постоянной

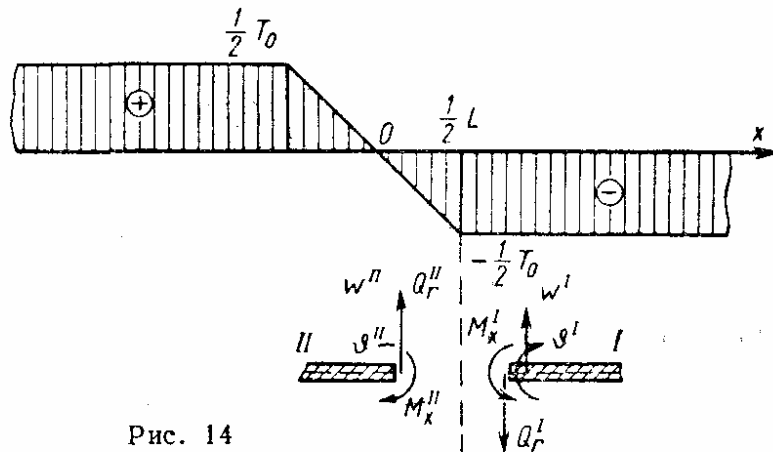


Рис. 14

температурой. Как было показано в примере 3 гл. 22 т. 1, добавление постоянной температуры не отражается на напряженном состоянии оболочки. При незакрепленных краях увеличивается лишь диаметр оболочки.

В силу кососимметрии температуры, а следовательно, и напряженного состояния можно ограничиться рассмотрением лишь правой части оболочки ($x \geq 0$). Будем при этом считать, что участок I с постоянной температурой длинен [выполняется критерий (16) и (16а) гл. 22 т. 1], а переходный участок II короток.

Используя для последнего соотношения (17) гл. 22 т. 1 из условий косо-симметрии

$$\omega(0) = 0; \quad M_x(0) = 0, \quad (87)$$

получаем

$$C_1 = 0; \quad C_3 = 0. \quad (88)$$

Поэтому для сечения $x = \frac{1}{2}L$ параметры (20) гл. 22 т. 1 принимают вид

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= -C_2 \bar{K}_1 - C_4 \bar{K}_3; & d_2 &= C_2 \bar{K}_0 + C_4 \bar{K}_2; \\ d_3 &= -4C_2 \bar{K}_3 + C_4 \bar{K}_1; & d_4 &= -4C_2 \bar{K}_2 + C_4 \bar{K}_0. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Условия же упругого сопряжения оболочек I и II записывают так:

$$\left. \begin{aligned} \omega^I \left(\frac{1}{2} L \right) &= \omega^{II} \left(\frac{1}{2} L \right); & \vartheta^I \left(\frac{1}{2} L \right) &= \vartheta^{II} \left(\frac{1}{2} L \right); \\ M_x^I \left(\frac{1}{2} L \right) &= M_x^{II} \left(\frac{1}{2} L \right); & Q_r^I \left(\frac{1}{2} L \right) &= Q_r^{II} \left(\frac{1}{2} L \right). \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае

$$\left. \begin{aligned} \omega^{rI} \left(\frac{1}{2} L \right) &= \omega^{rII} \left(\frac{1}{2} L \right) = -\frac{\alpha T_0 R}{2}; & \vartheta^{rI} &= 0; \\ \vartheta^{rII} &= \alpha T_0 \frac{R}{L}; & M^{rI} &= M^{rII} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

и используя формулы (17), (19) гл. 22 т. 1, (65) гл. 21 т. 1, а также равенства (89), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 2C_2 \sin \frac{\beta_0}{2} - C_4 \cos \frac{\beta_0}{2} &= 0; \\ 2C_2 \cos \frac{\beta_0}{2} + C_4 \sin \frac{\beta_0}{2} &= -2\alpha R T_0 \frac{1}{\beta_0} e^{-\frac{\beta_0}{2}} \\ &\left(\beta_0 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} L \right), \end{aligned}$$

из которой следует

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{\alpha R T_0}{\beta_0} e^{-\frac{\beta_0}{2}} \cos \frac{\beta_0}{2}; \\ C_4 &= -2 \frac{\alpha R T_0}{\beta_0} e^{-\frac{\beta_0}{2}} \sin \frac{\beta_0}{2}. \end{aligned}$$

Напряжения на участке II $\left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$ подсчитывают с помощью табл. 1 гл. 21 т. 1 по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)} &= -\frac{3E\alpha T_0}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \left\{ \sin \frac{\beta_0}{2} K_1(\beta) - 2 \cos \frac{\beta_0}{2} K_3(\beta) \right\} \frac{1}{\beta_0} e^{-\frac{\beta_0}{2}}; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= E\alpha T_0 \left\{ \cos \frac{\beta_0}{2} K_1(\beta) + 2 \sin \frac{\beta_0}{2} K_3(\beta) \right\} \frac{1}{\beta_0} e^{-\frac{\beta_0}{2}}; \\ \sigma_\varphi^{(u)} &= \nu \sigma_x^{(u)}; & \sigma_x^{(p)} &= 0 \\ &\left(\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} x \right). \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

На участке I $x \geq \frac{L}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)} &= -\frac{3E\alpha T_0}{4\sqrt{3}(1-\nu^2)} e^{-\beta} (\eta_1 \cos \beta + \eta_2 \sin \beta); & \sigma_\varphi^{(u)} &= \nu \sigma_x^{(u)}; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= \frac{E\alpha T_0}{4} e^{-\beta} (\eta_2 \cos \beta - \eta_1 \sin \beta); & \sigma_x^{(p)} &= 0 \\ \beta &= \frac{4\sqrt{3}(1-\nu^2)}{\sqrt{Rh}} \left(x - \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

где

$$\eta_1 = \frac{1 - e^{-\beta_0} (\cos \beta_0 + \sin \beta_0)}{\beta_0}; \quad \eta_2 = \frac{1 - e^{-\beta_0} (\cos \beta_0 - \sin \beta_0)}{\beta_0}.$$

Приведенные формулы дают возможность назначать длину переходного участка L так, чтобы термоупругие напряжения не превышали приемлемой величины. Устремляя $\beta_0 \rightarrow 0$ и учитывая, что $\lim_{\beta_0 \rightarrow 0} \eta_1 = 0$, $\lim_{\beta_0 \rightarrow 0} \eta_2 = 2$, приходим к случаю со скачкообразным изменением температуры, рассмотренному в примере 8.

Пример 11. Сферическая оболочка с температурой, линейно меняющейся на коротком переходном участке. Равномерная по толщине температура меняется вдоль меридиана по следующему закону (рис. 15):

$$T(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} T_0 & \theta \leq \theta_1; \\ T_0 \frac{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \theta}{\theta_2 - \theta_1} & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \\ -\frac{1}{2} T_0 & \theta_2 \leq \theta. \end{cases}$$

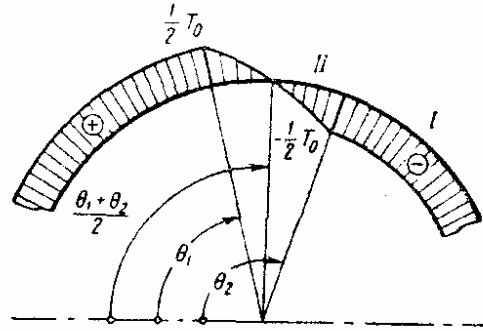


Рис. 15

Решение этой задачи по форме не отличается от рассмотренного в предыдущем примере. Так, напряжения на участке II $\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \leq \theta \leq \theta_2 \right)$ подсчитывают по формулам (92), в которых теперь следует полагать $\beta = \frac{4\sqrt{3}(1-\nu^2)}{\sqrt{Rh}} \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)$. На участке I $(\theta_2 \leq \theta)$ используют формулы (93), в которых

$$\beta = \frac{4\sqrt{3}(1-\nu^2)}{\sqrt{Rh}} (\theta - \theta_2).$$

Приведенное решение может быть использовано для любой непологий оболочки вращения. Более подробно эти задачи, в том числе случай нелинейного закона изменения температуры на переходном участке, рассмотрены в работах [10, 11].

СОСТАВНЫЕ ТОРООБРАЗНЫЕ ОБОЛОЧКИ

Ниже рассмотрены некоторые виды составных и подкрепленных торообразных оболочек.

Запрессовка упругого кольца в торообразную оболочку. В оболочку, представляющую собой часть тора (рис. 16) с радиусом края r_0 ,

запрессовывают упругое кольцо с несколько большим наружным радиусом $r_0 + \delta$ (на рис. $r_0 = a$). Упругое взаимодействие кольца с краем оболочки сводится к тому, что радиус края оболочки увеличивается на некоторую величину u_0 , а наружный радиус кольца уменьшается на величину $-u_k$, так что $r_0 + u_0 = (r_0 + \delta) + u_k$. Отсюда следуют условия упругого сопряжения с натягом

$$u_0 - u_k = \delta; \quad \vartheta_0 = \vartheta_k; \quad Q_0 = Q_k; \quad M_0 = M_k. \quad (94)$$

Подставляя в эти равенства выражения (17) и (18) гл. 25 т. 1 с опущенными в них слагаемыми, отвечающими основному (со значком *) и термоупругому (со значком ') состояниям, получаем

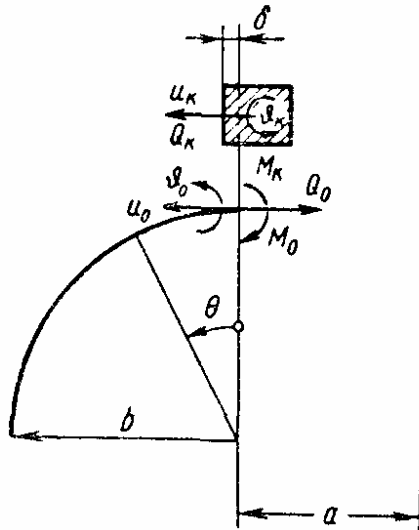


Рис. 16

$$M_0 = -\frac{\alpha_{11}}{\Lambda} \delta; \quad Q_0 = \frac{\alpha_{22} - \frac{r_k^2}{E_k J_v}}{\Lambda} \delta, \quad (95)$$

где

$$\Lambda = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2) - \alpha_{11} \frac{r_k^2}{E_k J_v} - \alpha_{22} \frac{r_k^2}{E_k F} + \frac{r_k^2}{E_k F} \cdot \frac{r_k^2}{E_k J_v}.$$

Отвечающие найденным M_0 и Q_0 напряжения подсчитывают по формулам (20) гл. 25 т. 1. На рис. 13 и 16 гл. 25 т. 1 показаны значения напряжений, подсчитанные для четверти тора с параметрами $\lambda^3 = 27,5$; $\alpha = 0,254$.

Формулы (95) пригодны и для непологих оболочек вращения общего вида, если в них под $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ понимать выражения (12).

Гофрированная труба. Линзовый компенсатор без кольцевой пластины. Линзовый компенсатор без кольцевой пластины (рис. 17, а) и гофрированная труба (рис. 17, б) представляют собой круговые торообразные оболочки, составленные из участков двух типов:

I — для которых $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;

II — которые могут быть получены из четверти тора $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$, путем поворота вокруг горизонтали.

Поэтому условия упругого сопряжения обоих участков записывают в следующем виде (рис. 18):

$$\left. \begin{aligned} Q_r^I &= Q_r^{II}; \quad M_\theta^I = -M_\theta^{II}; \quad u_r^I = u_r^{II}; \quad \vartheta^I = -\vartheta^{II}; \\ [(P^0)^{II} &= P^0 = -(P^0)^I; \quad u_x^I = -u_x^{II}]. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

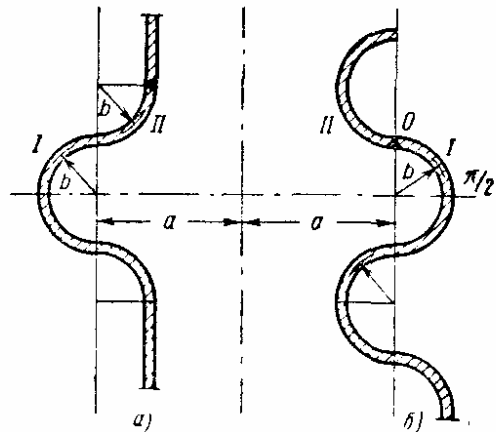


Рис. 17

Для гофрированной трубы имеют место условия симметрии

$$\begin{aligned} Q_r^I \left(\frac{\pi}{2} \right) &= 0; \quad \vartheta^I \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0; \quad Q_r^{II} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0; \\ \vartheta^{II} \left(-\frac{\pi}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Третье и четвертое из них для линзового компенсатора выполняются приближенно. Кроме того, следует иметь в виду, что $p^I = -p^{II} = p$ (для второго участка давление газа действует в направлении внутренней нормали).

Приведенные в гл. 25 т. 1 соотношения позволяют решить сформулированную задачу. Подробно она рассмотрена в работах [16, 17, 18] (см. литературу к гл. 25 т. 1).

В случае, когда можно пренебречь взаимным влиянием краев [выполняется критерий (16) гл. 25 т. 1], для основных величин имеют место следующие асимптотические формулы, удобные для прикидочного расчета и назначения параметров проектируемых оболочек данного вида.

При действии осевой силы. Для участка I (см. табл. 3 гл. 25 т. 1)

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_\varphi^{(p)})_{\max}}{\sigma_V} &= -0,91 (1 - \nu^2)^{\frac{1}{3}} \times \\ &\times \alpha^{-\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} \omega'(\theta_*) \end{aligned} \quad (98)$$

$$\text{в точке } \theta_* \approx \frac{1,89}{\lambda};$$

$$\frac{(\sigma_\theta^{(u)})_{\max}}{\sigma_V} = -1,615 (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{6}} \alpha^{-\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} \omega'(\theta_*) \quad (99)$$

$$\text{в точке } \theta_* \approx \frac{1,35}{\lambda};$$

$$\left[\sigma_V = \frac{P_0}{2\pi ah}; \quad \lambda^3 = \sqrt{12(1 - \nu^2)} \alpha \beta; \quad \alpha = \frac{b}{a}; \quad \beta = \frac{b}{h} \right].$$

Для участка II в формуле (98) необходимо заменить знак на обратный. Расхождение кромок (в расчете на одну волну) подсчитывают по формуле

$$\delta_V = \frac{0,670}{\lambda^3} \delta_0 \quad \left(\delta_0 = \frac{12(1 - \nu^2) b^3 P_0}{2Eh^3 a} \right). \quad (100)$$

*

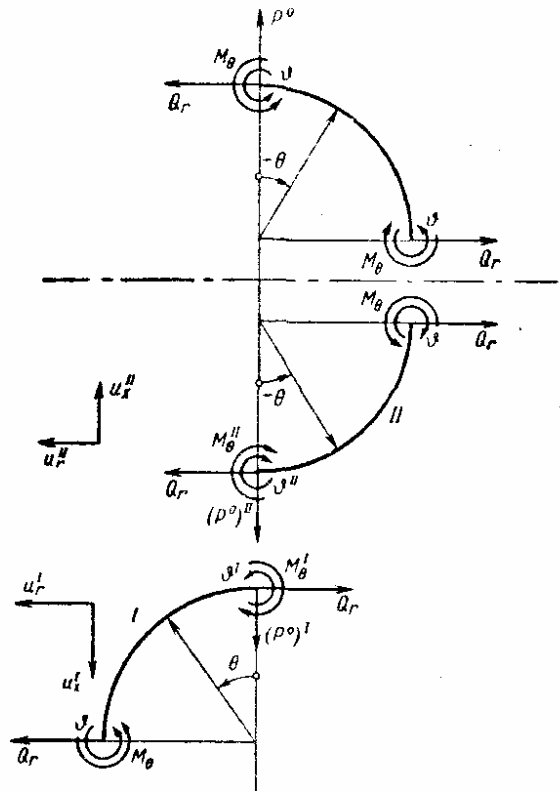


Рис. 18

При равномерном давлении (осевая сила в сечении $\theta = 0$ равна нулю)

$$\frac{(\sigma_{\varphi}^{(p)})_{\max}}{\rho} = 0,955 (1 - \nu^2)^{\frac{1}{6}} \alpha^{-\frac{2}{3}} \beta^{\frac{4}{3}}; \quad (101)$$

$$\frac{(\sigma_{\theta}^{(u)})_{\max}}{\rho} = 0,955 (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{3}} \alpha^{-\frac{2}{3}} \beta^{\frac{4}{3}} \quad (\text{в точке } \theta_* = 0); \quad (102)$$

$$\delta_V = 4,29 (1 - \nu^2)^{\frac{1}{3}} \alpha^{-\frac{4}{3}} \beta^{\frac{5}{3}} \frac{b\rho}{E}. \quad (103)$$

Эпюры основных напряжений для гофрированной трубы с параметрами $\lambda^3 = 27,5$, $\alpha = 0,254$, растягиваемой осевой силой P , показаны на рис. 19. Крестиками показаны значения максимальных напряжений, подсчитанные по асимптотическим формулам (98) и (99).

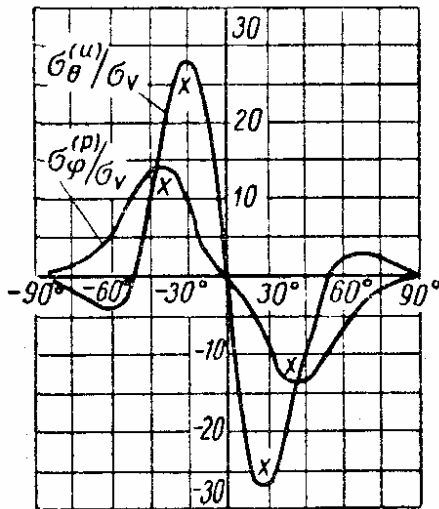


Рис. 19

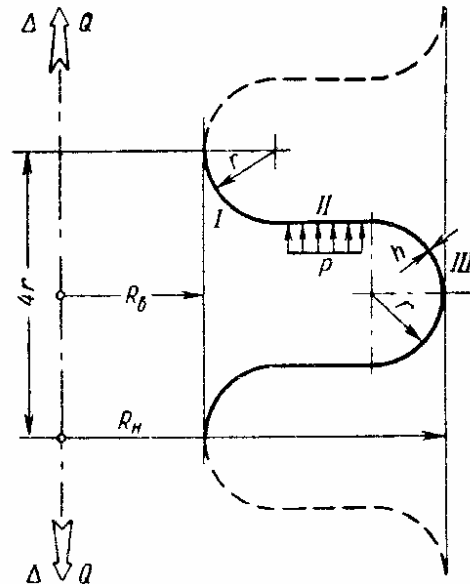


Рис. 20

Расчет сильфона на осевое растяжение и давление газа. Сильфонами называют оболочки, состоящие из набора кольцевых пластин, сопряженных торообразными переходами (рис. 20). При расчете сильфона на прочность и жесткость интересуются максимальными значениями возникающих в них (под действием осевой силы Q в дан и давления p в дан/см²) напряжений σ_{\max} в дан/см² и осевым расхождением кромок Δ в см. В силу периодичности профиля оболочки можно ограничиться рассмотрением одной полуволны (на рис. 20 сплошной линией показана одна волна) сильфона.

Из соображений симметрии на ее краях следует требовать отсутствия распора и угла поворота ($Q_r = 0$; $\vartheta = 0$). В местах сопряжения участка II (пластина) с торообразными участками I и III должны выполняться условия упругого сопряжения. Полученные до настоящего времени точные решения довольно громоздки и малоприспособны для назначения размеров сильфона. Положение усугубляется и тем, что из-за малости отношений $\frac{r}{R_n}$ и $\frac{r}{R_{\delta}}$ (рис. 20) параметры $\lambda_s^3 = \sqrt{12(1 - \lambda^2)} \times$

$\times \frac{r}{R_\theta} \cdot \frac{r}{h}$, $\lambda_n^3 = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{r}{R_n} \cdot \frac{r}{h}$ не велики, так что становятся неприменимыми формулы, приведенные в гл. 25 т. 1.

В практике инженерных расчетов широко используют следующие простые формулы, устанавливающие связь (по данным В. А. Никитина, Г. И. Писменной):

а) между осевым расхождением Δ (в расчете на одну волну сильфона) и осевой силой Q

$$\Delta = 0,434 \left(\frac{z^2 - 1}{z^2} - \frac{4 \ln^2 z}{z^2 - 1} \right) \frac{QR_n^2}{Eh^3};$$

$$z = \frac{R_n}{R_\theta}; \quad (104)$$

для $z \leq 2$ удобнее пользоваться следующей более простой формулой:

$$\Delta = 0,580 \frac{(z - 1)^2}{z^2(z + 1)} \cdot \frac{QR_n^2}{Eh^3}; \quad (104a)$$

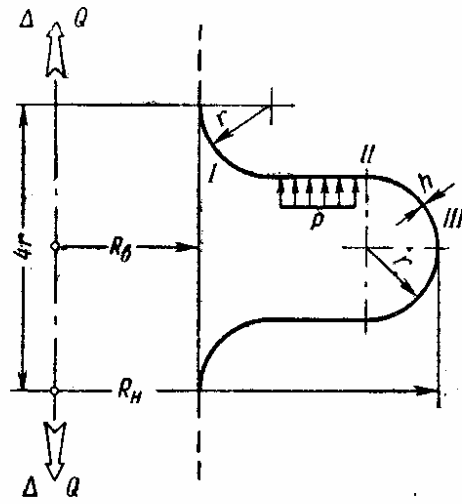


Рис. 21

б) между максимальным напряжением σ^{\max} и вызывающей его осевой силой

$$\sigma^{\max} = 0,48 \left(z - 1 - \frac{2r}{R_\theta} \right) \frac{Q}{h^2}; \quad (105)$$

в) между максимальным напряжением и обуславливающим его осевым расхождением кромок (в расчете на одну волну)

$$\sigma^{\max} = \frac{3}{8} \left(\frac{z}{z - 1} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{Eh\Delta}{R_n \sqrt{R_n r}}; \quad (106)$$

г) между максимальным напряжением и вызывающим его давлением газа (при отсутствии расхождений кромок сильфона)

$$\sigma_p^{\max} = 0,58 \left(1 - \frac{1}{z} - \frac{r}{R_n} \right)^2 \frac{pR_n^2}{h^2}. \quad (107)$$

В табл. 2 и 3 расчеты по приведенным приближенным формулам сопоставлены с более точными решениями в степенных рядах. Как видно из табл. 3, для довольно широкого интервала изменения параметров сильфонов приведенные формулы дают приемлемое для практического использования приближение. Ими можно пользоваться также и для расчета линзового компенсатора (рис. 21).

2. Геометрические размеры (в мм) компенсаторов

Компенсаторы	R_H	R_θ	r	h	z
I	1210	1010	60	4	1,2
II	497	353	48	6	1,41
III	362	305	13,7	1,27	1,19
IV	300	200	25	5	1,5
V	450	309	25	5	1,5

3. Сравнение приближенных формул с точным решением

Отношения	Размерность	Компенсаторы								
		I			II			III		
		A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
$\frac{\Delta}{Q} \cdot 10^6$	см/дан	165	160	1,03	46	44	1,04	420	458	0,92
$\frac{\sigma_{\max}}{\Delta}$	дан/см ³	1400	1370	1,03	3900	3740	1,04	6130	5750	1,06
$\frac{\sigma_{\max}}{Q}$	1/см ²	0,23	0,22	1,04	0,17	0,17	1,0	2,69	2,60	1,03
$\frac{\sigma_p^{\max}}{p}$	см/см	660	714	0,92	152	129	1,18	680	889	0,77

Отношения	Размерность	Компенсаторы					
		IV			V		
		A	B	$\frac{A}{B}$	A	B	$\frac{A}{B}$
$\frac{\Delta}{Q} \cdot 10^6$	см/дан	44	53	0,83	100	126	0,79
$\frac{\sigma_{\max}}{\Delta}$	дан/см ³	7870	7500	1,05	4300	4290	1,0
$\frac{\sigma_{\max}}{Q}$	1/см ²	0,44	0,40	1,10	0,59	0,54	1,09
$\frac{\sigma_p^{\max}}{p}$	см/см	130	163	0,80	360	300	1,2

Обозначения: A — приближенное решение; B — более точное решение.

ЖЕСТКОСТЬ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСОЛИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ НА КРАЮ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Рассмотрим длинную консоль, усиленную на конце упругим кольцом (рис. 22), через которое передается изгибающий момент M_y^0 и перерезывающая сила F_z^0 . Определим жесткость консоли на изгиб и срез. Из рис. 23, а следует

$$u_z = u_{r,1} \cos^2 \varphi - v_1 \sin^2 \varphi. \quad (108)$$

С учетом соотношения (93) гл. 21 т. 1 $u_{r,1} = r\omega - v_1$. Подставляя последнее выражение в формулу (108) и учитывая, что $v_1 = v_1^*$, получаем

$$u_z(\theta, \varphi) = r(\theta) \omega(\theta) \cos^2 \varphi - v_1^*(\theta). \quad (109)$$

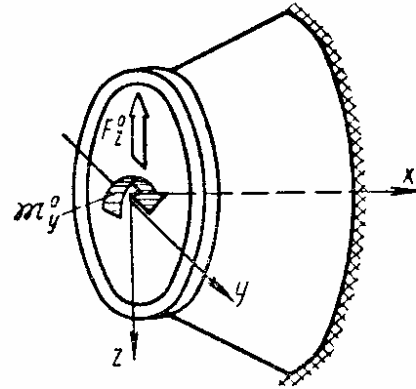


Рис. 22

Далее, согласно рис. 23, б поворот концевое сечения консоли состоит из угла $\frac{u_x}{z} = \frac{u_{x,1} \cos \varphi}{r \cos \varphi} = \frac{u_{x,1}}{r}$, определяющего поворот концевое сечения, как жесткого целого, и упругого поворота $\chi \cos^2 \varphi$.

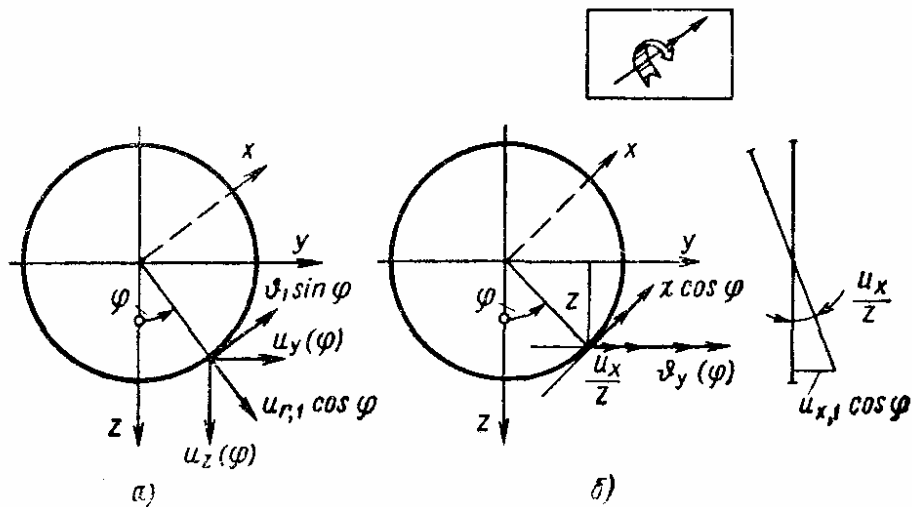


Рис. 23

Следовательно, поворот концевое сечения вокруг оси y характеризует угол

$$\vartheta_y(\theta, \varphi) = \chi \cos^2 \varphi + \frac{u_{x,1}}{r}. \quad (110)$$

Но согласно формулам (86), (92) и (100) гл. 21 т. 1

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + \vartheta_1^\kappa = \vartheta_1^* + \chi^\kappa = \chi + (\vartheta_1^* - \chi^*); \quad \vartheta_1 = \chi + \frac{u_{x,1}}{r}.$$

Сопоставляя последние равенства, имеем

$$\frac{u_{x,1}}{r} = \vartheta_1^* - \chi^*. \quad (111)$$

Подставляя теперь полученные выражения в формулу (110), находим

$$\vartheta_y(\theta, \varphi) = \chi \cos^2 \varphi + (\vartheta_1^* - \chi^*). \quad (112)$$

После определения $r\omega$ и χ по формулам

$$\left. \begin{aligned} r\omega = u_0 = u_\kappa &= \frac{\lambda k^2}{E} (Q^{\theta\kappa} + Q_0) = \\ &= \frac{\lambda k^2}{E} \left[(Q^{\theta\kappa} + Q_0^*) + \frac{\sigma_k h}{2\rho k \sqrt{\cos \alpha}} \right]; \\ \chi = \vartheta_0 = -\vartheta_\kappa &= \frac{12\mu k^2}{Eh^2} (-M^{\theta\kappa} + M_0) = \\ &= \frac{12\mu k^2}{Eh^2} \left(-M^{\theta\kappa} + \frac{\sigma_{M_0} h^2}{6} \right); \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

с учетом формул (51) и равенства [см. (87), (88), (94) гл. 21 т. 1]

$$u_0^* = - \frac{\nu \mathfrak{M}_y}{\pi r_0 E h \cos \alpha} \quad (114)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta = -u_z(\theta_0, \varphi) &= \gamma_{11} F_z^0 + (\gamma_{12} + \gamma'_{12} \cos^2 \varphi) \mathfrak{M}_y^0 - \\ &- [\alpha'_{11} (Q^{\theta\kappa} + Q_0^*) + \alpha'_{12} M^{\theta\kappa}] \cos^2 \varphi; \\ \vartheta = -\vartheta_y(\theta_0, \varphi) &= \gamma_{12} F_z^0 + (\gamma_{22} + \gamma'_{22} \cos^2 \varphi) \mathfrak{M}_y^0 + \\ &+ [\alpha'_{12} (Q^{\theta\kappa} + Q_0^*) + \alpha'_{22} M^{\theta\kappa}] \cos^2 \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

здесь γ_{11} , γ_{12} , γ_{22} — коэффициенты податливости консоли с жестким кольцом (жесткой диафрагмой), полностью определяющиеся безмоментной частью решения и существенно зависящие от геометрии консоли. Для конической консоли они подсчитаны в примере 5 гл. 23 т. 1, для цилиндрической — в примере 5 гл. 22 т. 1.

Коэффициенты γ'_{12} и γ'_{22} имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \gamma'_{12} &= \frac{\nu \lambda}{\pi r_0 E h \rho k (\cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1 + \frac{3\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\lambda \mu}{\rho^4}}; \\ \gamma'_{22} &= - \frac{6\nu \mu}{\pi r_0 E h^2 \rho^2 \cos \alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{6\mu k}{\rho^3} \sqrt{\cos \alpha} + \frac{3\mu \lambda}{\rho^4}}. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Величины α'_{11} , α'_{12} , α'_{22} являются коэффициентами податливости края, подкрепленного кольцом [см. формулы (55)]. Наконец, согласно выражениям (86)—(88) гл. 21 т. 1

$$Q_0^* = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi r_0^2} \mathfrak{M}_y^0. \quad (117)$$

Пример 12. Консоль с краем, подкрепленным тяжелым кольцом веса P (рис. 24). В этом случае

$$\begin{aligned} F_z^0 &= P; \quad \mathfrak{M}_y^0 = 0; \\ -Q^{\text{вн}} \cos \varphi &= \frac{P}{2\pi r_0} \cos \varphi; \end{aligned} \quad (118)$$

отсюда

$$Q^{\text{вн}} = -\frac{P}{2\pi r_0}; \quad M^{\text{вн}} = 0. \quad (119)$$

Перемещения конца консоли получаем, подставляя выражения (118) и (119) в формулы (115).

Если закон распределения краевых воздействий отличается от рассмотренного ($\cos \varphi$, $\sin \varphi$), то сказанное выше относится к первой гармонике разложения нагрузки в ряд Фурье.

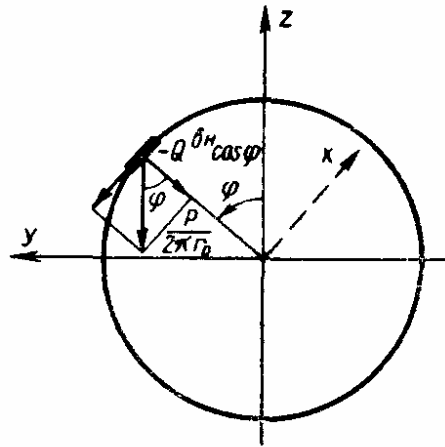


Рис. 24

ДЕЙСТВИЕ ПРОИЗВОЛЬНО НАПРАВЛЕННОЙ ОБРАТНОСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

При рассмотрении обратносимметричного изгиба предполагалось, что действующие в нормальном к оси вращения сечении оболочки усилия и моменты приводятся к главному вектору F_z^0 и главному моменту \mathfrak{M}_y^0 (см. рис. 22). Для того чтобы рассмотреть общий случай, когда главный вектор и главный момент составляют между собой произвольный угол, в работах [20 и 21] наряду с рассмотренным случаем (называемым первым обратносимметричным) введен второй обратносимметричный случай. Можно поступить и иначе: использовать поворот осей. Второй подход мы и проиллюстрируем на примере круговой цилиндрической консоли.

Пример 13. Круговая цилиндрическая консоль под действием произвольно направленных изгибающего момента и перерезывающей силы (рис. 25). Пусть направления главного момента и главного вектора составляют между собой

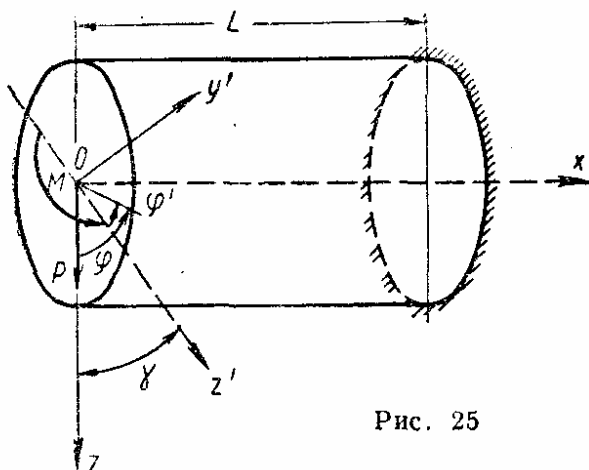


Рис. 25

углу γ . Направим оси x и y так, чтобы главный вектор был направлен вдоль оси z . Оси же x' и y' выберем так, чтобы главный момент совпадал по направлению с осью y' . Тогда общее решение можно получить наложением следующих двух задач:

$$\left. \begin{aligned} \text{I) } F_z^0 &= -P; \quad \mathfrak{M}_y^0 = 0; \\ \text{II) } F_{z'}^0 &= 0; \quad \mathfrak{M}_{y'}^0 = -M. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Считая, что конец консоли закрыт жесткой мембраной, имеем для обеих задач одинаковые граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \omega(0) = \chi(0) = 0; \\ u(L) = v(L) = w(L) = \vartheta(L) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

где L — длина консоли.

Учитывая граничные условия $u^*(L) = v^*(L) = 0$ [см. формулу (49) гл. 22 т. 1], соотношения (40) и (41) гл. 22 т. 1 принимают вид: для задачи I

$$\left. \begin{aligned} u^*(x, \varphi) &= \left\{ -\frac{Px^2}{2\pi EhR^2} + R\Omega_y \right\} \cos \varphi; \\ v^*(x, \varphi) &= \left\{ \frac{P}{\pi EhR} \left[2(1+\nu)x - \frac{x^3}{6R^2} \right] + \Omega_y x - a_z \right\} \sin \varphi; \\ w^*(x, \varphi) &= \left\{ \frac{-P}{\pi EhR} \left[(2+\nu)x - \frac{x^3}{6R^2} \right] - \Omega_y x + a_z \right\} \cos \varphi; \\ \vartheta^*(x, \varphi) &= \frac{(2+\nu)P}{\pi EhR} \cos \varphi + \frac{u^*(x, \varphi)}{R}; \\ N_x^*(x, \varphi) &= -\frac{Px}{\pi R^2} \cos \varphi; \quad N_\varphi^*(x, \varphi) = 0; \\ T^*(x, \varphi) &= \frac{P}{\pi R} \sin \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

для задачи II ($\varphi' = \varphi - \gamma$)

$$\left. \begin{aligned} u^*(x, \varphi) &= \left\{ -\frac{Mx}{\pi EhR^2} + R\Omega_{y'} \right\} \cos(\varphi - \gamma); \\ v^*(x, \varphi) &= \left\{ \frac{M}{\pi EhR} \left(\nu - \frac{x^2}{2R^2} \right) + \Omega_{y'} x - a_{z'} \right\} \sin(\varphi - \gamma); \\ w^*(x, \varphi) &= \left\{ \frac{Mx^2}{2\pi EhR^3} - \Omega_{y'} x + a_{z'} \right\} \cos(\varphi - \gamma); \\ \vartheta^*(x, \varphi) &= \left\{ -\frac{Mx}{\pi EhR^3} + \Omega_{y'} \right\} \cos(\varphi - \gamma); \\ N_x^*(x, \varphi) &= -\frac{M}{\pi R^2} \cos(\varphi - \gamma); \quad N_\varphi^*(x, \varphi) = 0; \\ T^*(x, \varphi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

В силу граничных условий $\omega(0) = \chi(0) = 0$ в (37), (38), (49) гл. 22 т. 1 для первого решения

$$\left. \begin{aligned} w(0, \varphi) &= R\omega(0) \cos \varphi + v(0, \varphi) = v^*(0, \varphi); \\ \vartheta(0, \varphi) &= \chi(0) \cos \varphi + \frac{1}{R} u(0, \varphi) = \frac{1}{R} u^*(0, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для второго решения. Подставляя в равенства (124) выражения (122) и (123), получаем

$$\left. \begin{aligned} w(0, \varphi) &= \gamma_{11}P \cos \varphi + \gamma_{12}M \cos(\varphi - \gamma); \\ \vartheta(0, \varphi) &= \gamma_{21}P \cos \varphi + \gamma_{22}M \cos(\varphi - \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

где (сравни пример 5 гл. 22 т. 1)

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{\pi Eh} \left[2(1+\nu) \frac{L}{R} + \frac{1}{3} \left(\frac{L}{R} \right)^3 \right]; \quad \gamma_{12} = \frac{1}{2\pi EhR} \left(\frac{L}{R} \right)^2; \\ \gamma_{22} &= \frac{1}{\pi EhR^2} \cdot \frac{L}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Аналогично, используя граничные условия (121) и вытекающие из них равенства $\omega(L) = \chi(L) = 0$, с помощью соотношений (53) и (54) гл. 22 т. 1 получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0}(L, \varphi) &= \frac{3\nu}{\sqrt{3}(1-\nu^2)\pi R^2 h} [PL \cos \varphi + M \cos(\varphi - \gamma)]; \\ \sigma_k(L, \varphi) &= -\frac{2\nu}{\pi R^2 h} [PL \cos \varphi + M \cos(\varphi - \gamma)]; \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)}(x, \varphi) &= \\ &= \frac{3\nu}{\sqrt{3}(1-\nu^2)\pi R^2 h} [PL \cos \varphi + M \cos(\varphi - \gamma)] (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_\varphi^{(p)}(x, \varphi) &= \frac{\nu}{\pi R^2 h} [PL \cos \varphi + M \cos(\varphi - \gamma)] (\cos \beta + \sin \beta) e^{-\beta}; \\ \sigma_\varphi^{(u)}(x, \varphi) &= \nu \sigma_x^{(u)}(x, \varphi); \quad \sigma_{x\varphi}^{(u)}(x, \varphi) = 0; \\ \sigma_{x\varphi}^{(p)}(x, \varphi) &= \frac{P}{\pi R h} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Сравнивая эти соотношения с полученными в примере 5 гл. 22 т. 1, видим, что выражения, приведенные в гл. 21—25 т. 1, позволяют простым поворотом осей рассмотреть общий случай обратнoсимметричной нагрузки.

СФЕРИЧЕСКИЙ РЕЗЕРВУАР НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОПОРЕ

В качестве примера стыкования на линии сопряжения трех оболочек рассмотрим сферический резервуар, предназначенный для хранения жидкости (с удельным весом $\gamma_{жс}$) и установленный на цилиндрической опоре (рис. 26). Расчетной нагрузкой для сферы является гидростатическое давление жидкости

$$q_n = R\gamma_{жс}(1 - \cos \theta); \quad q_\theta = 0. \quad (129)$$

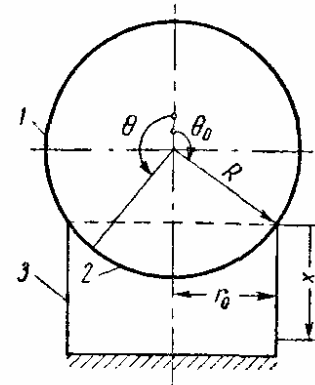


Рис. 26

Рассмотрим отдельно оболочки 1—3 (рис. 26).

Для оболочки 1 [см. формулы (18), (19) гл. 24 т. 1]

$$\left. \begin{aligned} N_\theta^{*(1)}(\theta) &= \frac{R^2 \gamma_{жс}}{6} \cdot \frac{1 - 3 \cos^2 \theta + 2 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}; \\ N_\varphi^{*(1)}(\theta) &= R^2 \gamma_{жс} \left\{ 1 - \cos \theta - \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - 3 \cos^2 \theta + 2 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right\}; \\ Q_0^{*(1)} &= N_\theta^{*(1)}(\theta_0) \cos \theta_0; \\ u_0^{*(1)} &= \frac{R \sin \theta_0}{E h_1} [N_\varphi^{*(1)}(\theta_0) - \nu N_\theta^{*(1)}(\theta_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Для оболочки 2 [см. формулы (20) гл. 24 т. 1]

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta}^{*(2)}(\theta) &= \frac{R^2 \gamma_{ж}}{6} \cdot \frac{5 - 3 \cos^2 \theta + 2 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}; \\ N_{\varphi}^{*(2)}(\theta) &= R^2 \gamma_{ж} \left\{ 1 - \cos \theta - \frac{1}{6} \cdot \frac{5 - 3 \cos^2 \theta + 2 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right\}; \\ Q_0^{*(2)} &= N_{\theta}^{*(2)}(\theta_0) \cos \theta_0; \\ u_0^{*(2)} &= \frac{R \sin \theta_0}{E h_2} [N_{\varphi}^{*(2)}(\theta_0) - \nu N_{\theta}^{*(2)}(\theta_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

Для оболочки 3 [см. формулы (4)–(5) гл. 22 т. 1]

$$\left. \begin{aligned} N_x^{*(3)} &= -\frac{P}{2\pi r_0}; \\ N_{\varphi}^{*(3)} &= 0; \\ Q_0^{*(3)}(0) &= 0; \\ u_0^{*(3)} &= \frac{\nu r_0}{E h_3} \cdot \frac{P}{2\pi r_0}; \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

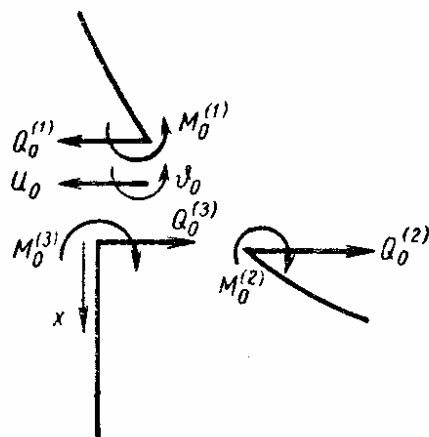


Рис. 27

здесь $P = P_{ж} + P_p$ — вес резервуара с жидкостью;

$$P_{ж} = \frac{4\pi R^3}{3} \gamma_{ж}; \quad P_p = 4\pi R^2 h \gamma_p \quad (133)$$

(толщины оболочек 1 и 2 одинаковы $h = h_1 = h_2$).

Условия совместности деформации и уравновешенности рассматриваемого узла имеют следующий вид (рис. 27):

$$\left. \begin{aligned} u_0^{(1)} = u_0^{(2)} = u_0^{(3)} = u_0; \quad \vartheta_0^{(1)} = \vartheta_0^{(2)} = \vartheta_0^{(3)} = \vartheta_0; \\ M_0^{(1)} - M_0^{(2)} - M_0^{(3)} = 0; \quad Q_0^{(1)} - Q_0^{(2)} - Q_0^{(3)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Пример 14. Рассчитаем резервуар, для которого $E = 2 \cdot 10^6$ дан/см²; $\gamma_{ж} = 0,0103$ н/см³; $\gamma_p = 0,078$ н/см³; $R = 525$ см; $r_0 = 432,5$ см; $h_1 = h_2 = 2,5$ см; $h_3 = 2$ см.

Находим

$$P_{ж} = 623\,000 \text{ дан}; \quad P_p = 67\,600 \text{ дан};$$

$$\theta_0 = \arcsin \frac{r_0}{R} = 125^\circ.$$

По формулам, приведенным в т. 1: (34)–(35) гл. 24 и (22)–(23) гл. 22, подсчитываем

$$\alpha_{11}^{(1)} = -\alpha_{11}^{(2)} = 2,63 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{дан}; \quad \alpha_{12}^{(1)} = \alpha_{12}^{(2)} = -1,14 \cdot 10^{-4} \text{ см}/\text{дан};$$

$$\alpha_{22}^{(1)} = -\alpha_{22}^{(2)} = 0,985 \cdot 10^{-5} \text{ 1}/\text{дан}; \quad Q_0^{*(1)} = 14,63 \text{ дан}/\text{см};$$

$$u_0^{*(1)} = 4,13 \cdot 10^{-2} \text{ см}; \quad Q_0^{*(2)} = -147 \text{ дан}/\text{см};$$

$$u_0^{*(2)} = 0,955 \cdot 10^{-2} \text{ см};$$

$$\alpha_{11}^{(3)} = -4,08 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{дан}; \alpha_{12}^{(3)} = -1,78 \cdot 10^{-4} \text{ см}/\text{дан};$$

$$\alpha_{22}^{(3)} = -1,56 \cdot 10^{-5} \text{ 1}/\text{дан}; u_0^{*(3)} = 0,743 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Подставляя выписанные величины в условия сопряжения (132) и разрешая их, находим по формулам (21) гл. 22 и (32) гл. 24 т. 1

$$Q_0^{(1)} = -64,1 \text{ дан}/\text{см}; Q_0^{(2)} = -96,0 \text{ дан}/\text{см}; Q_0^{(3)} = 31,9 \text{ дан}/\text{см};$$

$$M_0^{(1)} = -926 \text{ дан}; M_0^{(2)} = -573 \text{ дан}; M_0^{(3)} = -353 \text{ дан}.$$

Теперь нетрудно для каждой части оболочки подсчитать σ_{M_0} и σ_k [см. формулы (25) гл. 22 и (36) гл. 24 т. 1]. Характерные для рассма-

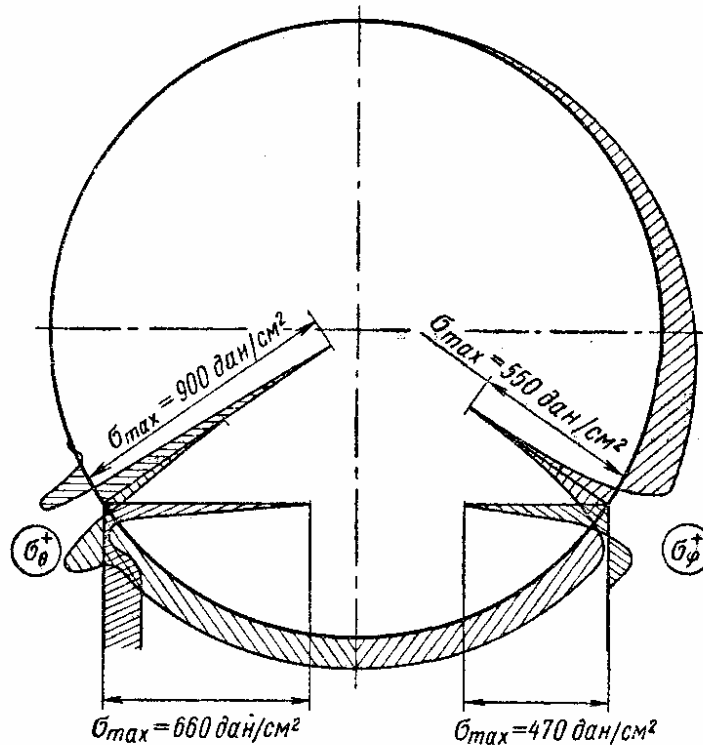


Рис. 28

триваемой задачи напряжения в наружных волокнах рассматриваемой тонкостенной конструкции показаны на рис. 28.

ВЛИЯНИЕ НЕСООСНОСТИ И РАЗЛИЧИЯ В ДИАМЕТРАХ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим составной сосуд под давлением, образованный сопряжением двух цилиндрических оболочек. Предполагаем, что оболочки имеют некоторую разницу в радиусах, кроме того, при сопряжении нарушена их соосность (рис. 29).

Условия сопряжения оболочек

$$\left. \begin{aligned} u_0^I &= u_0^{II}; \quad \vartheta_0^I = \vartheta_0^{II}; \\ Q_0^I &= Q_0^{II} = Q_0; \quad Q_x^I \approx Q_x^{II} \approx Q_x; \quad M_0^I = M_0^{II} - Q_x l, \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

где

$$Q_x = \frac{pR}{2}; \quad R = \frac{R_I + R_{II}}{2};$$

$$l = \Delta_R + \Delta \cos \varphi; \quad \Delta_R = R_I - R_{II}.$$

Из характера нагрузки (135) заключаем, что суммарное напряженно-деформированное состояние в зоне сопряжения получается наложением следующих видов деформации:

а) осесимметричной безмоментной, вызванной газовым давлением;

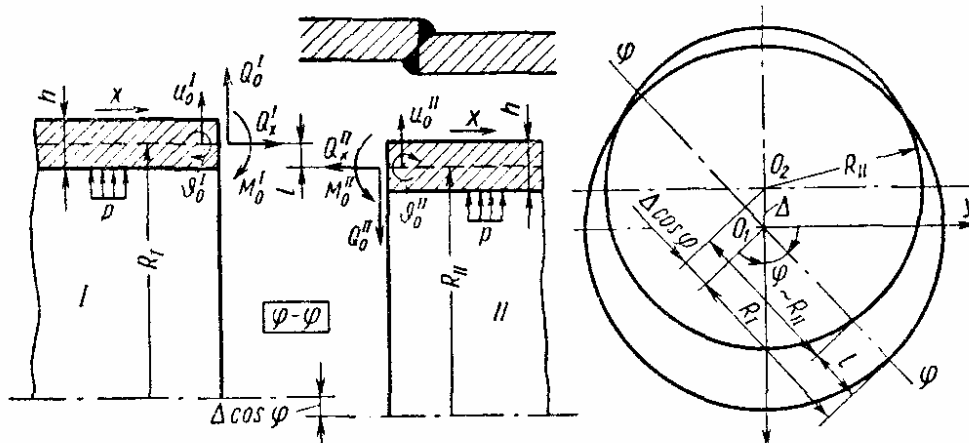


Рис. 29

б) осесимметричного краевого эффекта, вызванного различием радиусов оболочек;

в) обратносимметричного краевого эффекта, обусловленного несоосностью оболочек.

Используя равенства (9), (11) и (135), получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{11}^I - \alpha_{11}^{II}) Q_0 + (\alpha_{12}^I - \alpha_{12}^{II}) M_0^I &= \alpha_{12}^{II} Q_x l + (u_0^{*II} - u_0^{*I}); \\ (\alpha_{12}^I - \alpha_{12}^{II}) Q_0 + (\alpha_{22}^I - \alpha_{22}^{II}) M_0^I &= \alpha_{22}^{II} Q_x l, \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}^I &= -\alpha_{11}^{II} = -\frac{2\rho}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}}; \\ \alpha_{12}^I &= \alpha_{12}^{II} = -\frac{2\rho^2}{Eh} \left(\frac{R}{h} \right); \\ \alpha_{22}^I &= -\alpha_{22}^{II} = \frac{4\rho^3}{Eh^2} \sqrt{\frac{R}{h}} \\ &\quad [\rho = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}]. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Отбрасывая в уравнении (136) подчеркнутые (нулевые) слагаемые, приходим к следующему решению:

$$M_0^I = -\frac{Q_x l}{2}; \quad Q_0 = -\frac{\rho}{h} \sqrt{\frac{h}{R}} \cdot \frac{Q_x l}{2}. \quad (138)$$

Учитывая формулы (84) гл. 21 т. 1, а также равнопрочность сварного шва с основным металлом, можно не принимать во внимание утонение оболочек в месте стыка, тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{M_0}^I &\approx -\sigma_{M_0}^{II} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{pR}{h} \left(\frac{\Delta R}{h} + \frac{\Delta}{h} \cos \varphi \right); \\ \sigma_k^I &\approx \sigma_k^{II} = -\frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{pR}{h} \left(\frac{\Delta R}{h} + \frac{\Delta}{h} \cos \varphi \right). \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

На основании выражений (83) и (85) гл. 21 т. 1 получим следующие формулы для полных напряжений и смещений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(u)} &= -\mu \frac{3}{2} \cdot \frac{pR}{h} \left(\frac{\Delta R}{h} + \frac{\Delta}{h} \cos \varphi \right) \cos \beta e^{-\beta}; \\ \sigma_\varphi^{(p)} &= \frac{pR}{h} \left\{ 1 - \mu \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \left(\frac{\Delta R}{h} + \frac{\Delta}{h} \cos \varphi \right) \sin \beta e^{-\beta} \right\}; \\ \sigma_\varphi^{(u)} &= \nu \sigma_x^{(u)}; \quad \sigma_x^{(p)} = \sigma_x^{*(p)}; \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{pR^2}{Eh} \left\{ \frac{2-\nu}{2} - \mu \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \times \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\Delta R}{h} + \frac{\Delta}{h} \cos \varphi \right) \sin \beta e^{-\beta} \Big\}; \\ \vartheta &= -\frac{[3(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}}}{2} \cdot \frac{pR}{Eh} \sqrt{\frac{R}{h}} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\Delta R}{h} + \frac{\Delta}{h} \cos \varphi \right) (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} \\ &\quad \left(\beta = -\mu \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} x \right); \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

здесь $\mu = 1$ для оболочки I;

$\mu = -1$ для оболочки II.

Совершенно аналогично рассматривают случаи, когда сопрягаемые оболочки имеют разные толщины. Нетрудно видеть, что решение (140) и (141) справедливо для любых непологих оболочек вращения (при соответствующей замене выражения для β и безмоментных слагаемых).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. М., Машгиз, 1962.
2. Арансон А. Я. и др. Расчет на прочность деталей гидротурбин. М.—Л., «Машиностроение», 1965.
3. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1964.

4. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М. — Л., ГИТТЛ, 1949.
 5. В е й ц м а н Р. І. Про теплові напруження поблизу зварного з'єднання різнорідних труб. «Прикладна механіка», т. X, вып. 4, 1964.
 6. Г р и г о р ь е в Л. Я. Судовые сосуды, работающие под давлением (определение напряжений и деформаций). Л., «Судостроение», 1965.
 7. И л ь ю ш и н А. А., Л е н с к и й В. С. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1959.
 8. К а н С. Н. Прочность замкнутых и открытых цилиндрических оболочек. Составные пространственные конструкции. Вып. VI. М., Госстройиздат, 1961.
 9. К а н т о р о в и ч З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. М., Машгиз, 1960.
 10. М и х а й л о в с к и й Е. И. К расчету коротких оболочек вращения. Исследования по упругости и пластичности. Сб. 6. Изд. ЛГУ, 1967.
 11. Н и к и т и н В. А., П и с ь м е н н а я Г. И. Определение термических напряжений и деформаций в сферических и цилиндрических оболочках при неравномерном распределении температуры вдоль меридиана (образующей). Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. IV. Киев, «Наукова Думка», 1964.
 12. Н о в о ж и л о в В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
 13. П а в и л а й н е н В. Я. Расчет незамкнутого сферического купола с подкрепленным краем на обратосимметричную нагрузку. Сб. «Расчет пространственных конструкций», VIII. М., Госстройиздат, 1962.
 14. П о н о м а р е в С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М., Машгиз, 1959.
 15. Р а б о т н о в Ю. Н. Сопротивление материалов. М. Физматгиз, 1962.
 16. С о к о л о в В. И. Основы расчета и конструирования деталей и узлов пищевого оборудования. М., Машгиз, 1963.
 17. Т и м о ш е н к о С. П. Сопротивление материалов. Ч. II. М., Физматгиз, 1965.
 18. Т и м о ш е н к о С. П., В о й н о в с к и й - К р и г е р С. Пластины и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
 19. Ф е о д о с ь е в В. И. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1960.
 20. Ч е р н ы х Қ. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Изд. ЛГУ, 1962.
 21. Ч е р н ы х Қ. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Изд. ЛГУ, 1964.
-

Глава 2

ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

ВВЕДЕНИЕ

При расчете на прочность различных конструкций, в частности корпусов авиационных двигателей и ракет, приходится определять напряжения и перемещения в оболочке вблизи мест приложения локальных нагрузок.

Обычно места приложения локальных нагрузок удалены от краев оболочки, но встречаются случаи, когда они расположены вблизи краев и даже на самих краях оболочки (например, при монтаже).

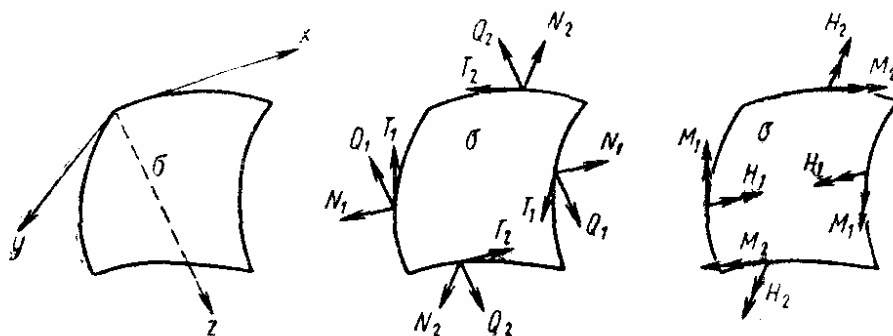


Рис. 1

В используемых на практике оболочках напряжения, а также перемещения, вызываемые локальными нагрузками, могут оказаться значительными и играть решающую роль при оценке прочности или жесткости той или иной конструкции.

Наиболее часто используют цилиндрические оболочки. В этой главе изложены методы расчета таких оболочек при действии различных локальных нагрузок. В конце главы приведен метод расчета оболочек произвольной формы.

Пусть σ — элемент оболочки, вырезанный нормальными сечениями вдоль двух пар линий кривизны срединной поверхности оболочки. В общем случае на торцовые поверхности этого элемента действуют нормальные (по отношению к торцам) усилия N_1, N_2 ; сдвигающие усилия T_1, T_2 ; перерезывающие усилия Q_1, Q_2 ; изгибающие моменты M_1, M_2 и крутящие моменты H_1, H_2 (рис. 1).

При рассматриваемых ниже локальных нагрузках напряженное состояние оболочки вблизи места приложения нагрузки определяется в основном либо усилиями N_1, N_2, T_1, T_2 либо моментами M_1, M_2 .

СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ И РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ПО ЛИНИИ НАГРУЗКИ

Когда площадка нагружения s (или ее ширина c) мала, естественно заменить распределенную по этой площадке нагрузку сосредоточенной (или распределенной по линии) нагрузкой. Такая замена целесообразна потому, что решение задачи о действии на оболочку сосредоточенной (или распределенной по линии) нагрузки проще, чем решение задачи о действии на оболочку локальной нагрузки, распределенной по площадке с конечными размерами. Под перемещением, усилием и внутренним моментом при действии сосредоточенной (или распределенной по линии) нагрузки понимают пределы этих величин, когда площадка $s \rightarrow 0$, стягиваясь в точку m_0 (или, когда ширина площадки $c \rightarrow 0$, а сама площадка s стягивается в отрезок линии l).

В зависимости от вида локальной нагрузки (распределенной по площадке с конечными размерами) перемещения, усилия и моменты разбиваются на два рода величин: величины, которые остаются ограниченными при замене данной локальной нагрузки соответствующей сосредоточенной нагрузкой, и величины, которые становятся неограниченными при этой замене.

Например, когда действующую на оболочку нормальную локальную нагрузку заменяют нормальной сосредоточенной в точке m_0 силой, то нормальное перемещение w остается всюду ограниченной величиной, а изгибающие моменты M_1 , M_2 в окрестности точки m_0 становятся неограниченными величинами.

Поскольку при достаточно малом s (или c) значения величин первого рода (ограниченных при s или $c \rightarrow 0$) в каждой точке оболочки мало отличаются от их предельных значений, то приближенно такие величины можно непосредственно вычислять, считая фактическую локальную нагрузку сосредоточенной (или распределенной по линии).

Оценка наибольших (по модулю) значений величин второго рода (неограниченных при s или $c \rightarrow 0$) с помощью замены фактической локальной нагрузки сосредоточенной (или распределенной по линии) производится искусственным способом (см. стр. 57—59) с использованием асимптотических формул и связана с некоторыми ограничениями.

Асимптотические равенства. Две величины $f(m)$, $\varphi(m)$, являющиеся функциями точки m , называют асимптотически равными при $m \rightarrow m_0$ (или в окрестности точки m_0), если

$$\lim_{m \rightarrow m_0} \frac{f(m)}{\varphi(m)} = 1.$$

Асимптотическое равенство¹ величин $f(m)$ и $\varphi(m)$ записывают так¹:

$$f(m) \simeq \varphi(m).$$

Для перемещений, усилий и моментов, которые неограничены при сосредоточенной нагрузке, приложенной в точке m_0 (или при нагрузке, распределенной вдоль отрезка линии l), получаются простые асимптотические формулы (равенства) в окрестности этой точки (или в окрестностях концевых точек отрезка l).

¹ В главе для обозначения асимптотического равенства использован знак \simeq .

Они могут быть использованы для оценки местных напряжений, вызываемых реальной локальной нагрузкой.

Замена реальной локальной нагрузки сосредоточенной или распределенной по линии. Для того чтобы указать, как можно в некоторых случаях оценить наибольшие значения усилий, моментов или перемещений при локальной нагрузке (распределенной по площадке с конечными размерами), когда эту нагрузку заменяют сосредоточенной, обратимся к «эталонной» задаче об изгибе круглой пластинки.

Пусть на круглую пластинку с радиусом R и со свободно опертым краем действует нормальная (к плоскости пластины) сила Q , распределенная по центральному кругу с радиусом r_0 (рис. 2). Наибольшее значение M внутреннего изгибающего момента достигается в центре нагруженного участка (в центре пластинки) и (см. работу [7])

$$M = \frac{Q}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{R}{r_0} + 1 - \frac{(1 - \nu) r_0^2}{4R^2} \right],$$

где ν — коэффициент Пуассона.

При $r_0 \rightarrow 0$

$$M \simeq \frac{Q}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{R}{r_0}, \quad (1)$$

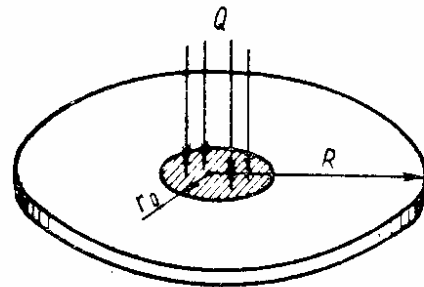


Рис. 2

так, что при достаточно малом r_0 наибольшее значение внутреннего момента можно приближенно определить из приведенного асимптотического равенства.

Пусть теперь на ту же самую пластинку действует сосредоточенная нормальная сила Q , приложенная в центре. В этом случае для внутренних моментов M_r , M_φ (действующих в сечениях $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$; r , φ — полярные координаты) справедливы формулы [7]

$$M_r = \frac{Q}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{R}{r};$$

$$M_\varphi = \frac{Q}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{R}{r} + 1 - \nu.$$

Из этих формул при $r = r_0 \rightarrow 0$ получаем, что при сосредоточенной силе Q на расстоянии r_0 от ее точки приложения

$$M_r \simeq M_\varphi \simeq \frac{Q}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{R}{r_0}, \quad (2)$$

что совпадает с формулой (1).

Следовательно, наибольшее значение изгибающего момента при действии на круглую пластинку локальной нормальной нагрузки Q , распределенной по малому центральному кругу s , приближенно равно значению изгибающего момента на границе нагруженного участка s , когда нагрузка Q заменена такой же по величине сосредоточенной в центре участка s силой.

Аналогичный результат справедлив для цилиндрической оболочки при действии на нее локальной нормальной нагрузки, и его можно

принять для оболочки произвольной формы. Это приводит к следующему положению: *если нагруженная площадка s достаточно мала, то распределенную по ней нормальную нагрузку можно рассматривать как сосредоточенную, а наибольшие значения изгибающих моментов M_1 , M_2 можно оценить, определяя их значения на границе s .*

В отличие от пластинки для оболочки величина площадки s , при которой можно использовать (без большой погрешности) указанную оценку, существенно зависит от относительной толщины оболочки (см. стр. 86—91).

В качестве ориентировочной подобную оценку можно использовать и при локальной тангенциальной нагрузке (это еще требует исследования), а именно принять, что если площадка s (или ее ширина c) достаточно мала, то распределенную по ней тангенциальную нагрузку можно рассматривать как сосредоточенную (или распределенную по отрезку линии l), а наибольшие значения усилий N_1 , N_2 , T_1 , T_2 и перемещений u , v можно оценить, определяя их значения на границе s (или на расстоянии $\frac{c}{2}$ от концов отрезка l).

Несколько иное положение имеет место в случае, когда на оболочку действует локальный изгибающий момент (см. стр. 91—102).

Пусть, например, на цилиндрическую оболочку действует распределенный по квадратной площадке s ее поверхности внешний изгибающий момент M_x с вектором в осевом направлении. Положим, что площадка s ограничена отрезками линий кривизны поверхности оболочки, и обозначим через m_0 центр этой площадки, а через a длину каждой из ее сторон.

Наибольшее значение внутреннего момента M_2 (и, вероятно, M_1) должно быть в средних точках m_a прямолинейных сторон площадки s .

Обозначим через $M_i^s(M_x, m_a)$ значение момента M_i ($i = 1, 2$) в точке m_a при действии распределенного по s момента M_x , а через $M_i^0(M_x, m_a)$ — значение момента M_i в точке m_a при действии момента M_x , сосредоточенного в точке m_0 .

Оказывается (см. стр. 91—95), что $M_2^s(M_x, m_a) > M_1^s(M_x, m_a)$ и что при $a \rightarrow 0$ моменты $M_i^s(M_x, m_a)$ и $M_i^0(M_x, m_a)$ не являются асимптотически равными величинами, т. е.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{M_i^s(M_x, m_a)}{M_i^0(M_x, m_a)} \neq 1$$

(если бы рассматривалась не точка m_a , которая стремится к m_0 при $a \rightarrow 0$, а фиксированная точка m , то в ней $M_i^s(M_x, m) \simeq M_i^0(M_x, m)$ при $a \rightarrow 0$, как ясно из самого определения моментов M_1 , M_2 при сосредоточенной нагрузке).

Предел отношения

$$\frac{M_2^s(M_x, m_a)}{M_2^0(M_x, m_a)}$$

мало отличается от единицы (см. стр. 94, 95), поэтому при прибли-

женной оценке $M_2^s(M_x, m_a)$ эта величина может быть заменена на $M_2^0(M_x, m_a)$.

Предел же отношения

$$\frac{M_1^s(M_x, m_a)}{M_1^0(M_x, m_a)}$$

существенно меньше единицы (см. стр. 92, 93), так что оценка величины $M_1^s(M_x, m_a)$ путем замены ее величиной $M_1^0(M_x, m_a)$ является сильно завышенной.

Аналогичное положение имеет место при действии распределенного по площадке s изгибающего момента M_y с вектором в окружном направлении. В этом случае наибольшее значение момента M_1 (и, по-видимому, M_2) должно быть в средних точках m'_a криволинейных сторон площадки s , причем $M_1^s(M_y, m'_a) > M_2^s(M_y, m'_a)$. Предел отношения

$$\frac{M_1^s(M_y, m'_a)}{M_1^0(M_y, m'_a)}$$

мало отличается от единицы, а предел отношения

$$\frac{M_2^s(M_y, m'_a)}{M_2^0(M_y, m'_a)}$$

существенно меньше единицы.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Местные напряжения при действии сосредоточенных нагрузок

Рассматривая оболочку под действием сосредоточенной нагрузки, будем считать нагрузку приложенной к точке m срединной поверхности Π оболочки. Здесь (стр. 59—73) предполагаем, что точка m достаточно удалена от краев оболочки и принята за начало координат ξ ,

φ ($\xi = \frac{x}{R}$ — безразмерная осевая координата; φ — угловая координата). Участок поверхности Π , ограниченный линией C , для всех точек которой $r = R \sqrt{\xi^2 + \varphi^2} = \text{const}$, будем называть окрестностью точки m (если бы поверхность оболочки была плоской, то окрестностью точки m был бы круг с центром в m и с радиусом r).

Если сосредоточенной нагрузкой является тангенциальная сила, то в достаточно малой окрестности точки m напряженное состояние оболочки определяется в основном только усилиями N_1, N_2, T_1, T_2 . В случае, когда сосредоточенной нагрузкой является радиальная сила или изгибающий момент, то в указанной окрестности напряженное состояние определяется в основном только внутренними моментами M_1, M_2 [4].

Действие сосредоточенной осевой силы Q_x (рис. 3). В достаточно малой окрестности точки m напряженное состояние определяется

в основном усилиями N_1 , N_2 , T_1 , T_2 , для которых справедливы асимптотические формулы [3, 4]

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq \frac{Q_x}{4\pi R} \xi \rho^{-2} [2(1+\nu) \varphi^2 \rho^{-2} - 3 - \nu]; \\ N_2 &\simeq -\frac{Q_x}{4\pi R} \xi \rho^{-2} [2(1+\nu) \varphi^2 \rho^{-2} - 1 + \nu]; \\ T_1 &\simeq T_2 \simeq -\frac{Q_x}{4\pi R} \varphi \rho^{-2} [2(1+\nu) \xi^2 \rho^{-2} + 1 - \nu] \\ &\quad \left(\rho = \frac{r}{R} = \sqrt{\xi^2 + \varphi^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из этих усилий на линии C наибольшие по модулю значения имеет N_1 в точках $\xi = \pm \rho$, $\varphi = 0$

$$N_1 \simeq \mp \frac{3+\nu}{4\pi} \cdot \frac{Q_x}{r}. \quad (4)$$

Этим значениям N_1 соответствуют осевые напряжения

$$\sigma_1 \simeq \mp \frac{3+\nu}{4\pi} \cdot \frac{Q_x}{rh}. \quad (5)$$

Действие сосредоточенной окружной силы Q_y (рис. 4). В достаточно малой окрестности точки m напряженное состояние определяется

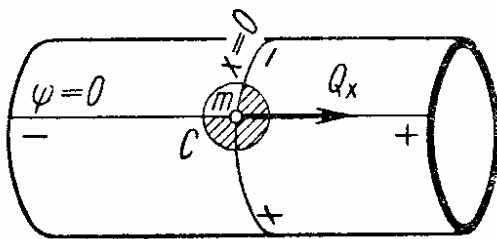


Рис. 3

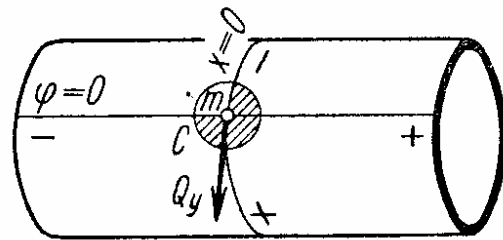


Рис. 4

в основном усилиями N_1 , N_2 , T_1 , T_2 , для которых справедливы асимптотические формулы [3, 4]

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq -\frac{Q_y}{4\pi R} \varphi \rho^{-2} [2(1+\nu) \xi^2 \rho^{-2} - 1 + \nu]; \\ N_2 &\simeq \frac{Q_y}{4\pi R} \varphi \rho^{-2} [2(1+\nu) \xi^2 \rho^{-2} - 3 - \nu]; \\ T_1 &\simeq T_2 \simeq -\frac{Q_y}{4\pi R} \xi \rho^{-2} [2(1+\nu) \varphi^2 \rho^{-2} + 1 - \nu]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из этих усилий на линии C наибольшие по модулю значения имеет N_2 в точках $\xi = 0$ и $\varphi = \pm \rho$

$$N_2 \simeq \mp \frac{3+\nu}{4\pi} \cdot \frac{Q_y}{r}. \quad (7)$$

Этим значениям N_2 соответствуют окружные напряжения

$$\sigma_2 \simeq \mp \frac{3 + \nu}{4\pi} \cdot \frac{Q_y}{rh}. \quad (8)$$

Действие сосредоточенной радиальной силы Q_z (рис. 5). В достаточно малой окрестности точки m напряженное состояние определяется в ос-

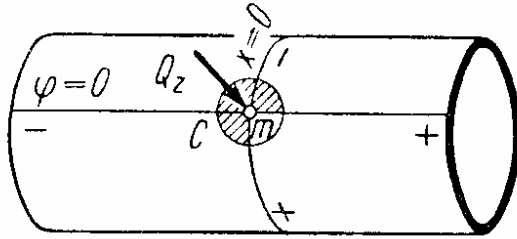


Рис. 5

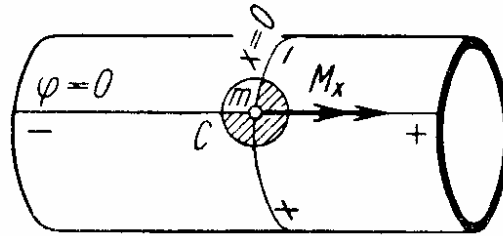


Рис. 6

новном изгибающими моментами M_1 , M_2 , для которых справедлива асимптотическая формула [3, 4]

$$M_1 \simeq M_2 \simeq - \frac{1 + \nu}{4\pi} Q_z \ln \rho = \frac{1 + \nu}{4\pi} Q_z \ln \frac{R}{r}. \quad (9)$$

Этим моментам соответствуют следующие осевые и окружные напряжения σ_1 и σ_2 на внешней и внутренней поверхностях оболочки:

$$\sigma_1 \simeq \sigma_2 \simeq \pm \frac{3(1 + \nu)}{2\pi} \cdot \frac{Q_z}{h^2} \ln \frac{R}{r} \quad (10)$$

(знак плюс соответствует точкам внутренней поверхности, минус — точкам внешней поверхности).

Действие сосредоточенного момента M_x с вектором в осевом направлении (рис. 6). В достаточно малой окрестности точки m напряженное состояние определяется в основном изгибающими моментами M_1 , M_2 , для которых справедливы асимптотические формулы [3, 4]

$$\left. \begin{aligned} M_1 &\simeq - \frac{M_x}{4\pi R} \varphi \rho^{-2} [2(1 - \nu) \xi^2 \rho^{-2} - 1 - \nu]; \\ M_2 &\simeq \frac{M_x}{4\pi R} \varphi \rho^{-2} [2(1 - \nu) \xi^2 \rho^{-2} + 1 + \nu]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из этих моментов наибольшие по модулю значения на линии C имеет M_2 в точках с координатами

$$\xi = \pm \xi_1 = \pm \sqrt{\frac{3 - 5\nu}{6(1 - \nu)}} \rho, \quad \varphi = \pm \varphi_1 = \pm \sqrt{\frac{3 - \nu}{6(1 - \nu)}} \rho,$$

где

$$M_2 \simeq \pm \frac{3 - \nu}{6\pi} \sqrt{\frac{3 - \nu}{6(1 - \nu)}} \cdot \frac{M_x}{r} \quad (12)$$

(знак плюс соответствует точкам $\xi = \pm \xi_1$, $\varphi = \varphi_1$, а знак минус соответствует точкам $\xi = \pm \xi_1$, $\varphi = -\varphi_1$). Указанным наибольшим значениям M_2 соответствуют окружные напряжения

$$\sigma_2 \simeq \pm \frac{3-\nu}{\pi} \sqrt{\frac{3-\nu}{6(1-\nu)}} \cdot \frac{M_x}{rh^2} \quad (13)$$

в точках внутренней и внешней поверхностей оболочки с координатами $\xi = \pm \xi_1$, $\varphi = \pm \varphi_1$ [в формуле (13) знак плюс соответствует точкам внутренней поверхности с координатами $\xi = \pm \xi_1$, $\varphi = \varphi_1$ и точкам внешней поверхности с координатами $\xi = \pm \xi_1$, $\varphi = -\varphi_1$; знак минус соответствует точкам внутренней поверхности с координатами $\xi = \pm \xi_1$, $\varphi = -\varphi_1$ и точкам внешней поверхности с координатами $\xi =$

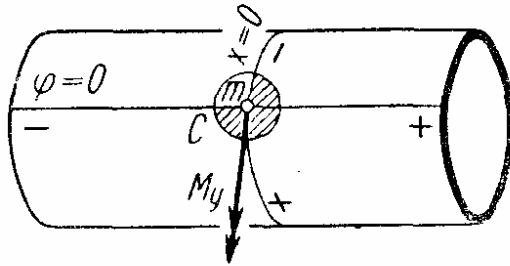


Рис. 7

$= \pm \xi_1$, $\varphi = \varphi_1$]. При $\xi = 0$

$$M_1 \simeq M_2 \simeq \frac{1+\nu}{4\pi} \cdot \frac{M_x}{R\varphi}, \quad (14)$$

а в соответствующих точках внутренней и внешней поверхностей оболочки

$$\sigma_1 \simeq \sigma_2 \simeq \pm \frac{3(1+\nu)}{2\pi} \cdot \frac{M_x}{Rh^2\varphi}. \quad (15)$$

Действие сосредоточенного момента M_y с вектором в окружном направлении (рис. 7). В достаточно малой окрестности точки m напряженное состояние определяется в основном изгибающими моментами M_1 , M_2 , для которых справедливы асимптотические формулы [3, 4]

$$\left. \begin{aligned} M_1 &\simeq -\frac{M_y}{4\pi R} \xi \rho^{-2} [2(1-\nu) \varphi^2 \rho^{-2} + 1 + \nu]; \\ M_2 &\simeq \frac{M_y}{4\pi R} \xi \rho^{-2} [2(1-\nu) \varphi^2 \rho^{-2} - 1 - \nu]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Из этих моментов наибольшие по модулю значения на линии C имеет M_1 в точках с координатами

$$\xi = \pm \xi_2 = \pm \sqrt{\frac{3-\nu}{6(1-\nu)}} \rho, \quad \varphi = \pm \varphi_2 = \pm \sqrt{\frac{3-5\nu}{6(1-\nu)}} \rho,$$

где

$$M_1 \simeq \pm \frac{3-\nu}{6\pi} \sqrt{\frac{3-\nu}{6(1-\nu)}} \cdot \frac{M_y}{r} \quad (17)$$

(знак плюс соответствует точкам $\xi = -\xi_2$, $\varphi = \pm \varphi_2$, а знак минус соответствует точкам $\xi = \xi_2$, $\varphi = \pm \varphi_2$). Указанным наибольшим значениям M_1 соответствуют осевые напряжения

$$\sigma_1 \simeq \pm \frac{3-\nu}{\pi} \sqrt{\frac{3-\nu}{6(1-\nu)}} \cdot \frac{M_y}{rh^2} \quad (18)$$

в точках внутренней и внешней поверхностей оболочки с координатами $\xi = \pm \xi_2$, $\varphi = \pm \varphi_2$ [в формуле (18) знак плюс соответствует точкам внутренней поверхности с координатами $\xi = -\xi_2$, $\varphi = \pm \varphi_2$ и точкам внешней поверхности с координатами $\xi = \xi_2$, $\varphi = \pm \varphi_2$; знак минус соответствует точкам внутренней поверхности с координатами $\xi = \xi_2$, $\varphi = \pm \varphi_2$ и точкам внешней поверхности с координатами $\xi = -\xi_2$, $\varphi = \pm \varphi_2$]. При $\varphi = 0$

$$M_1 \simeq M_2 \simeq -\frac{1+\nu}{4\pi} \cdot \frac{M_y}{R\xi}, \quad (19)$$

а в соответствующих точках внутренней и внешней поверхностей оболочки

$$\sigma_1 \simeq \sigma_2 \simeq \mp \frac{3(1+\nu)}{2\pi} \cdot \frac{M_y}{Rh^2\xi}. \quad (20)$$

Переход к ортотропной оболочке. Пусть E_1 и E_2 — модули упругости ортотропной цилиндрической оболочки в ее осевом и окружном направлениях, а ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона, $\nu_1 E_1 = \nu_2 E_2$ (ν_1 — характеризует сокращение в осевом направлении при растяжении в окружном направлении).

Если принять для модуля сдвига G равенство

$$G = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}, \quad (21)$$

то при действии какой-либо из сосредоточенных сил Q_x, Q_y, Q_z в окрестности ее точки приложения m справедливы соответственно следующие асимптотические формулы (см. работу [9] *):

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq \frac{Q_x}{4\pi R} \sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \xi \rho^{-2} [2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}) \varphi^2 \rho^{-2} - (3 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})]; \\ N_2 &\simeq \frac{Q_y}{4\pi R} \sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \varphi \rho^{-2} [2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}) \sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \xi^2 \rho^{-2} - (3 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})]; \\ M_1 &\simeq \frac{Q_z}{2\pi} (1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}) \sqrt[4]{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \ln \frac{R}{r}; \\ M_2 &\simeq \frac{Q_z}{4\pi} (1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}) \sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \ln \frac{R}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где

$$\rho^2 = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \xi^2 + \varphi^2, \quad r^2 = R^2 (\xi^2 + \varphi^2).$$

Эти формулы при $\nu_1 = \nu_2$ переходят в соответствующие формулы (3), (6), (9).

* В работе [9] в формуле для T_1 (здесь это усилие обозначено N_1) вместо $\sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}}$ ошибочно стоит $\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}}$.

При действии силы Q_x и $E_1 > E_2$ ($\nu_1 < \nu_2$) наибольшие по модулю значения усилия N_1 на линии C получаются в точках с координатами $\xi = \pm r/R$, $\varphi = 0$, где

$$N_1 \simeq \mp \frac{3 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}}{4\pi} \sqrt[4]{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \cdot \frac{Q_x}{r}. \quad (23)$$

При действии силы Q_y и $E_2 > E_1$ ($\nu_2 < \nu_1$) наибольшие по модулю значения усилия N_2 на линии C в точках с координатами $\xi = 0$, $\varphi = \pm \frac{r}{R}$, где

$$N_2 \simeq \mp \frac{3 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}}{4\pi} \sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \cdot \frac{Q_y}{r}. \quad (24)$$

При действии силы Q_z и $E_1 > E_2$ ($\nu_1 < \nu_2$) из моментов M_1 , M_2 наибольшие по модулю значения на линии C имеет момент M_1 ; в точках с координатами $\xi = \pm \frac{r}{R}$, $\varphi = 0$, где

$$M_1 \simeq \frac{Q_z}{4\pi} (1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}) \sqrt[4]{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \ln \frac{R}{r}. \quad (25)$$

Если же $E_2 > E_1$ ($\nu_2 < \nu_1$), то из моментов M_1 , M_2 наибольшие по модулю значения на линии C имеет момент M_2 в точках с координатами $\xi = 0$, $\varphi = \pm \frac{r}{R}$, где

$$M_2 \simeq \frac{Q_z}{4\pi} (1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2}) \sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \ln \frac{R}{r}. \quad (26)$$

Перемещения при действии сосредоточенных сил

При действии сосредоточенных сил Q_x и Q_y основными перемещениями будут соответственно u и v . Эти тангенциальные перемещения не ограничены в окрестности точки приложения силы и могут быть там оценены по асимптотическим формулам [3, 4]

$$u \simeq - \frac{(1 + \nu)(3 - \nu)}{4\pi E h} Q_x \ln \rho; \\ v \simeq - \frac{(1 + \nu)(3 - \nu)}{4\pi E h} Q_y \ln \rho \quad (\rho = \sqrt{\xi^2 + \varphi^2}). \quad (27)$$

Однако при реальных размерах площадки нагружения, которые обычно больше толщины оболочки, тангенциальные перемещения сравнительно невелики. Кроме того, для практики наиболее важными являются, как правило, радиальные перемещения w , поскольку они характеризуют искажение поперечного сечения оболочки.

Ниже приведены формулы для определения w при действии радиальных сосредоточенных сил Q_z , когда перемещения w могут быть наиболее значительными.

Радиальные перемещения длинной оболочки при действии сосредоточенной радиальной силы. Пусть оболочка со свободно опертыми краями находится под действием одной сосредоточенной радиальной силы Q_z , приложенной к середине оболочки. Если длина оболочки $2l \geq 2R\kappa$, где

$$\kappa = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}},$$

причем $\frac{R}{h} \geq 100$, то справедлива приближенная формула [4]

$$\begin{aligned} w = \frac{Q_z}{\pi E h} & \left[\frac{1}{12} (2\lambda^3 - 3\lambda\xi^2 + |\xi|^3) \cos \varphi + \right. \\ & + \kappa^3 \sum_{n=2}^N \frac{n}{(n^2-1)^{\frac{3}{2}}} \left(\cos \frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\kappa} \xi + \right. \\ & \left. \left. + \sin \frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\kappa} |\xi| \right) e^{-\frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\kappa} |\xi|} \cos n\varphi \right]; \end{aligned} \quad (28)$$

здесь $\lambda = \frac{l}{R}$, а N — целое число, ближайшее к $\frac{\kappa}{2}$; за начало координат ξ и φ принята точка приложения силы Q_z .

В формуле (28) слагаемое, содержащее $\cos \varphi$, выражает прогиб оболочки как балки.

Наибольшее значение $w = w(\xi, \varphi)$ имеет в точке приложения силы Q_z :

$$\begin{aligned} \max w = w(0, 0) &= \left(\frac{1}{6} \lambda^3 + 0,802\kappa^3 \right) \frac{Q_z}{\pi E h} = \\ &= \left\{ \frac{l^3}{6R^3} + 0,802 [3(1-\nu^2)]^{\frac{3}{4}} \left(\frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{Q_z}{\pi E h}. \end{aligned} \quad (29)$$

Радиальные перемещения длинной оболочки при действии двух взаимно уравновешенных радиальных сил. Пусть на оболочку действуют две взаимно уравновешенные силы Q_z в точках с координатами $\xi = 0$, $\varphi = 0$ и $\xi = 0$, $\varphi = \pi$. Если $\frac{R}{h} \geq 100$ ($\kappa \geq 12$) и расстояние от точек приложения сил Q_z до ближайшего края оболочки не меньше, чем $R\kappa$, то независимо от краевых условий справедлива приближенная формула [4]:

$$\begin{aligned} w = \frac{2Q_z}{\pi E h} \kappa^3 & \sum_{n=2, 4, \dots}^N \frac{n}{(n^2-1)^{\frac{3}{2}}} \left(\cos \frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\kappa} \xi + \right. \\ & \left. + \sin \frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\kappa} |\xi| \right) e^{-\frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\kappa} |\xi|} \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (30)$$

где N — четное число, ближайшее к $\frac{\kappa}{2}$.

Наибольшего значения $w = w(\xi, \varphi)$ достигает в точках приложения сил Q_z :

$$\begin{aligned} \max w = w(0, 0) = w(0, \pi) &= \frac{2Q_z}{\pi E h} \kappa^3 \sum_{n=2, 4, \dots}^N \frac{n}{(n^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \approx \\ &\approx \frac{1,11}{\pi} [3(1 - \nu^2)]^{\frac{3}{4}} \left(\frac{R}{h}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Q_z}{E h}. \end{aligned} \quad (31)$$

На расстоянии $R|\xi| \geq R\kappa$ от точек приложения сил Q_z практически можно считать деформацию затухшей. Характер затухания величины $w(\xi, 0)$ с ростом $|\xi|$ при разных значениях $\frac{R}{h}$ показан на рис. 8.

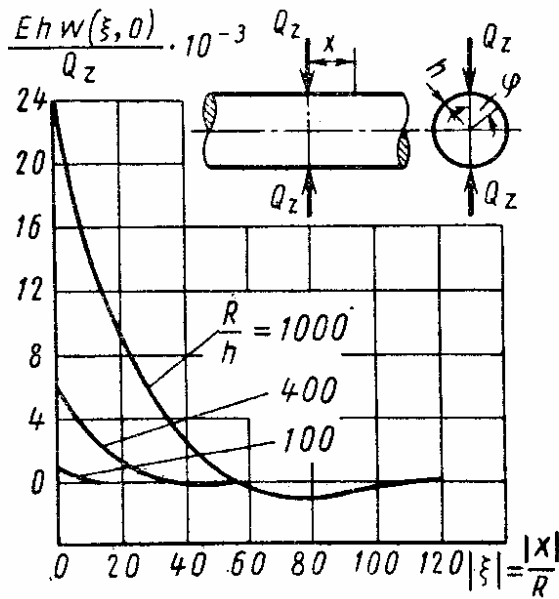


Рис. 8

Радиальные перемещения длинной оболочки при действии m взаимно уравновешенных радиальных сил. Пусть оболочка находится под действием m ($m \geq 2$) одинаковых радиальных сил Q_z , приложенных в равноотстоящих одна от другой точках направляющей окружности $\xi=0$, а именно в точках $(0, 0)$, $(0, \frac{2\pi}{m})$, ..., $(0, 2\pi \frac{m-1}{m})$. Если $\kappa \geq 6m$ и расстояние от точек приложения сил Q_z до ближайшего края оболочки не меньше, чем $R\kappa$,

то справедлива приближенная формула [4]

$$\begin{aligned} w &= \frac{mQ_z}{\pi E h} \kappa^3 \sum_{n=m, 2m, 3m, \dots}^N \frac{n}{(n^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \left(\cos \frac{n\sqrt{n^2 - 1}}{2\kappa} \xi + \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{n\sqrt{n^2 - 1}}{2\kappa} |\xi| \right) e^{-\frac{n\sqrt{n^2 - 1}}{2\kappa} |\xi|} \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (32)$$

где N — ближайшее к $\frac{\kappa}{2}$ целое число, кратное m .

Максимальное значение $w = w(\xi, \varphi)$ достигает в точках приложения сил:

$$\begin{aligned} \max w = w(0, 0) &= \frac{mQ_z}{\pi E h} \kappa^3 \sum_{n=m, 2m, 3m, \dots}^N \frac{n}{(n^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \approx \\ &\approx \frac{1}{m\pi} \left(1,646 + 1,617 \frac{1}{m^2} + 1,905 \frac{1}{m^4} \right) [3(1 - \nu^2)]^{\frac{3}{4}} \left(\frac{R}{h}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{Q_z}{E h}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда видно, что максимальное перемещение w изменяется примерно обратно пропорционально числу сил m , когда $2 < m \leq \frac{\kappa}{6}$.

Условие $\kappa \geq 6m$ существенно ограничивает применимость приведенных формул в зависимости от относительной толщины оболочки.

Например, при $\frac{R}{h} = 400 \left(\frac{\kappa}{6} = 4,28 \right)$ эти формулы применимы с достаточной точностью лишь для $m = 3$ и $m = 4$; при $\frac{R}{h} = 900 \times \left(\frac{\kappa}{6} \approx 6,42 \right)$ — для $m = 3, 4, 5, 6$. Разумеется, для грубой оценки можно пользоваться приведенными формулами, несколько нарушая условие $\kappa \geq 6m$, тем более, что при этом, по всей вероятности, будут получаться верхние оценки.

Если $\kappa \ll 6m$, то можно считать, что оболочка деформируется, так как при равномерно распределенной вдоль направляющей окружности $\xi = 0$ радиальной нагрузке с интенсивностью $P = \frac{mQ_z}{2\pi R}$ и тогда

$$w = w(\xi, \varphi) = \frac{RP}{2Eh} \kappa (\cos \kappa \xi + \sin \kappa |\xi|) e^{-\kappa |\xi|}; \quad (34)$$

$$\max w = w(0, 0) = \frac{\kappa RP}{2Eh} = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left(\frac{R}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{P}{2E}. \quad (35)$$

Радиальные перемещения оболочки произвольной длины при действии m взаимно уравновешенных радиальных сил. Пусть на оболочку действуют m ($m \geq 2$) одинаковых радиальных сил Q_z , приложенных по середине оболочки в точках $\xi = 0, \varphi = 0; \xi = 0, \varphi = \frac{2\pi}{m}; \dots; \xi = 0, \varphi = 2\pi \frac{m-1}{m}$, причем $2 \leq m \leq \frac{\kappa}{6}$. Тогда [15, 4]

$$\max w = \max w_{\infty} - \frac{mQ_z}{\pi E h} \kappa^3 \sum_{n=m, 2m, 3m, \dots}^N \frac{n L_n}{(n^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (36)$$

где $\max w_{\infty}$ — максимальное перемещение бесконечно длинной оболочки, которое может быть определено по формуле (33) или по формуле (31), если $m = 2$; N — ближайшее к $\frac{\kappa}{2}$ целое число, кратное m ; L_n — величина, определяемая в зависимости от условий закрепления краев оболочки;

при защемленных краях оболочки

$$L_n = \frac{2e^{-\lambda_n}(2 + \sin \lambda_n - \cos \lambda_n - e^{-\lambda_n})}{1 + 2e^{-\lambda_n} \sin \lambda_n - e^{-2\lambda_n}}, \quad (37)$$

где $\lambda_n = \frac{n\sqrt{n^2-1}}{\kappa} \cdot \frac{l}{R}$; $2l$ — длина оболочки;
при свободно опертых краях

$$L_n = \frac{2e^{-\lambda_n}(\cos \lambda_n + \sin \lambda_n + e^{-\lambda_n})}{1 + 2e^{-\lambda_n} \sin \lambda_n + e^{-2\lambda_n}}; \quad (38)$$

при свободных краях

$$L_n = -\frac{2e^{-\lambda_n}(2 + \cos \lambda_n - \sin \lambda_n + e^{-\lambda_n})}{1 + 2e^{-\lambda_n} \sin \lambda_n + e^{-2\lambda_n}}. \quad (39)$$

Длина оболочки и характер закрепления краев сказывается весьма существенно на значениях $\max w$. Например, при $\frac{R}{h} = 400$, даже когда $\frac{l}{R} = 10$, величина $\max w$ меньше величины $\max w_\infty$ примерно в 2,7 раза при защемленных краях и в 1,9 раза при свободно опертых краях. С уменьшением $\frac{l}{R}$ до двух величина $\max w$ при защемленных краях становится примерно в 6 раз меньше, чем $\max w_\infty$. При свободных краях, естественно, $\max w$ больше, чем $\max w_\infty$; когда $\frac{R}{h} = 400$, а $\frac{l}{R} = 10$, отношение $\frac{\max w}{\max w_\infty}$ составляет всего около 1,4, но при $\frac{l}{R} = 2$ оно равно примерно 5,4.

Местные напряжения при действии краевых локальных нагрузок

Рассмотрим консольную цилиндрическую оболочку, к свободному краю которой приложена сосредоточенная нагрузка или нагрузка, распределенная вдоль малого участка края.

Нагрузкой будут радиальная сила Q или изгибающий момент M , интенсивности которых являются соответственно краевыми значениями перерезывающего усилия Q_1 и момента M_1 .

При указанных нагрузках вблизи их места приложения наибольшими напряжениями в оболочке будут напряжения изгиба.

Действие сосредоточенной радиальной силы Q , приложенной к краю оболочки (рис.9). В этом случае (поскольку одним из граничных условий является равенство нулю момента M_1 на свободном крае оболочки) момент M_1 оказывается ограниченным в окрестности точки приложения силы Q . В этой окрестности напряженное состояние определяется в основном изгибающим моментом M_2 , для которого получена асимптотическая формула [14]

$$M_2 \simeq -\frac{2(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} Q \ln \rho = \frac{2(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} Q \ln \frac{R}{r}, \quad (40)$$

где r — расстояние от точки приложения силы Q до рассматриваемой точки оболочки, в которой определяют M_2 ($\rho = \frac{r}{R}$).

Естественно, что в этой формуле коэффициент получается большим, чем в формуле (9).

Действие радиальной нагрузки Q , распределенной по малому участку края оболочки (рис. 10). Пусть радиальная нагрузка Q распределена по малому участку свободного края консольной оболочки. Положим,

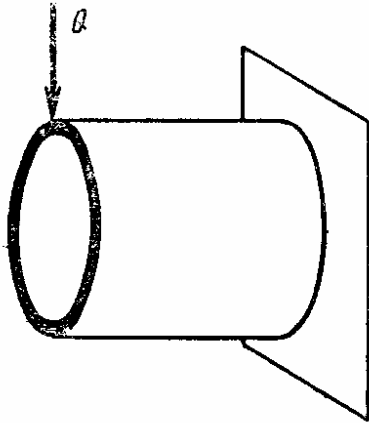


Рис. 9

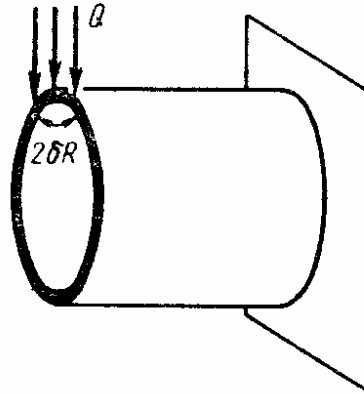


Рис. 10

что длина этого участка равна $2\delta R$ и что его середина принята за начало координат ξ, φ . В этом случае оба момента M_1 и M_2 будут ограниченными величинами, но напряженное состояние вблизи нагруженного участка по-прежнему будет определяться в основном моментом M_2 .

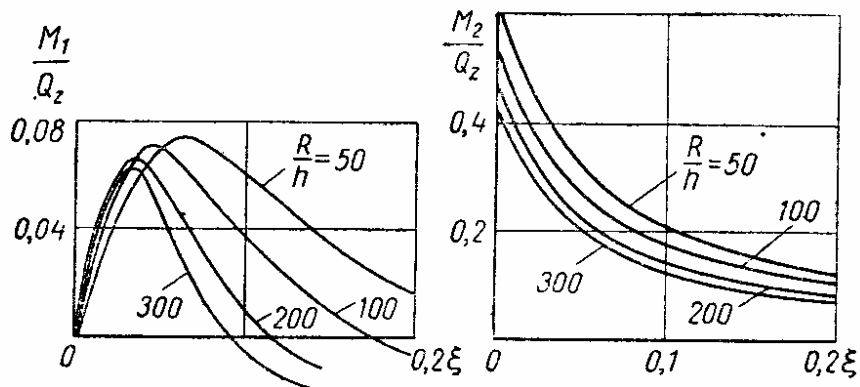


Рис. 11

Изменение моментов M_1, M_2 вдоль образующей $\varphi = 0$ при $\delta = 0,03$ и $\frac{l}{R} = 1$ показано на рис. 11 [12]. При тех же значениях δ и $\frac{l}{R}$ при $\frac{h}{R} = 100$ изменение M_1 и M_2 в окружном направлении (в сечениях, где эти величины имеют максимальные значения) дано на рис. 12.

С увеличением $\frac{l}{R}$ графики на рис. 11, 12 мало изменяются.

Изменение максимальных значений величин $\frac{M_1}{Q}, \frac{M_2}{Q}$ с уменьшением δ приведено в табл. 1.

1. Зависимость максимальных значений $\frac{M_1}{Q}$ и $\frac{M_2}{Q}$ от величины δ (при $\frac{l}{R} = 1$)

δ	$\frac{R}{h} = 50$		$\frac{R}{h} = 100$		$\frac{R}{h} = 200$	
	$-\frac{M_1}{Q}$	$\frac{M_2}{Q}$	$-\frac{M_1}{Q}$	$\frac{M_2}{Q}$	$-\frac{M_1}{Q}$	$\frac{M_2}{Q}$
0,04	0,0843	0,557	0,0773	0,490	0,0693	0,421
0,03	0,0873	0,620	0,0817	0,552	0,0745	0,482
0,022	0,0902	0,705	0,0859	0,638	0,0804	0,567
0,0156	0,0918	0,820	0,0890	0,752	0,0857	0,680
0,01	0,0928	0,964	0,0910	0,895	0,0885	0,825
0,0036	0,0932	1,185	0,0917	1,115	0,0903	1,050

Действие сосредоточенного момента M_1 , приложенного к краю оболочки (рис. 13). В окрестности точки приложения момента M напряженное состояние оболочки определяется в основном изгибающими

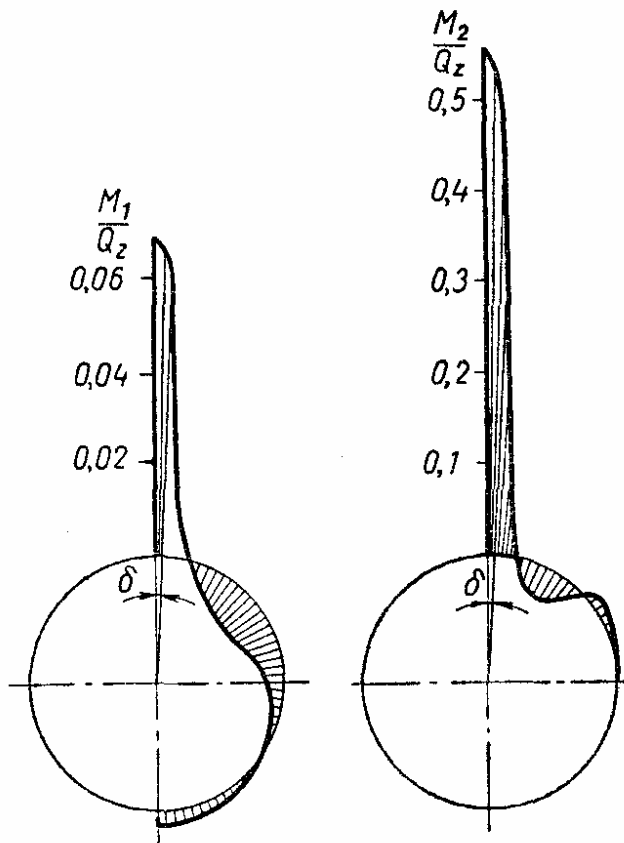


Рис. 12

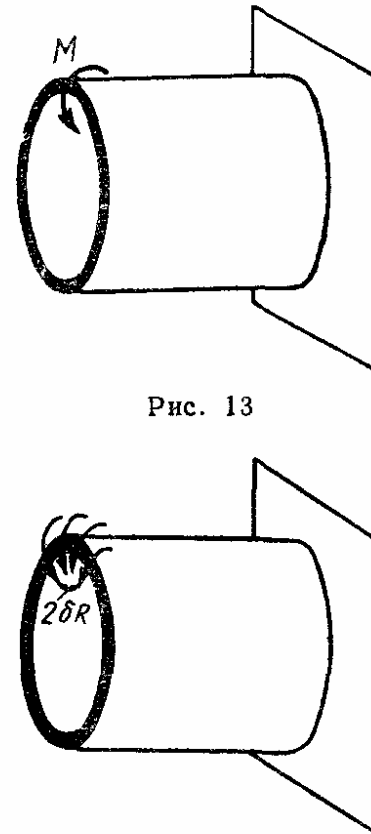


Рис. 13

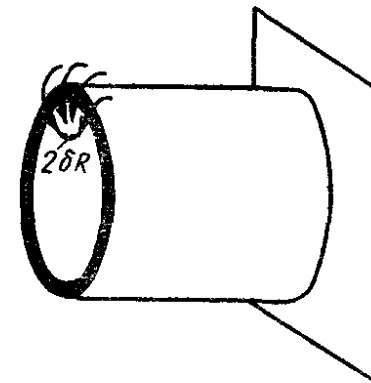


Рис. 14

моментами M_1 , M_2 , для которых получены асимптотические формулы [14]

$$M_1 \simeq \frac{M}{\pi R} \xi \rho^{-2}; \quad M_2 \simeq -\frac{M(1-\nu)}{\pi(3+\nu)R} \xi \rho^{-2}. \quad (41)$$

На линии $\rho = \frac{r}{R} = \text{const}$ наибольшие по модулю значения M_1 , M_2 будут в точке m с координатами $\xi = \rho = \frac{r}{R}$, $\varphi = 0$.

где

$$M_1 \simeq \frac{M}{\pi r}; \quad M_2 \simeq -\frac{M(1-\nu)}{\pi(3+\nu)r} \quad (42)$$

(при $\nu = 0,3$ момент M_2 примерно в 5 раз меньше, чем M_1).

Действие момента M , распределенного по малому участку края оболочки (рис. 14). Будем считать, что нагруженный моментом M участок края оболочки, как и на рис. 10, имеет длину $2\delta R$ и его середина принята за начало координат ξ , φ .

Изгибающие моменты M_1 , M_2 в данном случае ограничены, но напряженное состояние оболочки вблизи места приложения момента M определяется в основном моментами M_1 , M_2 ($M_1 > M_2$), как и в случае, когда момент M является сосредоточенным.

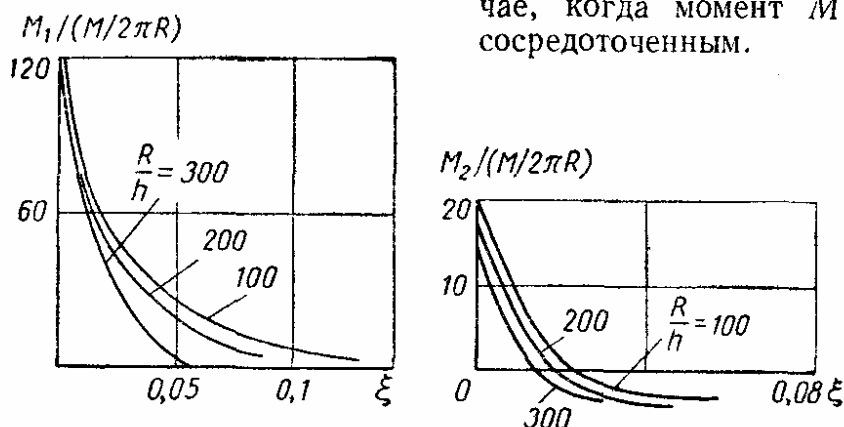


Рис. 15

Изменение моментов M_1 , M_2 вдоль образующей $\varphi = 0$ при $\delta = 0,03$ и $\frac{l}{R} = 1$ показано на рис. 15 (с увеличением $\frac{l}{R}$ эти графики мало изменяются [13]).

Максимальные значения величин $M_1/(M/2\pi R)$ и $M_2/(M/2\pi R)$ при $\frac{R}{h} = 100$ и $\frac{l}{R} = 1$ приведены в табл. 2.

2. Максимальные значения $M_1/(M/2\pi R)$ и $M_2/(M/2\pi R)$

δ	$M_1/(M/2\pi R)$	$M_2/(M/2\pi R)$
0,03	124,3	20,1
0,022	175,4	30,8

Местные напряжения в цилиндрической оболочке, нагруженной по отрезку линии кривизны

Пусть $m_2 m_1$ — равномерно нагруженный отрезок образующей или направляющей окружности, причем в направлении от точки m_2 к точке m_1 соответствующая координата (x или φ) возрастает.

Если $\overline{m_2 m_1}$ отрезок образующей и нагрузкой является сила Q_x или Q_y или же момент M_x , а также, если $m_2 m_1$ — отрезок направляющей окружности и нагрузкой является сила Q_x или Q_y или же момент M_y , то наиболее напряженными будут окрестности точек m_1, m_2 .

Расстояние от точки m_1 (или m_2) до рассматриваемой точки ее окрестности будем обозначать через r ; длины нагруженных отрезков образующей и направляющей окружности обозначим соответственно через a и b .

Во всех приведенных на стр. 78—81 асимптотических формулах для усилий и моментов верхний знак соответствует точке m_1 , а нижний — точке m_2 .

Действие осевой силы Q_x , равномерно распределенной по отрезку образующей (рис. 16). В достаточно малых окрестностях точек m_1, m_2 напряженное состояние определяется в основном усилиями N_1, N_2 , для которых справедливы асимптотические формулы [3, 4]

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq \mp \frac{3+\nu}{4\pi a} Q_x \ln \frac{R}{r}; \\ N_2 &\simeq \pm \frac{1-\nu}{4\pi a} Q_x \ln \frac{R}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

В точках окружностей C_1, C_2 с радиусами r и с центрами в точках $m_1,$

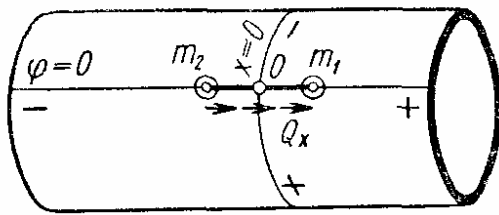


Рис. 16

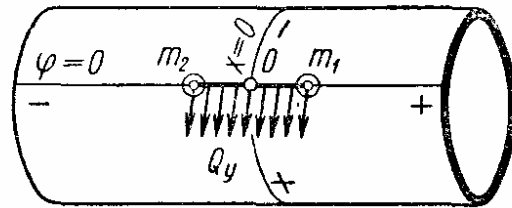


Рис. 17

m_2 наибольшее по модулю напряжение соответствует усилию N_1 и определяется по формуле

$$\sigma_1 \simeq \mp \frac{3+\nu}{4\pi ah} Q_x \ln \frac{R}{r}. \quad (44)$$

Действие окружной силы Q_y , равномерно распределенной по отрезку образующей (рис. 17). В достаточно малых окрестностях точек m_1, m_2 напряженное состояние определяется в основном усилиями T_1, T_2 , для которых справедлива асимптотическая формула [3, 4]

$$T_1 \simeq T_2 \simeq \mp \frac{1-\nu}{4\pi a} Q_y \ln \frac{R}{r}. \quad (45)$$

Этим усилиям соответствуют касательные напряжения того же знака

$$\tau \simeq \mp \frac{1-\nu}{4\pi ah} Q_y \ln \frac{R}{r}. \quad (46)$$

Действие момента M_x (с вектором в осевом направлении), равномерно распределенного по отрезку образующих (рис. 18). В достаточно малых окрестностях точек m_1, m_2 напряженное состояние определяется

в основном крутящими моментами H_1, H_2 , для которых справедлива асимптотическая формула [3, 4]

$$H_1 \simeq H_2 \simeq \pm \frac{1-\nu}{4\pi a} M_x \ln \frac{R}{r}. \quad (47)$$

Моментам H_1, H_2 соответствуют касательные напряжения τ на внутренней и внешней поверхностях оболочки:

$$\tau \simeq \pm \frac{3(1-\nu)}{2\pi a h^2} M_x \ln \frac{R}{r}, \quad (48)$$

где знак минус берут для напряжений на внутренней поверхности вблизи точки m_2 и для напряжений на внешней поверхности вблизи точки m_1 , а знак плюс — для напряжений на внутренней поверхности вблизи точки m_1 и для напряжений на внешней поверхности вблизи точки m_2 .

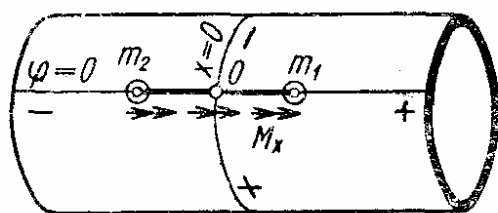


Рис. 18

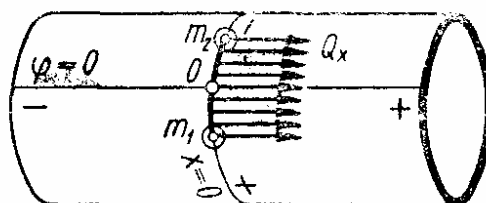


Рис. 19

Действие осевой силы Q_x , равномерно распределенной по отрезку направляющей окружности (рис. 19). В достаточно малых окрестностях точек m_1, m_2 напряженное состояние определяется в основном усилиями T_1, T_2 , для которых справедлива асимптотическая формула [3, 4]

$$T_1 \simeq T_2 \simeq \mp \frac{1-\nu}{4\pi b} Q_x \ln \frac{R}{r}. \quad (49)$$

Этим усилиям соответствуют касательные напряжения того же знака

$$\tau \simeq \mp \frac{1-\nu}{4\pi b h} Q_x \ln \frac{R}{r}. \quad (50)$$

Действие окружной силы Q_y , равномерно распределенной по отрезку направляющей окружности (рис. 20). В достаточно малых окрестностях точек m_1, m_2 напряженное состояние определяется в основном усилиями N_1, N_2 , для которых справедливы асимптотические формулы [3, 4]

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq \pm \frac{1-\nu}{4\pi b} Q_y \ln \frac{R}{r}; \\ N_2 &\simeq \mp \frac{3+\nu}{4\pi b} Q_y \ln \frac{R}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

В точках окружностей C_1, C_2 с радиусами r и с центрами в точках m_1, m_2 наибольшее по модулю напряжение соответствует усилию N_2 и определяется по формуле [3, 4]

$$\sigma_2 \simeq \mp \frac{3+\nu}{4\pi b h} Q_y \ln \frac{R}{r}. \quad (52)$$

Действие момента M_y (с вектором в окружном направлении), равномерно распределенного по отрезку направляющей окружности (рис. 21). В достаточно малых окрестностях точек m_1 , m_2 напряженное состояние определяется в основном моментами H_1 , H_2 , для которых справедлива асимптотическая формула [3, 4]

$$H_1 \simeq H_2 \simeq \mp \frac{1-\nu}{4\pi b} M_y \ln \frac{R}{r}. \quad (53)$$

Моментам H_1 , H_2 соответствуют касательные напряжения на внутренней и внешней поверхностях оболочки

$$\tau \simeq \mp \frac{3(1-\nu)}{2\pi b h^2} M_y \ln \frac{R}{r}, \quad (54)$$

где знак плюс берут для напряжений на внутренней поверхности вблизи точки m_2 и для напряжений на внешней поверхности вблизи

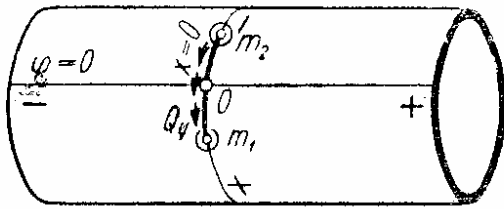


Рис. 20

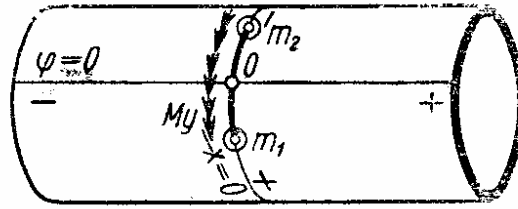


Рис. 21

точки m_1 , а знак минус — для напряжений на внутренней поверхности вблизи точки m_1 и для напряжений на внешней поверхности вблизи точки m_2 .

Действие тангенциальных сил, неравномерно распределенных по отрезку линии кривизны. Если осевая сила Q_x или окружная сила Q_y распределена неравномерно по отрезку образующей или отрезку направляющей окружности, то справедливы [2] соответствующие асимптотические формулы (43), (45), (49), (51) с заменой в них величин $\frac{Q_x}{a}$, $\frac{Q_y}{b}$ и $\frac{Q_y}{a}$, $\frac{Q_y}{b}$ значениями интенсивности силы Q_x и силы Q_y в концах нагруженного отрезка, если эти интенсивности отличны от нуля (в случае, когда интенсивность внешней силы на конце нагруженного отрезка равна нулю, то в окрестности этого конца все внутренние усилия ограничены).

Переход к ортотропной оболочке. Для ортотропной оболочки, у которой модуль сдвига определяется равенством (21), в достаточно малых окрестностях концевых точек m_1 , m_2 нагруженного отрезка $m_2 m_1$ образующей или направляющей окружности будут справедливы следующие асимптотические формулы [10] [обобщение формул (43), (45), (49), (51)].

Если осевая сила Q_x или окружная сила Q_y равномерно распределены по отрезку образующей с длиной a , то

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq \mp \frac{(3 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}{4\pi a} \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} Q_x \ln \frac{R}{r}; \\ N_2 &\simeq \pm \frac{(1 - \sqrt{\nu_1 \nu_2})}{4\pi a} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} Q_x \ln \frac{R}{r}; \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$T_1 \simeq T_2 \simeq \mp \frac{(1 - \sqrt{v_1 v_2})}{4\pi a} \sqrt[4]{\frac{v_1}{v_2}} Q_y \ln \frac{R}{r}. \quad (56)$$

Если сила Q_x или сила Q_y равномерно распределены по отрезку направляющей окружности с длиной b , то

$$T_1 \simeq T_2 \simeq \mp \frac{(1 - \sqrt{v_1 v_2})}{4\pi b} \sqrt[4]{\frac{v_2}{v_1}} Q_x \ln \frac{R}{r}; \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq \pm \frac{(1 - \sqrt{v_1 v_2})}{4\pi b} \sqrt[4]{\frac{v_2}{v_1}} Q_y \ln \frac{R}{r}; \\ N_2 &\simeq \mp \frac{(3 + \sqrt{v_1 v_2})}{4\pi b} \sqrt[4]{\frac{v_1}{v_2}} Q_y \ln \frac{R}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Свободно опертая оболочка, нагруженная по образующей

Пусть на свободно опертую по краям цилиндрическую оболочку длиной l действует радиальная сила, распределенная по отрезку образующей длиной a . Положим, что середина нагруженного отрезка совпадает с серединой O всей образующей и что точка O принята за начало координат $\xi = \frac{x}{R}$, φ , причем $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Рассмотрим два случая [8]: когда радиальная сила равномерно распределена вдоль отрезка образующей и когда радиальная сила распределена по отрезку образующей антисимметрично его середины. Во втором случае нагрузка статически эквивалентна моменту M_y .

Действие радиальной силы Q_z , равномерно распределенной по отрезку образующей (рис. 22). Усилия и моменты в любой точке оболочки определяют по формулам¹

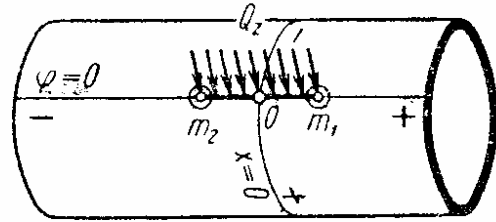


Рис. 22

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= N_{10}(\xi, \varphi) + N_{10}(\xi, 2\pi - \varphi); \\ N_2 &= N_{20}(\xi, \varphi) + N_{20}(\xi, 2\pi - \varphi); \\ T &= T_0(\xi, \varphi) + T_0(\xi, 2\pi - \varphi); \\ M_1 &= M_{10}(\xi, \varphi) + M_{10}(\xi, 2\pi - \varphi); \\ M_2 &= M_{20}(\xi, \varphi) + M_{20}(\xi, 2\pi - \varphi); \\ H &= H_0(\xi, \varphi) + H_0(\xi, 2\pi - \varphi); \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

¹ Здесь принято $T_1 = T_2 = T$.

$$\begin{aligned}
N_{10}(\xi, \varphi) &= \frac{\kappa Q_z}{\pi a} \times \\
&\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} N_{1n}(\varphi) \sin \frac{n\pi a}{2l} \cos \frac{n\pi R}{l} \xi; \\
N_{20}(\xi, \varphi) &= \frac{\kappa Q_z}{\pi a} \times \\
&\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} N_{2n}(\varphi) \sin \frac{n\pi a}{2l} \cos \frac{n\pi R}{l} \xi; \\
T_0(\xi, \varphi) &= \frac{\kappa Q_z}{\pi a} \times \\
&\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} T_n(\varphi) \sin \frac{n\pi a}{2l} \sin \frac{n\pi R}{l} \xi; \\
M_{10}(\xi, \varphi) &= -\frac{RQ_z}{2\pi\kappa a} \times \\
&\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} M_{1n}(\varphi) \sin \frac{n\pi a}{2l} \cos \frac{n\pi R}{l} \xi; \\
M_{20}(\xi, \varphi) &= -\frac{RQ_z}{2\pi\kappa a} \times \\
&\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} M_{2n}(\varphi) \sin \frac{n\pi a}{2l} \cos \frac{n\pi R}{l} \xi; \\
H_0(\xi, \varphi) &= -\frac{1-\nu}{2\pi\kappa} \frac{RQ_z}{a} \times \\
&\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} H_n(\varphi) \sin \frac{n\pi a}{2l} \sin \frac{n\pi R}{l} \xi; \\
N_{1n}(\varphi) &= \frac{e^{-\alpha_1\varphi}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \times \\
&\times \left\{ \left[\frac{n\pi R}{l} \alpha_1 + \left(\frac{n\pi R}{l} + 2\kappa \right) \beta_1 \right] \cos \beta_1\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(\frac{n\pi R}{l} + 2\kappa \right) \alpha_1 - \frac{n\pi R}{l} \beta_1 \right] \beta_1\varphi \right\} + \\
&+ \frac{e^{-\alpha_2\varphi}}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \left\{ \left[-\frac{n\pi R}{l} \alpha_2 + \left(\frac{n\pi R}{l} - 2\kappa \right) \beta_2 \right] \times \right. \\
&\quad \times \cos \beta_2\varphi + \left[\left(\frac{n\pi R}{l} - 2\kappa \right) \alpha_2 + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{n\pi R}{l} \beta_2 \right] \sin \beta_2\varphi \right\};
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
 N_{2n}(\varphi) &= \frac{e^{-\alpha_1 \varphi}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \frac{n\pi R}{l} [-(\alpha_1 + \beta_1) \cos \beta_1 \varphi + \\
 &+ (\beta_1 - \alpha_1) \sin \beta_1 \varphi] + \frac{e^{-\alpha_2 \varphi}}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \frac{n\pi R}{l} \times \\
 &\times [(\alpha_2 - \beta_2) \cos \beta_2 \varphi - (\alpha_2 + \beta_2) \sin \beta_2 \varphi]; \\
 T_n(\varphi) &= -e^{-\alpha_1 \varphi} (\cos \beta_1 \varphi + \sin \beta_1 \varphi) + \\
 &+ e^{-\alpha_2 \varphi} (\cos \beta_2 \varphi - \sin \beta_2 \varphi); \\
 M_{1n}(\varphi) &= \frac{e^{-\alpha_1 \varphi}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left\{ \left[-2\nu\kappa\alpha_1 + \frac{n\pi R}{l} \times \right. \right. \\
 &\times (1 - \nu)(\alpha_1 - \beta_1) \left. \right] \cos \beta_1 \varphi + \\
 &+ \left[2\nu\kappa\beta_1 - \frac{n\pi R}{l} (1 - \nu)(\alpha_1 + \beta_1) \right] \sin \beta_1 \varphi \left. \right\} + \\
 &+ \frac{e^{-\alpha_2 \varphi}}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \left\{ \left[-2\nu\kappa\alpha_2 - \frac{n\pi R}{l} \times \right. \right. \\
 &\times (1 - \nu)(\alpha_2 + \beta_2) \left. \right] \cos \beta_2 \varphi + \\
 &+ \left[2\nu\kappa\beta_2 - \frac{n\pi R}{l} (1 - \nu)(\alpha_2 - \beta_2) \right] \sin \beta_2 \varphi \left. \right\}; \\
 M_{2n}(\varphi) &= \frac{e^{-\alpha_1 \varphi}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left\{ \left[-2\kappa\alpha_1 - \frac{n\pi R}{l} \times \right. \right. \\
 &\times (1 - \nu)(\alpha_1 - \beta_1) \left. \right] \cos \beta_1 \varphi + \\
 &+ \left[2\kappa\beta_1 + \frac{n\pi R}{l} (1 - \nu)(\alpha_1 + \beta_1) \right] \sin \beta_1 \varphi \left. \right\} + \\
 &+ \frac{e^{-\alpha_2 \varphi}}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \left\{ \left[-2\kappa\alpha_2 + \frac{n\pi R}{l} \times \right. \right. \\
 &\times (1 - \nu)(\alpha_2 + \beta_2) \left. \right] \cos \beta_2 \varphi + \\
 &+ \left[2\kappa\beta_2 + \frac{n\pi R}{l} (1 - \nu)(\alpha_2 - \beta_2) \right] \sin \beta_2 \varphi \left. \right\}; \\
 H_n(\varphi) &= e^{-\alpha_1 \varphi} (\sin \beta_1 \varphi + \cos \beta_1 \varphi) + \\
 &+ e^{-\alpha_2 \varphi} (\sin \beta_2 \varphi + \cos \beta_2 \varphi);
 \end{aligned} \tag{61}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{n\pi R}{2l} \left[\frac{n\pi R}{l} + \kappa + \sqrt{\left(\frac{n\pi R}{l} + \kappa \right)^2 + \kappa^2} \right]; \\ \beta_1 &= \frac{n\pi R}{2l} \frac{\kappa}{\alpha_1}; \\ \alpha_2^2 &= \frac{n\pi R}{2l} \left[\frac{n\pi R}{l} - \kappa + \sqrt{\left(\frac{n\pi R}{l} - \kappa \right)^2 + \kappa^2} \right]; \\ \beta_2 &= \frac{n\pi R}{2l} \frac{\kappa}{\alpha_2}; \quad \kappa^4 = 3(1 - \nu^2) \frac{R^2}{h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Наибольшие напряжения возникают при $\varphi = 0$ в точках нагруженного отрезка образующей.

Если оболочка не очень длинная, то из-за присутствия в формулах для α_1, α_2 большой величины κ будем иметь $\alpha_1, \alpha_2 > 1$. Тогда

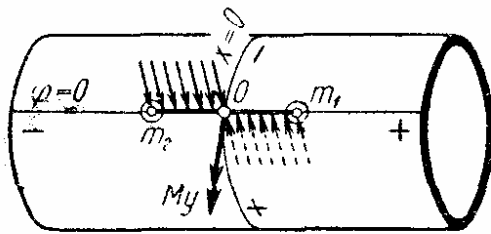


Рис. 23

$$e^{-2\pi\alpha_1}, e^{-2\pi\alpha_2} \ll 1$$

$$\text{и } N_{1n}(2\pi) \ll N_{1n}(0),$$

$$N_{2n}(2\pi) \ll N_{2n}(0), \dots$$

Поэтому в обычном случае, когда $\alpha_1, \alpha_2 > 1$, можно в формулах (59) не учитывать вторых слагаемых, считая

$$N_1 \approx N_{10}(\xi, \varphi); \quad N_2 \approx N_{20}(\xi, \varphi), \dots$$

Действие радиальной силы, распределенной по отрезку образующей антисимметрично его середины (рис. 23). В данном случае нагрузка статически эквивалентна изгибающему моменту M_y с вектором в окружном направлении. В любой точке оболочки внутренние усилия и моменты определяют по формулам (59), где

$$\left. \begin{aligned} N_{10}(\xi, \varphi) &= -\frac{2\kappa M_y}{\pi a} \times \\ &\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} N_{1n}(\varphi) \left(1 - \cos \frac{n\pi a}{2l} \right) \sin \frac{n\pi R}{l} \xi; \\ N_{20}(\xi, \varphi) &= -\frac{2\kappa M_y}{\pi a} \times \\ &\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} N_{2n}(\varphi) \left(1 - \cos \frac{n\pi a}{2l} \right) \sin \frac{n\pi R}{l} \xi; \\ T_0(\xi, \varphi) &= \frac{2\kappa M_y}{\pi a} \times \\ &\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} T_n(\varphi) \left(1 - \cos \frac{n\pi a}{2l} \right) \cos \frac{n\pi R}{l} \xi; \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\begin{aligned}
 M_{10}(\xi, \varphi) &= \frac{RM_y}{\pi \kappa a} \times \\
 &\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} M_{1n}(\varphi) \left(1 - \cos \frac{n\pi a}{2l}\right) \sin \frac{n\pi R}{l} \xi; \\
 M_{20}(\xi, \varphi) &= \frac{RM_y}{\pi \kappa a} \times \\
 &\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} M_{2n}(\varphi) \left(1 - \cos \frac{n\pi a}{2l}\right) \sin \frac{n\pi R}{l} \xi; \\
 H_0(\xi, \varphi) &= -\frac{1-\nu}{\pi \kappa} \frac{RM_y}{a} \times \\
 &\times \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} H_n(\varphi) \left(1 - \cos \frac{n\pi a}{2l}\right) \cos \frac{n\pi R}{l} \xi
 \end{aligned} \tag{62}$$

[величины $N_{1n}(\varphi)$; $N_{2n}(\varphi)$; $T_n(\varphi)$; $M_{1n}(\varphi)$; $M_{2n}(\varphi)$; $H_n(\varphi)$ определяют по формулам (60), (61)].

Так же как и в предыдущем случае для не очень длинных оболочек, когда $\alpha_1, \alpha_2 > 1$, вторые слагаемые в формулах (59) можно не учитывать.

Свободно опертая оболочка под действием элементарных нагрузок

Пусть на эту оболочку действует радиальная сила, распределенная по прямоугольному элементу s поверхности оболочки, ограниченному двумя парами отрезков линий кривизны (образующих и направляющих окружностей).

Будем считать, что радиальная сила распределена по элементу s равномерно с равнодействующей Q_z или по линейному закону так, что нагрузка оказывается статически эквивалентной изгибающему моменту M_x (с вектором в осевом направлении) или изгибающему моменту M_y (с вектором в окружном направлении).

Такую нагрузку будем называть элементарной.

Стороны нагруженного элемента s в осевом и окружном направлениях обозначим соответственно через a и b .

При действии элементарной радиальной силы Q_z наибольшими напряжениями будут напряжения изгиба σ_1, σ_2 в центре нагруженной площадки s .

При действии элементарного изгибающего момента M_x наибольшими напряжениями будут изгибающие напряжения σ_2 на прямолинейных краях нагруженной площадки s . При действии элементарного изгибающего момента M_y наибольшими напряжениями будут изгибающие напряжения σ_1 на криволинейных краях нагруженной площадки s .

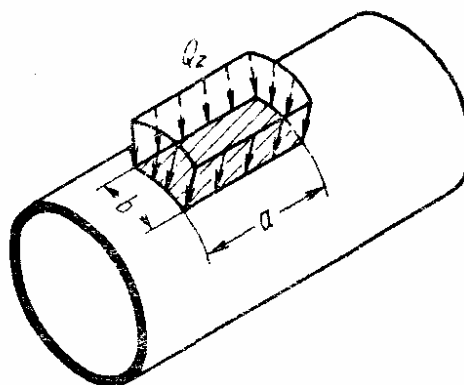


Рис. 24

Действие элементарной радиальной силы Q_z (рис. 24). Пусть нагруженная площадка s — квадратная ($a = b$) и расположена по середине оболочки.

На рис. 25—32 приведены графики внутренних изгибающих моментов M_1 , M_2 , отнесенных к Q_z , в центре площадки s в зависимости от величины $\frac{\eta}{2} = \frac{a}{2R}$ при различных значениях параметров $\alpha = \frac{\pi R}{l}$ и $\beta = \frac{R}{h}$. На каждом рисунке верхняя кривая A изображает величину $\frac{M_1}{Q_z}$ или $\frac{M_2}{Q_z}$, вычисленную по асимптотической формуле (9) при различных значениях $r = \frac{\eta}{2}$. Кривые A можно рассматривать как графики величин $\frac{M_1}{Q_z}$, $\frac{M_2}{Q_z}$, вычисленных в средних точках сторон квадратного элемента s , когда в его центре приложена сосредоточенная радиальная сила Q_z (см. работы [4, 5]).

Следует отметить два важных обстоятельства.

1. Графики величины $\frac{M_2}{Q_z}$ лежат выше соответствующих графиков величины $\frac{M_1}{Q_z}$, т. е. при локальной радиальной нагрузке Q_z максимальное значение изгибающего момента M_2 заметно превышает максимальное значение момента M_1 , хотя при стремлении размеров нагруженной площадки к нулю $M_1 \simeq M_2$ (отношение $\frac{M_2}{M_1} \rightarrow 1$).

2. Замена локальной (распределенной по малой площадке) радиальной нагрузки Q_z сосредоточенной силой и соответствующее использование асимптотических формул для M_1 , M_2 (использование кривых A на рис. 25—32) приводит к верхним оценкам величин M_1 , M_2 . Эти оценки обычно значительно завышены, они улучшаются не только при уменьшении размеров площадки нагружения (при уменьшении η), но и при увеличении относительной толщины оболочки (при уменьшении β).

Приведенные графики могут быть использованы и в случае прямоугольного элемента s , когда $\frac{1}{4} \leq \frac{b}{a} \leq 4$.

В этом случае величины $\frac{M_1}{Q_z}$, $\frac{M_2}{Q_z}$ будут примерно такие же, как для соответствующих квадратных элементов s_1 , s_2 со сторонами [4]

$$c_1 = k_1 \sqrt{ab}; \quad c_2 = k_2 \sqrt{ab}, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 + \frac{1}{15} \left(\frac{b}{a} - 1 \right), \quad \text{если } \frac{b}{a} \geq 1; \\ k_1 &= 1 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{b}{a} \right), \quad \text{если } \frac{b}{a} \leq 1; \\ k_2 &= 1 + \frac{4}{15} \left(\frac{b}{a} - 1 \right), \quad \text{если } \frac{b}{a} \geq 1; \\ k_2 &= 1 - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{b}{a} \right), \quad \text{если } \frac{b}{a} \leq 1 \end{aligned}$$

(коэффициент k_1 соответствует моменту M_1 , а k_2 — моменту M_2).

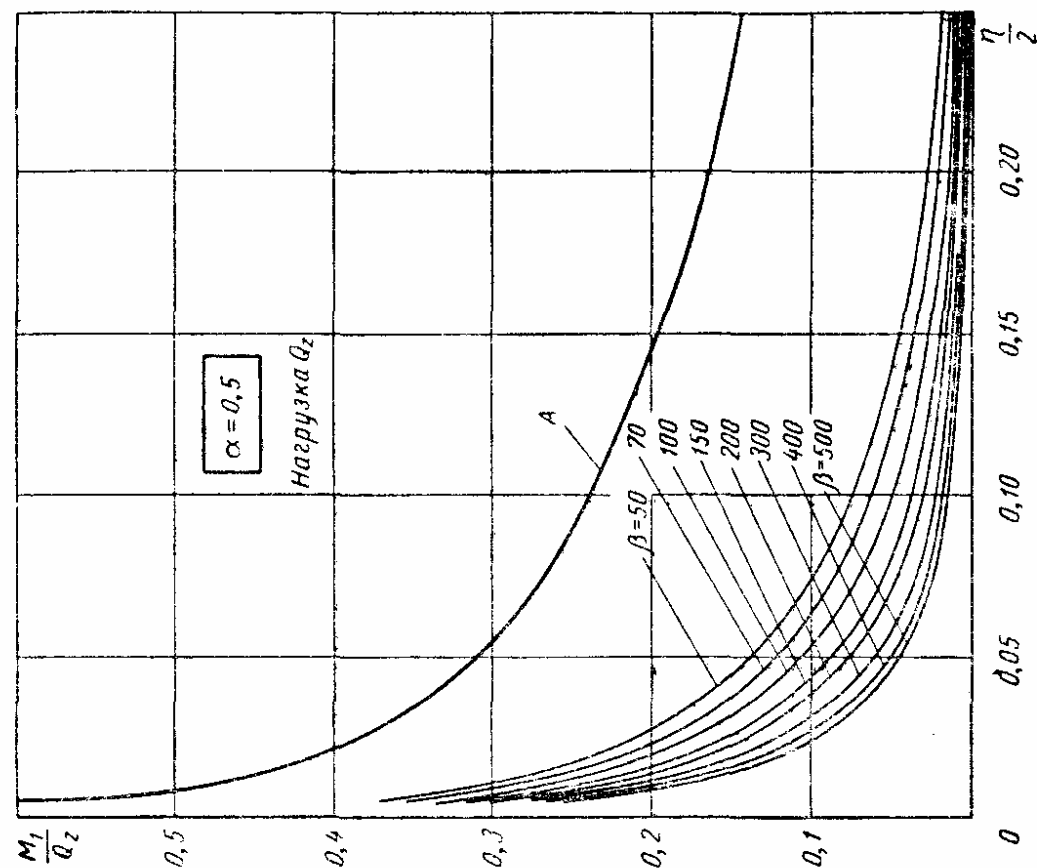


Рис. 26

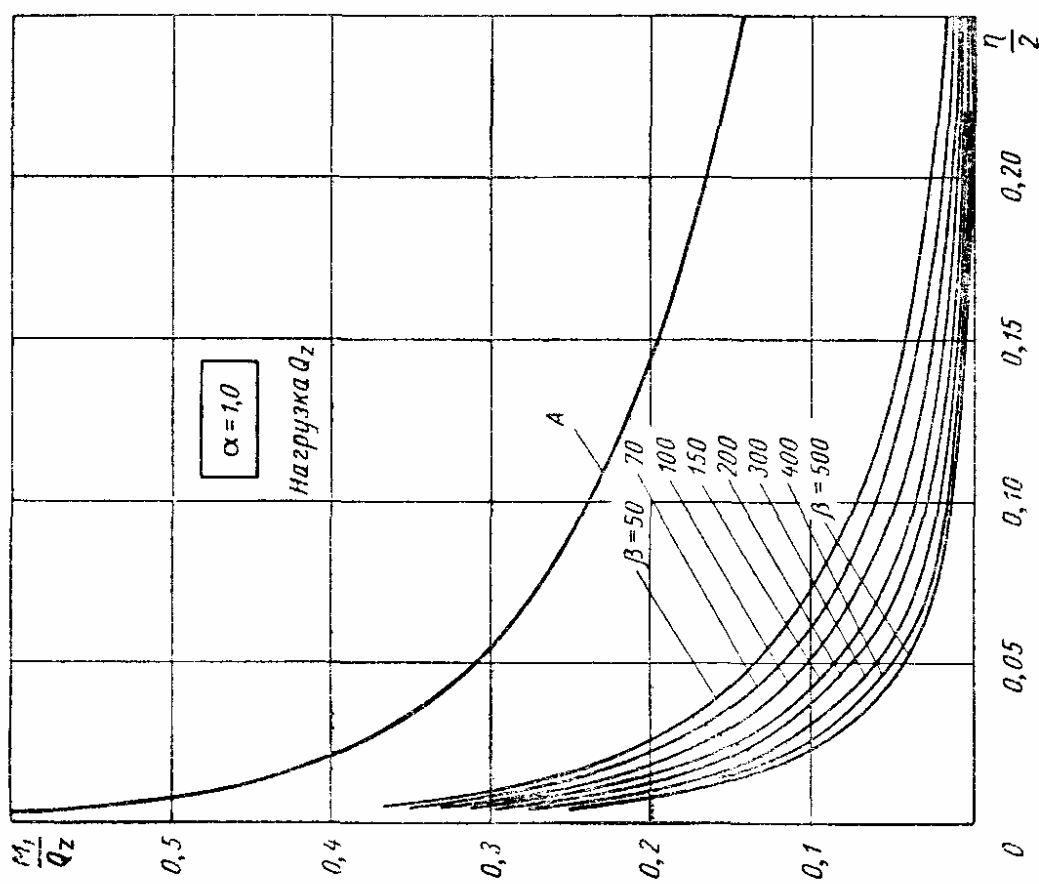


Рис. 25

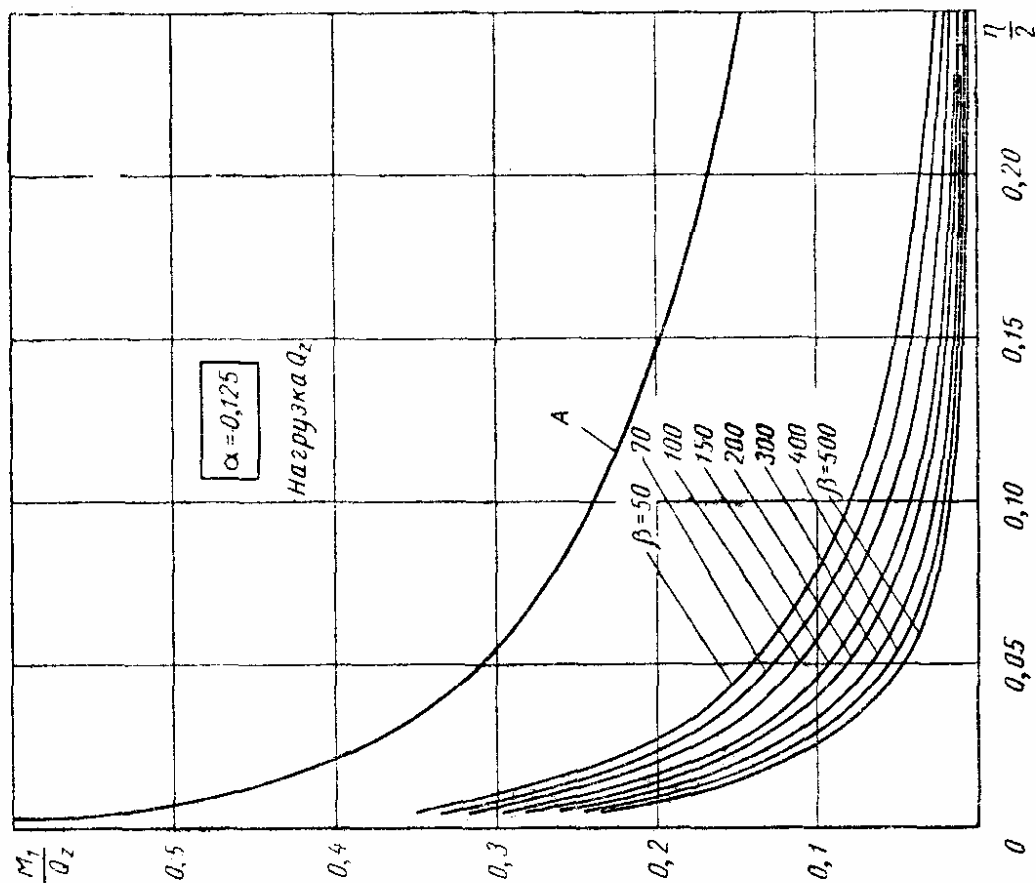


Рис. 28

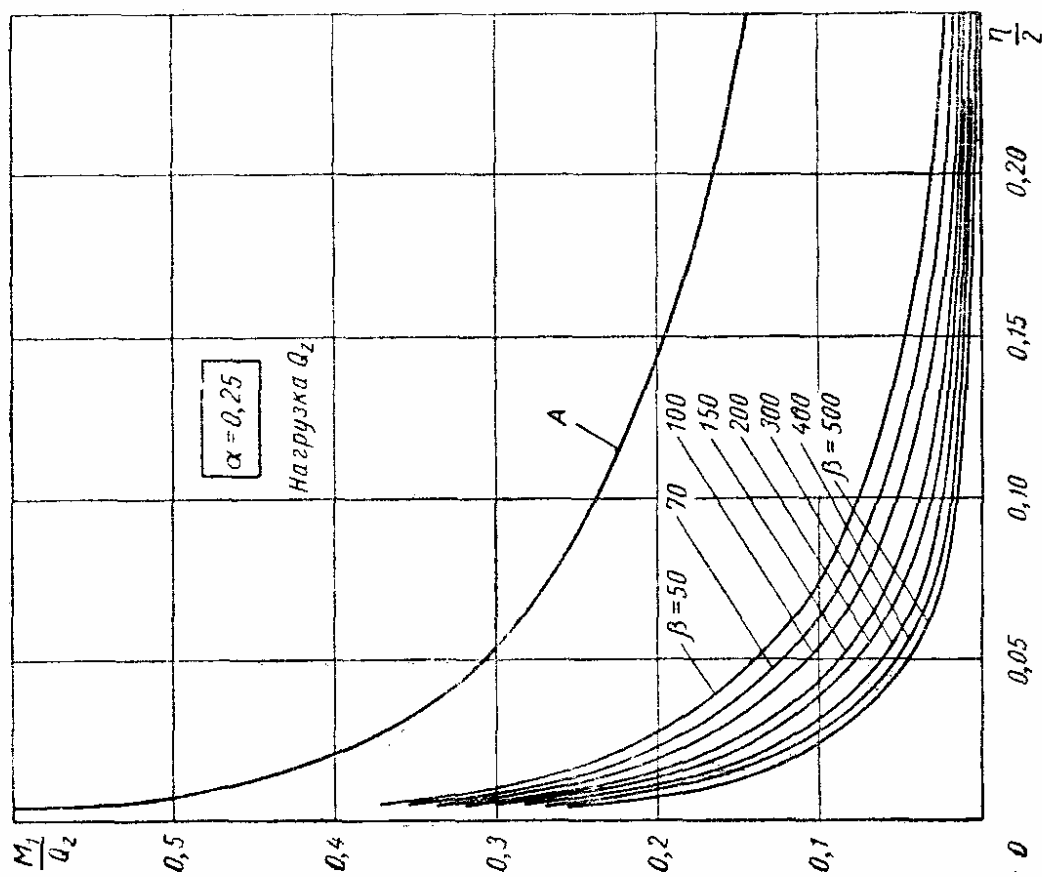


Рис. 27

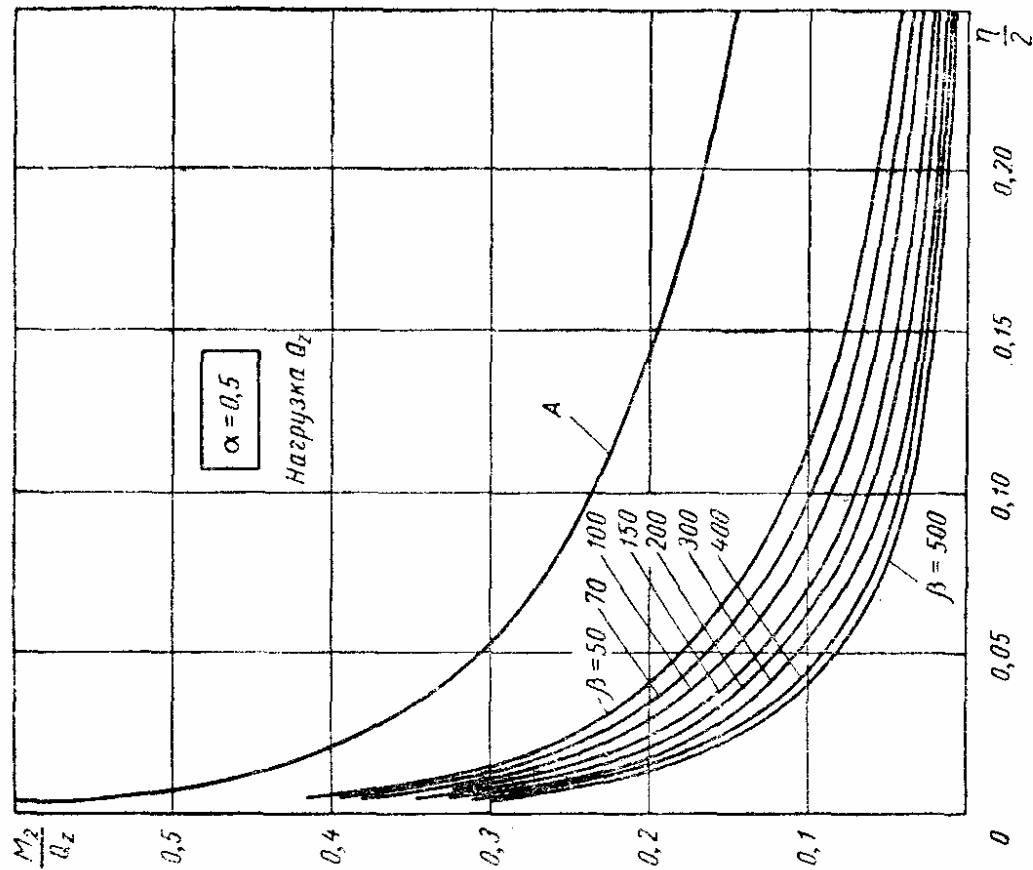


Рис. 30

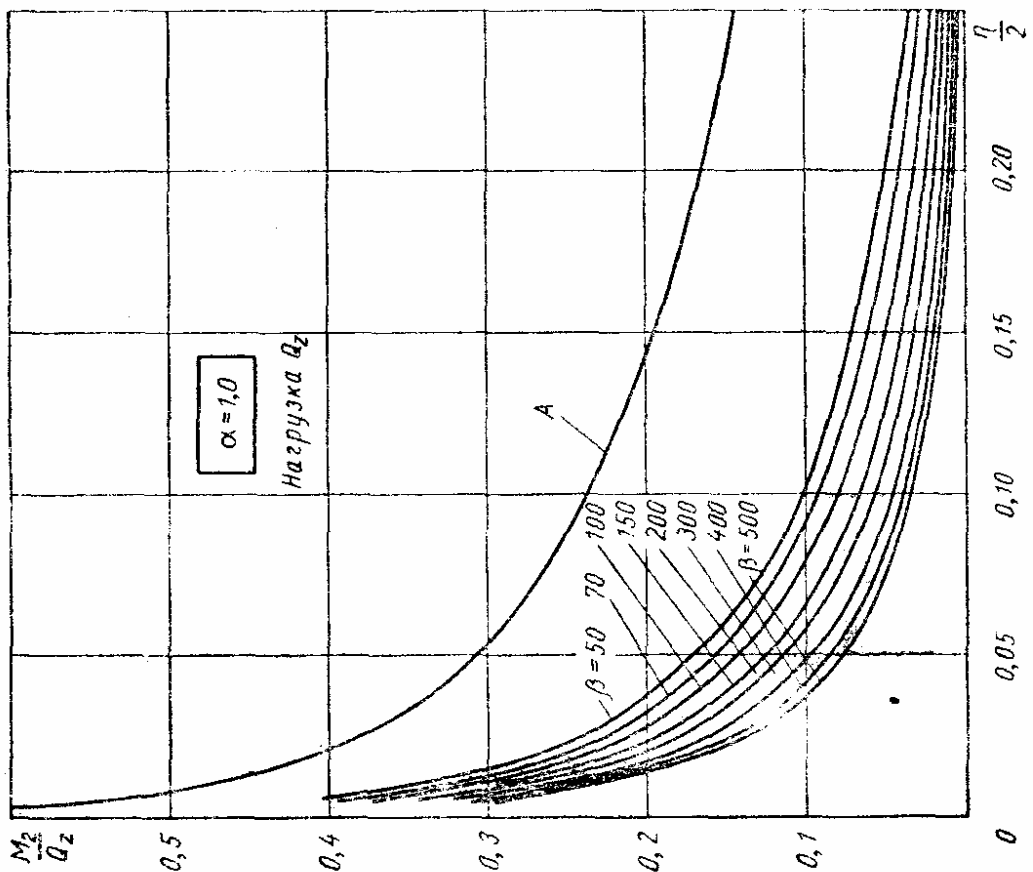


Рис. 29

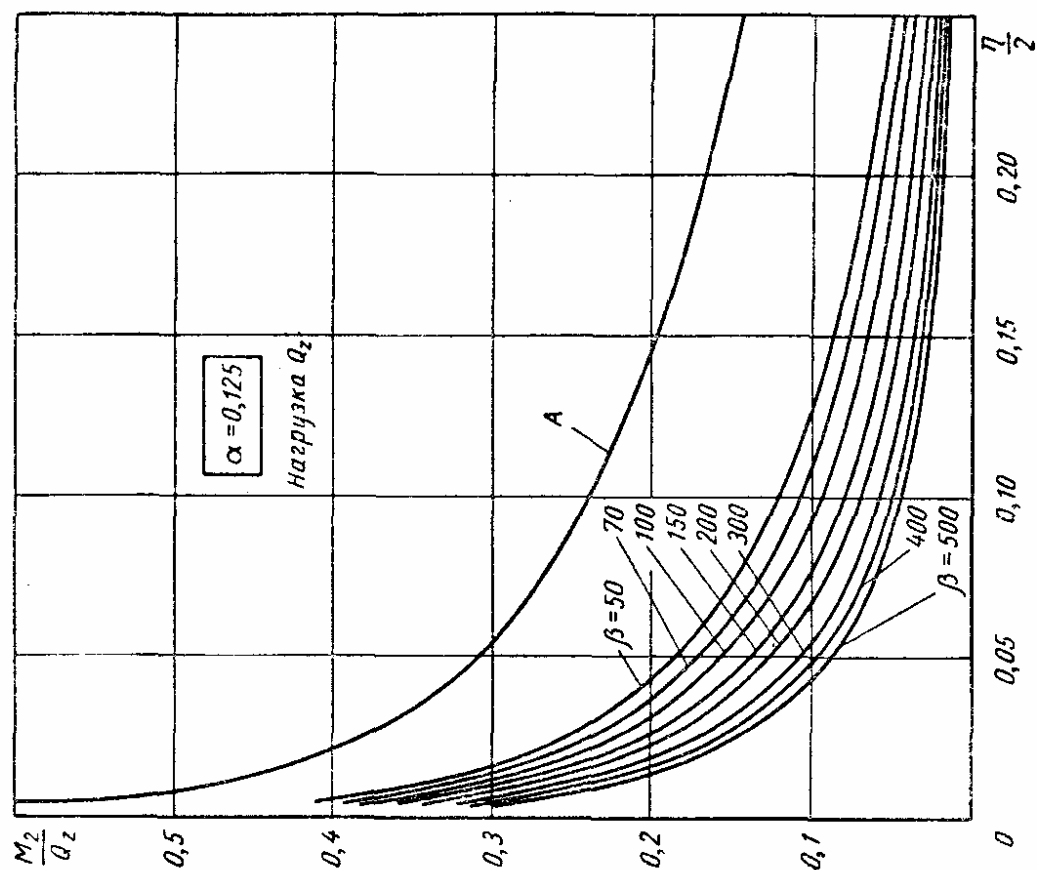


Рис. 32

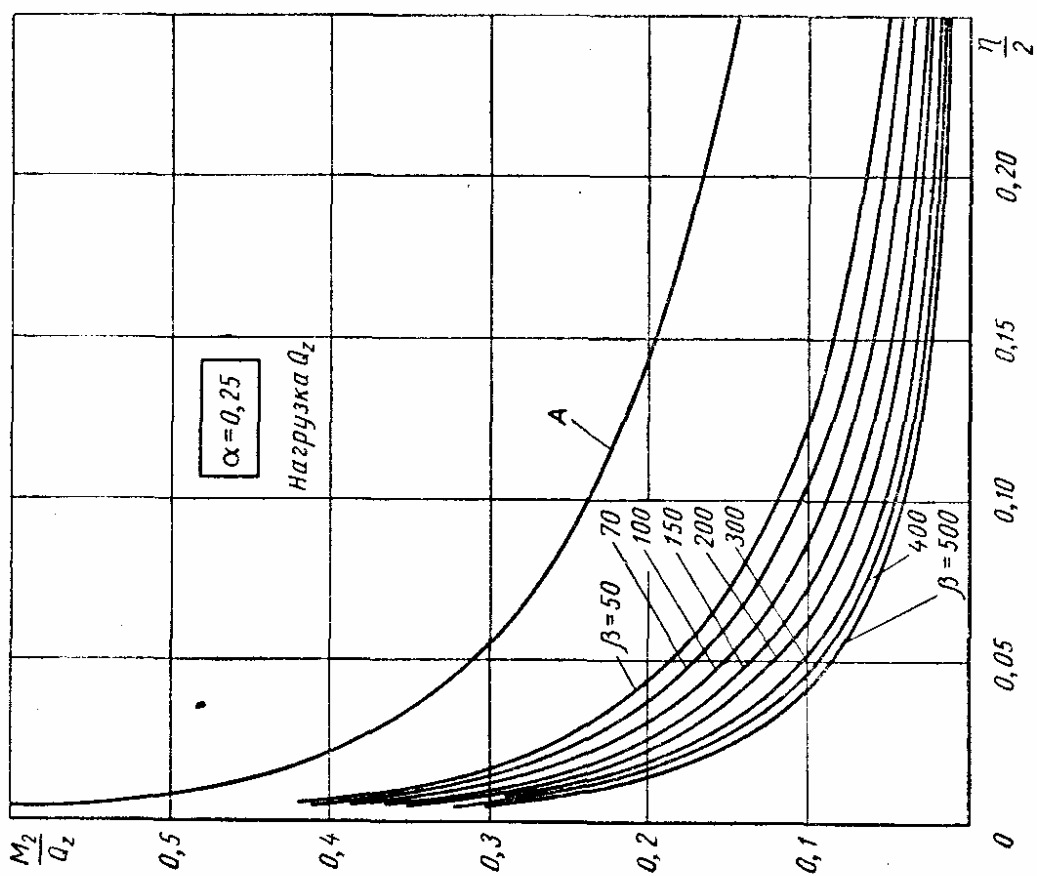


Рис. 31

Со сравнительно небольшой погрешностью графики на рис. 25—32 могут быть использованы и тогда, когда центр нагруженного элемента s не совпадает с серединой образующей, а отстоит от ближайшего края оболочки на расстоянии $x \geq \frac{l}{8}$ при $\frac{1}{4} \leq \frac{\pi R}{l} \leq 1$.

Действие элементарного изгибающего момента M_x (рис. 33). Пусть s — квадратная площадка ($a = b$), расположенная по середине оболочки.

На рис. 34—41 приведены графики (см. работы [4, 5]) внутренних изгибающих моментов M_1 , M_2 , отнесенных к величине $\frac{2M_x}{b}$ в зависимости от

величины $\frac{\eta}{2}$ при различных значе-

ниях параметров α и β (см. стр. 86). Значения моментов M_1 , M_2 соответ-

ствуют точке m_1 с координатами $\xi = 0$, $\varphi = \frac{b}{2R} = \frac{\eta}{2}$ (в точке m_2 с коорди-

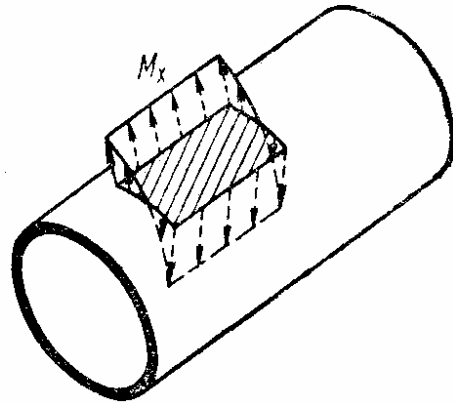


Рис. 33

натами $\xi = 0$, $\varphi = -\frac{b}{2R}$ эти величины имеют противоположный знак) и являются наибольшими по модулю.

На каждом из рисунков горизонтальная прямая A изображает величину $M_1/(2M_x/b)$ или $M_2/(2M_x/b)$, вычисленную по соответствующей асимптотической формуле (14) в точке m_1 при различных значениях $\frac{b}{2R} = \frac{\eta}{2}$. Линии A можно рассматривать, как графики величин $M_1/(2M_x/b)$, $M_2/(2M_x/b)$, вычисленных в средней точке m_1 прямолинейной стороны элемента s , когда в его центре приложен сосредоточенный момент M_x .

Следует отметить, что графики величины $M_1/(2M_x/b)$ располагаются существенно ниже соответствующих графиков величины $M_2/(2M_x/b)$, т. е. при действии внешнего локального момента M_x максимальное значение внутреннего момента M_2 существенно больше максимального значения момента M_1 . При уменьшении площадки нагружения (когда $\eta \rightarrow 0$) значение $M_1/(2M_x/b)$ в точке m_1 стремится к пределу (одному и тому же для различных значений β), составляющему примерно 0,63 от ординаты прямой A (т. е. от величины, к которой приводит соответствующая асимптотическая формула). Предел величины $M_2/(2M_x/b)$ при $\eta \rightarrow 0$ (также независящий от β) мало отличается от соответствующего результата по асимптотической формуле (от ординаты прямой A , причем разница между самой величиной $M_2/(2M_x/b)$ и ординатой прямой A достаточно мала при $\frac{\eta}{2} \leq 0,025$ для всех β из интервала $50 \leq$

$\leq \beta \leq 500$ и, по-видимому, для любых α (во всяком случае, когда $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1$).

Графики на рис. 34—41 могут быть использованы и в случае прямоугольного элемента s .

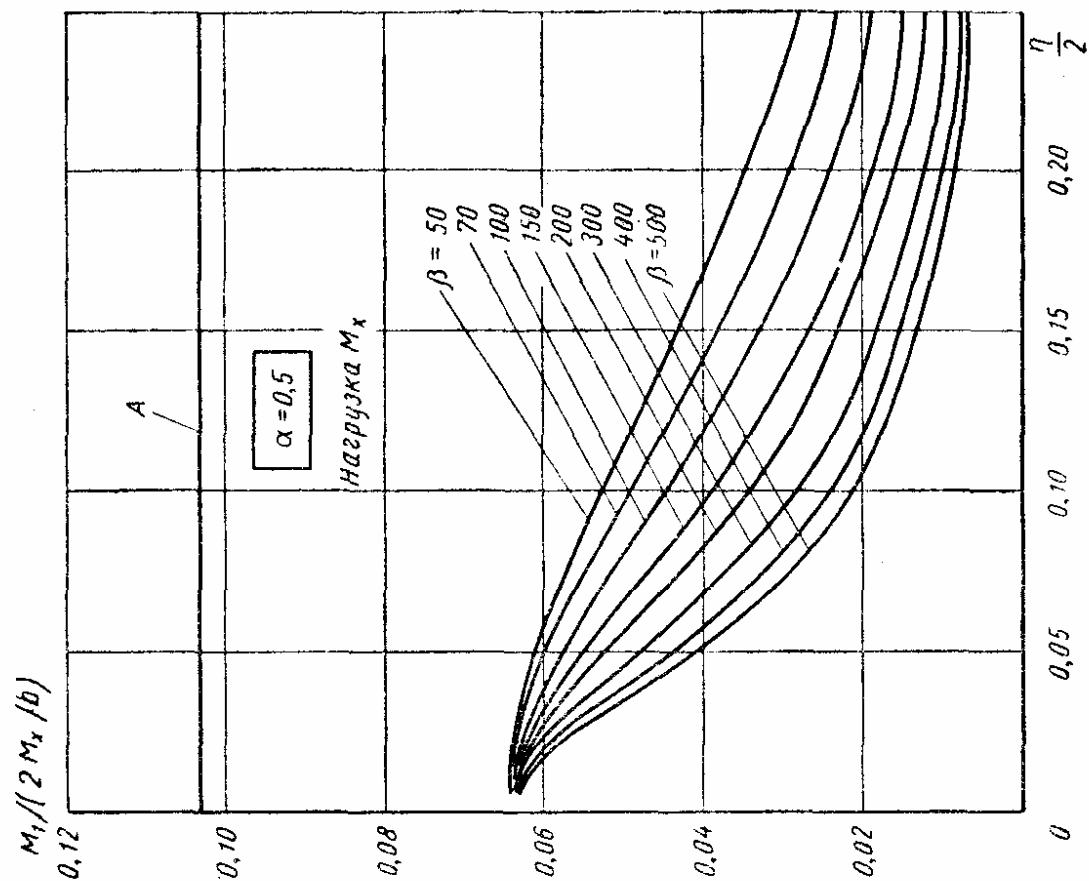


Рис. 35

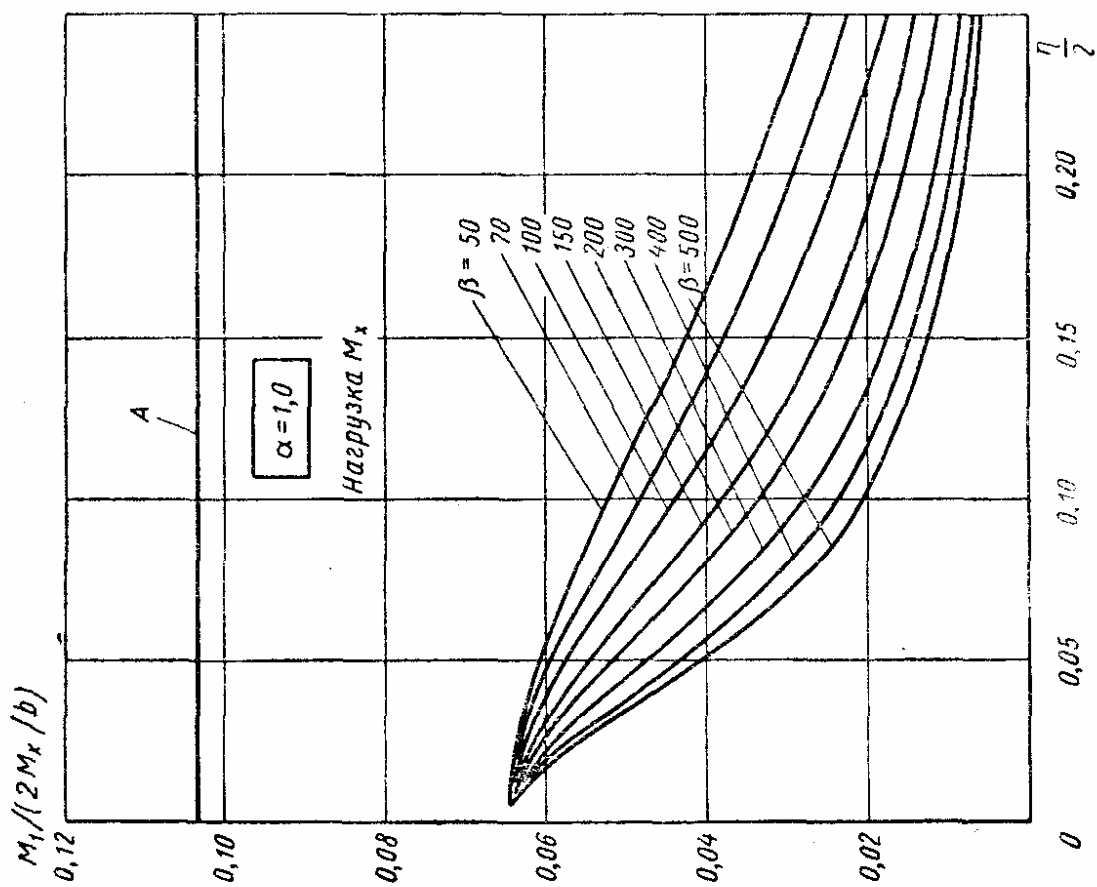


Рис. 34

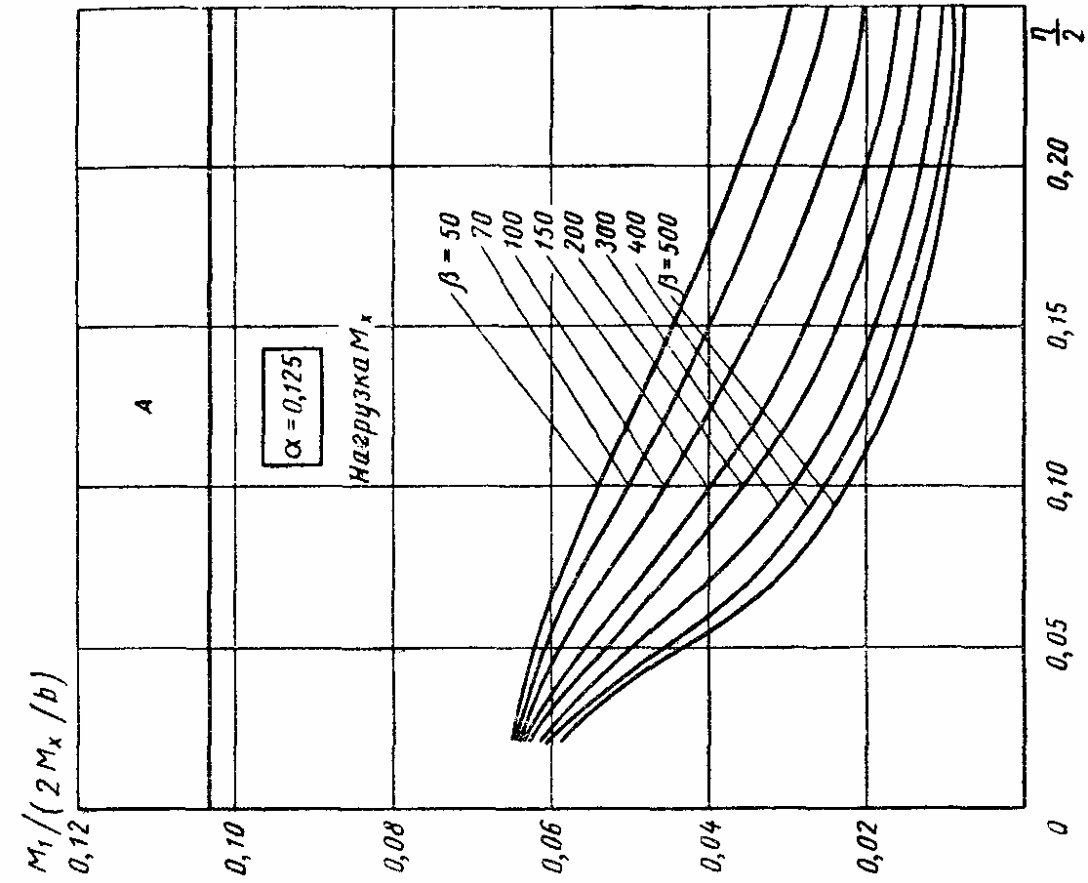


Рис. 37

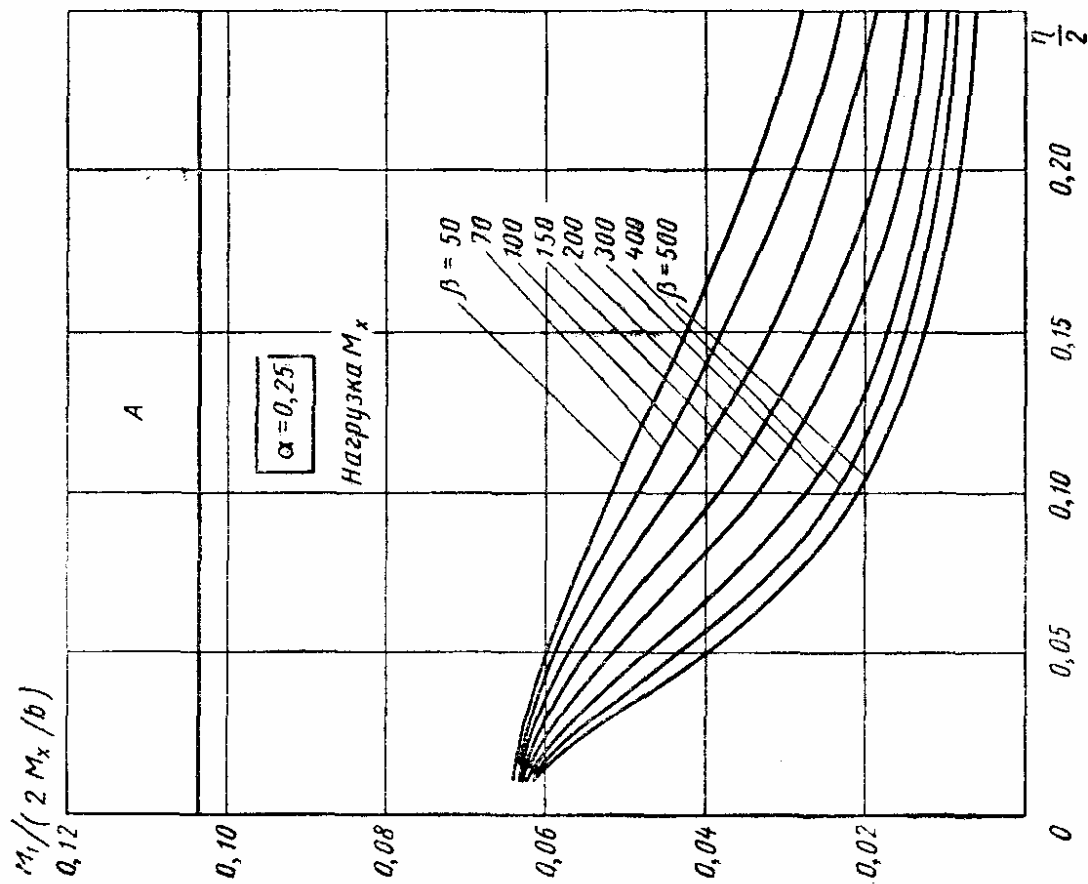


Рис. 36

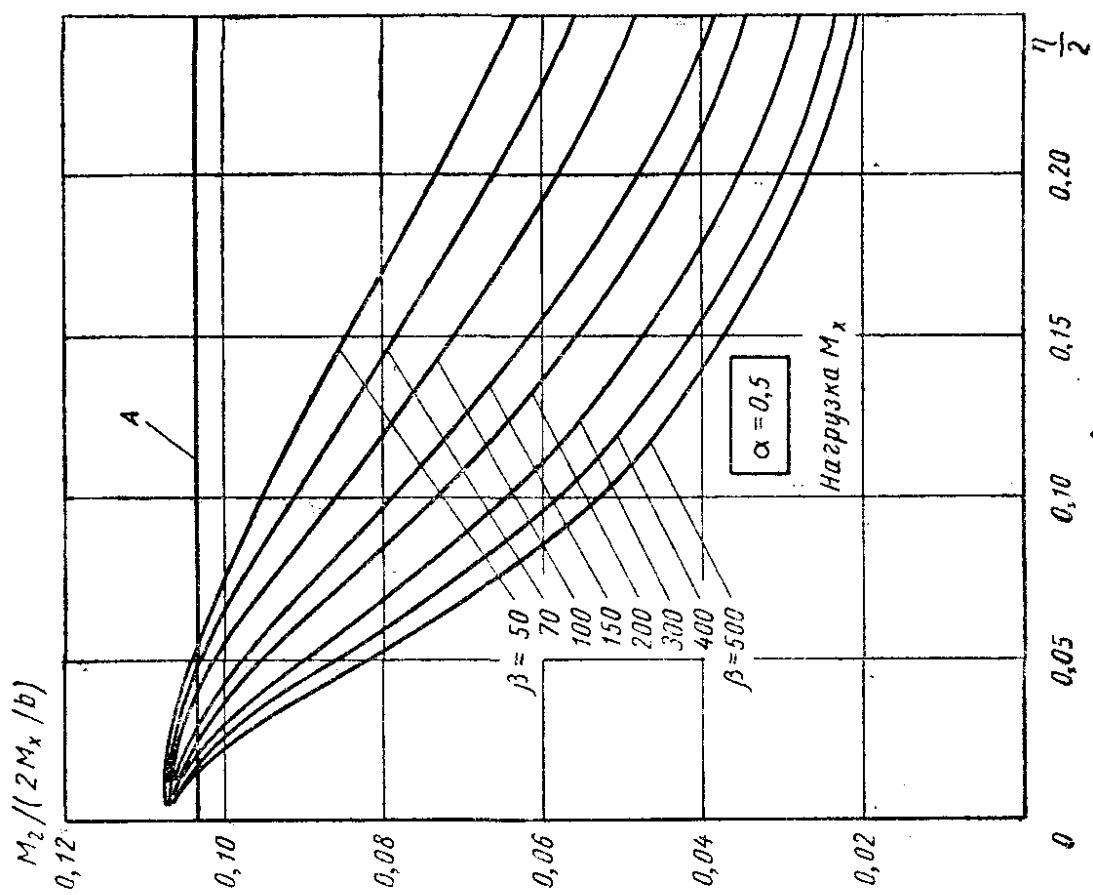


Рис. 39

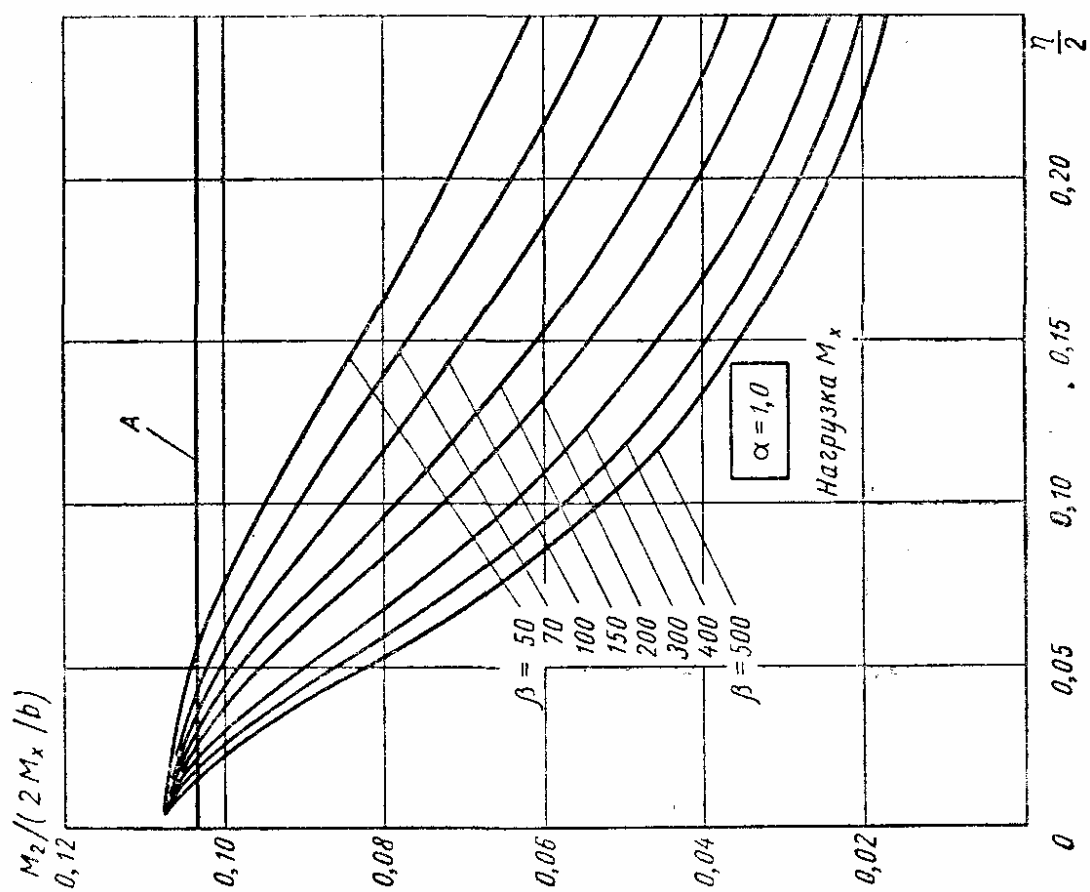


Рис. 38

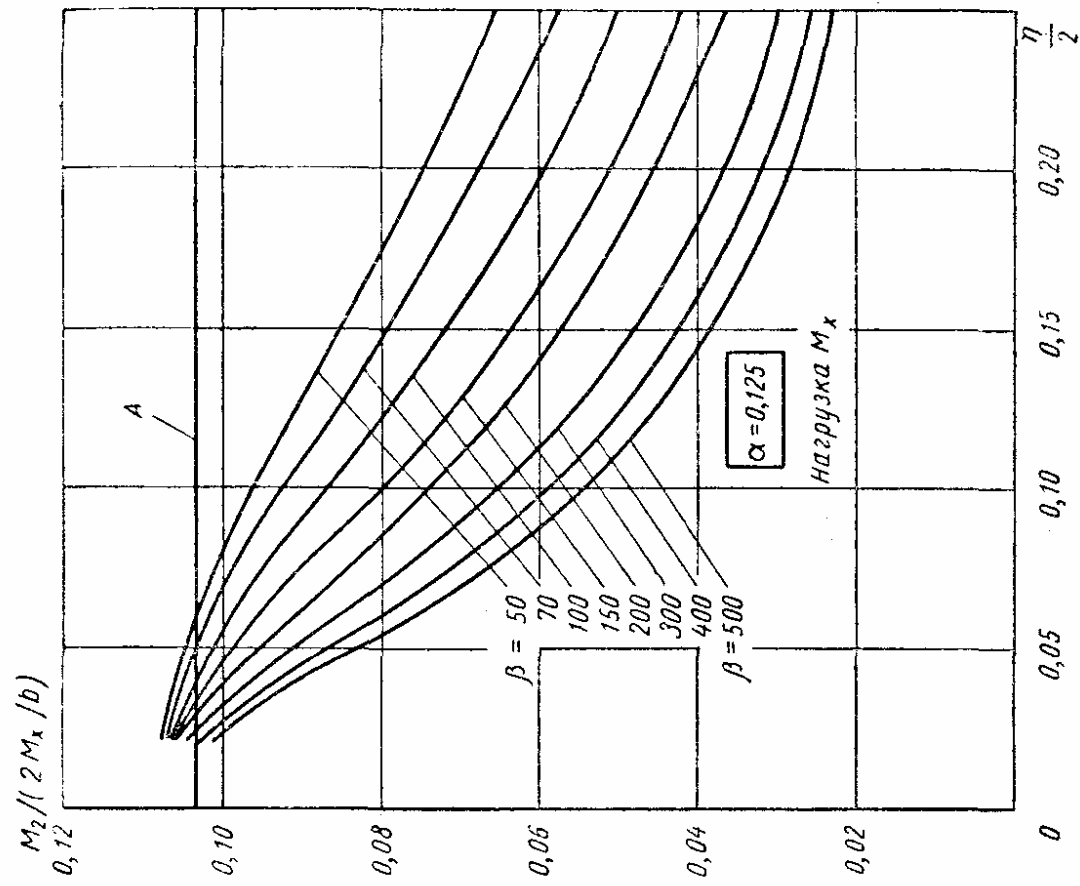


Рис. 41

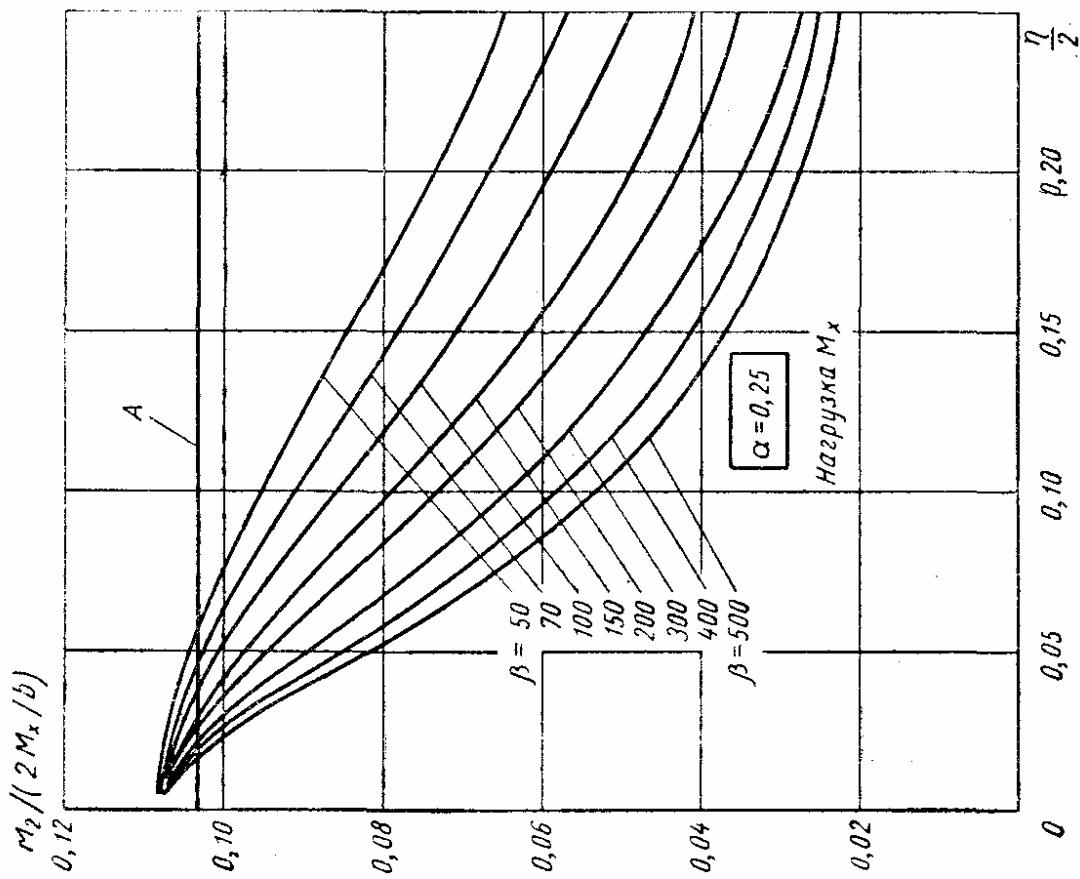


Рис. 40

В этом случае величины $M_1/(2M_x/b)$, $M_2/(2M_x/b)$ будут примерно такие же, как для соответствующих им квадратных элементов s_1 , s_2 со сторонами [4]

$$c_1 = k_1 \sqrt[3]{ab^2}; \quad c_2 = k_2 \sqrt[3]{ab^2}, \quad (64)$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты, которые выбирают по табл. 3.

Указанные графики можно также использовать и тогда, когда центр нагруженного элемента s не совпадает с серединой образующей, а отстоит от ближайшего края оболочки на расстоянии $x \geq \frac{R}{2}$.

Действие элементарного изгибающего момента M_y (рис. 42).

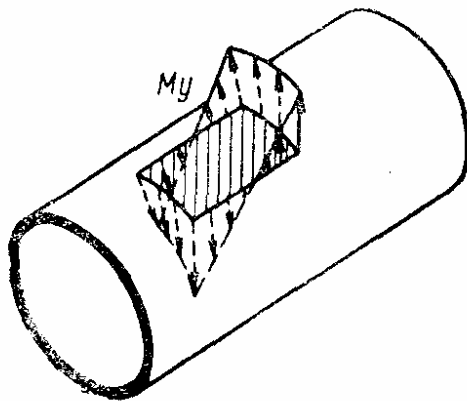


Рис. 42

3. Значение коэффициентов k_1 и k_2 в формуле (64)

$\frac{b}{a}$	k_1	k_2
$\frac{1}{4}$	1,3	1,1
$\frac{1}{2}$	1,2	1
2	1	1
4	1	1,3

Примечание. k_1 соответствует M_1 , а k_2 соответствует M_2 .

Пусть s — квадратная площадка нагружения ($a=b$), расположенная по середине оболочки.

На рис. 43—50 приведены графики (см. работы [4, 5]) внутренних изгибающих моментов M_1 , M_2 , отнесенных к величине $2M_y/a$ в зависимости от $\frac{\eta}{2}$ при различных значениях параметров α и β (см. стр. 86). Значения моментов M_1 , M_2 соответствуют точке m_1 с координатами $\xi = \frac{a}{2R}$, $\varphi = 0$ (в точке m_2 с координатами $\xi = -\frac{a}{2R}$, $\varphi = 0$ эти величины имеют противоположный знак) и являются наибольшими по модулю.

На каждом из рис. 43—50 горизонтальная прямая A изображает величину $M_1/(2M_y/a)$ или $M_2/(2M_y/a)$, вычисленную по соответствующей асимптотической формуле (19) в точке m_1 при различных значениях $\frac{a}{2R} = \frac{\eta}{2}$. Линии A можно рассматривать, как графики величин $M_1/(2M_y/a)$, $M_2/(2M_y/a)$, вычисленных в средней точке m_1 криволинейной стороны элемента s , когда в его центре приложен сосредоточенный момент M_y (линии A на рис. 34—41 и 43—50 совпадают).

В данном случае графики величины $M_2/(2M_y/a)$ располагаются существенно ниже соответствующих графиков величины $M_1/(2M_y/a)$, т. е. при действии внешнего локального момента M_y максимальное значение внутреннего момента M_1 существенно больше максимального значения момента M_2 .

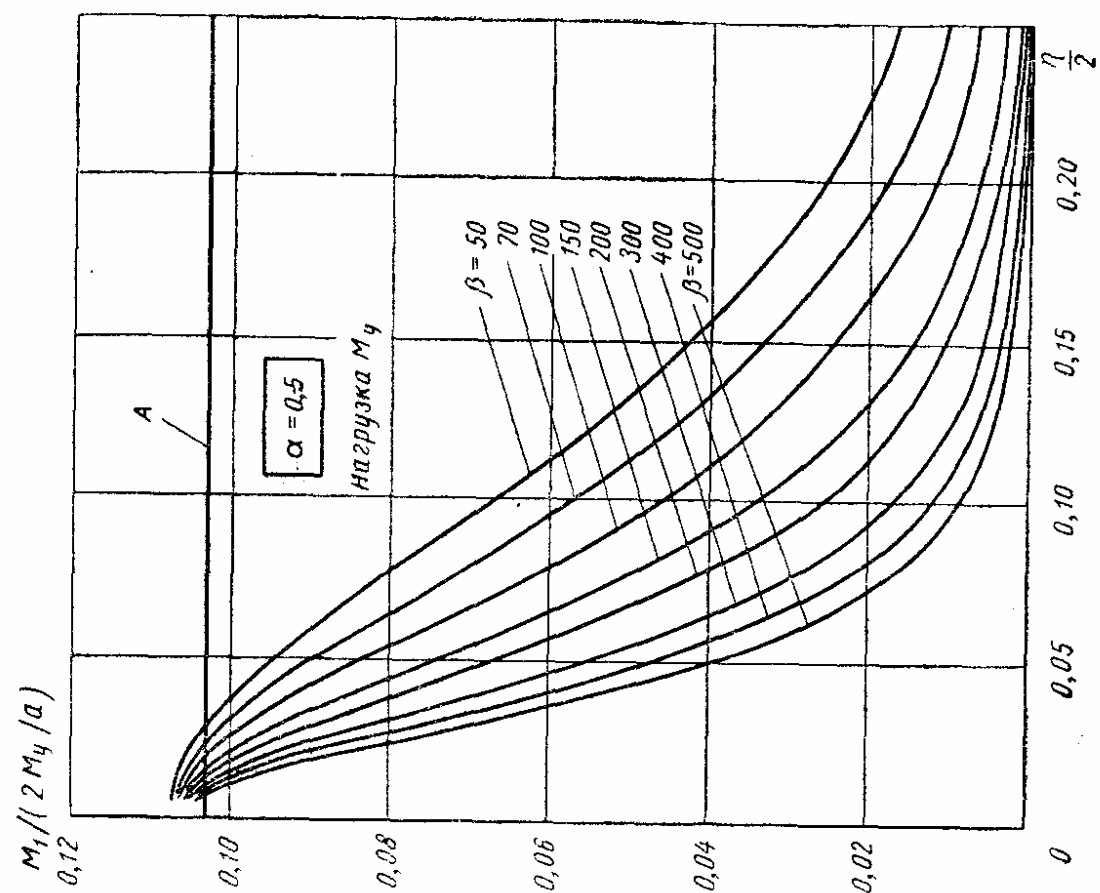


Рис. 44

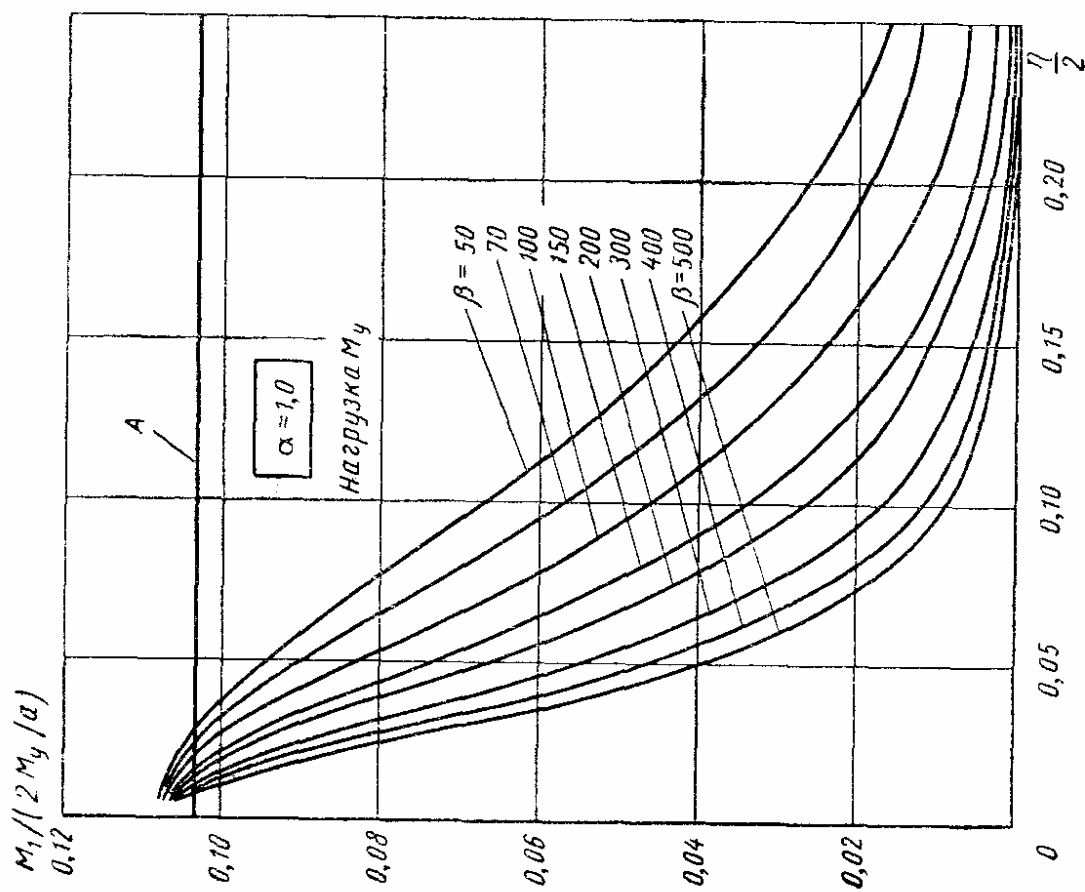


Рис. 43

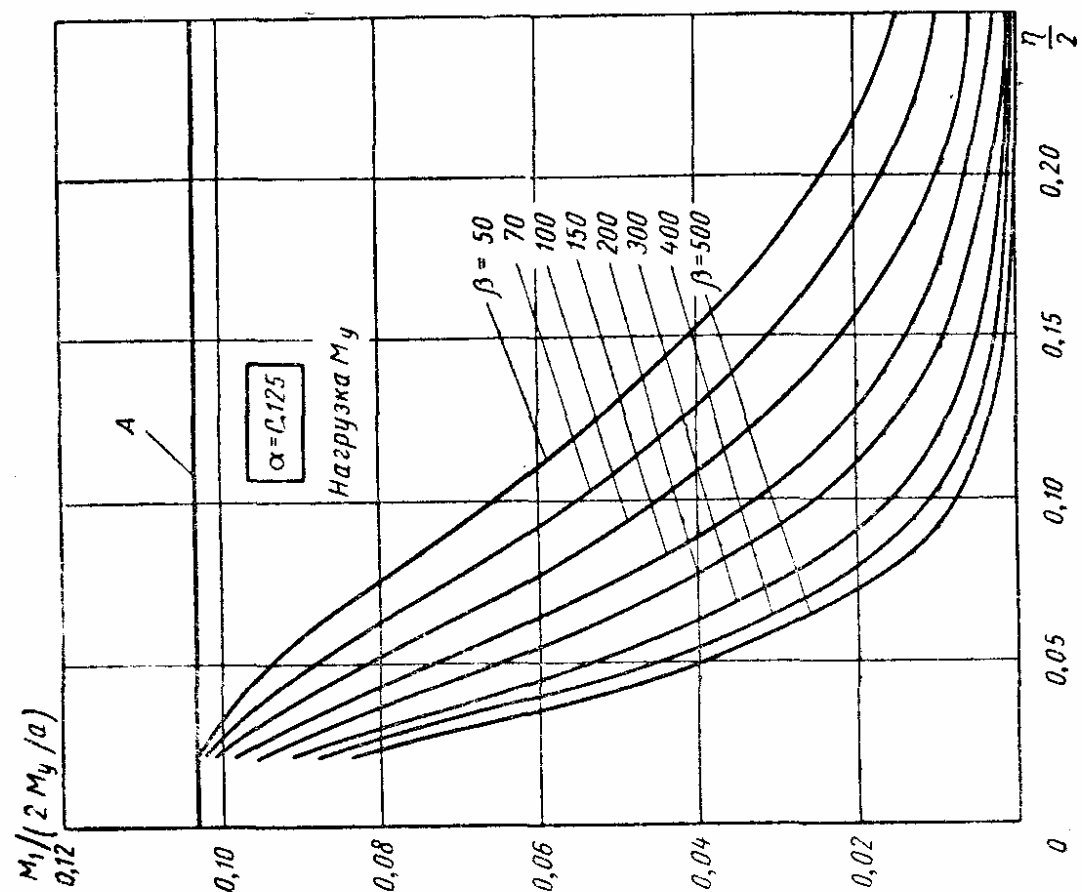


Рис. 46

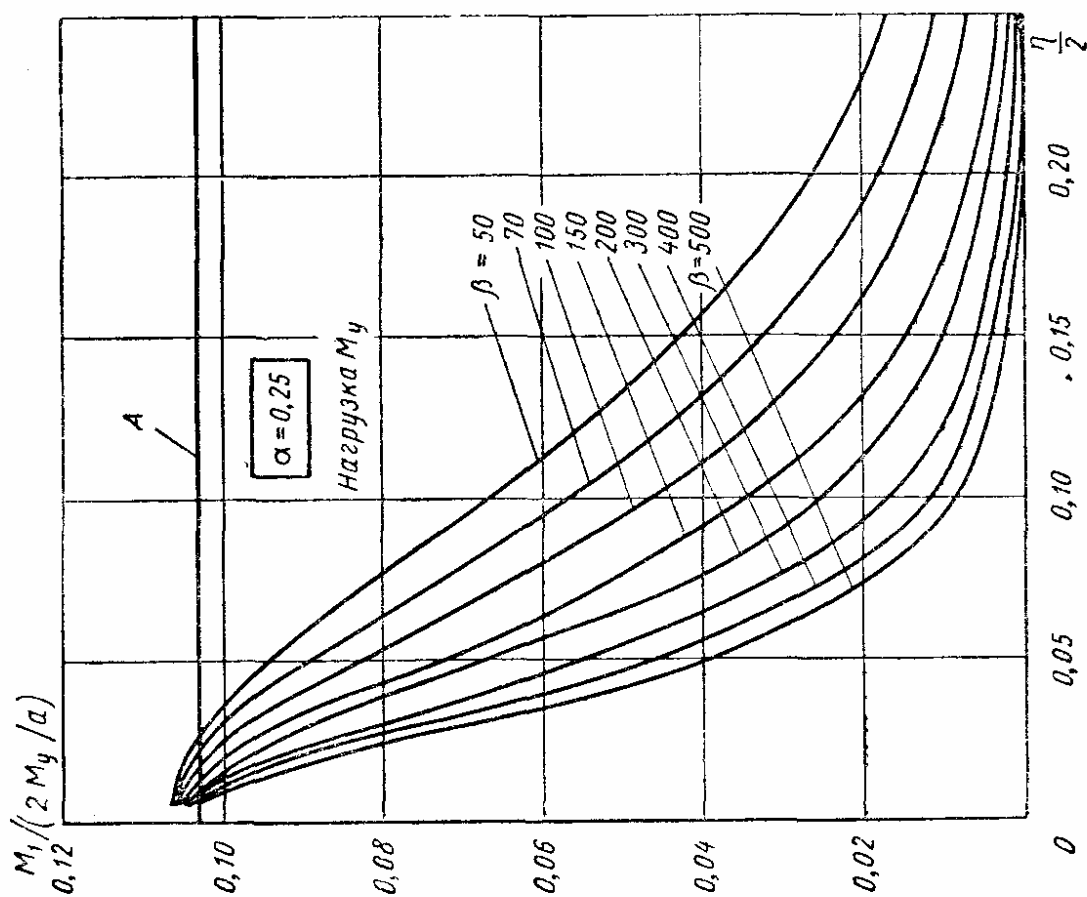


Рис. 45

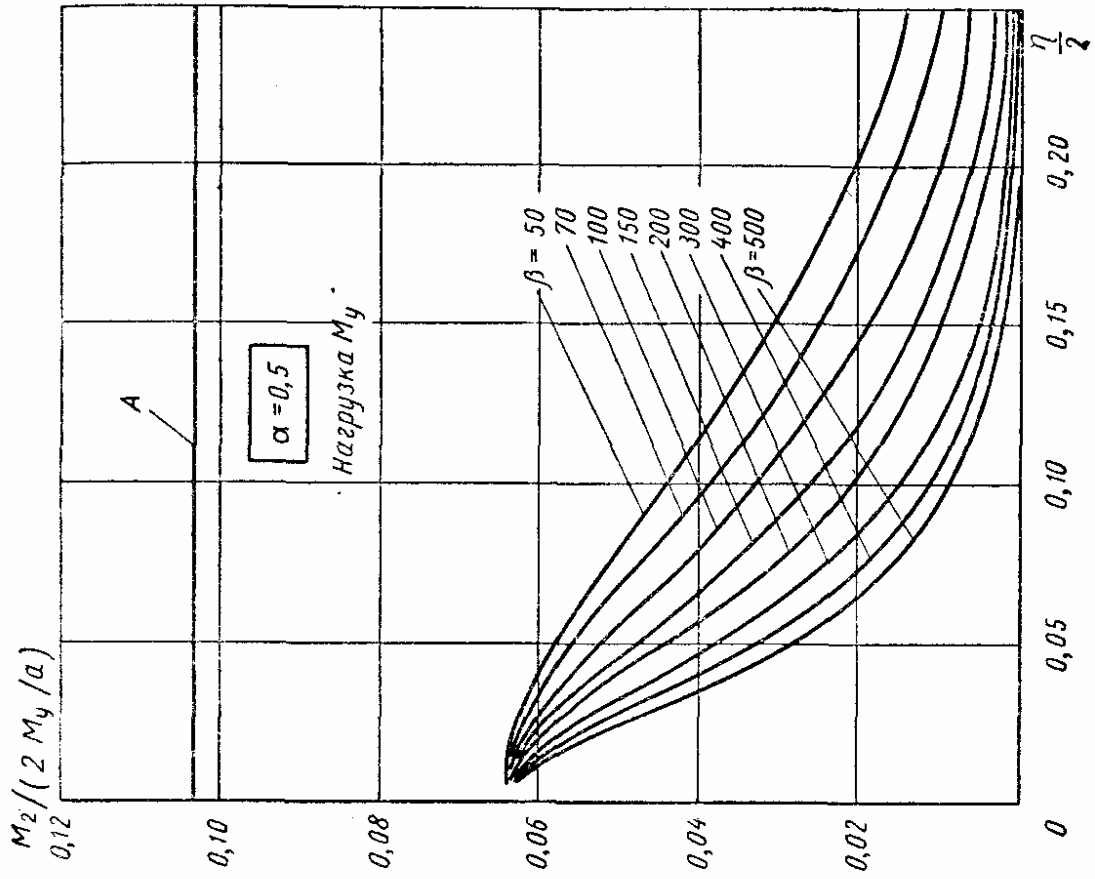


Рис. 48

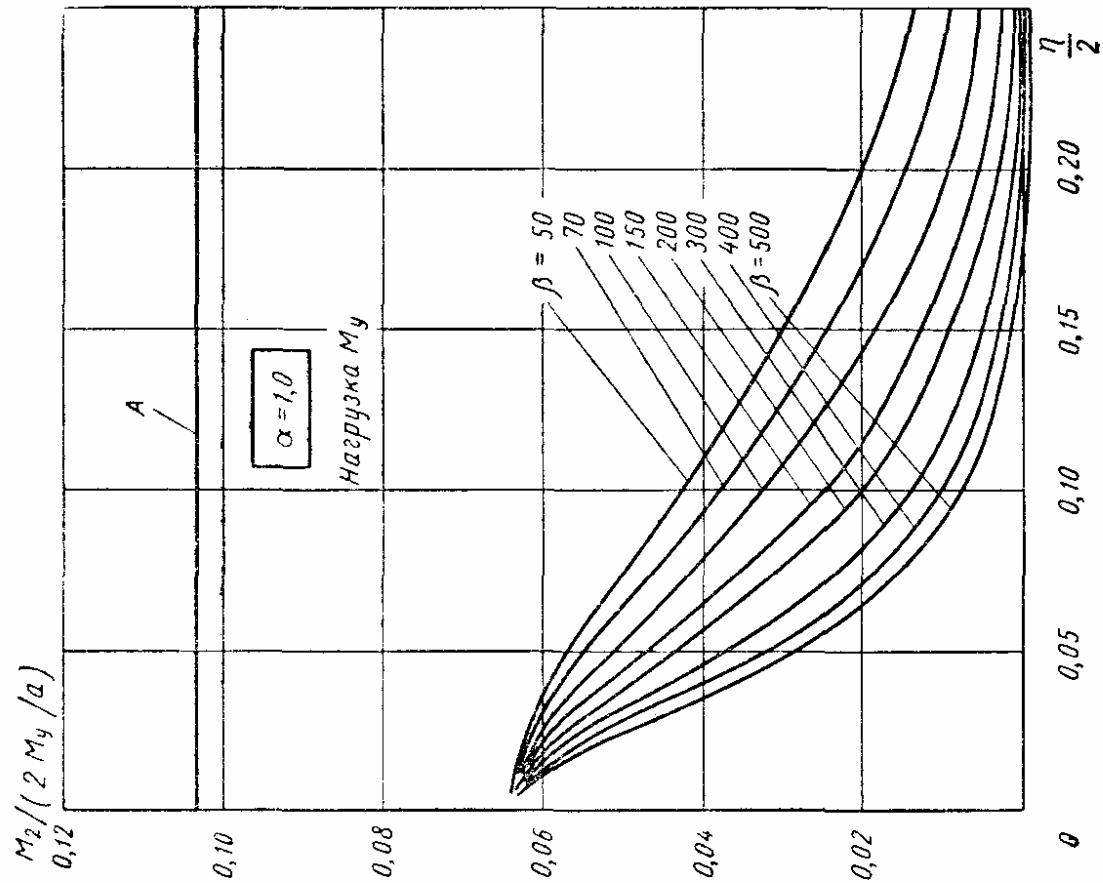


Рис. 47

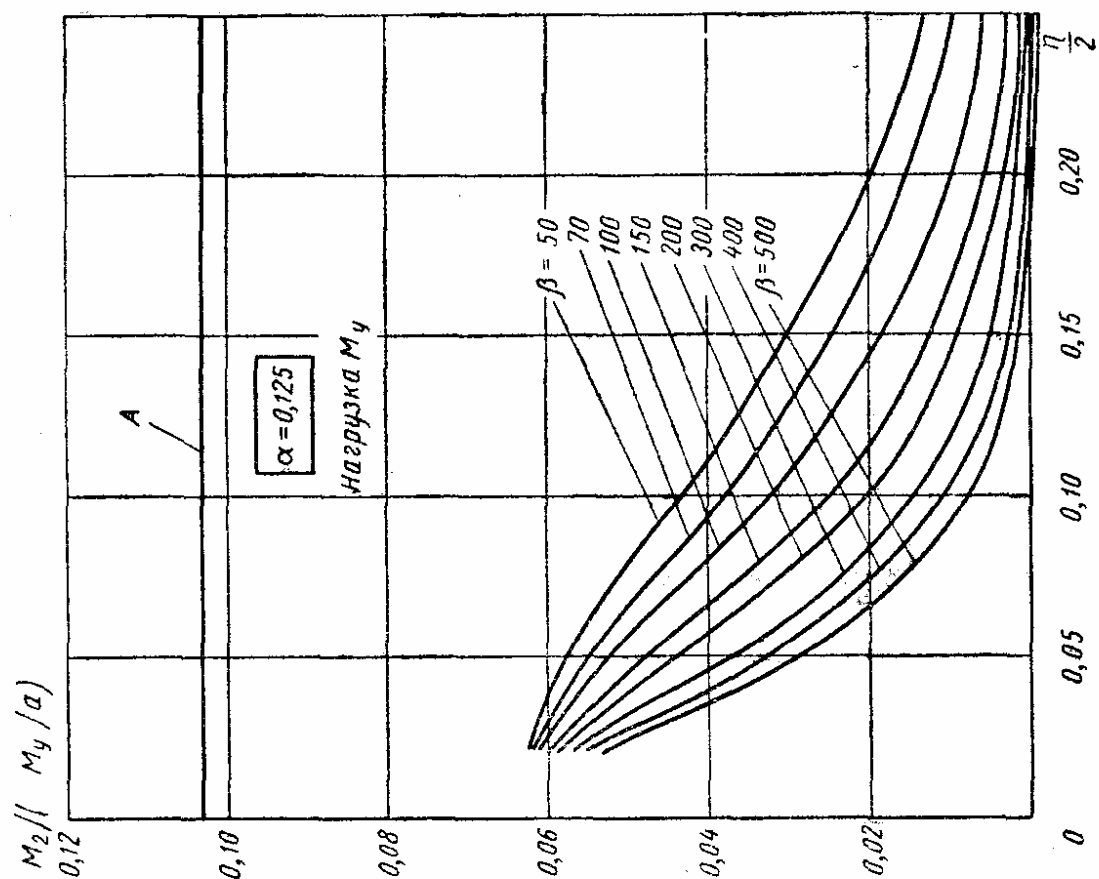


Рис. 50

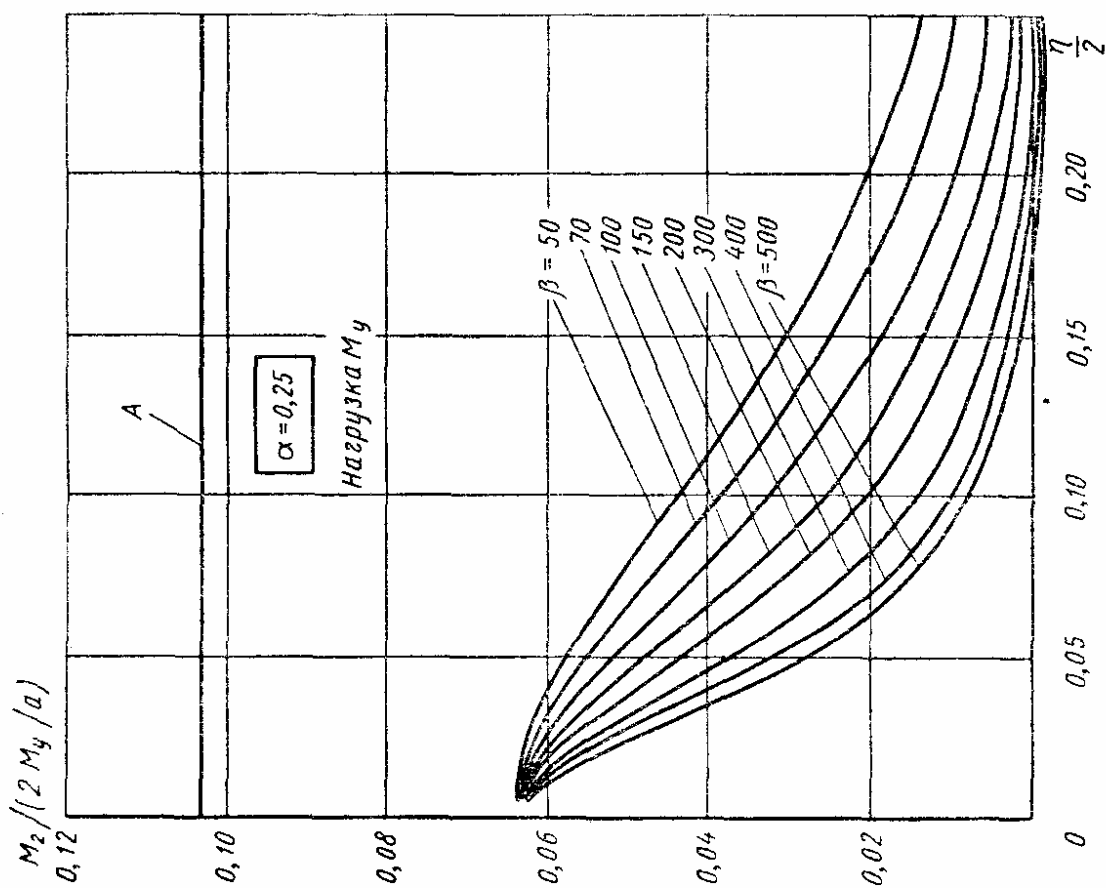


Рис. 49

При уменьшении площадки нагружения (когда $\eta \rightarrow 0$) значение $M_2/(2M_y/a)$ стремится к пределу (одному и тому же для различных значений β), составляющему как и в предыдущем случае, примерно 0,63 от ординаты прямой A (т. е. от величины, к которой приводит соответствующая асимптотическая формула). Предел же величины $M_1/(2M_y/a)$ при $\eta \rightarrow 0$ (независящий от β) мало отличается от соответствующего результата по асимптотической формуле (от ординаты прямой A). Разница между самой величиной $M_1/(2M_y/a)$ и ординатой прямой A

достаточно мала при $\frac{\eta}{2} \leq 0,02$; $50 \leq \beta \leq 200$ или же при $\frac{\eta}{2} \leq 0,01$;

$50 \leq \beta \leq 500$, причем это справедливо, по-видимому, при любых α

(во всяком случае, когда $\frac{1}{4} \leq$

$\leq \alpha \leq 1$).

Графики на рис. 43—50 могут быть использованы и в случае прямоугольного элемента s . В этом случае величины $M_1/(2M_y/a)$, $M_2/(2M_y/a)$ будут примерно такие же, как для соответствующих им квадратных элементов s_1 , s_2 со сторонами [4]

$$c_1 = k_1 \sqrt[3]{a^2 b}; \quad c_2 = k_2 \sqrt[3]{a^2 b}. \quad (65)$$

Коэффициенты k_1 и k_2 берут по табл. 4 (k_1 соответствует M_1 , а k_2 соответствует M_2).

Указанные графики можно также использовать и тогда, когда центр нагруженного элемента s не совпадает с серединой образующей, а отстоит от ближайшего края оболочки на расстоянии $x \geq \frac{R}{2}$.

Влияние внутреннего давления на напряжения в оболочке при действии элементарных нагрузок. При действии на цилиндрическую оболочку локальной радиальной нагрузки Q_z и локальных изгибающих моментов M_x , M_y наличие внутреннего давления q может существенно понизить изгибные напряжения в районе нагруженной площадки s (нелинейный эффект).

На рис. 51—53 приведены графики внутренних изгибающих моментов M_1 , M_2 , отнесенных либо к Q_z , либо к $2M_x/b$, или же к $2M_y/a$ (в соответствии с действующей нагрузкой), при площадке нагружения s со сторонами $a = b$.

Относительные значения M_1 , M_2 уменьшаются с ростом внутреннего давления q , стремясь к некоторым пределам.

Этот эффект наиболее существен при действии радиальной локальной нагрузки Q_z ; несколько меньше он при действии локального момента M_x и значительно меньше при действии локального момента M_y .

Уменьшение M_1 , M_2 с ростом q тем слабее, чем меньше нагруженная площадка (т. е. чем меньше η). Можно показать, что при действии сосредоточенной нагрузки (в пределе при $\eta \rightarrow 0$), давление q не изменяет асимптотических формул для M_1 , M_2 в бесконечно малой окрестности точки приложения нагрузки.

4. Значение коэффициентов k_1 и k_2 в формуле (65)

$\frac{b}{a}$	k_1	k_2
$\frac{1}{4}$	1,1	1,6
$\frac{1}{2}$	1	1
2	0,9	0,8
4	0,9	0,7

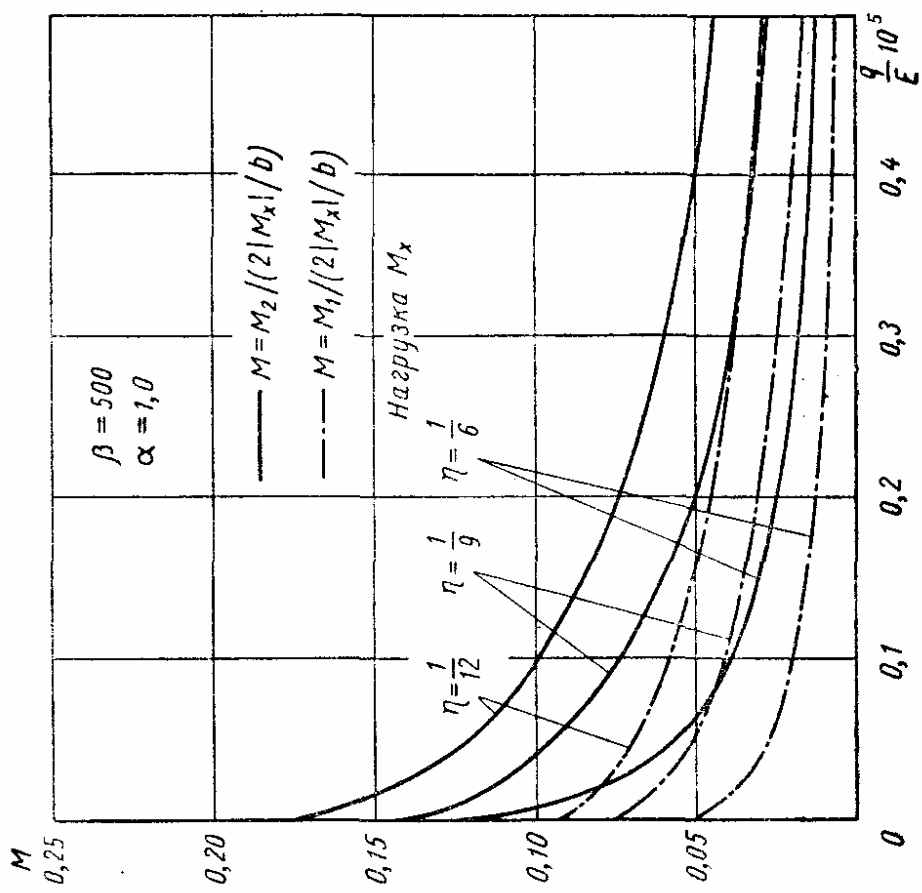


Рис. 52

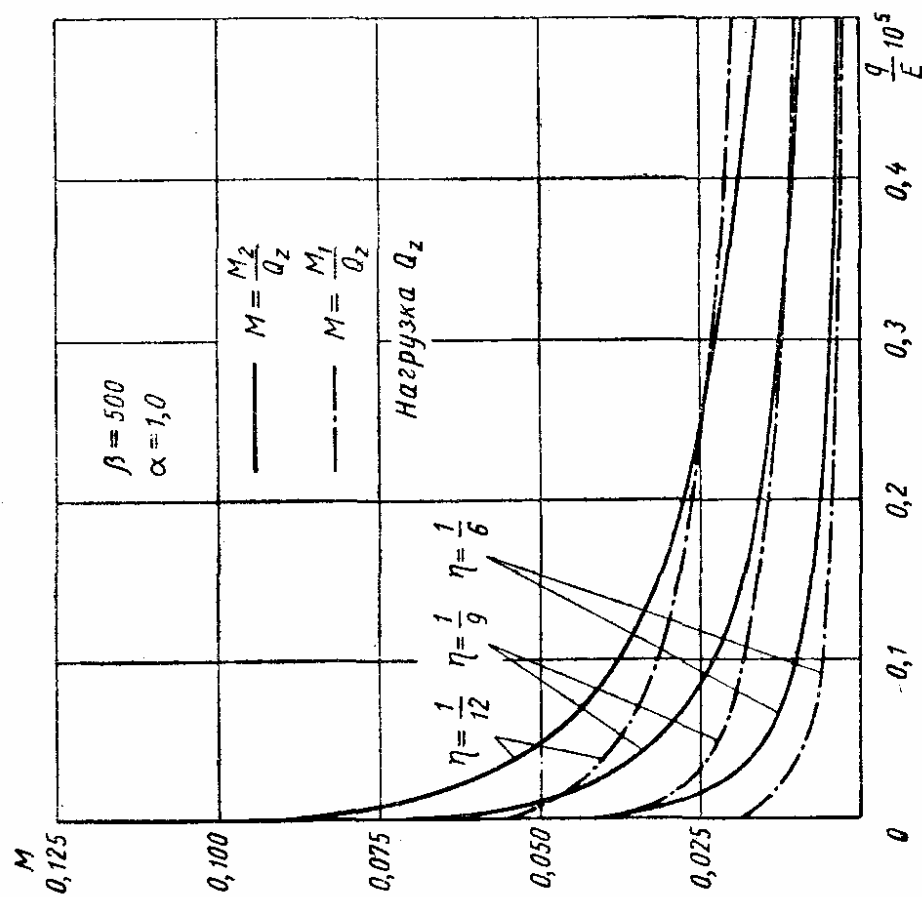


Рис. 51

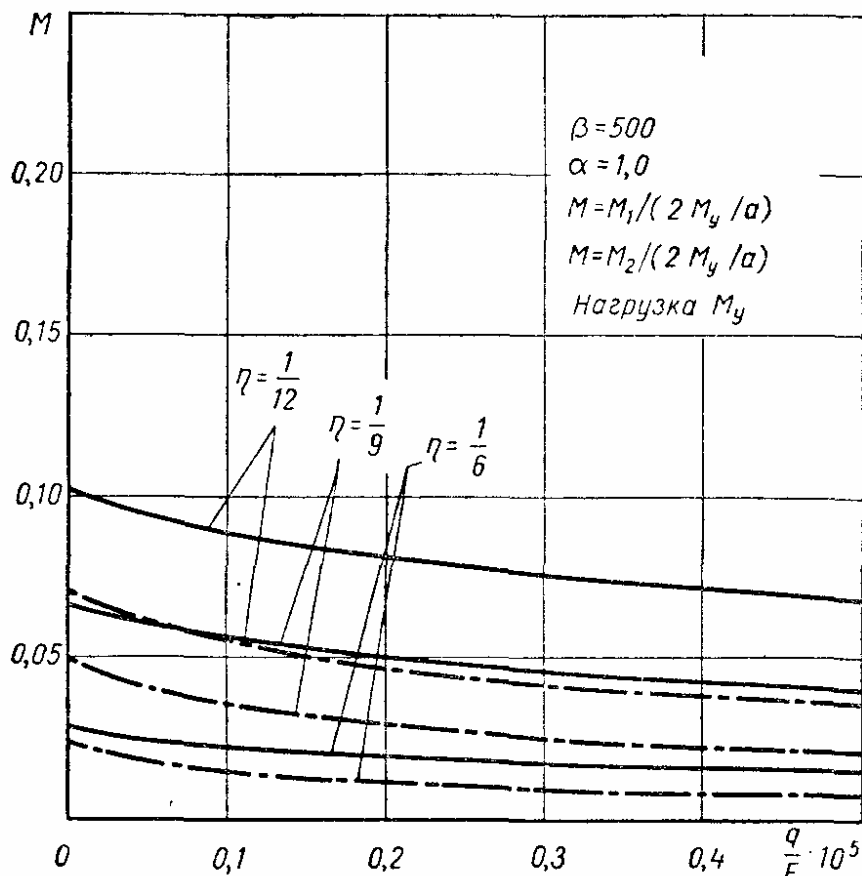


Рис. 53

Выбор подкрепляющих накладок при действии локальных нагрузок

При действии на цилиндрическую оболочку радиальной силы Q_z или одного из изгибающих моментов M_x , M_y , распределенных по элементу s поверхности оболочки, наибольшие напряжения соответствуют внутренним изгибающим моментам M_1 , M_2 . Если эти напряжения превышают допускаемые напряжения σ_d (которое должно быть установлено с учетом всех действующих на оболочку нагрузок), то можно обеспечить прочность оболочки, подкрепляя ее накладкой, охватывающей элемент s .

При фиксированной нагрузке и неизменном элементе s (при постоянном η) с ростом толщины оболочки h растут и внутренние изгибающие моменты M_1 , M_2 (см. рис. 25—32, 34—41, 43—50). Но этот рост происходит менее интенсивно, чем по линейному закону, поэтому напряжения (которые обратно пропорциональны h^2) убывают. Аналогичный результат должен иметь место при подкреплении оболочки накладкой.

Ниже указано, как выбрать толщину и размеры поверхности накладки в зависимости от вида действующей нагрузки [4].

Подкрепление оболочки при действии элементарной радиальной нагрузки Q_z . Пусть радиальная сила Q_z равномерно распределена по прямоугольному элементу s поверхности оболочки с толщиной h .

Оболочка нуждается в подкрепляющей накладке, если в центре элемента s

$$\frac{6M_2}{h^2} > \sigma_{\partial}.$$

В этом случае элемент s заменяют соответствующим квадратным элементом со стороной s_2 , определяемой по формуле (63). Для этого квадратного элемента и заданной нагрузки Q_z находят подбором по графикам на рис. 29—32 увеличенную толщину оболочки H и соответствующий ей момент $M_2 = M_2^H$, удовлетворяющие условию

$$\frac{6M_2^H}{H^2} = \sigma_{\partial}. \quad (66)$$

Толщину накладки h_0 определяют по найденному значению H и заданному значению h :

$$h_0 = H - h = \sqrt{\frac{6M_2^H}{\sigma_{\partial}}} - h. \quad (67)$$

Такой выбор h_0 обеспечивает прочность подкрепленной оболочки в пределах накладки. Прочность подкрепленной оболочки за пределами накладки обеспечивается следующим выбором [4] длины C ее стороны (накладку принимаем квадратной):

$$C = 2R \left[\exp \left(-\frac{\sigma_{\partial} h^2}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1+\nu}{\pi} Q_z} \right) - \exp \left(-\frac{\sigma_{\partial} H^2}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1+\nu}{\pi} Q_z} \right) \right]. \quad (68)$$

Подкрепление оболочки при действии элементарного момента M_x . Пусть на оболочку с толщиной h действует момент M_x , распределенный по прямоугольному элементу s со сторонами a (длина прямолинейной стороны) и b .

Оболочка нуждается в подкрепляющей накладке, если в средней точке m_1 прямолинейной стороны элемента s (см. рис. 33)

$$\frac{6M_2}{h^2} > \sigma_{\partial}.$$

В этом случае элемент s заменяют соответствующим квадратным элементом со стороной s_2 , определяемой по формуле (64). Для этого квадратного элемента по заданному моменту M_x находят подбором по графикам на рис. 38—41 увеличенную толщину оболочки H и соответствующий ей момент $M_2 = M_2^H$, удовлетворяющие условию

$$\frac{6M_2^H}{H^2} = \sigma_{\partial}. \quad (69)$$

Толщину накладки h_0 определяют по найденному значению H и заданному значению h :

$$h_0 = H - h = \sqrt{\frac{6M_2^H}{\sigma_{\partial}}} - h. \quad (70)$$

Такой выбор h_0 обеспечивает прочность подкрепленной оболочки в пределах накладки. Прочность подкрепленной оболочки за пределами накладки обеспечивают следующим выбором [4] длины C ее стороны (накладку считаем квадратной):

$$C = 3 \frac{1 + \nu}{\pi} \frac{M_x}{h^2 \sigma_d} - \frac{1 + \nu}{2\pi} \frac{M_x}{M_1^H} + b. \quad (71)$$

Подкрепление оболочки при действии элементарного момента M_y . Пусть на оболочку с толщиной h действует момент M_y , распределенный по прямоугольному элементу s со сторонами a (длина прямолинейной стороны) и b .

Оболочка нуждается в подкрепляющей накладке, если в средней точке m_1' криволинейной стороны элемента s (см. рис. 42)

$$\frac{6M_1}{h^2} > \sigma_d.$$

В этом случае элемент s заменяют соответствующим квадратным элементом со стороной c_1 , определяемой по формуле (65). Для этого квадратного элемента по заданному моменту M_y находят подбором по графикам на рис. 43—46 увеличенную толщину оболочки H и соответствующий ей момент $M_1 = M_1^H$, удовлетворяющие условию

$$\frac{6M_1^H}{H^2} = \sigma_d. \quad (72)$$

Толщину накладки h_0 определяют по найденному значению H и заданному значению h :

$$h_0 = H - h = \sqrt{\frac{6M_1^H}{\sigma_d}} - h. \quad (73)$$

Такой выбор h_0 обеспечивает прочность подкрепленной оболочки в пределах накладки.

Прочность подкрепленной оболочки за пределами накладки обеспечивают следующим выбором [4] длины C ее стороны (накладку считаем квадратной):

$$C = 3 \frac{1 + \nu}{\pi} \frac{M_y}{h^2 \sigma_d} - \frac{1 + \nu}{2\pi} \frac{M_y}{M_1^H} + a. \quad (74)$$

ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК

Будем рассматривать оболочку произвольной формы и считать, что ее линии кривизны являются координатными линиями α, β ($\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$).

Пусть в точке m_0 срединной поверхности оболочки (достаточно удаленной от ее края) с координатами $\alpha = 0$, $\beta = 0$ приложена сосредоточенная нагрузка: сила или момент.

Если сосредоточенной нагрузкой является тангенциальная сила, то в достаточно малой окрестности точки m_0 напряженное состояние оболочки определяется в основном только усилиями N_1, N_2, T_1, T_2 .

Если же сосредоточенной нагрузкой является нормальная (к поверхности оболочки) сила или изгибающий момент, то в указанной окрестности напряженное состояние определяется в основном только внутренними моментами M_1, M_2 .

Для указанных величин получены [6, 11] асимптотические формулы, которые позволяют оценить напряженное состояние оболочки вблизи фактической малой площадки нагружения (см. стр. 106—107).

Однако следует учитывать, что определение внутренних усилий или моментов, основанное (см. стр. 57—59) на замене распределенной по малой площадке нагрузки соответствующей сосредоточенной нагрузкой, для любой оболочки должно приводить, по-видимому, примерно к такому же их завышению, как это получается для цилиндрической оболочки.

Соответствующую поправку можно получить, сравнивая линии A с другими кривыми на рис. 25—32, 34—41, 43—50.

Действие сосредоточенной силы, направленной по линии кривизны. Если на оболочку действует тангенциальная сосредоточенная сила Q_x или Q_y , направленная соответственно по линии α ($\beta = \text{const}$) или линии β ($\alpha = \text{const}$), то в достаточно малой окрестности точки m_0 приложения этой силы напряженное состояние оболочки определяется в основном усилиями N_1, N_2, T_1, T_2 , для которых получены следующие асимптотические формулы.

При действии силы Q_x

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq Q_x \frac{A\alpha}{4\pi r^2} \left[2(1+\nu) \frac{B^2\beta^2}{r^2} - 3 - \nu \right]; \\ N_2 &\simeq -Q_x \frac{A\alpha}{4\pi r^2} \left[2(1+\nu) \frac{B^2\beta^2}{r^2} - 1 + \nu \right]; \\ T_1 &\simeq T_2 \simeq -Q_x \frac{B\beta}{4\pi r^2} \left[2(1+\nu) \frac{A^2\alpha^2}{r^2} + 1 - \nu \right]. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

При действии силы Q_y

$$\left. \begin{aligned} N_1 &\simeq -Q_y \frac{B\beta}{4\pi r^2} \left[2(1+\nu) \frac{A^2\alpha^2}{r^2} - 1 + \nu \right]; \\ N_2 &\simeq Q_y \frac{B\beta}{4\pi r^2} \left[2(1+\nu) \frac{A^2\alpha^2}{r^2} - 3 - \nu \right]; \\ T_1 &\simeq T_2 \simeq -Q_y \frac{A\alpha}{4\pi r^2} \left[2(1+\nu) \frac{B^2\beta^2}{r^2} + 1 - \nu \right]. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

В этих формулах A^2, B^2 коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки ($ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$), а $r^2 = A^2\alpha^2 + B^2\beta^2$ (в малой окрестности точки m_0 величина r может рассматриваться как расстояние от этой точки до рассматриваемой точки оболочки).

Когда действует сила Q_x , наибольшим (по модулю) из внутренних усилий при фиксированном значении r является усилие N_1 в точках $A\alpha = \pm r, \beta = 0$, где

$$N_1 \simeq \mp \frac{3+\nu}{4\pi} \frac{Q_x}{r}. \quad (77)$$

Когда действует сила Q_y , то наибольшим (по модулю) из внутренних усилий является N_2 в точках $\alpha = 0$; $B\beta = \pm r$, где

$$N_2 \simeq \mp \frac{3 + \nu}{4\pi} \cdot \frac{Q_y}{r}. \quad (78)$$

Действие нормальной сосредоточенной силы. Когда на оболочку действует нормальная к ее поверхности сосредоточенная сила Q_z , приложенная в точке m_0 , то в достаточно малой окрестности этой точки напряженное состояние оболочки определяется в основном изгибающими моментами M_1 , M_2 , для которых справедлива асимптотическая формула

$$M_1 \simeq M_2 \simeq -Q_z \frac{1 + \nu}{4\pi} \ln \frac{r}{r_*}, \quad (79)$$

где $r_* = \text{const}$ — какое-либо фиксированное значение r .

Действие сосредоточенного изгибающего момента с вектором, направленным по линии кривизны. Если на оболочку действует сосредоточенный изгибающий момент M_x или M_y с вектором, направленным соответственно по линии α или β , то в достаточно малой окрестности точки m_0 приложения этого момента напряженное состояние оболочки определяется в основном изгибающими моментами M_1 , M_2 , для которых справедливы следующие асимптотические формулы.

При действии момента M_x

$$\left. \begin{aligned} M_1 &\simeq -M_x \frac{B\beta}{4\pi r^2} \left[2(1 - \nu) \frac{A^2 \alpha^2}{r^2} - 1 - \nu \right]; \\ M_2 &\simeq M_x \frac{B\beta}{4\pi r^2} \left[2(1 - \nu) \frac{A^2 \alpha^2}{r^2} + 1 + \nu \right]. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

При действии момента M_y

$$\left. \begin{aligned} M_1 &\simeq -M_y \frac{A\alpha}{4\pi r^2} \left[2(1 - \nu) \frac{B^2 \beta^2}{r^2} + 1 + \nu \right]; \\ M_2 &\simeq M_y \frac{A\alpha}{4\pi r^2} \left[2(1 - \nu) \frac{B^2 \beta^2}{r^2} - 1 - \nu \right]. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

В первом случае, в точках $\alpha = 0$, $B\beta = \pm r$ имеем

$$M_1 \simeq M_2 \simeq \pm \frac{1 + \nu}{4\pi} \frac{M_x}{r}, \quad (82)$$

а во втором случае, в точках $A\alpha = \pm r$, $\beta = 0$

$$M_1 \simeq M_2 \simeq \mp \frac{1 + \nu}{4\pi} \frac{M_y}{r}. \quad (83)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейлард П. П. Напряжения от радиальных нагрузок и внешних моментов в цилиндрических сосудах давления. Вопросы прочности цилиндрических оболочек. Сборник переводов иностранных статей. М., Оборонгиз, 1960.

2. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. О расчете цилиндрических оболочек, нагруженных по линиям. «Прикладная математика и механика». Т. 31. Вып. 6, 1967.

3. Д а р е в с к и й В. М. Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки. Т. XVI. Вып. 2, 1952.
 4. Д а р е в с к и й В. М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках. Сборник статей «Прочность и динамика авиационных двигателей». Вып. 1, 1964.
 5. Д а р е в с к и й В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки). Труды VI всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., изд. «Наука», 1966.
 6. Н о в о ж и л о в В. В., Ч е р н ы х К. Ф. К расчету оболочек на сосредоточенные воздействия. Сборник «Исследования по упругости и пластичности», Л., изд. ЛГУ, 1963, № 2.
 7. Т и м о ш е н к о С. П. Пластинки и оболочки. М. — Л., Огиз-Гостехиздат, 1948.
 8. Х о ф ф Н., К е м п н е р Ж., П о л Ф. Линейная нагрузка, приложенная вдоль образующих тонкостенных круговых цилиндрических оболочек конечной длины. Вопросы прочности цилиндрических оболочек. Сборник переводов иностранных статей. М., Оборонгиз, 1960.
 9. Х р и с т е н к о А. С. О действии сосредоточенных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку. Изв. АН СССР, «Механика и машиностроение», 1962, № 3.
 10. Х р и с т е н к о А. С. Действие на ортотропную цилиндрическую оболочку нагрузки, равномерно распределенной вдоль отрезка линии кривизны. «Строительная механика и расчет сооружений», 1966, № 6.
 11. Ч е р н ы ш е в Г. Н. О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую оболочку произвольного очертания. ПММ. Т. 27. Вып. 1, 1963.
 12. Ш а р и н о в И. Л. Напряженное состояние цилиндрической консольной оболочки при действии сосредоточенной нормальной силы, приложенной к свободному краю. «Инженерный журнал». Т. 5. Вып. 2, 1965.
 13. Ш а р и н о в И. Л. К вопросу о расчете замкнутой цилиндрической консольной оболочки на краевые сосредоточенные нагрузки. «Инженерный журнал». Т. 5. Вып. 6, 1965.
 14. Ш а р и н о в И. Л. Действие на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки, приложенной к свободному краю. «Механика твердого тела», 1967, № 3.
 15. T i n g L., T u a n S. w. On radial deflection of cylinder of finite length various end conditions, J. of the Air. Sci., v. 25, 1958, N 4.
-

Глава 3

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Оболочки из упрочняющегося материала

Приведенные в гл. 20 т. 1 уравнения равновесия оболочки, а также соотношения между компонентами смещения и деформациями срединной поверхности и краевые условия [см. формулы (14), (30), (31)] не связаны со свойствами материала, поэтому в случае неупругой оболочки они остаются в силе без изменений. Если упрочнение материала описывается уравнениями деформационной теории (см. гл. 3 т. 1), то приведенные в гл. 20 т. 1 [формулы (38)] зависимости между усилиями N_α , N_β , T , моментами M_α , M_β , H и деформациями срединной поверхности (ε_α , ε_β , γ , κ_α , κ_β , τ) заменяют следующими [1, 19]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4} N_\alpha &= \left(\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_\beta \right) J_1 + \left(\kappa_\alpha + \frac{1}{2} \kappa_\beta \right) J_2; \\ \frac{3}{4} N_\beta &= \left(\varepsilon_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_\alpha \right) J_1 + \left(\kappa_\beta + \frac{1}{2} \kappa_\alpha \right) J_2; \\ 3T &= \gamma J_1 + 2\tau J_2; \\ \frac{3}{4} M_\alpha &= \left(\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_\beta \right) J_2 + \left(\kappa_\alpha + \frac{1}{2} \kappa_\beta \right) J_3; \\ \frac{3}{4} M_\beta &= \left(\varepsilon_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_\alpha \right) J_2 + \left(\kappa_\beta + \frac{1}{2} \kappa_\alpha \right) J_3; \\ 3H &= \gamma J_2 + 2\tau J_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где (рис. 1)

$$T = \frac{1}{2} \left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} - \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} \right);$$

$$H = \frac{1}{2} (M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha});$$

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} dz; \quad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} z dz; \quad (2)$$

$$J_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} z^2 dz,$$

причем

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon + 2zP_{\varepsilon\kappa} + z^2P_\kappa}; \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} P_\varepsilon &= \varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \varepsilon_\beta^2 + \frac{1}{4} \gamma^2; \\ P_\kappa &= \kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha \kappa_\beta + \kappa_\beta^2 + \tau^2; \\ P_{\varepsilon\kappa} &= \varepsilon_\alpha \kappa_\alpha + \varepsilon_\beta \kappa_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_\alpha \kappa_\beta + \frac{1}{2} \varepsilon_\beta \kappa_\alpha + \frac{1}{2} \gamma \tau. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Зависимости (1), (2) справедливы при тех же предположениях, что и соответствующие упругие уравнения; кроме того, должны соблюдаться условия, при которых применима деформационная теория

пластичности (см. гл. 3 т. 1). При напряжениях ниже предела текучести ($\sigma_i \leq \sigma_T$, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_T$) имеем $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} =$

$= 3G$ и зависимости (1), (2) переходят в общие упругие уравнения гл. 20 т. 1 [формулы (38)]; сечение оболочки будет упруго-пластическим, если на части ее толщины $\varepsilon_i > \varepsilon_T$, и чисто пластическим, если $\varepsilon_i \geq \varepsilon_T$ всюду при $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$.

Для расчета упруго-пластической оболочки предложен ряд методов, которые можно разделить на две группы: а) «точные» (численные) методы, позволяющие, в принципе, при достаточной затрате труда по-

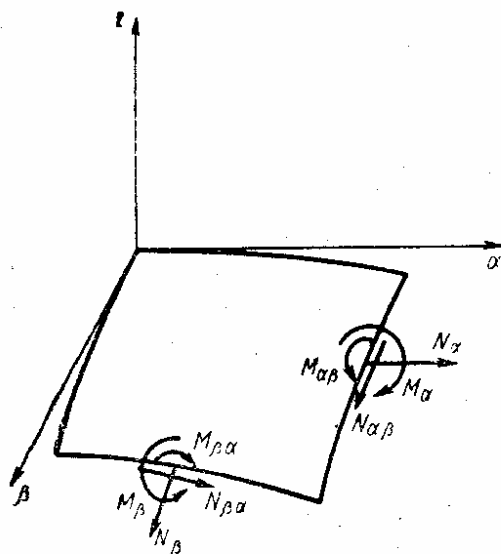


Рис. 1

лучать практически точное решение полной нелинейной системы уравнений статики упруго-пластической оболочки (см. выше); б) приближенные методы, основанные на замене полных определяющих уравнений (1) некоторой аппроксимирующей системой более простых уравнений. Решение при этом существенно упрощается и часто может быть получено в замкнутом виде, однако этот подход вносит неустранимую погрешность, которая, по-видимому, в большинстве случаев оказывается незначительной.

К первой группе можно отнести приведенные далее методы I—III, ко второй группе — методы IV и V.

I. Метод переменных параметров упругости [1]. За первое приближение принимают упругое решение (при $G = \text{const}$), пользуясь которым, вычисляют $\varepsilon_i^{(1)}$, $\sigma_i^{(1)} = \sigma_i(\varepsilon_i^{(1)})$ и находят соответствующие значения $J_1^{(1)}$, $J_2^{(1)}$, $J_3^{(1)}$ по формулам (2). Подстановка этих значений J в соотношения (1) приводит к новой линейной задаче для некоторой неоднородной оболочки. Ее решение определяет второе приближение и т. д.

Расчет заканчивают при совпадении двух последовательных приближений.

II. Метод упругих решений (метод дополнительных нагрузок) [1, 4]. Выделив упругую часть в зависимости $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$, представим ее в виде

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i [1 - \omega(\varepsilon_i)], \quad (5)$$

где функция $\omega(\varepsilon_i)$ отлична от нуля только в пластических зонах, отделенных от упругих областей поверхностями $\varepsilon_i = \varepsilon_T$. Подставляя выражение (5) в формулы (2), можно соответственно выделить упругую часть в определяющих зависимостях (1)

$$\frac{3}{4} N_\alpha = 3Gh \left(\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_\beta \right) + \frac{3}{4} \Delta N_\alpha \text{ и т. д.}, \quad (6)$$

где

$$\frac{3}{4} \Delta N_\alpha = \left(\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_\beta \right) \Delta J_1 + \left(\kappa_\alpha + \frac{1}{2} \kappa_\beta \right) \Delta J_2; \quad (7)$$

$$\Delta J_1 = -3G \int \omega(\varepsilon_i) dz;$$

$$\Delta J_2 = -3G \int \omega(\varepsilon_i) z dz. \quad (8)$$

При $\Delta N_\alpha = \dots = \Delta H = 0$ получаем упругую задачу, определяющую первое приближение. Подставив соответствующие значения деформаций в формулы (7) и (8), вычисляем $\Delta N_\alpha^{(1)}$, \dots , $\Delta H^{(1)}$. Для получения второго приближения необходимо решить линейную задачу при определяющих уравнениях (6), содержащих (известные) добавочные члены $\Delta N_\alpha^{(1)}$, \dots , $\Delta H^{(1)}$.

При решении в перемещениях эта задача приводится к обычной упругой задаче теории оболочек с дополнительными распределенными и краевыми нагрузками. Аналогично разыскивают последующие приближения.

III. Вариационный метод. Действительное деформированное состояние оболочки характеризуется условием минимума

$$\Pi = \iiint \left[\int \sigma_i d\varepsilon_i \right] AB d\alpha d\beta dz - A_e = \min, \quad (9)$$

где ε_i определяют по формуле (3), A_e — работа внешних нагрузок; A , B — коэффициенты Ляме. Решение вариационного уравнения (9) можно искать, например, при помощи метода Ритца или метода Л. М. Качанова (см. гл. 3 т. 1).

IV. Эквивалентная двухслойная оболочка [14]. Этот подход основан на замене действительной оболочки толщины h идеализированной двухслойной моделью, состоящей из двух одинаковых тонких несущих слоев толщиной b , расстояние между которыми Z поддерживается неизменным. Параметры b и Z выбирают из условия эквивалентности действительной и двухслойной оболочек при одноосном растяжении и изгибе. Принимая, что напряжения распределяются равномерно по толщине каждого из несущих слоев и пользуясь гипотезой прямых нормалей $\epsilon_{\alpha}^{\pm} = \epsilon_{\alpha} \pm \frac{1}{2} Z \kappa_{\alpha}$; $\epsilon_{\beta}^{\pm} = \epsilon_{\beta} \pm \frac{1}{2} Z \kappa_{\beta}$, $\epsilon_{\alpha\beta}^{\pm} = \gamma \pm Z \tau$ (знаки \pm относятся соответственно к внешнему и внутреннему слоям оболочки), можно получить явные выражения усилий и моментов через компоненты деформации срединной поверхности.

Пример 1. Осесимметрично нагруженная цилиндрическая оболочка при отсутствии осевой силы. В этом случае определяющие зависимости имеют вид [14]

$$M_x = \frac{2}{3} b Z^2 \frac{\sigma_i(\epsilon_i)}{(\epsilon_i)} \kappa_x;$$

$$N_{\varphi} = 2b \frac{\sigma_i(\epsilon_i)}{\epsilon_i} \epsilon_{\varphi}, \quad (10)$$

где

$$\epsilon_i^2 = \epsilon_{\varphi}^2 + \frac{1}{3} Z^2 \kappa_x^2. \quad (11)$$

V. Введение аппроксимирующих поверхностей нагружения [28], [29]. См. стр. 110.

Несущая способность тонких оболочек (жестко-пластический анализ)

Если материал оболочки является идеально пластическим и удовлетворяет условию текучести Мизеса, то для пластического состояния $\sigma_i = \text{const} = \sigma_T$. В этом случае в чисто пластических областях оболочки правые части определяющих зависимостей (1) будут однородными функциями нулевого порядка относительно шести параметров ϵ_{α} , ϵ_{β} , ..., τ . Из этого вытекает необходимость существования некоторого конечного соотношения, которое играет роль условия текучести и связывает значения усилий и моментов в чисто пластических областях оболочки.

Если расположение этих областей таково, что оболочка может испытывать пластические деформации при неизменном значении нагрузки, то такое состояние оболочки называют *предельным*, а соответствующую нагрузку — *предельной нагрузкой*. При идеально пластическом материале предельная нагрузка не может быть превзойдена и поэтому она определяет несущую способность. При анализе предельного состояния можно пренебречь деформациями упругих и упруго-пластических областей и принимать, таким образом, что материал является *жестко-идеально-пластическим* (см. гл. 3 т. 1).

Вследствие отмеченного свойства однородности уравнений (1) в чисто пластических областях компоненты деформации ϵ_{α} , ..., τ можно заменить соответствующими скоростями $\dot{\epsilon}_{\alpha}$, ..., $\dot{\tau}$. При этом отыскание

предельной нагрузки сводится к построению полей внутренних усилий, моментов и скоростей срединной поверхности, удовлетворяющих в пластических областях: а) уравнениям равновесия; б) конечному соотношению; в) зависимостям между составляющими скорости срединной поверхности и скоростями деформации [эти зависимости имеют тот же вид, что и формулы (14) гл. 20 т. 1 и получаются из них путем дифференцирования по времени]; г) определяющим соотношениям (1). В жестких областях скорости должны обращаться в нуль (или соответствовать совместимому со связями жесткому смещению), а усилия и моменты должны удовлетворять условиям равновесия и не противоречить конечному соотношению. Кроме того, должны удовлетворяться заданные статические и кинематические краевые условия.

Наряду с непрерывными распределениями усилий, моментов и скоростей допустимы решения, содержащие разрывы некоторых функций и производных, совместимые с условиями равновесия и определяющими уравнениями.

Рассмотрим некоторый параллельный круг $s = s^*$ в осесимметрично нагруженной оболочке вращения (рис. 2). При переходе через сечение $s = s^*$ условия равновесия требуют непрерывности усилий N_s , Q_s и момента M_s , но допускают разрывы окружного усилия N_φ и момента M_φ . Пусть закон течения допускает при некоторых напряженных состояниях неограниченно большое значение скорости относительного меридионального удлинения $\dot{\epsilon}_s = \frac{\partial \dot{u}}{\partial s} + \frac{\dot{\omega}}{R_1}$; это означает допустимость разрыва меридиональной составляющей скорости \dot{u} (разрыв в нормальной составляющей скорости $\dot{\omega}$, очевидно, невозможен, так как он соответствовал бы неограниченно большим скоростям сдвига, несовместимым с гипотезами Кирхгофа). Аналогично, допустимость при некоторых напряжениях бесконечно большой скорости изменения меридиональной кривизны $\dot{\kappa}_s = \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial s}$ означает, что допустим скачок в наклоне касательной к меридиану (шарнирная окружность).

Конечное соотношение, соответствующее определяющим уравнениям (1), имеет весьма сложную структуру и не выражается в явной форме. Для приближенного анализа его можно аппроксимировать квадратичной зависимостью [18]

$$\frac{1}{N_r^2} (N_\alpha^2 - N_\alpha N_\beta + N_\beta^2 + 3T^2) + \frac{1}{M_r^2} (M_\alpha^2 - M_\alpha M_\beta + M_\beta^2 + 3H^2) = 1, \quad (12)$$

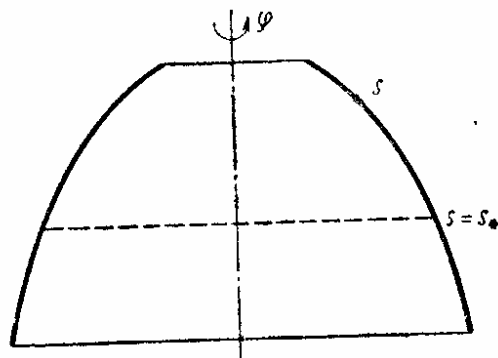
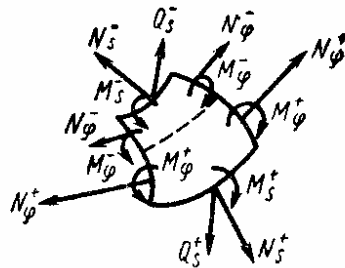


Рис. 2

где

$$N_T = \sigma_T h; \quad M_T = \sigma_T \frac{h^2}{4}.$$

В случае осесимметричной задачи используют также следующие аппроксимации:

Полулинейное конечное соотношение [18]

$$n^2 + m^2 = 1, \quad (13)$$

где

$$n = \max \left\{ \left| \frac{N_\alpha}{N_T} \right|, \left| \frac{N_\beta}{N_T} \right|, \left| \frac{N_\alpha - N_\beta}{N_T} \right| \right\},$$

$$m = \max \left\{ \left| \frac{M_\alpha}{M_T} \right|, \left| \frac{M_\beta}{M_T} \right|, \left| \frac{M_\alpha - M_\beta}{M_T} \right| \right\}. \quad (14)$$

Конечное соотношение с ограниченным взаимодействием усилий и моментов [18, 29]

$$\max \{ n, m \} = 1. \quad (15)$$

Конечное соотношение для эквивалентной двухслойной оболочки (при критерии текучести Треска) [29]

$$\max \left\{ \left| \frac{N_\alpha}{N_T} \pm \frac{M_\alpha}{M_T} \right|, \left| \frac{N_\beta}{N_T} \pm \frac{M_\beta}{M_T} \right|, \left| \frac{N_\alpha - N_\beta}{N_T} \pm \frac{M_\alpha - M_\beta}{M_T} \right| \right\} = 1. \quad (16)$$

Запишем символически выбранное конечное соотношение

$$\Phi(N_\alpha, N_\beta, \dots, T) = 1.$$

При этом соответствующие определяющие уравнения (закон течения) можно сформулировать, пользуясь *принципом градиентальности* (см. гл. 3 т. 1), в виде следующих соотношений:

$$\dot{\epsilon}_\alpha = \psi \frac{\partial \Phi}{\partial N_\alpha}, \dots, 2\dot{\tau} = \psi \frac{\partial \Phi}{\partial H}, \quad (17)$$

где ψ — произвольный неотрицательный множитель, пропорциональный рассеиваемой мощности при пластической деформации оболочки.

В угловых точках или на ребрах поверхности текучести $\Phi = 1$ закон течения формулируется по общему правилу (см. гл. 3 т. 1), в виде надлежащей линейной комбинации законов для примыкающих гладких участков поверхности.

Пример 2. Полубесконечная цилиндрическая оболочка, нагруженная на краю перерезывающей силой (рис. 3). Уравнения равновесия для этого случая имеют вид

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x; \quad \frac{dQ_x}{dx} = \frac{N_\Phi}{R},$$

причем на краю $x = 0$; $M_x = 0$, $Q_x = Q_0$. Воспользуемся конечным соотношением (15), которое здесь принимает вид квадрата $\frac{N_\Phi}{N_T} = \pm 1$, $\frac{M_x}{M_T} = \pm 1$

(рис. 4). Краю $x = 0$ на рис. 4 отвечает точка F , поэтому примем, что вблизи края $-\frac{N_\varphi}{N_T} = 1$. Из уравнений равновесия и краевых условий при этом находим

$$\frac{dQ_x}{dx} = -\frac{N_T}{R}; \quad Q_x = Q_0 - \frac{N_T}{R} x;$$

$$M_x = \int_0^x Q_x dx = Q_0 x - \frac{N_T}{2R} x^2.$$

Согласно этому решению M_x возрастает при удалении от края, что на рис. 4 соответствует движению от точки F к точке G .

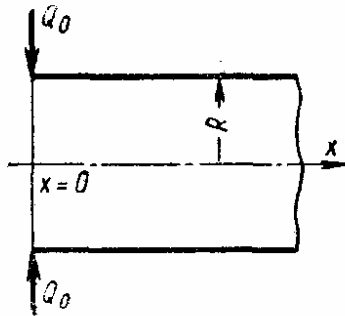


Рис. 3

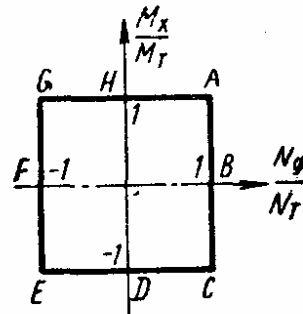


Рис. 4

Пусть состояние G достигается в некотором сечении $x = x^*$. Тогда

$$M_x = M_T \text{ при } x = x^*.$$

Кроме того, поскольку это значение M_x является максимальным, должно быть

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 \text{ при } x = x^*.$$

Из двух последних уравнений находим x^* и предельное усилие Q_0 :

$$x^* = \sqrt{2R \frac{M_T}{N_T}}; \quad Q_0 = \sqrt{\frac{2M_T N_T}{R}}.$$

Участок $x^* \leq x < \infty$ представляет собой полубесконечную оболочку, нагруженную по краю $x = x^*$ моментом $M_x = M_T$. Рассматривая упругое решение для этого случая, убеждаемся, что всюду в области $x^* \leq x < \infty$ предел текучести не достигается и, следовательно, эта область является жесткой. Наконец, построим поле скоростей. На участке $0 \leq x \leq x^*$ имеем,

согласно формулам (17): $\dot{\kappa}_x = -\frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} = 0$, $\dot{\epsilon}_\varphi < 0$, учитывая также, что при $x = x^*$ прогиб обращается в нуль (так как область $x > x^*$ жесткая), находим $\dot{w} = \dot{w}_0 (x - x^*)$, где \dot{w}_0 — неопределенная положительная постоянная.

В сечении $x = x^*$ производная $\frac{d\dot{w}}{dx}$, очевидно, испытывает разрыв (рис. 5)

и, следовательно, $\dot{\kappa}_x = -\frac{d^2 \dot{w}}{dx^2}$ обращается в положительную бесконечность. Это, однако, не противоречит соотношениям (17), поскольку в угловой точке G (рис. 4) требуется лишь, чтобы было $\dot{\kappa}_x \geq 0$, $\dot{\epsilon}_\varphi \leq 0$. Следовательно, построенное решение удовлетворяет всем необходимым условиям.

Переходя к рассмотрению приближенных методов определения несущей способности, примем, что все нагрузки, приложенные к оболочке, изменяются пропорционально одному параметру k , причем предельной нагрузке отвечает некоторое значение $k = k^0$. Тогда имеют место следующие теоремы:

I. Если при некотором $k = k^-$ можно построить непрерывное (или с допустимыми разрывами) поле усилий и моментов, удовлетворяющее уравнениям равновесия и статическим краевым условиям, причем всюду $\Phi(N_\alpha, M_\alpha, \dots, H) \leq 1$, то $k^- \leq k^0$.

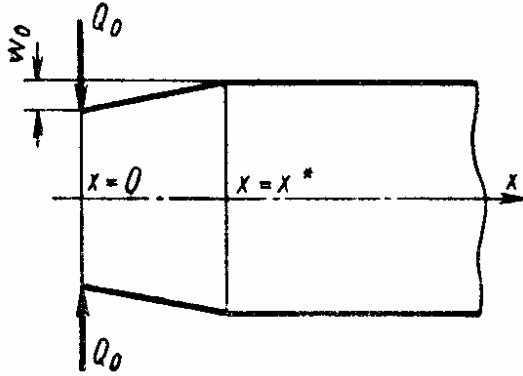


Рис. 5

II. Если при некотором $k = k^+$ можно построить непрерывное (или с допустимыми разрывами) и удовлетворяющее условиям закрепления поле скоростей, при которых мощность нагрузок равняется скорости пластической диссипации энергии в оболочке, то $k^+ \geq k^0$.

Эти теоремы имеют место для всех перечисленных формулировок конечного соотношения (12)–(16) при условии, что закон течения (17)

берется в соответствии с выбранным конечным соотношением.

Поля усилий и моментов, удовлетворяющие условиям теоремы I, называют статически допустимыми, а поле скоростей, удовлетворяющее условиям теоремы II, — кинематически возможным.

Пластическую диссипацию энергии в оболочке вычисляют по формуле

$$D = \iint (N_\alpha \dot{\epsilon}_\alpha + N_\beta \dot{\epsilon}_\beta + M_\alpha \dot{\chi}_\alpha + M_\beta \dot{\chi}_\beta + \\ + T \dot{\gamma} + 2H \dot{\tau}) AB d\alpha d\beta, \quad (18)$$

где интеграл распространен по всей срединной поверхности оболочки, причем скорости деформации $\dot{\epsilon}_\alpha, \dots, \dot{\tau}$ вычисляют по выбранным кинематически возможным скоростям при помощи формул [гл. 20 т. 1, формулы (14)], а усилия и моменты N_α, \dots, H определяют по взятым $\epsilon_\alpha, \dots, \tau$ при помощи соответствующего закона течения. Например, при использовании критерия текучести (12) выражение (18) принимает вид

$$D = \frac{2}{\sqrt{3}} N_\tau \iint \left[\left(\dot{\epsilon}_\alpha^2 + \dot{\epsilon}_\alpha \dot{\epsilon}_\beta + \dot{\epsilon}_\beta^2 + \frac{1}{4} \dot{\gamma}^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{16} (\dot{\chi}_\alpha^2 + \dot{\chi}_\alpha \dot{\chi}_\beta + \dot{\chi}_\beta^2 + \dot{\tau}^2) \right] \frac{1}{2} AB d\alpha d\beta. \quad (18a)$$

Если поле кинематически возможных скоростей содержит линии разрыва, то последние следует рассматривать как предельное положение узких зон резкого изменения соответствующих переменных и вычислять интеграл (18) в этих зонах путем соответствующего предельного перехода.

Например, в осесимметричной задаче при конечном соотношении (16) к правой части формул (18) следует добавить слагаемое

$$N_T |\dot{\Delta u}| 2\pi r_1,$$

если меридианальная скорость имеет скачок $|\dot{\Delta u}|$ на параллельном круге $r = r_1$, и слагаемое

$$M_T |\Delta \vartheta| 2\pi r_1,$$

если разрывен угол поворота ϑ .

Пример 3. Сферический колпачок, опертый по контуру и нагруженный равномерным внутренним давлением q (рис. 6).

Для получения нижней оценки предельной нагрузки необходимо построить распределение меридианальных и окружных усилий и моментов $n_\theta = N_\theta/N_T$, $n_\varphi = N_\varphi/N_T$, $m_\theta = M_\theta/M_T$, $m_\varphi = M_\varphi/M_T$, удовлетворяющее уравнениям равновесия

$$\frac{d}{d\vartheta} (n_\theta \sin \vartheta) - n_\varphi \cos \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} n_\theta = \frac{ph}{2R} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}$$

$$\left(p = \frac{q}{\sigma_T} \cdot \frac{R^2}{h^2} \right);$$

$$\frac{d}{d\vartheta} (m_\theta \sin \vartheta) - m_\varphi \cos \vartheta - 4 \frac{R}{h} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} n_\theta =$$

$$= -2p \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta},$$

краевому условию $m_\theta = 0$ при $\vartheta = \alpha$, условию симметрии в вершине оболочки и не противоречащее конечному соотношению, которое возьмем в форме зависимости (12).

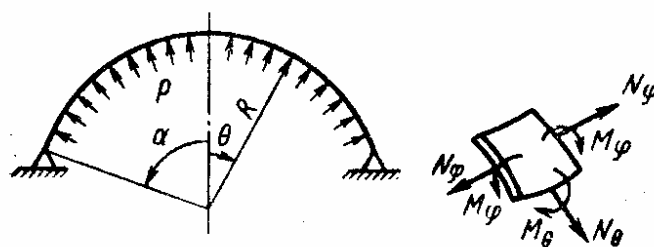


Рис. 6

Заметим, что поверхность (12) является описанной около поверхности (13), поэтому для получения статически допустимого решения можно воспользоваться более простым условием (13). Это условие тождественно удовлетворяется, если положить

$$n = \delta_n, \quad m = \delta_m,$$

где δ_n , δ_m — любые положительные постоянные, связанные соотношением

$$\delta_n^2 + \delta_m^2 = 1. \quad (19)$$

Приняв в формулах (14) $n = n_\theta$, $m = m_\varphi$, получим $n_\theta = \delta_n$, $m_\varphi = \delta_m$. Подставив эти значения в уравнения равновесия, получим решение, удовлетворяющее условию симметрии в вершине, в виде

$$n_\theta = \delta_n; \quad n_\varphi = \frac{\delta_n}{\cos^2 \vartheta} - \frac{ph}{2R} \operatorname{tg}^2 \vartheta;$$

$$m_\theta = \delta_m + 2S(\vartheta) \left(2\delta_n \frac{R}{h} - p \right); \quad m_2 = \delta_m.$$

где

$$S(\vartheta) = \frac{1}{\sin \vartheta} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 1.$$

Краевое условие $m_\theta = 0$ при $\vartheta = \alpha$ дает

$$p = 2\delta_n \frac{R}{h} + \frac{\delta_m}{2S(\alpha)}.$$

Определив δ_n , δ_m из условия максимума p с учетом добавочного условия (19), получим нижнюю оценку предельного давления в виде

$$\frac{p^-}{p_0} = \sqrt{1 + \left[\frac{h}{4RS(\alpha)} \right]^2}, \quad (20)$$

где $p_0 = 2 \frac{R}{h}$ — безмоментное решение.

Зависимость (20) показана на рис. 7 сплошными линиями.

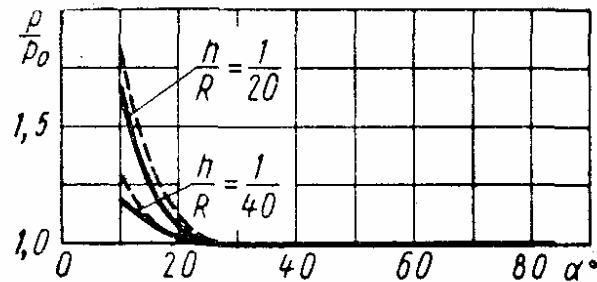


Рис. 7

Для получения верхней оценки зададим поле скоростей

$$\dot{w} = \dot{w}_0 \frac{\sin \alpha - \sin \vartheta}{\sin \alpha}; \quad \dot{u} = 0,$$

которому отвечают скорости относительного удлинения и изменения кривизны срединной поверхности

$$\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{w}_0}{R} \cdot \frac{\sin \alpha - \sin \vartheta}{\sin \alpha};$$

$$\dot{\kappa}_\theta = - \frac{\dot{w}_0}{R^2} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha}; \quad \dot{\kappa}_\varphi = \frac{\dot{w}_0}{R^2} \cdot \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta \cdot \sin \alpha}.$$

Подставив эти значения в формулу (18a) и приравняв результат мощности нагрузок

$$A_e = 2\pi R^2 \int_0^\alpha p w \sin \vartheta d\vartheta,$$

придем к следующей оценке предельного давления сверху:

$$\frac{p^+}{p_0^-} = \frac{\int_0^\alpha \left[(\sin \alpha - \sin \vartheta)^2 + \frac{h^2}{48R^2} \cdot \frac{1 - 0,75 \sin^2 2\vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right] \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^\alpha (\sin \alpha - \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}.$$

Результаты вычислений по этой формуле показаны на рис. 7 пунктирными линиями.

Формулы для расчета несущей способности некоторых оболочек при различных вариантах нагружения приведены в таблице. Другие решения содержатся в работах [3—4; 9, 12, 17, 29, 32, 34, 35].

Дополнительные сведения по расчету пластических оболочек

Расчет упруго-идеально-пластических оболочек. Схема, принятая ранее (жестко-идеально-пластический материал), дает возможность анализировать лишь предельное состояние оболочки.

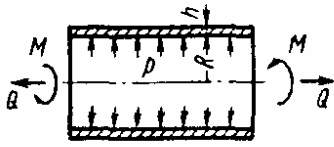
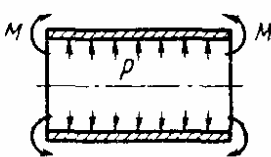
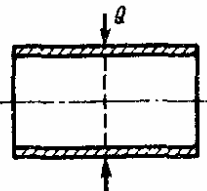
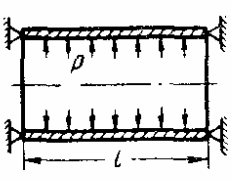
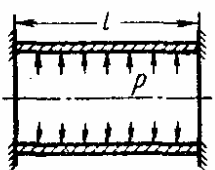
Если требуется получить информацию о поведении оболочки в процессе нагружения, то следует наряду с пластическими учитывать также и упругие деформации (необходимость в более глубоком упруго-пластическом анализе может возникнуть, например, для расчета прогибов оболочки при приближении к предельному состоянию, при анализе температурных напряжений и в ряде других случаев). Учет упругих деформаций приводит к упруго-идеально-пластической модели оболочки.

При использовании деформационной теории пластичности упруго-идеально-пластическую оболочку можно рассматривать как частный случай оболочки с произвольным упрочнением и соответственно применять для расчета методы, изложенные на стр. 97 и 98, полагая, что упрочнение является исчезающе малым. Для приближенного анализа применяют другой подход, имеющий в основе некоторые представления общей теории пластического течения. Примем, что компоненты скоростей деформации срединной поверхности складываются из упругих и пластических составляющих

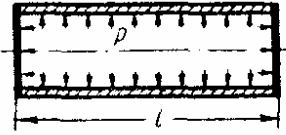
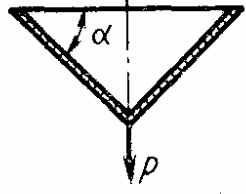
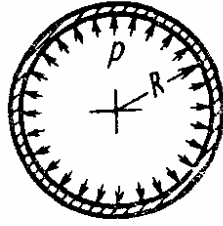
$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\alpha &= \dot{\epsilon}_\alpha^e + \dot{\epsilon}_\alpha^p; \quad \dot{\kappa}_\alpha = \dot{\kappa}_\alpha^e + \dot{\kappa}_\alpha^p; \\ \dot{\epsilon}_\beta &= \dot{\epsilon}_\beta^e + \dot{\epsilon}_\beta^p; \quad \dot{\kappa}_\beta = \dot{\kappa}_\beta^e + \dot{\kappa}_\beta^p; \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^p; \quad \dot{\tau} = \dot{\tau}^e + \dot{\tau}^p. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

При выбранном конечном соотношении пластические составляющие $\dot{\epsilon}_\alpha^p, \dots, \dot{\tau}^p$ определяют при помощи зависимостей (17), для упругих составляющих $\dot{\epsilon}_\alpha^e, \dots, \dot{\tau}^e$ используют обычные соотношения упругости общей теории упругих оболочек [см. гл. 20 т. 1 формулы (38)]. При этом предполагают, что пластическая область оболочки, в которой

I Расчет несущей способности оболочек

Форма оболочки и нагружение	Схема	Формулы для расчета предельной нагрузки
Цилиндрическая под действием внутреннего равномерного давления p в н/м ² , осевой силы Q в н и крутящего момента M в н·м		$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2 - \frac{p}{p_0} \cdot \frac{Q}{Q_0} + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{M}{M_0}\right)^2 = 1,$ <p>где</p> $Q_0 = 2\pi R h \sigma_T;$ $p_0 = \sigma_T \frac{h}{R};$ $M_0 = 2\pi R^2 h \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$
Цилиндрическая под действием равномерного внутреннего давления p в н/м ² и распределенного по краю изгибающего момента M в н		$\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{M}{M_0}\right)^2 = 1;$ $p_0 = \sigma_T \frac{h}{R}; M_0 = \sigma_T \frac{h^2}{4}$ <p>[точное решение при конечном соотношении (12)]</p>
Бесконечная цилиндрическая под действием усилия Q в н/м, распределенного вдоль окружности		$Q = 1,91 \sigma_T h \sqrt{\frac{h}{R}}$ <p>[точное решение при конечном соотношении (12)]</p>
Цилиндрическая под действием равномерного давления p в н/м ² , шарнирно опертая на краях, осевая сила отсутствует		$p = \sigma_T \frac{h}{R} \left(1 + \frac{1}{c^2}\right);$ $c = \frac{l}{\sqrt{2Rh}}$ <p>[точное решение при конечном соотношении (15)]</p>
Цилиндрическая, защемленная на краях, нагруженная внутренним давлением p в н/м ² , осевая сила отсутствует		$p = \sigma_T \frac{h}{R} \cdot \frac{2 + c^2}{c^2}$ $c = \frac{l}{\sqrt{2Rh}}$ <p>[точное решение при конечном соотношении (15)]</p>

Продолжение табл. 1

Форма оболочки и нагружение	Схема	Формулы для расчета предельной нагрузки
Цилиндрическая с жесткими днищами под действием внутреннего давления p в н/м ²		$p = \sigma_T \frac{h}{R} \cdot \frac{2 + c^2}{1 + c^2};$ $c = \frac{l}{\sqrt{2Rh}}$ <p>[точное решение при конечном соотношении (16)]</p>
Коническая шарнирно опертая или защемленная по контуру под действием осевой сосредоточенной силы P в н		$P = 2\pi M_T \cos^2 \alpha$ <p>[точное решение при конечных соотношениях (15), (16)]</p>
Замкнутая сферическая под действием равномерного внутреннего давления p в н/м ²		$p = 2\sigma_T \frac{h}{R}$ <p>(точное решение при условиях текучести Мизеса или Треска)</p>

$\Phi = 1$ и пластические составляющие $\dot{\epsilon}_\alpha^p, \dots, \dot{\tau}^p$ отличны от нуля, непосредственно сопрягается с упругими областями, в которых $\Phi < 1$ и $\dot{\epsilon}_\alpha^p = \dot{\epsilon}_\beta^p = \dots = 0$. Это предположение действительно реализуется во многих случаях упруго-пластического деформирования идеализированных двухслойных оболочек. Особенно ощутимые упрощения достигаются в том случае, когда конечное соотношение аппроксимируется посредством кусочно-линейных поверхностей. При этом дифференциальные соотношения (17) для каждого из пластических режимов конечного соотношения могут быть проинтегрированы и окончательные результаты во многих случаях удастся представить в замкнутом виде.

Пример 4. Рассмотрим заново пример 2 (см. рис. 3), принимая во внимание упругие деформации. В начальной стадии нагружения поведение оболочки является упругим и определяется обычными уравнениями

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x; \quad \frac{dQ_x}{dx} = -\frac{N_\varphi}{R}; \quad (22)$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{w}{R} = \frac{1}{Eh} N_\varphi; \quad \kappa_x = -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{D} M_x; \quad (23)$$

$$\kappa_\varphi = 0;$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Соответствующее упругое решение будет

$$w = -\frac{Q_0}{2D\beta^3} e^{-\beta x} \cos \beta x; \quad M_x = \frac{Q_0}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x;$$

$$N_\varphi = -2\beta R Q_0 e^{-\beta x} \cos \beta x; \quad \beta^* = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}.$$

Окружное усилие N_φ имеет максимальное значение $N_{\varphi \max} = -2\beta R Q_0$ в сечении $x = 0$, поэтому пластическое состояние [определяемое условием (15)] возникнет в этом сечении при $Q_0 = Q_0^e = \frac{N_T}{2\beta R}$; при $Q_0 > Q_0^e$ у края оболочки развивается пластическая зона, для которой закон течения определяется зависимостями

$$\dot{\epsilon}_\varphi^p > 0; \quad \dot{\kappa}_x = \dot{\kappa}_x^e;$$

интегрируя последнее соотношение по времени, получим, что в пластической области остается в силе соотношение $\kappa_x = \frac{1}{D} M_x$, к которому следует теперь присоединить условие пластичности $N_\varphi = N_T$. Результирующее решение для пластической области $0 \leq x \leq l$, удовлетворяющее условиям на краю $x = 0$, имеет вид

$$w = \frac{1}{D} \left(-\frac{Q_0 x^3}{6} + \frac{N_T}{24R} x^4 + C_1 x + C_2 \right);$$

$$M_x = Q_0 x - \frac{N_T}{2R} x^2.$$

Упругое решение для области $l \leq x \leq \infty$, затухающее на бесконечности, будет

$$w = e^{-\beta(x-l)} [C_3 \cos \beta(x-l) + C_4 \sin \beta(x-l)]. \quad (24)$$

Произвольные постоянные C_1, \dots, C_4 и длина пластической зоны l определяются из условий непрерывности w , $\frac{dw}{dx}$, M_x , Q_x и N_φ на границе $x = l$.

В частности, зависимость l от нагрузки будет

$$\beta l = \frac{Q_0}{Q_0^e} - 1.$$

При $Q_0 = Q_0^* = \sqrt{2M_T \frac{N_T}{R}}$ изгибающий момент в сечении $x = l$ достигает значения M_T и возникает предельное состояние, изложенное на стр. 102, 103.

Прогиб $w = w_0$ в сечении $x = 0$ определяется соотношением

$$\frac{w_0}{w_e} = \frac{1}{6} (1 + q + 3q^4); \quad q = \frac{Q_0}{Q_0^e}; \quad w_e = -\frac{Q_0^e}{2D\beta^3}. \quad (25)$$

Очевидно, что параметр q изменяется в интервале $1 \leq q \leq q^*$, причем $q^* = \frac{Q_0^*}{Q_0^e} = \sqrt[4]{4(1-\nu^2)}$. При $\nu = 0,5$ для предельного состояния имеем $q^* = 1,315$; $w_0 = 2,10w_e$. Следовательно, предельное состояние возникает при относительно малых значениях прогибов.

Обзор исследований упруго-пластического и жестко-пластического равновесия и оболочек приведен в работе [8].

Приближенный учет упрочнения. Изложенный прием можно использовать с некоторыми изменениями для приближенного анализа оболочек, изготовленных из упруго-упрочняющегося материала. Как

и ранее, считаем, что при малых нагрузках оболочка упругая. Переходу в упруго-пластическую стадию соответствует нагрузка, при которой упругие усилия и моменты в наиболее напряженном сечении достигнут значений, удовлетворяющих конечному соотношению $\Phi(N_\alpha, N_\beta, \dots, H) = 1$ [причем функция Φ , играющая теперь роль функции нагружения, может быть взята в виде какого-либо из выражений (12)–(16)]. При дальнейшем нагружении возникает пластическая область, которая непосредственно граничит с упругой областью, причем граница определяется условием $\Phi = 1$. Для пластической области остаются в силе выражения (21), причем пластические составляющие $\dot{\epsilon}_\alpha^p, \dot{\epsilon}_\beta^p, \dots, \dot{\tau}^p$ определяются при помощи зависимостей вида (17), с той разницей, что множитель пропорциональности ψ заменяется некоторым коэффициентом $G = G(\Phi) \dot{\Phi}$, зависящим от функции нагружения Φ :

$$\dot{\epsilon}_\alpha^p = G(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial N_\alpha} \dot{\Phi}, \dots, 2\dot{\tau}^p = G(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial H} \dot{\Phi} \quad (26)$$

Функция $G(\Phi)$ выбирается в зависимости от вида кривой упрочнения. Уравнения (26), вообще говоря, нелинейны, однако могут быть линеаризованы, если принять для Φ одно из имеющихся кусочно-линейных представлений и рассматривать линейное упрочнение, при котором $G = \text{const} = G_0$. В этом случае соотношения (26) можно также частично проинтегрировать по времени.

Изложенный прием детально разработан и применен для решения ряда задач в работах [13, 28, 33 и др.].

Проектирование оболочек минимального веса. В предыдущем изложении при анализе предельного равновесия жестко-пластических оболочек принималось, что постоянная (или переменная) толщина оболочки h задана. Теперь примем, что h является новой неизвестной функцией, и соответственно введем дополнительное соотношение, в качестве которого можно взять, например, условие минимума объема оболочки

$$\iint h(\alpha, \beta) AB d\alpha d\beta = \min \quad (27)$$

при заданной несущей способности. Срединная поверхность при этом считается фиксированной, поэтому разыскивается оптимальное распределение материала на заданной срединной поверхности.

Если материал оболочки однороден, то минимум объема обеспечивает также минимум веса. Условие минимума (27) можно заменить [36] дифференциальным соотношением

$$\frac{\partial}{\partial h} \Delta = C, \quad (28)$$

где C — произвольная положительная постоянная;

Δ — удельная пластическая диссипация энергии:

$$\Delta = N_\alpha \dot{\epsilon}_\alpha + N_\beta \dot{\epsilon}_\beta + M_\alpha \dot{\kappa}_\alpha + M_\beta \dot{\kappa}_\beta + T \dot{\gamma} + 2H \dot{\tau}. \quad (29)$$

При наличии объемных сил с составляющими q_α, q_β, q_n следует заменить в соотношении (28) удельную диссипацию Δ модифицированной удельной диссипацией Δ_A :

$$\Delta_A = \Delta - h(q_\alpha \dot{u} + q_\beta \dot{v} + q_n \dot{w}).$$

Соотношение (28) принимает особенно простой вид, если рассматривать идеализированную двухслойную оболочку, считая, что толщина заполнителя Z постоянна и фиксирована, и разыскивать оптимальное распределение толщины (одинаковых) несущих слоев b .

Для двухслойной оболочки Δ пропорционально b , поэтому вместо (28) получим

$$\frac{\Delta}{b} = c. \quad (30)$$

Очевидно, что b в это соотношение фактически не входит.

Проектирование оболочки минимального веса сводится к построению решения системы уравнений предельного равновесия (см. стр. 100) с добавочным условием (28) или для двухслойной оболочки с условием (30).

Пример 5. Двухслойная цилиндрическая оболочка длиной $2L$, шарнирно закрепленная на торцах $x = \pm L$ и нагруженная равномерным внутренним давлением p (рис. 8). Для двухслойной оболочки конечное соотношение (16) изображается шестиугольником $abcdef$ (рис. 9), где теперь

$$M_T = Zb\sigma_T; \quad N_T = 2b\sigma_T, \quad (31)$$

причем $b = b(x)$ является искомой величиной.

Следует ожидать, что при рассматриваемой нагрузке $N_\Phi > 0$; $M_x > 0$, поэтому пластическое состояние оболочки должно относиться к участкам шести-

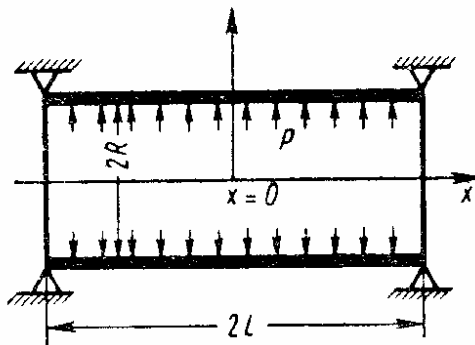


Рис. 8

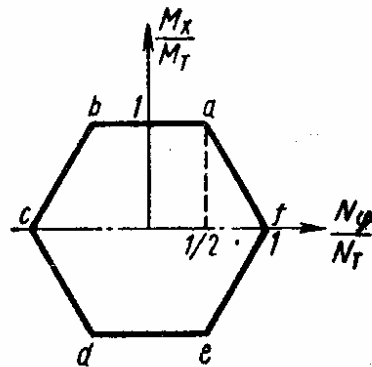


Рис. 9

угольника, лежащим в первом квадранте на рис. 9. Однако отрезок ab приводит, согласно закону течения (17), к нулевой скорости прогиба $\dot{w} = R\dot{\epsilon}_\Phi^p = 0$. На отрезке af имеем

$$\frac{\kappa_x}{\epsilon_\Phi} = -\frac{N_T}{2M_T} = -\frac{1}{Z}, \quad (32)$$

что несовместимо с соотношением (30). Рассмотрим состояние a , для которого $M_x = M_T$; $N_\Phi = \frac{1}{2} N_T$. Подставив эти значения в уравнение равновесия

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} - \frac{N_\Phi}{R} = -p$$

и используя выражения (31), получим для определения b дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 b}{dx^2} - \frac{1}{ZR} b = -\frac{p}{Z\sigma_T},$$

решение которого, удовлетворяющее условиям $M_x = 0$ при $x = \pm L$, будет

$$b = \frac{\rho R}{\sigma_T} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} x / \sqrt{ZR}}{\operatorname{ch} L / \sqrt{ZR}} \right]. \quad (33)$$

Остается проверить, что условие (30), принимающее в рассматриваемом случае вид

$$\frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} - \frac{1}{ZR} \dot{w} = -\frac{c}{Z}, \quad (34)$$

допускает решения, совместимые с условиями закрепления $\dot{w} = 0$ при $x = \pm L$ и законом течения для точки f

$$0 \leq \frac{\dot{w}}{R} \leq -Z \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2}. \quad (35)$$

Решение уравнения (34) имеет вид

$$\dot{w} = \frac{c}{Z} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} x / \sqrt{ZR}}{\operatorname{ch} L / \sqrt{ZR}} \right].$$

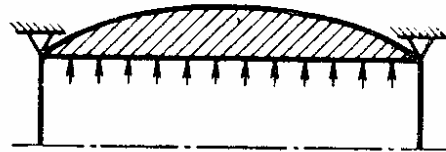


Рис. 10

Оно удовлетворяет условиям (35), если

$$L \leq \sqrt{RZ} \operatorname{arccch} 2 = 1,317 \sqrt{RZ}.$$

Следовательно, распределение толщины (33) действительно дает конструкцию минимального веса лишь при не слишком большой длине оболочки. Профиль оболочки для $L = \sqrt{RZ}$ показан на рис. 10. Решение для $L > 1,317 \sqrt{RZ}$ приведено в работе [36].

Пластически анизотропные оболочки. Рассмотрим вопрос определения несущей способности, считая, что оболочка ортотропна, причем одна из плоскостей пластической симметрии касательна к срединной поверхности, две другие ортогональны линиям кривизны α, β . Если условие текучести (для плоского напряженного состояния) взять в форме

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{T\alpha}} \right)^2 - \frac{\sigma_\alpha \sigma_\beta}{\sigma_{T\alpha} \sigma_{T\beta}} - \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_{T\beta}^2} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{\tau_{T\alpha\beta}^2} = 1,$$

где $\sigma_{T\alpha}, \sigma_{T\beta}$ — пределы текучести в направлениях α, β , то соответствующее приближенное конечное соотношение [аналогичное квадратичному соотношению (12) для изотропной оболочки] будет иметь вид [10]

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{h^2} \left(\frac{N_\alpha^2}{\sigma_{T\alpha}^2} - \frac{N_\alpha N_\beta}{\sigma_{T\alpha} \sigma_{T\beta}} + \frac{N_\beta^2}{\sigma_{T\beta}^2} + \frac{T^2}{\tau_{T\alpha\beta}^2} \right) + \\ + \frac{12}{h^2} \left(\frac{M_\alpha^2}{\sigma_{T\alpha}^2} - \frac{M_\alpha M_\beta}{\sigma_{T\alpha} \sigma_{T\beta}} + \frac{M_\beta^2}{\sigma_{T\beta}^2} + \frac{H^2}{\tau_{T\alpha\beta}^2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Соответствующий закон течения по-прежнему выражается соотношениями (17). В таком построении теории имеют место энергетические теоремы, сформулированные на стр. 104. Уравнения теории оболочек при других формах анизотропного условия пластичности, а также различные примеры и приложения приведены в работах [10, 24].

Заметим, что конструктивно анизотропные (оребранные) пластические оболочки обычно не могут быть сведены при расчете к эквивалентной физически анизотропной оболочке и требуют специального анализа [11].

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Установившаяся ползучесть

При установившейся ползучести общие пространственные уравнения ползучести аналогичны по структуре уравнениям деформационной теории пластичности с упрочнением. С другой стороны, кинематические гипотезы, лежащие в основе теории как упругих, так и упруго-пластических оболочек, не связаны со свойствами материала и потому применимы также для состояния установившейся (и не установившейся) ползучести оболочек. Поэтому можно сразу же получить определяющие уравнения для ползущей оболочки из уравнений (1), заменив в них всюду компоненты деформации срединной поверхности $\dot{\epsilon}_\alpha, \dot{\epsilon}_\beta, \dots, \dot{\tau}$ соответствующими скоростями $\dot{\epsilon}_\alpha, \dot{\epsilon}_\beta, \dots, \dot{\tau}$ и приняв в качестве функции упрочнения $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ надлежащую зависимость между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций ползучести, например, степенной закон

$$\dot{\gamma}_i = B \tau_i^m, \quad (36)$$

где $\dot{\gamma}_i = \sqrt{3} \dot{\epsilon}_i$ — интенсивность скоростей деформаций сдвига; $\tau_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i$ — интенсивность касательных напряжений.

Зависимости между скоростями обобщенных деформаций $\dot{\epsilon}_\alpha, \dots, \dot{\tau}$ и компонентами вектора скорости срединной поверхности $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ получаются дифференцированием по времени соответствующих зависимостей для упругой оболочки [гл. 20 т. 1 формулы (14)], например,

$$\dot{\epsilon}_\alpha = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial \dot{A}}{\partial \beta} \dot{v} + \frac{\dot{w}}{R_2} \text{ и т. д.}$$

Аналогично, дифференцированием по времени, можно перейти от краевых условий, выраженных в смещениях и углах поворота, к крайевым условиям, выраженным через соответствующие скорости. Статические краевые условия и уравнения равновесия [см. гл. 20 т. 1 формулы (30), (31)] остаются без изменений.

Для расчета установившейся ползучести оболочки на базе рассмотренных общих уравнений можно, в принципе, воспользоваться численными методами, изложенными на стр. 99. При этом расчет ползучести оказывается несколько проще, поскольку отпадает необходимость рассмотрения и сопряжения зон с различным состоянием материала (упругих, пластических, упруго-пластических). Дальнейшее упрощение достигается при использовании степенного закона (36). В этом случае (в основной задаче) усилия и моменты прямо пропорциональны параметру нагрузки λ , а скорости пропорциональны λ^m . Поэтому результаты (численные), полученные для некоторой системы поверхностных и краевых нагрузок $\lambda q_\alpha, \lambda q_\beta, \dots, \lambda N_\alpha$, автоматически распространяются (при данном m) на все другие системы нагрузок, получаемые из данной системы изменением параметра λ .

Наряду с численными методами при расчете ползучести оболочек, так же как при пластических расчетах, применяют приближенные приемы анализа, основанные на введении эквивалентных двухслойных

моделей или аппроксимирующих поверхностей нагружения. Первый из этих способов развивался применительно к случаю осесимметричной цилиндрической оболочки при степенном законе ползучести в работе [15].

При использовании подхода, основанного на введении аппроксимирующих поверхностей нагружения, определяющие уравнения ползучести оболочки имеют форму соответствующих уравнений для случая пластического упрочнения (26), с той разницей, что множитель Φ должен быть отброшен. Учитывая также, что при установившейся ползучести упругие составляющие $\dot{\epsilon}_\alpha^e, \dots, \dot{\tau}^e$ отсутствуют, получим

$$\dot{\epsilon}_\alpha = G(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial N_\alpha}, \quad \dot{\epsilon}_\beta = G(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial N_\beta}, \dots, 2\dot{\tau} = G(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial H}. \quad (37)$$

Множитель $G(\Phi)$ выбирают путем сравнения с простейшими решениями.

Наибольшей простоты достигают в том случае, когда для функции Φ принимают кусочно-линейное представление типа зависимости (15) (см., например, [37]). Однако следует иметь в виду, что в задачах ползучести такой прием дает, по-видимому, невысокую точность. Повышение точности достигается, если применить для Φ квадратичное представление [20]:

$$\Phi = \left[(N_\alpha^2 - N_\alpha N_\beta + N_\beta^2 + 3T^2) + \right. \\ \left. + \frac{k}{h^2} (M_\alpha^2 - M_\alpha M_\beta + M_\beta^2 + 3H^2) \right]^{1/2}, \quad (38)$$

где

$$k = 4(2 + \mu) \frac{2}{1 + \mu}; \quad \mu = \frac{1}{m}. \quad (39)$$

Зависимости (36), (37) при этом дают

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\alpha &= \frac{G(\Phi)}{\Phi} \left(N_\alpha - \frac{1}{2} N_\beta \right); \\ \dot{\epsilon}_\beta &= \frac{G(\Phi)}{\Phi} \left(N_\beta - \frac{1}{2} N_\alpha \right); \\ \dot{\gamma} &= 3 \frac{G(\Phi)}{\Phi} T; \\ \dot{\kappa}_\alpha &= \frac{k}{h^2} \cdot \frac{G(\Phi)}{\Phi} \left(M_\alpha - \frac{1}{2} M_\beta \right); \\ \dot{\kappa}_\beta &= \frac{k}{h^2} \cdot \frac{G(\Phi)}{\Phi} \left(M_\beta - \frac{1}{2} M_\alpha \right); \\ 2\dot{\tau} &= \frac{3k}{h^2} \cdot \frac{G(\Phi)}{\Phi} H, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где

$$G(\Phi) = B_1 h^{-m} \Phi^m. \quad (41)$$

Дальнейшее уточнение теории может быть получено путем введения в выражение (38) поправочных слагаемых, указанных в работе [2]. Если функция Φ — однородная первой степени, то уравнения (37) можно разрешить относительно усилий и моментов, построив однородную первой степени функцию $\Psi(\dot{\epsilon}_\alpha, \dots, \dot{\tau})$, обладающую тем свойством, что при подстановке вместо $\dot{\epsilon}_\alpha, \dot{\epsilon}_\beta, \dots$ и т. д. соответствующих производных $\frac{\partial \Phi}{\partial N_\alpha}, \frac{\partial \Phi}{\partial N_\beta}, \dots$ она обращается в единицу. При этом искомые обратные зависимости будут иметь вид

$$N_\alpha = Q(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\epsilon}_\alpha} \dots 2H = Q(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\tau}}, \quad (42)$$

где $Q(\Psi)$ — функция, обратная G .

В частности, уравнениям (38), (40) соответствует

$$\Psi = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[(\dot{\epsilon}_\alpha^2 + \dot{\epsilon}_\alpha \dot{\epsilon}_\beta + \dot{\epsilon}_\beta^2 + \frac{1}{4} \dot{\gamma}^2) + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{k} (\dot{\kappa}_\alpha^2 + \dot{\kappa}_\alpha \dot{\kappa}_\beta + \dot{\kappa}_\beta^2 + \dot{\tau}^2) \right]^{1/2}; \quad (43)$$

$$Q(\Psi) = hB_1^{-1} \Psi^\mu. \quad (44)$$

Для построения решений на базе уравнений (39), (42) можно использовать вариационные принципы

$$\iint L^* AB \, d\alpha \, d\beta - A_e = \min; \quad (45)$$

$$\iint \Lambda^* AB \, d\alpha \, d\beta - A_e = \min, \quad (46)$$

где $\Lambda^* = \int G(\Phi) \, d\Phi$; $L^* = \int Q(\Psi) \, d\Psi$.

Интегрирование в функционалах (45), (46) распространяется по всей срединной поверхности оболочки (через A_e обозначена мощность поверхностных и краевых внешних нагрузок). В функционале (45) варьируются поля скоростей, удовлетворяющие заданным кинематическим краевым условиям, в функционале (46) — поля усилий и моментов, удовлетворяющие заданным статическим краевым условиям и уравнениям равновесия.

Для построения приближенных решений при помощи вариационных принципов (45) и (46) можно применить метод Ритца и другие общие вариационные методы решения нелинейных задач (см. гл. 3 т. 1).

Некоторые другие приемы решения и численные результаты приведены в работах [26, 30].

Неустановившаяся ползучесть

Можно получить различные варианты определяющих уравнений неустановившейся ползучести оболочки в зависимости от того, какая из существующих теорий ползучести будет положена в основу.

Задача построения теории неустановившейся ползучести оболочки в принципе решается наиболее просто в том случае, когда исходные

пространственные определяющие уравнения принимают в форме варианта теории старения, предложенного Ю. Н. Работновым (см. гл. 4 т. 1). При этом расчеты ползучести (для каждого фиксированного момента времени) оказываются формально аналогичными упруго-пластическому расчету на базе деформационной теории пластичности для материала с упрочнением. Это позволяет непосредственно использовать для расчета неустановившейся ползучести оболочки общие пластические определяющие уравнения (1), введя в них соответствующую зависимость $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, t)$. Соответственно можно использовать численные методы решения, приведенные на стр. 99.

Если исходить из определяющих уравнений ползучести более сложной структуры, то задача построения теории ползущих оболочек резко усложняется, и пока в этом направлении получены лишь отдельные частные результаты — выведены определяющие уравнения для цилиндрической оболочки на основе теорий старения (Содерберга) и течения [7, 25] и уравнения для осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе теории течения [38].

Для приближенного анализа неустановившейся ползучести оболочек представим скорости деформации срединной поверхности оболочки в виде суммы упругих составляющих и составляющих ползучести: $\dot{\varepsilon}_\alpha = \dot{\varepsilon}_\alpha^e + \dot{\varepsilon}_\alpha^c$; $\dot{\kappa}_\alpha = \dot{\kappa}_\alpha^e + \dot{\kappa}_\alpha^c$ и т. д., причем упругие составляющие $\dot{\varepsilon}_\alpha^e, \dots, \dot{\tau}^e$ определим при помощи соответствующих общих зависимостей для упругих оболочек [см. гл. 20 т. 1 формулы (38)], составляющие ползучести примем в виде (40), заменив постоянную B_1 функцией времени $B_1(t)$ [см. гл. 4 т. 1]. В результате получим следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\alpha &= \frac{1}{Eh} (\dot{N}_\alpha - \nu \dot{N}_\beta) + B_1(t) h^{-m} \times \\ &\quad \times \Phi^{m-1} \left(N_\alpha - \frac{1}{2} N_\beta \right); \\ \dot{\varepsilon}_\beta &= \frac{1}{Eh} (\dot{N}_\beta - \nu \dot{N}_\alpha) + B_1(t) h^{-m} \times \\ &\quad \times \Phi^{m-1} \left(N_\beta - \frac{1}{2} N_\alpha \right); \\ \dot{\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} \dot{T} + 3B_1(t) h^{-m} \Phi^{m-1} T; \\ \dot{\kappa}_\alpha &= \frac{12}{Eh^3} (\dot{M}_\alpha - \nu \dot{M}_\beta) + kh^{-(m+2)} B_1(t) \times \\ &\quad \times \Phi^{m-1} \left(M_\alpha - \frac{1}{2} M_\beta \right); \\ \dot{\kappa}_\beta &= \frac{12}{Eh^3} (\dot{M}_\beta - \nu \dot{M}_\alpha) + kh^{-(m+2)} B_1(t) \times \\ &\quad \times \Phi^{m-1} \left(M_\beta - \frac{1}{2} M_\alpha \right); \\ 2\dot{\tau} &= \frac{24(1-\nu)}{Eh^3} \dot{H} + 3kh^{-(m+2)} B_1(t) \Phi^{m-1} H. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Эти уравнения аналогичны по структуре общим уравнениям теории течения [см. гл. 4 т. 1 формулы (19)], что позволяет заимствовать методы решения, развитые в общей теории (гл. 4 т. 1). Приближенные уравнения неустановившейся ползучести оболочек, основанные на теории упрочнения и аналогичные по структуре общим уравнениям этой теории, предложены Ю. Н. Работновым [16].

Вариационный метод, основанный на теории упрочнения, развит в работе [27].

Ползучесть безмоментных оболочек

В безмоментной теории оболочек при статически определенном варианте краевых условий распределение усилий N_α , N_β , T может быть найдено из одних лишь уравнений равновесия, поэтому оно остается в силе также для ползущей оболочки. Очевидно, что в стадии неустановившейся ползучести перераспределение напряжений при этом не будет иметь места (если нагрузки постоянны). При известных усилиях скорости деформации срединной поверхности $\dot{\epsilon}_\alpha$, $\dot{\epsilon}_\beta$, $\dot{\gamma}$ сразу же определяются при помощи первых трех соотношений (47), в которых следует положить $M_\alpha = M_\beta = H = 0$. Вычисление перемещений по найденным деформациям осуществляют путем интегрирования зависимостей (14) гл. 20 т. 1. Случай статически определенной осесимметричной оболочки рассмотрен в работе [5].

Если краевые условия приводят к статически неопределимой задаче, то напряжения оказываются частично зависящими от свойств материала и могут быть найдены лишь после вычисления поля деформаций и скоростей.

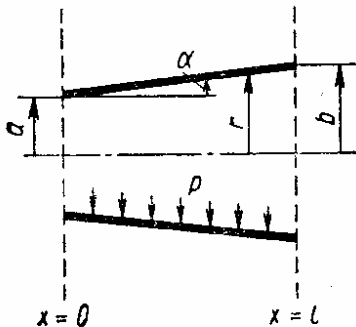


Рис. 11

Пример 6. Неустановившаяся безмоментная ползучесть тонкостенной конической трубы, нагруженной равномерным внутренним давлением p (рис. 11). Края оболочки закреплены: $u = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Принимая за независимую переменную текущий радиус r , из уравнений равновесия находим выражения для напряжений

$$\sigma_x = \frac{pr}{2h \cos \alpha} + \frac{M(t)}{rh}; \quad \sigma_\varphi = \frac{pr}{h \cos \alpha}, \quad (48)$$

где $M(t)$ — постоянная интегрирования, которую следует считать зависящей от времени.

Подставив значения напряжений (43) в общие уравнения неустановившейся ползучести [см. гл. 4 т. 1 формулы (19)], найдем меридианальную скорость деформации

$$\dot{\epsilon}_x = B_1(t) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{p^2 r^2}{h^2 \cos^2 \alpha} + \frac{M^2}{r^2 h^2} \right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{M}{rh} + \frac{1}{Erh} \cdot \frac{dM}{dt}. \quad (49)$$

Составляющая скорости \dot{u} связана с $\dot{\epsilon}_x$ зависимостью

$$\sin \alpha \frac{d\dot{u}}{dr} = \dot{\epsilon}_x.$$

Интегрируя это соотношение с учетом краевых условий и учитывая формулу (39), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dM}{dt} = -cB_1(t) M \int_a^b \left(\frac{3}{4} \frac{p^2 r^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{M^2}{r^2} \right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{dr}{r} \quad (50)$$

$$\left(c = \frac{E h^{1-m}}{\ln \frac{b}{a}} \right)$$

с начальным условием $M(0) = M_0 = -\frac{1-2\nu}{4} \cdot \frac{P}{\cos \alpha} \cdot \frac{b^2 - a^2}{\ln \frac{b}{a}}$, вытекающим из решения соответствующей упругой задачи.

В уравнении (50) переменные разделяются, поэтому оно легко интегрируется. Например, при $m = 1$

$$M = M_0 e^{-E \Omega_1(t)};$$

при $m = 3$

$$\frac{M^2 (3\rho^2 a^2 b^2 + 4M_0^2 \cos^2 \alpha)}{M_0^2 (3\rho^2 a^2 b^2 + 4M^2 \cos^2 \alpha)} = \exp \left[-\frac{3\rho^2 c (b^2 - a^2)}{4 \cos^2 \alpha} \Omega_1(t) \right],$$

где

$$\Omega_1(t) = \int_0^t B_1(t) dt.$$

Другие решения приведены в работах [6, 22].

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961.
2. Иванов Г. В. О соотношениях между скоростями деформации и усилиями, моментами при установившейся ползучести пластин и оболочек. МТТ, 1968, № 1.
3. Ивлёв Д. Д. К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочно-линейных условиях пластичности. «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», 1962, № 6.
4. Ильюшин А. А. Пластичность. М., Гостехиздат, 1948.
5. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
6. Киракосян Р. И. О ползучести сферической безмоментной оболочки. Изв. АН Армянской ССР. Серия физико-математических наук, 1963, 16, № 1.
7. Куратов П. С., Левченко А. И. Неустановившаяся ползучесть тонкостенных оболочек. Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Вып. 4, 1964.
8. Лепик Ю. Равновесие упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек. «Инженерный журнал», 1964, № 3.
9. Листрова Ю. П., Рудис М. А. Предельное равновесие торoidalной оболочки. «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», 1963, № 3.
10. Микеладзе М. Ш. Статика анизотропных пластичных оболочек. Тбилиси, 1963.
11. Немировский Ю. В., Работнов Ю. Н. Предельное равновесие подкрепленных цилиндрических оболочек. «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», 1963, № 3.
12. Онат Е. Предельное равновесие пологих конических оболочек «Механика», 1961, № 4.
13. Онат Е., Ямантюрк С. Температурные напряжения в упруго-пластических оболочках. Прикладная механика. Труды Америк. общ. инж.-механиков. Пер. с англ. М., ИЛ, 1962, 29, № 1.
14. Работнов Ю. Н. Приближенная техническая теория упруго-пластических оболочек. «Прикладная математика и механика», 1951, № 2.
15. Работнов Ю. Н. Осесимметричные задачи ползучести круговых цилиндрических оболочек. «Прикладная математика и механика», 1964, № 6.
16. Работнов Ю. Н. Неустановившаяся ползучесть оболочек. Тр. VI Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Баку, 1966.
17. Ржаницын А. Р. Расчет оболочек методом предельного равновесия. Сб. «Исследование по вопросам теории пластичности и прочности строительных конструкций». М., Госстройиздат, 1958.

18. Розенблюм В. И. Об условии пластичности для тонкостенных оболочек. «Прикладная математика и механика», 1960, № 2.
 19. Розенблюм В. И. О полной системе уравнений пластического равновесия тонкостенных оболочек. «Механика твердого тела», 1966, № 3.
 20. Розенблюм В. И. Приближенные уравнения ползучести тонкостенных оболочек. «Прикладная математика и механика», 1963, № 1.
 21. Розенблюм В. И. Приближенный анализ неустановившейся ползучести пластин и оболочек. Сб. «Исследования по упругости и пластичности», ЛГУ, 1964, № 3.
 22. Розенблюм В. И. О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек. «Прикладная механика и техническая физика», 1960, № 4.
 23. Розенблюм В. И. О приближенных уравнениях ползучести. «Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение», 1959, № 5.
 24. Савчук А. О теории анизотропных пластических оболочек и пластинок. «Механика», 1961, № 3.
 25. Стасенко И. В. Расчет на ползучесть тонкостенной трубы в зоне жесткого фланца. «Изв. МВО СССР. Сер. Машиностроение», 1962, № 8.
 26. Стасенко И. В. Осесимметричная задача установившейся ползучести цилиндрической оболочки. «Прикладная механика и техническая физика», 1962, № 6.
 27. Терегулов И. Г. Неустановившаяся ползучесть тонких пластин и оболочек при малых перемещениях. «Прикладная математика и механика», 1962, № 4.
 28. Ходж Ф. Г. Применение кусочно-линейной изотропной теории пластичности к задаче о круговой цилиндрической оболочке при симметричном радиальном нагружении. «Механика», 1958, № 2.
 29. Ходж Ф. Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. М., Машгиз, 1963.
 30. Bieniek M., Friendenthal A. Creep deformation and stresses in pressurized long cylindrical shells, I. Aerospace Sci., 1960. N 10.
 31. Calladine C., Drucker D. Nesting surfaces of constant rate of energy dissipation in creep. Quart. Appl. Mathem., 1962, 20, N 1.
 32. Eason G. The load-carrying capacities of cylindrical shells subjected to a ring of force, I. Mech. Phys. Solids, 1959, vol 7, N 3.
 33. Hodge P. G., Nardo S. V. Carrying capacity of an elasticplastic cylindrical shell with linear strain-hardening, I. Appl. Mech., 1958, N 1.
 34. Hodge P. G. Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells, N 1, 1963.
 35. Mroz Z., Bing-ye X. The load carrying capacities of Symmetrically loaded spherical shells, Arch. Mech. Stos., 1963, v. 15, N 2.
 36. Shield R. T. On the optimum design of shells, I. Appl., 1960, N 2, 316—322.
 37. Onat E., Yuksel N. On the Steady creep of shells, Proc. III U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1958.
 38. Penny R. K. Axisymmetric bending of the general shell of revolution during creep, I. Mech, Engng Sci., 1964, N 1.
-

Глава 4

РАСЧЕТ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УПРУГИХ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Рассмотрим наиболее важный для практики случай осесимметричной деформации оболочек вращения и круглых пластинок (расчет корпусов, сосудов высокого давления, днищ, дисков и т. п.). Учитываем действие внешних нагрузок и неравномерного нагрева. Для расчета в упруго-пластической области использован метод «переменных параметров упругости» [1].

ИЗОТРОПНЫЕ КРУГЛЫЕ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Для пластинки предполагаем справедливой гипотезу Кирхгофа—Лява о жесткой нормали. В соответствии с этим в пластинке выделяем некоторую основную поверхность, которая для обычной изотропной пластинки совпадает со срединной (рис. 1). Поверхность выбирают из условия

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z \, dz = 0. \quad (1)$$

Предполагаем, что до деформации основная поверхность достаточно пологая, так что

$$\cos \vartheta_0 \approx 1, \quad (2)$$

где ϑ_0 — угол между нормалью к основной поверхности и осью вращения до деформации.

Деформации в радиальном и окружном направлениях

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{du}{dr} + z \frac{d\vartheta}{dr}; \\ \epsilon_\varphi &= \frac{u}{r} + z \frac{\vartheta}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

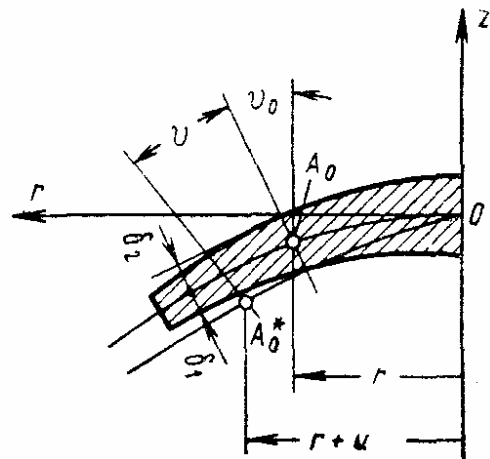


Рис. 1

где $u = u(r)$ — перемещения точек основной поверхности в направлении радиуса; $\vartheta = \vartheta(r)$ — угол поворота нормали к основной поверхности в результате деформации.

Уравнения упругости

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) + \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \nu \frac{\vartheta}{r} \right) - \\ &\quad - \frac{E(1+\nu)}{1-\nu^2} \alpha_0 t_0 - \frac{E(1+\nu)}{1-\nu^2} (\alpha t - \alpha_0 t_0); \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) + \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\vartheta}{r} + \nu \frac{d\vartheta}{dr} \right) - \\ &\quad - \frac{E(1+\nu)}{1-\nu^2} \alpha_0 t_0 - \frac{E(1+\nu)}{1-\nu^2} (\alpha t - \alpha_0 t_0). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В этих уравнениях E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона (последний предполагаем постоянным по толщине пластинки); αt — температурная деформация в данной точке пластинки.

Среднюю температурную деформацию $\alpha_0 t_0$ выбирают из соотношения

$$\alpha_0 t_0 = \frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha t dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz}. \quad (5)$$

Радиальные и окружные усилия и моменты, отнесенные к единице длины сечения основной поверхности (рис. 2):

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sigma_r dz; & N_\varphi &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sigma_\varphi dz; \\ M_r &= - \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sigma_r z dz; & M_\varphi &= - \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \sigma_\varphi z dz. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения равновесия для элемента пластинки (рис. 2)

$$-\frac{d(N_r r)}{dr} - N_\varphi + q_r r = 0; \quad (7)$$

$$\frac{d(Qr)}{dr} + \frac{d}{dr} [N_r r (\vartheta_0 + \vartheta)] + q_z r = 0; \quad (8)$$

$$\frac{d(M_r r)}{dr} - M_\varphi - Qr = 0. \quad (9)$$

В уравнении (7) влиянием перерезывающей силы Q пренебрегаем.

Дифференциальные уравнения растяжения и изгиба диска. Из уравнений (7), (9) с учетом выражений (4) и (6) могут быть получены следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dr} [rAu' + \nu Au] - \nu Au' - A \frac{1}{r} u = -q_r r + r \frac{dT}{dr}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [rD\vartheta' + \nu D\vartheta] - \nu D\vartheta' - D \frac{1}{r} \vartheta - \vartheta_0 (rAu' + \nu Au) = \\ = \int_a^r q_z r dr + r \frac{dS}{dr} - r\vartheta_0 T - a(Q_a + \vartheta_{0a} N_{ra}). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь A , D — цилиндрические жесткие пластинки на растяжение и изгиб соответственно

$$A = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz; \quad D = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz; \quad (12)$$

T , S — упруго-температурные величины.

$$T = \frac{\alpha_0 t_0}{1-\nu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz, \quad S = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha t z dz. \quad (13)$$

Из уравнений (10) и (11) следует, что при выборе основной поверхности в соответствии с выражением (1) задача о растяжении пластинки

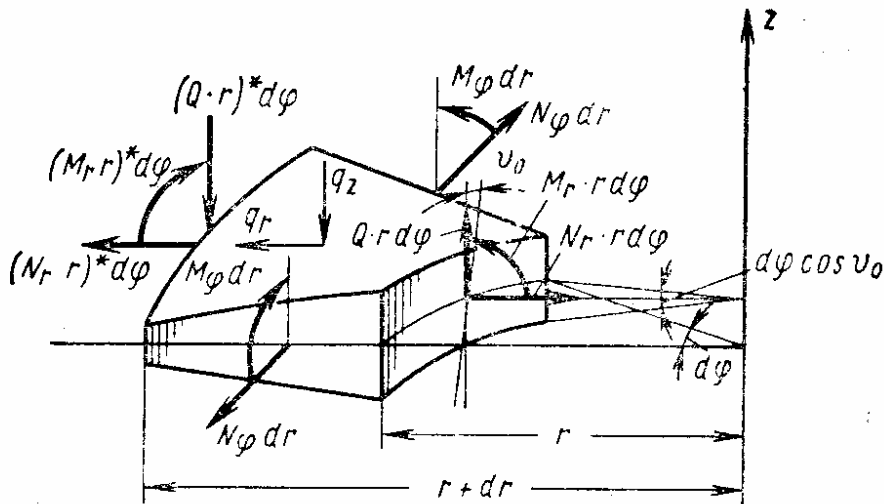


Рис. 2

может быть решена независимо от задачи изгиба. Определение напряжений растяжения в круглой пластинке переменной толщины изложено в гл. 17 т. 1. Уравнение (11) описывает изгиб пластинки с учетом усилий в основной поверхности N_r и N_ϕ , которые становятся известными после решения задачи о растяжении пластинки.

Интегральные уравнения изгиба диска с учетом влияния сил в основной поверхности. Для расчета удобно использовать интегральное уравнение изгиба, которое получается после некоторых преобразований из уравнений равновесия и деформаций:

$$M_r = LM_r + \vartheta_a F_1 + M_{ra} F_2 + F_q + F_t \quad (14)$$

В уравнении (14) интегральный оператор

$$LM_r = - \int_a^r \frac{1-\nu}{r} M_r dr + \int_a^r \left[\frac{D(1-\nu^2)}{r^2 \chi} + \frac{N_r}{\chi} \right] \int_a^{r_1} \frac{\chi}{D} M_r dr_1 dr, \quad (15)$$

функции при начальных параметрах ϑ_a и M_{ra} и функции, зависящие от нагрузки и температуры, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= - \int_a^r \left[\frac{D(1-\nu^2)}{r^2 \chi} + \frac{N_r}{\chi} \right] dr + a N_{ra} \ln \frac{r}{a}; \quad F_2 = 1; \\ F_q &= \int_a^r Q^* dr; \quad F_t = \int_a^r \left[\frac{1}{r} + \frac{N_{rr}}{D(1-\nu^2)} \right] \Psi_t dr - \\ &\quad - \int_a^r N_{rr} \frac{1}{D(1+\nu)} S dr, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q^* &= \frac{1}{r} a Q_a - \frac{1}{r} \int_a^r q_z r dr - N_r \vartheta_0 + N_{ra} \vartheta_{0a} \frac{a}{r}; \\ \Psi_t &= - \frac{D(1-\nu^2)}{r \chi} \left(\int_a^r \frac{1}{D} \chi S dr - r \frac{1}{D} \cdot \frac{\chi}{1+\nu} S \right); \\ \chi &= \left(\frac{r}{a} \right)^\nu. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Перерезывающая сила в сечении

$$Q = Q^* - N_r \vartheta + N_{ra} \vartheta_a \frac{a}{r}. \quad (18)$$

Решение уравнения (14)

$$M_r = \Phi_1 \vartheta_a + \Phi_2 M_{ra} + \Phi_q + \Phi_t, \quad (19)$$

где Φ_1, Φ_2 — фундаментальные функции при начальных параметрах, и частные решения Φ_q и Φ_t могут быть определены методом последовательных приближений [2].

Положив в выражениях (15)–(18) $N_r = 0$, получаем решение обычной задачи изгиба пластинки без учета влияния сил в основной поверхности.

Определение момента M_φ . Если величина M_r (уравнение (19)) известна, то момент M_φ определяют из равенства

$$M_\varphi = \nu M_r + \frac{D(1-\nu^2)}{r\chi} \int_a^r \frac{\chi M_r}{D} dr + \Psi_t - \frac{D(1-\nu^2)}{r\chi} \vartheta_a. \quad (20)$$

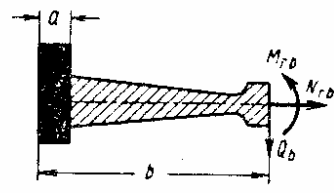
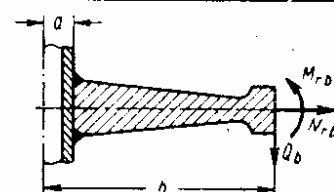
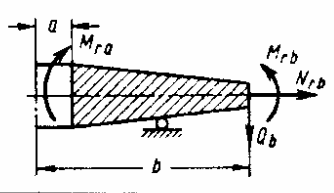
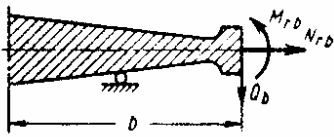
Параметры деформации находят из формул

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{1}{D(1-\nu^2)} (M_r - \nu M_\varphi) + \frac{1}{(1+\nu)D} S; \quad (21)$$

$$\frac{\vartheta}{r} = -\frac{1}{D(1-\nu^2)} (M_\varphi - \nu M_r) + \frac{1}{(1+\nu)D} S. \quad (22)$$

Краевые условия, часто встречающиеся при расчете круглых пластинок переменной толщины, показаны в табл. 1.

1. Краевые условия при расчете на изгиб круглой пластинки

Условия закрепления	Краевые условия, значения начальных параметров
 <p>Жесткая заделка</p>	$\vartheta_a = 0; \quad M_r(b) = M_{rb};$ $M_{ra} = \frac{1}{\Phi_2(b)} [M_{rb} - \Phi_q(b) - \Phi_t(b)]$
 <p>Упругая заделка</p>	$\vartheta_a = \lambda M_{ra};$ $M_{ra} = \frac{1}{\lambda \Phi_1(b) + \Phi_2(b)} [M_{rb} - \Phi_q(b) - \Phi_t(b)];$ <p>λ — коэффициент податливости упругой заделки</p>
	$M_r(a) = M_{ra};$ $\vartheta_a = \frac{1}{\Phi_1(b)} [M_{rb} - \Phi_q(b) - \Phi_t(b)] - M_{ra} \Phi_2(b)]$
	<p>На малом радиусе a ($a \approx 0,1b$)</p> $M_{ra} = M_{\varphi a};$ $\vartheta_a = -\frac{a}{D_a(1+\nu_a)} M_{ra} + \frac{S_a}{(1+\nu_a)D_a};$ $M_r(b) = M_{rb}$

Напряжения растяжения и изгиба в пластинке

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{A} N_r - z \frac{1}{D} M_r + \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) (\alpha_0 t_0 - \alpha t) + z \frac{1}{D} S \right\}; \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{A} N_\varphi - z \frac{1}{D} M_\varphi + \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) (\alpha_0 t_0 - \alpha t) + z \frac{1}{D} S \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

или в развернутой форме

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= E \left\{ \frac{N_r}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz} - z \frac{M_r}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz} + \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha t dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z \frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha z dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz} - \alpha t \right] \right\}; \\ \sigma_\varphi &= E \left\{ \frac{N_\varphi}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz} - z \frac{M_\varphi}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz} + \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha t z dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z \frac{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha z dz}{\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz} - \alpha t \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (23a)$$

В этих равенствах вторые группы членов выражают температурные напряжения вследствие неравномерного нагрева по толщине пластинки.

Расчет в упруго-пластической области проводят методом последовательных приближений. В первом приближении находят напряжения

и деформации в упругой области [решение уравнения (15)], определяют в каждом сечении значения интенсивности напряжений (при этом сечение разбивают на ряд точек)

$$\sigma_i^* = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi} \quad (24)$$

и интенсивности деформаций

$$\varepsilon_i^* = \frac{\sigma_i^*}{E} \quad (25)$$

(коэффициент Пуассона обычно принимают $\nu = 0,5$). Далее по кривой деформирования (рис. 3) находят значение интенсивности напряжений σ_i , соответствующее деформации ε_i^* , и вычисляют значения секущего модуля

$$E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i^*}. \quad (26)$$

Значения секущего модуля в каждой точке сечения принимают в качестве исходного «переменного модуля упругости» для расчета следующего приближения и т. д.

Некоторые особенности программирования задачи на ЭЦВМ. В качестве исходного числового материала для расчета задают следующие величины:

- 1) число точек разбиения по радиусу и по толщине пластинки (расчетные сечения следует располагать более часто в местах резкого изменения толщины пластинки, а также у внутреннего и наружного краев);
- 2) радиусы расчетных сечений r , толщины пластинки $h(r)$;
- 3) характеристики материала: параметры упругости E , ν и удельный вес (при определении напряжений от центробежной нагрузки);
- 4) кривые деформирования материала пластинки (используют обычно реальные кривые деформирования, которые задают таблично, и промежуточные значения определяют линейной интерполяцией);
- 5) параметры нагрузки (температуры, давления, окружная скорость);
- 6) краевые условия;
- 7) величины допускаемых абсолютных или относительных погрешностей расчета (допускаемые погрешности при определении фундаментальных функций и допускаемые погрешности при упруго-пластическом расчете по кривым деформирования). Метод последовательных приближений удобен для расчета на ЭЦВМ, так как сам процесс может быть оформлен в виде цикла.

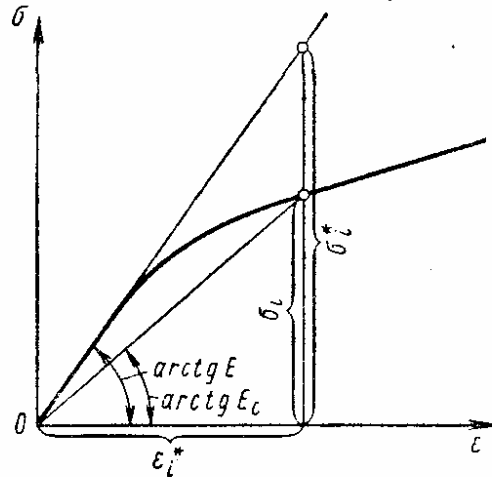


Рис. 3

КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫЕ КРУГЛЫЕ ПЛАСТИНКИ

Для конструктивно-ортотропной пластинки (рис. 4) предполагается справедливой гипотеза Кирхгофа—Лява, вследствие чего относительные деформации описываются равенствами (3). В уравнениях равновесия

влиянием перерезывающей силы на распределение нормальных усилий, как и в случае изотропной пластинки, пренебрегаем.

Уравнения упругости имеют следующий вид:

$$\sigma_r = \begin{cases} \frac{E}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} (\varepsilon_r + k_\varphi \nu \varepsilon_\varphi) - \frac{E (1 + k_\varphi \nu)}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} \alpha t; & k_r \neq 0 \\ 0 & k_r = 0 \end{cases}; \quad (27)$$

$$\sigma_\varphi = \begin{cases} \frac{E}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} (\varepsilon_\varphi + k_r \nu \varepsilon_r) - \frac{E (1 - k_r \nu)}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} \alpha t; & k_\varphi \neq 0 \\ 0 & k_\varphi = 0 \end{cases}. \quad (28)$$

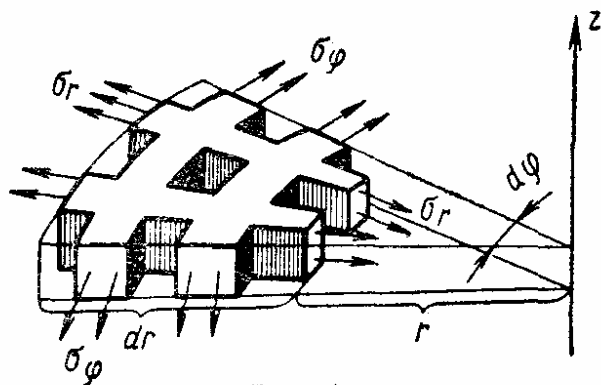


Рис. 4

В этих выражениях безразмерные величины k_r , k_φ представляют собой коэффициенты заполнения (у пластинки с радиальными ребрами в среднем слое $k_r \neq 0$, $k_\varphi = 0$, при наличии только окружных ребер $k_r = 0$, $k_\varphi \neq 0$; для сплошной изотропной пластинки $k_r = 1$, $k_\varphi = 1$). Система основных дифференциальных уравнений (12)–(13) для конструктивно-ортотропной пластинки

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dr} [r f_{1r} u' + f_2 u + r f_{3r} \vartheta' + f_4 \vartheta] - f_2 u' - f_{1\varphi} \frac{u}{r} - \\ & - f_4 \vartheta' - f_{3\varphi} \frac{\vartheta}{r} = -q_r r + \frac{d}{dr} [r (T_{1r} + S_{1r})] - (T_{1\varphi} + S_{1\varphi}); \\ & \frac{d}{dr} [r f_{3r} u' + f_4 u + r f_{5r} \vartheta' + f_6 \vartheta] - (f_4 + r \vartheta_0 f_{1r}) u' - \\ & - \left(\frac{f_{3\varphi}}{r} + \vartheta_0 f_2 \right) u - (f_6 + r \vartheta_0 f_{3r}) \vartheta' - \left(\frac{f_{5\varphi}}{r} + \vartheta_0 f_4 \right) \vartheta = \\ & = \int_a^r q_z r dr + \frac{d}{dr} [r (T_{2r} + S_{2r})] - (T_{2\varphi} + S_{2\varphi}) - \\ & - r \vartheta_0 (T_{1r} + S_{1r}) - a (Q_a + \vartheta_{0a} N_{ra}). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

В этих уравнениях упруго-геометрические характеристики сечения будут

$$\begin{aligned} f_{1r} &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E k_r}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} dz; & f_2 &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\nu E k_r k_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} dz; \\ f_{3r} &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E k_r}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} z dz; & f_4 &= \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\nu E k_r k_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} z dz; \end{aligned}$$

$$f_{5r} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_r}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} z^2 dz; \quad f_{6r} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\nu Ek_r k_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} z^2 dz;$$

$$f_{1\varphi} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} dz; \quad f_{3\varphi} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} z dz;$$

$$f_{5\varphi} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{Ek_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} z^2 dz.$$

Для температурных величин введены обозначения:

$$T_{1r} = \alpha_0 t_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1 + k_\varphi \nu) k_r}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} dz; \quad T_{1\varphi} = \alpha_0 t_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1 + k_r \nu) k_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} dz;$$

$$T_{2r} = \alpha_0 t_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1 + k_\varphi \nu) k_r}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} z dz; \quad T_{2\varphi} = \alpha_0 t_0 \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1 + k_r \nu) k_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} z dz;$$

$$S_{1r} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1 + k_\varphi \nu) k_r}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} (\alpha t - \alpha_0 t_0) dz;$$

$$S_{1\varphi} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1 + k_r \nu) k_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} (\alpha t - \alpha_0 t_0) dz;$$

$$S_{2r} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1 + k_\varphi \nu) k_r}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} (\alpha t - \alpha_0 t_0) z dz;$$

$$S_{2\varphi} = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{E(1 + k_r \nu) k_\varphi}{1 - k_r k_\varphi \nu^2} (\alpha t - \alpha_0 t_0) z dz.$$

Уравнение (29) в матричной форме

$$\frac{d}{dr} (CV) + \frac{d}{dr} (rG_r V') - \left(\frac{1}{r} G_\varphi + \vartheta_0 K \right) V -$$

$$- (C + r\vartheta_0 P) V' + S_q + S_t = 0; \quad (30)$$

здесь V , V' — столбцы неизвестных u , ϑ и их первых производных:

$$V = \begin{bmatrix} u \\ \vartheta \end{bmatrix}; \quad V' = \begin{bmatrix} u' \\ \vartheta' \end{bmatrix};$$

G, G_r, G_φ, K, P — матрицы второго порядка:

$$C = \begin{bmatrix} f_2 f_4 \\ f_4 f_6 \end{bmatrix}; \quad G_i = \begin{bmatrix} f_{1i} f_{3i} \\ f_{3i} f_{5i} \end{bmatrix} \quad (i = r, \varphi);$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 f_4 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{1r} f_{3r} \end{bmatrix}$$

— столбцы распределенной нагрузки и температурных членов S_q и S_t составлены из правых частей уравнений (29). Уравнение (25) преобразуем в матричное интегральное уравнение, причем за основные неизвестные выбираем столбец V' :

$$V = \int_a^r V' dr + V(a). \quad (31)$$

Интегральное уравнение ортотропной пластинки

$$V' = \frac{1}{r} G_r^{-1} [LV' + F_1 V(a) + F_2 V'(a) + F_q + F_t], \quad (32)$$

где G_r^{-1} — обратная матрица;

$$LV' = -C \int_a^r V' dr + \int_a^r \left(\frac{1}{r} G_\varphi + \vartheta_0 K \right) \int_a^r V' dr_1 dr + \\ + \int_a^r (C + r \vartheta_0 P) V' dr;$$

$$F_1 = -C + \int_a^r \left(\frac{1}{r} G_\varphi + \vartheta_0 K \right) dr + C(a); \quad F_2 = a G_r(a) -$$

функции при начальных параметрах;

$$F_q = \int_a^r S_q dr; \quad F_t = \int_a^r S_t dr -$$

функции, зависящие от температуры и от нагрузки.

Вследствие линейности уравнения (32) его решение можно представить в виде

$$V^{(1)} = \Phi_1 V(a) + \Phi_2 V'(a) + \Phi_q + \Phi_t, \quad (33)$$

где Φ_1 и Φ_2 — матрицы фундаментальных функций и Φ_q, Φ_t — столбцы частных решений отвечающих нулевым начальным условиям. Фундаментальные функции могут быть определены методом последовательных приближений (см. стр. 139).

Начальные параметры $V(a)$ и $V'(a)$ определяют из краевых условий при $r = a$ и $r = b$.

Учет деформации сдвига. Практически важный частный случай конструктивно-ортотропных пластинок представляют собой трех-слойные пластинки с изотропными наружными (несущими) слоями 1 и 2 (рис. 5). Средний слой 3 является ортотропным и представляет собой систему связей между несущими слоями (часто поставленные радиальные и окружные ребра или точечные связи). Радиальное перемещение среднего слоя u_c предполагается линейно изменяющимся по толщине слоя. Деформацией среднего слоя в направлении нормали пренебрегают, и прогибы слоев

$$w_1 = w_2 = w_c = w. \quad (34)$$

Углы поворота нормалей к срединным поверхностям несущих слоев

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta. \quad (35)$$

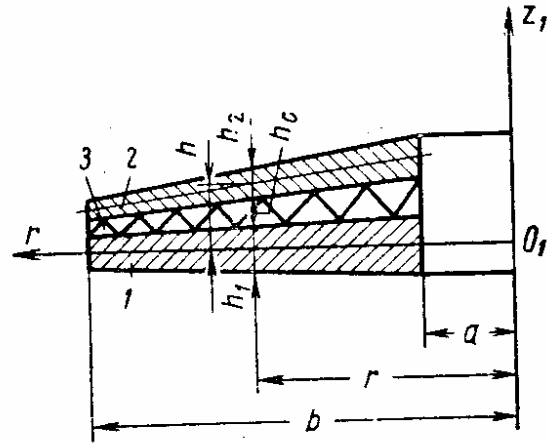


Рис. 5

В соответствии с принятыми гипотезами радиальные перемещения

$$\left. \begin{aligned} u_c &= u_1 + \vartheta z_1 + \gamma \left(z_1 - \frac{1}{2} h_1 \right); \\ u_2 &= u_1 + \vartheta h + \gamma h_c, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где $u_1 = u_1(r)$ — радиальное перемещение срединной поверхности несущего слоя; z_1 — координата, отсчитываемая от этой поверхности в направлении оси пластинки; $\gamma = \gamma(r)$ — угол сдвига в меридиональном сечении среднего слоя пластинки; $h = h(r)$ — расстояние между срединными поверхностями несущих слоев; $h_c = h_c(r)$ — толщина срединного слоя; $h_1 = h_1(r)$ — толщина первого несущего слоя.

Деформации слоев в радиальном и окружном направлениях:
для несущих слоев

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ri} &= \frac{du_i}{dr} + \frac{d\vartheta_i}{dr} z_i; \\ \varepsilon_{\varphi i} &= \frac{u_i}{r} + \frac{\vartheta}{r} z_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2); \quad (37)$$

для срединного слоя

$$\varepsilon_{rc} = \frac{du_c}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi c} = \frac{u_c}{r}. \quad (38)$$

Уравнения упругости:
для несущих слоев

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ri} &= \frac{E}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{ri} + \nu_i \varepsilon_{\varphi i}) - \frac{E(1 + \nu_i)}{1 - \nu_i^2} \alpha_i t_i; \\ \sigma_{\varphi i} &= \frac{E}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{\varphi i} + \nu_i \varepsilon_{ri}) - \frac{E(1 + \nu_i)}{1 - \nu_i^2} \alpha_i t_i; \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2); \quad (39)$$

для среднего ортотропного слоя

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rc} &= \frac{E_r}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} \varepsilon_{rc} + \nu_{r\varphi} \frac{E_r}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} \varepsilon_{\varphi c} - \\ &\quad - \frac{E_r}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} \alpha_{rc} t_c - \nu_{r\varphi} \frac{E_r}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} \alpha_{\varphi c} t_c; \\ \sigma_{\varphi c} &= \frac{E_{\varphi}}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} \varepsilon_{\varphi c} + \nu_{\varphi r} \frac{E_{\varphi}}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} \varepsilon_{rc} - \\ &\quad - \frac{E_{\varphi}}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} \alpha_{\varphi c} t_c - \nu_{\varphi r} \frac{E_{\varphi}}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}} \alpha_{rc} t_c; \\ \tau &= G_c \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где E_r, E_{φ} — модули упругости по направлениям r и φ соответственно; G_c — модуль сдвига среднего слоя в меридиональной плоскости; $\nu_{r\varphi}, \nu_{\varphi r}$ — коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление деформации, второй — направление действия усилий).

Основные дифференциальные уравнения, соответствующие принятой схеме деформации, можно получить из вариационного уравнения Лагранжа

$$\delta \Pi = 0, \quad (41)$$

где $\delta \Pi$ — вариация полной потенциальной энергии Π пластинки, равной сумме потенциальных энергий деформации слоев P_1, P_2, P_c и потенциала внешних усилий A , включающих распределенную поперечную нагрузку, центробежные усилия и нагрузки на внешних контурах

$$\Pi = P_1 + P_2 + P_c + A. \quad (42)$$

Величины P_1, P_2, P_c определяют по формулам

$$P_i = \int_a^b \int_{-h_i/2}^{h_i/2} 2\pi r a_i dz_i dr \quad (i = 1, 2); \quad (43)$$

$$P_c = \int_a^b \int_0^{h_c} 2\pi r a_c dz_c dr, \quad (44)$$

где удельные энергии деформации слоев

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ri} \sigma_{ri} + \varepsilon_{\varphi i} \sigma_{\varphi i}); \\ a_c &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{rc} \sigma_{rc} + \varepsilon_{\varphi c} \sigma_{\varphi c}) + \frac{1}{2} G_c \gamma^2. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Полная потенциальная энергия системы с учетом формул (43)—(45) представляет собой функционал

$$\Pi = \int_a^b \Theta dr - T,$$

где T — потенциал краевых усилий; Θ — функция независимых перемещений, выбранных за основные неизвестные.

За основные неизвестные могут быть выбраны величины u_1 , ϑ и γ .

Уравнения Эйлера для функционала Π образуют систему разрезающих дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_1} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u_1'} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta'} \right) - Q(r) = 0;$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \gamma'} \right) = 0,$$

где $Q(r)$ — распределенные по окружности перерезывающие усилия в цилиндрическом сечении на радиусе r .

В развернутом виде уравнения приведены в работе [4].

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Основные уравнения. При расчете используют гипотезу Кирхгофа—Лява о жесткой нормали [3, 6].

В соответствии с этой гипотезой рассматриваем основную поверхность, которая для обычной изотропной оболочки совпадает со средин-

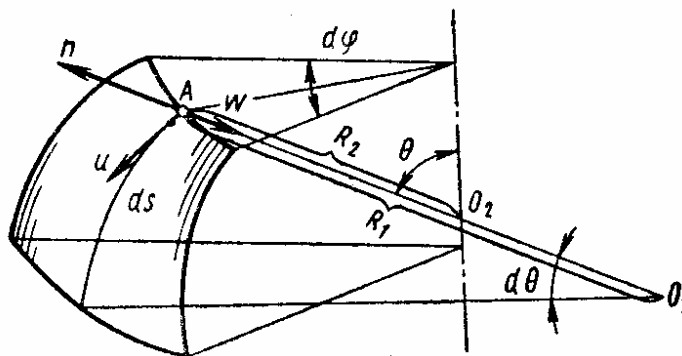


Рис. 6

ной. Элемент основной поверхности и его радиусы кривизны показаны на рис. 6.

Основную поверхность выбирают из условия

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z dz = 0, \quad (46)$$

где E — модуль упругости; δ_1 , δ_2 — расстояния от срединной поверхности до наружных поверхностей оболочки.

Деформации оболочки в основной поверхности вдоль дуги меридиана и в окружном направлении

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta}^{(0)} &= \frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1}; \\ \varepsilon_{\varphi}^{(0)} &= (u \operatorname{ctg} \theta - w) \frac{1}{R_2}, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где u — перемещение точки основной поверхности по касательной к меридиональной кривой; w — перемещение по нормали (положительное направление соответствует перемещению к оси оболочки).

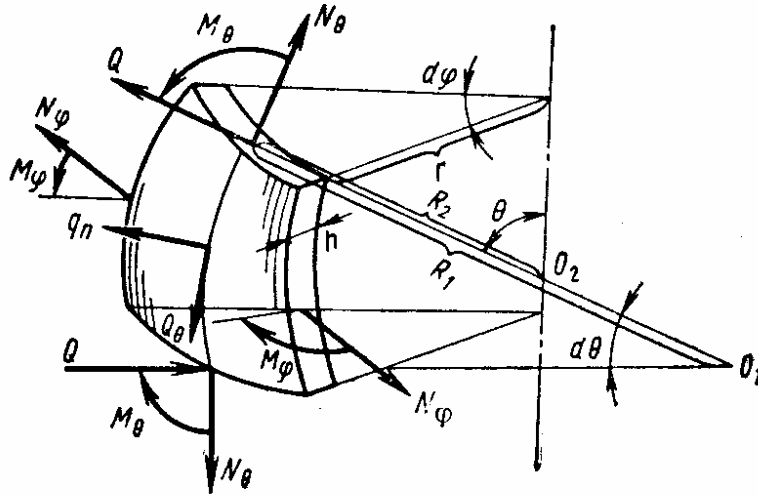


Рис. 7

Угол поворота нормали (в сторону увеличения угла θ)

$$\vartheta = \frac{u}{R_1} + \frac{dw}{ds}. \quad (48)$$

Деформации в слое, отстоящем на расстоянии z в сторону внешней нормали,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1} + z \frac{d\vartheta}{ds}; \\ \varepsilon_{\varphi} &= (u \operatorname{ctg} \theta - w) \frac{1}{R_2} + z \operatorname{ctg} \theta \frac{\vartheta}{R_2}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Условия равновесия элемента оболочки

$$\frac{d(Qr)}{ds} + N_{\theta} \frac{r}{R_1} + N_{\varphi} \sin \theta - q_n r = 0; \quad (50)$$

$$\frac{d(N_{\theta} r)}{ds} - N_{\varphi} \cos \theta - Q \frac{r}{R_1} + q_{\theta} r = 0; \quad (51)$$

$$\frac{d(M_{\theta} r)}{ds} - M_{\varphi} \cos \theta - Qr = 0. \quad (52)$$

Силловые факторы (на единицу длины сечения оболочки) и внешние распределенные нагрузки показаны на рис. 7.

Уравнения упругости оболочки

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta - w) + \right. \\ &\quad \left. + z \left(\frac{d\vartheta}{ds} + \nu \operatorname{ctg} \theta \frac{\vartheta}{R_2} \right) \right] - \frac{E}{1-\nu} \alpha t; \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta - w) + \nu \left(\frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + z \left(\frac{\vartheta}{R_2} \operatorname{ctg} \theta + \nu \frac{d\vartheta}{ds} \right) \right] - \frac{E}{1-\nu} \alpha t, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где σ_{θ} , σ_{φ} — напряжения в слое, отстоящем на расстоянии z от основной поверхности; ν — коэффициент Пуассона; αt — температурная деформация.

Интегрируя соотношения (53) по толщине оболочки, считая $\nu = \text{const}$, получим следующие равенства для силловых факторов:

$$N_{\theta} = \frac{A}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta - w) \right] - T_1; \quad (54)$$

$$N_{\varphi} = \frac{A}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta - w) + \nu \left(\frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1} \right) \right] - T_1; \quad (55)$$

$$M_{\theta} = -D \left[\frac{d\vartheta}{ds} + \nu \operatorname{ctg} \theta \frac{\vartheta}{R_2} \right] + T_2; \quad (56)$$

$$M_{\varphi} = -D \left[\operatorname{ctg} \theta \frac{\vartheta}{R_2} + \nu \frac{d\vartheta}{ds} \right] + T_2, \quad (57)$$

где A — жесткость на растяжение;

$$A = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E dz; \quad (58)$$

D — цилиндрическая жесткость на изгиб

$$D = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E z^2 dz. \quad (59)$$

Температурные функции

$$T_1 = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha t dz; \quad (60)$$

$$T_2 = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} E \alpha t z dz. \quad (61)$$

Система разрешающих дифференциальных уравнений. В качестве основных неизвестных функций выбирают угол поворота нормали ϑ [формула (48)] и величину, связанную с перерезывающей силой,

$$\eta = R_2 Q. \quad (62)$$

Разрешающие уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{R_2}{A} \cdot \frac{d\eta}{ds} \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\nu \operatorname{ctg} \theta}{A} \eta \right) + \left(\nu + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{A} \cdot \frac{d\eta}{ds} - \\ - \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{R_2} \left(1 + \nu \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{1}{A} \eta - \vartheta = \Psi_{1q} + \Psi_{1t}; \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(R_2 D \frac{d\vartheta}{ds} \sin \theta \right) + \frac{d}{ds} (\nu D \vartheta \cos \theta) - \nu D \frac{d\vartheta}{ds} \cos \theta - \\ - \frac{D \operatorname{ctg} \theta \cos \theta}{R_2} \vartheta + \eta \sin \theta = \Psi_{2q} + \Psi_{2t}, \end{aligned} \quad (64)$$

где функции, зависящие от внешней нагрузки и температуры,

$$\begin{aligned} \Psi_{1q} = - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{A} \left\{ \left[\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} + \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \right] \frac{P}{2\pi \sin^2 \theta} - \right. \\ \left. - \left(\nu R_2 + \frac{R_2^2}{R_1} \right) q_n \right\} - \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \frac{R_2 P}{2\pi \sin^2 \theta A} - \frac{R_2^2}{A} q_n \right]; \end{aligned} \quad (65)$$

$$\Psi_{1t} = - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{A} T_1 \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) (1 - \nu) + \frac{d}{ds} \left[\frac{T_1 R_2}{A} (1 - \nu) \right]; \quad (66)$$

$$\Psi_{2q} = 0; \quad (67)$$

$$\Psi_{2t} = \frac{d}{ds} (R_2 T_2 \sin \theta) - T_2 \cos \theta. \quad (68)$$

В последних равенствах P — равнодействующая внешних усилий, приложенных к рассматриваемой части оболочки.

Если известны функции η и ϑ , то усилия в срединной поверхности определяют из соотношений

$$N_\theta = - \eta \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} + \frac{P}{2\pi R_2 \sin^2 \theta}; \quad (69)$$

$$N_\varphi = - \eta' - \frac{P}{2\pi R_1 \sin^2 \theta} + q_n R_2; \quad (70)$$

$$Q = \frac{1}{R_2} \eta. \quad (71)$$

Величины M_θ и M_φ находятся из равенства (56) и (57).

Интегральные уравнения. Для построения простого алгоритма расчета, удобного для программирования и вычислений, проводится двукратное интегрирование уравнений (63) и (64). Учитывая равенства

$$\eta(s) = \int_a^s \eta'(s_1) ds_1 + \eta(a); \quad \vartheta(s) = \int_a^s \vartheta'(s_1) ds_1 + \vartheta(a), \quad (72)$$

где a — значение дуги s для начального сечения, получим интегральные уравнения [1] относительно функций $\eta'(s)$ и $\vartheta'(s)$:

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= L_{11}\eta' + L_{12}\vartheta' + \eta(a)F_{11} + \eta'(a)F_{12} + \vartheta(a)F_{13} + \\ &\quad + \vartheta'(a)F_{14} + F_{1q} + F_{1t}; \\ \vartheta' &= L_{21}\eta' + L_{22}\vartheta' + \eta(a)F_{21} + \eta'(a)F_{22} + \vartheta(a)F_{23} + \\ &\quad + \vartheta'(a)F_{24} + F_{2q} + F_{2t}, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11}\eta' &= \frac{A(s)}{R_2(s)} \left[\int_a^s \left(1 + \nu(s_1) \frac{R_2(s_1)}{R_1(s_1)} \right) \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta(s_1)}{R_2(s) A(s_1)} \int_a^{s_1} \eta'(s_2) ds_2 ds_1 + \right. \\ &\quad + \frac{\nu(s) \operatorname{ctg} \theta(s)}{A(s)} \int_a^s \eta'(s_1) ds_1 - \int_a^s \left(\nu(s_1) + \frac{R_2(s_1)}{R_1(s_1)} \right) \times \\ &\quad \left. \times \frac{\operatorname{ctg} \theta(s_1)}{A(s_1)} \eta'(s_1) ds_1 \right]; \end{aligned} \quad (74)$$

$$L_{12}\vartheta' = \frac{A(s)}{R_2(s)} \int_a^s \int_a^{s_1} \vartheta'(s_2) ds_2 ds_1; \quad (75)$$

$$L_{21}\eta' = -\frac{1}{D(s) R_2(s) \sin \theta(s)} \int_a^s \sin \theta(s_1) \int_a^{s_1} \eta'(s_2) ds_2 ds_1; \quad (76)$$

$$\begin{aligned} L_{22}\vartheta' &= \frac{1}{D(s) R_2(s) \sin \theta(s)} \left[\int_a^s D(s_1) \operatorname{ctg} \theta(s_1) \cos \theta(s_1) \frac{1}{R_2(s)} \times \right. \\ &\quad \times \int_a^{s_1} \vartheta'(s_2) ds_2 ds_1 + \int_a^s D(s_1) \nu(s_1) \vartheta'(s_1) \cos \theta(s_1) ds_1 - \\ &\quad \left. - D(s) \nu(s) \cos \theta(s) \int_a^s \vartheta'(s_1) ds_1 \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

Функции при начальных параметрах определяются следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned}
 F_{11} &= \frac{A(s)}{R_2(s)} \left[\int_0^s \left(1 + \nu(s_1) \frac{R_2(s_1)}{R_1(s_1)} \right) \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta(s_1)}{R_2(s_1) A(s_1)} ds_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu(s) \operatorname{ctg} \theta(s)}{A(s)} - \frac{\nu_a \operatorname{ctg} \theta_a}{A_a} \right]; \quad F_{12} = \frac{A(s)}{R_2(s)} \cdot \frac{R_{2a}}{A_a}; \\
 F_{13} &= \frac{A(s)}{R_2(s)} (s - a); \quad F_{14} = 0; \\
 F_{21} &= - \frac{1}{D(s) R_2(s) \sin \theta(s)} \int_a^s \sin \theta(s_1) ds_1; \quad F_{22} = 0; \\
 F_{23} &= \frac{1}{D(s) R_2(s) \sin \theta(s)} \left[\int_a^s D(s_1) \operatorname{ctg} \theta(s_1) \cos \theta(s_1) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{1}{R_2(s_1)} ds_1 - D(s) \nu(s) \cos \theta(s) + D_a \nu_a \cos \theta_a \right]; \\
 F_{24} &= \frac{D_a F_{2a} \sin \theta_a}{D(s) R_2(s) \sin \theta(s)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Функции внешней нагрузки и нагрева

$$F_{1q} = \frac{A(s)}{R_2(s)} \int_a^s \Psi_{1q}(s_1) ds_1; \quad F_{2q} = 0; \quad (79)$$

$$F_{1t} = \frac{A(s)}{R_2(s)} \int_a^s \Psi_{1t}(s_1) ds_1;$$

$$F_{2t} = \frac{1}{D(s) R_2(s) \sin \theta(s)} \int_a^s \Psi_{2t}(s_1) ds_1. \quad (80)$$

Решение системы уравнений (78) можно представить в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned}
 \eta' &= \eta(a) \Phi_{11} + \eta'(a) \Phi_{12} + \vartheta(a) \Phi_{13} + \vartheta'(a) \Phi_{14} + \\
 &\quad + \Phi_{1q} + \Phi_{1t}; \\
 \vartheta' &= \eta(a) \Phi_{21} + \eta'(a) \Phi_{22} + \vartheta(a) \Phi_{23} + \vartheta'(a) \Phi_{24} + \\
 &\quad + \Phi_{2q} + \Phi_{2t}.
 \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Функции Φ_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, q, t$), входящие в эти равенства, будем называть фундаментальными.

Для определения фундаментальных функций Φ_{1j} и Φ_{2j} решается система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= L_{11}\eta' + L_{12}\vartheta' + F_{1j}; \\ \vartheta' &= L_{21}\eta' + L_{22}\vartheta' + F_{2j}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

При использовании метода последовательных приближений расчет ведут по схеме

$$\left. \begin{aligned} \eta'_{(n+1)} &= L_{11}\eta'_{(n)} + L_{12}\vartheta'_{(n)} + F_{1j}; \\ \vartheta'_{(n+1)} &= L_{21}\eta'_{(n)} + L_{22}\vartheta'_{(n)} + F_{2j}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

где индексы n и $n + 1$ указывают соответствующие приближения. Принимая исходное приближение

$$\eta'_{(0)} = 0, \quad \vartheta'_{(0)} = 0,$$

получим для первого приближения

$$\eta'_{(1)} = F_{1j}, \quad \vartheta'_{(1)} = F_{2j};$$

для второго приближения

$$\begin{aligned} \eta'_{(2)} &= L_{11}F_{1j} + L_{12}F_{2j} + F_{1j}; \\ \vartheta'_{(2)} &= L_{21}F_{1j} + L_{22}F_{2j} + F_{2j} \end{aligned}$$

и т. д. Процесс последовательных приближений заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений. Если приближение с номером k принимают последним, то относительная погрешность

$$\left| \frac{\eta'_{(k)} - \eta'_{(k-1)}}{\eta'_{(k)}} \right| < \Delta_1, \quad \left| \frac{\vartheta'_{(k)} - \vartheta'_{(k-1)}}{\vartheta'_{(k)}} \right| < \Delta_2 \quad (84)$$

для всех расчетных точек. В практических расчетах на ЭВМ можно принять

$$\Delta_1 = \Delta_2 \approx 10^{-4}.$$

При удовлетворении условий (84) принимают

$$\eta'_{(k)} \approx \Phi_{1j}, \quad \vartheta'_{(k)} \approx \Phi_{2j}. \quad (85)$$

Матричная форма основных интегральных уравнений [уравнений (73)]

$$Y' = LY' + F_1 Y' (a) + F_2 Y (a) + F_q + F_t, \quad (86)$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} \eta \\ \vartheta \end{bmatrix}; \quad Y' = \begin{bmatrix} \eta' \\ \vartheta' \end{bmatrix}; \quad F_q = \begin{bmatrix} F_{1q} \\ F_{2q} \end{bmatrix}; \quad F_t = \begin{bmatrix} F_{1t} \\ F_{2t} \end{bmatrix}; \quad (87)$$

L — матрица интегральных операторов [см. формулы (74), (77)]

$$L_{ij} (i, j = 1, 2);$$

F_1, F_2 — матрицы функций при начальных параметрах [см. формулу (78)]:

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_{12} & F_{14} \\ F_{22} & F_{24} \end{bmatrix}; \quad F_2 = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{13} \\ F_{21} & F_{23} \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Решение (81) в матричной форме

$$Y' = \Phi_1 Y' (a) + \Phi_2 Y (a) + \Phi_q + \Phi_t; \quad (89)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{12} & \Phi_{14} \\ \Phi_{22} & \Phi_{24} \end{bmatrix}; \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{23} \end{bmatrix}; \quad \Phi_q = \begin{bmatrix} \Phi_{1q} \\ \Phi_{2q} \end{bmatrix}; \quad \Phi_t = \begin{bmatrix} \Phi_{1t} \\ \Phi_{2t} \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Метод начальных параметров. В качестве основных функций, описывающих напряжения и деформации в оболочке, принимается столбец-решение

$$V = \begin{bmatrix} Y' \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta' \\ \vartheta' \\ \eta \\ \vartheta \end{bmatrix}. \quad (91)$$

Основное уравнение в методе начальных параметров имеет вид

$$V = \Phi V (a) + V_q + V_t, \quad (92)$$

где столбец начальных параметров

$$V (a) = \begin{bmatrix} \eta' (a) \\ \vartheta' (a) \\ \eta (a) \\ \vartheta (a) \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Фундаментальная матрица четвертого порядка Φ , состоящая из блоков матриц второго порядка,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \int_a^s \Phi_1 ds & E + \int_a^s \Phi_2 ds \end{bmatrix}, \quad (94)$$

где E — единичная матрица второго порядка.

Столбцы частных решений

$$V_q = \begin{bmatrix} \Phi_q \\ \int_a^s \Phi_q ds \end{bmatrix}; \quad V_t = \begin{bmatrix} \Phi_t \\ \int_a^s \Phi_t ds \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Например, для функции η из уравнения (92) получаем

$$\eta = \eta'(a) \int_a^s \Phi_{12} ds + \vartheta'(a) \int_a^s \Phi_{14} ds + \eta(a) \left(1 + \int_a^s \Phi_{11} ds \right) + \\ + \vartheta(a) \int_a^s \Phi_{13} ds + \int_a^s \Phi_{1q} ds + \int_a^s \Phi_{1t} ds. \quad (96)$$

Отметим, что представление решения в форме (92) позволяет, зная столбец-решение в начале участка оболочки («начальные параметры»), найти значение V в любом сечении.

Столбец основных параметров. При расчете удобно, особенно для сложных систем, использовать и столбец основных параметров

$$W = \begin{bmatrix} \delta_r \\ \vartheta \\ Q \\ M_\theta \end{bmatrix}, \quad (97)$$

где δ_r — радиальное смещение; ϑ — угол поворота; Q и M_θ — перерезывающая сила и изгибающий момент в поперечном сечении.

$$\delta_r = u \cos \theta - w \sin \theta = \varepsilon_\varphi^{(0)} r. \quad (98)$$

Столбец основных параметров выражают через столбец-решение

$$W = BV + B_q + B_t, \quad (99)$$

где отличные от нуля элементы матрицы B и столбцов B_q и B_t приведены ниже:

$$B_{11} = -\frac{r}{A}; \quad B_{13} = \nu r \frac{\operatorname{ctg} \theta}{AR_2}; \quad B_{24} = 1; \\ B_{33} = \frac{1}{R_2}; \quad B_{42} = -D; \quad B_{44} = -\nu \frac{D \operatorname{ctg} \theta}{R_2}; \\ B_{q1} = -\frac{r}{2\pi A \sin^2 \theta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) P + \frac{rR_2}{A} q_n; \\ B_{t1} = \frac{r(1-\nu)}{A} T_1; \quad B_{t4} = T_2.$$

Связь основных и начальных параметров устанавливается соотношением

$$W = GV(a) + W_q + W_t,$$

где матрица и столбцы

$$G = B\Phi; \quad W_q = BV_q + B_q; \quad W_t = BV_t + B_t. \quad (100)$$

Краевые условия. Начальные параметры, входящие в решение (92), определяют из четырех краевых условий (два условия на каждом из краев оболочки). Типичные краевые условия на начальном контуре указаны в табл. 2. Подобные условия справедливы и для второго контура. Если внешнее закрепление оболочки статически неопределимо (равнодействующая осевых сил в сечении оболочки P неизвестна), то оболочку освобождают от лишних закреплений и вводят неизвестные реактивные усилия, определяемые из условия равенства нулю соответствующих перемещений.

Определение напряжений и перемещений в оболочке. Основные силовые факторы в сечении оболочки определяют из соотношения

$$\begin{bmatrix} N_\theta \\ N_\varphi \\ M_\theta \\ M_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 & -\nu \frac{D \operatorname{ctg} \theta}{R_2} \\ 0 & -\nu D & 0 & -\frac{D \operatorname{ctg} \theta}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta' \\ \vartheta \\ \eta \\ \vartheta \end{bmatrix} +$$

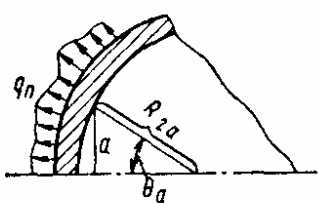
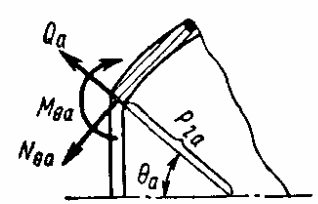
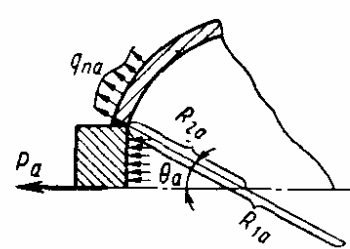
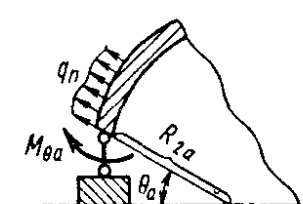
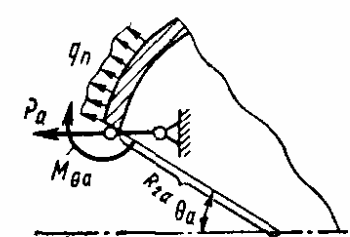
$$+ \begin{bmatrix} \frac{P}{2\pi R_2 \sin^2 \theta} \\ -\frac{1}{2\pi R_1 \sin^2 \theta} + q_n R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_2 \\ T_2 \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Параметры деформации основной поверхности

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_\theta^{(0)} \\ \varepsilon_\varphi^{(0)} \\ \chi_\theta \\ \chi_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{\nu}{A} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{A} & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{D(1-\nu^2)} & \frac{\nu}{D(1-\nu^2)} \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{D(1-\nu^2)} & -\frac{1}{D(1-\nu^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_\theta \\ N_\varphi \\ M_\theta \\ M_\varphi \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} (1-\nu) \frac{T_1}{A} \\ (1-\nu) \frac{T_1}{A} \\ \frac{T_2}{(1+\nu)D} \\ \frac{T_2}{(1+\nu)D} \end{bmatrix}, \quad (102)$$

2. Краевые условия при расчете оболочки вращения

Условия закрепления	Краевые условия
<p>Замкнутый контур</p> 	<p>На малом радиусе a</p> $\eta'(a) = \frac{\eta(a)}{a}; \quad \vartheta'(a) = \frac{\vartheta(a)}{a}$
<p>Открытый контур</p> 	$\eta(a) = R_{2a} Q_a;$ $\vartheta'(a) + \nu_a \frac{\operatorname{ctg} \theta_a}{R_{2a}} \vartheta(a) =$ $= -\frac{M_{\theta a}}{D_a} + \frac{T_{2a}}{D_a}$
<p>Жесткая заделка</p> 	$\nu_a \frac{\operatorname{ctg} \theta_a}{R_{2a}} \eta(a) - \eta'(a) = \frac{P_a}{2\pi \sin^2 \theta_a} \times$ $\times \left(\frac{1}{R_{1a}} + \frac{\nu_a}{R_{2a}} \right) - q_n(a) R_{2a} - T_{1a} (1 - \nu_a);$ $\vartheta(a) = 0$
<p>Шарнирная опора с отсутствием радиального перемещения</p> 	$\nu_a \frac{\operatorname{ctg} \theta_a}{R_{2a}} \eta(a) - \eta'(a) = -q_n(a) R_{2a} -$ $- T_{1a} (1 - \nu_a);$ $\vartheta'(a) + \nu_a \frac{\operatorname{ctg} \theta_a}{R_{2a}} \vartheta(a) = -\frac{M_{\theta a}}{D_a} + \frac{T_{2a}}{D_a}$
<p>Шарнирная опора с отсутствием осевого перемещения</p>  <p>Усилие P_a (реакция опоры) известно</p>	$\eta(a) = R_{2a} P_a \cos \theta_a;$ $\vartheta'(a) + \nu_a \frac{\operatorname{ctg} \theta_a}{R_{2a}} \vartheta(a) = -\frac{M_{\theta a}}{D_a} + \frac{T_{2a}}{D_a}$

где $\chi_\theta = \theta'$; $\chi_\varphi = \frac{\text{ctg } \theta}{R_2}$ — параметры изменения кривизны.

Напряжения в точках наружной поверхности σ_θ^+ , σ_φ^+ (при $z = \delta_2$) и в точках внутренней поверхности σ_θ^- , σ_φ^- (при $z = -\delta_1$) определяются по формуле [см. равенства (53)]

$$\sigma = C\varepsilon - \Sigma_t, \quad (103)$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_\theta^+ \\ \sigma_\theta^- \\ \sigma_\varphi^+ \\ \sigma_\varphi^- \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E^+}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E^-}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E^+}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E^-}{1-\nu^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \delta_2 & \delta_2\nu \\ 1 & \nu & -\delta_1 & -\delta_1\nu \\ \nu & 1 & \delta_2\nu & \delta_2 \\ \nu & 1 & -\delta_1\nu & -\delta_1 \end{bmatrix};$$

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \frac{E^+ (\alpha t)^+}{1-\nu} \\ \frac{E^- (\alpha t)^-}{1-\nu} \\ \frac{E^+ (\alpha t)^+}{1-\nu} \\ \frac{E^- (\alpha t)^-}{1-\nu} \end{bmatrix}. \quad (104)$$

В этих формулах параметры, отмеченные знаком плюс, относятся к наружной поверхности оболочки, а знаком минус — к внутренней.

В развернутой форме соотношение (103) совпадает с равенствами (23a).

Перемещения вычисляются по формулам

$$u(s) = \sin \theta(s) \int_a^s \frac{F(s_1)}{\sin \theta(s_1)} ds_1 + \frac{\sin \theta(s)}{\sin \theta(a)} u(a);$$

$$w(s) = u(s) \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon_{\varphi}^{(0)} R_2,$$

где

$$F(s) = \varepsilon_{\theta}^{(0)} - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_{\varphi}^{(0)}.$$

Радиальное и осевое смещение

$$\delta_r = u \cos \theta - w \sin \theta = \varepsilon_{\varphi}^{(0)} r;$$

$$\delta_0 = u \sin \theta + w \cos \theta.$$

Величина $u(a)$ может быть определена из условия отсутствия осевого смещения какого-либо контура оболочки.

Сосредоточенные нагрузки. В сечении s_j (рис. 8) действуют сосредоточенные нагрузки P_{jn} дан/см; $P_{j\theta}$ дан/см; M_j дан, распределенные по окружности радиуса r_j . Эти нагрузки вызывают резкое (скачкообразное) изменение факторов, описывающих напряженное и деформированное состояние оболочки. Вследствие непрерывности радиального перемещения δ_r и угла поворота ϑ скачки усилий и моментов связаны соотношениями

$$\Delta N_{\varphi} = \nu \Delta N_{\theta};$$

$$\Delta M_{\varphi} = \nu \Delta M_{\theta}. \quad (105)$$

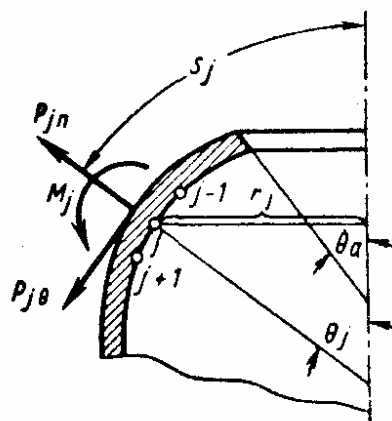


Рис. 8

Сосредоточенная нормальная нагрузка P_{jn} дает скачок перерезывающего усилия Q

$$\Delta Q = P_{jn}, \quad (106)$$

скачок осевого усилия P

$$\Delta P = 2\pi r_j \cos \theta_j P_{jn}, \quad (107)$$

скачки функций η и η'

$$\Delta \eta = R_2 P_{jn}; \quad \Delta \eta' = -\frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \theta_j P_{jn}. \quad (108)$$

Величины N_{θ} , N_{φ} , M_{θ} , M_{φ} , ϑ' остаются непрерывными.

Сосредоточенная касательная нагрузка $P_{j\theta}$ дает скачок усилия N_{θ}

$$\Delta N_{\theta} = -P_{j\theta} \quad (109)$$

и осевого усилия P

$$\Delta P = -2\pi r_j \sin \theta_j P_{j\theta}, \quad (110)$$

скачок функции η'

$$\Delta \eta' = \left(\nu + \frac{R_2}{R_1} \right) P_{j\theta}. \quad (111)$$

Величины Q , M_{θ} , M_{φ} , ϑ' остаются непрерывными.

Сосредоточенный момент M_j дает скачок момента M_θ

$$\Delta M_\theta = M_j \quad (112)$$

и функции θ'

$$\Delta \theta' = -\frac{M_j}{D}. \quad (113)$$

Величины P , Q , N_θ , N_φ , η , η' остаются непрерывными. Для расчета сосредоточенные нагрузки заменяют статически эквивалентными рас-

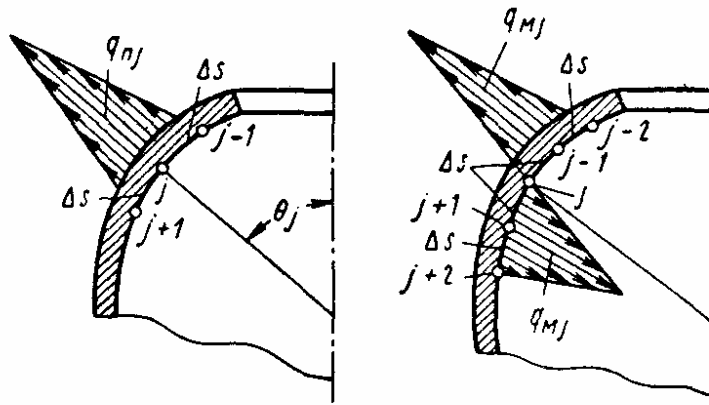


Рис. 9

пределенными нагрузками (рис. 9), приложенными на небольших участках,

$$\left. \begin{aligned} q_{nj} &= \frac{P_{jn}}{\Delta s}; \\ q_{\theta j} &= \frac{P_{j\theta}}{\Delta s}; \\ q_{mj} &= \frac{M_j}{2(\Delta s)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

где Δs — ширина участков в области приложения сосредоточенных нагрузок.

В уравнениях (79) функцию F_{1q} вычисляют с учетом дополнительных распределенных нагрузок на участках $s_j \pm \Delta s$ и $s_j \pm 2\Delta s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961.
2. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., ГИТТЛ, 1952.
4. Демьянушко И. В. Напряженное состояние рабочих колес высокооборотных центробежных нагнетателей. «Известия вузов. Машиностроение», 1966.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1947.
6. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
7. Черных К. Ф. Теория тонких упругих оболочек. Т. I и II. Изд. ЛГУ, 1965.

• АНИЗОТРОПНЫЕ И АРМИРОВАННЫЕ ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ

Глава 5

АНИЗОТРОПНЫЕ ПЛАСТИНКИ

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ИЗГИБА

Пластины, обладающие различными упругими характеристиками в различных направлениях, называют анизотропными. Такие пластины могут быть изготовлены из анизотропного материала, например, из фанеры (естественная анизотропия), или представлять собой пластины, подкрепленные часто расположенными ребрами (рис. 1, а), гофрированные пластины (рис. 1, б), пластины, подкрепленные гофром (рис. 1, в) (конструктивная анизотропия).

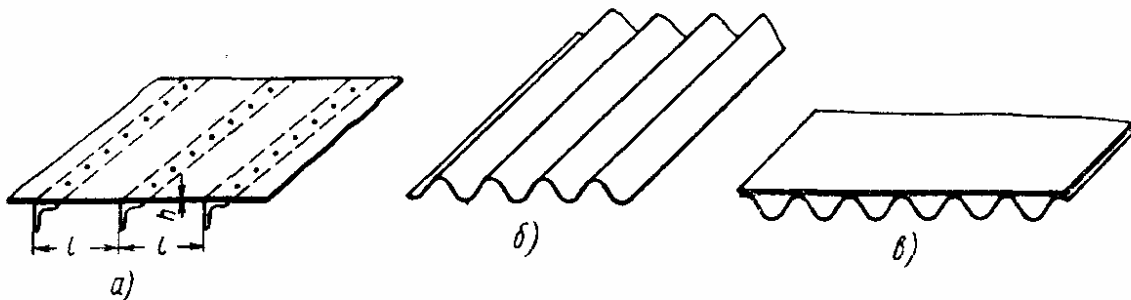


Рис. 1

Упругие свойства ортотропных пластинок характеризуются следующими четырьмя независимыми величинами: модулями упругости E_1 и E_2 по двум взаимно перпендикулярным направлениям x и y , коэффициентом Пуассона ν_1 , соответствующим поперечной деформации в направлении оси y при растяжении или сжатии вдоль оси x , и модулем сдвига G .

Между коэффициентом ν_2 , отвечающим поперечной деформации вдоль оси x , и коэффициентом ν_1 существует зависимость

$$\nu_2 = \frac{E_2}{E_1} \nu_1. \quad (1)$$

Уравнения, связывающие напряжения и деформации в случае ортотропной пластинки, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_x}{E_1}; \\ \gamma &= \frac{\tau}{G} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_x + \nu_2 \varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x); \\ \tau &= G\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Изгибающие и крутящий моменты будут

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D_1 (\kappa_x + \nu_2 \kappa_y); \\ M_y &= D_2 (\kappa_y + \nu_1 \kappa_x); \\ H &= 2D_\kappa \chi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где D_1 и D_2 — изгибные жесткости по главным направлениям; D_κ — крутильная жесткость; эти величины определяют по формулам

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad (5)$$

$$D_\kappa = \frac{G h^3}{12}, \quad (6)$$

где h — толщина пластинки.

Кривизны κ_x , κ_y и кручение χ определяют по формулам (4) и (6) гл. 17 т. 1.

Из уравнений равновесия элемента пластинки (20) и (21) гл. 17 т. 1 находим поперечные силы

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x} (D_1 \kappa_x + D_3 \kappa_y); \quad Q_y = \frac{\partial}{\partial y} (D_2 \kappa_y + D_3 \kappa_x), \quad (7)$$

где D_3 — приведенная жесткость,

$$D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_\kappa. \quad (8)$$

Для ортотропной пластинки дифференциальное уравнение изгиба (23) гл. 17 т. 1 получит следующий вид [2]:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q. \quad (9)$$

Если пластинка подкреплена ребрами жесткости, то приближенно можно считать жесткость ребер равномерно распределенной по сечению пластинки. Для пластинки, усиленной ребрами жесткости, параллельными оси x , жесткости эквивалентной анизотропной пластинки будут [2]

$$D_1 = \frac{EJ}{l} + \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad D_2 = D_3 = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad (10)$$

здесь J — момент инерции сечения ребра относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения; l — расстояние между ребрами.

Характеристики пластинок, изготовленных из гофрированного листового материала (рис. 2), определяют по формулам

$$D_1 = \frac{l}{s} \cdot \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (11)$$

$$D_2 = 0,5Ehf^2 \times \left[1 - \frac{0,81}{1 + 2,5 \left(\frac{f}{2l} \right)^2} \right]; \quad (12)$$

$$D_3 = 2D_K = \frac{s}{l} \cdot \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}, \quad (13)$$

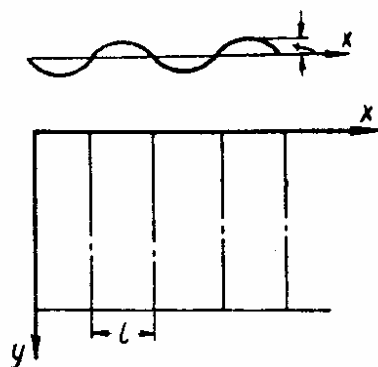


Рис. 2

где E и ν — упругие постоянные материала; h — толщина; $z = f \sin \frac{\pi x}{l}$ — форма волны; s — длина дуги полуволны,

$$s = l \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \right).$$

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Прямоугольная пластинка шарнирно оперта по контуру и нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 3) [3]. Прогиб пластинки

$$w = \frac{16q}{\pi^6} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} D_1 + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} D_3 + \frac{n^4}{b^4} D_2 \right)}. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда упругие постоянные удовлетворяют условию

$$D_3 = \sqrt{D_1 D_2}.$$

Прогиб и изгибающие моменты в центре пластинки определяют по формулам

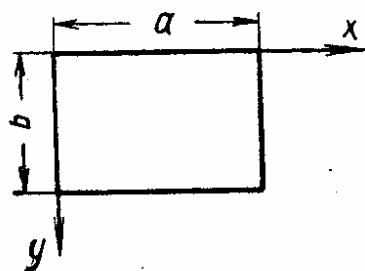


Рис. 3

$$w = C_1 \frac{qb^4}{D_2}; \quad (15)$$

$$M_x = \left(C_2 + C_3 \nu_2 \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \right) \frac{qa^2}{\eta}; \quad (16)$$

$$M_y = \left(C_3 + C_2 \nu_1 \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \right) qb^2; \quad (17)$$

коэффициенты C_1 — C_3 приведены в таблице, а величину η находят по формуле

$$\eta = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}}. \quad (18)$$

Коэффициенты C_1 , C_2 и C_3 в формулах (15) — (17) для шарнирно опертой равномерно нагруженной ортотропной пластинки (принято $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$)

η	C_1	C_2	C_3	η	C_1	C_2	C_3
1	0,00407	0,0368	0,0368	1,8	0,00932	0,0214	0,0884
1,1	0,00488	0,0359	0,0447	1,9	0,00974	0,0191	0,0929
1,2	0,00565	0,0344	0,0524	2,0	0,01013	0,0174	0,0964
1,4	0,00709	0,0303	0,0665	3	0,01223	0,0055	0,1172
1,5	0,00772	0,0280	0,0728	4	0,01282	0,0015	0,1230
1,7	0,00884	0,0235	0,0837	∞	0,01302	0	0,1250

Бесконечная полоса нагружена в точке $x = \xi$, $y = 0$ сосредоточенной силой P (рис. 4) [3]. Обозначения:

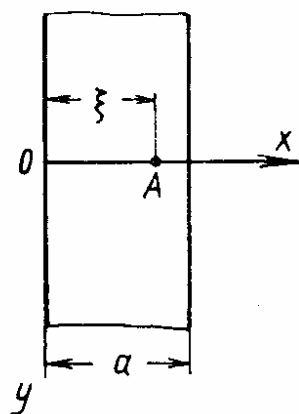


Рис. 4

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}}; \quad \eta = \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}};$$

$$\alpha = \frac{a\lambda}{\pi} \sqrt{\eta + \sqrt{\eta^2 - 1}};$$

$$\beta = \frac{a\lambda}{\pi} \sqrt{\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}};$$

$$\alpha' = \frac{a\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1 - \eta}};$$

$$\beta' = \frac{a\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1 + \eta}}.$$

Могут иметь место три случая.
Случай 1, $\eta > 1$:

$$w = \frac{Pa^3}{\pi^4 D_1} \cdot \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} (\alpha e^{-my/\alpha} - \beta e^{-my/\beta}) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (19)$$

Случай 2, $\eta = 1$:

$$w = \frac{Pa^3}{2\pi^3 D_1 \lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 + \frac{m\pi y}{a\lambda} \right) e^{-my/\beta'} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (20)$$

Случай 3, $\eta < 1$:

$$w = \frac{Pa}{2\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha' \sin \frac{my}{\alpha'} + \beta' \cos \frac{my}{\alpha'} \right) \times \\ \times e^{-\frac{my}{\beta'}} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (21)$$

ИЗГИБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И КРУГЛОЙ ПЛАСТИНОК

Эллиптическая пластинка защемлена по контуру и нагружена равномерно по всей поверхности [3]. Пусть главные направления ортотропного материала параллельны главным осям эллипса, изображенного на рис. 5.

Обозначим через a и b полуоси эллипса.

Прогиб

$$w = \frac{q \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2}{\frac{24D_1}{a^4} + \frac{16D_3}{a^2 b^2} + \frac{24D_2}{b^4}}. \quad (22)$$

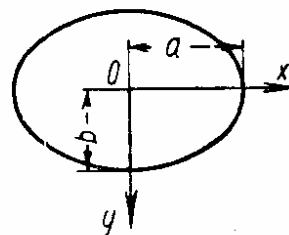


Рис. 5

Изгибающие моменты определяют из выражений (4).

Круглая пластинка защемлена по контуру и нагружена равномерно распределенным давлением. Выражение для прогиба получается как частный случай уравнения (22) при $a = b$:

$$w = \frac{q (a^2 - r^2)^2}{64D'}, \quad (23)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad D' = \frac{1}{8} (3D_1 + 2D_3 + 3D_2).$$

Изгибающие моменты, крутящий момент и поперечные силы находят по формулам

$$M_x = \frac{q}{16D'} [D_1 (1 + \nu_2) (a^2 - r^2) - 2D_1 (x^2 + \nu_2 y^2)]; \quad (24)$$

$$M_y = \frac{q}{16D'} [(D_2 + \nu_2 D_1) (a^2 - r^2) - 2(D_2 y^2 + \nu_2 D_1 x^2)]; \quad (25)$$

$$H = \frac{q}{4D'} D_3 xy; \quad (26)$$

$$Q_x = -\frac{qx}{8D'} (3D_1 + D_3); \quad Q_y = -\frac{qy}{8D'} (3D_2 + D_3). \quad (27)$$

Случай изгиба цилиндрически ортотропных круглых пластинок рассмотрены в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
3. Тимошенко С. П., С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
4. Шиманский Ю. А. Справочник по строительной механике корабля. Т. 2. Л., Судпромгиз, 1958.

Глава 6

АНИЗОТРОПНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим многослойную тонкую оболочку постоянной общей толщины h , собранную из произвольного числа однородных анизотропных слоев также постоянной толщины t_i (рис. 1).

Предполагаем, что в каждой точке каждого слоя оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная той координатной поверхности оболочки, которая параллельна внешним поверхностям оболочки и проходит внутри какого-либо i -го слоя. В частности, координатной поверхностью оболочки может служить также какая-либо из поверхностей контактов слоев или какая-либо из граничных поверхностей оболочки.

Принимаем, что все слои оболочки при деформации остаются упругими, т. е. подчиняются обобщенному закону Гука и работают совместно без скольжения [1].

Основной предпосылкой для построения теории тонких анизотропных слоистых оболочек вращения остается известная гипотеза недеформируемых нормалей, которая формулируется обычным образом: нормальный к координатной поверхности¹ прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной координатной поверхности оболочки и сохраняет свою длину. Обычно к этому геометрическому предположению присоединяется еще следующее статическое предположение, которое гласит, что нормальными напряжениями σ_y^i на площадках, параллельных координатной поверхности тонкой оболочки, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями.

Принимая гипотезу недеформируемых нормалей, мы в теорию анизотропных оболочек вносим некоторую непоправимую погрешность, существенно зависящую от приведенной относительной толщины h^* ,

¹ Здесь и в последующем под термином координатная поверхность оболочки без специальных указаний, будет подразумеваться поверхность $y = 0$.

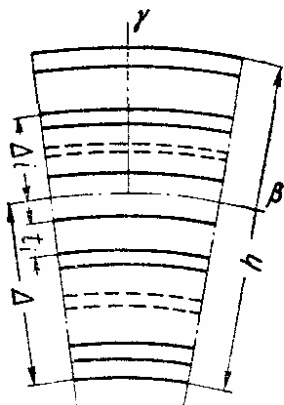


Рис. 1

которая, вообще говоря, является функцией как геометрических, так и физико-механических характеристик оболочки:

$$h^* = f\left(\frac{h}{R_i}, \frac{h}{L_i}, \delta_i, \frac{E_{ii}}{G_{i3}}, \frac{E_{ii}}{E_{33}} \dots\right).$$

Укажем также, что, допуская обычную для инженерных расчетов относительную точность 5%, приведенными тонкими оболочками будем считать такие реально существующие слоистые оболочки, изготовленные из жестких слоев, у которых

$$\max(hk_i) \leq \frac{1}{20}, \quad \max(hL_i^{-1}) \leq \frac{1}{10} - \frac{1}{20}$$

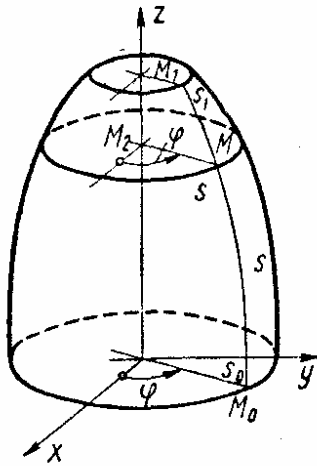


Рис. 2

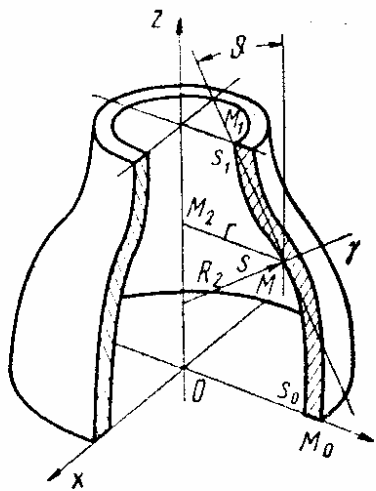


Рис. 4

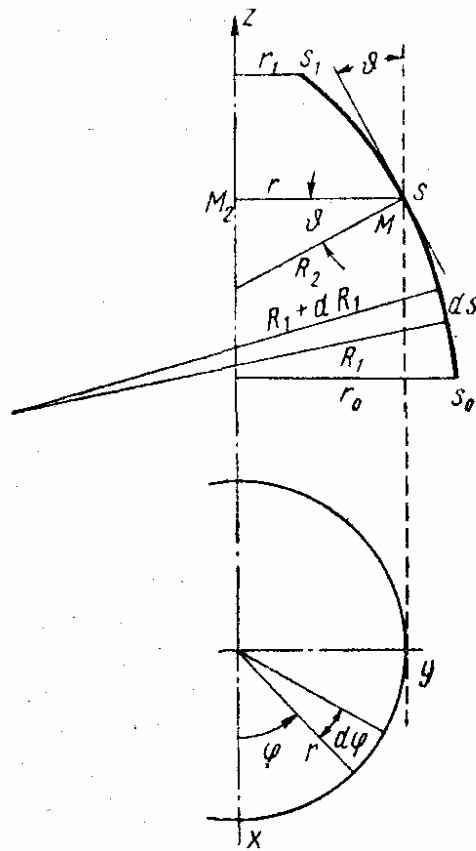


Рис. 3

в каждом слое отношения типа $\frac{E_{ii}}{G_{i3}}, \frac{E_{ii}}{E_{33}}$ меньше трех и, наконец, в случае слоистых оболочек отношения модулей упругости отдельных слоев, т. е. отношения типа $\frac{E_{ii}^i}{E_{ii}^k}$ меньше десяти. Для полноты отметим

также, что здесь никаких ограничений на анизотропию в поверхности $\gamma = \text{const}$ не ставится.

Рассмотрим оболочку, координатная поверхность которой является поверхностью вращения с осью вращения z . Положение какой-либо

точки M координатной поверхности оболочки определяется углом φ , являющимся азимутом плоскости, проведенной через точку M и ось вращения z , и меридиональной дугой s , отсчитываемой вдоль меридиана от некоторой начальной точки M_0 (рис. 2 и 4).

Для рассматриваемой поверхности вводим еще две геометрические величины r , представляющие расстояние $\overline{MM_2}$ от точки M до оси вращения z , и ϑ , представляющий угол между касательной к меридиану и осью вращения z (рис. 3 и 4).

В выбранной системе координат для главных геометрических характеристик координатной поверхности имеем [1, 4]

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{d\vartheta}{ds}; & k_2 &= \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \vartheta}{r}; \\ A &= 1; & B &= r = R_2 \cos \vartheta; & \frac{dr}{ds} &= -\sin \vartheta; \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R_2} \right) &= - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{\sin \vartheta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В принятой системе координат для произвольной нагруженной оболочки вращения из формул (1) получим следующие уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (rT_1) + T_2 \sin \vartheta + \frac{\partial s_{21}}{\partial \varphi} + \frac{r}{R_1} N_1 &= -rX; \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial s} (rs_{12}) - s_{21} \sin \vartheta + \frac{r}{R_2} N_2 &= -rY; \\ \frac{\partial}{\partial s} (rN_1) + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - r \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) &= -rZ; \\ \frac{\partial}{\partial s} (rM_1) + \frac{\partial H_{21}}{\partial \varphi} + M_2 \sin \vartheta &= rN_1; \\ \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial s} (rH_{12}) - H_{21} \sin \vartheta &= rN_2; \\ s_{12} - s_{21} + \frac{H_{12}}{R_1} - \frac{H_{21}}{R_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Формулы, связывающие компоненты деформаций и сдвига, изменения кривизны и кручение с компонентами перемещений

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}; & \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\sin \vartheta}{r} u + \frac{w}{R_2}; \\ \omega &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right); \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{R_2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_1} \right) \frac{\sin \vartheta}{r}; \\ \tau &= -\frac{2}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \right) + \frac{2}{r R_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \\ &\quad + \frac{2}{R_2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\sin \vartheta}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Приведенные уравнения и соотношения ничем не отличаются от соответствующих уравнений и соотношений изотропных оболочек вращения. Что же касается соотношений упругости, то они отличаются принципиально и в наиболее простом, но непротиворечащем варианте запишутся в следующем виде [1]:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\omega + K_{11}\kappa_1 + R_{12}\kappa_2 + K_{16}\tau; \\ T_2 &= C_{22}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_1 + C_{26}\omega + K_{22}\kappa_2 + K_{12}\kappa_1 + K_{26}\tau; \\ S_{12} &= C_{66}\omega + C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + K_{66}\tau + K_{16}\kappa_1 + K_{26}\kappa_2 + \\ &\quad + k_2 (K_{66}\omega + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2 + D_{66}\tau + D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2); \\ S_{21} &= C_{66}\omega + C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + K_{66}\tau + K_{16}\kappa_1 + K_{26}\kappa_2 + \\ &\quad + k_1 (K_{66}\omega + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2 + D_{66}\tau + D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2); \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + D_{16}\tau + K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + K_{16}\omega; \\ M_2 &= D_{22}\kappa_2 + D_{12}\kappa_1 + D_{26}\tau + K_{22}\varepsilon_2 + K_{12}\varepsilon_1 + K_{26}\omega; \\ H_{12} &= D_{66}\tau + D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2 + K_{66}\omega + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2; \\ H_{21} &= D_{66}\tau + D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2 + K_{66}\omega + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где для жесткостей растяжения—сжатия и сдвига C_{jk} , для жесткостей изгиба и кручения D_{jk} , для жесткостей взаимного влияния K_{jk} имеем

$$C_{jk} = \sum_{s=1}^{m+n} B_{jk} (\delta_s - \delta_{s-1}); \quad (7)$$

$$K_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+n} B_{jk}^s [(\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2) - 2\Delta (\delta_s - \delta_{s-1})]; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_{jk} = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{m+n} B_{jk}^s [(\delta_s^3 - \delta_{s-1}^3) + 3\Delta (\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2) + \\ + 3\Delta^2 (\delta_s - \delta_{s-1})], \end{aligned} \quad (9)$$

где Δ — расстояние координатной поверхности от внутренней поверхности оболочки; $(m+n)$ — число всех слоев оболочки; m — число слоев ниже координатной поверхности; n — число остальных слоев

(рис. 5). Если координатная поверхность оболочки расположена внутри какого-либо слоя, то под n подразумевают число слоев выше координатной поверхности плюс один.

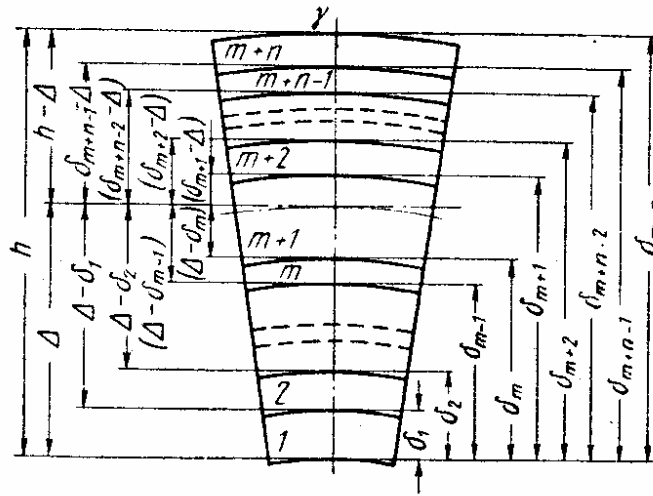


Рис. 5

В частном случае, когда координатная поверхность оболочки совпадает с нижней (внутренней) поверхностью оболочки, Δ превращается в нуль и для C_{jk} , K_{jk} , D_{jk} получим

$$\left. \begin{aligned} C_{jk} &= \sum_{s=1}^{m+n} B_{jk}^s (\delta_s - \delta_{s-1}); \\ K_{jk} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+n} B_{jk}^s (\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2); \\ D_{jk} &= \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{m+n} B_{jk}^s (\delta_s^3 - \delta_{s-1}^3). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Коэффициенты упругости B_{jk} для каждого слоя оболочки запишутся формулами¹

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \frac{a_{22}a_{66} - a_{26}^2}{\bar{\Omega}}; & B_{22} &= \frac{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}{\bar{\Omega}}; \\ B_{12} &= \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{\bar{\Omega}}; & B_{66} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\bar{\Omega}}; \\ B_{16} &= \frac{a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}}{\bar{\Omega}}; & B_{26} &= \frac{a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}}{\bar{\Omega}}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\bar{\Omega} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) a_{66} + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2, \quad (12)$$

¹ Индексы над B_{jk} , a_{jk} и Ω опущены.

где a_{jk} — упругие постоянные (коэффициенты деформации), входящие в уравнения обобщенного закона Гука, который имеет вид

$$\left. \begin{aligned} e_{\alpha}^i &= a_{11}^i \sigma_{\alpha}^i + a_{12} \sigma_{\beta} + a_{13} \sigma_{\gamma} + a_{14} \tau_{\beta\gamma} + a_{15} \tau_{\alpha\gamma} + a_{16} \tau_{\alpha\beta}; \\ e_{\beta} &= a_{12} \sigma_{\alpha} + a_{22} \sigma_{\beta} + \dots \dots \dots + a_{26} \tau_{\alpha\beta}; \\ &\dots \dots \dots \\ e_{\alpha\beta} &= a_{16} \sigma_{\alpha} + a_{26} \sigma_{\beta} + \dots \dots \dots + a_{66} \tau_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В частном случае ортотропной оболочки (здесь и в последующем под ортотропными оболочками будем понимать такие оболочки, которые изготовлены из ортотропного материала так, что два главных направления упругости в каждой точке каждого слоя оболочки совпадают с направлениями соответствующих линий кривизны $s = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ координатной поверхности, а третье направление — с нормалью к координатной поверхности, т. е. с координатой γ) соотношения упругости (5) и (6) существенно упрощаются, так как в этом случае все упругие постоянные a_{jk} и тем самым жесткости C_{jk} , K_{jk} и D_{jk} с индексами 16 и 26 обращаются в нуль.

Существенно упрощаются также коэффициенты упругости B_{jk}^i , которые принимают вид

$$B_{11}^i = \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}; \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}; \quad B_{66}^i = G_{12}^i;$$

$$B_{12}^i = \frac{\nu_1^i E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i} = \frac{\nu_2^i E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i},$$

где E_1^i , E_2^i , ν_1^i , ν_2^i , G_{12}^i — модули упругости, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига для главных направлений упругости материала каждого слоя.

В случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упругости не совпадают с направлениями линий кривизны (с координатными линиями $s = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$), повторяется картина общего случая анизотропии, т. е. задача математически формулируется так же, как для общей анизотропии, и соотношения упругости остаются в форме (5) и (6), при этом лишь надо знать, что жесткости и упругие постоянные с индексом 16 и 26 будут представлены посредством составляющих жесткостей с индексами 11, 22, 12, 66. Пусть, например, в рассматриваемой точке главные направления упругости ортотропного материала оболочки совпадают с направлениями координатных линий некоторой ортогональной системы координат α , β , γ и пусть в этой системе координат коэффициенты B_{jk} равны B_{11} , B_{22} , B_{12} , B_{66} . Нам необходимо определить коэффициенты B_{jk}' в ортогональной системе координат α' , β' , γ' , совпадающей с линиями

кривизны координатной поверхности оболочки, если известно, что координаты γ' и γ совпадают, а направления координатных линий α' и β' с направлениями координатных линий α и β составляют угол φ .

Не вдаваясь в дальнейшие подробности, приводим окончательные формулы, с помощью которых легко определить искомые

$$\left. \begin{aligned} B'_{11} &= B_{11} \cos^4 \varphi + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22} \sin^4 \varphi; \\ B'_{22} &= B_{11} \sin^4 \varphi + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22} \cos^4 \varphi; \\ B'_{12} &= B_{12} + [B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ B'_{66} &= B_{66} + [B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ B'_{16} &= \frac{1}{2} [B_{22} \sin^2 \varphi - B_{11} \cos^2 \varphi + (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi; \\ B'_{26} &= \frac{1}{2} [B_{22} \cos^2 \varphi - B_{11} \sin^2 \varphi - (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Приведем формулы для определения расчетных напряжений в каждом слое оболочки (индексы i опущены):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{16}\omega + \gamma(B_{11}\kappa_1 + B_{12}\kappa_2 + B_{16}\tau); \\ \sigma_\varphi &= B_{22}\varepsilon_2 + B_{22}\varepsilon_1 + B_{26}\omega + \gamma(B_{22}\kappa_2 + B_{12}\kappa_1 + B_{26}\tau); \\ \tau_{s\varphi} &= B_{16}\varepsilon_1 + B_{26}\varepsilon_2 + B_{66}\omega + \gamma(B_{16}\kappa_1 + B_{26}\kappa_2 + B_{66}\tau). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Наконец, для полноты картины укажем, что граничные условия в теории анизотропных оболочек ничем не отличаются от соответствующих граничных условий теории изотропных оболочек.

БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОДНОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Безмоментная теория анизотропных оболочек строится на тех же принципиальных положениях, что и безмоментная теория изотропных оболочек.

В случае симметрично нагруженных оболочек вращения мы должны полагать, что внешняя нагрузка может быть лишь функцией дуги s , т. е.

$$X = X(s); \quad Y = Y(s); \quad Z = Z(s), \quad (16)$$

а граничные условия не зависят от угловой координаты φ . Учитывая сказанное, а также, что

$$R_1 = R_1(s); \quad R_2 = R_2(s); \quad r = r(s); \quad \vartheta = \vartheta(s), \quad (17)$$

на основании уравнений (1)–(6) легко установить, что в задаче симметрично нагруженных анизотропных оболочек вращения внутренние искомые расчетные усилия (T_1 , T_2 , S) и перемещения (u , v , w) не могут

быть функциями угловой координаты ϑ . В силу этого из выражений (2) получим следующие уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_1}{ds} + (T_2 - T_1) \frac{\sin \vartheta}{r} &= -X; \\ \frac{dS}{ds} - 2S \frac{\sin \vartheta}{r} &= -Y; \\ T_2 &= R_2 Z - \frac{R_2}{R_1} T_1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Решая систему уравнений (18) относительно искомых внутренних сил, получим

$$T_1 = -\frac{1}{R_2 \cos^2 \vartheta} \left[\int_{s_0}^s r (X \cos \vartheta + Z \sin \vartheta) ds - U_0 \right]; \quad (19)$$

$$T_2 = \frac{1}{R_1 \cos^2 \vartheta} \left[\int_{s_0}^s r (X \cos \vartheta + Z \sin \vartheta) ds - U_0 \right] + R_2 Z; \quad (20)$$

$$S = -\frac{1}{R_2^2 \cos^2 \vartheta} \left(\int_{s_0}^s r^2 Y ds - V_0 \right), \quad (21)$$

где U_0 и V_0 — постоянные интегрирования, которые определяют из граничных условий оболочки, а нижний предел интегрирования s_0 может быть выбран произвольно.

Рассматривая формулы (19)–(21), легко заметить, что они ничем не отличаются от соответствующих формул изотропных оболочек.

Для однослойных оболочек проще полагать, что координатная поверхность (поверхность $\gamma = 0$) совпадает со срединной поверхностью оболочки. В этом случае [см. формулы (2), (5)–(9)] соотношения упругости существенно упрощаются и в случае безмоментной задачи принимают вид

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= h (B_{11} \varepsilon_1 + B_{12} \varepsilon_2 + B_{16} \omega); \\ T_2 &= h (B_{22} \varepsilon_2 + B_{12} \varepsilon_1 + B_{26} \omega); \\ S &= S_{12} = S_{21} = h (B_{66} \omega + B_{16} \varepsilon_1 + B_{26} \varepsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В силу исходных положений на основании (3), (5) и (11) легко получить

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_2} &= \frac{1}{h} (a_{11} T_1 + a_{12} T_2 + a_{16} S); \\ -\frac{\sin \vartheta}{r} u + \frac{w}{R_2} &= \frac{1}{h} (a_{22} T_2 + a_{12} T_1 + a_{16} S); \\ \frac{dv}{ds} + \frac{\sin \vartheta}{r} v &= \frac{1}{h} (a_{16} T_1 + a_{26} T_2 + a_{66} S). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Решая систему уравнений (23) относительно искомых перемещений, получим

$$u = \frac{\cos \vartheta}{h} \left\{ \int_{s_0}^s \left[\left(a_{11} - 2a_{12} \frac{R_2}{R_1} + a_{22} \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{R_2}{r} T_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(a_{16} - a_{26} \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2}{r} S + \left(a_{12} - a_{22} \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2^2}{r} Z \right] ds \right\} + \varphi_0 \cos \vartheta; \quad (24)$$

$$v = \frac{r}{h} \left\{ \int_{s_0}^s \left[\left(a_{16} - a_{26} \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{T_1}{r} + a_{66} \frac{S}{r} + a_{26} \frac{R_2}{r} Z \right] ds \right\} + \psi_0 r; \quad (25)$$

$$w = \frac{\sin \vartheta}{h} \left\{ \int_{s_0}^s \left[\left(a_{11} - 2a_{12} \frac{R_2}{R_1} + a_{22} \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{R_2}{r} T_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(a_{16} - a_{26} \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2}{r} S + \left(a_{12} - a_{22} \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2^2}{r} Z \right] ds \right\} + \\ + \frac{R_2}{h} \left[\left(a_{12} - a_{22} \frac{R_2}{R_1} \right) T_1 + a_{26} S + a_{22} R_2 Z \right] + \varphi_0 \sin \vartheta, \quad (26)$$

где φ_0 и ψ_0 — постоянные интегрирования, которые также определяются из граничных условий оболочки.

Полученные формулы для перемещений принципиально отличаются от соответствующих формул, полученных для случая симметрично нагруженной изотропной оболочки вращения. Здесь, в отличие от задачи изотропной оболочки, каждое перемещение (u , v , w) в отдельности зависит от всех трех компонентов (X , Y , Z) внешней поверхностной нагрузки. В силу этого легко заметить, что когда симметрично нагруженная анизотропная оболочка вращения статически неопределима, т. е. когда граничные условия таковы, что постоянные интегрирования U_0 , V_0 не могут быть определены без помощи соотношений (24) — (26), то каждая внутренняя сила (T_1 , T_2 , S) в отдельности тоже зависит от всех трех компонент внешней поверхностной нагрузки. Что же касается перемещений, то каждое из них, в случае статически определимой и в случае статически неопределимой задач, зависит от всех трех компонент внешней поверхностной нагрузки.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Цилиндрические оболочки. На основании условий применимости безмоментной теории оболочек мы должны считать, что рассматриваемые оболочки не содержат особенностей. Для срединной (координатной) поверхности круговой цилиндрической оболочки имеем

$$A = 1; \quad B = r = R_2 = R; \quad R_1 = \infty; \quad \vartheta = 0. \quad (27)$$

Тогда из формул (19)—(21) и (24)—(26) для внутренних сил и перемещений получим

$$T_1 = - \int_{s_0}^s X ds + \frac{U_0}{R}; \quad T_2 = RZ; \quad S = - \int_{s_0}^s Y ds + \frac{V_0}{R^2}; \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{h} \int_{s_0}^s (a_{11}T_1 + a_{16}S + a_{12}RZ) ds + \varphi_0; \\ v &= \frac{1}{h} \int_{s_0}^s (a_{16}T_1 + a_{66}S + a_{26}RZ) ds + \psi_0 R; \\ w &= \frac{R}{h} (a_{12}T_1 + a_{26}S + a_{22}RZ). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Круговая оболочка (радиуса кривизны R , длины L) несет равномерно распределенную, нормально приложенную поверхностную нагрузку интенсивностью q . Границы оболочки определяются двумя поперечными сечениями, перпендикулярными к оси z . Один из торцов ($s_0 = 0$) полностью закреплен, другой торец ($s_1 = L$) совершенно свободен (рис. 6).

Имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } s = 0 \quad u &= 0, \quad v = 0; \\ \text{при } s = L \quad T_1 &= 0, \quad S = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

и компоненты поверхностей нагрузки

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = q. \quad (31)$$

Из формулы (28) в силу соотношений (30) и (31) легко найти

$$T_1 = 0; \quad S = 0; \quad T_2 = Rq. \quad (32)$$

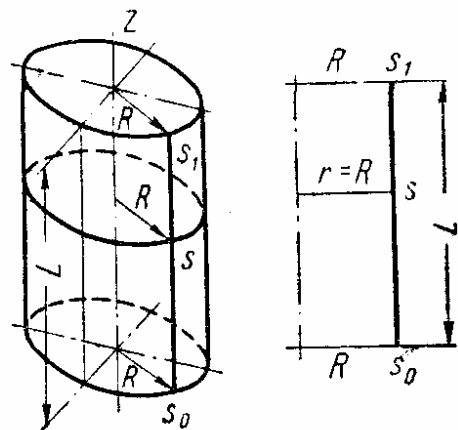


Рис. 6

Подставляя значения сил из равенств (32) в формулы (29) и с учетом граничных условий (30), производя соответствующие преобразования для перемещений, получим

$$u = a_{12} \frac{R}{h} qs; \quad v = a_{26} \frac{R}{h} qs; \quad w = a_{22} \frac{R^2}{h} q. \quad (33)$$

В частном случае ортотропной оболочки внутренние силы остаются без изменения, а для перемещений получим

$$u = a_{12} \frac{R}{h} qs; \quad v = 0; \quad w = a_{22} \frac{R^2}{h} q. \quad (34)$$

Круговая оболочка одним из торцов ($s_0 = 0$) закреплена, а другое торцовое сечение ($s_1 = L$) несет равномерно распределенное сдвигающее усилие интенсивностью S^* .

Имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } s = 0 \quad u = 0, \quad v = 0; \\ \text{при } s = L \quad T_1 = 0, \quad S = S^* \end{array} \right\} \quad (35)$$

и компоненты поверхностной нагрузки

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0. \quad (36)$$

Из формул (19)—(21) и (24)—(26) в силу выражений (35) и (36) получим

$$T_1 = 0; \quad T_2 = 0; \quad S = S^*. \quad (37)$$

$$u = a_{16} \frac{s}{h} S^*; \quad v = a_{66} \frac{s}{h} S^*; \quad w = a_{26} \frac{R}{h} S^*. \quad (38)$$

В случае ортотропной оболочки имеем соотношения (37) и

$$u = 0; \quad v = a_{66} \frac{s}{h} S^*; \quad w = 0. \quad (39)$$

Круговая оболочка несет равномерно распределенную, нормально приложенную поверхностную нагрузку интенсивностью q . Торцы оболочки ($s_0 = 0$; $s_1 = L$) закреплены. Имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } s = 0 \quad u = 0, \quad v = 0; \\ \text{при } s = L \quad u = 0, \quad v = 0 \end{array} \right\} \quad (40)$$

и компоненты поверхностной нагрузки

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = q. \quad (41)$$

Из формул (19)—(21) в силу равенств (41) имеем

$$T_1 = \frac{U_0}{R}; \quad T_2 = Rq; \quad S = \frac{V_0}{R^2}. \quad (42)$$

Задача внешне статически неопределимая, поэтому постоянные интегрирования U_0 , V_0 могут быть определены совместно с постоянными интегрирования φ_0 , ψ_0 , исходя из соотношений (24)—(26) и геометрических граничных условий (40).

После некоторых преобразований окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{a_{11}a_{66} - a_{16}^2} Rq; \quad S = \frac{a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}}{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}; \\ T_2 &= Rq; \quad u = 0; \quad v = 0; \\ w &= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) a_{66} - a_{22}a_{16}^2 + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2}{a_{11}a_{66} - a_{16}^2} \cdot \frac{R^2 q}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

В частном случае ортотропной оболочки

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} Rq; \quad T_2 = Rq; \quad S = 0; \\ u &= 0; \quad v = 0; \quad w = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \cdot \frac{R^2 q}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Конические оболочки. На основании известных условий применимости безмоментной теории оболочек следует предполагать, что рассматриваемые конические оболочки не содержат вершины конуса.

Для срединной поверхности круговой конической оболочки имеем (рис. 7)

$$\left. \begin{aligned} A &= 1; B = r = (s' - s) \sin \alpha; \\ R_1 &= \infty; \quad B_2 = (s' - s) \operatorname{tg} \alpha; \\ \vartheta &= \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

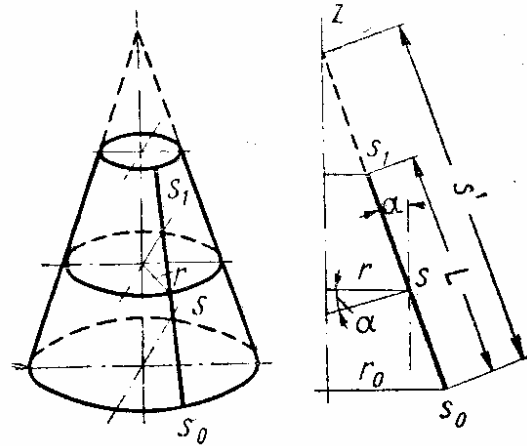


Рис. 7

где s' — длина образующей полного конуса.

Тогда из формул (19)–(21) и (24)–(26) для внутренних сил и перемещений получим

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{(s' - s) \cos \alpha \sin \alpha} \times \\ &\times \left[\int_{s_0}^s (X \cos \alpha + Z \sin \alpha) (s' - s) \sin \alpha ds - U_0 \right]; \\ T_2 &= Z (s' - s) \operatorname{tg} \alpha; \\ S &= -\frac{1}{(s' - s)^2 \sin^2 \alpha} \times \\ &\times \left[\int_{s_0}^s Y (s' - s)^2 \sin^2 \alpha ds - V_0 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{1}{h} \int_{s_0}^s \left[a_{11} T_1 + a_{16} S + a_{12} (s' - s) Z \operatorname{tg} \alpha \right] ds + \varphi_0 \cos \alpha; \\
 v &= \frac{s' - s}{h} \int_{s_0}^s [a_{16} T_1 + a_{66} S + a_{26} (s' - s) Z \operatorname{tg} \alpha] \frac{ds}{s' - s} + \\
 &\quad + \psi_0 (s' - s) \sin \alpha; \\
 w &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{h} \int_{s_0}^s [a_{11} T + a_{16} S + a_{12} (s' - s) Z \operatorname{tg} \alpha] ds + \\
 &+ \frac{(s' - s) \operatorname{tg} \alpha}{h} [a_{12} T_1 - a_{26} S + a_{22} (s' - s) Z \operatorname{tg} \alpha] + \varphi_0 \sin \alpha.
 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Усеченная коническая оболочка несет равномерно распределенную, нормально приложенную поверхностную нагрузку интенсивностью q . Границы оболочки определяют двумя поперечными сечениями. Один из торцов оболочки ($s_0 = 0$) полностью закреплен, а другой торец ($s_1 = L$) совершенно свободен.

Имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{при } s = 0 \quad u = 0, \quad v = 0; \\
 \text{при } s = L \quad T_1 = 0, \quad S = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

и компоненты поверхностных нагрузок

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = q. \quad (49)$$

Из формул (46) и (47) в силу равенств (48) и (49) для внутренних сил и перемещений получим

$$\left. \begin{aligned}
 T_1 &= q \frac{s^2 - L^2 + 2s'(L - s)}{2(s' - s)} \operatorname{tg} \alpha; \\
 T_2 &= q(s' - s) \operatorname{tg} \alpha; \quad S = 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \left\{ a_{11} \left[ss' + \frac{s^2}{2} + (s' - L) \ln \left(1 - \frac{S}{S'} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2a_{12} \left(s's - \frac{s^2}{2} \right) \right\} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2h} q; \\
 v &= \left\{ \frac{a_{16}}{2} \left[s - \frac{(s' - L)^2 s}{s'(s' - s)} \right] + a_{26} s \right\} \frac{(s' - s) \operatorname{tg} \alpha}{h} q; \\
 w &= \left\{ \left[a_{12} \frac{s^2 - L^2 + 2(L - s)s'}{(s' - s)} + 2a_{22}(s' - s) \right] (s' - s) + \right. \\
 &\quad \left. + a_{11} \left[s's - \frac{s^2}{2} + (s' - L)^2 \ln \left(1 - \frac{s}{s'} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2a_{12} \left(s's - \frac{s^2}{2} \right) \right\} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2h} q.
 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

В частном случае ортотропной оболочки все внутренние силы и перемещения, кроме тангенциального перемещения v , остаются неизменными. Перемещение v обращается в нуль.

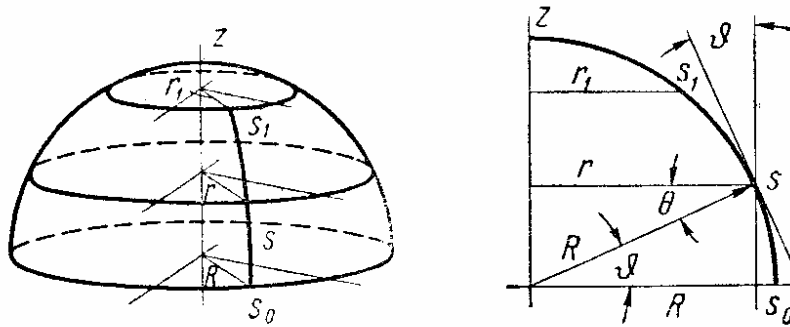


Рис. 8

Сферические оболочки. В случае сферической оболочки, если дугу s отсчитывать от экватора сферы, для срединной поверхности сферической оболочки получим (рис. 8)

$$\left. \begin{aligned} A &= 1; \quad B = r = R \cos \frac{s}{R}; \\ R_1 &= R_2 = R; \quad \vartheta = \frac{s}{R}; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

R — радиус сферы.

Тогда из формул (19)—(21) и (24)—(26) для внутренних сил и перемещений получим

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{R \cos^2 \frac{s}{R}} \times \\ &\times \left[\int_{s_0}^s \left(X \cos \frac{s}{R} + Z \sin \frac{s}{R} \right) R \cos \frac{s}{R} ds - U_0 \right]; \\ T_2 &= \frac{1}{R \cos^2 \frac{s}{R}} \times \\ &\times \left[\int_{s_0}^s \left(X \cos \frac{s}{R} + Z \sin \frac{s}{R} \right) R \cos \frac{s}{R} ds - U_0 \right] + RZ; \\ S &= -\frac{1}{R^2 \cos^2 \frac{s}{R}} \left(\int_{s_0}^s Y R^2 \cos^2 \frac{s}{R} ds - V_0 \right); \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\cos \frac{s}{R}}{h} \int_{s_0}^s [(a_{11} - 2a_{12} + a_{22}) T_1 + (a_{16} - a_{26}) S + \\
 &\quad + (a_{12} - a_{22}) RZ] \frac{ds}{\cos \frac{s}{R}} + \varphi_0 \cos \frac{s}{R}; \\
 v &= \frac{\cos \frac{s}{R}}{h} \int_{s_0}^s [(a_{16} - a_{26}) T_1 + a_{66} S + a_{26} RZ] \times \\
 &\quad \times \frac{ds}{\cos \frac{s}{R}} + \psi_0 R \cos \frac{s}{R}; \\
 w &= \frac{\sin \frac{s}{R}}{h} \int_{s_0}^s [(a_{11} - 2a_{12} + a_{22}) T_1 + (a_{16} - a_{26}) S + \\
 &\quad + (a_{12} - a_{22}) RZ] \frac{ds}{\cos \frac{s}{R}} + \frac{R}{h} [(a_{12} - a_{22}) T_1 + \\
 &\quad + a_{26} S + a_{22} RZ] + \varphi_0 \sin \frac{s}{R}.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Сферическая полоса одним из торцов ($s_0 = 0$) закреплена полностью, другое торцовое сечение ($s_1 = L$) несет равномерно распределенное тангенциальное усилие интенсивностью T^* .

Имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{при } s = 0 \quad u = 0, \quad v = 0 \\
 \text{при } s = L \quad T_1 = T^*, \quad s = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{55}$$

и компоненты поверхностной нагрузки

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0. \tag{56}$$

Из формул (53) и (54) в силу условий (55) и (56) для внутренних сил и перемещений получим

$$T_1 = \frac{\cos^2 \frac{L}{R}}{\cos^2 \frac{s}{R}} T^*; \quad T_2 = -\frac{\cos^2 \frac{L}{R}}{\cos^2 \frac{s}{R}}; \quad s = 0; \tag{57}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{RT^*}{2h} (a_{11} - 2a_{12} + a_{22}) \times \\
 &\times \left[\operatorname{tg} \frac{s}{R} + \cos \left(\frac{s}{R} \right) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{s}{2R} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos^2 \frac{L}{R}; \\
 v &= \frac{RT^*}{2h} (a_{16} - a_{26}) \times \\
 &\times \left[\cos \left(\frac{s}{R} \right) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{s}{2R} + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \frac{s}{R} \right] \cos^2 \frac{L}{R}; \\
 w &= \frac{RT^*}{h} (a_{12} - a_{22}) \frac{\cos^2 \frac{L}{R}}{\cos^2 \frac{s}{R}} + \\
 &+ \frac{RT^*}{2h} (a_{11} - 2a_{12} + a_{22}) \times \\
 &\times \left[\sin \left(\frac{s}{R} \right) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{s}{2R} + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{R} \right] \cos^2 \frac{L}{R}.
 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Полагаем, что оболочка вращения нагружена симметрично относительно оси вращения ($X \neq 0$, $Y = 0$, $Z \neq 0$) и имеет соответствующие симметричные граничные условия. Считаем, что оболочка составлена из слоев, материалы которых ортотропны и расположены так, что в каждой точке каждого слоя одна из плоскостей упругой симметрии параллельна координатной поверхности, а остальные две перпендикулярны к соответствующим меридианам и параллелям (см. рис. 4).

В этом случае оболочка будет деформироваться, оставаясь телом вращения, поэтому внутренние усилия и перемещения не будут функциями угловой координаты φ . В оболочке возникнут внутренние силы $T_1 = T_1(s)$; $T_2 = T_2(s)$; $N_1 = N_1(s)$ и изгибающие моменты $M_1 = M_1(s)$; $M_2 = M_2(s)$, а из перемещений отличными от нуля будут лишь u и w .

Тогда уравнения равновесия (2) и соотношения (3), (4) примут вид

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{ds} (rT_1) + T_2 \sin \vartheta + \frac{r}{R_1} N &= -rX; \\
 \frac{d}{ds} (rN) - r \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) &= -rZ; \\
 \frac{d}{ds} (rM_1) + M_2 \sin \vartheta - rN &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} (w \cos \vartheta - u \sin \vartheta); \quad (60)$$

$$\kappa_1 = -\frac{dW}{ds}; \quad \kappa_2 = W \frac{\sin \vartheta}{r}, \quad (61)$$

где угол поворота нормального элемента оболочки в плоскости меридиана имеет значение

$$W = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R}. \quad (62)$$

Из соотношений (60) и (61) легко получить необходимое в дальнейшем уравнение неразрывности деформаций

$$r \frac{d\varepsilon_2}{ds} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \vartheta - W \cos \vartheta = 0. \quad (63)$$

Наконец, из формул (5) и (6) получим следующие соотношения упругости:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{11}\kappa_1 + K_{12}\kappa_2; \\ T_2 &= C_{22}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\kappa_2 + K_{12}\kappa_1; \\ M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2; \\ M_2 &= D_{22}\kappa_2 + D_{12}\kappa_1 + K_{22}\varepsilon_2 + K_{12}\varepsilon_1. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Жесткость целесообразнее определять по формулам (10), т. е. полагать, что координатная поверхность совпадает с внутренней поверхностью оболочки.

Напряжения в слоях определяют по формулам (15), полагая, что $B_{16}^i = B_{26}^i = 0$.

Введем вспомогательную функцию $V = V(s)$ так, чтобы удовлетворялись уравнения (2):

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{\sin \vartheta}{r} V + \frac{1}{r} F_1(s); & T_2 &= \frac{dV}{ds}; \\ N &= \frac{\cos \vartheta}{r} V + \frac{1}{r} F_2(s), \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \sin \vartheta \int_{s_0}^s r E_r ds + \cos \vartheta \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right); \\ F_2 &= -\cos \vartheta \int_{s_0}^s r E_r ds + \sin \vartheta \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right); \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

здесь E_r и E_z — составляющие внешней поверхностной нагрузки по направлениям соответственно r и z ; P_z^0 — значение главного вектора внешних сил, приложенных к параллельному кругу $s = S_0$ с радиусом r_0 .

Очевидно (рис. 9)

$$E_r = Z \cos \vartheta - X \sin \vartheta; \quad E_z = Z \sin \vartheta + X \cos \vartheta; \quad (67)$$

$$P_z^0 = (T_1^0 \cos \vartheta_0 + N^0 \sin \vartheta_0) 2\pi r_0. \quad (68)$$

Пользуясь приведенными выше уравнениями и соотношениями [1], нетрудно построить полную систему дифференциальных уравнений

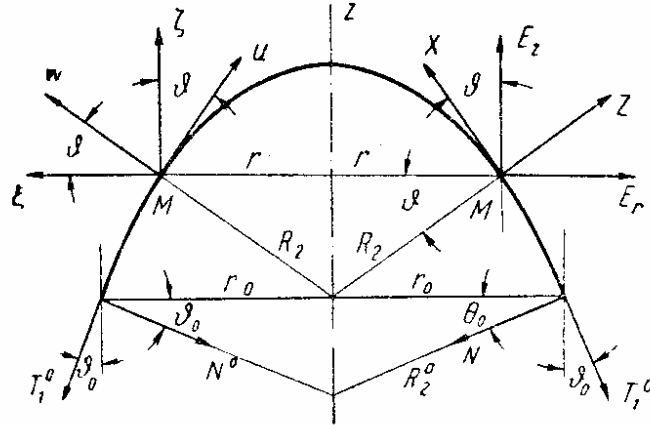


Рис. 9

относительно искомых функций $W(s)$ и $V(s)$. Окончательно эту систему можно записать

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{dV}{ds} + \left(\frac{C_{12}}{C_{11}} \cdot \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right) V = \\ & = \frac{P_1}{C_{11}} \cdot \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{P_2 - P_1}{C_{11}} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{dW}{ds} + \\ & + \left[\frac{\Omega}{C_{11}} \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{P_4}{C_{11}} \cdot \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{P_3}{C_{11}} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right] W + \Phi_1(s); \\ & \frac{d^2 W}{ds^2} - \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{dW}{ds} - \\ & - \left(\frac{D_{12} - D_{12}^0}{D_{11} - D_{11}^0} \cdot \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{D_{22} - D_{22}^0}{D_{11} - D_{11}^0} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right) W = \\ & = - \frac{P_1}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)} \cdot \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{P_1 + P_2}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{dV}{ds} - \\ & - \left[\frac{1}{(D_{11} - D_{11}^0)} \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{P_5}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)} \cdot \frac{1}{R_1 R_2} - \right. \\ & \left. - \frac{P_3}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right] V + \Phi_2(s), \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= K_{11}C_{12} - K_{12}C_{11}; & P_2 &= K_{22}C_{11} - K_{11}C_{22}; \\ P_3 &= K_{22}C_{12} - K_{12}C_{22}; & P_4 &= K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}; \\ P_5 &= K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}; \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{C_{12}}{C_{11}} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{ds} F_1(s) - \frac{C_{22}}{C_{11}} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^2} F_1(s); \\ \Phi_2 &= \frac{P_5}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{ds} F_1(s) - \\ &\quad - \frac{1}{r (D_{11} - D_{11}^0)} F_2(s) - \\ &\quad - \frac{P_3}{\Omega (D_{11} - D_{11}^0)} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^2} F_1(s); \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^0 &= \frac{(K_{11})^2 C_{22} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + (K_{12})^2 C_{11}}{\Omega}; \\ D_{22}^0 &= \frac{(K_{22})^2 C_{11} - 2K_{22}K_{12}C_{12} + (K_{12})^2 C_{22}}{\Omega}; \\ D_{12}^0 &= \frac{K_{11}K_{12}C_{22} - [K_{11}K_{22} + (K_{12})^2] C_{12} + K_{22}K_{12}C_{11}}{\Omega}; \\ \Omega &= C_{11}C_{12} - C_{12}^2. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Для полноты выпишем также формулы изгибающих моментов и напряжений в слоях, представленные с помощью искоемых функций W и V :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= - \left[(D_{11} - D_{11}^0) \frac{dW}{ds} - (D_{12} - D_{12}^0) \frac{\sin \vartheta}{r} W + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_1}{\Omega} \cdot \frac{dV}{ds} + \frac{P_5}{\Omega} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} V - \frac{P_5}{\Omega} \cdot \frac{1}{r} F_1(s) \right]; \\ M_2 &= - \left[(D_{12} - D_{12}^0) \frac{dW}{ds} - (D_{22} - D_{22}^0) \frac{\sin \vartheta}{r} W - \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_4}{\Omega} \cdot \frac{dV}{ds} - \frac{P_3}{\Omega} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} V + \frac{P_3}{\Omega} \cdot \frac{1}{r} F_1(s) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_s^i &= -\frac{1}{\Omega} \left(\Delta_{12}^i \frac{\sin \vartheta}{r} V + \Delta_{11}^i \frac{dV}{ds} \right) + \\
&+ \left[\frac{1}{\Omega} (K_{11}\Delta_{12}^i - K_{12}\Delta_{11}^i) - \gamma B_{11}^i \right] \frac{dW}{ds} - \\
&- \left[\frac{1}{\Omega} (K_{12}\Delta_{12}^i - K_{22}\Delta_{11}^i) - \gamma B_{12}^i \right] \frac{\sin \vartheta}{r} W + \\
&\quad + \frac{\Delta_{12}^i}{\Omega} \cdot \frac{1}{r} F_1(s); \\
\sigma_\varphi^i &= \frac{1}{\Omega} \left(\Delta_{22}^i \frac{\sin \vartheta}{r} V + \Delta_{21}^i \frac{dV}{ds} \right) - \\
&- \left[\frac{1}{\Omega} (K_{11}\Delta_{22}^i - K_{12}\Delta_{21}^i) + \gamma B_{22}^i \right] \frac{dW}{ds} + \\
&+ \left[\frac{1}{\Omega} (K_{12}\Delta_{22}^i - K_{22}\Delta_{21}^i) + \gamma B_{22}^i \right] \frac{\sin \vartheta}{r} W - \\
&\quad - \frac{\Delta_{22}^i}{\Omega} \cdot \frac{1}{r} F_1(s); \\
\Delta_{11}^i &= B_{11}^i C_{12} - B_{12}^i C_{11}; \quad \Delta_{22}^i = B_{22}^i C_{12} - B_{12}^i C_{22}; \\
\Delta_{12}^i &= B_{11}^i C_{22} - B_{12}^i C_{12}; \quad \Delta_{21}^i = B_{22}^i C_{11} - B_{12}^i C_{12};
\end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Вектор полного перемещения можно представить не только посредством обычных компонентов перемещения u , w , но и с помощью величин: e_z — перемещения по оси z ; e_r — перемещения по радиусу r .

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned}
e_z &= u \cos \vartheta + w \sin \vartheta; \\
e_r &= w \cos \vartheta - u \sin \vartheta;
\end{aligned} \right\} \quad (75)$$

далее

$$e_r = r\varepsilon_2; \quad e_z = e_z^0 + \int_{s_0}^s (\varepsilon_1 \cos \vartheta + W \sin \vartheta) ds; \quad (76)$$

$$\left. \begin{aligned}
u &= -\varepsilon_2 r \sin \vartheta + \left[e_z^0 + \int_{s_0}^s (\varepsilon_1 \cos \vartheta + W \sin \vartheta) ds \right] \cos \vartheta; \\
w &= \varepsilon_2 r \cos \vartheta + \left[e_z^0 + \int_{s_0}^s (\varepsilon_1 \cos \vartheta + W \sin \vartheta) ds \right] \sin \vartheta,
\end{aligned} \right\} \quad (77)$$

где e_z^0 — постоянная, определяющая жесткое смещение оболочки вдоль оси z .

В случае, когда оболочка составлена из нечетного числа $(2m + 1)$ слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки, и если принять, что срединная поверхность является координатной поверхностью, то жесткости будут (рис. 10)

$$\left. \begin{aligned} C_{jk} &= 2 \left[B_{jk}^{m+1} h_{m+1} + \sum_{s=1}^m B_{jk}^s (h_s - h_{s+1}) \right]; \\ D_{jk} &= \frac{2}{3} \left[B_{jk}^{m+1} h_{m+1}^3 + \sum_{s=1}^m B_{jk}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right]; \\ K_{jk} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

При этом существенно упрощаются расчетные формулы и уравнения.

Внутренние силы по-прежнему определяют из выражений (65). Для моментов получим

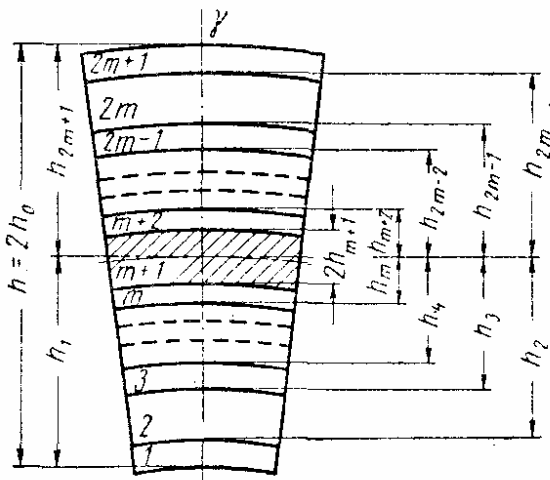


Рис. 10

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D_{11} \frac{dW}{ds} + \\ &+ D_{12} \frac{\sin \vartheta}{r} W; \\ M_2 &= -D_{12} \frac{dW}{ds} + \\ &+ D_{22} \frac{\sin \vartheta}{r} W. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Формулы для напряжений в слоях (74) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= -\frac{1}{\Omega} \left(\Delta_{12}^i \frac{\sin \vartheta}{r} V + \Delta_{11}^i \frac{dV}{ds} \right) - \\ &- \gamma \left(B_{11}^i \frac{dW}{ds} - B_{12}^i \frac{\sin \vartheta}{r} W \right) + \frac{\Delta_{12}^i}{\Omega} \cdot \frac{1}{r} F_1; \\ \sigma_\varphi^i &= \frac{1}{\Omega} \left(\Delta_{22}^i \frac{\sin \vartheta}{r} V + \Delta_{21}^i \frac{dV}{ds} \right) - \\ &- \gamma \left(B_{12}^i \frac{dW}{ds} - B_{22}^i \frac{\sin \vartheta}{r} W \right) - \frac{\Delta_{22}^i}{\Omega} \cdot \frac{1}{r} F_1. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Перемещения можно определить с помощью формул (76), (77), а для деформаций имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{1}{\Omega} \left(C_{22} \frac{\sin \vartheta}{r} V + C_{12} \frac{dV}{ds} - C_{22} \frac{1}{r} F_1 \right); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\Omega} \left(C_{12} \frac{\sin \vartheta}{r} V + C_{11} \frac{dV}{ds} - C_{12} \frac{1}{r} F_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Наконец, из системы уравнений (69) получим новую более простую систему дифференциальных уравнений относительно искомых V и W :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{dV}{ds} + \left(\frac{C_{12}}{C_{11}} \cdot \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right) V &= \\ &= \frac{\Omega}{C_{11}} \cdot \frac{1}{R_2} W + \Phi_1; \\ \frac{d^2 W}{ds^2} - \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{dW}{ds} - \left(\frac{D_{12}}{D_{11}} \cdot \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right) W &= \\ &= -\frac{1}{D_{11}} \cdot \frac{1}{R_2} V + \Phi_2, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

где для Φ_1 имеем прежнее выражение (71), а для Φ_2 будет

$$\Phi_2 = -\frac{1}{D_{11}} \cdot \frac{1}{r} F_2. \quad (83)$$

В частном случае, когда оболочка составлена из одного однородного слоя, полагая, что координатная поверхность ($\gamma = 0$) совпадает со срединной поверхностью оболочки, для жесткостей C_{jk} , D_{jk} из формул (78) получим

$$C_{jk} = h B_{jk}; \quad D_{jk} = \frac{h^3}{12} B_{jk}. \quad (84)$$

Тогда для внутренних сил и моментов найдем

$$\begin{aligned} T_1 &= h (B_{11} \varepsilon_1 + B_{12} \varepsilon_2); \quad T_2 = h (B_{22} \varepsilon_2 + B_{12} \varepsilon_1); \\ M_1 &= \frac{h^3}{12} (B_{11} \kappa_1 + B_{12} \kappa_2); \quad M_2 = \frac{h^3}{12} (B_{22} \kappa_2 + B_{12} \kappa_1). \end{aligned}$$

Формулы (61), представляющие изменения кривизны, остаются неизменными, а для деформаций из выражений (81) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{1}{L (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)} \left[B_{22} \frac{\sin \vartheta}{r} V + B_{12} \frac{dV}{ds} - B_{22} \frac{1}{r} F_1 \right]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{L (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)} \left[B_{12} \frac{\sin \vartheta}{r} V + B_{11} \frac{dV}{ds} - B_{12} \frac{1}{r} F_1 \right]. \end{aligned}$$

Для нормальных напряжений имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= -\frac{\sin \vartheta V}{rh} - \gamma \left(B_{11} \frac{dW}{ds} - B_{12} \frac{\sin \vartheta}{r} W \right) + \frac{1}{rh} F_1; \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{h} \cdot \frac{dV}{ds} - \gamma \left(B_{12} \frac{dW}{ds} - B_{22} \frac{\sin \vartheta}{r} W \right). \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Внутренние силы T_1 , T_2 , N определяют по обычным формулам (65), а моменты будут

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{h^3}{12} \left(B_{11} \frac{dW}{ds} - B_{12} \frac{\sin \vartheta}{r} W \right); \\ M_2 &= -\frac{h^3}{12} \left(B_{12} \frac{dW}{ds} - B_{22} \frac{\sin \vartheta}{r} W \right). \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

В этом случае система разрешающих уравнений принимает вид

$$\left. \begin{aligned} &\frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{dV}{ds} + \\ &+ \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \cdot \frac{1}{R_1 R_2} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right) V = \\ &= \frac{h (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}} \cdot \frac{1}{R_2} W + \Phi_1; \\ &\frac{d^2 W}{ds^2} - \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{dW}{ds} - \\ &- \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \cdot \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right) W = \\ &= -\frac{12}{B_{11} h^3} \cdot \frac{1}{R_2} V + \Phi_2. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{B_{12}}{B_{11}} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{ds} F_1 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^2} F_1; \\ \Phi_2 &= -\frac{12}{B_{11} h^3 r} F_2 \end{aligned}$$

Сравнивая основные уравнения и расчетные формулы, приведенные на стр. 152—174, замечаем, что все формулы для однослойных оболочек получаются из уравнений для симметрично собранных слоистых оболочек путем элементарных подстановок. В связи с этим в последующем будем рассматривать только общий случай, т. е. слоистые оболочки.

Система уравнений (82) с точностью первого приближения асимптотического интегрирования [3, 4, 5] (точность которого для целей инженерного расчета вполне достаточна) может быть приведена к одному уравнению относительно искомой комплексной функции

$$\sigma = W - i \frac{C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega}{C_{11} D_{11}}} V. \quad (88)$$

Произведя известные преобразования, из дифференциальных уравнений (82) получим

$$L(\sigma) + i \sqrt{\frac{\Omega}{C_{11} D_{11}}} \cdot \frac{\sigma}{R_2} = \Phi(s), \quad (89)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(s) &= -\frac{F_2}{rD_{11}} - \frac{i}{r} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\Omega}{C_{11}D_{11}}}}{\Omega} \times \\ &\times \left[C_{12} \frac{dF_1}{ds} - C_{22} \frac{\sin \vartheta}{r} F_1 \right]; \\ L(\cdot) &= \frac{d^2(\cdot)}{ds^2} - \frac{\sin \vartheta}{r} \cdot \frac{d(\cdot)}{ds} - \lambda \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}(\cdot); \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

здесь $\lambda = \frac{C_{22}}{C_{11}} = \frac{D_{22}}{D_{11}}$ — произвольное постоянное, которое в общем случае точно выполняется для однослойных оболочек, а также в случае, когда отношение $\frac{B_{22}^i}{B_{11}^i}$ для всех слоев имеет одинаковое значение.

Для полноты укажем, что введение этого ограничения для общего случая упрощает ход расчета, однако если ограничиться точностью первого приближения асимптотического интегрирования, то введение понятия λ не будет влиять на дальнейший ход расчета симметрично собранной ортотропной оболочки вращения в общем случае ортотропии материала слоев [1].

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ (89)

Многочисленные исследования анизотропных слоистых оболочек вращения показывают, что, как и в случае изотропных оболочек, частное решение уравнения (89), отвечающее правой части уравнения, при достаточно плавном изменении внешней нагрузки может быть построено по безмоментной теории.

Не вдаваясь в известные подробности, приведем частное решение (безмоментное) и значения расчетных величин, отвечающих частному решению

$$\sigma^0 = i \frac{C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega}{C_{11}D_{11}}} \cdot \frac{F_2}{\cos \vartheta}; \quad (91)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1^0 &= 0; \quad M_2^0 = 0; \quad N^0 = 0; \\ W^0 &= 0; \quad V^0 = -\frac{F_2}{\cos \vartheta}; \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1^0 &= \frac{1}{R_2 \cos^2 \vartheta} \left[\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right]; \\ T_2^0 &= -\frac{1}{R_1 \cos^2 \vartheta} \left[\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right] + R_2 Z. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Основным методом получения общего решения однородного уравнения симметрично нагруженных анизотропных оболочек вращения, соответствующего уравнению (89), будем считать метод асимптотического интегрирования, который в состоянии обеспечить необходимую точность, отвечающую точности разрешающего уравнения (89).

Здесь мы в основном будем приводить окончательные результаты об асимптотическом интегрировании уравнений теории оболочек вообще, подробнее см. работу [3].

Решение уравнения (89) будем искать в виде

$$\sigma = \varphi(s, k) e^{kf(s)}, \quad (94)$$

где $\varphi(s, k)$ — функция интенсивности, которая может быть представлена в виде асимптотического ряда:

$$\varphi(s, k) \sim \sigma_0(s) + \frac{\sigma_1(s)}{k} + \frac{\sigma_2(s)}{k^2} + \dots + \frac{\sigma_n(s)}{k^n} + \dots \quad (\sigma \neq 0); \quad (95)$$

$f(s)$ — функция изменяемости; k — большой параметр вида

$$k^2 = \Delta = \sqrt{\frac{\Omega}{C_{11}D_{11}}}. \quad (96)$$

Ограничиваясь первым приближением асимптотического интегрирования и произведя некоторые преобразования с точностью первого приближения, получим

$$\begin{aligned} \sigma = & (C_1 \cos \beta - D_1 \sin \beta) e^{-\beta} + (C_2 \cos \beta + D_2 \sin \beta) e^{\beta} + \\ & + i[(C_1 \sin \beta + D_1 \cos \beta) e^{-\beta} - (C_2 \sin \beta - D_2 \cos \beta) e^{\beta}]; \end{aligned} \quad (97)$$

здесь C_i, D_i — постоянные интегрирования;

$$\beta = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{R_2}}. \quad (98)$$

Прибавляя к равенству (97) частное решение (91) и учитывая уравнение (88), окончательно для искомых W и V получим

$$\left. \begin{aligned} W = & (C_1 \cos \beta - D_1 \sin \beta) e^{-\beta} + (C_2 \cos \beta + D_2 \sin \beta) e^{\beta}; \\ V = & -\frac{\Omega}{\Delta C_{11}} [(C_1 \sin \beta + D_1 \cos \beta) e^{-\beta} - \\ & - (C_2 \sin \beta - D_2 \cos \beta) e^{\beta}] - \frac{F_2}{\cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Введем новую переменную (см. рис. 3 и 4)

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{R_2}} - \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \int_{s_0}^s \frac{ds}{R_2} \quad (100)$$

и, обозначив постоянное

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{R_2}}, \quad (101)$$

для независимого переменного β получим

$$\beta = \alpha_0 - \beta_1. \quad (102)$$

Введя новые постоянные интегрирования (A_1, A_2, B_1, B_2) и произведя серию элементарных преобразований, окончательно для искомых функций получим

$$\left. \begin{aligned} W &= A_1 \theta(\beta) + B_1 \zeta(\beta) + A_2 \theta(\beta_1) + B_2 \zeta(\beta_1); \\ V &= \frac{\Omega}{\Delta C_{11}} [-A_1 \zeta(\beta) + B_1 \theta(\beta) - A_2 \zeta(\beta_1) + \\ &\quad + B_2 \theta(\beta_1)] - \frac{F_2(s)}{\cos \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

где для известных табулированных функций (см. табл. 1 гл. 21 т. 1) введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \theta(\beta) &= e^{-\beta} \cos \beta; \quad \zeta(\beta) = e^{-\beta} \sin \beta; \\ \varphi(\beta) &= \theta(\beta) + \zeta(\beta); \quad \psi(\beta) = \theta(\beta) - \zeta(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Исходя из выражений (103) для расчетных величин получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \Delta D_{11} [A_1 \zeta(\beta) - B_1 \theta(\beta) + A_2 \zeta(\beta_1) - B_2 \theta(\beta_1)] \times \\ &\quad \times \frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{1}{R_2 \cos^2 \vartheta} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right); \\ T_2 &= D_{11} \sqrt{\frac{\Delta^3}{2R_2}} [-A_1 \psi(\beta) - B_1 \varphi(\beta) + \\ &\quad + A_2 \psi(\beta_1) + B_2 \varphi(\beta_1)] - \frac{1}{R_1 \cos^2 \vartheta} \times \\ &\quad \times \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right) + R_2 Z; \\ N &= \Delta D_{11} [B_1 \theta(\beta) - A_1 \zeta(\beta) + B_2 \theta(\beta_1) - \\ &\quad - A_2 \zeta(\beta_1)] \frac{\cos \vartheta}{r}; \\ M_1 &= D_{11} \sqrt{\frac{\Delta}{2R_2}} [A_1 \varphi(\beta) - B_1 \psi(\beta) - \\ &\quad - A_2 \varphi(\beta_1) + B_2 \psi(\beta_1)]; \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

$$M_2 = D_{12} \sqrt{\frac{\Delta}{2R_2}} [A_1\varphi(\beta) - B_1\psi(\beta) - A_2\varphi(\beta_1) + B_2\psi(\beta_1)] + D_{22} [A_1\theta(\beta) + B_1\zeta(\beta) + A_2\theta(\beta_1) + B_2\zeta(\beta_1)] \frac{\sin \vartheta}{r}. \quad (105)$$

Формулы для определения напряжений в слоях (80) и перемещений (76), (77), (81) остаются без изменений. В эти формулы наряду с V и W входят их производные

$$\begin{aligned} \frac{dV}{ds} &= D_{11} \sqrt{\frac{\Delta^3}{2R_2}} [-A_1\psi(\beta) - B_1\varphi(\beta) + A_2\psi(\beta_1) + B_2\varphi(\beta_1)] - \\ &\quad - \frac{1}{R_1 \cos^2 \vartheta} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right) + R_2 Z; \\ \frac{d^2V}{ds^2} &= \frac{\Omega}{C_{11}R_2} [A\theta(\beta) + B_1\zeta(\beta) + A_2\theta(\beta_1) + B_2\zeta(\beta_1)]; \\ \frac{dW}{ds} &= - \sqrt{\frac{\Delta}{2R_2}} [A_1\varphi(\beta) - B_1\psi(\beta) - A_2\varphi(\beta_1) + B_2\psi(\beta_1)]; \\ \frac{d^2W}{ds^2} &= \frac{A}{R_2} [A_1\zeta(\beta) - B_1\theta(\beta) + A_2\zeta(\beta_1) - B_2\theta(\beta_1)]. \end{aligned}$$

Укажем, что при получении этих формул отбрасывались члены порядка $\sqrt{\frac{h}{R_i}}$.

КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ В АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧКАХ. ДЛИННЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Если начало отсчета координаты s совместить с одним краем оболочки, а длину оболочки по дуге меридиана обозначить через L , то для значений β , соответствующих краям оболочки, будем иметь

$$\beta = 0; \quad \beta = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \int_0^L \frac{ds}{\sqrt{R_2}} = \alpha_0. \quad (106)$$

Тогда через $\beta_1 = \alpha_0 - \beta$ будет представлена координата текущего поперечного сечения оболочки, отсчитанная от края $s = L$ (рис. 11).

Рассматривая функции, входящие в решение (103), замечаем, что функции $\theta(\beta)$, $\zeta(\beta)$ убывают при удалении от края $s = 0$, а функции $\theta(\beta_1)$, $\zeta(\beta_1)$ — при удалении от края $s = L$. Эти функции уже при $\beta_i = \pi$ имеют порядок 0,04. Поэтому если исследуемая точка находится на окружности поперечного сечения оболочки, удаленной от края оболочки настолько, что при заданных упругих постоянных $\beta_i \geq \pi$,

то влиянием этого края на напряженное состояние точек исследуемой окружности или более удаленных точек с точностью технического расчета можно пренебречь. Зона оболочки, примыкающая к краю, в которой нельзя пренебрегать влиянием краевых усилий, называется *зоной распространения краевого эффекта*.

Длину (по дуге меридиана) зоны распространения краевого эффекта можно определить по формуле

$$s^* = \pi \sqrt{\frac{2R_2}{\Delta}}. \quad (107)$$

В частном случае однослойной ортотропной оболочки в силу выражений (72), (83) и (96) для s^* имеем

$$s^* = \frac{\pi R^2 \sqrt{\frac{h}{R_2}}}{\sqrt[4]{3 \left(\frac{E_\varphi}{E_s} - \nu_2^2 \right)}}. \quad (108)$$

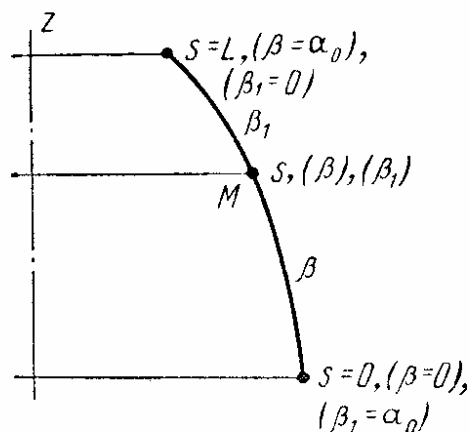


Рис. 11

Оболочки, в которых взаимным влиянием краев можно пренебречь (т. е. оболочки, длина которых больше s^*), называют *длинными*.

Приведенные ранее результаты вполне достаточны для расчета как длинных, так и коротких оболочек вращения. Однако в последующем

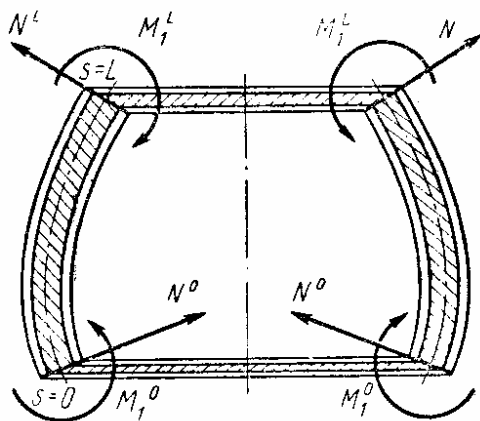


Рис. 12

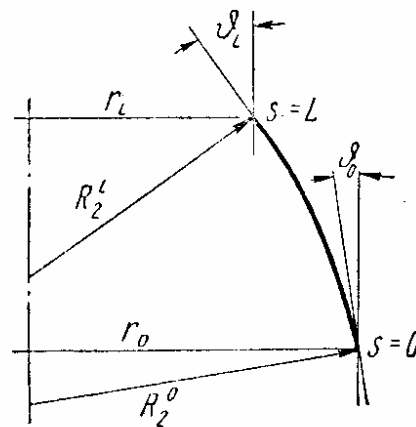


Рис. 13

будем рассматривать лишь данные оболочки, как наиболее важные для практических расчетов.

Рассмотрим длинную оболочку вращения, по краям ($s=0$, $s=L$) которой действуют изгибающие моменты M_1^0 , M_1^L и перерезывающие силы N^0 , N^L (рис. 12 и 13).

Учитывая особенность длинных оболочек, в последующих преобразованиях отбрасываем функции β_1 , когда вычисляем величины, относящиеся к краю $s=0$, и функции β при вычислении величин, относящихся к краю $s=L$.

После несложных преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{\Delta D_{11}} \left[R_2^0 N^0 \Phi(\beta) + \sqrt{2R_2^0 \Delta} M_1^0 \theta(\beta) + \right. \\ &\quad \left. + R_2^L N^L \Phi(\beta_1) - \sqrt{2R_2^L \Delta} M_1^L \theta(\beta_1) \right]; \\ V &= \left[R_2^0 N^0 \Psi(\beta) - \sqrt{2R_2^0 \Delta} M_1^0 \zeta(\beta) + R_2^L N^L \Psi(\beta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2R_2^L \Delta} M_1^L \zeta(\beta_1) \right] - \frac{F_2(s)}{\cos \vartheta}; \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \left[-R_2^0 N^0 \Psi(\beta) + \sqrt{2R_2^0 \Delta} M_1^0 \zeta(\beta) - \right. \\ &\quad \left. - R_2^L N^L \Psi(\beta_1) - \sqrt{2R_2^L \Delta} M_1^L \zeta(\beta_1) \right] \times \\ &\quad \times \frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{1}{R_2 \cos^2 \vartheta} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^s r E_z ds \right); \\ T_2 &= \sqrt{\frac{\Delta}{2R_2}} \left[-2R_2^0 N^0 \theta(\beta) - \sqrt{2R_2^0 \Delta} M_1^0 \Psi(\beta) - \right. \\ &\quad \left. - 2R_2^L N^L \theta(\beta_1) - \sqrt{2R_2^L \Delta} M_1^L \Psi(\beta_1) \right] + R_2 Z - \\ &\quad - \frac{1}{R_1 \cos^2 \vartheta} \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_2}^s r E_z ds \right); \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

$$\left. \begin{aligned} N &= \left[R_2^0 N^0 \Psi(\beta) - \sqrt{2R_2^0 \Delta} M_1^0 \zeta(\beta) + \right. \\ &\quad \left. + R_2^L N^L \Psi(\beta_1) + \sqrt{2R_2^L \Delta} M_1^L \zeta(\beta_1) \right] \frac{\cos \vartheta}{r}; \\ M_1 &= 2R_2^0 \sqrt{\frac{1}{2R_2 \Delta}} N^0 \zeta(\beta) + \sqrt{\frac{R_2^0}{R_2}} M_1^0 \Phi(\beta) - \\ &\quad - 2R_2^L \sqrt{\frac{1}{2R_2 \Delta}} N^L \zeta(\beta_1) + \sqrt{\frac{R_2^L}{R_2}} M_1^L \Phi(\beta_1); \\ M_2 &= \frac{D_{12}}{D_{11}} M_1 + \frac{D_{22}}{D_{11} \Delta} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \times \\ &\quad \times \left[R_2^0 N^0 \Phi(\beta) + \sqrt{2R_2^0 \Delta} M_1^0 \theta(\beta) + R_2^L N^L \Phi(\beta_1) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2R_2^L \Delta} M_1^L \theta(\beta_1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Формулы для определения напряжений (81) и перемещений остаются без изменений.

Граничные условия, как и в общем случае, ничем не отличаются от граничных условий изотропной оболочки вращения. Приведем три основных варианта граничных условий:

край $\beta = 0$ свободен

$$N^0 = 0; \quad M_1^0 = 0; \quad (112)$$

край $\beta = 0$ шарнирно оперт

$$M_1^0 = 0; \quad w = 0; \quad (113)$$

край $\beta = 0$ заделан

$$R_2^0 N^0 + \sqrt{2R_2^0 \Delta} M_1^0 = 0; \quad w = 0. \quad (114)$$

Соответствующие граничные условия по краю $\beta_1 = 0$ имеют вид

$$N^L = 0; \quad M_1^L = 0; \quad (115)$$

$$M_1^L = 0; \quad w = 0; \quad (116)$$

$$R_2^L N^L - \sqrt{2R_2^L \Delta} M_1^L = 0; \quad w = 0. \quad (117)$$

Для нормального перемещения w из формул (77) имеем

$$w = \frac{C_{11}T_2 - C_{12}T_1}{\Omega} r \cos \vartheta + \left\{ e_z^0 + \int_{s_0}^s \left(w \sin \vartheta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_{22}T_1 - C_{12}T_2}{\Omega} \cos \vartheta \right) ds \right\} \sin \vartheta. \quad (118)$$

Для иллюстрации разберем несколько примеров.

Пример 1. Длинная цилиндрическая оболочка снабжена двумя недеформируемыми днищами, которые в осевом направлении могут перемещаться. Края оболочки заделаны в днищах. Оболочка нагружена равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивностью q . Радиус кривизны оболочки R , длина L .

Пользуясь формулами (66)–(68) для членов, отражающих нагрузку, запишем

$$\left. \begin{aligned} E_r &= q; \quad E_z = 0; \quad P_z^0 = \pi R^2 q; \\ F_1 &= \frac{R^2}{2} q; \quad F_2 = -qRs, \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

так как для цилиндрической оболочки $\vartheta = 0$, $r = R$, а как нижний предел интегрирования взят $s_0 = 0$.

Пользуясь формулами (110), (111), (118), значениями членов (119) и удовлетворяя граничным условиям заделки (107) и (114), для начальных параметров получим

$$\Lambda^0 = \frac{C_{11} - 0,5C_{12}}{C_{11}} \sqrt{\frac{2R}{\Delta}} q; \quad N^L = - \frac{C_{11} - 0,5C_{12}}{C_{11}} \sqrt{\frac{2R}{\Delta}} q; \\ M_1^0 = - \frac{Rq}{\Delta} \cdot \frac{C_{11} - 0,5C_{12}}{C_{11}}; \quad M_1^L = - \frac{Rq}{\Delta} \cdot \frac{C_{11} - 0,5C_{12}}{C_{11}};$$

Подставляя значения начальных параметров в соответствующие формулы, для расчетных величин получим

$$T_1 = \frac{R}{2} q; \quad T_2 = \{1 - [\varphi(\beta) + \psi(\beta_1)]\} Rq;$$

$$W = \frac{R^2 q}{\Omega} (C_{11} - 0,5C_{12}) \{1 - [\varphi(\beta) + \psi(\beta_1)]\}.$$

$$W = \frac{Rq}{\Delta D_{11}} \sqrt{\frac{2R}{\Delta}} \cdot \frac{C_{11} - 0,5C_{12}}{C_{11}} [\zeta(\beta) - \zeta(\beta_1)];$$

$$\sigma_s^i = Rq \frac{C_{11} - 0,5C_{12}}{C_{11}} \left\{ \frac{\Delta_{11}^i}{\Omega} [\varphi(\beta) + \psi(\beta_1)] - \frac{\gamma B_{11}^i}{\Delta D_{11}} [\psi(\beta) + \psi(\beta_1)] \right\} -$$

$$- \frac{Rq}{2} \left(\frac{2\Delta_{11}^i - \Delta_{12}^i}{\Omega} \right);$$

$$\sigma_\varphi^i = -Rq \frac{C_{11} - 0,5C_{12}}{C_{11}} \left\{ \frac{\Delta_{21}^i}{\Omega} [\varphi(\beta) + \psi(\beta_1)] + \frac{\gamma B_{12}^i}{\Delta D_{11}} [\psi(\beta) + \psi(\beta_1)] \right\} -$$

$$- \frac{Rq}{2} \left(\frac{\Delta_{22}^i - 2\Delta_{21}^i}{\Omega} \right).$$

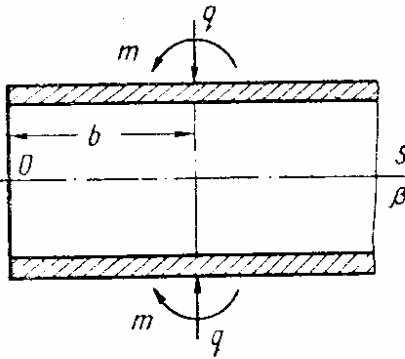


Рис. 14

Пример 2. Полубесконечная цилиндрическая оболочка загружена силами (интенсивность q) и моментами (интенсивность m), равномерно распределенными по окружности загруженного сечения, которое находится на расстоянии b ($t = b \sqrt{\frac{\Delta}{2R}}$) от свободного конца оболочки. Начало координат s и β помещается в плоскости сечения свободного конца оболочки (рис. 14).

Задачу решают методом наложения двух решений. Не вдаваясь в многочисленные подробности [1], приводим окончательные результаты. На участке $0 \leq \beta \leq t$

$$w = -q \frac{R^2}{2} \cdot \frac{C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\varphi(t - \beta) + 2\theta(\beta)\theta(t) + \psi(\beta)\psi(t)] -$$

$$- m \frac{R}{2} \cdot \frac{C_{11}}{\Omega} \Delta [\zeta(t - \beta) + \theta(\beta)\varphi(t) + \psi(\beta)\theta(t)];$$

$$W = q \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\Delta D_{11}} [-\zeta(t - \beta) + \varphi(\beta)\theta(t) + \theta(\beta)\psi(t)] +$$

$$+ m \frac{R}{2D_{11} \sqrt{2R\Delta}} [\psi(t - \beta) + \varphi(\beta)\varphi(t) + 2\theta(\beta)\theta(t)];$$

$$V = -q \frac{R}{2} [\theta(t - \beta) - \psi(\beta)\theta(t) + \zeta(\beta)\psi(t)] -$$

$$- m \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\varphi(t - \beta) - \psi(\beta)\varphi(t) + 2\zeta(\beta)\theta(t)];$$

$$M_1 = q \frac{R}{2 \sqrt{2R\Delta}} [-\psi(t - \beta) + 2\zeta(\beta)\theta(t) + \varphi(\beta)\psi(t)] -$$

$$- m \frac{1}{2} [\theta(t - \beta) - \zeta(\beta)\varphi(t) - \varphi(\beta)\theta(t)];$$

$$\begin{aligned}
N &= -\frac{q}{2} [\theta(t - \beta) - \psi(\beta) \theta(t) + \xi(\beta) \psi(t)] - \\
&- m \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\varphi(t - \beta) - \psi(\beta) \varphi(t) + 2\xi(\beta) \theta(t)]; \\
T_2 &= -q \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\varphi(t - \beta) + 2\theta(\beta) \theta(t) + \psi(\beta) \psi(t)] - \\
&- m \frac{\Delta}{2} [\xi(t - \beta) + \theta(\beta) \varphi(t) + \psi(\beta) \theta(t)].
\end{aligned}$$

На участке $t \leq \beta \leq \infty$

$$\begin{aligned}
w &= -q \frac{R^2}{2} \cdot \frac{C_{11}}{\Omega} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\varphi(\beta - t) + 2\theta(\beta) \theta(t) + \psi(\beta) \psi(t)] + \\
&+ m \frac{R}{2} \cdot \frac{C_{11}}{\Omega} \Delta [\xi(\beta - t) - \theta(\beta) \varphi(t) - \psi(\beta) \theta(t)]; \\
W &= q \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\Delta D_{11}} [\xi(\beta - t) + \varphi(\beta) \theta(t) + \theta(\beta) \psi(t) + \\
&+ m \frac{R}{2D_{11}} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\psi(\beta - t) + \varphi(\beta) \varphi(t) + 2\theta(\beta) \theta(t)]; \\
V &= q \frac{R}{2} [\theta(\beta - t) + \psi(\beta) \theta(t) - \xi(\beta) \psi(t)] - \\
&- m \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\varphi(\beta - t) - \psi(\beta) \varphi(t) + 2\xi(\beta) \theta(t)]; \\
M_1 &= q \frac{R}{2 \sqrt{2R\Delta}} [-\psi(\beta - t) + 2\xi(\beta) \theta(t) + \varphi(\beta) \psi(t)] + \\
&+ m \frac{1}{2} [\theta(\beta - t) + \xi(\beta) \varphi(t) + \varphi(\beta) \theta(t)]; \\
N &= \frac{q}{2} [\theta(\beta - t) + \psi(\beta) \theta(t) - \xi(\beta) \psi(t)] - \\
&- m \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\varphi(\beta - t) - \psi(\beta) \varphi(t) + 2\xi(\beta) \theta(t)]; \\
T_2 &= -q \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} [\varphi(\beta - t) + 2\theta(\beta) \theta(t) + \psi(\beta) \psi(t)] + \\
&+ m \frac{\Delta}{2} [\xi(\beta - t) - \theta(\beta) \varphi(t) - \psi(\beta) \theta(t)].
\end{aligned}$$

Приведенные здесь результаты можно использовать для решения многочисленных задач бесконечных и полубесконечных цилиндрических оболочек, осесимметрично нагруженных различными способами [1].

Пример 3. Замкнутая коническая оболочка нагружена равномерно распределенным по опорному контуру ($s = 0$) оболочки изгибающим моментом интенсивностью m (рис. 7 и 15).

Для срединной поверхности рассматриваемой оболочки, как известно, имеем

$$R = \infty; \quad r = (s' - s) \sin \alpha;$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos \alpha}{r} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{s' - s}; \quad \vartheta = \alpha.$$

где s' — длина образующей оболочки; 2α — угол конусности.

Из формулы (98) для β получим

$$\beta = -\sqrt{2\Delta \operatorname{ctg} \alpha} (\sqrt{s' - s} - \sqrt{s'}).$$

Для членов, выражающих нагрузку, имеем

$$E_r = 0; \quad E_z = 0; \quad P_z^0 = 0; \quad F_1 = 0; \quad F_2 = 0.$$

Начальные параметры

$$M_1^0 = m; \quad N^0 = 0; \quad M_1^L = 0; \quad N^L = 0.$$

Тогда из выражений (109)–(110) для основных расчетных величин получим

$$W = \frac{m}{\Delta D_{11}} \sqrt{2\Delta s' \operatorname{tg} \alpha} \theta(\beta);$$

$$V = -m \sqrt{2\Delta s' \operatorname{tg} \alpha} \zeta(\beta);$$

$$T_1 = \frac{m}{s' - s} \sqrt{2\Delta s' \operatorname{tg} \alpha} \zeta(\beta);$$

$$T_2 = -m\Delta \sqrt{\frac{s}{s' - s}} \psi(\beta);$$

$$N = -\frac{m \operatorname{ctg} \alpha}{s' - s} \sqrt{2\Delta s' \operatorname{tg} \alpha} \zeta(\beta);$$

$$M_1 = m \sqrt{\frac{s}{s' - s}} \varphi(\beta);$$

$$M_2 = \frac{D_{12}}{D_{11}} M_1 + \frac{m}{s' - s} \cdot \frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{\sqrt{2\Delta s' \operatorname{tg} \alpha}}{\Delta} \theta(\beta).$$

Напряжения в слоях и перемещения можно определить с помощью формул (76), (77), (80), (81) и (118).

Еще раз укажем, что полученные здесь результаты теряют смысл в окрестностях вершины конуса, так как предлагаемая здесь теория расчета оболочек

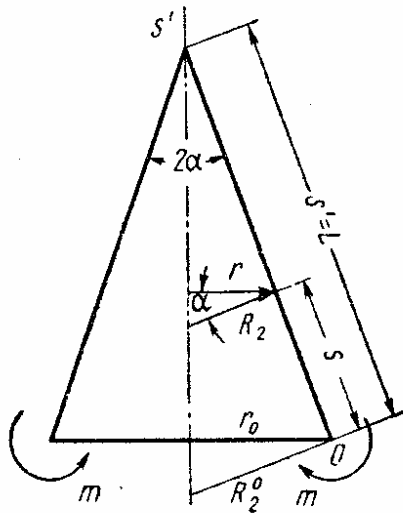


Рис. 15

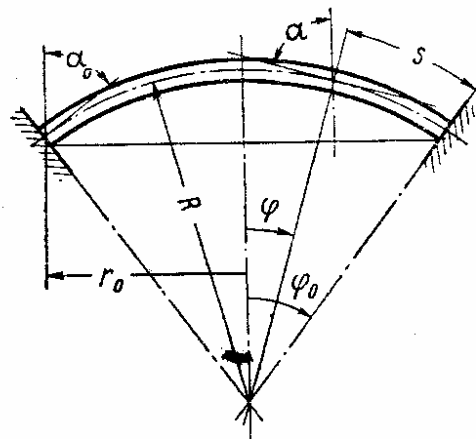


Рис. 16

вращения в окрестностях особых точек не может дать достоверные значения для расчетных величин симметрично нагруженных оболочек вращения.

Пример 4. Сферическая оболочка нагружена равномерно распределенной, нормально приложенной нагрузкой интенсивностью q . Край оболочки ($s = 0$) зашпелен.

Обозначим радиус сферы через R , а угол, который отсчитывают по меридиану от полюса через φ (рис. 16). Пусть $2\varphi_0$ — центральный угол, соответствующий краю оболочки.

Для этой оболочки

$$R_1 = R_2 = R; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

$$r = R \sin \varphi; \quad R d\varphi = -ds;$$

$$Z = q; \quad X = 0; \quad E_z = -q \cos \varphi; \quad E_r = -q \sin \varphi.$$

В случае замкнутой оболочки при отсутствии в вершине сосредоточенной силы, внутренние силы T_1^0 и T_2^0 , вычисленные по формулам (93), должны быть конечны. Тогда

$$P_z^0 = 2\pi R^2 \int_0^{\varphi_0} E_z \sin \varphi d\varphi = -\pi R^2 q \sin^2 \varphi_0,$$

а для частных решений

$$T_1^0 = -\frac{qR}{2}; \quad T_2^0 = -\frac{qR}{2}.$$

В случае однородной задачи из формул (110) для внутренних сил получим

$$T_1 = \left[-RN^0 \psi(\beta) + \sqrt{2R\Delta} M_1^0 \zeta(\beta) \right] \frac{\sin \vartheta}{r};$$

$$T_2 = \left[\sqrt{\frac{\Delta}{2R}} - 2RN^0 \theta(\beta) - \sqrt{2R\Delta} M_1^0 \psi(\beta) \right].$$

Учитывая, что при $s = 0$, $\beta = \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} s$, $\psi = 1$ имеем $\theta = 1$; $\zeta = 0$, и удовлетворяя условиям заделанного края (114), получим

$$C_{11} \sqrt{\frac{\Delta}{2R}} \left[\sqrt{2R\Delta} M_1^0 + 2RN^0 \right] + (C_{11} - C_{12}) \frac{Rq}{2} = 0;$$

$$RN^0 + \sqrt{2R\Delta} M_1^0 = 0,$$

откуда начальные параметры

$$M_1^0 = \frac{C_{11} - C_{12}}{\Delta C_{11}} \cdot \frac{Rq}{2}; \quad N^0 = -\frac{C_{11} - C_{12}}{\Delta C_{11}} \sqrt{\frac{2\Delta}{R}} \cdot \frac{Rq}{2}.$$

Тогда окончательно из формул (109)–(111) для расчетных величин получим

$$W = -\sqrt{2R\Delta} \frac{C_{11} - C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{Rq}{2} \zeta(\beta);$$

$$V = -\sqrt{\frac{2R\Delta}{\Delta}} \cdot \frac{C_{11} - C_{12}}{C_{11}} \cdot \frac{Rq}{2} \theta(\beta) - \frac{F_2(s)}{\cos \vartheta};$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\Delta}{R}} \cdot \frac{C_{11} - C_{12}}{\Delta C_{11}} \cdot \frac{Rq}{2} \theta(\beta) \operatorname{tg} \vartheta - \frac{Rq}{2};$$

$$T_2 = \frac{C_{11} - C_{12}}{C_{11}} \cdot \frac{Rq}{2} \varphi(\beta) - \frac{Rq}{2};$$

$$N = -\sqrt{\frac{2\Delta}{R}} \cdot \frac{C_{11} - C_{12}}{\Delta C_{11}} \cdot \frac{Rq}{2} \theta(\beta); \quad M_1 = \frac{C_{11} - C_{12}}{\Delta C_{11}} \cdot \frac{Rq}{2} \psi(\beta);$$

$$M_2 = \frac{D_{12}}{D_{11}} M_1 - \frac{D_{22}}{D_{11}} \sqrt{\frac{2\Delta}{R}} \cdot \frac{C_{11} - C_{12}}{A^2 C_{11}} \cdot \frac{Rq}{2} \zeta(\beta) \operatorname{tg} \vartheta.$$

Напряжения в слоях могут быть определены с помощью формул (80). В частном случае, когда коэффициенты Пуассона всех слоев равны нулю, формулы напряжений упрощаются

$$\sigma_s^i = -E_s^i \left(\frac{V}{C_{11}} \cdot \frac{\sin \phi}{r} + \gamma \frac{dW}{ds} \right) + \frac{E_s^i}{C_{11}} \cdot \frac{F_1(s)}{r};$$

$$\sigma_\phi^i = E_\phi^i \left(\frac{1}{C_{22}} \cdot \frac{dV}{ds} + \gamma W \frac{\sin \phi}{r} \right).$$

Отсюда, ограничиваясь рассмотрением лишь напряжений **краевого эффекта**, т. е. напряжений, которые возникают от M_1^0 и N^0 с точностью $\sqrt{\frac{h}{R}}$, получим

$$\bar{\sigma}_s^i = \frac{E_s^i}{C_{11}} \Delta \gamma \frac{Rq}{2} \psi(\beta); \quad \bar{\sigma}_\phi^i = \frac{E_\phi^i}{C_{22}} \cdot \frac{Rq}{2} \varphi(\beta).$$

Укажем, что для определения полных напряжений к этим напряжениям надо прибавить номинальные напряжения (напряжения безмоментного состояния).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. М., Гостехиздат, 1949.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1947.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.

Глава 7

АНИЗОТРОПНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим многослойную, тонкую цилиндрическую оболочку постоянной общей толщины h , собранную из произвольного числа однородных анизотропных слоев также постоянной толщины t_i (см. рис. 1 гл. 6).

Предполагаем, что в каждой точке каждого слоя оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной поверхности оболочки ($\gamma = 0$). Не нарушая общности, принимается,

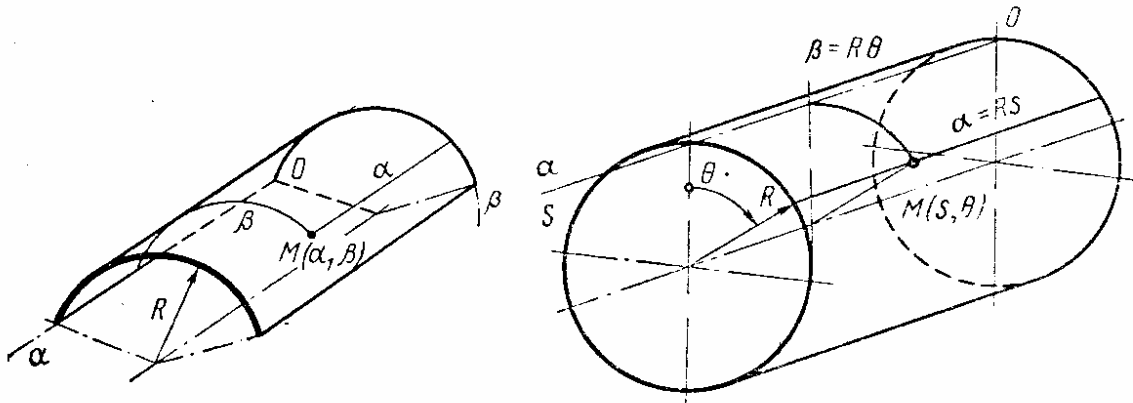


Рис. 1

Рис. 2

что координатная поверхность оболочки ($\gamma = 0$) совпадает с внутренней граничной поверхностью оболочки. Поэтому для жесткостей принимают упрощенные формулы (10) гл. 6.

Принимаем также, что α и β являются ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны координатной поверхности, т. е. с прямолинейными образующими ($\beta = \text{const}$) и с направляющими дугами ($\alpha = \text{const}$) цилиндрической координатной поверхности оболочки (рис. 1 и 2).

Для рассматриваемой оболочки как основную принимают гипотезу недеформируемых нормалей (см. гл. 6).

Принимая, что

$$A = \text{const}; \quad B = \text{const}; \quad \frac{1}{R_1} = 0; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R(\beta)}, \quad (1)$$

для цилиндрической оболочки получим следующие исходные уравнения и соотношения.

Уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial S_{21}}{\partial \beta} &= -X; \\ \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha} + \frac{N_2}{R} &= -Y; \\ \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial H_{21}}{\partial \beta} &= N_1; \quad \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha} = N_2; \\ \frac{T_2}{R} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial \beta} &= Z; \quad S_{12} - S_{21} - \frac{H_{21}}{R} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Компоненты деформаций и сдвига, изменения кривизны и кручение с компонентами перемещений связаны формулами

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R}; \\ \omega &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha}; \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \quad \kappa_2 = -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R} \right); \\ \tau &= -\frac{2}{AB} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2}{R} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Соотношения упругости остаются неизменными, т. е. имеют вид (5) и (6) гл. 6. Для напряжений в слоях имеем формулы (14) гл. 6.

Граничные условия такие же, как в теории изотропных цилиндрических оболочек (см. гл. 22 т. 1).

Все ранее приведенные основополагающие рассуждения по анизотропным оболочкам вращения остаются в силе и для анизотропных цилиндрических оболочек.

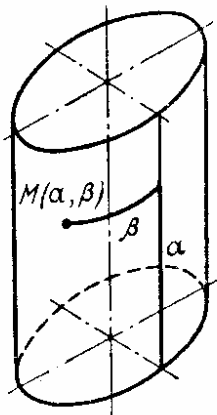


Рис. 3

БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОДНОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Основные положения безмоментной теории анизотропных цилиндрических оболочек не отличаются от основных исходных положений безмоментной теории изотропных цилиндрических оболочек (см. гл. 22 т. 1).

Полагаем, что координатная поверхность $\gamma = 0$ совпадает со средней поверхностью оболочки.

Принимая (рис. 3)

$$A = 1; \quad B = 1, \quad (4)$$

из уравнений (2) получим следующие уравнения равновесия безмоментной теории цилиндрических оболочек:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} &= -X; \\ T_2 &= RZ; \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} &= -Y. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из формул (3) для деформаций получим

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R}; \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}. \quad (6)$$

Для соотношений упругости из выражений (5) в силу уравнений (2) и формул (7)–(9), учитывая, что координатная поверхность $\gamma = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{h} (a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{16}S); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{h} (a_{12}T_1 + a_{22}T_2 + a_{26}S); \\ \omega &= \frac{1}{h} (a_{16}T_1 + a_{26}T_2 + a_{66}S). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Интегрирование систем уравнений (5) и (6) может быть выполнено до конца в общем виде [1, 3, 5]. Покажем это на двух примерах.

Пример 1. Горизонтальная круговая труба (радиусом R и длиной L), один торец ($\alpha = L$) которой закреплен полностью, а другой ($\alpha = 0$) свободен, целиком наполнена жидкостью удельного веса ρ . Собственный вес трубы не учитываем. Угол $\varphi = \frac{\beta}{R}$ отсчитываем от нижней точки трубы (рис. 4).

Имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \alpha = 0 \quad T_1 &= 0, \quad S = 0; \\ \text{при } \alpha = L \quad u &= 0, \quad v = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и компоненты поверхностной нагрузки

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = R\rho \left(1 + \cos \frac{\beta}{R} \right). \quad (9)$$

Из уравнений (5) в силу условий (8) и (9) для внутренних сил получим

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\rho \frac{\alpha^2}{2} \cos \frac{\beta}{R}; \quad T_2 = \rho R^2 \left(1 + \cos \frac{\beta}{R} \right); \\ S &= \rho R \alpha \sin \frac{\beta}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

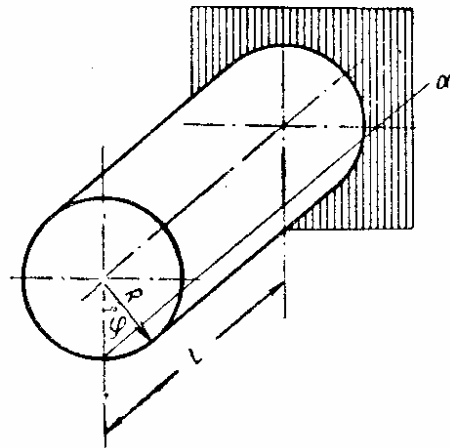


Рис. 4

Из выражений (6) и (7), учитывая соотношения (8) и (10), для перемещений получим

$$\begin{aligned}
 u = \frac{\rho}{h} & \left[a_{11} \frac{L^3 - \alpha^3}{6} \cos \frac{\beta}{R} + a_{12} (\alpha - L) R^2 \left(1 + \cos \frac{\beta}{R} \right) + \right. \\
 & \left. + a_{16} \frac{\alpha^2 - L^2}{2} R \sin \frac{\beta}{R} \right] ; \\
 v = \frac{\rho}{h} & \left[\frac{a_{16}}{6} (3\alpha L^2 - 2\alpha^3 - L^3) \cos \frac{\beta}{R} + \right. \\
 & + a_{26} (\alpha - L) R^2 \left(1 + \cos \frac{\beta}{R} \right) + a_{66} \frac{\alpha^2 - L^2}{2} R \sin \frac{\beta}{R} + \\
 & + \frac{a_{11}}{6R} \left(\alpha L^3 - \frac{\alpha^4}{4} - \frac{3}{4} L^4 \right) \sin \frac{\beta}{R} + \\
 & \left. + a_{12} \frac{(\alpha - L)^2}{2} R \sin \frac{\beta}{R} \right] ; \\
 w = \frac{\rho}{h} & \left[\frac{a_{11}}{6R} \left(\alpha L^3 - \frac{\alpha^4}{4} - \frac{3}{4} L^4 \right) \cos \frac{\beta}{R} - \right. \\
 & - a_{22} R^3 \left(1 + \cos \frac{\beta}{R} \right) + a_{12} R \left(\alpha^2 - \alpha L + \frac{L^2}{2} \right) \cos \frac{\beta}{R} + \\
 & + a_{66} \frac{\alpha^2 - L^2}{2} R \cos \frac{\beta}{R} + \frac{a_{16}}{6} (2\alpha^3 + L^3 - 3\alpha L^2) \sin \frac{\beta}{R} - \\
 & \left. - a_{26} (2\alpha - L) R^2 \sin \frac{\beta}{R} \right] .
 \end{aligned} \tag{11}$$

Пример 2. Замкнутая цилиндрическая оболочка произвольного поперечного сечения [радиус кривизны $R_2 = R$ (β), длина L] несет равномерно распределенную, нормально приложенную поверхностную нагрузку интенсивностью q . Один из торцов оболочки ($\alpha = 0$) полностью закреплен, а другой торец ($\alpha = L$) совершенно свободен.

Имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \alpha = 0 \quad u = 0, v = 0; \\ \text{при } \alpha = L \quad T_1 = 0, S = 0 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

и компоненты поверхностной нагрузки

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = q. \tag{13}$$

С помощью уравнений и формул (5)–(7) в силу условий (12) и (13) для внутренних сил и перемещений получим

$$\left. \begin{aligned} T_1 = q \frac{(L - \alpha)^2}{2} \cdot \frac{d^2 R}{d\beta^2}; \quad T_2 = R q, \\ S = q (L - \alpha) \frac{dR}{d\beta}; \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
u &= q \frac{\alpha}{h} a_{12} R + a_{16} \left(L - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{dR}{d\beta} + \\
&\quad + a_{11} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{\alpha L}{2} + \frac{\alpha^2}{6} \right) \frac{d^2 R}{d\beta^2}; \\
v &= q \frac{\alpha}{h} \left\{ a_{26} R - \left[a_{12} \frac{\alpha}{2} - a_{66} \left(L - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \frac{dR}{d\beta} + \right. \\
&\quad \left. + a_{16} \left(\frac{L^2}{2} - \alpha L + \frac{\alpha^2}{3} \right) \frac{d^2 R}{d\beta^2} - a_{11} \left(\frac{\alpha L^2}{4} - \frac{\alpha^2 L}{6} + \frac{\alpha^3}{24} \right) \frac{d^3 R}{d\beta^3} \right\}; \\
w &= q \frac{R}{h} \left\{ a_{22} R + a_{26} (L - 2\alpha) \frac{dR}{d\beta} + \left[a_{12} \left(\frac{L^2}{2} - \alpha L + \alpha^2 \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{66} \left(\alpha L - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \frac{d^2 R}{d\beta^2} - a_{16} \left(\frac{\alpha L^2}{2} - \alpha^2 L + \frac{\alpha^3}{3} \right) \frac{d^3 R}{d\beta^3} + \right. \\
&\quad \left. + a_{11} \left(\frac{\alpha^2 L^2}{4} - \frac{\alpha^3 L}{6} + \frac{\alpha^4}{24} \right) \frac{d^4 R}{d\beta^4} \right\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим численный пример. Во-первых, пусть оболочка имеет эллиптическое поперечное сечение (рис. 5), тогда

$$R = \frac{b^2}{a} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}; \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2};$$

$$\frac{dR}{d\beta} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2 \sin 2\psi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi};$$

$$\frac{d^2 R}{d\beta^2} = -\frac{3a}{b^2} \varepsilon^2 \frac{\cos 2\psi - \varepsilon^2 \cos^2 \psi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi}};$$

$$\frac{d^3 R}{d\beta^3} = \frac{6a^2}{b^4} \varepsilon^2 \left[1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \cos^2 \psi \right] \sin 2\psi;$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 R}{d\beta^4} &= \frac{12a^3}{b^6} \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi)^{\frac{3}{2}} \left[\left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \cos 2\psi - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) (\cos^2 \psi - 3 \sin^2 \psi) \cos^2 \psi \right].
\end{aligned}$$

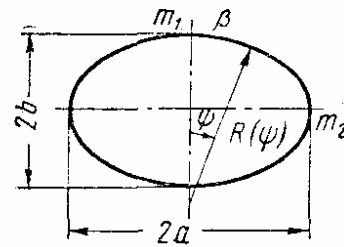


Рис. 5

Пусть далее оболочка изготовлена из ортотропного материала со следующими упругими характеристиками:

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2; \quad E_2 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2;$$

$$\nu_1 = 0,2; \quad \nu_2 = 0,05; \quad G = 0,455 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2.$$

Однако оболочка неортотропная, так как материал в оболочке расположен так, что в каждой точке оболочки одно главное направление упругости материала совпадает с координатой ψ , а остальные два не совпадают с координатными линиями α и β , а направлены так, что в каждой точке оболочки главное направление упругости с индексом 1 с направлением α составляет угол $\varphi = 30^\circ$ (рис. 6).

Тогда с помощью формул (14) гл. 6 для упругих постоянных a_{jk} в главных направлениях α , β найдем

$$a_{11} = 0,781 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{дан}; \quad a_{22} = 1,531 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{дан};$$

$$a_{12} = -0,006 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{дан}; \quad a_{66} = 2,575 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{дан};$$

$$a_{16} = -0,541 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{дан}; \quad a_{26} = -0,758 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{дан}.$$

Располагая приведенными данными, легко определить внутренние силы и перемещения в трубе эллиптического поперечного сечения. Ввиду того, что рассматриваемая оболочка внешне статически определима, внутренние силы рассматриваемой анизотропной оболочки не отличаются от внутренних сил соответствующей изотропной оболочки.

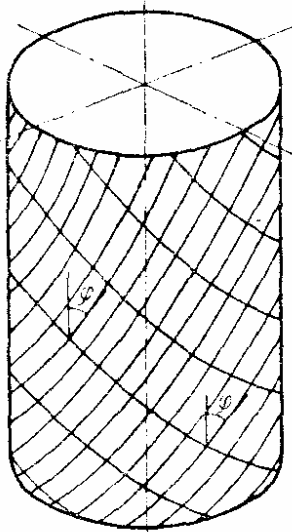


Рис. 6

Перемещения определим в сечении $\alpha=L$. Ограничимся рассмотрением точек оболочки m_1 ($\psi=0$) и m_2 ($\psi=\frac{\pi}{2}$). Для конкретности полагаем также,

что $\frac{b}{a}=0,5$, а отношение $\frac{L}{b}$ принимает три различных значения ($\frac{L}{b}=2, 3, 4$).

Представляя перемещения (b, h в см; q в дан/см²)

$$u = q \frac{b^2}{h} K_u \cdot 10^{-5} \text{ см}; \quad v = q \frac{b^2}{h} \times \\ \times K_v \cdot 10^{-5} \text{ см}; \quad w = q \frac{b^2}{h} K_w \cdot 10^{-5} \text{ см},$$

для коэффициентов K_j получим величины, помещенные в табл. 1.

1. Значения коэффициентов K_u, K_v, K_w

$\frac{L}{b}$	ψ					
	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
	K_u		K_v		K_w	
2	-2,39	4,68	-7,68	2,49	82,40	-35,88
3	-7,98	15,81	-14,57	9,81	186,96	-150,60
4	-18,85	37,49	-25,12	24,48	392,80	-440,56

В частном случае ортотропной оболочки в точках m_1 и m_2 тангенциальные перемещения v аналогично изотропной оболочке обращаются в нуль. Здесь же, в достаточно общем случае анизотропии, точки m_1 и m_2 имеют тангенциальные перемещения v того же порядка, как и тангенциальные перемещения u .

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА АНИЗОТРОПНЫХ СЛОЕВ

Большое практическое значение имеет так называемая техническая теория цилиндрических оболочек, которая наряду с основной гипотезой недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом, базируется на следующих дополнительных предположениях [1, 2, 3]:

а) в геометрических соотношениях (3) можно сохранять лишь слагаемые, содержащие нормальное перемещение w ;

б) можно брать наиболее простые соотношения упругости, которые отличаются от выражений (5) и (6) гл. 6 лишь соотношениями для S_{12} и S_{21} :

$$S_{12} = S_{21} = C_{66}\omega + C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + K_{66}\tau + K_{16}\kappa_1 + K_{26}\kappa_2; \quad (16)$$

в) во втором уравнении равновесия (2) можно пренебречь членом $\frac{N_2}{R}$;

г) допускается приближенное удовлетворение второго уравнения неразрывности деформаций.

Техническая теория анизотропных слоистых цилиндрических оболочек может быть использована для решения многочисленных задач круговых цилиндрических оболочек как пологих, так и существенно подъемистых вплоть до замкнутых. При этом надо учесть, что в случае пологой оболочки ее длина может быть существенно большей: когда оболочка подъемиста, ее длина должна быть ограничена [1, 2, 4].

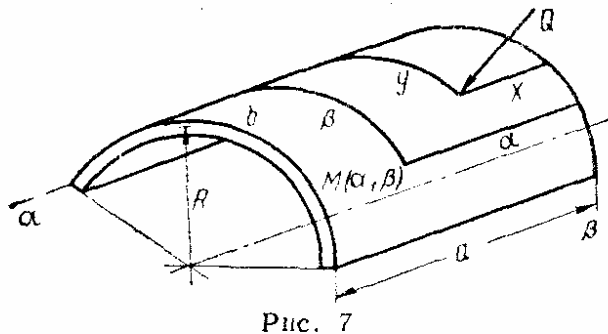


Рис. 7

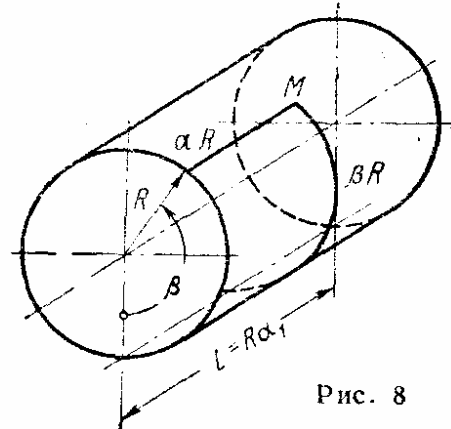


Рис. 8

Однако даже при отношении $\frac{b}{R} = 0,5$ техническая теория для реально существующих анизотропных оболочек применима в широком диапазоне изменения $\lambda = \frac{a}{b}$ от 0,1 до 10 (рис. 7).

Для реальной цилиндрической оболочки замкнутого профиля пределом применения технической теории служит отношение $\frac{l}{R} < 10$ (рис. 8). Конечно, для существенно анизотропных оболочек эти пределы должны быть установлены специально. В этом случае для напряжений в слоях и внутренних усилий в перемещениях имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^i = & B_{11}^i \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{12}^i \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) + \\ & + B_{16}^i \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - \gamma \left(B_{11}^i \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. + B_{12}^i \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{16}^i \frac{2}{AB} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta}^i = & B_{22}^i \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) + B_{12}^i \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{26}^i \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - \gamma \left(B_{22}^i \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{12}^i \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. + B_{26}^i \frac{2}{AB} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^i = & B_{16}^i \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{26}^i \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) + \\ & + B_{66}^i \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - \\ & - \gamma \left(B_{16}^i \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{26}^i \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{66}^i \frac{2}{AB} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} T_1 = & \left(C_{11} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{16} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) u + \\ & + \left(C_{16} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{12} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) v + \\ & + \left(\frac{1}{R} C_{12} - K_{11} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2K_{16} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - K_{12} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} T_2 = & \left(C_{12} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{26} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) u + \\ & + \left(C_{26} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{22} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) v + \\ & + \left(\frac{1}{R} C_{22} - K_{12} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2K_{26} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - K_{22} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} S = & \left(C_{16} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{66} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) u + \\ & + \left(C_{66} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{26} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) v + \\ & + \left(\frac{1}{R} C_{26} - K_{16} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2K_{66} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - K_{26} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} M_1 = & \left(K_{11} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + K_{16} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) u + \\ & + \left(K_{16} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + K_{12} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) v + \\ & + \left(\frac{1}{R} K_{12} - D_{11} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2D_{16} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - D_{12} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} M_2 = & \left(K_{12} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + K_{26} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) u + \\ & + \left(K_{26} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + K_{22} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) v + \\ & + \left(\frac{1}{R} K_{22} - D_{12} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2D_{26} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - D_{22} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
H = & \left(K_{16} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + K_{66} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) u + \\
& + \left(K_{66} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + K_{26} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) v + \\
& + \left(\frac{1}{R} K_{26} - D_{16} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha^2} - 2D_{66} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - D_{26} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) w; \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1 = & \left(K_{11} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2K_{16} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + K_{66} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \\
& + \left[K_{16} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (K_{12} + K_{66}) \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + K_{26} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] v + \\
& + \frac{1}{R} \left(K_{12} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + K_{26} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) w - E_1(D_{jk}) w; \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 = & \left(K_{22} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2K_{26} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + K_{66} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v + \\
& + \left[K_{26} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (K_{12} + K_{66}) \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + K_{16} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] u + \\
& + \frac{1}{R} \left(K_{22} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} + K_{26} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) w - E_2(D_{jk}) w, \quad (27)
\end{aligned}$$

где для линейных операторов третьего порядка имеем

$$\begin{aligned}
E_1(D_{ik}) = & D_{11} \frac{1}{A^3} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + 3D_{16} \frac{1}{A^2 B} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \\
& + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{AB^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + D_{26} \frac{1}{B^3} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}; \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2(D_{ik}) = & D_{22} \frac{1}{B^3} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + 3D_{26} \frac{1}{B^2 A} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \beta^2 \partial \alpha} + \\
& + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{BA^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + D_{16} \frac{1}{A^3} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}. \quad (29)
\end{aligned}$$

В этом случае разрешающая система дифференциальных уравнений в перемещениях $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ запишется так:

$$\left. \begin{aligned}
L_{11}(C_{jk}) u + L_{12}(C_{jk}) v + L_{13}(C_{jk} K_{jk}) w &= -X; \\
L_{12}(C_{jk}) u + L_{22}(C_{jk}) v + L_{23}(C_{jk} K_{jk}) w &= -Y; \\
L_{13}(C_{jk} K_{jk}) u + L_{23}(C_{jk} K_{jk}) v + L_{33}(C_{jk} K_{jk} D_{jk}) w &= Z,
\end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где для линейных операторов имеем

$$\begin{aligned}
 L_{11}(C_{jk}) &= C_{11} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2C_{16} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + C_{66} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\
 L_{13}(C_{jk}K_{jk}) &= \frac{1}{R} \left(C_{12} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} + C_{26} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - E_1(K_{ik}); \\
 L_{12}(C_{jk}) &= C_{16} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + C_{26} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\
 L_{22}(C_{jk}) &= C_{66} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2C_{26} \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + C_{22} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\
 L_{23}(C_{jk}K_{jk}) &= \frac{1}{R} \left(C_{22} \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} + C_{26} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - E_2(K_{ik}); \\
 L_{33}(C_{jk}K_{jk}D_{jk}) &= \frac{1}{R^2} C_{22} - \frac{2}{R} \left(K_{12} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2K_{26} \times \right. \\
 &\times \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + K_{22} \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Big) + D_{11} \frac{1}{A^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 4D_{16} \frac{1}{A^3B} \times \\
 &\times \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{A^2B^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\
 &+ 4D_{26} \frac{1}{AB^3} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + D_{22} \frac{1}{B^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}.
 \end{aligned}$$

Во всех приведенных формулах и уравнениях, полагая $K_{jk} = 0$ и определяя жесткости C_{jk} и D_{jk} с помощью формул (78) гл. 6, получим исходные уравнения и расчетные формулы для анизотропной круговой цилиндрической оболочки, составленной из нечетного числа $(2m + 1)$ слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки.

Укажем также, что приведенные уравнения и соотношения существенно упрощаются в случае ортотропных оболочек, так как в этом случае $C_{j6} = K_{j6} = D_{j6} = 0$ ($j = 1, 2$).

Уравнения технической теории ортотропных слоистых оболочек могут быть представлены в форме уравнений смешанного метода, т. е. с помощью двух уравнений относительно двух искомых функций перемещения $w = w(\alpha, \beta)$ и функции напряжений $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$

$$\left. \begin{aligned}
 L_2(C_{jk})\varphi + L_3(d_{jk})w - \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = \\
 = -\frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_2^*}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_1^*}{\partial \beta^2}; \\
 L_1(D_{jk} - D_{jk}^0)w - L_3(d_{jk})\varphi + \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \\
 = Z + \frac{B}{R} \int Y d\beta + \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 M_1^*}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 M_2^*}{\partial \beta^2},
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где

$$L_1(D_{jk} - D_{jk}^0) = \frac{D_{11} - D_{11}^0}{A^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{D_{22} - D_{22}^0}{B^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} +$$

$$+ 2 \frac{(D_{12} - D_{12}^0) + 2(D_{66} - D_{66}^0)}{A^2 B^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2};$$

$$L_2(C_{jk}) = \frac{C_{11}}{\Omega} \cdot \frac{1}{A^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{C_{22}}{\Omega} \cdot \frac{1}{B^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \left(\frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{A^2 B^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2};$$

$$L_3(d_{jk}) = \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{1}{A^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} +$$

$$+ \left(\frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{22}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^4 B^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} +$$

$$+ \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{B^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \beta^4};$$

$$M_1^* = - \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} A \int X d\alpha - \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} B \int Y d\beta;$$

$$M_2^* = - \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} B \int Y d\beta - \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} A \int X d\alpha;$$

$$\varepsilon_1^* = - \frac{C_{22}}{\Omega} A \int X d\alpha + \frac{C_{12}}{\Omega} B \int Y d\beta;$$

$$\varepsilon_2^* = - \frac{C_{11}}{\Omega} B \int Y d\beta + \frac{C_{12}}{\Omega} A \int X d\alpha;$$

$$\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2;$$

$$D_{11}^0 = \frac{K_{11}^2 C_{22} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{11}}{\Omega};$$

$$D_{12}^0 = \frac{K_{11}K_{12}C_{22} - (K_{11}K_{22} + K_{12}^2)C_{12} + K_{22}K_{12}C_{11}}{\Omega};$$

$$D_{22}^0 = \frac{K_{22}^2 C_{11} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{22}}{\Omega};$$

$$D_{66}^0 = \frac{K_{66}}{C_{66}}.$$

В этом случае внутренние силы, моменты и напряжения в слоях определяют по формулам

$$T_1 = \frac{1}{B_2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - A \int X d\alpha, \quad (32)$$

$$T_2 = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - B \int Y d\beta, \quad (33)$$

$$S = - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} M_1 = & - (D_{11} - D_{11}^0) \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} - (D_{12} - D_{12}^0) \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \\ & + M_1^* + \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \times \\ & \times \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} M_2 = & - (D_{22} - D_{22}^0) \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} - (D_{12} - D_{12}^0) \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + M_2^* + \\ & + \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}; \end{aligned} \quad (36)$$

$$H = -2 (D_{66} - D_{66}^0) \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{K_{66}}{C_{66}} \cdot \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}; \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^i = & \left(B_{11}^i \frac{C_{22}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \left(B_{11}^i \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{11}}{\Omega} \right) \times \\ & \times \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \left(B_{11}^i \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right) \times \\ & \times \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \left(B_{11}^i \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{11}^i \right) \times \\ & \times \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + B_{11}^i \varepsilon_1^* + B_{12}^i \varepsilon_2^*; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\beta^i = & \left(B_{22}^i \frac{C_{11}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - \left(B_{22}^i \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{22}}{\Omega} \right) \times \\ & \times \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + \left(B_{22}^i \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right) \times \\ & \times \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \left(B_{22}^i \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{22}^i \right) \times \\ & \times \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + B_{22}^i \varepsilon_2^* + B_{12}^i \varepsilon_1^*; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^i = - \frac{B_{66}^i}{C_{66}} \cdot \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + 2B_{66}^i \left(\frac{K_{66}}{C_{66}} - \gamma \right) \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (40)$$

Приведенные формулы справедливы, в частности, для случая, когда оболочка загружена лишь нормально приложенной поверхностной нагрузкой, т. е. когда $X = Y = 0$, $Z \neq 0$, полагая

$$\omega = L_2(C_{jk}) \Psi; \quad \Phi = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} - L_3(d_{jk}) \Psi. \quad (41)$$

Разрешающую систему (31) можно привести к одному уравнению восьмого порядка относительно искомой функции $\Psi = \Psi(\alpha, \beta)$

$$L_0(P_{jk}) \Psi - 2F(Q_{jk}) \Psi + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{A^4} \cdot \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^4} = Z, \quad (42)$$

где для линейных операторов имеем

$$\begin{aligned} L_0(P_{jk}) = & P_1 \frac{1}{A^8} \cdot \frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} + P_3 \frac{1}{A^6 B^2} \cdot \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + P_5 \frac{1}{A^4 B^4} \cdot \frac{\partial^8}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + \\ & + P_4 \frac{1}{A^2 B^6} \cdot \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + P_2 \frac{1}{B^8} \cdot \frac{\partial^8}{\partial \beta^8}; \\ F(Q_{jk}) = & Q_1 \frac{1}{A^6} \cdot \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + Q_3 \frac{1}{A^4 B^2} \cdot \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \beta^2} + Q_4 \frac{1}{A^2 B^4} \cdot \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4}, \end{aligned}$$

а для коэффициентов

$$\begin{aligned} P_1 = & (D_{11} - D_{11}^0) \frac{C_{11}}{\Omega} + \left(\frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} \right)^2; \\ P_2 = & (D_{22} - D_{22}^0) \frac{C_{22}}{\Omega} + \left(\frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} \right)^2; \\ P_3 = & 2 \left[(D_{12} - D_{12}^0) + 2(D_{66} - D_{66}^0) \right] \frac{C_{11}}{\Omega} + \\ & + (D_{11} - D_{11}^0) \left(\frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) + \\ & + 2 \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} \left(\frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \right); \\ P_4 = & 2 \left[(D_{12} - D_{12}^0) + 2(D_{66} - D_{66}^0) \right] \frac{C_{22}}{\Omega} + \\ & + (D_{22} - D_{22}^0) \left(\frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) + \\ & + 2 \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} \left(\frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_5 = & (D_{11} - D_{11}^0) \frac{C_{22}}{\Omega} + 2 \left[(D_{12} - D_{12}^0) + 2 (D_{66} - D_{66}^0) \right] \times \\
& \times \left(\frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) + (D_{22} - D_{22}^0) \frac{C_{11}}{\Omega} + \\
& + \left(\frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \right)^2 + \\
& + 2 \frac{(K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12})(K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12})}{\Omega^2};
\end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{1}{R} \cdot \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega};$$

$$Q_4 = \frac{1}{R} \cdot \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega};$$

$$Q_3 = \frac{1}{R} \left(\frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \right).$$

Расчетные величины оболочки посредством искомой функции $\Psi(\alpha, \beta)$ представятся формулами

$$T_1 = \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - L_3(d_{jk}) \right] \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2}; \quad (43)$$

$$T_2 = \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - L_3(d_{jk}) \right] \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}; \quad (44)$$

$$S = - \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - L_3(d_{jk}) \right] \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta}; \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
M_1 = & - \left[(D_{11} - D_{11}^0) \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (D_{12} - D_{12}^0) \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \times \\
& \times L_2(C_{jk}) \Psi + \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - L_3(d_{jk}) \right] \times \\
& \times \left[\frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \Psi; \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = & - \left[(D_{22} - D_{22}^0) \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (D_{12} - D_{12}^0) \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \times \\
& \times L_2(C_{jk}) \Psi + \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - L_3(d_{jk}) \right] \times \\
& \times \left[\frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \Psi; \quad (47)
\end{aligned}$$

$$H = -2 (D_{66} - D_{66}^0) \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_2 (C_{jk}) \Psi -$$

$$- \frac{K_{66}}{C_{66}} \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - L_3 (d_{jk}) \right] \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \quad (48)$$

$$\sigma_{\alpha}^i = \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - L_3 (d_{jk}) \right] \left[\left(B_{11}^i \frac{C_{22}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \right.$$

$$\left. - \left(B_{11}^i \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{11}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \Psi +$$

$$+ \left[\left(B_{11}^i \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right) \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \right.$$

$$+ \left(B_{11}^i \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{11}^i \right) \times$$

$$\left. \times \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] L_2 (C_{jk}) \Psi; \quad (49)$$

$$\sigma_{\beta}^i = \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - L_3 (d_{jk}) \right] \left[\left(B_{22}^i \frac{C_{11}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \right.$$

$$\left. - \left(B_{22}^i \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{22}}{\Omega} \right) \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \Psi +$$

$$+ \left[\left(B_{22}^i \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right) \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \right.$$

$$+ \left(B_{22}^i \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{22}^i \right) \times$$

$$\left. \times \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] L_2 (C_{jk}) \Psi; \quad (50)$$

$$\omega = L_2 (C_{jk}) \Psi; \quad (51)$$

$$u = \frac{K_{11}}{\Omega} \cdot \frac{1}{A^5} \cdot \frac{\partial^5 \Psi}{\partial \alpha^5} + \frac{1}{C_{66} \Omega} [C_{22} K_{11} - C_{12} (K_{12} - 2K_{66})] \times$$

$$\times \frac{1}{A^3 B^2} \cdot \frac{\partial^5 \Psi}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2} + \frac{1}{C_{66} \Omega} [C_{22} (K_{12} + 2K_{66}) - K_{22} (C_{12} + C_{66})] \times$$

$$\times \frac{1}{AB^4} \cdot \frac{\partial^5 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta^4} - \frac{1}{R} \cdot \frac{C_{12}}{\Omega} \cdot \frac{1}{A^3} \cdot \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \alpha^3} +$$

$$+ \frac{1}{R} \cdot \frac{C_{22}}{\Omega} \cdot \frac{1}{AB^2} \cdot \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta^2}; \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
v = & \frac{K_{22}}{\Omega} \cdot \frac{1}{B^5} \cdot \frac{\partial^5 \Psi}{\partial \beta^5} + \frac{1}{C_{66} \Omega} [C_{11} K_{22} - C_{12} (K_{12} + 2K_{66})] \times \\
& \times \frac{1}{A^2 B^3} \cdot \frac{\partial^5 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^3} + \frac{1}{C_{66} \Omega} [C_{11} (K_{12} + 2K_{66}) - K_{11} (C_{12} + C_{66})] \times \\
& \times \frac{1}{A^4 B} \cdot \frac{\partial^5 \Psi}{\partial \alpha^4 \partial \beta} - \frac{1}{R} \cdot \frac{C_{22}}{\Omega} \cdot \frac{1}{B^3} \cdot \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \beta^3} - \\
& - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{C_{66}} - \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \frac{1}{A^2 B} \cdot \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \beta}. \quad (53)
\end{aligned}$$

Коэффициенты жесткостей, входящие в расчетные формулы и уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
C_{jk} &= \sum_{s=1}^{m+n=N} B_{jk}^s (\delta_s - \delta_{s-1}); \\
K_{jk} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+n=N} B_{jk}^s (\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2); \\
D_{jk} &= \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{m+n=N} B_{jk}^s (\delta_s^3 - \delta_{s-1}^3).
\end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Здесь принято, что координатная поверхность (α, β) , $(\gamma = 0)$ совпадает с нижней (внутренней) поверхностью оболочки; $N = m + n$ — число всех слоев; δ_s — расстояния поверхностей контактов слоев (см. рис. 5 гл. 7) от координатной поверхности (α, β) .

Коэффициенты упругости

$$\begin{aligned}
B_{11}^i &= \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}; \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}; \quad B_{66}^i = G_{12}^i; \\
B_{12}^i &= \frac{\nu_1^i E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i} = \frac{\nu_2^i E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i},
\end{aligned}$$

где E_1^i , E_2^i , ν_1^i , ν_2^i , G_{12}^i — модули упругости, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига для главных направлений упругости материала каждого слоя оболочки.

В частном случае, когда оболочка составлена из нечетного числа $(2m + 1)$ слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки, которая является координатной поверхностью $\gamma = 0$ (см. рис. 10 гл. 6), для жесткостей получим

$$\left. \begin{aligned}
C_{jk} &= 2 \left[B_{jk}^{m+1} h_{m+1} + \sum_{s=1}^m B_{jk}^s (h_s - h_{s+1}) \right]; \\
D_{jk} &= \frac{2}{3} \left[B_{jk}^{m+1} h_{m+1}^3 + \sum_{s=1}^m B_{jk}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right]; \\
K_{jk} &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (55)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МЕТОДОМ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Рассмотрим два варианта круговой цилиндрической оболочки.

Круговая цилиндрическая оболочка замкнутого профиля. Оболочка ортотропная многослойная. Главные направления упругости совпадают с координатными линиями $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Оболочка перекрывает прямоугольный план ($a \times b_1$) и имеет размеры: по образующей — a ; по дуге поперечного круга — b , радиус кривизны координатной поверхности — R .

Начало отсчета координат α и β помещается в каком-либо углу оболочки. Система координат выбрана так, что коэффициенты первой квадратичной формы A и B были равны единице [см. соотношения (4)].

Оболочка свободно оперта по всему контуру (шарнирные, свободные в тангенциальном направлении края) и несет нормально приложенную нагрузку $Z = Z(\alpha, \beta)$ (см. рис. 7).

Разрешающим уравнением может служить уравнение (42).

Граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \alpha = 0, \quad \alpha = a \quad v = w = T_1 = M_1 = 0; \\ \text{при } \beta = 0, \quad \beta = b \quad u = w = T_2 = M_2 = 0. \end{array} \right\} \quad (56)$$

Искомая функция $\Psi(\alpha, \beta)$ должна быть определена так, чтобы при заданной нагрузке Z удовлетворялись разрешающее уравнение (42) и граничные условия (12).

Решение, удовлетворяющее граничным условиям (56), запишется [1, 2, 4] так:

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (57)$$

Нагрузка $Z = Z(\alpha, \beta)$ также представляется в виде двойного ряда Фурье

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b},$$

где

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b Z(\alpha, \beta) \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} d\alpha d\beta. \quad (58)$$

После серии известных преобразований получим

$$\Psi = \frac{a^8}{\pi^8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}.$$

Нормальное перемещение

$$w = \frac{a^4}{\pi^4} \sum_m \sum_n a_{mn} \frac{\Delta'_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}.$$

Внутренние силы

$$T_1 = \frac{a^4 \lambda^2}{\pi^4} \cdot \frac{1}{R} \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\frac{\pi^2 R}{a^2} \Delta''_{mn} + m^2 \right) \times \\ \times \frac{n^2}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}.$$

$$T = \frac{a^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{R} \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\frac{\pi^2 R}{a^2} \Delta''_{mn} + m^2 \right) \times \\ \times \frac{m^2}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b};$$

$$S = \frac{a^4 \lambda}{\pi^4} \cdot \frac{1}{R} \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\frac{\pi^2 R}{a^2} \Delta''_{mn} + m^2 \right) \times \\ \times \frac{mn}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi\alpha}{a} \cos \frac{n\pi\beta}{b}.$$

Внутренние моменты

$$M_1 = \frac{a^2}{\pi^2} \sum_m \sum_n \left\{ [D_{11} - D_{11}^0] m^2 + (D_{12} - D_{12}^0) n^2 \lambda^2 \right\} \Delta'_{mn} + \\ + \left[\frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} m^2 + \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} n^2 \lambda^2 \right] \times \\ \times \left(\Delta''_{mn} + \frac{a^2 m^2}{R \pi^2} \right) \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b};$$

$$M_2 = \frac{a^2 \lambda}{\pi^2} \sum_m \sum_n \left\{ [(D_{22} - D_{22}^0) n^2 \lambda^2 + (D_{12} - D_{12}^0) m^2] \Delta'_{mn} + \right. \\ + \left[\frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega} n^2 \lambda^2 + \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} m^2 \right] \times \\ \times \left(\Delta''_{mn} + \frac{a^2 m^2}{R \pi^2} \right) \left. \right\} \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b};$$

$$H = \frac{a^2 \lambda}{\pi^2} \sum_m \sum_n a_{mn} \left[2 (D_{66} - D_{66}^0) \Delta'_{mn} - \frac{K_{66}}{C_{66}} \left(\Delta''_{mn} + \frac{a^2 m^2}{R \pi^2} \right) \right] \times \\ \times \frac{mn}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi\alpha}{a} \cos \frac{n\pi\beta}{b}.$$

Напряжения в слоях

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}^i &= \frac{a^2}{\pi^2} \sum_m \sum_n \left\{ \left[\left(B_{11}^i \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{11}}{\Omega} \right) m^2 \times \right. \right. \\
&\quad \times \left(B_{11}^i \frac{C_{22}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{12}}{\Omega} \right) n^2 \lambda^2 \left. \right] \left(\frac{a^2 m^2}{R \pi^2} + \Delta_{mn}'' \right) + \\
&\quad + \left[\left(B_{11}^i \frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right) n^2 \lambda^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(B_{11}^i \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{11}^i + B_{12}^i \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} \right) m^2 \right] \Delta_{mn}' \left. \right\} \times \\
&\quad \times \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m \pi \alpha}{a} \sin \frac{n \pi \beta}{b}; \\
\sigma_{\beta}^i &= \frac{a^2}{\pi^2} \sum_m \sum_n \left\{ \left[\left(B_{22}^i \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{22}}{\Omega} \right) n^2 \lambda^2 - \right. \right. \\
&\quad - \left(B_{22}^i \frac{C_{11}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{12}}{\Omega} \right) m^2 \left. \right] \left(\frac{a^2 m^2}{R \pi^2} + \Delta_{mn}'' \right) + \\
&\quad + \left[\left(B_{22}^i \frac{K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}}{\Omega} + \right. \right. \\
&\quad \left. + B_{12}^i \frac{K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right) m^2 + \left(B_{22}^i \frac{K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}}{\Omega} - \right. \\
&\quad \left. - \gamma B_{22}^i + B_{12}^i \frac{K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}}{\Omega} \right) n^2 \lambda^2 \left. \right] \Delta_{mn}' \left. \right\} \times \\
&\quad \times \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m \pi \alpha}{a} \sin \frac{n \pi \beta}{b}; \\
\tau_{\alpha\beta}^i &= \frac{a^2 \lambda^2}{\pi^2} \sum_m \sum_n a_{mn} \times \\
&\quad \times \left[\left(\frac{a^2 m^2}{R \pi^2} + \Delta_{mn}'' \right) \frac{B_{66}^i}{C_{66}} - 2 B_{66}^i \left(\gamma - \frac{K_{66}}{C_{66}} \right) \Delta_{mn}' \right] \times \\
&\quad \times \frac{mn}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m \pi \alpha}{a} \cos \frac{n \pi \beta}{b}.
\end{aligned}$$

Здесь, наряду с принятыми выше обозначениями, использованы

$$\Delta_{mn} = P_1 m^8 + P_3 m^6 n^2 \lambda^2 + P_5 m^4 n^4 \lambda^4 + P_4 m^2 n^6 \lambda^6 + P_2 n^8 \lambda^8 + \\ + 2 \frac{a^2}{\pi^2} (Q_1 m^6 + Q_3 m^4 n^2 \lambda^2 + Q_4 m^2 n^4 \lambda^4) + \frac{1}{R^2} \frac{a^4}{\pi^4} m^4;$$

$$\lambda = \frac{a}{b};$$

$$\Delta'_{mn} = \frac{C_{11}}{\Omega} m^4 + \left(\frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) m^2 n^2 \lambda^2 + \frac{C_{22}}{\Omega} n^4 \lambda^4;$$

$$\Delta''_{mn} = \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} m^4 + \left(\frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \right. \\ \left. + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \right) m^2 n^2 \lambda^2 + \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} n^4 \lambda^4.$$

В случае, когда оболочка загружена сосредоточенной силой $Z = -Q$, нормально приложенной в произвольной точке ($\alpha = x$, $\beta = y$), из выражения (58) для a_{mn} имеем

$$a_{mn} = -\frac{4Q}{ab} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots).$$

В случае, когда оболочка загружена нормально приложенной равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q , т. е. когда $Z = -q$, для a_{mn} имеем [см. формулу (58)]

$$a_{mn} = -\frac{16q}{\pi^2 mn} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots),$$

для всех прочих m и n $a_{mn} = 0$.

В случае, когда оболочка загружена распределенной нормально приложенной нагрузкой, линейно изменяющейся вдоль образующей оболочки, т. е. когда $Z = -qa$, получим

$$a_{mn} = \frac{8aq}{\pi^2 mn} (-1)^m \quad (m = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

В приведенных формулах, полагая K_{ik} равной нулю, получим расчетные формулы для слоистой ортотропной цилиндрической оболочки, симметрично собранной относительно срединной поверхности оболочки.

Круговая цилиндрическая оболочка замкнутого профиля. Оболочка ортотропная многослойная. Главные направления упругости совпадают с направлениями координатных линий. Система координат выбрана так, что коэффициенты первой квадратичной формы A и B равны R [см. соотношения (1)]. Начало отсчета координаты α находится в плоскости какого-либо торцового сечения оболочки.

Оболочка свободно оперта по торцам и несет лишь нормально приложенную (радиальную) поверхностную нагрузку $Z = Z(\alpha, \beta)$. Длина оболочки l , радиус кривизны R (см. рис. 8).

Разрешающим уравнением может служить уравнение (42).
Граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \alpha = 0 \quad v = w = T_1 = M_1 = 0; \\ \text{при } \alpha = \frac{l}{R} \quad v = w = T_1 = M_1 = 0. \end{array} \right\} \quad (59)$$

Искомая функция должна быть определена так, чтобы при заданной нагрузке Z удовлетворялись: разрешающее уравнение (42), граничные условия (59) и, ввиду замкнутости оболочки, условия периодичности по координате β .

Решение, удовлетворяющее граничным условиям (59) и условию периодичности, представляется в виде [1, 2, 4]

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta; \\ \left(\alpha = \frac{l}{R}; m = 1, 2, 3, \dots; n = 0, 1, 2, 3, \dots \right). \end{array} \right\} \quad (60)$$

Нагрузка $Z(\alpha, \beta)$ также выразится двойным рядом Фурье

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta,$$

где

$$\left. \begin{array}{l} a_{m_0} = \frac{1}{\pi\alpha_1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\alpha_1} Z(\alpha, \beta) \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} d\alpha d\beta; \\ a_{mn} = \frac{2}{\pi\alpha_1} \int_0^{\alpha_1} \int_{-\pi}^{\pi} Z(\alpha, \beta) \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta d\alpha d\beta. \end{array} \right\} \quad (61)$$

После некоторых преобразований получим

$$\Psi = R^8 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \frac{1}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta.$$

Нормальное перемещение

$$w = R^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \frac{\Delta'_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta.$$

Внутренние силы

$$\begin{aligned} T_1 = R^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R + \Delta''_{mn} \right] \times \\ \times \frac{n^2}{\Delta_{mn}} a_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta; \end{aligned}$$

$$T_2 = R^2 \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left[\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R + \Delta'_{mn} \right] \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 \times \\ \times \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta; \\ S = -R^2 \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left[\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R + \Delta''_{mn} \right] \times \\ \times \frac{m\pi}{\alpha_1} \frac{n}{\Delta_{mn}} a_{mn} \cos \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \sin n\beta.$$

Внутренние моменты

$$M_1 = R^2 \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left\{ \left[(D_{11} - D_{11}^0) \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 + (D_{12} - D_{12}^0) n^2 \right] \times \right. \\ \times \Delta'_{mn} + \left[\frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} n^2 \right] \times \\ \times \left[\Delta''_{mn} + \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R \right] \left. \right\} \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta; \\ M_2 = R^2 \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left\{ \left[(D_{22} - D_{22}^0) n^2 + (D_{12} - D_{12}^0) \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times \Delta'_{mn} + \left[\frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} n^2 + \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[\Delta''_{mn} + \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R \right] \left. \right\} \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta; \\ H = R^2 \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left\{ 2 (D_{66} - D_{66}^0) \Delta_{mn} - \frac{K_{66}}{C_{66}} \times \right. \\ \times \left[\Delta''_{mn} + \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R \right] \left. \right\} \frac{m\pi}{\alpha_1} \frac{n}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \sin n\beta.$$

Напряжения в слоях

$$\sigma_{\alpha}^i = -R^2 \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left\{ \left[\left(B_{11}^i \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{11}}{\Omega} \right) \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(B_{11}^i \frac{C_{22}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{12}}{\Omega} \right) n^2 \right] \left[\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R + \Delta''_{mn} \right] + \right. \\ + \left[\left(B_{11}^i \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right) n^2 + \right. \\ + \left. \left(B_{11}^i \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right) \times \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 \right] \Delta'_{mn} \right\} \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta;$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta}^i = & -R^2 \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left\{ \left[\left(B_{22}^i \frac{C_{12}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{22}}{\Omega} \right) n^2 - \right. \right. \\
& - \left(B_{22}^i \frac{C_{11}}{\Omega} - B_{12}^i \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 \left. \right] \left[\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R + \Delta_{mn}'' \right] + \\
& + \left[B_{22}^i \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} + B_{12}^i \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{12}^i \right] \times \\
& \times \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 + \left(B_{22}^i \frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \gamma B_{22}^i + \right. \\
& + \left. B_{12}^i \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} \right) n^2 \left. \right] \Delta_{mn}' \left\} \frac{a_{mn}}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \cos n\beta; \\
\tau_{\alpha\beta}^i = & -R^2 \sum_{m=1} \sum_{n=0} \left\{ \left[\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 R + \Delta_{mn}'' \right] \times \right. \\
& \times \frac{B_{66}^i}{C_{66}} - 2B_{66}^i \left(\gamma - \frac{K_{66}}{C_{66}} \right) \Delta_{mn}' \left. \right\} \frac{m\pi}{\alpha_1} \frac{n}{\Delta_{mn}} a_{mn} \cos \frac{m\pi\alpha}{\alpha_1} \sin n\beta;
\end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}
\Delta_{mn} = & P_1 \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^8 + P_3 \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^6 n^2 + P_5 \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^4 n^4 + \\
& + P_4 \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 n^6 + P_2 n^8 + 2R^2 \left[Q_1 \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^6 + \right. \\
& + Q_3 \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^4 n^2 + Q_4 \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 n^4 \left. \right] + R^2 \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^4; \\
\Delta_{mn}' = & \frac{C_{11}}{\Omega} \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^4 + \left(\frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega} \right) \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 n^2 + \frac{C_{22}}{\Omega} n^4; \\
\Delta_{mn}'' = & \frac{K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}}{\Omega} \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^4 + \left(\frac{K_{22}C_{11} - K_{12}C_{12}}{\Omega} - \right. \\
& - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}} + \frac{K_{11}C_{22} - K_{12}C_{12}}{\Omega} \left. \right) \left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \right)^2 n^2 + \frac{K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12}}{\Omega} n^4.
\end{aligned}$$

В приведенных формулах, полагая $K_{jk} = 0$, получим расчетные формулы круговой цилиндрической оболочки замкнутого профиля, собранного из нечетного числа слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки.

Если оболочка с горизонтально расположенной осью целиком заполнена жидкостью с удельным весом ρ и угол β отсчитывают от нижней точки трубы, то $Z = R\rho(1 - \cos \beta)$ и из формулы (61) для a_{mn} имеем

$$a_{m_0} = \frac{4\rho R}{m\pi}; \quad a_{m_1} = \frac{4\rho R}{m\pi} \quad (m = 1, 3, 5, \dots)$$

и при $n \geq 2$ $a_{mn} = 0$.

Если оболочка с вертикальной осью находится под гидростатическим давлением жидкости с удельным весом ρ и координату α отсчитывают от верхнего торца оболочки, то $Z = -\rho\alpha$ и из формулы (61) для a_{mn} имеем

$$a_{m_0} = \frac{2\rho\alpha_1}{m\pi} (-1)^m \quad (m = 1, 2, 3), \quad a_{mn} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.
 2. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
 3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
 4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
 5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
-

Глава 8

ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ ИЗ ОРИЕНТИРОВАННЫХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ

ВВЕДЕНИЕ

Ориентированный стеклопластик представляет собой конструктивно анизотропный материал, и выполненные из него конструкции можно рассчитывать на основе методов, развитых в гл. 5—7. Следует, однако, иметь в виду, что упругие и прочностные характеристики материала, необходимые для расчета конструкции, зависят от того, как изготавливается материал (ориентировка нитей, содержание связующего и наполнителя).

В связи с тем, что синтетические смолы, используемые в качестве связующего, обладают вязко-упругими свойствами, деформации стеклопластиков заметно зависят от времени.

Для расчета конструкций из стеклопластика с учетом зависимости деформаций от времени рекомендуется использовать аппарат линейной вязко-упругости. Здесь рассмотрен простейший вариант, при котором стеклянная арматура считается вполне упругой, а связующее — несжимаемым стандартным вязко-упругим телом.

УПРУГО-ВЯЗКИЕ СВОЙСТВА СВЯЗУЮЩЕГО

Зависимость деформации синтетических смол от времени показана на рис. 1. Если мгновенно приложить к образцу постоянную нагрузку, а затем снять (рис. 1, а), то деформации будут изменяться в соответствии с графиком на рис. 1, б. Деформация состоит из двух частей — упругой, которая мгновенно изменяется с изменением напряжения, и так называемой *высокоэластической*, которая развивается в течение некоторого времени.

Деформации обоих видов являются вполне обратимыми¹. Упругая деформация исчезает мгновенно после снятия нагрузки, высокоэластическая — по истечении некоторого времени. Кинетика развития высокоэластической деформации в большой степени зависит от температуры. С повышением температуры время установления высокоэластической деформации резко сокращается.

¹ Кроме упругой и высокоэластической, при достаточно больших уровнях напряжения возникает и необратимая пластическая деформация, также развивающаяся постепенно (ползучесть). Однако при допустимых с точки зрения прочности напряжениях пластические деформации малы и их можно не учитывать.

При комнатной температуре для большинства пластмасс, используемых в качестве связующих в стеклопластиках, большая часть высокоэластической деформации развивается в течение нескольких десятков минут после нагружения, а практически равновесное состояние устанавливается в течение одних или нескольких суток.

Аналогичные зависимости от времени существуют и в том случае, если задавать не величину нагрузки, а величину деформации. Так, если мгновенно задать деформацию и зафиксировать ее величину, то возникшее при мгновенной деформации напряжение релаксирует, постепенно приближаясь к равновесному значению.

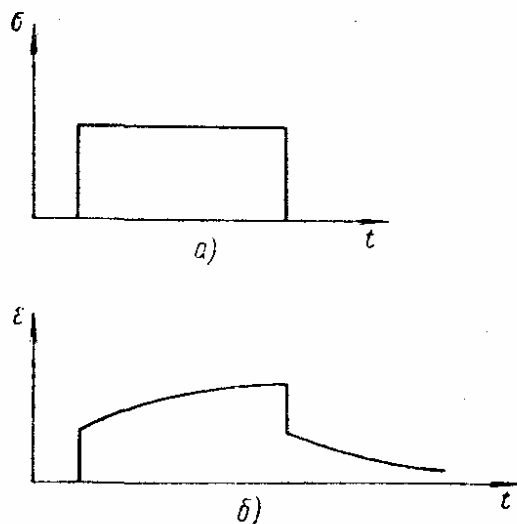


Рис.

При умеренных напряжениях равновесная высокоэластическая деформация, как и упругая, линейно зависит от напряжений. Следовательно, в двух важных случаях можно считать связующее вполне упругим материалом с линейной зависимостью между напряжениями и деформациями:

при весьма быстрых или высокочастотных нагружениях, когда высокоэластические деформации не успевают возникнуть;

при статическом нагружении, когда реализуется равновесное состояние материала.

Разумеется, в этих случаях связующее будет характеризоваться различными значениями упругих постоянных.

Если в расчете необходимо учесть кинетику развития высокоэластической деформации, целесообразно использовать для этого теорию линейной вязко-упругости (см. гл. 6 т. 1).

Хотя в ряде работ (см., например, работу [11]) показано, что линейная теория не вполне подходит для полимеров и что в действительности «время релаксации» зависит от величины напряжения, учет нелинейных эффектов при расчете конструкций чрезвычайно затруднителен. Вместе с тем теория линейной вязко-упругости дает правильную качественную и приблизительно правильную количественную картину явления.

Известно (см. гл. 6 т. 1), что соотношения между напряжениями и деформациями в теории линейной вязко-упругости по форме совпадают с выражением закона Гука, однако упругие постоянные должны быть заменены соответствующими операторами.

Ограничимся наиболее важным для расчета стеклопластиков случаем двухосного напряженного состояния. В этом случае уравнения закона Гука имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad [E = 2(1 + \nu) G].$$

В эти выражения входят две независимые упругие постоянные, которые должны быть заменены операторами.

Существенное упрощение может быть достигнуто, если предположить, что материал является несжимаемым, как при упругих, так и при высокоэластических деформациях, т. е. что $\nu = 0,5$. Это предположение довольно близко к действительности, так как для большинства смол при упругих деформациях $\nu \approx 0,4$, а высокоэластические деформации проходят без изменения объема.

Для несжимаемого материала сохраняется всего лишь одна независимая постоянная (например, E), которая входит множителем в выражения всех напряжений

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - 0,5\sigma_y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - 0,5\sigma_x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3}{E} \tau_{xy}.$$

В соответствии с теорией линейной вязко-упругости эта постоянная должна быть заменена оператором

$$\bar{E} = \frac{Q(p)}{P(p)}, \quad (1)$$

где $p = \frac{d}{dt}$; Q и P — многочлены, все корни которых отрицательны.

Характер этих многочленов легко установить, рассмотрев, например, случай одноосного напряженного состояния

$$\sigma = \bar{E}\varepsilon; \quad P(p)\sigma = Q(p)\varepsilon.$$

Из того условия, что для материала существует равновесное состояние при ненулевых напряжениях и деформациях, следует, что оба многочлена содержат свободные члены (так как при равновесии все производные по времени равны нулю, т. е. $p \rightarrow 0$). При этом отношение свободных членов в выражениях $Q(p)$ и $P(p)$ равно «равновесному модулю» материала E_∞ .

С другой стороны, при весьма быстрых деформациях материал ведет себя как упругий с модулем E_0 («динамический модуль»). Отсюда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Q(p)}{P(p)} = E_0.$$

Следовательно, старшие члены полиномов Q и P имеют одинаковую степень и отношение коэффициентов при них равно E_0 .

Итак, зависимость σ , ε может быть представлена в виде

$$(P_m p^m + P_{m-1} p^{m-1} + \dots + 1) \sigma = (E_0 P_m p^m + q_{m-1} p^{m-1} + \dots + q_{m-2} p^{m-2} + \dots + E_\infty) \varepsilon.$$

Выбирая степень полиномов и значения входящих в них коэффициентов, можно аппроксимировать реальное поведение материала.

Простейшая модель линейного упруго-вязкого тела может быть получена, если положить $m = 1$ и обозначить $\frac{1}{P_1} = \tau$.

В этом случае

$$\bar{E} = \frac{E_0 p + \frac{E_\infty}{\tau}}{p + \frac{1}{\tau}}.$$

Так как $p = \frac{d}{dt}$, то уравнение, связывающее σ и ε , — дифференциальное:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma = E_0 \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_\infty}{\tau} \varepsilon. \quad (2)$$

Материал, свойства которого описываются уравнением (2), называют обычно стандартным линейным вязко-упругим телом. Легко видеть, что стандартное вязко-упругое тело моделирует процессы последействия, восстановления и релаксации напряжений.

Так, если мгновенно создать деформацию ε_0 , в теле возникнет напряжение $\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$; если затем сохранять деформацию постоянной, изменение напряжений будет определяться уравнением

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma = \frac{E_\infty}{\tau} \varepsilon_0.$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия $t=0$, $\sigma = \sigma_0$ имеет вид

$$\sigma = E_\infty \varepsilon_0 + [E_0 - E_\infty] \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Закон изменения напряжений показан на рис. 2. Константа τ представляет собой время, в течение которого неравновесная часть напряжения $(\sigma - \sigma_\infty)$ уменьшается в e раз; эту константу называют временем релаксации.

Действительный закон релаксации напряжений для полимеров обычно отличается от экспоненциального; вначале напряжения падают быстрее, а затем — медленнее (см. штриховую линию на рис. 2). Чтобы получить лучшее количественное совпадение с экспериментальными данными, следует отказаться от модели стандартного вязко-упругого тела и учесть большее количество членов в выражениях P и Q , однако при этом возрастают трудности расчета.

Представление модуля E в виде оператора позволяет чрезвычайно упростить решение задач вязко-упругости.

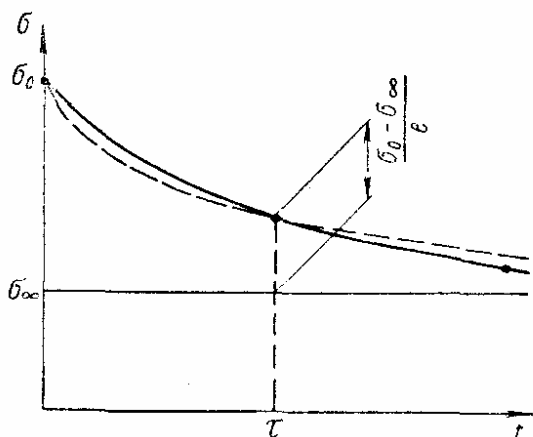


Рис. 2

Так как операции дифференцирования и интегрирования по времени и по пространственным координатам взаимно независимы, оказывается возможным разделить решение задачи на две части. Сначала решается упругая задача, причем E считается константой, а затем в полученных формулах E заменяют оператором (1) и полученное дифференциальное уравнение по времени интегрируют с учетом начальных условий.

В случае нулевых начальных условий полученные после решения упругой задачи выражения напряжений и перемещений, включающие оператор p , можно рассматривать как изображения соответствующих величин по Лапласу—Карсону и для нахождения этих величин в функции времени использовать формулы обращения (при этом нагрузки, меняющиеся во времени, также предварительно должны быть заменены своими изображениями).

Следовательно, первым шагом в расчете конструкций из полимерных материалов является упругий расчет. Он является окончательным, если рассматриваются весьма быстрые или, наоборот, равновесные процессы деформирования. Для изучения деформирования с учетом релаксационных процессов модуль упругости связующего заменяется оператором и решение обращается.

УПРУГОСТЬ ОРИЕНТИРОВАННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Стеклопластик составлен из материалов, резко различающихся по жесткости, — стеклонитей и связующего. При расчете конструкций целесообразно осреднять свойства материала, рассматривая его как однородный с анизотропными свойствами.

Такое рассмотрение допустимо, так как размеры конструкции всегда велики по сравнению с размерами элемента структуры (например, с шагом стеклонитей).

Вместе с тем оно не означает игнорирования действительной структуры материала, так как свойства композиции могут быть выражены через свойства составляющих, а по напряжениям и деформациям, рассчитанным для квазиоднородного материала, могут быть рассчитаны напряжения и деформации в стеклонитях и связующем.

Ниже рассмотрен приближенный способ расчета, предложенный применительно к резинокордным конструкциям А. А. Лапиным [8], а для стеклопластиков В. В. Болотным [2].

Каждый слой однонаправленных стеклонитей со связующим (слой стеклошпона, рис. 3, а) моделируется в виде пластинки, составленной из чередующихся слоев стекла и смолы (рис. 3, б). Коэффициент ζ представляет собой объемное содержание стеклонитей в данном слое. Затем рассматривают плоское напряженное состояние такой модели (рис. 3, в). Здесь σ_1 , σ_2 , τ_{12} «средние» напряжения в модели, т. е. отношения соответствующих усилий к площади поперечного ее сечения.

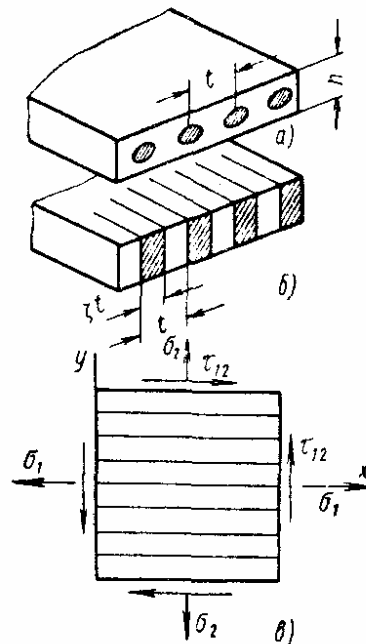


Рис. 3

Условия равновесия и совместности деформаций слоев наполнителя и связующего приводят к следующим уравнениям:

$$\sigma_1 = \zeta \sigma'_1 + (1 - \zeta) \sigma''_1; \quad \sigma_2 = \sigma'_2 = \sigma''_2;$$

$$\tau_{12} = \tau'_{12} = \tau''_{12}; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = \varepsilon''_1;$$

$$\varepsilon_2 = \zeta \varepsilon'_2 + (1 - \zeta) \varepsilon''_2; \quad \gamma_{12} = \zeta \gamma'_{12} + (1 - \zeta) \gamma''_{12}.$$

В этих формулах величины с одним штрихом относятся к наполнителю, а с двумя штрихами — к связующему; ε_1 , ε_2 , γ_{12} — «средние» деформации модели.

Предполагая, что каждый из материалов является изотропным и подчиняется закону Гука,

$$\varepsilon'_1 = \frac{1}{E'} (\sigma'_1 - \nu' \sigma'_2); \quad \varepsilon''_1 = \frac{1}{E''} (\sigma''_1 - \nu'' \sigma''_2);$$

$$\varepsilon'_2 = \frac{1}{E'} (\sigma'_2 - \nu' \sigma'_1); \quad \varepsilon''_2 = \frac{1}{E''} (\sigma''_2 - \nu'' \sigma''_1);$$

$$\gamma'_{12} = \frac{1}{G'} \tau'_{12}; \quad \gamma''_{12} = \frac{1}{G''} \tau''_{12}.$$

Приведенные уравнения позволяют вычислить осредненные напряжения в слое (σ_1 , σ_2 , τ_{12}) по осредненным деформациям (ε_1 , ε_2 , γ_{12}) или, наоборот, по напряжениям определить деформации.

Одновременно определяют напряжения и деформации в структурных составляющих.

Связь между осредненными напряжениями и деформациями для слоя имеет вид, характерный для ортотропного тела,

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1}; \quad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (3)$$

или

$$\sigma_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2; \quad \sigma_2 = B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2; \quad \tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}. \quad (4)$$

В формулах (3) и (4)

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \zeta E' + (1 - \zeta) E''; \\ E_2 &= \left[\frac{\zeta (1 - \nu'^2)}{E'} + \frac{(1 - \zeta) (1 - \nu''^2)}{E''} + \frac{\nu_{21}^2}{E_1} \right]^{-1}; \\ \nu_{21} &= \zeta \nu' + (1 - \zeta) \nu''; \quad \nu_{12} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{21}; \\ G_{12} &= \left[\frac{\zeta}{G'} + \frac{1 - \zeta}{G''} \right]^{-1}; \\ B_{11} &= E_1 + \nu_{21}^2 B_{22}; \\ B_{22} &= \left[\frac{\zeta (1 - \nu'^2)}{E'} + \frac{(1 - \zeta) (1 - \nu''^2)}{E''} \right]^{-1}; \quad B_{12} = \nu_{21} B_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Напряжения в нитях и связующем связаны со средними напряжениями формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 \frac{E'}{E_1} - \sigma_2 \frac{(1 - \zeta)(E'v'' - E''v')}{E_1}; \\ \sigma_1'' &= \sigma_1 \frac{E''}{E'} + \sigma_2 \frac{\zeta(E'v'' - E''v')}{E_1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В связи с тем, что модуль упругости стеклонитей E' существенно больше, чем модуль упругости связующего E'' , упругие постоянные шпонового слоя также сильно различаются по величине. Постоянные E_1, B_{11} имеют порядок модуля стекла, тогда как постоянные $E_2, B_{22}, B_{12}, G_{12}$ имеют порядок модуля связующего.

Разумеется, полученные формулы, являющиеся точными для схемы на рис. 3, б, для реального стеклошпона — лишь приближенные. Это связано как с несоответствием геометрии схемы и слоя, так и с тем, что стеклонити, сами по себе, имеют анизотропные свойства. Существенно также то, что стеклонити имеют некоторую извилистость. Влияние извилистости нитей на свойства стеклопластика рассмотрено в работе [3].

Для приближенного расчета часто можно пренебрегать модулем связующего E'' по сравнению с E' и полагать $v' = v'' = v$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} B_{11} \approx E_1 \approx \zeta E'; \quad B_{22} \approx E_2 \approx \frac{E''}{(1 - \zeta)(1 - v^2)}; \quad v_{21} = v; \\ G_{12} \approx \frac{G''}{1 - \zeta}; \quad B_{12} = \frac{vE''}{(1 - \zeta)(1 - v^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Формулами (7) можно руководствоваться, если коэффициент армирования ζ достаточно далек от нуля и единицы (например, $0,3 < \zeta < 0,7$).

Упругие свойства многослойной конструкции, составленной из нескольких, различно ориентированных слоев шпона, могут быть исследованы на основе предположения, что осредненные деформации всех слоев одинаковы. Напряжения в конструкции в этом случае определяют путем осреднения напряжений, возникающих в каждом из слоев.

Отнесем слоистую конструкцию к координатным осям x, y (рис. 4). Пусть ось армировки i -го шпона составляет угол θ_i с осью x . Тогда осредненные компоненты деформации i -го слоя, отнесенные к осям $1_i, 2_i$, можно по известным формулам вычислить через общие для всей конструкции деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1i} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_i + \varepsilon_y \sin^2 \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i \cos \theta_i; \\ \varepsilon_{2i} &= \varepsilon_x \sin^2 \theta_i + \varepsilon_y \cos^2 \theta_i - \gamma_{xy} \sin \theta_i \cos \theta_i; \\ \gamma_{12i} &= \gamma_{xy} \cos 2\theta_i - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta_i. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

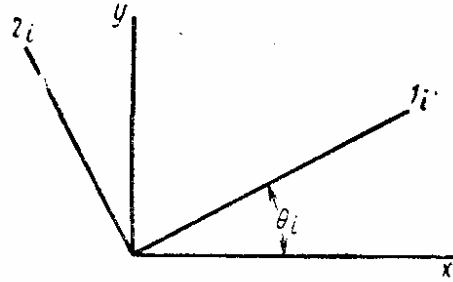


Рис. 4

Зная деформации, можно подсчитать потенциальную энергию деформации, приходящуюся на единицу поверхности i -го слоя:

$$U_i = \frac{h_i}{2} [B_{11i} \epsilon_{1i}^2 + B_{22i} \epsilon_{2i}^2 + 2B_{12i} \epsilon_{1i} \epsilon_{2i} + G_{12i} \gamma_{12i}^2], \quad (9)$$

где h_i — толщина слоя.

Заменяя в формуле (9) деформации их выражениями (8), суммируя энергию, накопленную каждым из слоев, и относя ее к полной толщине слоистого пластика $H = \sum h_i$, получим выражение для удельной его потенциальной энергии

$$U = \frac{1}{2} \{ B_{xx} \epsilon_x^2 + B_{yy} \epsilon_y^2 + 2B_{xy} \epsilon_x \epsilon_y + G_{xy} \gamma_{xy}^2 + \\ + 2B_{xx,yy} \epsilon_x \gamma_{xy} + 2B_{yy,xx} \epsilon_y \gamma_{xy} \}, \quad (10)$$

где коэффициенты упругости можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} B_{xx} &= \sum_i \varphi_i [B_{11i} \cos^2 \theta_i + B_{22i} \sin^2 \theta_i - A_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i]; \\ B_{yy} &= \sum_i \varphi_i [B_{11i} \sin^2 \theta_i + B_{22i} \cos^2 \theta_i - A_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i]; \\ B_{xy} &= \sum_i \varphi_i [B_{12i} + A_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i]; \\ B_{xx,xy} &= \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i [B_{11i} - B_{22i} + A_i \cos 2\theta_i] \sin \theta_i \cos \theta_i; \\ B_{yy,xy} &= \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i [B_{11i} - B_{22i} - A_i \cos 2\theta_i] \sin \theta_i \cos \theta_i; \\ G_{xy} &= \sum_i \varphi_i [G_{12i} + A_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i]; \\ A_i &= B_{11i} + B_{22i} - 2B_{12i} + 4G_{12i}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

здесь $\varphi_i = \frac{h_i}{H}$ — относительная толщина i -го слоя, а суммирование проводят по всем слоям. Если имеются прослойки изотропного связующего, то они также должны быть учтены в суммах. Вклад прослоек связующего в величины B , G составляет

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_{xx} &= \Delta B_{yy} = \varphi_c \frac{E''}{1 - \nu''}; \\ \Delta B_{xy} &= \varphi_c \frac{\nu'' E''}{1 - \nu''^2}; \quad \Delta G_{xy} = \varphi_c G'', \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\varphi_c = \frac{h_c}{H}$ — суммарная относительная толщина прослоек.

Осредненные напряжения в слоистом материале определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_x} = B_{xx}\varepsilon_x + B_{xy}\varepsilon_y + B_{xx,xy}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_y} = B_{xy}\varepsilon_x + B_{yy}\varepsilon_y + B_{yy,xy}\gamma_{xy}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xy}} = B_{xx,yy}\varepsilon_x + B_{yy,xy}\varepsilon_y + G_{xy}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Как видно из этих формул, при произвольном расположении армирующих слоев слоистый материал является анизотропным общего вида.

Чаще всего применяют такие виды армирования, при которых получается ортотропный материал. Для ортотропного материала, для которого оси x, y являются осями упругой симметрии, коэффициенты $B_{xx,xy}, B_{yy,xy}$ равны нулю и зависимости (13) становятся аналогичными формулам (4), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= B_{xx}\varepsilon_x + B_{xy}\varepsilon_y; \\ \sigma_y &= B_{xy}\varepsilon_x + B_{yy}\varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= G_{xy}\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Рассмотрим некоторые виды расположения слоев.

Ортогонально армированный материал. Для слоев, ориентированных вдоль оси x , угол $\theta = 0$, вдоль оси y этот угол $\theta = \frac{\pi}{2}$. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} B_{xx} &= \varphi_x B_{11x} + \varphi_y B_{22y} + \varphi_c \frac{E''}{1 - \nu''^2}; \\ B_{yy} &= \varphi_x B_{22x} + \varphi_y B_{11y} + \varphi_c \frac{E''}{1 - \nu''^2}; \\ B_{xy} &= \varphi_x B_{12x} + \varphi_y B_{12y} + \varphi_c \frac{\nu'' E''}{1 - \nu''^2}; \\ G_{xy} &= \varphi_x G_{12x} + \varphi_y G_{12y} + \varphi_c G''; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

здесь индексы x и y относятся к слоям, ориентированным вдоль соответствующих осей. Оси x и y являются осями упругой симметрии, вследствие этого коэффициенты $B_{xx,xy}, B_{yy,xy}$ равны нулю.

Для сопоставления величин коэффициентов жесткости целесообразно использовать приближенные формулы (7) и снова пренебречь E'' в сравнении с E' , при этом

$$\left. \begin{aligned} B_{xx} &\approx \psi_x E'; \quad B_{yy} \approx \psi_y E'; \quad B_{xy} \approx 0; \\ G_{xy} &= G'' \left[\frac{\varphi_x}{1 - \xi_x} + \frac{\varphi_y}{1 - \xi_y} + \varphi_c \right], \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $\psi_x = \varphi_x \xi_x$, $\psi_y = \varphi_y \xi_y$ — объемные коэффициенты армирования в направлениях x и y , т. е. отношения объемов нитей, ориентированных в направлениях x и y , к объему пластины.

Полученные грубые формулы свидетельствуют о том, что для ортогонально армированного материала жесткость на растяжение (сжатие) в направлении нитей определяется в основном жесткостью нитей, что коэффициенты поперечной деформации такого материала

$$\nu_{xy} = \frac{B_{xy}}{B_{xx}}; \quad \nu_{yx} = \frac{B_{xy}}{B_{yy}}$$

весьма малы и что жесткость на сдвиг (G_{xy}) такого материала также мала, так как определяется жесткостью связующего.

Отметим, что несколько лучшие результаты, чем формулы (16), дают приближенные формулы [1]

$$\left. \begin{aligned} B_{xx} &\approx \psi_x E' + \frac{E''}{1 - \nu''^2}; & B_{xy} &\approx \frac{\nu'' E''}{1 - \nu''^2}; \\ B_{yy} &\approx \psi_y E' + \frac{E''}{1 - \nu''^2}; & G_{xy} &\approx \frac{G''}{1 - \psi_x - \psi_y}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

в которые входят только объемные коэффициенты армирования.

Формулы (17) могут быть также использованы для расчета упругих постоянных пластика на основе стеклоткани. При этом следует иметь в виду, что благодаря переплетению жесткость нитей несколько снижается. Это можно учесть, заменив в формулах (17) модуль стеклонитей E' эквивалентной величиной

$$E'_g = k^2 E',$$

где k — отношение проекции длины нити к ее фактической длине.

Материал, одинаково армированный в двух неортогональных направлениях. Такого рода материал получается при изготовлении оболочек вращения методом косой намотки стеклонитей. Одинаковое количество слоев укладывается в направлениях, составляющих между собой угол 2θ . Направив ось x по биссектрисе угла между нитями, найдем $\theta_1 = -\theta_2$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1 - \varphi_c}{2}$. Тогда

$$B_{xx} = (1 - \varphi_c) [B_{11} \cos^4 \theta + B_{22} \sin^4 \theta + (2B_{12} + 4G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] + \varphi_c \frac{E''}{1 - \nu''^2};$$

$$B_{yy} = (1 - \varphi_c) [B_{11} \sin^4 \theta + B_{22} \cos^4 \theta + (2B_{12} + 4G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] + \varphi_c \frac{E''}{1 - \nu''^2};$$

$$B_{xy} = (1 - \varphi_c) [(B_{11} + B_{22} - 4G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + B_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)] + \varphi_c \frac{\nu'' E''}{1 - \nu''^2};$$

$$G_{xy} = (1 - \varphi_c) [G_{12} \cos^2 2\theta + (B_{11} + B_{22} - 2B_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta] + \varphi_c G''.$$

В этих формулах φ_c — относительная толщина прослоек связующего; B_{11} , B_{22} , B_{12} и G_{12} — упругие постоянные слоя, рассчитываемые по формулам (5).

УПРУГОСТЬ ОРТОТРОПНОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ ОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Рассмотрим растяжение образца, вырезанного из ортотропного материала под углом α к одному из главных направлений ортотропии (рис. 5). Эксперимент такого рода часто используют для определения упругих постоянных материала.

При растяжении образца напряжением σ в площадках, параллельных осям x , y , возникают напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma \cos^2 \alpha; \quad \sigma_y = \sigma \sin^2 \alpha; \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}\quad (18)$$

Пользуясь формулами (14), можно определить компоненты деформации ε_x , ε_y , γ_{xy} , а затем на основе формул теории деформаций (см. гл. 1 т. 1) определить продольную деформацию образца

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \\ &+ \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}\quad (19)$$

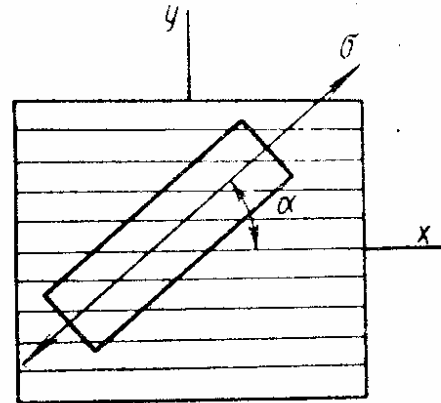


Рис. 5

Произведя указанные вычисления, найдем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_\alpha},$$

где

$$E_\alpha = \left[\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{G_{xy}} + \frac{B_{yy} \cos^4 \alpha + B_{xx} \sin^4 \alpha - 2B_{xy} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{B_{xx} B_{yy} - B_{xy}^2} \right]^{-1}. \quad (20)$$

Для экспериментального определения постоянных B_{xx} , B_{yy} , B_{xy} , G_{xy} материала необходимо провести четыре независимых измерения. Целесообразно испытывать на растяжение образцы, ориентированные в направлениях упругой симметрии x , y и под углом 45° к ним. При одном из опытов определяется также коэффициент поперечной деформации $\left(\nu_{yx} = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| \right.$ или $\left. \nu_{xy} = \left| \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \right| \right)$. Для модулей упругости образцов, полагая в формуле (20) $\alpha = 0$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$, получим

$$\left. \begin{aligned} E_x &= B_{xx} - \frac{B_{xy}^2}{B_{yy}}; \quad E_y = B_{yy} - \frac{B_{xy}^2}{B_{xx}}; \\ E_{\frac{\pi}{4}} &= \left[\frac{1}{4G_{xy}} + \frac{B_{yy} + B_{xx} - 2B_{xy}}{4(B_{xx}B_{yy} - B_{xy}^2)} \right]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

также

$$\nu_{yx} = \frac{B_{xy}}{B_{yy}}; \quad \nu_{xy} = \frac{B_{xy}}{B_{xx}}.$$

Решая эти уравнения относительно постоянных B , G , находим

$$\left. \begin{aligned} B_{yy} &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y}; & B_{xx} &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y}; \\ B_{xy} &= \nu_{yx} B_{yy} = \nu_{xy} B_{xx}; \\ G_{xy} &= \left[\frac{4}{E \frac{\pi}{4}} - \frac{1 - \nu_{xy}}{E_y} - \frac{1 - \nu_{yx}}{E_x} \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В формулы (22) для симметрии включены два коэффициента поперечной деформации ν_{xy} и ν_{yx} , соответствующие растяжению образцов,

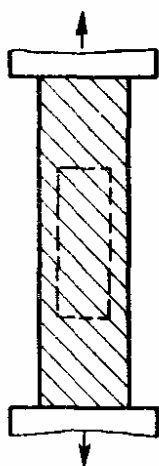


Рис. 6

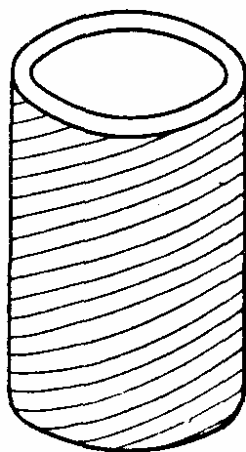


Рис. 7

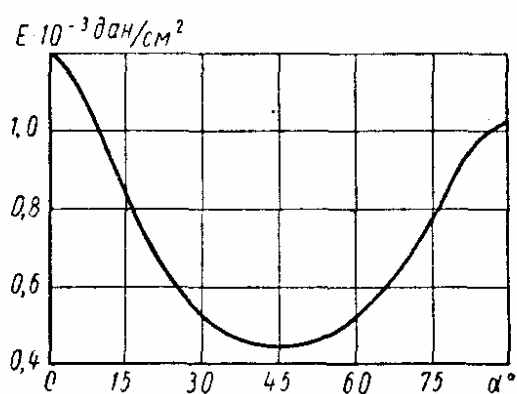


Рис. 8

вырезанных вдоль осей y и x ; однако лишь один из них следует определять экспериментально, так как справедливо тождество

$$\frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x}. \quad (23)$$

Как уже указывалось, для ортогонально армированного материала коэффициенты поперечной деформации весьма малы (порядка $\nu < 0,1$). В этом случае можно пренебречь произведением $\nu_{xy}\nu_{yx}$ по сравнению с единицей и полагать

$$B_{xx} \approx E_x; \quad B_{yy} \approx E_y.$$

Следует отметить, что экспериментальное определение упругих постоянных армированного материала путем растяжения образцов, вырезанных под углом к осям упругой симметрии, требует соблюдения некоторых предосторожностей, чтобы исключить влияние краевых эффектов.

Возникают краевые эффекты двух типов: 1) у закреплений образца, связанные с тем, что нити арматуры, закрепленные в зажимах, находятся в условиях, отличных от других нитей; 2) у продольных границ образца, связанные с тем, что в этой зоне усилия в нитях падают до нуля.

Зона, где краевые эффекты сказываются мало, на рис. 6 обведена штриховым прямоугольником.

Для того чтобы краевые эффекты не сказывались существенно на результатах эксперимента, необходимо выбирать ширину образца достаточно большой по сравнению с характерными размерами структуры (шагом нитей, толщиной слоя) и выбирать длину образца достаточно большой по сравнению с шириной. Полностью исключить краевые эффекты на продольных краях образца можно путем испытания специально изготовленных трубчатых образцов (рис. 7) [10]. Такие образцы можно испытывать на растяжение, сжатие, кручение, воздействие внутреннего давления. Комбинируя эти методы испытания, можно определить все упругие характеристики материала на одном образце.

Формула (20), определяющая жесткость образца в зависимости от его ориентировки относительно осей упругой симметрии, позволяет наглядно представить характер анизотропии материала.

Зависимость модуля упругости образца E от угла его вырезки для стеклопластика на основе жгутовой стеклоткани и полиэфирной смолы показана на рис. 8 [1]. В зависимости от направления нагрузки жесткость материала изменяется в несколько раз. Это объясняется тем, что при растяжении вдоль нитей нагрузка воспринимается сравнительно жесткими нитями, а при растяжении под углом к нитям возникают значительные деформации связующего.

ЗАВИСИМОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ АНИЗОТРОПНОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ОТ ВРЕМЕНИ

В приведенных выше формулах стеклонити и связующее считали совершенно упругими. Используя вязко-упругую аналогию, можно обобщить результаты и на тот случай, когда связующее является линейным вязко-упругим материалом.

Так, например, рассматривая одноосное растяжение образца, вырезанного под углом, мы получили формулу (19) для деформации

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_{\alpha}}, \quad (24)$$

где E_{α} — определяется зависимостью (20).

Для вязко-упругого материала формула (24) также справедлива, если при вычислении E_{α} модуль связующего заменить соответствующим оператором.

В этом случае выражение (24) представляет собой линейное дифференциальное уравнение, в которое наряду с σ и ϵ входят их последовательные производные по времени.

В качестве примера рассмотрим ортогонально армированный стеклопластик с одинаковыми коэффициентами армирования в обоих направлениях $\psi_1 = \psi_2 = \psi$. При подсчете коэффициентов упругости будем руководствоваться приближенными формулами (17) и считать связующее несжимаемым ($\nu'' = 0,5$).

Тогда по формулам (17) получим

$$B_{xx} = B_{yy} = \psi E' + \frac{4}{3} E'';$$

$$B_{xy} = \frac{2}{3} E''; \quad G_{xy} = \frac{E''}{3(1 - 2\psi)}.$$

Подстановка этих величин в формулу (20) приводит к выражению

$$E_{\alpha} = \left[\frac{3(1-2\psi) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{E''} + \frac{\psi' E' (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + \frac{4}{3} E'' (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{\psi^2 (E')^2 + \frac{8}{3} \psi E' E'' + \frac{4}{3} (E'')^2} \right]^{-1}.$$

Воспользуемся простейшей моделью связующего как стандартного вязко-упругого тела. В этом случае (см. стр. 214) модуль связующего E'' должен быть заменен оператором

$$\bar{E}'' = \frac{E_0 \rho + E_{\infty} \frac{1}{\tau}}{\rho + \frac{1}{\tau}} = E_0 \frac{\rho + \frac{s}{\tau}}{\rho + \frac{1}{\tau}},$$

где E_0 — динамический и E_{∞} — равновесный модули связующего; τ — время релаксации; $s = \frac{E_{\infty}}{E_0}$; $\rho \equiv \frac{d}{dt}$.

Выполнив подстановки, получим выражение E_{α} в виде оператора

$$[\bar{E}_{\alpha}]^{-1} = \frac{1}{E_0} \left[\frac{3(1-2\psi) \left(\rho + \frac{1}{\tau} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\rho + \frac{s}{\tau}} + \frac{m \left(\rho + \frac{1}{\tau} \right)^2 (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha)}{m^2 \left(\rho + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(\rho + \frac{s}{\tau} \right) \left(\rho + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{4}{3} \left(\rho + \frac{s}{\tau} \right)^2} + \frac{\frac{4}{3} \left(\rho + \frac{s}{\tau} \right) \left(\rho + \frac{1}{\tau} \right) (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{m^2 \left(\rho + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(\rho + \frac{s}{\tau} \right) \left(\rho + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{4}{3} \left(\rho + \frac{s}{\tau} \right)^2} \right],$$

где $m = \frac{\psi E'}{E_0}$.

Это выражение можно также представить в виде

$$[\bar{E}_{\alpha}]^{-1} = \frac{1}{E_0} \left[\beta_1 \frac{\rho + \frac{1}{\tau}}{\rho + \frac{s}{\tau}} + \beta_2 \frac{\rho^2 + \beta_3 \rho + \beta_4}{(\rho + \beta_5)(\rho + \beta_6)} \right], \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 3(1 - 2\psi) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \\ \beta_2 &= \frac{m(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + \frac{4}{3}(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{(m+2)\left(m + \frac{2}{3}\right)}; \\ \beta_3 &= \frac{1}{\tau} \frac{2m(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + \frac{4}{3}(s+1)(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{m(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + \frac{4}{3}(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}; \\ \beta_4 &= \frac{1}{\tau^2} \frac{m(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + \frac{4}{3}s(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{m(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + \frac{4}{3}(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}; \\ \beta_5 &= \frac{1}{\tau} \frac{m + \frac{2}{3}s}{m + \frac{2}{3}}; \quad \beta_6 = \frac{1}{\tau} \frac{m + 2s}{m + 2}.\end{aligned}$$

Следовательно, для образца, вырезанного под углом из стеклопластика с вязко-упругим связующим, напряжение и деформация связаны зависимостью

$$\varepsilon = [\bar{E}_\alpha]^{-1} \sigma, \quad (26)$$

где $[\bar{E}_\alpha]^{-1}$ — оператор по формуле (25). Как видно из указанной формулы, связь ε и σ представляется обыкновенным дифференциальным уравнением, включающим производные ε и σ по времени до третьего порядка. Если считать, что при $t < 0$ напряжения и деформации в образце отсутствуют, то начальные условия являются нулевыми и равенство (26) связывает между собой изображения по Лапласу—Карсону напряжения $\bar{\sigma}$ и деформации $\bar{\varepsilon}$ (параметр преобразования p):

$$\bar{\varepsilon} = [\bar{E}]_\alpha^{-1} \bar{\sigma}.$$

Рассмотрим, например, случай, когда при $t = 0$ в образце мгновенно создается напряжение $\sigma = \sigma_0$, которое затем сохраняет постоянное значение, т. е. примем

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t).$$

[$H(t)$ — единичная функция Хивисайда].

Тогда изображением функции $\sigma(t)$ будет

$$\sigma_0 H(t) \leftrightarrow \sigma_0.$$

Для изображения $\bar{\varepsilon}$ получаем

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[\beta_1 \frac{p + \frac{1}{\tau}}{\tau + \frac{s}{\tau}} + \beta_2 \frac{p^2 + \beta_3 p + \beta_4}{(p + \beta_5)(p + \beta_6)} \right].$$

Используя таблицы преобразования Лапласа—Карсона, находим оригинал

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left\{ \frac{\beta_1}{s} \left[1 - (1-s)e^{-s\frac{t}{\tau}} \right] + \right. \\ \left. + \beta_2 \left[\frac{\beta_4}{\beta_5\beta_6} + \frac{\beta_5^2 - \beta_3\beta_5 + \beta_4}{\beta_5(\beta_5 - \beta_6)} e^{-\beta_5 t} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\beta_6^2 - \beta_3\beta_6 + \beta_4}{\beta_6(\beta_5 - \beta_6)} e^{-\beta_6 t} \right] \right\}. \quad (27)$$

Рассмотрим ортогонально армированный стеклопластик с объемным коэффициентом армирования в каждом направлении $\psi_1 = \psi_2 = 0,275$. Примем

$$E' = 7 \cdot 10^4 \text{ дан/см}^2; \quad E_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ дан/см}^2; \quad E_\infty = 3 \cdot 10^4 \text{ дан/см}^2;$$

$$\frac{\psi E'}{E_0} = \frac{0,275 \cdot 7 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^4} = 3,2; \quad s = \frac{E_\infty}{E_0} = \frac{3 \cdot 10^4}{6 \cdot 10^4} = 0,5.$$

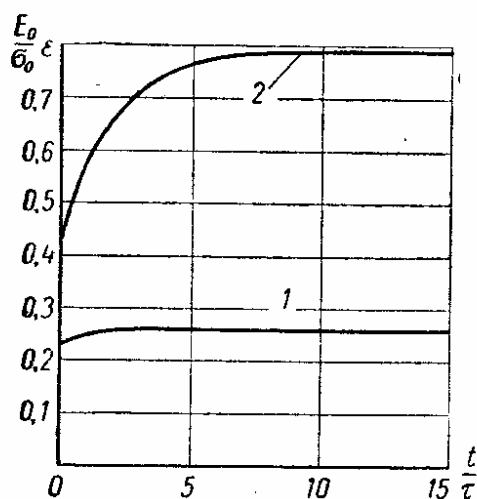


Рис. 9

При растяжении образцов, вырезанных по направлению нитей ($\alpha=0$), имеем

$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = 0,225; \quad \beta_3 = \frac{1}{\tau} \cdot 1,86;$$

$$\beta_4 = \frac{1}{\tau^2} \cdot 0,855;$$

$$\beta_5 = \frac{1}{\tau} \cdot 0,912; \quad \beta_6 = \frac{1}{\tau} \cdot 0,808.$$

Кривая ползучести, построенная для этого случая в соответствии с формулой (27), показана на рис. 9 (кривая 1).

Для образцов под углом $\alpha = 45^\circ$ к нитям получим $\beta_1=0,337$; $\beta_2=0,096$; $\beta_3=1,92$; $\beta_4=0,915$ (коэффициенты β_5 и β_6 от α не зависят); этому случаю соответствует кривая 2 на рис. 9. Сопоставление кривых показывает, что при растяжении вдоль стеклонитей ползучесть проявляется сравнительно слабо, при растяжении же образцов под углом к нитям явление ползучести приводит к значительному увеличению деформаций, причем равновесное состояние устанавливается медленнее, чем в первом случае.

ПРОЧНОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНО АРМИРОВАННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Произвольное плоское напряженное состояние может быть изображено точкой в декартовой системе координат $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (оси x, y совпадают с направлениями нитей).

Условия прочности определяют в этой системе координат некоторую предельную поверхность. Экспериментально вид этой поверхности до настоящего времени достаточно не исследован, поэтому форму ее приходится определять на основе тех или иных гипотез.

Простейшая гипотеза [1] состоит в том, что три возможных вида разрушения материала — разрыв нитей, направленных вдоль оси x , разрыв нитей, направленных вдоль оси y , и разрушение связующего — наступают тогда, когда предельных значений достигают в отдельности σ_x , σ_y и τ_{xy} .

Следовательно, согласно этой гипотезе предельная поверхность в координатах σ_x , σ_y , τ_{xy} представляет собой прямоугольный параллелепипед.

Можно полагать, что предельная поверхность такой формы реализуется для материалов на основе стеклошпона. Для материалов на основе стеклотканей обнаруживается небольшое влияние напряжений в нитях одного направления на прочность нитей перпендикулярного направления [10].

Условия прочности на основе сформулированных предположений могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{xc}^0 < \sigma_x < \sigma_{xp}^0; \\ -\sigma_{yc}^0 < \sigma_y < \sigma_{yp}^0; \quad |\tau_{xy}| < \tau_{xy}^0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где σ_{xc}^0 и σ_{yc}^0 — предельные для данного материала напряжения на растяжение, сжатие, сдвиг в соответствующих направлениях.

На основе указанной гипотезы можно рассчитать, например, прочность материала при одноосном растяжении в направлении, составляющем угол α с осью x .

В этом случае напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} определяются формулами (18), и условия прочности (28) приводят к неравенствам

$$\sigma < \frac{\sigma_x^0}{\cos^2 \alpha}; \quad \sigma < \frac{\sigma_y^0}{\sin^2 \alpha}; \quad \sigma < \frac{\tau_{xy}^0}{\sin \alpha \cos \alpha}. \quad (29)$$

Построенная по приведенным уравнениям зависимость предельного напряжения σ_θ от угла α для пластика на основе жгутовой стеклоткани и полиэфирного связующего показана на рис. 10.

Опыт подтверждает такого рода зависимость. Следует лишь отметить, что при растяжении плоских образцов, вырезанных под углами, отличными от $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, не могут быть реализованы точки, соответствующие разрушению стеклонитей. Такие образцы разрушаются, как правило, путем расслоения в связи с наличием упомянутых выше краевых эффектов.

Для получения экспериментальных кривых во всем диапазоне изменения угла α следует испытывать трубчатые образцы (см. рис. 7), создавая в них одноосное напряженное состояние.

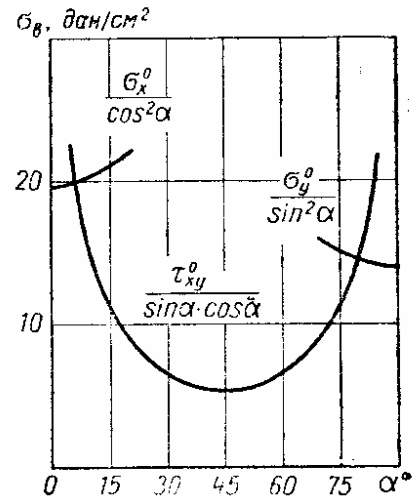


Рис. 10

Разумеется, гипотеза о форме предельной поверхности в виде прямоугольного параллелепипеда не является единственно возможной. В работе [5] развивается гипотеза о том, что эта поверхность представляет собой эллипсоид, нам, однако, представляется, что в связи с наличием различных механизмов разрушения требование гладкости предельной поверхности является излишне ограничительным.

ИЗОТРОПНЫЕ ПРИ ПЛОСКОМ НАГРУЖЕНИИ КОНСТРУКЦИИ СЛОИСТОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА

Из приведенного выше анализа видно, что стеклопластик с однонаправленной и двунаправленной (в частности ортогональной) армировкой является существенно анизотропным материалом. Его упругие, реологические и прочностные свойства зависят от направления нагрузок. Если способ армирования согласован с типом нагрузок, воздействующих на деталь, так, что нагрузки могут восприниматься усилиями в стеклонитях (см. например стр. 232), то анизотропия не является недостатком материала. Наоборот, в этом случае удастся наиболее полно использовать прочность стеклонитей.

Однако если при эксплуатации детали возникнут нагрузки в направлении наименьшей прочности, могут иметь место недопустимо большие деформации или разрушение. При длительном воздействии нагрузки могут также развиваться значительные деформации ползучести.

Поэтому для деталей, воспринимающих разнообразные нагрузки, целесообразно конструировать стеклопластик так, чтобы исключить возможность его деформации только за счет деформаций связующего.

При изготовлении из стеклошпона такой, изотропный в своей плоскости, материал может быть получен путем так называемого звездообразного армирования.

В этом случае одинаковое число слоев шпона ориентируется в трех направлениях, составляющих между собой углы 60° .

Упругие постоянные такого материала легко выразить через постоянные однонаправленного шпона по формулам (11), положив

$$\theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3}; \quad \theta_3 = -\frac{\pi}{3}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{1 - \varphi_c}{3}.$$

Получаем

$$\left. \begin{aligned} B_{xx} = B_{yy} &= \frac{1 - \varphi_c}{8} [3B_{11} + 3B_{22} + 2B_{12} + 4G_{12}] + \varphi_c \frac{E''}{1 - \nu''^2}; \\ B_{xy} &= \frac{1 - \varphi_c}{8} [B_{11} + B_{22} + 6B_{12} - 4G_{12}] + \varphi_c \frac{\nu'' E''}{1 - \nu''^2}; \\ G_{xy} &= \frac{1 - \varphi_c}{8} [B_{11} + B_{22} - 2B_{12} + 4G_{12}] + \varphi_c \frac{\nu'' E''}{1 - \nu''^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Об изотропии этого материала при плоском напряженном состоянии (трансверсальной изотропии) свидетельствуют тождественно выполняющиеся соотношения

$$B_{xx} = B_{yy}; \quad B_{xx} - B_{xy} = 2G_{xy}.$$

Легко проверить по формуле (20), что при выполнении этих тождеств модуль упругости материала не зависит от угла α и составляет

$$E = B_{xx} (1 - \nu^2), \quad (31)$$

где ν — коэффициент Пуассона для звездообразного армированного материала

$$\nu = \frac{B_{xy}}{B_{xx}}. \quad (32)$$

Пренебрегая жесткостью связующего по сравнению со стеклотнями, легко приближенно оценить E и ν для звездообразного материала.

В этом случае коэффициенты B_{22} , B_{12} , G_{12} малы по сравнению с B_{11} , а

$$B_{11} \approx \zeta E',$$

где ζ — коэффициент армирования шпона.

Учитывая, что $\zeta (1 - \varphi_c)$ — объемный коэффициент армирования материала, получим

$$B_{xx} = B_{yy} \approx \frac{3}{8} \psi E';$$

$$B_{xy} \approx \frac{1}{8} \psi E'; \quad G_{xy} \approx \frac{1}{8} \psi E'.$$

$$\text{Коэффициент Пуассона } \nu = \frac{B_{xy}}{B_{xx}} \approx \frac{1}{3};$$

$$E \approx \frac{3}{8} \psi E' \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{3} \psi E'.$$

Сравним этот результат с полученным выше для ортогонально армированного материала. Последний при равномерном армировании в направлениях x и y ($\psi_x = \psi_y = \frac{\psi}{2}$) имеет модуль упругости при растяжении вдоль нитей

$$E_x = E_y \approx \frac{1}{2} \psi E'.$$

Следовательно, жесткость звездообразно армированного материала примерно в 1,5 раза меньше, чем жесткость при растяжении вдоль нитей ортогонально армированного с тем же общим количеством стекловолокна, но зато она одинакова во всех направлениях.

Разумеется, звездообразное армирование с углом 60° между нитями не является единственным способом получения изотропного (в своей плоскости) материала. Также трансверсально изотропный материал получается вообще при наложении n ($n \geq 3$) слоев шпона под углами $\frac{\pi}{n}$ один к другому. Следует отметить, что формулы (30) описывают свойства всех такого рода материалов, независимо от n .

Наибольшее практическое значение среди таких материалов имеет стеклопластик диагональной структуры, получаемый укладкой шпона в четырех направлениях под углами 45° . Материал диагональной

структуры может быть получен не только из шпона, но и из слоев стеклоткани, укладываемых под углом 45° один к другому.

Если, как это обычно имеет место, удлинение связующего при разрыве превышает разрывное удлинение стеклонитей, то звездообразно армированный материал может разрушаться при нагружении в его плоскости только путем разрыва нитей (конечно, если отсутствуют краевые эффекты).

Однако изотропия упругих свойств еще не означает изотропии прочности. В зависимости от ориентировки напряженного состояния относительно направления нитей прочность материала будет различной.

Рассмотрим, например, одноосное растяжение. Деформация в направлении растяжения составляет $\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E}$, а в перпендикулярном на-

правлении $\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma}{E}$, где E и ν определяются формулами (31) и (32).

Нить, составляющая угол α с направлением растяжения, испытывает продольную деформацию

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha = \frac{\sigma}{E} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha).$$

Из этой формулы видно, что в наихудших условиях находятся нити наиболее близкие к направлению растяжения.

Наименьшую прочность материал имеет при растяжении вдоль нитей одной из систем ($\alpha = 0$); наибольшую — при растяжении вдоль биссектрисы угла между нитями ($\alpha = \frac{\pi}{2n}$).

Отношение максимальной прочности к минимальной составляет (принимая $\nu = \frac{1}{3}$)

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{2n}}.$$

Для звездообразного материала с тремя направлениями шпона ($n = 3$) $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = 1,5$, а для диагонального ($n = 4$) $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = 1,24$.

Если, пренебрегая связующим, сравнить между собой прочность стеклопластиков различной конструкции, получим следующие относительные ориентировочные цифры:

Однонаправленный (шпон) вдоль нитей	100
Ортогонально армированный (1 : 1) вдоль нитей	50
Звездообразный (1 : 1 : 1) вдоль нитей	33,3
Звездообразный вдоль биссектрисы	50
Диагональный (1 : 1 : 1) вдоль нитей	33,3
Диагональный вдоль биссектрисы	41

Следовательно, по максимальной прочности пластики изотропных структур почти не уступают ортогонально армированному, но существенно превосходят его по минимальной прочности (см., например, рис. 10).

УПРУГОСТЬ АРМИРОВАННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ ИЗГИБЕ

При расчете пластинок и оболочек по моментной теории чаще всего используют гипотезу о сохранении нормали (Кирхгофа—Лява).

Связь между искривлениями ее срединной поверхности¹ и внутренними силовыми факторами в сечениях оболочки согласно этой гипотезе имеет вид

$$\begin{aligned} M_x &= D_{xx}\kappa_x + D_{xy}\kappa_y + 2D_{xx, xy}\kappa_{xy}; \\ M_y &= D_{xy}\kappa_x + D_{yy}\kappa_y + 2D_{yy, xy}\kappa_{xy}; \\ H &= 2D_{k}\kappa_{xy} + D_{xx, xy}\kappa_k + D_{yy, xy}\kappa_y, \end{aligned}$$

здесь M_x , M_y , H — интенсивности изгибающих и крутящего моментов в соответствующих сечениях оболочки; κ_x , κ_y и κ_{xy} — изменения кривизны и кручения срединной поверхности.

Коэффициенты упругости D проще всего определяют в том случае, если число слоев армирующего материала велико, толщины слоев одинаковы и слои каждого направления равномерно распределены по толщине стенки. При этом свойства слоев можно осреднить по толщине и вести расчет конструкции, как изготовленной из однородного анизотропного материала.

Для такой квазиоднородной конструкции величины D рассчитывают по формулам²

$$D_{l, m} = B_{l, m} \frac{h^3}{12}; \quad D_k = G_{xy} \frac{h^3}{12},$$

где h — полная толщина стенки, а $B_{l, m}$ — упругие характеристики материала в своей плоскости, определяемые, в свою очередь, по формулам (11).

Формулы упрощаются, если материал является ортотропным, причем оси упругой симметрии совпадают с линиями кривизны. При этом $D_{xx, xy} = D_{yy, xy} = 0$.

Если количество слоев невелико или расположение их по толщине неравномерно, коэффициенты D можно приближенно определить суммированием по формулам²

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \sum z_i^2 h_i [B_{11i} \cos^2 \theta_i + B_{22i} \sin^2 \theta_i - A_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i]; \\ D_{yy} &= \sum z_i^2 h_i [B_{11i} \sin^2 \theta_i + B_{22i} \cos^2 \theta_i - A_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i]; \\ D_{xy} &= \sum z_i^2 h_i [B_{12i} + A_i \sin 2\theta_i \cos^2 \theta_i]; \\ D_{xx, xy} &= \sum z_i^2 h_i [B_{11i} - B_{22i} + A_i \cos 2\theta_i] \sin \theta_i \cos \theta_i; \\ D_{yy, xy} &= \sum z_i^2 h_i [B_{11i} - B_{22i} - A_i \cos 2\theta_i] \sin \theta_i \cos \theta_i; \\ D_k &= \sum z_i^2 h_i [G_{12i} + A_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i]. \end{aligned}$$

¹ Мы ограничиваемся рассмотрением пластинок и оболочек симметричной конструкции, стенка которых образована слоями, расположенными симметрично относительно срединной поверхности. При несимметричной конструкции моменты связаны не только с искривлениями, но и с растяжениями стенки.

² См. формулы (11).

В этих формулах h_i — толщина i -го слоя; z_i — расстояние середины слоя от срединной поверхности; θ_i — угол между направлением нитей в слое и осью x . Коэффициенты B для слоя рассчитываются по формулам, приведенным на стр. 216—218.

Для расчета пластинок и оболочек с учетом сдвигов, кроме коэффициентов D , необходимо знать еще одну характеристику материала — сопротивление стенки межслойному сдвигу.

Эту характеристику можно приближенно подсчитывать по формуле

$$K = \frac{5}{6} h \left[\frac{\psi}{G'} + \frac{1 - \psi}{G''} \right]^{-1},$$

где h — толщина стенки; G' и G'' — модули сдвига арматуры и связующего; ψ — общий объемный коэффициент армирования.

ОБОЛОЧКИ ОПТИМАЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Расчет пластин и оболочек из ориентированного стеклопластика выполняется с учетом анизотропии упругих свойств методами, рассмотренными в гл. 5—7.

При этом упругие характеристики стенки рассчитывают по формулам, приведенным в настоящей главе, или определяют экспериментально.

Особый интерес представляют так называемые оболочки оптимальной конструкции, которые проектируют так, чтобы расчетная нагрузка вызывала в них безмоментное напряженное состояние и воспринималась в основном стеклонитями.

Такие оболочки отличаются большой легкостью, жесткостью и малой зависимостью деформаций от времени.

Оболочки оптимальной конструкции можно разделить на две основные группы. Первую группу составляют оболочки, в которых армирующие стеклонити образуют сети с ячейками в виде параллелограммов. Так как эти ячейки изменяемые (за счет изменения углов параллелограмма), то оболочка такой конфигурации при заданной геометрии нитей способна за счет натяжения последних воспринимать нагрузки только вполне определенного типа. Наоборот, для данной нагрузки и данной геометрии нитей можно спроектировать оболочки лишь вполне определенной конфигурации.

Если на оболочку такой конструкции воздействует нагрузка по типу, отличающаяся от расчетной, возникают усилия в связующем и соответственно увеличенные деформации оболочки.

Теория сетчатых оболочек получила значительное развитие, как в связи с расчетом оболочек из стеклопластика [6, 14, 15], так и в связи с расчетом резинокордных оболочек и вантовых сетей [7, 9].

Другой тип оболочек оптимальной конструкции характеризуется тем, что в каждой точке имеются нити, по крайней мере, трех различных направлений.

В этом случае, даже если игнорировать работу связующего в плоскости слоев и предполагать, что его роль заключается только в связывании отдельных слоев, оболочка оказывается способной воспринимать широкий класс нагрузок.

Для расчета таких оболочек, вообще говоря, должна использоваться теория анизотропных оболочек (см. гл. 5—7).

Однако если проектировать оболочку так, чтобы при расчетной нагрузке все армирующие нити были в каждой точке одинаково напря-

жены, расчет упрощается. В этом случае условия совместности деформаций выполняются автоматически (в каждой точке имеется равномерное растяжение поверхности оболочки) и остается лишь удовлетворить условиям равновесия. Оболочки оптимальной конструкции второго типа рассмотрены в работе [12].

Преимуществом такого рода оболочек является равная напряженность арматуры (и потому малый ее вес) и способность оболочки за счет натяжения арматуры воспринимать и нагрузки, отличающиеся от расчетной. Разницу между двумя типами оболочек оптимальной конструкции поясним на примере.

Пример. Цилиндрическая оболочка с дном, нагруженная внутренним давлением.

Интенсивности продольного (T_1) и окружного (T_2) усилий определяются из уравнений равновесия

$$T_1 = \frac{1}{2} pR; \quad T_2 = pR. \quad (33)$$

Очевидно, что эти усилия могут быть восприняты, например, продольными и кольцевыми нитями, причем плотность кольцевых нитей должна вдвое превышать плотность продольных (рис. 11). Реально такая оболочка может быть

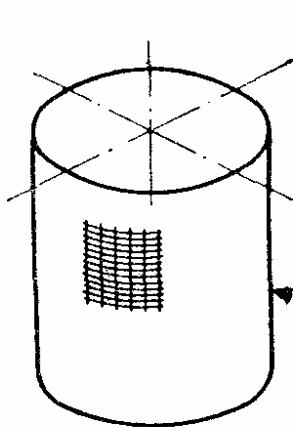


Рис. 11

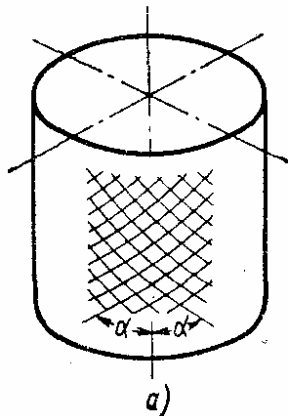
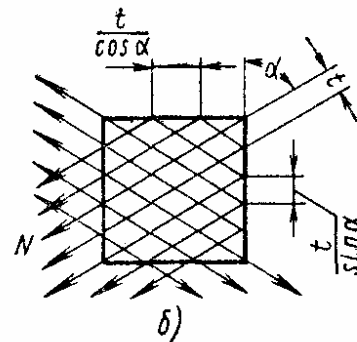


Рис. 12



осуществлена либо укладкой стеклошпонов, либо намоткой стеклоткани с соответствующим соотношением между плотностью основы и утка.

Очевидно, что общая длина продольных нитей составляет

$$L_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{pR}{N} 2\pi Rl,$$

где N — допустимое усилие на одну нить.

Длина поперечных нитей

$$L_2 = \frac{pR}{N} 2\pi Rl.$$

Следовательно, полный расход (по длине) нити арматуры для боковой поверхности цилиндра составляет

$$L = L_1 + L_2 = 3 \frac{p\pi R^2 l}{N} = 3 \frac{pV}{N}, \quad (34)$$

где V — внутренний объем цилиндра.

Другой возможностью является спиральная намотка стеклонитей (рис. 12, а). Если шаг нитей в слое t , а общее число слоев n , то интенсивности усилий в сечениях оболочки составляют (рис. 12, б)

$$T_1 = \frac{Nn}{t} \cos^2 \alpha; \quad T_2 = \frac{Nn}{t} \sin^2 \alpha, \quad (35)$$

где N — усилие в каждой нити; $\frac{n}{l} \cos \alpha$ и $\frac{n}{l} \sin \alpha$ — количество нитей, проходящих через единицу длины окружного и продольного сечения соответственно.

Сопоставляя равенство (35) с условиями равновесия (33), находим

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 2; \quad \frac{n}{l} = \frac{3}{2} \cdot \frac{pR}{N}.$$

Следовательно, оболочка со спиральной намоткой может воспринимать давление только за счет натяжения нитей лишь в том случае, если угол намотки является равновесным ($\alpha = \operatorname{arctg} 2 = 54^\circ 41'$).

При этом полная длина нитей составляет

$$L = \frac{2\pi R l}{l} n = \frac{3\pi R^2 l}{N}.$$

Сравнивая полученные выражения с формулой (34), видно, что продольно-поперечная намотка (рис. 11) и спиральная намотка (рис. 12) требуют одинакового расхода материала. Обе эти конструкции являются сетчатыми оболочками; за счет натяжения арматуры они способны воспринимать проектную нагрузку (внутреннее давление).

Другие типы нагрузок воспринимает, в основном, связующее. Так, например, оболочка рис. 11 воспринимает за счет связующего крутящий момент, а оболочка со спиральной намоткой — дополнительную осевую нагрузку.

Оптимальная цилиндрическая оболочка второго типа может быть получена укладкой нескольких спиральных слоев нитей, ориентированных под разными углами.

При n_i слоев¹ с шагом t_i , ориентированных под углом α_i , должно выполняться равенство

$$\sum_i \frac{n_i}{t_i} \cos^2 \alpha_i = \frac{1}{2} \sum_i \frac{n_i}{t_i} \sin^2 \alpha_i. \quad (36)$$

В результате воздействия внутреннего давления во всех нитях возникает одинаковое усилие N , связанное с давлением равенствами

$$pR = N \sum_i \frac{n_i}{t_i} \sin^2 \alpha_i = 2N \sum_i \frac{n_i}{t_i} \cos^2 \alpha_i. \quad (37)$$

Полная длина нитей, израсходованных на изготовление оболочки,

$$\begin{aligned} L &= \sum_i \frac{n_i}{t_i} 2\pi R l = 2\pi R l \left[\sum_i \frac{n_i}{t_i} \cos^2 \alpha_i + \sum_i \frac{n_i}{t_i} \sin^2 \alpha_i \right] = \\ &= 3 \frac{p\pi R^2 l}{N} \end{aligned}$$

оказывается такой же, как и для сетчатых оболочек.

Одним из возможных вариантов является изготовление оболочки из спиральных слоев, ориентированных под углом 45° (может быть использована соответственно раскроенная ткань квадратного переплетения), и дополнительных слоев окружного направления ($\alpha = 90^\circ$).

Потребное число окружных слоев определяют из уравнения (36)

$$\frac{n_{90}}{t_{90}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n_{45}}{t_{45}}.$$

¹ $\frac{n_i}{2}$ слоев имеют левое и $\frac{n_i}{2}$ — правое направление навивки.

Оболочка рассмотренного типа способна за счет натяжения нитей воспринимать любую нагрузку, вызывающую безмоментное напряженное состояние. Ясно, однако, что при нагрузке, отличной от расчетной, нити уже не являются равнонапряженными.

СЕТЧАТЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим более общую теорию сетчатых оболочек вращения, нагруженных давлением p и осевой силой.

Интенсивности усилий в срединной поверхности T_1 и T_2 легко определить из уравнений равновесия безмоментной теории

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{pr}{2 \cos \theta} + \frac{P_0}{2\pi r \cos \theta}; \\ T_2 &= \frac{pr}{\cos \theta} - \frac{T_1 r}{\rho \cos \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где P_0 — нагрузка, приложенная в полюсе оболочки; θ — угол, составляемый нормалью к оболочке с плоскостью, перпендикулярной к оси симметрии; ρ — радиус кривизны меридиана; r — радиус параллельного круга (рис. 13).

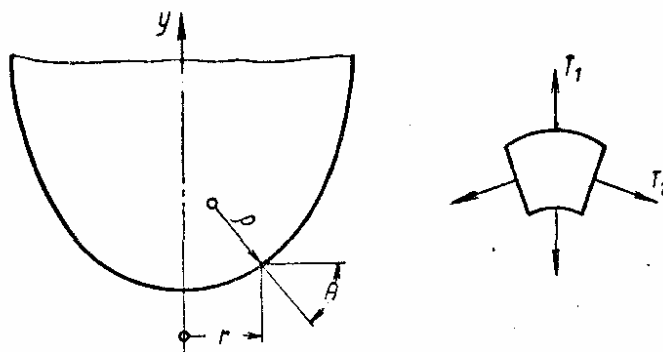


Рис. 13

С другой стороны, интенсивности T_1 и T_2 связаны с усилиями в нитях N равенствами (35), из которых следует

$$\frac{T_2}{T_1} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

(α — угол, составляемый нитями с меридианами).

Подставляя в последнее уравнение значения T_1 и T_2 , найдем

$$\frac{2}{1 + \frac{P_0}{\pi r^2}} - \frac{r}{\rho \cos \theta} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (39)$$

В соотношение (39) входят только геометрические характеристики оболочки и тип нагрузки на нее $\left(\frac{P_0}{\pi r^2} \right)$.

При заданной конфигурации оболочки и нагрузке на нее уравнение (39) позволяет определить необходимый угол укладки стеклонитей в каждой точке оболочки.

Вслед за определением α можно по формулам (35) и (38) найти усилия в нитях. Эти усилия, вообще говоря, изменяются вдоль меридиана оболочки.

Укладка нитей с переменными, в соответствии с расчетом, углами представляет значительные трудности, так как нити, наматываемые с натяжением, соскальзывают, стремясь расположиться по геодезическим линиям поверхности.

Поэтому особый интерес представляют оболочки с нитями, уложенными по геодезическим линиям. Особенностью таких оболочек является также постоянство усилия по длине нити.

Уравнение геодезической линии на поверхности вращения имеет, как известно, вид

$$\sin \alpha = Cr^{-1}, \quad (40)$$

где C — постоянная.

Из этого уравнения видно, что оболочки с нитями по геодезическим линиям являются незамкнутыми, за исключением случая $C = 0$, когда $\alpha = 0$ и нити расположены по меридианам. Если оболочка имеет отверстие или патрубок радиуса r^0 , к которому нити подходят плавно по касательной, то $C = r^0$.

Выражение (39) с учетом уравнения (40) и с заменой

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\theta}{dr} \sin \theta = \frac{d}{dr} (\cos \theta)$$

приводит к уравнению

$$\frac{2r}{r^2 + \frac{p_0}{\pi p}} - \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{d}{dr} (\cos \theta) = \frac{C^2 r^{-3}}{1 - C^2 r^{-2}},$$

которое легко интегрируется и позволяет определить $\cos \theta$ в функции радиуса r :

$$\cos \theta = M \frac{r^2 + \frac{P_0}{\pi p}}{\sqrt{1 - C^2 r^{-2}}},$$

где M — постоянная интегрирования.

Если при $r = R$ оболочка плавно сопрягается с цилиндром ($\theta = 0$), то

$$M = \frac{\sqrt{1 - C^2 R^{-2}}}{R^2 + \frac{P_0}{\pi p}}$$

После определения θ можно с помощью квадратуры найти координаты образующей оболочки, так как

$$\frac{dy}{dr} = \operatorname{ctg} \theta = \frac{M \left(r^2 - \frac{P_0}{\pi p} \right)}{\sqrt{1 - C^2 r^{-2} - M^2 \left(r^2 + \frac{P_0}{\pi p} \right)^2}}.$$

Рассчитанные таким способом конфигурации равновесных куполов приведены в работе [15].

Усилие в нити является постоянным по ее длине и определяется формулой

$$N = \frac{\pi p}{M \nu},$$

где ν — полное число нитей в поперечном сечении оболочки.

В случае нитей, ориентированных по меридианам ($C = 0$), формулы упрощаются и координаты образующей оболочки выражаются через эллиптические интегралы. Для случая замкнутой оболочки без сосредоточенной силы в полосе ($P_0 = 0$) получаем

$$y = \int_0^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^4 - r^4}}.$$

Безразмерные координаты точек образующей оптимального днища с меридиональными нитями приведены ниже [6]:

$\frac{r}{R}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$10^3 \frac{y}{R}$	0	0,33	2,67	9,01	21,4	42,2	74,1	121,0	189,3	286,9	581,1

Усилие в нитях оптимального днища данного вида составляет

$$N = \frac{\pi R^2 p}{\nu},$$

где ν — полное число нитей.

ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫЕ МНОГОСЛОЙНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ НАМОТКОЙ

Приведенные выше результаты свидетельствуют о том, что возможности создания оптимальных нецилиндрических сетчатых оболочек намоткой довольно ограничены. В этом случае нельзя произвольно определять конфигурацию меридиана оболочки при наиболее простом способе укладки нитей — по геодезическим линиям. Использование многослойных оболочек с различным в разных слоях направлением нитей позволяет, в ряде случаев, преодолеть эти трудности.

Рассмотрим оболочку вращения, нагруженную внутренним давлением.

Пусть некоторый i -й слой намотки пересекает базовую окружность радиуса R , составляя угол β_i с меридианом (рис. 14). Шаг нитей слоя на базовой окружности t_i^0 .

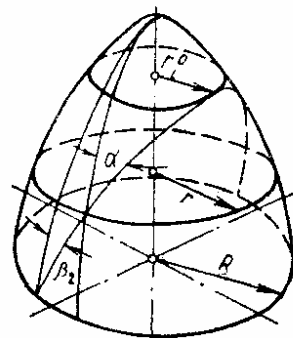


Рис. 14

Предполагая, что нити наматываются по геодезическим линиям поверхности, устанавливаем, что нити i -го слоя пересекают окружность радиуса r , составляя угол α_i с меридианом, причем

$$\sin \alpha_i = \frac{R}{r} \sin \beta_i. \quad (41)$$

Шаг t_i нитей слоя на этой окружности находим из того условия, что общее количество нитей, пересекающих окружности R и r , одинаково:

$$\frac{2\pi R \cos \beta_i}{t_i^0} = \frac{2\pi r \cos \alpha_i}{t_i},$$

откуда

$$t_i = t_i^0 \frac{r}{R} \cdot \frac{\cos \alpha_i}{\cos \beta_i}. \quad (42)$$

Нити данного слоя доходят до окружности радиуса $r_i^0 = R \sin \beta_i$, где они оказываются уже ориентированными по параллельному кругу.

В точке оболочки на радиусе r усилия N в нитях i -го слоя вызывают возникновение меридиональных и окружных сил интенсивностей [см. формулы (35)]

$$T_{1i} = N \frac{1}{t_i} \cos^2 \alpha_i; \quad T_{2i} = N \frac{1}{t_i} \sin^2 \alpha_i.$$

Суммируя усилия, создаваемые всеми слоями, получим полные интенсивности сил в сечении оболочки (предполагается, что слои расположены симметрично относительно меридиана)

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= N \sum \frac{\cos^2 \alpha_i}{t_i}; \\ T_2 &= N \sum \frac{\sin^2 \alpha_i}{t_i}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

В оболочке оптимальной конструкции эти усилия должны тождественно равняться усилиям, определяемым по безмоментной теории [см. формулу (38)].

Из этих условий следует подбирать плотности и количества слоев каждого данного направления β_i .

Выше показано, что для цилиндрической оболочки эта задача имеет бесконечное множество решений.

Трудно сказать, имеет ли она решения для всевозможных конфигураций меридиана оболочки, однако для некоторых конфигураций такие решения найдены [12].

Рассмотрим в качестве примера сферическую оболочку радиуса R , нагруженную внутренним давлением p .

Безмоментная теория дает для этой оболочки

$$T_1 = T_2 = \frac{pR}{2}.$$

Уравнения (43) получают вид

$$\left. \begin{aligned} N \sum_i \frac{\cos^2 \alpha_i}{t_i} &= \frac{pR}{2}; \\ N \sum_i \frac{\sin^2 \alpha_i}{t_i} &= \frac{pR}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

эти уравнения должны выполняться во всех точках оболочки.

В качестве базовой окружности выберем экватор оболочки, причем предположим, что имеются слои, пересекающие экватор, составляя всевозможные углы β_i с меридианом.

Количество слоев (отнесенное к шагу нитей), составляющих углы от β до $\beta + d\beta$, составит

$$\Delta \left(\frac{n}{t_0} \right) = \frac{dv}{d\beta} d\beta,$$

где функция $\frac{dv}{d\beta}$ характеризует закон распределения слоев по углам наклона.

Знаки суммирования в формулах (44) следует заменить интегралами, а также учесть, что α_i и t_i зависят от текущего радиуса r в соответствии с формулами (41) и (42).

Таким образом, получим

$$\left. \begin{aligned} N \int_0^{\arcsin \frac{r}{R}} \frac{dv}{d\beta} \cos \beta \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \beta} \frac{R}{r} d\beta &= \frac{pR}{2}; \\ N \int_0^{\arcsin \frac{r}{R}} \frac{dv}{d\beta} \cdot \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \beta}} \frac{R^3}{r^3} d\beta &= \frac{pR}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Верхний предел интегралов в выражении (45) принят разным $\arcsin \frac{r}{R}$ потому, что через точку на радиусе r проходят только нити, имевшие на экваторе углы меньше этого.

Задача заключается в том, чтобы определить функцию распределения слоев по углам $\frac{dv}{d\beta} = f(\beta)$ так, чтобы оба интегральных уравнения (45) восполнялись тождественно.

На первый взгляд эта задача выглядит чрезвычайно сложно, однако она имеет элементарное решение.

Произведем в интегралах замену переменных

$$\frac{R}{r} \sin \beta = \sin \alpha, \quad (46)$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{d\beta} \cos^2 \alpha d\alpha &= \frac{pR}{2}; \\ N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{d\beta} \sin^2 \alpha d\alpha &= \frac{pR}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Легко видеть, что оба этих уравнения выполняются, если принять $\frac{dv}{d\beta} = \frac{2pR}{\pi N} = \text{const.}$

Следовательно, при оптимальной конструкции сферической оболочки, нагруженной давлением, на экваторе слои равномерно распределены по углам.

Подсчитаем расход нитей на изготовление такой оболочки. Слои с углами от β до $\beta + d\beta$ (dn слоев) содержат $\frac{dn}{t_0} 2\pi R \cos \beta$ или $2\pi R \cos \beta dv$ нитей. Каждая нить имеет длину половины большого круга. Отсюда полная длина нитей, составляющих углы от β до $\beta + d\beta$, будет

$$dL = 2\pi^2 R^2 \cos \beta dv.$$

Длина нитей всей оболочки может быть получена интегрированием

$$\begin{aligned} L &= 2\pi^2 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta \frac{dv}{d\beta} d\beta = \\ &= \frac{4\pi R^3 p}{N} = \frac{3pV}{N}, \end{aligned}$$

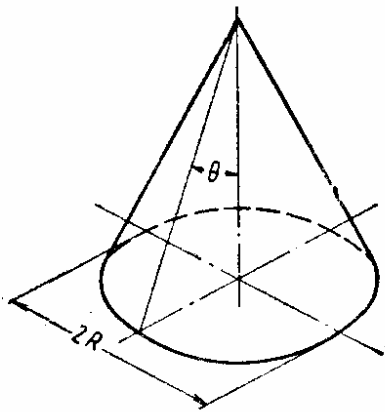


Рис. 15

где V — объем оболочки.

При практическом изготовлении сферических оболочек методом намотки обычно заменяют непрерывное распределение углов намотки дискретным, наматывая несколько шаровых поясов с различными углами β — это так называемая зонная намотка.

Рассмотрим коническую оболочку, нагруженную внутренним давлением (рис. 15).

За базовую примем окружность основания радиуса R .

Интенсивности усилий в произвольной точке оболочки (на радиусе r) определяются безмоментной теорией

$$T_1 = \frac{pr}{2 \cos \theta}; \quad T_2 = \frac{pr}{\cos \theta}.$$

Рассуждая точно так же, как и в предыдущем случае, приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{d\beta} \cos^2 \alpha d\alpha &= \frac{pr}{2 \cos \theta}; \\ N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{d\beta} \sin^2 \alpha d\alpha &= \frac{pr}{\cos \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

которые отличаются от уравнений (47) только правыми частями. Так как правые части уравнений (48) пропорциональны переменной r , $\frac{dv}{d\beta}$ также должно быть пропорционально r (после замены β на α). Учитывая соотношение (46), принимаем

$$\frac{dv}{d\beta} = K \sin \beta = K \frac{r}{R} \sin \alpha, \quad (49)$$

где K — коэффициент пропорциональности.

Подставляя выражение (49) в уравнения (48), обнаруживаем, что последние удовлетворяются тождественно при $K = \frac{3}{2} \cdot \frac{pR}{N \cos \theta}$. Из равенства следует, что для конической оболочки, в отличие от сферической количество слоев, навиваемых в каждом направлении, не одинаково, а изменяется пропорционально синусу угла, составляемого слоем с меридианом (на базовой окружности).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Упругость и прочность анизотропных стеклопластиков. Сб. «Расчеты на прочность». Вып. 11. М., «Машиностроение», 1965.
2. Болотин В. В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов. Сб. «Расчеты на прочность». Вып. 12. М., «Машиностроение», 1966.
3. Болотин В. В. Теория армированной слоистой среды со случайными неправильностями. «Механика полимеров», 1966, № 1.
4. Ван Фо Фы Г. А. Об уравнениях связи между напряжениями и деформациями в стеклопластиках. «Прикладная механика». Т. 1, 1965, № 2.
5. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Прочность стеклопластиков при сложном напряженном состоянии. «Механика полимеров», 1965, № 2.
6. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., «Машиностроение», 1965.
7. Кузнецов Э. Н. Некоторые вопросы статки сетей. «Строительная механика и расчет сооружений», 1966, № 2.
8. Лапин А. А. Плоская деформация резинокордовой ткани. Сб. «Расчеты на прочность в машиностроении». МВТУ 46. М., Машгиз, 1955.

9. П о м о м а р е в С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. II, гл. VII «Расчеты резиновых и резинокордных деталей». М., Машгиз, 1958.

10. П р о т а с о в В. Д., К о п н о в В. А. Исследование прочности стеклопластиков при плоском напряженном состоянии. «Механика полимеров», 1965, № 5.

11. Р а б и н о в и ч А. Л., В е р х о в с к и й И. А. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков. «Инженерный журнал». Т. 4, 1964, № 1.

12. Р и в л и н Р., П и п к и н А. Проектирование сосудов высокого давления минимального веса, усиленных нерастяженными нитями. Прикладная механика. Пер. с англ. Труды Американского общества инженеров-механиков. Сер. Е, № 1, 1963.

13. Т а р н о п о л ь с к и й Ю. М., С к у д р а А. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига, «Зинатне», 1966.

14. M a r k e t o s I. D. Optimum toroidal pressure vessel filament wound along geodesis lines, AIAA Journal, 1963, v. 1, N 8.

15. R e a d W. S. Equilibrium shapes for pressurized fiberglass domes, J of Engineering for Industry, 1963, v. 1, N 8.

• ТРЕХСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- δ_1, δ_2 — толщины первого и второго внешних слоев в см;
 δ_3 — толщина листа ребристого (гофрированного или складчатого) и сотового заполнителя или ребер заполнителя из армированного пенопласта в см;
 δ_4 — толщина пластинок — элементов сотового заполнителя, образованных склейкой или спайкой двух листов, в см;
 $2h$ — толщина заполнителя трехслойной панели или оболочки в см;
 $2H$ — расстояние между срединными поверхностями внешних слоев в см;
 R — радиус срединной поверхности трехслойной цилиндрической оболочки в см;
 a, b — размеры панели в см;
 E_i, G_i, ν_i — модуль упругости, модуль сдвига в дан/см^2 и коэффициент Пуассона изотропного материала листов первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) внешних слоев и листа заполнителя ($i = 3$) — гофрированного, складчатого или сотового, а также армирующих ребер ($i = 3$) заполнителя из армированного пенопласта;
 E_c, G_c, ν_c — модуль упругости, модуль сдвига (дан/см^2) и коэффициент Пуассона сплошного изотропного заполнителя;
 $E_x, E_y, E_z, G_{xz}, G_{yz}, G_{xy}$ — модули упругости, модули сдвига ортотропного заполнителя, приведенные модули конструктивно анизотропного заполнителя: складчатого, сотового, гофрированного заполнителя или армированного пенопласта [дан/см^2];
 $B_i = \frac{E_i \delta_i}{1 - \nu_i^2}$ — жесткость при растяжении на единицу ширины листа первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) внешнего слоя, листа складчатого, гофрированного, сотового заполнителя или ребер заполнителя из армированного пенопласта ($i = 3$) в дан/см ;

$$D_i = \frac{E_i \delta_i^3}{12(1-\nu_i^2)} \text{ — жесткость при изгибе на единицу ширины листа}$$

первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) внешнего слоя, листа складчатого, гофрированного, сотового заполнителя или ребер армированного пенопласта ($i = 3$) в *дан·см*;

N_x, N_y, T — усилия сжатия и сдвига на единицу ширины панели в *дан/см*; индексы x и y означают направление действия нагрузки;

N_{xe}, N_{ye}, T_e — критические значения соответствующих нагрузок в предположении идеализированной упругой работы конструкции в *дан/см*;

N_{xk}, N_{yk}, T_k — действительные критические значения соответствующих нагрузок в *дан/см*;

N_{xi}, N_{yi}, T_i — нагрузки на единицу ширины внешних слоев ($i = 1, 2$) и элементов складчатого или гофрированного ($i = 3$) и сотового заполнителя ($i = 3, 4$) в *дан/см*;

N_{xie}, N_{yie}, T_{ie} — критические значения соответствующих нагрузок в предположении упругой работы конструкции ($i = 1, 2, 3, 4$) в *дан/см*;

N_{xik}, N_{yik}, T_{ik} — действительные критические значения соответствующих нагрузок ($i = 1, 2, 3, 4$) в *дан/см*;

σ_{vi}, σ_{pi} — пределы прочности и пропорциональности при растяжении материала внешних слоев ($i = 1, 2$) и элементов складчатого или гофрированного; ($i = 3$) и сотового ($i = 3$) заполнителя в *дан/см²*;

T_1°, T_2° — температуры нагрева первого и второго внешних слоев в $^\circ\text{C}$;

α_c — коэффициент линейного температурного расширения сплошного изотропного заполнителя;

α_i — коэффициент линейного температурного расширения первого и второго внешнего слоя ($i = 1, 2$), листа гофрированного или складчатого заполнителя ($i = 3$) и ребер армировки в случае заполнителя из армированного пенопласта ($i = 3$);

w_0 — стрела начального (технологического) искривления панели в *см*.

Глава 9

РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ И УПРУГИЕ ПАРАМЕТРЫ ЗАПОЛНИТЕЛЕЙ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Конструктивные формы. Особенности работы и расчет

Трехслойная пластина или оболочка состоит из двух тонких внешних слоев из высокопрочного материала, связанных между собой слоем относительно маложесткого и легкого заполнителя. Назначение заполнителя — обеспечить совместную работу и устойчивость внешних слоев. Внешние слои могут быть одинаковыми или различными по толщине и материалу (использование различных слоев может быть целесообразным при работе панели на продольно-поперечный изгиб, при различном нагреве внешних слоев и т. п.).

В качестве заполнителя применяют ребристые конструкции — сотовые (рис. 1, а), типа гофра (рис. 1, б) и складчатые (рис. 1, в), или неармированные (рис. 2) пенопласты и другие легкие материалы.

При надлежащем выборе материалов можно получить панели с определенными радиотехническими, теплоизоляционными, вибрационными и другими характеристиками.

Расположение внешних слоев на достаточно большом расстоянии одного от другого при соответствующем выборе параметров трехслойной панели и оболочки во многих случаях позволяет создавать конструкции весом, меньшим, чем вес эквивалентных по жесткости панелей со стрингерным подкреплением.

Особенности работы и связанные с ними особенности расчета трехслойных панелей (по сравнению со сплошными однослойными панелями) определяются тем, что в маложестком легком заполнителе могут возникать деформации, заметно влияющие на работу конструкции.

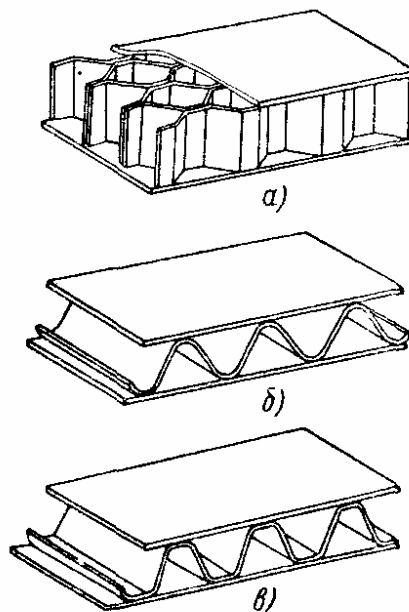


Рис. 1

В том случае, когда заполнитель трехслойной панели обладает весьма большой жесткостью (что практически не всегда целесообразно, так как может привести к неоправданному утяжелению конструкции), панель работает так, что для нее справедлива гипотеза о прямых нормальных. В этом случае характер работы панели в смысле ее общего искривления не отличается от работы обычной составной панели. Определение прогибов такой панели при общем изгибе и критических нагрузок при общей потере устойчивости можно вести по формулам для однослойной панели, вводя в расчет жесткостные характеристики составных сечений.

При деформировании трехслойной панели с маложестким заполнителем могут возникнуть существенные взаимные смещения внешних

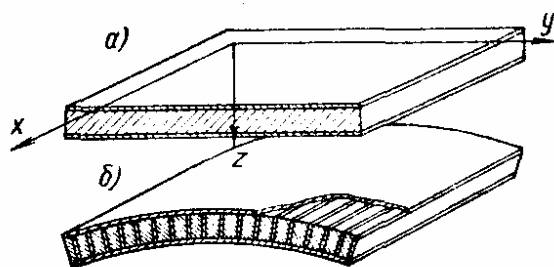


Рис. 2

слоев. Это могут быть смещения взаимного сдвига внешних слоев в направлении, параллельном срединной поверхности панели, или смещения, связанные с изменением расстояния между внешними слоями. Эти смещения могут сильно влиять на работу трехслойной панели и делать неприемлемыми для ее расчета формулы, полученные в предположении отсутствия взаимных смещений внешних слоев.

В каждом конкретном случае расчета панели учитывают вид смещений. В одних случаях сильнее влияют смещения сдвига, в других — смещения, связанные с изменением расстояния между внешними слоями.

Так, при определении критических нагрузок общей устойчивости или прогибов при поперечном изгибе панели весьма важно учитывать взаимные сдвиги внешних слоев. Это легко понять, если вспомнить, что при заполнителе, обладающем нулевой жесткостью сдвига, внешние слои изгибаемой трехслойной панели будут работать независимо и изгибная жесткость панели будет равна сумме жесткостей двух тонких отдельно работающих слоев.

При проектировании трехслойных панелей, особенно с маложестким заполнителем и тонкими внешними слоями, необходимо иметь в виду, что сжатые внешние слои таких панелей могут терять устойчивость и отрываться от заполнителя (при некоторых технологических несовершенствах — например, при волнистости внешних слоев — склейка внешних слоев с заполнителем может разрушаться даже до потери устойчивости внешними слоями). При расчете внешних слоев на устойчивость или при расчете заполнителя и его склейки с внешними слоями на прочность, внешние слои следует рассматривать как пластинки на упругом основании (роль основания играет заполнитель). Понятно, что на величину критической нагрузки местной потери устойчивости сильно влияет модуль упругости заполнителя в направлении, нормальном к внешним слоям. При этих расчетах имеет существенное значение учет взаимных смещений внешних слоев, связанных с изменением расстояния между этими слоями.

При проектировании панелей заполнитель следует выбирать и располагать так, чтобы получить повышенные значения именно тех его упругих параметров, которые наиболее важны для работы данной

конструкции. Например, вводя армирующие элементы в заполнитель из пенопласта, можно резко увеличить приведенный модуль упругости заполнителя в направлении вдоль этих элементов. Если армирующие элементы имеют вид полосок, увеличивается модуль сдвига заполнителя в плоскости расположения этих полосок (при этом величина модуля сдвига в плоскостях, нормальных к плоскостям полосок, возрастает мало). Если армирующие элементы имеют вид проволок, модуль сдвига в плоскостях, параллельных или нормальных этим проволокам, увеличивается мало.

Отсюда следует, что, к примеру, заполнитель из пенопласта для трехслойной пластинки, опертой по двум кромкам и работающей на продольное сжатие и изгиб, целесообразно армировать полосками, нормальными к внешним слоям пластинки и расположенными в плоскости изгиба пластины вдоль сжимающей нагрузки. Это определяется тем, что критическая нагрузка сжатия трехслойной пластинки возрастает, а прогибы пластинки уменьшаются с ростом модуля сдвига заполнителя в плоскости изгиба (нормальной к поверхности пластинки и совпадающей с направлением действия нагрузки). При таком армировании возрастают и критические нагрузки местной устойчивости внешних слоев, так как они зависят от модуля нормальной упругости заполнителя в направлении, нормальном к внешним слоям. Аналогичными соображениями руководствуются при выборе других типов заполнителя.

При расчете трехслойных панелей и оболочек на общую устойчивость и на поперечный и продольно-поперечный изгиб решаются те же задачи, что и при расчете однослойных панелей и оболочек. В случае легких маложестких на сдвиг заполнителей используют приводимые в гл. 10 расчетные формулы, полученные с учетом взаимных смещений внешних слоев вследствие деформации сдвига заполнителя (в случае заполнителей с большой жесткостью сдвига эти формулы переходят в известные формулы для однослойных панелей и оболочек при соответствующих жесткостных характеристиках составных сечений).

В формулы для расчета панелей и оболочек на общую устойчивость и изгиб входят *приведенные упругие параметры заполнителя*. В случае сплошного заполнителя из однородного материала — например, из пенопласта — этими приведенными упругими параметрами являются параметры материала заполнителя. Для заполнителей из ребристых конструкций (сотового, типа гофра или складчатого и др.) или из армированного пенопласта приведенные упругие параметры — это параметры эквивалентного в отношении работы панели на общую устойчивость или изгиб сплошного однородного заполнителя.

Так как трехслойные панели и оболочки образованы из тонкостенных элементов, то *элементы панелей рассчитывают на местную устойчивость* по формулам стр. 296—308.

В некоторых случаях возможно использование панелей, работающих и после того, как отдельные их элементы (например, элементы сот или ребра, армирующие пенопласт) теряют местную устойчивость. В этих случаях расчет (в частности, при определении приведенных упругих параметров) ведут с учетом такой работы элементов. Однако местная потеря устойчивости элементов может привести к исчерпанию несущей способности всей панели. Поэтому, помимо расчета панели на общую устойчивость, проверяют устойчивость, связанную с исчерпанием ее несущей способности при местной потере устойчивости элементами.

Расчет заполнителя на прочность (стр. 309—311) производят на действие напряжений, возникающих в элементах. Для заполнителя из пенопласта и армированного пенопласта учитывают напряжения отрыва и сдвига, возникающие по склейке внешних слоев с заполнителем вследствие начальной технологической волнистости внешних слоев и (в случае продольного сжатия панели) начального технологического общего искривления панели.

Для определенных условий нагружения и опирания панелей при заданных размерах в плане и заданных материале внешних слоев и типе заполнителя существуют оптимальные (с точки зрения весовой отдачи) значения толщин панели и внешних слоев и параметров заполнителя. *Определение оптимальных параметров панелей* для некоторых случаев рассмотрено на стр. 311—320.

Расчетные схемы, основные гипотезы, методы решения задач

Общий изгиб и устойчивость. Приближенная теория расчета трехслойных пластинок и оболочек на общий изгиб и устойчивость строится на основе ряда допущений. Тонкие несущие слои трехслойной пластинки или оболочки рассматривают как обычные пластинки и оболочки, работающие в соответствии с гипотезой о прямых нормалях. В заполнителе пренебрегают деформациями в поперечном направлении. Прогобы внешних слоев, таким образом, считаются одинаковыми.

Главное отличие расчета трехслойных конструкций от расчета обычных пластинок и оболочек состоит в учете деформаций сдвига заполнителя.

Приближенно деформации сдвига заполнителя можно учесть с помощью различных допущений о его работе. Одно из таких допущений состоит в предположении, что тангенциальные перемещения по толщине заполнителя при деформировании трехслойной конструкции распределяются линейно.

По установившейся терминологии различают трехслойные конструкции с легким заполнителем и конструкции с жестким заполнителем. К легким заполнителям относят такие, при которых продольные силы в конструкции почти целиком воспринимают внешние слои.

В конструкции с жестким заполнителем заметную часть продольных усилий воспринимает заполнитель.

Гипотеза о линейном распределении перемещений по толщине заполнителя позволяет получить уравнения трехслойных пластинок и оболочек как с легким, так и с жестким заполнителем.

Уравнения, связывающие усилия и моменты, действующие в трехслойной пластинке или оболочке могут быть получены из рассмотрения условий равновесия элемента, выделенного из трехслойного пакета. Таким путем получается система из пяти дифференциальных уравнений относительно изгибающих моментов M_x , M_y , крутящего момента H , усилий в срединной поверхности среднего слоя N_x , N_y , T и перерезывающих сил Q_x , Q_y . Для трехслойной весьма пологой оболочки система уравнений при изгибе имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x; \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= Q_y; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} + q = 0; \end{aligned}$$

здесь x и y — координаты по линиям главных кривизн оболочки; R_1, R_2 — радиусы главных кривизн; q — поперечная нагрузка на оболочку в сторону внутренней нормали.

Соотношения между усилиями и моментами, с одной стороны, и перемещениями, с другой, получают интегрированием напряжений по толщине оболочки с учетом физических соотношений между напряжениями и деформациями (закон Гука или соотношения теории пластичности при работе материала за пределом упругости). При этом долю перерезывающих сил, приходящихся на внешние слои, определяют из условий равновесия элемента, выделенного из внешнего слоя с учетом взаимодействия этого элемента со средним слоем.

За счет введения допущения о характере распределения перемещений по толщине трехслойной оболочки все усилия и моменты выражаются через пять независимых функций от координат на срединной поверхности заполнителя $u_\alpha, u_\beta, v_\alpha, v_\beta, w$, где

$$u_\alpha = \frac{1}{2} (u_1 + u_2); \quad v_\alpha = \frac{1}{2} (v_1 + v_2);$$

$$u_\beta = \frac{1}{2} (u_1 - u_2); \quad v_\beta = \frac{1}{2} (v_1 - v_2);$$

здесь u_1, v_1, u_2, v_2 — перемещения срединных поверхностей 1-го (верхнего) и 2-го (нижнего) внешних слоев в направлениях x и y ; w — прогиб в сторону внутренней нормали.

Для упругой трехслойной оболочки симметричного строения (одинаковые внешние слои) с легким заполнителем соотношения между усилиями и перемещениями имеют вид:

для усилий

$$N_x = 2B_1 \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} - \frac{w}{R_1} - \nu_1 \frac{w}{R_2} \right);$$

$$N_y = 2B_1 \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \frac{w}{R_2} - \nu_1 \frac{w}{R_1} \right);$$

$$T = 2B_1 \left(\frac{1 - \nu_1}{2} \right) \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \right);$$

для моментов

$$M_x = -2D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) B_1 \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right);$$

$$M_y = -2D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 2 \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) B_1 \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right);$$

$$H = -2D_1 (1 - \nu_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - (1 - \nu_1) \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) B_1 \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x} + \frac{\partial u_\beta}{\partial y} \right);$$

для перерезывающих сил

$$Q_x = -2G_3 \left[u_\beta - \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] -$$

$$- 2D_1 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - B_1 \delta_1 \left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \nu_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} \right);$$

$$Q_y = -2G_3 \left[v_\beta - \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] - 2D_1 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - B_1 \delta_1 \left(\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \nu_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} \right);$$

здесь Δ — оператор:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$B_1 = \frac{E_1 \delta_1}{1 - \nu_1^2} \quad D_1 = \frac{E_1 \delta_1^3}{12 (1 - \nu_1^2)} \quad \text{— жесткости растяжения и изгиба}$$

одного внешнего слоя.

Уравнения устойчивости оболочки сохраняют тот же вид. Разница состоит в том, что вместо q в пятое уравнение равновесия входит величина

$$N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

здесь N_x^0 , N_y^0 , T^0 — усилия в оболочке в безмоментном критическом состоянии.

Выразив в уравнениях все усилия через перемещения, приходим к пяти уравнениям относительно пяти перемещений.

В случае трехслойной пластинки ($R_1 = \infty$, $R_2 = \infty$) система уравнений устойчивости распадается на две независимых системы. Два первых уравнения относительно функций u_α , v_α имеют только нулевое решение. Три последних — дают уравнения устойчивости трехслойной пластинки, которые в перемещениях имеют вид

$$\frac{B_1 h}{G_3} \left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + \nu_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} \right) - u_\beta + \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{B_1 h}{G_3} \left(\frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu_1}{2} \cdot \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu_1}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} \right) - v_\beta + \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

$$- 2B_1 \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) \Delta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) - \\ - 2D_1 \Delta \Delta w + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

При решении задач изгиба и устойчивости на контуре трехслойной оболочки должны быть поставлены граничные условия в соответствии с условиями опирания. Для трехслойной оболочки должно быть задано шесть условий в каждой точке контура.

Граничные условия можно разбить на три группы.

1. Два граничных условия обусловлены характером закрепления внешних слоев в отношении прогиба и угла поворота (при статических граничных условиях эти условия связаны с перерезывающей силой на контуре и моментами во внешних слоях).

2. Два граничных условия связаны с перемещениями u_α и v_α или с соответствующими усилиями N_x , N_y , T и определяются характером закрепления края оболочки в целом относительно смещений в направлении, перпендикулярном к краю, и в направлении, касательном к краю.

3. Два граничных условия связаны с перемещениями u_β , v_β или соответствующими усилиями и определяются характером закрепления края оболочки в целом относительно поворотов в направлении, перпендикулярном к краю, и относительно взаимных перемещений внешних слоев в направлении, касательном к контуру.

Для трехслойных пластинок при идентичном закреплении верхнего и нижнего внешних слоев $u_\alpha = v_\alpha = 0$, так что число граничных условий сокращается до четырех.

Решение задач изгиба и устойчивости трехслойных пластинок и оболочек упрощается, если пренебречь неравномерностью распределения напряжений по толщине внешних слоев. Это означает, что в уравнениях можно принять жесткость изгиба внешних слоев D_1 равной нулю. В большинстве случаев это допущение оказывается приемлемым. При введении этого допущения порядок системы уравнений понизится. В соответствии с этим сократится число граничных условий: для оболочки до пяти, а для пластинки до трех. Не будет условия и относительно угла поворота внешнего слоя или момента в нем.

Дальнейшее понижение порядка системы уравнений может быть достигнуто за счет допущения об отсутствии взаимного поворота внешних слоев, т. е.

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial y} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x} = 0$$

Анализ показывает, что вносимая за счет этого погрешность зависит от характера закрепления внешних слоев относительно взаимных перемещений в направлении, касательном к контуру. В большинстве практически важных случаев это допущение оказывается приемлемым.

Компактная запись уравнений трехслойных пластинок и оболочек может быть достигнута за счет введения представлений усилий и перемещений через функции усилий и перемещений.

Так, например, если для трехслойной пластинки ввести представления (с учетом допущения об отсутствии взаимного поворота внешних слоев)

$$u_{\beta} = \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_{\beta} = \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$

$$w = \left(1 - \frac{B_1 h}{G_3} \Delta \right) \Phi.$$

то уравнения устойчивости приведутся к одному уравнению относительно функции Φ

$$2B_1 \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right)^2 \Delta \Delta \Phi + \left[2D_1 \Delta \Delta - N_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - N_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2T^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] \left(1 - \frac{B_1 h}{G_3} \Delta \right) \Phi = 0.$$

Соответственно преобразуют и граничные условия.

Аналогично приводят уравнения и для трехслойных оболочек.

Та же схема вывода уравнений общего изгиба и устойчивости сохраняется и в более общих случаях трехслойных оболочек с жестким заполнителем, с внешними слоями из различных материалов (оболочки несимметричного строения), причем материалы слоев могут быть и ортотропными. В этих случаях также может быть получена система из пяти уравнений относительно пяти перемещений. Такая методика получения уравнений распространяется и на случаи учета неравномерного нагрева слоев оболочки.

Отметим, что для вывода уравнений изгиба и устойчивости трехслойных пластинок и оболочек со слоями из ортотропных материалов, несимметричных по толщине, с учетом неравномерного нагрева и т. п. в большинстве работ используются вариационные методы.

Следует отметить, что расчет на общий изгиб и устойчивость трехслойных оболочек со слоями из изотропных материалов можно привести в большинстве практически важных случаев к решению тех же уравнений при аналогично поставленных граничных условиях, что и в случае расчета трехслойных оболочек симметричного строения с легким заполнителем. Различие состоит лишь в коэффициентах уравнений. Следовательно, нет необходимости специального решения задач для трехслойных оболочек несимметричного строения с жестким заполнителем, если имеется решение соответствующей задачи для симметричной оболочки с легким заполнителем; достаточно в окончательные результаты ввести значения соответствующих жесткостей.

В связи с этим рекомендации, которые даны на стр. 268—289, по определению критических значений нагрузок при расчете трехслойных конструкций на устойчивость остаются в силе для конструкций симметричного и несимметричного строения при легком или жестком заполнителе. В каждом из этих случаев даны формулы для определения жесткостных характеристик, которые должны вводиться в расчет.

В случае трехслойных пластинок и оболочек с конструктивно анизотропным средним слоем (гофр, соты) в расчетах на общий изгиб и устойчивость используют приведенные (эквивалентные) модули упруго-

сти и сдвига, которые позволяют свести рассматриваемую задачу к соответствующей задаче для конструкции со сплошным заполнителем. Рекомендации по определению приведенных упругих параметров даны на стр. 256—267.

При расчете трехслойной оболочки или пластинки на устойчивость критические напряжения во внешних слоях могут оказаться выше предела пропорциональности материала.

На основе гипотезы продолжающегося нагружения получение уравнений устойчивости трехслойных пластинок и оболочек с учетом работы материала за пределом пропорциональности проводится по той же методике, что и вывод уравнений упругой устойчивости, с той разницей, что вместо соотношений закона Гука используют соотношения теории малых упруго-пластических деформаций или теории течения.

Решения ряда задач устойчивости на основе этих уравнений и анализ данных эксперимента позволяют рекомендовать при расчетах на устойчивость за пределом пропорциональности простую приближенную методику, существо которой состоит в том, что сначала определяют критическое напряжение в предположении упругой работы материала и далее эту величину пересчитывают с помощью простых формул в действительное критическое напряжение с учетом работы материала за пределом пропорциональности.

Формулы и графики для расчета трехслойных пластинок и оболочек на устойчивость даны в гл. 10 (см. работы [1,4—7]) *.

Приведенные упругие параметры заполнителей. Задачи определения приведенных упругих параметров заполнителей из тонкостенных ребристых конструкций сводятся к расчету взаимных смещений внешних слоев трехслойной пластинки под соответствующей нагрузкой.

Так, например, для определения модуля сдвига G_{xz} такого заполнителя в плоскости, нормальной к срединной поверхности, следует загрузить внешние слои пластинки усилиями, действующими в плоскости этих слоев и вызывающими смещения их взаимного сдвига (рис. 3). Определив тем или иным методом эти смещения, полагаем их равными смещениям в пластине со сплошным однородным заполнителем с модулем сдвига G_{xz} . Из этого равенства найдем величину модуля G_{xz} , т. е. значение приведенного модуля сдвига рассматриваемого заполнителя.

Модули нормальной упругости заполнителя и коэффициенты Пуассона можно найти аналогичным путем, загружая элементы пластинки нагрузками, вызывающими растяжение в плоскости пластинки или по нормали к ней.

Взаимные смещения элементов пластинки определяют точно или приближенно методами строительной механики путем рассмотрения конструкций, образованных из внешних слоев пластинки и элементов заполнителя, как статически неопределимых пространственных систем. При этом необходимо принимать во внимание, что на величину этих смещений могут оказывать влияние и другие нагрузки, действующие

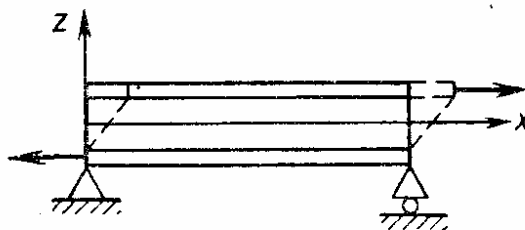


Рис. 3

* Список литературы см. в гл. 11.

на пластинку помимо тех, которые приложены, чтобы вызвать в заполнителе смещения определенного вида. Речь идет о нагрузках, которые могут вызвать потерю устойчивости элементов внешних слоев или заполнителя при такой же форме искривления, какая возникает при рассматриваемых взаимных смещениях этих элементов. Например, при взаимном сдвиге внешних слоев пластинки с заполнителем типа гофра или складок (см. рис. 4, б и в) в направлении, нормальном к образующим складок, внешние слои искривляются. Если одновременно с этим сдвигом пластинка испытывает продольное сжатие по нормали к складкам, то усилия, сжимающие внешние слои, увеличивают их искривление и, следовательно, их взаимные смещения сдвига. Для заполнителей типа гофра и складок эти задачи строго решены методами строительной механики стержневых систем (см. работу [6]), для сотовых заполнителей — энергетическим методом (см. статьи в работе [5, 7]). Полученные на основе этих решений формулы и графики для определения приведенных упругих параметров даны на стр. 256—267.

Местная устойчивость элементов. В случае продольного сжатия трехслойной пластинки с одинаковыми внешними слоями решение задачи устойчивости распадается на два решения, одно из которых соответствует кососимметричному искривлению всей пластинки (общей потере устойчивости), а другое — симметричному искривлению внешних слоев без искривления срединной поверхности всей пластинки (т. е. местной потере устойчивости внешних слоев).

Местная потеря устойчивости внешних слоев трехслойной пластинки наблюдается и при других ее нагружениях (при изгибе, сдвиге в своей плоскости и др.) и аналогична потере устойчивости однослойных пластинок на упругом основании. Роль этого упругого основания играет здесь заполнитель. Эти задачи для случая сплошного заполнителя решались точно и приближенно в целом ряде работ [5].

К аналогичным решениям сводится задача о местной устойчивости ребер заполнителя из армированного пенопласта.

В случае заполнителей из ребристых конструкций возможны и другие формы местной потери устойчивости. При сотовом заполнителе возможно внутрисотовое искривление работающих совместно элементов внешних слоев («донышек сот») и элементов самих сот [7], при заполнителе типа гофра возможны местные искривления внешних слоев, работающих совместно с гофром [5, 7]. Эти задачи были решены энергетическим методом в предположении упругой работы конструкции. Рассматривался ряд возможных форм потери устойчивости и были установлены наиболее опасные формы. Для конструкций, работающих неупруго, критические нагрузки сперва определяют в предположении упругой работы, а затем производят пересчет с помощью приближенного приема, аналогичного используемому для задач общей устойчивости.

Формулы, полученные в указанных работах, приведены на стр. 296—308.

Расчет заполнителя на прочность с учетом начальных технологических несовершенств. При расчете на прочность заполнителя и его соединений с внешними слоями пластинки необходимо учитывать напряжения, возникающие при деформировании идеальной пластинки, а также напряжения, обусловленные наличием начальных технологических несовершенств — общего искривления всей пластинки (в случае

продольного сжатия), а также местных искривлений или волнистости внешних слоев. Эти несовершенства вызывают появление в заполнителе таких напряжений, которые могут превзойти напряжения от сжатия или изгиба идеальной пластинки и сопоставимы с прочностью самих заполнителей или их соединений с внешними слоями (см. статью в работе [4]).

При продольном сжатии пластинки, обладающей начальным искривлением, в заполнителе и его соединениях с внешними слоями возникают касательные и нормальные (последние малы) напряжения, величина которых зависит от длины полуволны и стрелы искривления. Эту длину полуволны для коротких в направлении сжатия пластинок можно принимать равной соответствующему размеру пластинки в плане, а для пластинок длинных в направлении сжатия, — длине полуволны, соответствующей минимуму критической нагрузки общей устойчивости пластинки.

Величину стрелы начальной изогнутости следует задавать исходя из технологических соображений.

Волнистость внешних слоев также вызывает появление дополнительных нормальных и касательных напряжений, зависящих от длины полуволны этой волнистости и ее стрелы, которая задается также из технологических соображений. Длину полуволны начальной волнистости не задают, а определяют из условия наиболее неблагоприятного случая — максимума расчетного напряжения, так как форма искривления тонкого внешнего слоя весьма неопределенна. Расчетное напряжение в заполнителе и его соединениях с внешними слоями определяют по одной из теорий прочности от одновременного действия всех напряжений, соответствующих нагружению идеальной пластинки и наличию в пластинке начальных несовершенств. Так как касательные и нормальные напряжения достигают максимума в различных точках, то для определения максимума расчетных напряжений, кроме длины полуволны волнистости внешнего слоя, приходится варьировать и положение точки, в которой определяют расчетное напряжение.

Приближенные формулы, полученные таким путем, приведены в гл. 11.

Оптимальные параметры. Параметры панели, обеспечивающие ее необходимую прочность и устойчивость при минимальном весе, определяют следующим способом (см. статьи в работах [6, 7]).

В формулы, выражающие зависимости между параметрами панели и нагрузками при опасных видах потери устойчивости и разрушения, вводят заданные величины внешней нагрузки и размеров панели в плане. Из полученных выражений образуют систему уравнений. В случае заполнителя из пенопласта в систему вводят также зависимости между механическими характеристиками и удельным весом пенопласта заданного класса. Записывают выражение веса панели через ее параметры с учетом веса припоя или клея и отыскивают решение системы уравнений, образованной указанным способом и соответствующее минимуму веса.

Графики для определения оптимальных параметров, построенные этим способом, приведены в гл. 11. Эти графики даны для продольно сжатых бесконечно широких пластинок. При помощи итерационного приема, описанного в гл. 11, эти графики можно использовать для определения оптимальных параметров сжатых пластинок и оболочек с различными условиями опирания по контуру.

Порядок расчета

При проектировании трехслойных панелей и оболочек с заполнителями разных типов — сотовым, гофрированным, складчатым, из неармированного и армированного пенопласта и других легких материалов — выполняют следующие работы:

вычисляют приведенные жесткостные характеристики заполнителей (см. стр. 256—267);

определяют критические нагрузки и проверяют общую устойчивость (см. стр. 268—289);

находят прогибы и напряжения и проверяют на прочность при продольно-поперечном изгибе (см. стр. 290—296);

рассчитывают на местную устойчивость элементы панели и проверяют несущую способность панели при потере местной устойчивости ее элементами (см. стр. 296—308);

проверяют прочность заполнителя и его связи с внешними слоями (см. стр. 309—311);

определяют оптимальные параметры панели из условия обеспечения общей и местной устойчивости и прочности панели и ее элементов при минимуме веса панели (см. стр. 311—320).

При действии нагрева в расчет вводят механические характеристики материалов с учетом температур.

При расчетах трехслойных панелей и оболочек и их элементов на общую и местную устойчивость сперва находят значения критических нагрузок в предположении идеализированной упругой работы конструкции. При помощи пересчета этих значений определяют действительные критические нагрузки с учетом реальной работы конструкции (в том числе при выходе материала за пределы пропорциональности).

ПРИВЕДЕННЫЕ УПРУГИЕ ПАРАМЕТРЫ ЗАПОЛНИТЕЛЕЙ

Приведенные здесь формулы получены методами, описанными на стр. 253—254, и справедливы для плоских и пологих криволинейных панелей. Подробнее см. работы [5—7].

Направления осей x , y , z связаны с ориентацией элементов заполнителя и показаны на рисунках.

Сотовый заполнитель

Приведенные модули сдвига заполнителя в плоскостях yz и xz , нормальных к поверхности панели, в основном зависят от жесткости на сдвиг пластинок—элементов сот (рис. 4, a), приходящейся на единицу ширины панели. Эти модули находят по формулам

$$G_{yz} = 0,576 G_{cz} \frac{\delta_3}{r};$$

$$G_{xz} = G_{cz} \frac{\delta_3}{r} \zeta. \quad (1)$$

Коэффициент ζ определяют по графику на рис. 5 в зависимости от значения

$$\kappa = \frac{G_{c4} \delta_4}{G_{cz} \delta_3}.$$

Если при действующей на пластинку нагрузке прямоугольные пластинки 3 и 4 (элементы сот) не теряют устойчивость от сдвига (см. стр. 297—300), то в формулы (1) и в выражение χ вводят $G_{сз} = G_3$, $G_{с4} = G_3$. Если пластинки 3 теряют устойчивость от сдвига, то можно принимать, что на них образуются косые складки, вдоль которых действует такая же растягивающая нагрузка, как и до потери устойчивости, а по нормали к складкам пластинки сжимающую нагрузку нести не могут. Это означает, что жесткость пластинок на сдвиг уменьшается вдвое и в выражение χ следует вводить $G_{сз} = 0,5G_3$. Если теряют устойчивость от сдвига и пластинки 4, то аналогично следует вводить также

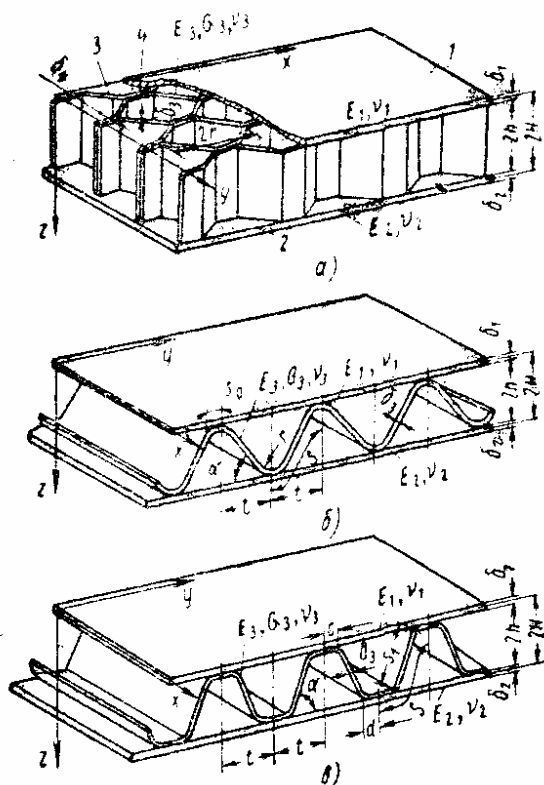


Рис. 4

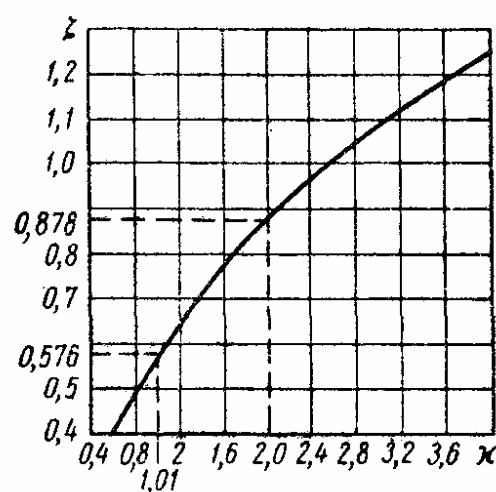


Рис. 5

$G_{с4} = 0,5G_3$. Однако учитывать влияние потери устойчивости элементов сот на величину модуля сдвига следует только в том случае, если эта потеря устойчивости имеет место на достаточно большой части длины панели. Например, в случае поперечного изгиба панели сосредоточенными нагрузками, когда поперечная сила, вызывающая сдвиг элементов сот, распределена вдоль панели равномерно, устойчивость элементов сот теряется по всей длине панели, и это надо учитывать. При продольном же сжатии искривленной панели поперечная сила достигает величины, вызывающей потерю устойчивости элементов сот только на отдельных небольших участках длины панели. В этом случае приведенный модуль сдвига сот для расчета панели можно определять, пренебрегая потерей устойчивости отдельных элементов сот.

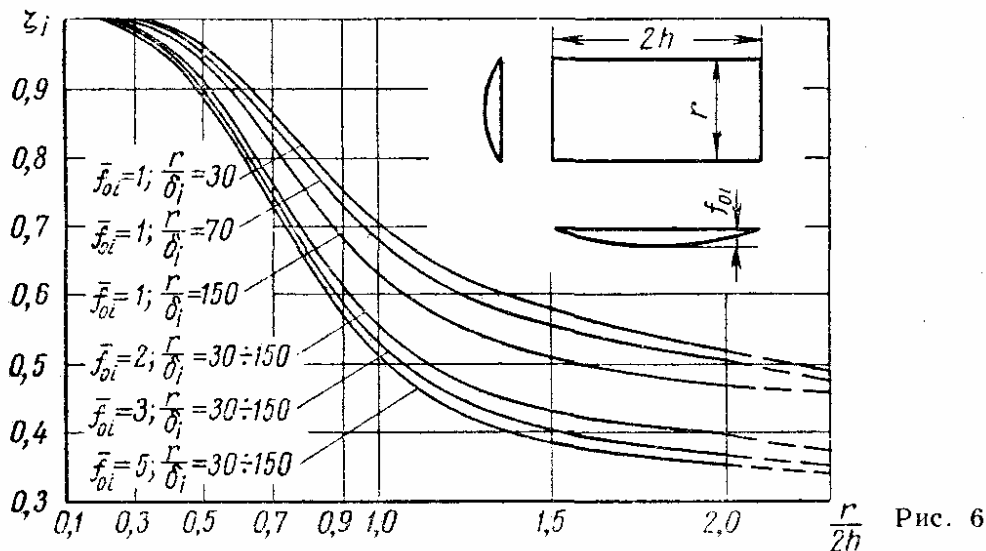
Величина приведенных модулей нормальной упругости заполнителя в плоскости панели при сотах из тонкой фольги $\left(\frac{h E_3 \delta_3}{r E_1 \delta_1} < 0,25 \right)$ мала, и при расчетах можно принимать $E_x = E_y = 0$.

Приведенный модуль упругости заполнителя в направлении z , перпендикулярном к поверхности панели, находят, равномерно

распределяя жесткость пластинок—элементов сот на растяжение (сжатие) по всей поверхности внешних слоев. Соответствующая формула имеет вид

$$E_z = \frac{2\delta_3 E_{c3} + \delta_4 E_{c4}}{2,6r} \quad (2)$$

Если пластинки 3 и 4 — элементы сот — не имеют начального (технологического) искривления, то в формулу (2) вводят $E_{c3} = E_3$; $E_{c4} = E_4$. Если же пластинки 3 и 4 обладают начальными искривлениями



со стрелой \bar{f}_{03} и f_{04} соответственно (рис. 6), то это приводит к некоторому уменьшению их жесткости на растяжение-сжатие в направлении z . В этом случае в формулу (2) вводят $E_{c3} = \zeta_3 E_3$ и $E_{c4} = \zeta_4 E_4$. Коэффициенты ζ_i определяют по графику на рис. 6 в зависимости от значения

$\frac{r}{2H}$, $\frac{r}{\delta_i}$ и $\bar{f}_{0i} = \frac{f_{0i}}{\delta_i}$ ($i = 3$ или 4).

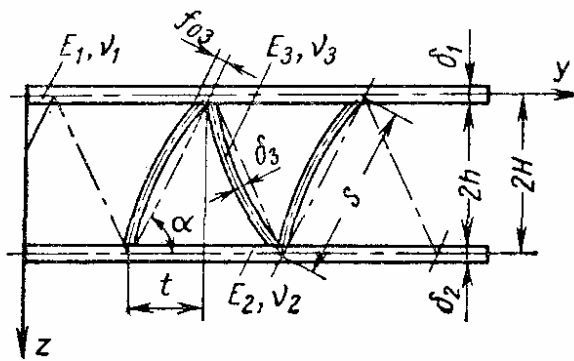


Рис. 7

Заполнитель типа гофра

Величина приведенного модуля сдвига в плоскости xz , перпендикулярной к поверхности панели и параллельной образующим гофра (см. рис. 4, б), практически настолько велика, что при расчетах можно принимать $G_{xz} = \infty$.

Приведенный модуль сдвига в плоскости yz , перпендикулярной к образующим гофра, находят по формулам (3)—(5).

В случае, когда профиль гофра пилообразный (рис. 7), величина G_{yz} в основном определяется работой элементов заполнителя на растяжение-сжатие с учетом их начального искривления (f_{03} — стрела этого искривления)

$$G_{yz} = \frac{2B_3 H}{\left[1 + 6 \left(\frac{f_{03}}{\delta_3}\right)^2\right]} \cdot \frac{t}{s^3} \quad (3)$$

В случае, когда $\frac{r\alpha}{V(2H)^2 + t^2} \geq 0,3$ (профиль гофра не слишком близок к пилообразному), величина G_{yz} в основном определяется работой элементов заполнителя на изгиб

$$G_{yz} = \frac{A + \mu}{F + \mu N} \cdot \frac{D_3}{r^3} \cdot \frac{t}{2H}. \quad (4)$$

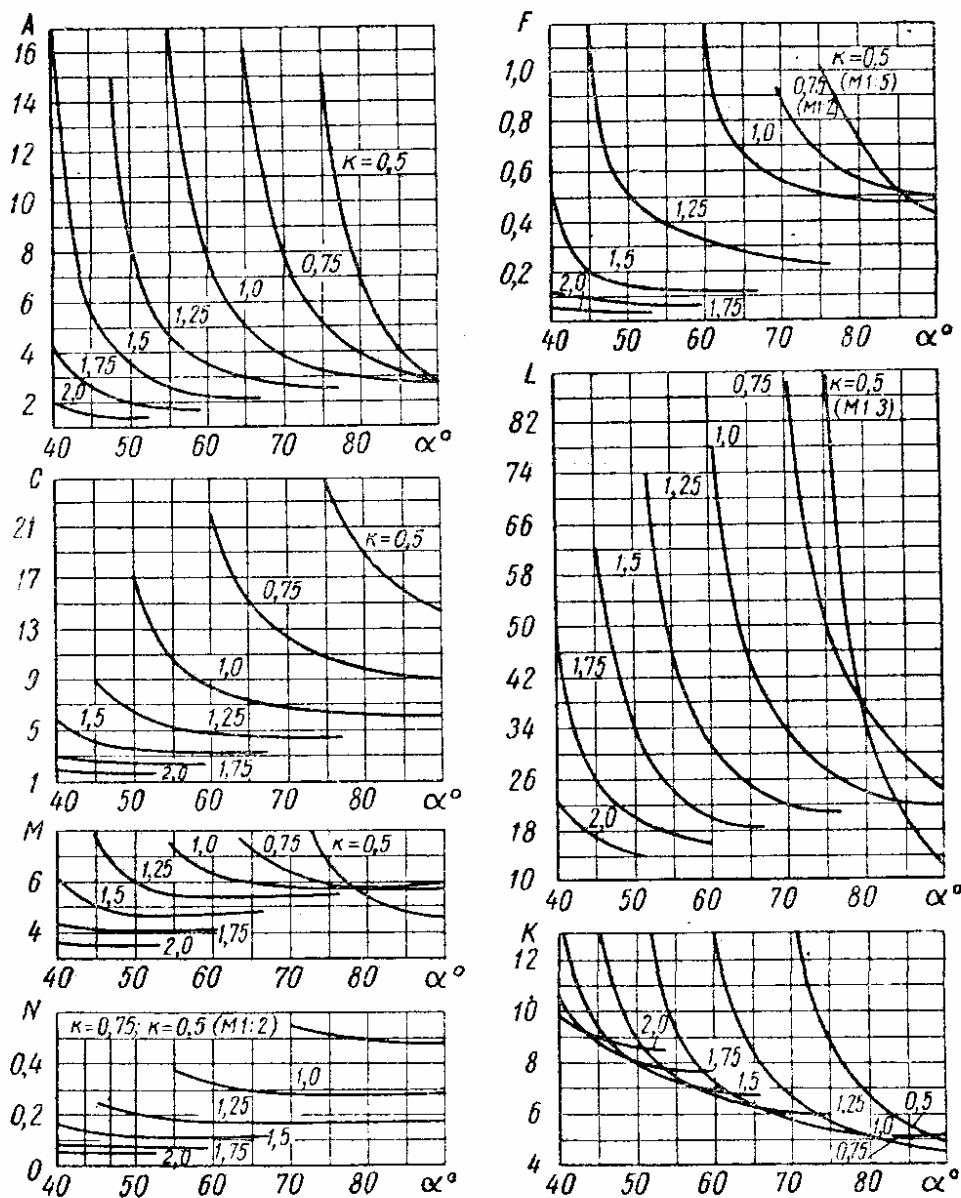


Рис. 8

В промежуточном случае $\left(0,3 > \frac{r\alpha}{V(2H)^2 + t^2} \neq 0\right)$ учитывается и изгиб и растяжение элементов, при этом

$$G_{yz} = \frac{A + C\psi^2 + \mu}{F + L\psi^2 + M\psi^4 + \mu(A + K\psi^2)} \cdot \frac{t}{2H} \cdot \frac{D_3}{r^3}; \quad (5)$$

здесь

$$\psi = 0,289 \frac{\delta_3}{r}; \quad \mu = 0,667 \frac{t^3 D_3}{r^3 D}; \quad D = \frac{D_1 + D_2}{2}.$$

Коэффициенты A , C , F , L , M , N , K в формулах (4) и (5) находят по графикам на рис. 8 в зависимости от угла α и отношения $k = \frac{t}{2H}$.

Приведенный модуль нормальной упругости гофра в направлении вдоль складок E_x находят, равномерно распределяя жесткость гофра

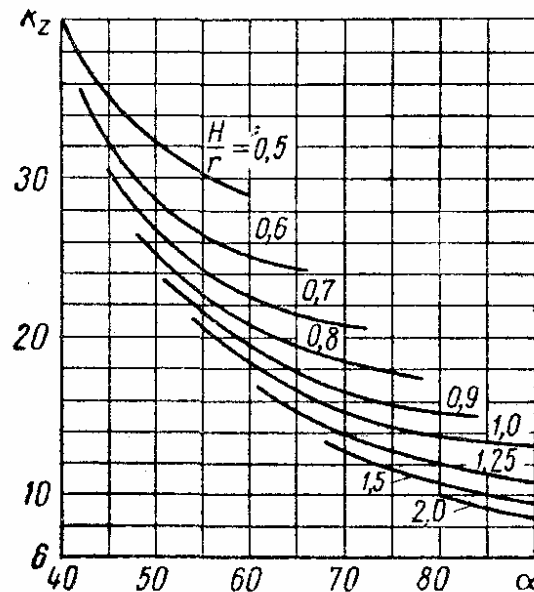


Рис. 9

на растяжение-сжатие по всей площади сечения промежутка между внешними слоями:

$$E_x = \frac{s \delta_3 E_3}{2Ht}. \quad (6a)$$

Приведенный модуль нормальной упругости в плоскости панели в направлении, нормальном к складкам, мал, и при расчетах можно принимать $E_y = 0$.

Приведенный модуль упругости E_z при гофре, не слишком близком к пилообразному, в основном зависит от работы элементов гофра на изгиб:

$$E_z = \frac{D_3}{r^3} k_z. \quad (6б)$$

Коэффициент k_z находят по графику на рис. 9.

Для пилообразного гофра E_z определяют по формуле

$$E_z = \frac{2B_3 H}{\left[1 + 6 \left(\frac{f_{03}}{\delta_3}\right)^2\right]} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{ts}. \quad (6в)$$

Складчатый заполнитель

Складки заполнителя спаяны или склеены с внешними слоями по площадкам контакта шириной $2c$ и $2d$ (см. рис. 4, в).

Приведенный модуль сдвига в плоскости xz , перпендикулярной к поверхности панели и параллельной образующим складок, как и

для гофра, практически настолько велик, что при расчетах можно принимать $G_{xz} = \infty$.

На величину приведенного модуля сдвига G_{yz} складчатого заполнителя в плоскости yz , перпендикулярной к образующим складок при $c \neq 0$ и $d \neq 0$ в отличие от заполнителя типа гофра, существенное влияние оказывает продольное сжатие панели в направлении y .

В случае такого сжатия величину G_{yz} находят по формуле

$$G_{yz} = G_{yz}^* \left(1 - \frac{N_y}{N_{yк}^0} \right), \quad (7)$$

где N_y — нагрузка, сжимающая панель в направлении y ; $N_{yк}^0$ — критическое значение нагрузки при сжатии панели в направлении y , определяемое по формулам, приведенным на стр. 263—264 (это значение соответствует форме искривления элемента панели при сдвиге); G_{yz}^* — модуль сдвига заполнителя в случае, когда продольная нагрузка N_y отсутствует ($G_{yz} = G_{yz}^*$ при $N_y = 0$).

При расчете панели на общую устойчивость при сжатии в направлении y , когда сила $N_y = N_{yк}$ в начале расчета неизвестна, в первом приближении принимают $G_{yz} = G_{yz}^*$ и определяют критическую нагрузку $N_{yк}$ на панель по формулам, приведенным на стр. 269—289. Далее по формуле (8) определяют G_{yz}^* , полагая $N_y = N_{yк}$. Полученный результат уточняют методом последовательных приближений.

В случае, когда нагрузка, сжимающая панель в направлении y , отсутствует, приведенный модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной к образующим складок G_{yz}^* , находят по формулам (8)—(11).

В случае, когда внешние слои одинаковы ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$; $E_1 = E_2 = E$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu$) и $c = d$, используют формулу

$$G_{yz}^* = q_{yz} \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (8)$$

Величину q_{yz} находят по графикам на рис. 10, где $\eta = \frac{\delta_3}{\delta} \times \sqrt[3]{\frac{E_3}{E}}$, $\kappa = \frac{c}{t}$.

В случае, когда жесткости внешних слоев панели или размеры c и d различны, приведенный модуль сдвига определяют по формуле

$$G_{yz}^* = \frac{(-A_2 - C_2 + 2K_2) F_2 + (L_2 - M_2)^2}{A_2 M_2^2 + L_2^2 C_2 - 2K_2 L_2 M_2 + (K_2^2 - A_2 C_2) F_2} \frac{t}{2H}; \quad (9)$$

здесь

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{(t-c)^3}{3D_1} + \frac{c^3}{3D_4} + \frac{t^2 s_1}{3D_3} + \left(\frac{t \cos \alpha}{2H} \right)^2 \frac{s_1}{B_3}; \\ C_2 &= \frac{(t-c)^3}{3D_1} + \frac{(t-d)^3}{3D_2} + \frac{s_1}{3D_3} (t^2 - tc + c^2 - dt + d^2 - cd) + \\ &\quad + \frac{s_1}{B_3} \left(\frac{t}{2H} \cos \alpha - \sin \alpha \right)^2; \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{(t-c)^3}{3D_1} + \frac{d^3}{3D_5} + \frac{s_1}{3D_3} [(t-c)(t-c+d) + d^2] + \frac{s_1}{B_3} \sin^2 \alpha;$$

$$K_2 = \frac{(t-c)^3}{3D_1} + \frac{s_1}{6D_3} t(t-2c+d) +$$

$$+ \frac{s_1}{B_3} \left(\frac{t}{2H} \cos \alpha - \sin \alpha \right) \cos \alpha;$$

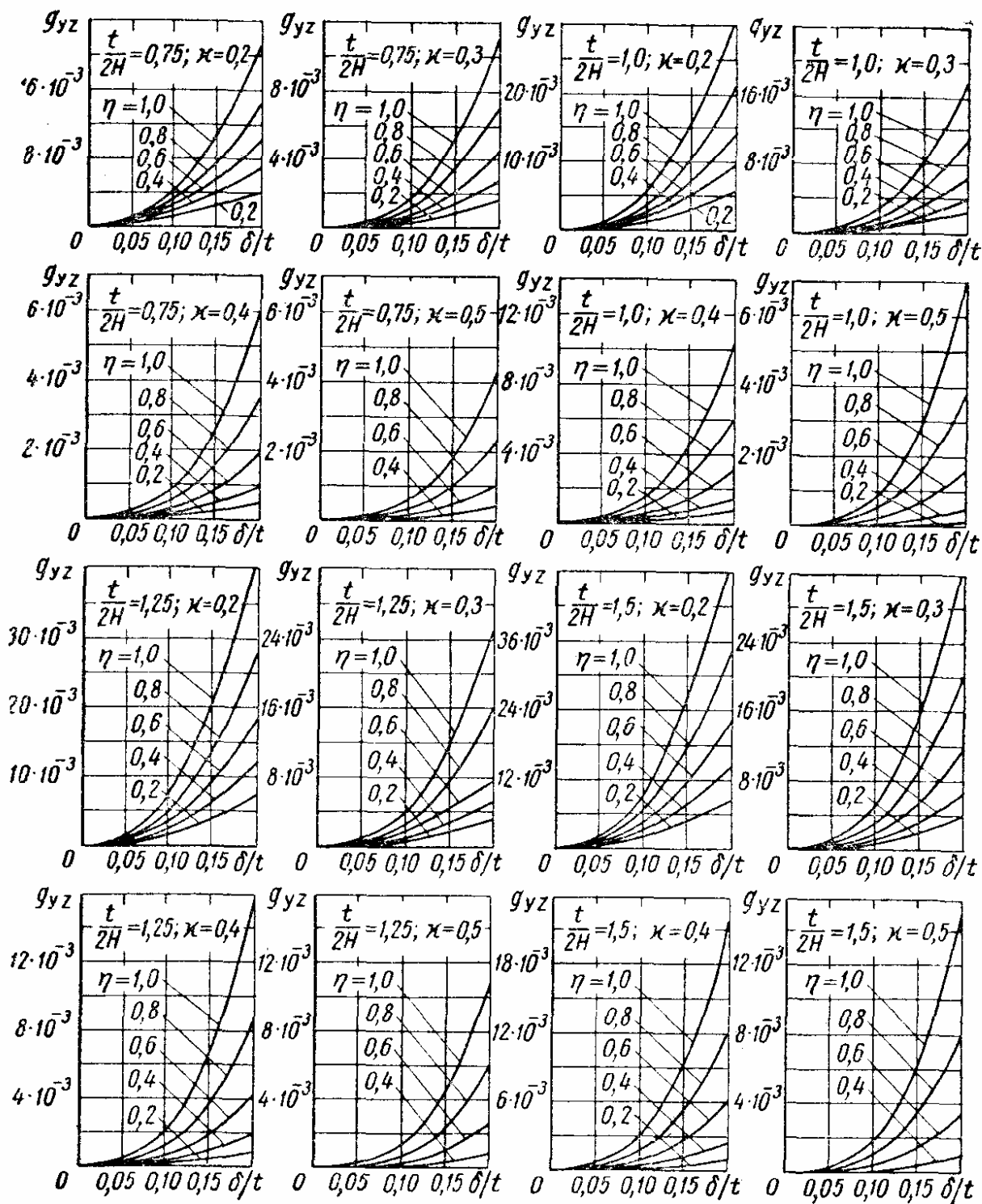


Рис. 10

$$L_2 = -\frac{(t-c)^3}{3D_1} - \frac{s_1}{6D_3} t(2t-2c+d) + \frac{t}{B_3} \cos \alpha;$$

$$M_2 = -\frac{(t-c)^3}{3D_1} - \frac{s_1}{6D_3} [(t-c)^2 + (c-d)^2 + d^2 - ct] + \\ + \frac{s_1}{B_3} \left(\frac{t}{2H} \cos \alpha - \sin \alpha \right) \sin \alpha;$$

D_4, D_5 — жесткости составных сечений участков внешних слоев длиной c и d , спаянных или склеенных с заполнителем, на единицу ширины при изгибе.

При $E_1 = E_2 = E_3 = E$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$

$$D_4 = \frac{E(\delta_1 + \delta_3)^3}{12(1-\nu^2)}; \quad D_5 = \frac{E(\delta_2 + \delta_3)^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (10)$$

В формулах (9) учтена работа элементов заполнителя на изгиб и на растяжение-сжатие. При $c \approx d \approx 0,5t$ влиянием этого растяжения-

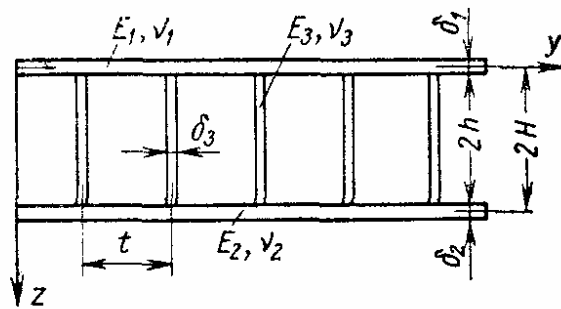


Рис. 11

сжатия, по сравнению с изгибом, можно пренебрегать, т. е. можно отбрасывать члены, содержащие множитель $\frac{1}{B_3}$.

В случае, когда $c = d = 0$, складчатый заполнитель превращается в пилообразный (см. рис. 7). В этом случае при различных или одинаковых внешних слоях используют формулу (3).

Если заполнитель образован из отдельных ребер (рис. 11) и внешние слои панели одинаковы ($D_1 = D_2 = D_4 = D_5 = D$, $c = d = 0,5t$), используют формулу

$$G_{yz}^* = \frac{12D_3D}{D_3t + 4HD} \cdot \frac{1}{Ht}. \quad (11)$$

Значения критических нагрузок N_{yk}^0 , входящие в формулу (7), находят следующим образом.

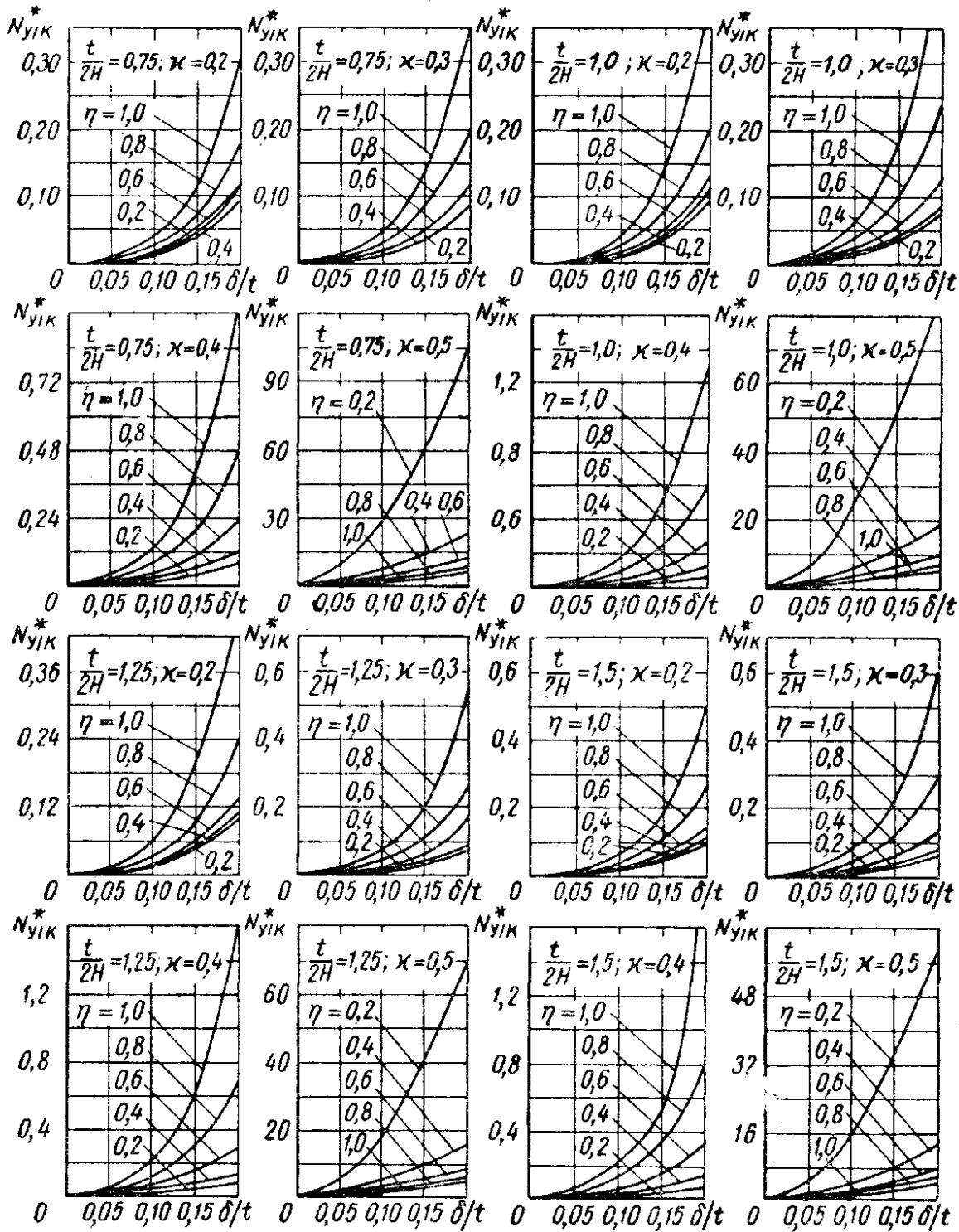


Рис. 12

Если внешние слои панели одинаковы ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и $c = d$), величину $N_{y\kappa}^0$ определяют по формуле

$$N_{y\kappa}^0 = 2N_{y\kappa}^* \frac{\delta E}{1 - \nu^2}. \quad (12)$$

Значение $N_{y\kappa}^*$ находят по графикам рис. 12 в зависимости от параметров

$$\eta = \frac{\delta_3}{\delta} \sqrt[3]{\frac{E_3}{E}}; \quad \kappa = \frac{c}{t}.$$

В случае, когда внешние слои панели различны (по толщине и материалу), $N_{yк}^0$ приближенно определяют по формуле

$$N_{yк}^0 = N_{yк}^* (B_1 + B_2). \quad (13)$$

Значение $N_{yк}^*$ находят по графикам рис. 12, полагая

$$\eta = \delta_3 \sqrt[3]{\frac{2E_3}{\delta_1^3 E_1 + \delta_2^3 E_2}} \text{ и } \kappa = \frac{c + d}{2}.$$

Приведенные модули нормальной упругости E_x и E_y находят по тем же формулам (6), что и для гофра.

Заполнитель из армированного пенопласта

Приведенные модули нормальной упругости и сдвига и коэффициенты Пуассона заполнителя находят, равномерно распределяя жесткости

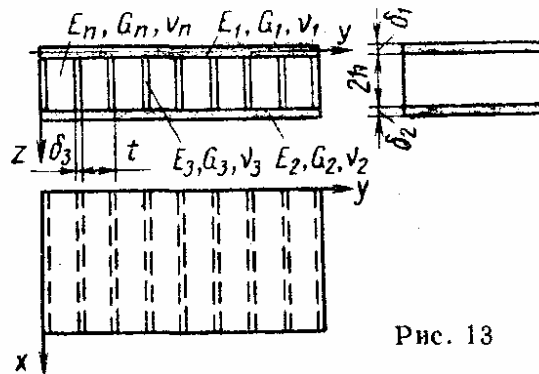


Рис. 13

армирующих элементов и пенопласта по всему сечению заполнителя (рис. 13):

$$\left. \begin{aligned} E_x = E_z &= \frac{E_3 \delta_3 + (t - \delta_3) E_n}{t}; & E_y &= \frac{t}{\frac{\delta_3}{E_3} + \frac{t - \delta_3}{E_n}}; \\ G_{xz} &= \frac{G_3 \delta_3 + (t - \delta_3) G_n}{t}; & G_{yz} &= \frac{t}{\frac{\delta_3}{G_3} + \frac{t - \delta_3}{G_n}}; \\ \nu_{yz} = \nu_{yx} &= \frac{\nu_3 \delta_3 + \nu_n (t - \delta_3)}{t}; \\ \nu_{zy} = \nu_{xy} &= \nu_{yx} \frac{E_y}{E_x}; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

здесь E_n, G_n, ν_n — модули упругости и сдвига и коэффициент Пуассона неармированного пенопласта; ν_{yx} — коэффициент поперечной деформации в направлении y , возникающей вследствие продольной деформации в направлении x ; E_3, G_3, ν_3 — модули упругости и сдвига и коэффициент Пуассона ребер армировки.

Формула для определения E_x справедлива, если при нагружении панели ребра армировки не теряют устойчивость от продольного сжатия (см. стр. 306—308).

Если ребра теряют устойчивость от продольного сжатия панели, то можно считать, что после этого они перестают воспринимать дополнительную продольную сжимающую нагрузку. При этом приведенный модуль нормальной упругости заполнителя изменяется. Если в формуле для E_x (14) положить $E_3 = 0$, то мы получим соответствующее значение касательного приведенного модуля E_x^k . При решении задачи устойчивости панели в формулы критических нагрузок (см. стр. 269—289) в качестве E_x следует вводить этот касательный модуль E_x^k . В других случаях работы панели может понадобиться значение секущего приведенного модуля E_x^c . Оно после потери устойчивости ребрами армировки изменяется с нагрузкой и может быть найдено по формуле

$$E_x^c = \frac{P}{\frac{P_k}{E_x^0} - \frac{P - P_k}{E_x^k}},$$

здесь P — сжимающая нагрузка, при которой определяется приведенный секущий модуль; E_x^c , P_k — критическое значение этой нагрузки, соответствующее потере устойчивости ребер ($P > P_k$); E_x^0 — значение приведенного модуля до потери устойчивости ребрами, найденное по формуле (14).

При расчете панели на общую устойчивость при сжатии в направлении x сначала используют выражение E_x в виде формулы (14) и определяют критическую нагрузку по формулам, приведенным на стр. 269—289. Далее по формулам стр. 306—308 проверяют ребра на местную устойчивость при сжатии такой нагрузкой. Если устойчивость ребер теряется, расчет повторяют, вводя значение касательного приведенного модуля.

Формула (14) для определения G_{xz} справедлива, если ребра армировки не теряют устойчивость от сдвига или сдвига со сжатием в плоскости xz (см. стр. 306—308).

Если ребра теряют устойчивость от сдвига, то значение касательного приведенного модуля G_{xz}^k находят по формуле (14), вводя туда $0,5G_3$ вместо G_3 .

При расчете панели с начальным искривлением на общую устойчивость при сжатии в направлении x или совместном сжатии в направлениях x и y сначала используют выражение G_{xz} в виде формулы (14) и определяют критическую нагрузку по формулам, приведенным на стр. 269—289. Далее по формулам стр. 306—308 проверяют ребра на местную устойчивость от сдвига или сдвига со сжатием при такой нагрузке. Если ребра теряют устойчивость, расчет повторяют, вводя в формулы в качестве G_{xz} значение касательного приведенного модуля. В некоторых случаях, например при расчете панели на изгиб, в расчет по формулам, приведенным на стр. 290—296, следует вводить приведенный секущий модуль.

Значение секущего приведенного модуля после потери устойчивости ребрами от сдвига находят по формуле

$$G_{xz}^c = \frac{Q}{\frac{Q_k}{G_{xz}^0} - \frac{Q - Q_k}{G_{xz}^k}},$$

здесь Q — сдвигающая нагрузка, при которой определяют приведенный модуль G_{xz} ; Q_k — критическое значение этой нагрузки, соответствующее потере устойчивости ребер; G_{xz}^0 — значение приведенного модуля до потери устойчивости ребер, найденное по формуле (14).

Однако учитывать влияние потери устойчивости армированных ребер на величину приведенного модуля заполнителя надо только в том случае, если эта потеря устойчивости имеет место на достаточно большой части всей длины панели (см. сказанное по этому поводу о сотовом заполнителе на стр. 257).

Глава 10

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И ИЗГИБ

РАСЧЕТ НА ОБЩУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ

Значения критических нагрузок при расчете трехслойных пластинок и оболочек на общую устойчивость определяют в зависимости от конструкции панели или оболочки, характера ее нагружения, условий опирания и размеров.

Пластинки в условиях цилиндрического изгиба

Пластинку, нагруженную равномерно распределенными по ширине сжимающими усилиями N , можно считать работающей в условиях цилиндрического изгиба и рассчитывать на устойчивость по приведенным ниже формулам в следующих случаях.

1. Размер пластинки a в направлении, перпендикулярном направлению действия нагрузки (рис. 1), превосходит более чем в 3 раза размер пластинки в направлении действия нагрузки:

$$\frac{a}{b} > 3.$$

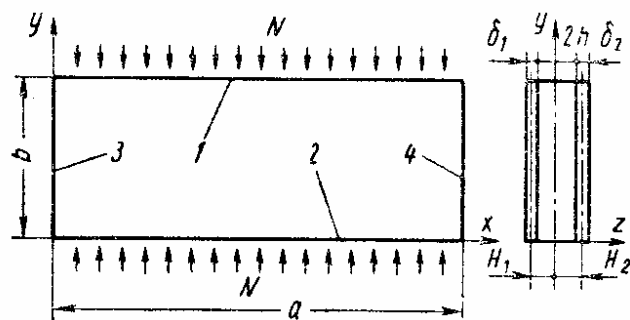


Рис. 1

Ненагруженные кромки пластинки 3, 4 (рис. 1) могут быть закреплены произвольным способом.

2. Соотношение размеров

$\frac{a}{b}$ произвольное, но нена-

груженные кромки 3, 4 свободны от закреплений. К этому случаю относятся также сжатые трехслойные стержни ($\frac{a}{b}$ мало). Для стержней при определении жесткостей коэффициенты Пуассона ν принимают равными нулю.

Для определения критической нагрузки на пластинку в условиях цилиндрического изгиба необходимо сначала по формулам (1), (2) определить жесткость панели на растяжение B и изгиб D , а также параметр сдвига заполнителя k по формуле (3). При этом входящие в эти формулы жесткости заполнителя B_c и D_c определяют в зависимости от конструкции среднего слоя по формулам, приведенным далее. Затем

по формуле (10) определяют значения критических нагрузок N_e на единицу ширины панели в предположении идеализированной упругой работы конструкции. Действительные значения критических нагрузок с учетом работы материала за пределом пропорциональности и реальных условий работы панели определяют пересчетом по формулам (11)—(15).

Определение жесткостных параметров. Жесткость на единицу ширины панели при сжатии определяют как сумму жесткостей слоев

$$B = B_1 + B_2 + B_c. \quad (1)$$

Жесткость на единицу ширины панели при изгибе вычисляют как жесткость составного пакета из трех слоев относительно нейтральной поверхности

$$D = D_1 + D_2 + D_c + B_1 H_1^2 + B_2 H_2^2; \quad (2)$$

здесь

$$H_1 = h_1 + \frac{\delta_1}{2}; \quad H_2 = h_2 + \frac{\delta_2}{2}; \quad h_1 = h - h_0; \quad h_2 = h + h_0;$$

$$h_0 = \frac{B_1}{B} \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right) - \frac{B_2}{B} \left(h + \frac{\delta_2}{2} \right).$$

Жесткости при растяжении (B_1, B_2) и при изгибе (D_1, D_2) на единицу ширины листа первого и второго внешнего слоя

$$B_1 = \frac{E_1 \delta_1}{1 - \nu_1^2}; \quad B_2 = \frac{E_2 \delta_2}{1 - \nu_2^2};$$

$$D_1 = \frac{E_1 \delta_1^3}{12 (1 - \nu_1^2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 \delta_2^3}{12 (1 - \nu_2^2)}.$$

В случае оболочки симметричного строения $\delta_1 = \delta_2$; $B_1 = B_2$; $h_0 = 0$ (одинаковые внешние слои) формулы (1) и (2) соответственно упрощаются:

$$B = 2B_1 + B_c; \quad D = 2D_1 + D_c + 2B_1 \left(h + \frac{\delta_1}{2} \right)^2.$$

После определения жесткостных параметров панели вычисляют параметр сдвига k по формуле

$$k = \frac{\pi^2 B_0 h}{2G b^2}; \quad (3)$$

здесь

$$B_0 = B_1 + B_2 + \frac{1}{3} B_c - \frac{1}{B} (B_1 - B_2)^2;$$

$$D_0 = D_1 \left[1 + \frac{2B_c}{BB_0} \left(B_2 + \frac{1}{2} B_c \right) \right] + D_2 \left[1 + \frac{2B_c}{BB_0} \left(B_1 + \frac{1}{2} B_c \right) \right] + \frac{B_c B_1 B_2}{6BB_0} (\delta_1 - \delta_2)^2.$$

В случае оболочки с одинаковыми внешними слоями

$$B_0 = 2B_1 + \frac{1}{3} B_c; \quad D_0 = 2D_1 + \frac{2B_c}{B_0}.$$

Входящие в приведенные формулы жесткости заполнителя при сжатии B_c и изгибе D_c на единицу ширины панели, а также приведенный модуль сдвига заполнителя G_c определяют в зависимости от вида заполнителя по следующим формулам.

Сплошной изотропный заполнитель (типа пенопласта)

$$B_c = \frac{2E_c h}{1 - \nu_c^2}; \quad D_c = \frac{E_c (h_1^3 + h_2^3)}{3(1 - \nu_c^2)}; \quad G = G_c. \quad (4)$$

Сотовый заполнитель. Для сотового заполнителя из тонкой фольги

$$B_c = 0; \quad D_c = 0 \quad (5)$$

(см. рис. 4, а гл. 9).

Значение приведенного модуля сдвига G заполнителя определяется по формулам гл. 9 в зависимости от ориентации сот. В случае, если двойные стенки сот (пластинки 4 на рис. 4, а гл. 9) совпадают с направлением действия нагрузки, принимают $G = G_{xz}$; в случае, если двойные стенки сот перпендикулярны направлению нагрузки, $G = G_{yz}$.

Гофрированный и складчатый заполнитель. Для гофрированного (см. рис. 4, б гл. 9) и складчатого (см. рис. 4, в гл. 9) заполнителя значения жесткостей B_c , D_c и приведенного модуля сдвига G определяют в зависимости от ориентации складок листа заполнителя. В случае, если направление складок совпадает с направлением действия нагрузки, принимают

$$B_c = 2E_x h; \quad D_c = \frac{E_x (h_1^3 + h_2^3)}{3}; \quad G = \infty \quad (k = 0). \quad (6)$$

В случае, если направление складок перпендикулярно направлению действия нагрузки, принимают

$$B_c = 0; \quad D_c = 0; \quad G = G_{yz}. \quad (7)$$

Значения приведенного модуля упругости E_x и приведенного модуля сдвига G_{yz} гофрированного и складчатого заполнителя определяют по формулам гл. 9.

Заполнитель из армированного пенопласта. Жесткости B_c , D_c и приведенный модуль сдвига G армированного пенопласта (см. рис. 13 гл. 9) определяют в зависимости от направления армирующих ребер; если направление последних совпадает с направлением действия нагрузки, то принимают

$$B_c = \frac{2E_x h}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad D_c = \frac{E_x (h_1^3 + h_2^3)}{3(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}; \quad G = G_{xz}. \quad (8)$$

Если направление армирующих ребер перпендикулярно к направлению действия нагрузки, то

$$B_c = \frac{2E_y h}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad D_c = \frac{E_y (h_1^3 + h_2^3)}{3(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}; \quad G = G_{yz}. \quad (9)$$

Значения приведенных модулей упругости E_x , E_y , приведенных модулей сдвига G_{xz} , G_{yz} и коэффициентов Пуассона ν_{xy} , ν_{yx} армированного пенопласта определяют по формулам гл. 9.

Определение нагрузки N_e . Значение критической нагрузки N_e на единицу ширины панели в предположении упругой работы конструкции определяют по формуле

$$N_e = \frac{\pi^2 D}{b^2} m_t. \quad (10)$$

Безразмерный критический параметр m_t определяют решением уравнений устойчивости пластинки в зависимости от условий опирания нагруженных кромок 1, 2 (см. рис. 1):

при шарнирно опертых кромках

$$m_t = \frac{1}{1 + k};$$

при защемленных кромках

$$m_t = \frac{4}{1 + 4k};$$

когда одна из кромок защемлена, а другая свободна (консольная пластинка)

$$m_t = \frac{1}{4 + k};$$

когда одна из кромок защемлена, а другая шарнирно оперта m_t определяют по кривой 3 на рис. 2, в.

Определение действительной критической нагрузки с учетом работы материала внешних слоев за пределом пропорциональности и реальных условий работы панели производят путем пересчета критического напряжения, найденного в предположении идеализированной упругой работы конструкции.

Этот пересчет осуществляют в следующем порядке.

Определяют критические напряжения во внешних слоях пластинки в предположении идеализированной упругой работы конструкции

$$\sigma_{1e} = \frac{B_1 N_e}{B \delta_1}; \quad \sigma_{2e} = \frac{B_2 N_e}{B \delta_2}. \quad (11)$$

Значения σ_{ie} для каждого из слоев ($i = 1, 2$) с помощью формул (13)—(15), приведенных ниже, пересчитывают в действительные критические напряжения σ_{ik} ($i = 1, 2$) для каждого из слоев в зависимости от значений (для данного слоя) предела прочности $\sigma_{\theta i}$, предела пропорциональности $\sigma_{пци}$, а в случае явно выраженной площадки текучести — в зависимости от предела текучести σ_{Ti} .

1. Значения критических коэффициентов m_t и m_s для панелей при $\frac{a}{b} > 3$ (удлинение)

	Пластинки (рис. 3)			Цилиндрические панели (рис. 4)
	Условия опирания *			
	Кромки 1 и 2 шарнирно оперты	Кромки 1 и 2 защемлены	Кромка 1 защемлена, кромка 2 шарнирно оперта	
Сжатие N_x ; $N_y = T = 0$	$m_t = \frac{4}{(1+k)^2}$	m_t по кривой 1 на рис. 2, в	m_t по кривой 2 на рис. 2, в	m_t по рис. 2, д
Сдвиг T ; $N_x = N_y = 0$	m_s по кривой 2 на рис. 2, а	m_s по кривой 1 на рис. 2, а	—	m_s по рис. 2, б
Сжатие N_y и сдвиг T ; $N_x = 0$	m_t и m_s на рис. 2, г	m_t и m_s сплошным линиям на рис. 2, е	—	—
Сжатие N_x и сдвиг T ; $N_y = 0$	m_t и m_s по штриховым кривым на рис. 2, е	—	—	—

* Кромки 3 и 4 закреплены произвольным способом.

* Кромки 3 и 4 закреплены произвольным способом.

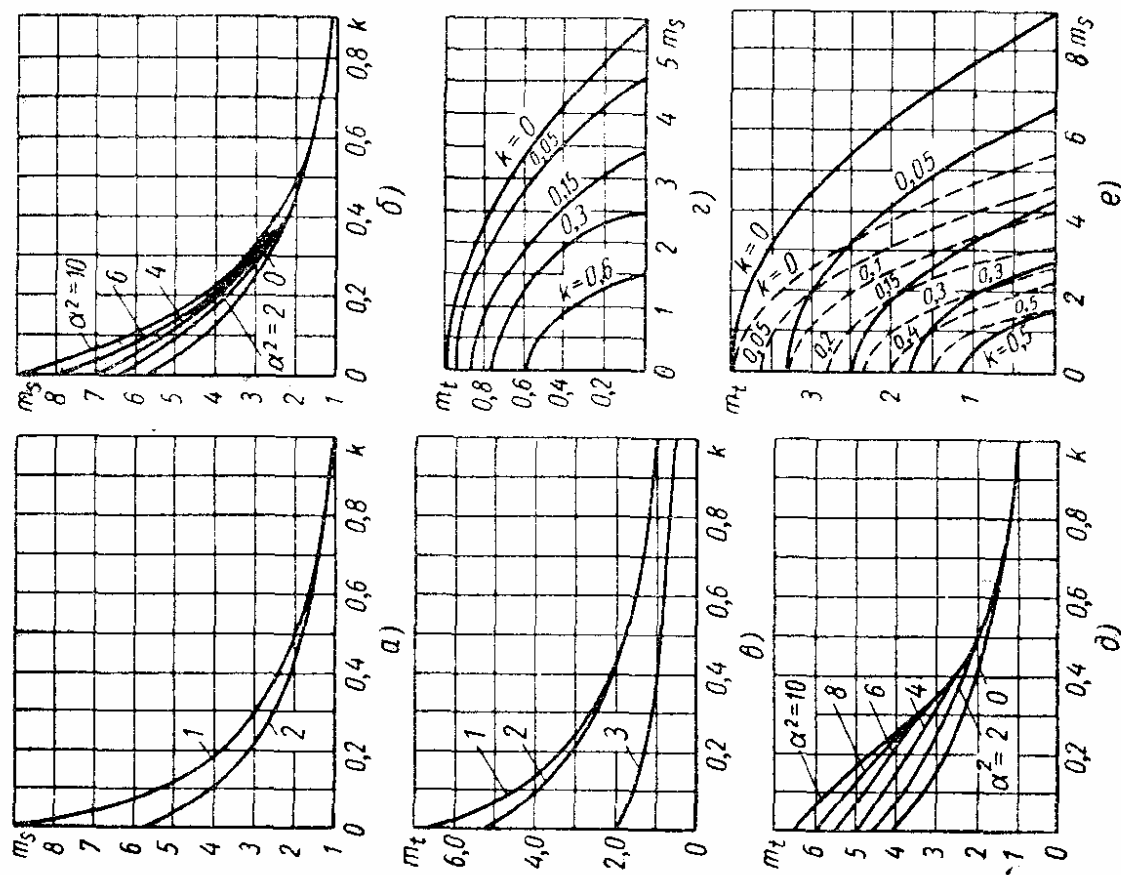


Рис. 2

По найденным значениям $\sigma_{1к}$, $\sigma_{2к}$ определяют действительные критические усилия на единицу ширины пластинки по формулам

$$N_k = \sigma_{1к} \frac{B\delta_1}{B_1}; \quad N_k = \sigma_{2к} \frac{B\delta_2}{B_2}. \quad (12)$$

Из двух значений N_k выбирают меньшее, которое принимают за действительную критическую нагрузку.

В случае, если внешние слои выполнены из одинакового материала, для определения действительной критической нагрузки достаточно расчета по одному из внешних слоев. В этом случае критическое напряжение во внешних слоях в предположении упругой работы конструкции рассчитывают по любой из формул (11). Далее производится пересчет этого напряжения по одной из формул (13)—(15). Действительные критические усилия рассчитывают по любой из формул (12).

Определение действительного критического напряжения. Если внешние слои выполнены из материала, не имеющего явно выраженной площадки текучести, действительное критическое напряжение определяется по величине σ_{ie} ($i = 1, 2$) с помощью одного из следующих приближенных приемов.

Первый способ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ik} &= \eta \sigma_{ie} \text{ при } \sigma_{ie} < \sigma_{nci}; \\ \sigma_{ik} &= \eta \left[\sigma_{vi} - (\sigma_{vi} - \sigma_{nci}) \sqrt{\frac{\sigma_{nci}}{\sigma_{ie}}} \right] \\ &\text{при } \sigma_{ie} > \sigma_{nci}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Второй способ

$$\sigma_{ik} = \eta \sigma_{vi} \frac{1 + \psi_i}{1 + \psi_i + \psi_i^2}, \quad (14)$$

где

$$\psi_i = \frac{\sigma_{vi}}{\sigma_{ie}}.$$

В формулах (13) и (14) $i = 1$ для первого внешнего слоя, $i = 2$ для второго.

Расчет по формулам (13) дает лучшие результаты (более близкие к экспериментальным) в тех случаях, когда $\sigma_{ie} < \sigma_{nci}$ или σ_{ie} незначительно превосходит σ_{nci} . Расчет по формулам (14) дает лучшие результаты в тех случаях, когда σ_{ie} значительно превосходит σ_{nci} .

Для материалов с явно выраженной площадкой текучести (мягкая сталь) σ_{ik} рассчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ik} &= \eta \sigma_{ie} \text{ при } \sigma_{ie} < \sigma_{Ti}; \\ \sigma_{ik} &= \eta \sigma_T \text{ при } \sigma_{ie} > \sigma_{Ti}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Значение коэффициента η . Коэффициент η в формулах (13)—(15) назначают в пределах 0,80—1,0; он зависит от качества изготовления панелей.

Прямоугольные плоские и цилиндрические панели

Сплошной изотропный наполнитель (типа пенопласта). Определение жесткостей. Жесткость изгиба D , сжатия B и параметр сдвига k определяют по формулам (1)–(4). При вычислении параметра сдвига k по формуле (3) размер b берут в соответствии с обозначениями на рис. 3 или 4.

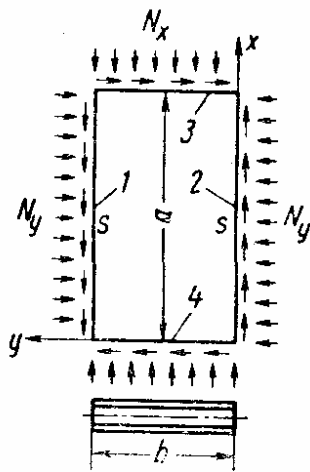


Рис. 3

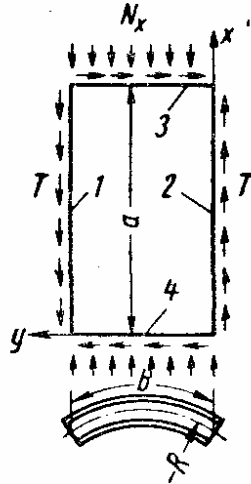


Рис. 4

При расчетах цилиндрических панелей вычисляют также параметр кривизны α^2 по формуле

$$\alpha^2 = \frac{b^4 (1 - \nu^2) B}{\pi^4 R^2 D}, \quad (16)$$

где ν — среднее значение коэффициента Пуассона:

$$\nu = \frac{1}{B} (B_1 \nu_1 + B_2 \nu_2 + B_c \nu_c).$$

Порядок определения критических нагрузок. В зависимости

от параметров, условий опирания и нагружения панелей определяют значения критических усилий N_{xe} , N_{ye} , T_e на единицу ширины панели в предположении упругой работы конструкции. При этом используют формулы (20), табл. 1 и 2 и графики на рис. 2, 5–7.

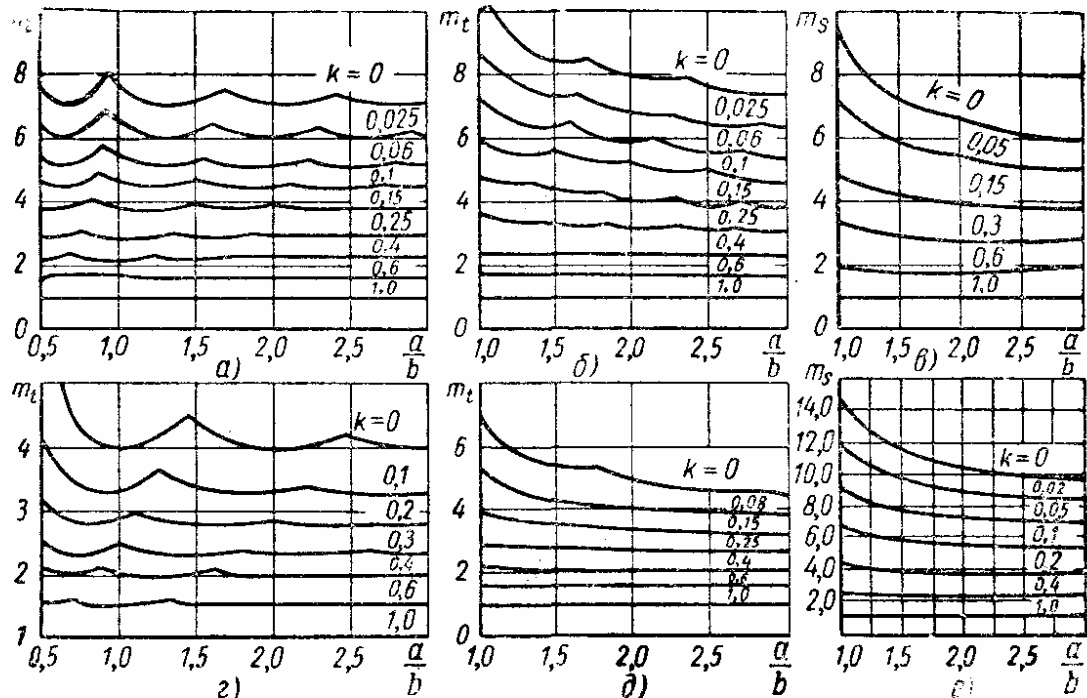


Рис. 5

Действительную критическую нагрузку с учетом работы конструкции за пределом пропорциональности находят также пересчетом критического напряжения, найденного в предположении упругой работы конструкции, в действительное критическое напряжение.

При совместном действии нагрузок на панель определяют интенсивность критических усилий в предположении упругой работы кон-

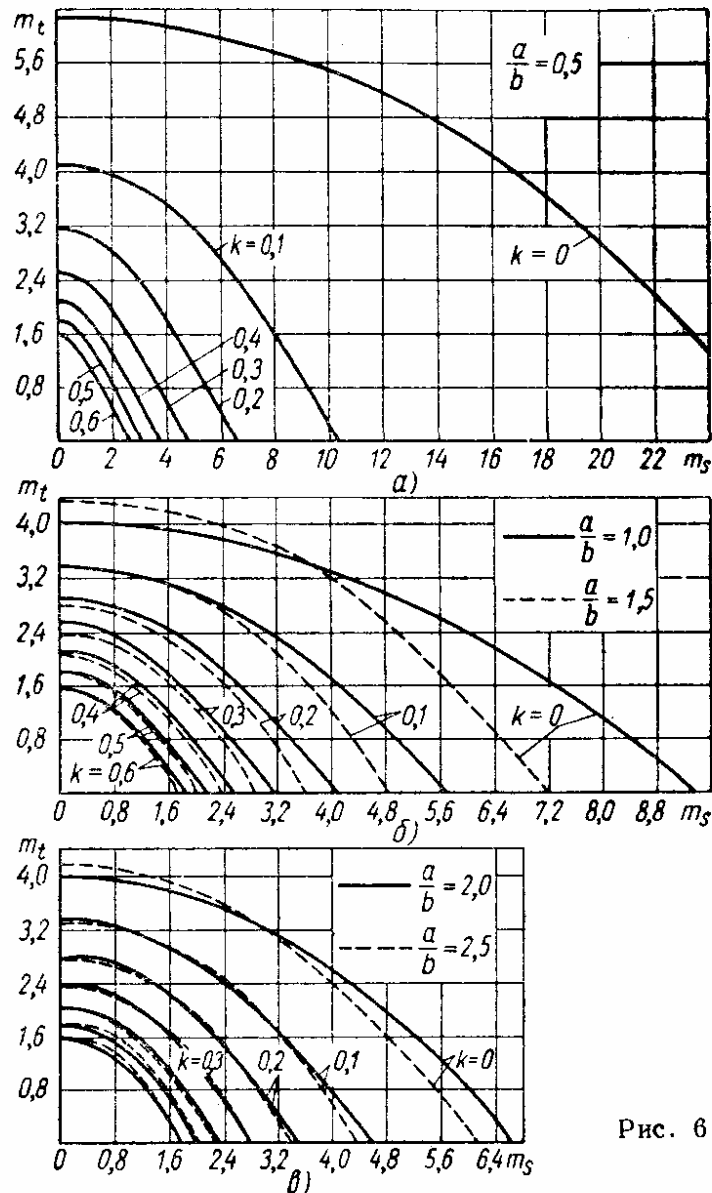


Рис. 6

струкции, которая и является исходной величиной для пересчета по формулам на стр. 271—273.

Интенсивность усилий в случае совместного действия нагрузок

$$N_e^* = \sqrt{N_{xe}^2 + N_{ye}^2 - N_{xe}N_{ye} + 3T_e^2}. \quad (17)$$

Значение N_e^* вводят далее в формулы (11)—(15), полагая $N_e^* = N_e$, и определяют меньшее из двух значений N_k (см. стр. 273).

Действительные критические нагрузки определяют по формулам

$$N_{xk} = \varphi N_{xe}; \quad N_{yk} = \varphi N_{ye}; \quad T_k = \varphi T_e, \quad (18)$$

где

$$\varphi = \frac{N_k}{N_e}. \quad (19)$$

Определение нагрузок N_{xe} , N_{ye} , T_e . Критические нагрузки N_{xe} , N_{ye} , T_e на единицу ширины панели в предположении

2. Значения критических коэффициентов m_t , m_s для панелей при $\frac{a}{b} < 3,0$

Условия нагружения	Пластинки (см. рис. 3)				Цилиндрические панели (см. рис. 4)			
	Условия опирания							
	Все кромки шарнирно оперты	Все кромки защемлены	Кромки 1, 2 защемлены; кромки 3, 4 шарнирно оперты	Кромки 1, 2 шарнирно оперты; кромки 3, 4 защемлены	Все кромки шарнирно оперты	Кромки 1, 2 шарнирно оперты; кромки 3, 4 защемлены	Кромки 1, 2 защемлены; кромки 3, 4 шарнирно оперты	
Сжатие N_x ; $N_y = T = 0$	m_t по рис. 5, а	m_t по рис. 5, б	m_t по рис. 5, а	m_t по рис. 5, б или по формуле (21а)	m_t по рис. 7, а	m_t по рис. 7, б	m_t по рис. 7, в	
Сдвиг T ; $N_x = N_y = 0$	m_s по рис. 5, а	m_s по рис. 5, е	—	—	—	—	—	
Сжатие N_x со сдвигом T ; $N_y = 0$	m_t и m_s по рис. 6, а—в	—	—	—	—	—	—	

упругой работы конструкции при сжатии, сдвиге и совместном действии сжатия и сдвига определяют по формулам

$$N_e = \frac{\pi^2 D}{b^2} m_t;$$

$$T_e = \frac{\pi^2 D}{b^2} m_s. \quad (20)$$

Значения m_t и m_s в зависимости от условий опирания кромок панели и условий нагружения в случае удлиненных панелей $\left(\frac{a}{b} > 3,0\right)$ определяют по табл. 1, в других случаях — по табл. 2.

В случае совместного действия сдвига и сжатия для раздельного определения m_t и m_s задают отношение

$$\frac{m_t}{m_s} = \frac{N}{T}, \quad (21)$$

где N и T — расчетные значения соответствующих нагрузок. Далее с помощью графиков, указанных в табл. 1 и 2, определяют раздельно значения m_t и m_s .

При $\alpha^2 \geq \frac{1-k}{k^2}$, $\delta_1 = \delta_2$ и при условии, что $\alpha \gg \frac{\delta_1}{1,73(2h+\delta_1)}$, m_t сжатой цилиндрической панели можно находить по формуле

$$m_t = \frac{\alpha \delta_1}{0,86(2h + \delta_1)} + \frac{1,73\alpha(2h + \delta_1)}{\delta_1(1-k) + 1,73k\alpha(2h + \delta_1)}. \quad (21a)$$

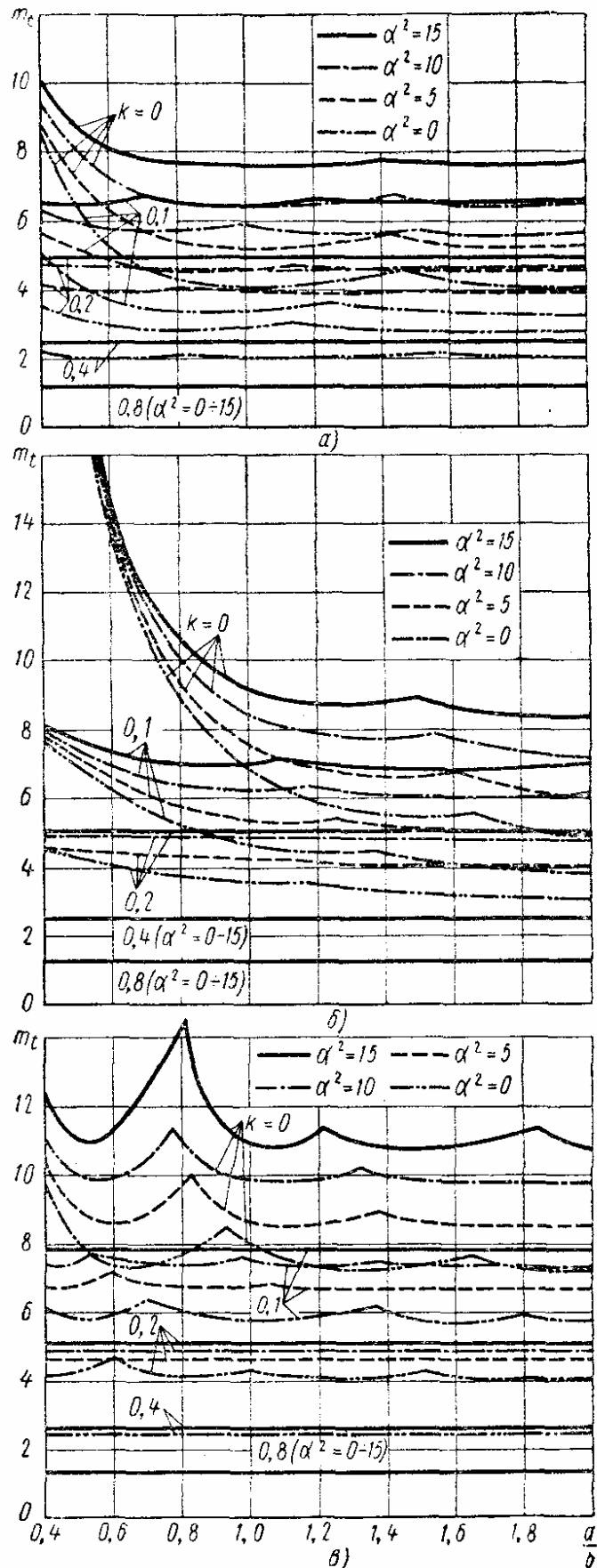


Рис. 7

Сотовый наполнитель. При расчете пластинки с сотовым наполнителем из тонкой фольги (см. рис. 4, а гл. 9) на устойчивость при сжатии в условиях цилиндрического изгиба используют формулы (1)–(15).

Прямоугольные панели и удлиненные панели при различных вариантах нагружения и опирания рассчитывают по формулам (16)–(21а). При этом жесткости B , D и параметр k определяют по формулам (1)–(3), в которых принимают

$$B_c = 0; D_c = 0; G = \frac{1}{2} (G_{xz} + G_{yz}). \quad (22)$$

Приведенные модули сдвига сотового наполнителя G_{xz} и G_{yz} определяют по формулам, приведенным на стр. 256–257.

При расчетах цилиндрических панелей параметр кривизны α^2 определяют по формуле (16), где

$$\nu = \frac{1}{B} (B_1 \nu_1 + B_2 \nu_2); B_c = 0; D_c = 0. \quad (23)$$

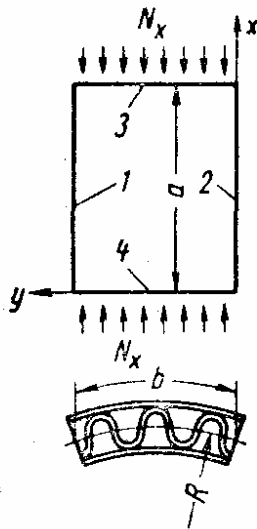


Рис. 8

Гофрированный или складчатый наполнитель.

При расчете пластинок с гофрированным (рис. 4, б гл. 9) или складчатым (рис. 4, в гл. 9) наполнителем на устойчивость при сжатии в условиях цилиндрического изгиба используют формулы (1)–(15).

При расчете прямоугольных плоских и цилиндрических панелей, шарнирно опертых по четырем кромкам (1–4), при сжатии вдоль складок наполнителя (рис. 8) определяют жесткости сжатия B_x и изгиба D_x панелей в направлении складок и жесткости B_y и D_y в направлении, перпендикулярном складкам. Значения B_x и D_x определяют по формулам (1), (2) для B и D , в которых принимают

$$B_c = 2E_x h; D_c = \frac{E_x (h_1^3 + h_2^3)}{3}. \quad (24)$$

При вычислении значений B_y и D_y принимают $B_c = 0; D_c = 0$; определяют параметр ψ , параметр сдвига k и параметр кривизны α по формулам

$$\psi = \frac{2E_x h}{B_y}; k = \frac{\pi^2 B_{y0} h}{2G_{yz} b^2}; \alpha^2 = \frac{b^4 (1 - \nu^2) B_y}{\pi^4 R^2 D_y}, \quad (25)$$

где

$$B_{y0} = B_1 + B_2 - \frac{1}{B_y} (B_1 - B_2)^2; \nu = \frac{B_1 \nu_1 + B_2 \nu_2}{B_y}. \quad (26)$$

Значения приведенного модуля упругости E_x и приведенного модуля сдвига G_{yz} гофрированного и складчатого наполнителя определяют по формулам, приведенным в гл. 9 (стр. 258–263).

Значение критической нагрузки N_{xe} на единицу ширины панели в предположении упругой работы конструкции определяют по формуле

$$N_{xe} = \frac{\pi^2 D_y}{b^2} m_t. \quad (27)$$

Значение коэффициента m_t определяют по графикам на рис. 9 и 10

в зависимости от значений α , ψ , k и $\frac{a}{b}$.

Действительную критическую нагрузку $N_{\text{кк}}$ определяют по формулам (11)–(15), в которые вводят $N_e = N_{\text{ке}}$, $B = B_x$.

Нагрузку $N_{\text{к}}$, полученную расчетом по формулам (12), принимают за действительную критическую нагрузку $N_{\text{кк}}$.

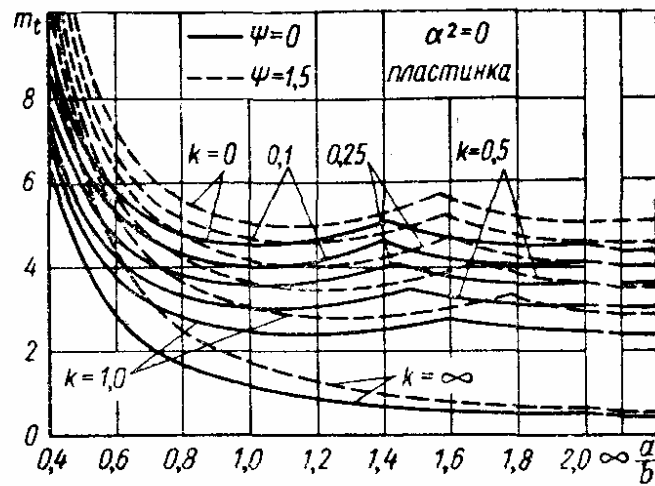


Рис. 9

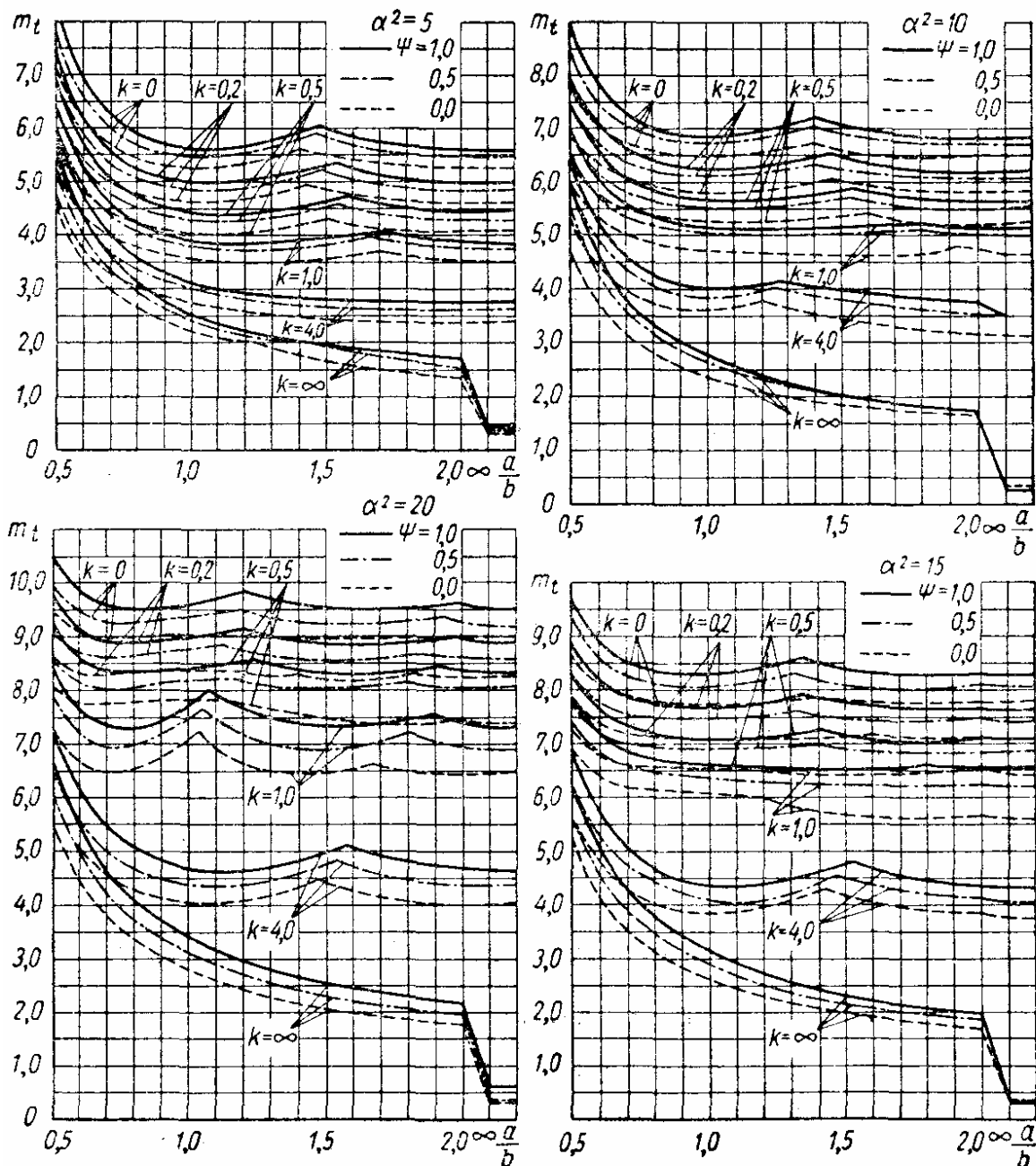


Рис. 10

Замкнутые цилиндрические оболочки

Определение жесткостей и расчетных параметров. Для трехслойных цилиндрических оболочек (рис. 11) со сплошным изотропным заполнителем (типа пенопласта) и с сотовым заполнителем из тонкой фольги жесткости B , D , B_0 и D_0 определяют по формулам, приведенным на стр. 269—270, где для сплошного заполнителя принимают значения B_c , D_c и G согласно формулам (4), а для сотового заполнителя полагают

$$B_c = 0; D_c = 0; G = \frac{1}{2} (G_{xz} + G_{yz}). \quad (28)$$

Приведенные модули сдвига сотового заполнителя G_{xz} , G_{yz} определяют по формулам гл. 9 (стр. 256—257), как для плоской пластинки.

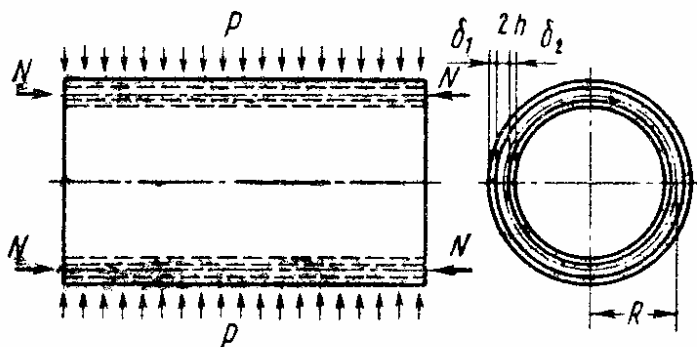


Рис. 11

Расчетные параметры определяют по формулам

$$r = \frac{B_0 h}{2GR^2}; \quad \beta^2 = \frac{(1 - \nu^2) R^2 B}{D - D^0}; \quad g^2 = \frac{D^0}{D - D^0}; \quad \lambda = \frac{\pi R}{a}, \quad (29)$$

где

$$\nu = \frac{B_1 \nu_1 + B_2 \nu_2 + B_c \nu_c}{B}. \quad (30)$$

Порядок определения критических нагрузок. При действии на цилиндрическую шарнирно опертую оболочку (см. рис. 11) продольной сжимающей нагрузки, внешнего давления, крутящего и изгибающего моментов, а также при совместном действии нагрузок критические значения усилий и моментов в предположении упругой работы конструкции определяют по формулам

$$N_e = m_t \frac{(D - D^0) \beta}{R^2}; \quad (31)$$

$$p_e = m_p \frac{(D - D^0) \beta}{R^3}; \quad (32)$$

$$M_{кр, e} = m_s \cdot 2\pi (D - D^0) \beta; \quad (33)$$

$$M_{и, e} = m_a \pi (D - D^0) \beta; \quad (34)$$

здесь N_e — критическое сжимающее усилие на единицу длины окружности; p_e — критическое внешнее равномерно распределенное давление;

$M_{кр, e}$ и $M_{и, e}$ — критические значения крутящего и изгибающего моментов, приложенных к торцам оболочки.

В случае сжатия для определения m_t используют формулу (37) и графики на рис. 12; в случае давления m_p определяют по формуле (38)

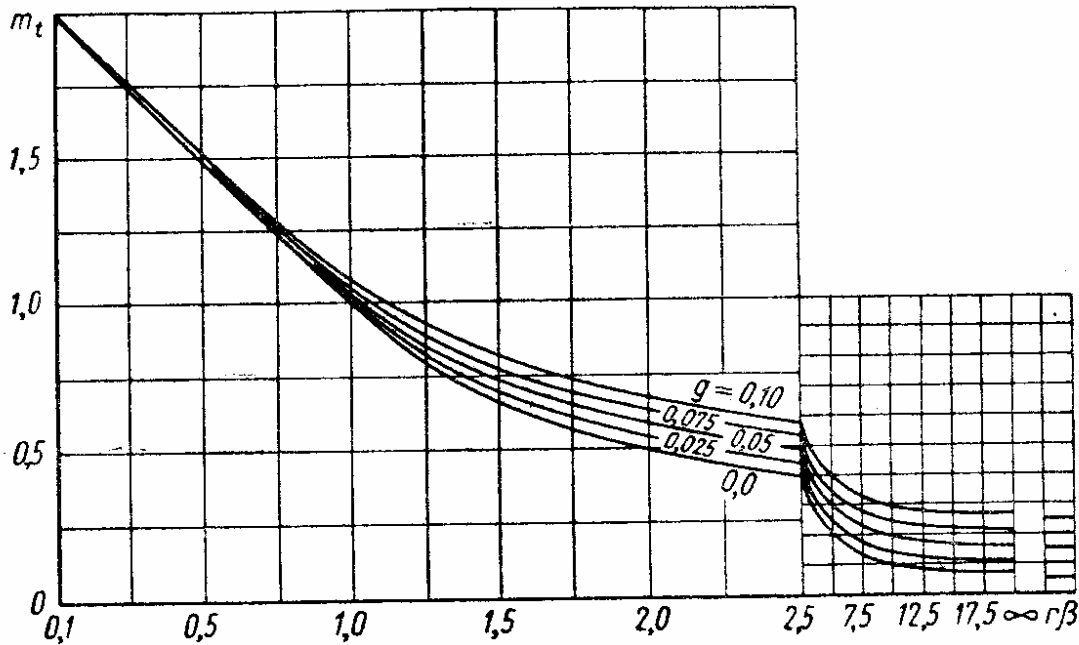


Рис. 12

и графикам на рис. 13, а и б; при совместном действии сжатия и давления задают отношение

$$\frac{m_t}{m_p} = \frac{N}{pR}$$

(где N и p — расчетные значения нагрузок) и определяют m_t и m_p раздельно с помощью графиков на рис. 14, а—р; при кручении значение m_s определяют по графикам рис. 15, а—в или с помощью формул (39)—(41) и (42); при изгибе значение m_a определяют согласно формулам (37) и графикам рис. 12; при совместном действии сжатия и изгиба задают отношение

$$\frac{m_t}{m_a} = \pi R^2 \frac{N}{M_{и}}$$

(где N и $M_{и}$ — расчетные значения сжимающей нагрузки и изгибающего момента) и определяют m_t и m_a раздельно с помощью формулы (43); в случае совместного действия сжатия, внешнего давления и кручения задают отношения

$$\frac{m_p}{m_t} = \frac{pR}{N}; \quad \frac{m_s}{m_t} = 2\pi R^2 \frac{M_{кр}}{N}$$

(где N , p , $M_{кр}$ — расчетные значения сжимающей нагрузки, давления и крутящего момента) и определяют m_t , m_s и m_p раздельно с помощью графиков рис. 16 или формул (44)—(46).

Интенсивность усилий определяют по формуле

$$N_e^* = \sqrt{\left(N_e + \frac{M_{u,e}}{\pi R^2}\right)^2 + p_e^2 R^2 - p_e R \left(N_e + \frac{M_{u,e}}{\pi R^2}\right) + 3 \left(\frac{M_{kp}}{2\pi R^2}\right)^2}. \quad (35)$$

Значение N_e^* вводят в формулы, полагая $N_e^* = N_e$, и определяют меньшее из двух значений N_k по формулам (11)–(15), находят величину

$$\varphi = \frac{N_k}{N_e},$$

затем действительные критические нагрузки

$$N_k = \varphi N_e; p_k = \varphi p_e; M_{kp,k} = \varphi M_{kp,e}; M_{u,k} = \varphi M_{u,e}. \quad (36)$$

Определение критических коэффициентов m_t, m_p, m_s, m_a . Сжатие цилиндрической оболочки вдоль образующей. Значение m_t определяют по графику на рис. 12 в зависимости от параметров оболочки r, β и g [см. формулы (29)].

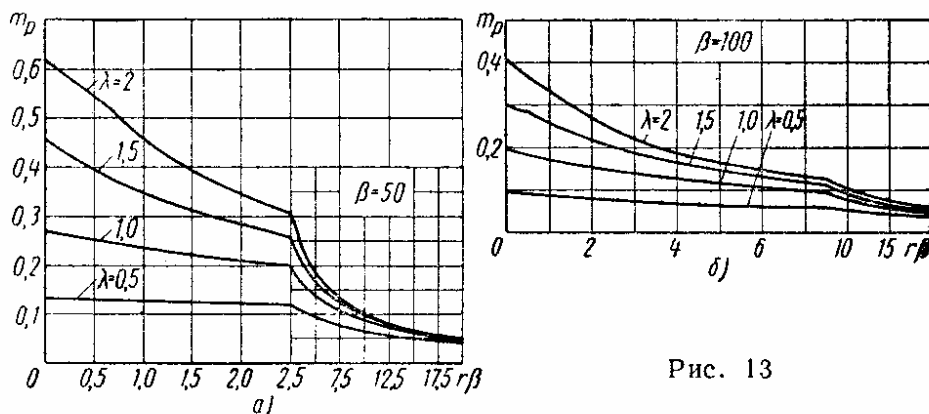


Рис. 13

Приблизительно значение m_t можно определить по одной из формул

$$\left. \begin{aligned} m_t &= 2 - r\beta \quad \text{при } r\beta < 1; \\ m_t &= \frac{1}{r\beta} + 2g \quad \text{при } r\beta > 1. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Равномерно распределенное внешнее давление. Значение m_p определяют в зависимости от параметров β, λ и r по графикам рис. 13, а и б.

Для случаев, не показанных на графиках, значение m_p определяют по формуле

$$m_p = \frac{1}{n^2 - 1} \left[\frac{(\lambda^2 + n^2)^3 + 1 - 2n^2}{\beta [1 + r(\lambda^2 + n^2)]} + \frac{g^2 (\lambda^2 + n^2)^2}{\beta} + \frac{\beta \lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right]. \quad (38)$$

Число $n = 2, 3, 4, \dots$ выбирают из условия получения наименьшего значения m_p .

Одновременное действие продольного сжатия и равномерно распределенного внешнего давления. Значения m_t и m_p связаны между собой зависимостями, которые показаны на рис. 14, а—р. Сплошные линии относятся к случаю $g = 0$, пунктирные — к $g = 0,1$.

К р у ч е н и е о б о л о ч к и. Значение m_s определяют по графикам на рис. 15 в зависимости от параметров оболочки β , r , λ .

Для случаев, не показанных на графиках, значение m_s находят в следующем порядке.

Определяют значения ψ_1 и ψ_2 решением системы уравнений

$$\frac{1}{\psi_1} \left[\frac{\beta \psi_1^4}{(\psi_1^2 + n^2)^2} + \frac{(\psi_1^2 + n^2)^2 + 1 - 2n^2}{\beta [1 + r (\psi_1^2 + n^2)]^2} + \frac{g^2}{\beta} (\psi_1^2 + n^2)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{\psi_2} \left[\frac{\beta \psi_2^4}{(\psi_2^2 + n^2)^2} + \frac{(\psi_2^2 + n^2)^2 + 1 - 2n^2}{\beta [1 + r (\psi_2^2 + n^2)]} + \frac{g^2}{\beta} (\psi_2^2 + n^2)^2 \right]; \quad (39)$$

$$\psi_1 - \psi_2 = 2\lambda. \quad (40)$$

Затем вычисляют m_s по формуле

$$m_s = \frac{n}{2\psi_1 (n^2 - 1)} \left[\frac{\beta \psi_1^4}{(\psi_1^2 + n^2)^2} + \frac{(\psi_1^2 + n^2)^2 + 1 - 2n^2}{\beta [1 + r (\psi_1^2 + n^2)]} + \frac{g^2}{\beta} (\psi_1^2 + n^2)^2 \right]. \quad (41)$$

Рассчитывают для ряда значений $n = 2, 3, 4, \dots$, из которых выбирают n , соответствующее наименьшему значению m_s .

Для длинной оболочки минимальное значение m_s можно определять по одной из формул

$$\left. \begin{aligned} m_s &= \frac{2}{\sqrt[4]{3} \sqrt{\beta}} \sqrt[4]{\left[\frac{1}{1 + 4r} + \frac{16}{9} g^2 \right]^3}; \\ m_s &= \left(\frac{1}{r\beta} + 2g \right) \frac{1}{\sqrt{1 + 2gr\beta}}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

В расчет принимают меньшее из двух значений m_s , определенных по формулам (42).

И з г и б о б о л о ч к и. Значение m_a при изгибе принимают равным значению m_t при сжатии, определяемому согласно формулам (37) и графикам на рис. 12.

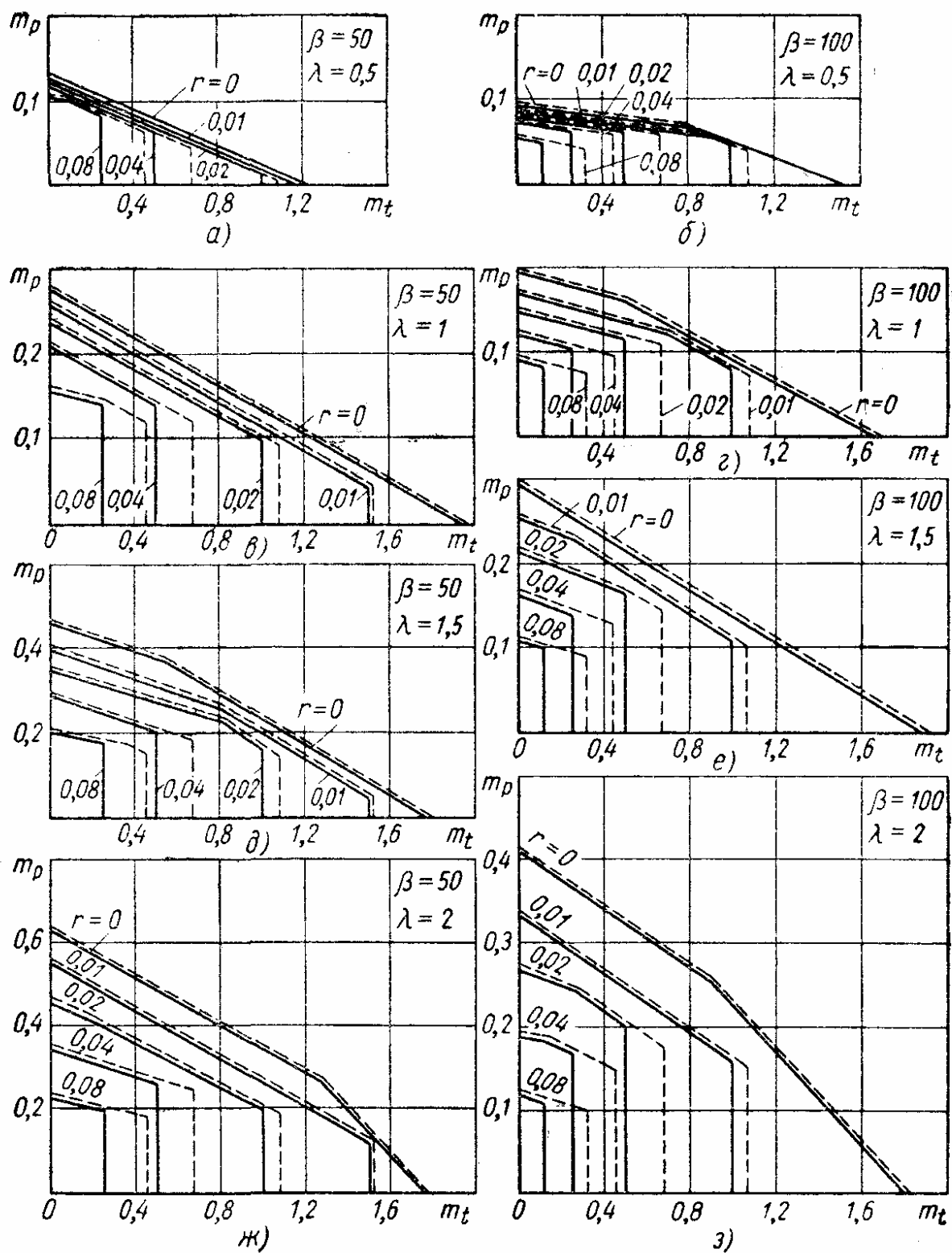


Рис. 14

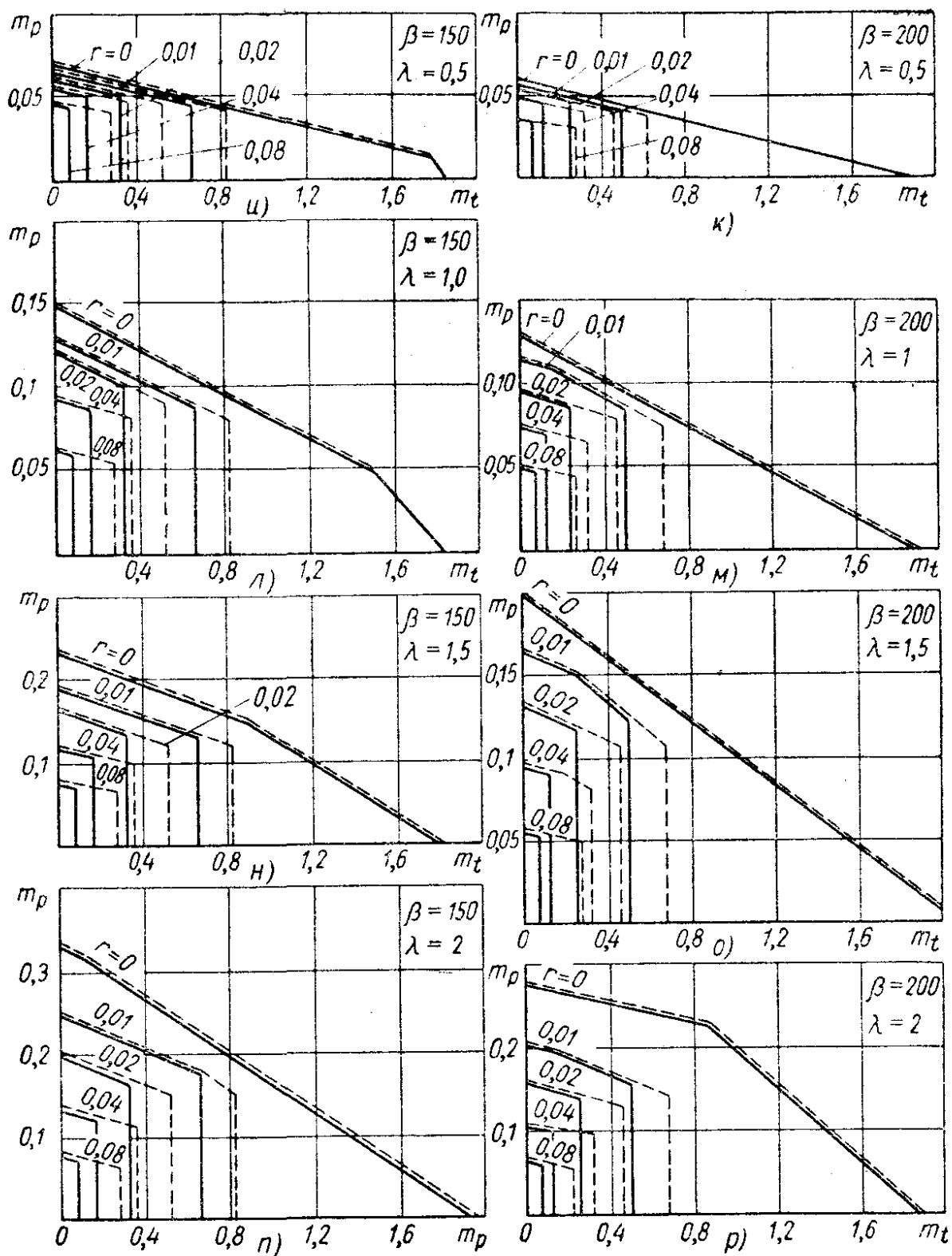


Рис. 14 (продолжение)

Совместное действие изгиба и сжатия. При совместном действии изгиба и сжатия значения m_t и m_a связаны зависимостью

$$m_t + m_a = m_t^* \quad (43)$$

Величину m_t^* понимают как значение m_t , соответствующее чистому

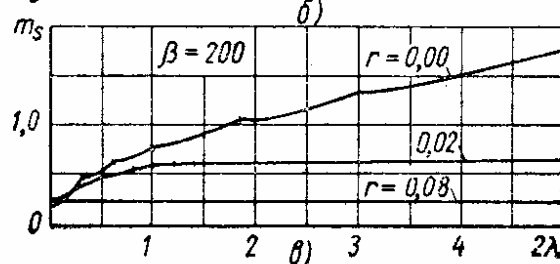
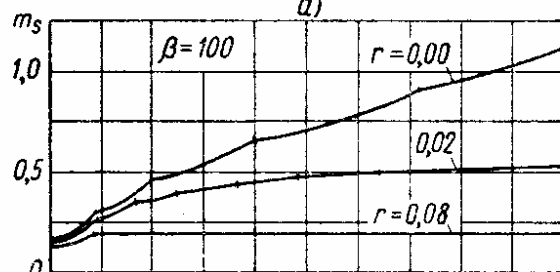
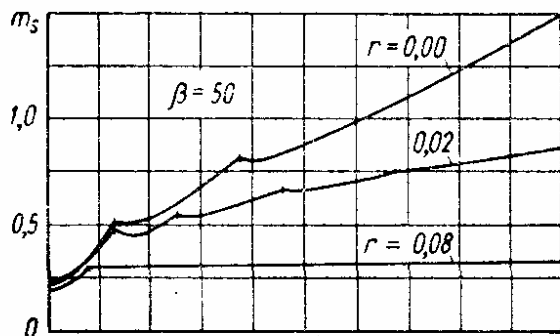


Рис. 15

сжатию.

При расчетах по формуле (43) должно быть задано отношение $\frac{m_t}{m_a}$.

Совместное действие сжатия, внешнего давления и кручения. Значения m_t , m_p и m_s связаны зависимостями, показанными на графиках рис. 16—18.

В случаях, не учтенных на графиках при заданных отношениях

$$\frac{m_p}{m_t} = \alpha, \quad \frac{m_s}{m_t} = \gamma$$

находят значения ψ_1 , ψ_2 , m_t решением уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{n^2 + 1}{n^2} \psi_1^2 m_t + (n^2 - 1) \times \\ & \times m_p + 2\psi_1 n \frac{n^2 - 1}{n^2} m_s = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\psi_1^2 + n^2)^2 + 1 - 2n^2}{\beta [1 + r(\psi_1^2 + n^2)]} + \frac{\beta \psi_1^4}{(\psi_1^2 + n^2)^2} + \frac{g^2}{\beta} (\psi_1^2 + n^2)^2; \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{n^2 + 1}{n^2} \psi_2^2 m_t + (n^2 - 1) m_p + 2\psi_2 n \frac{n^2 - 1}{n^2} m_s = \\ & = \frac{(\psi_2^2 + n^2)^2 + 1 - 2n^2}{\beta [1 + r(\psi_2^2 + n^2)]} + \frac{\beta \psi_2^4}{(\psi_2^2 + n^2)^2} + \frac{g^2}{\beta} (\psi_2^2 + n^2)^2; \quad (45) \end{aligned}$$

$$\psi_1 - \psi_2 = 2\lambda m. \quad (46)$$

Расчет выполняют для ряда значений $n = 2, 3, 4, \dots$, и $m = 1, 2, 3, \dots$, из которых выбираются m и n , соответствующие наименьшему значению m_t .

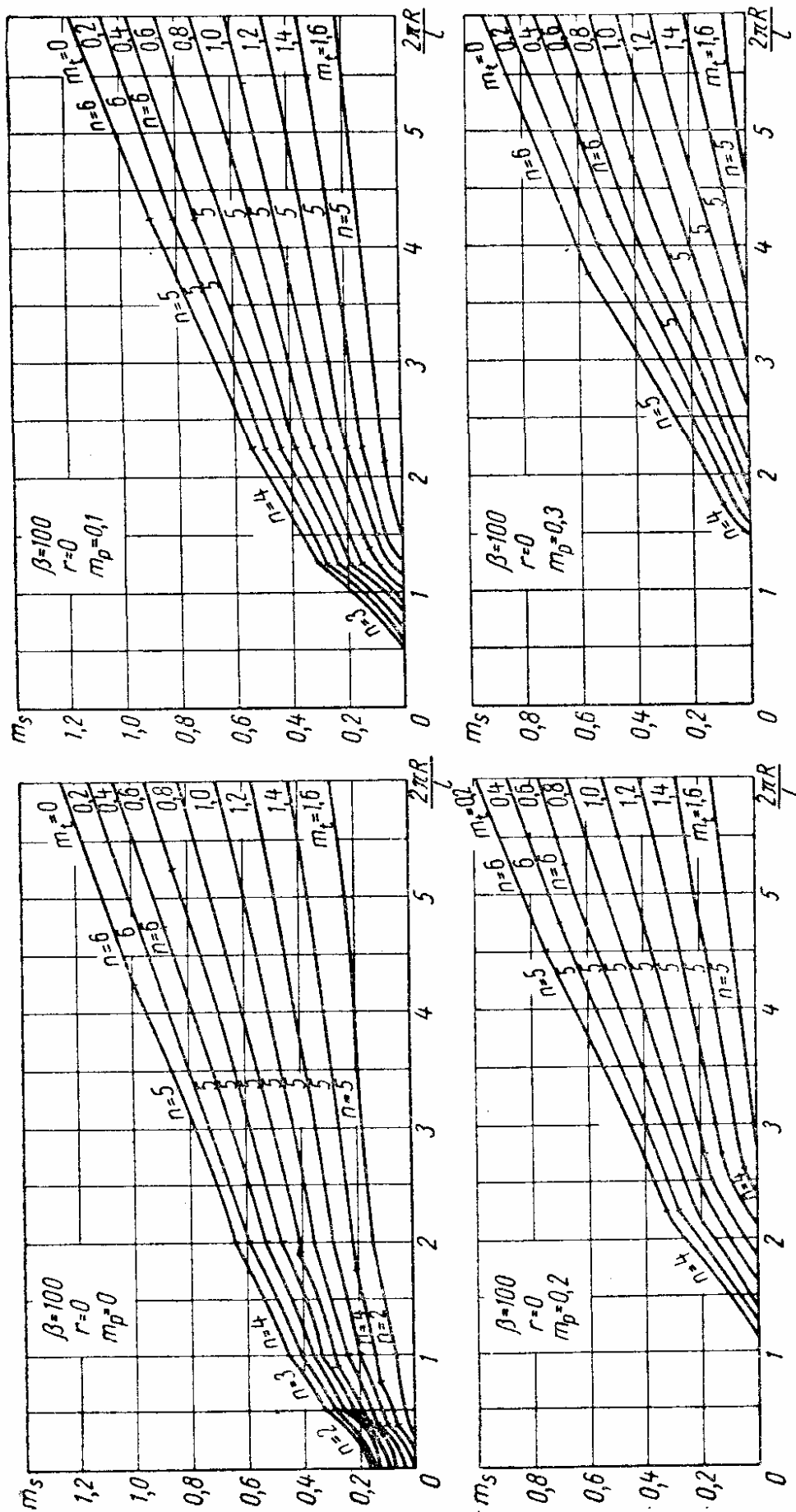


Рис. 16

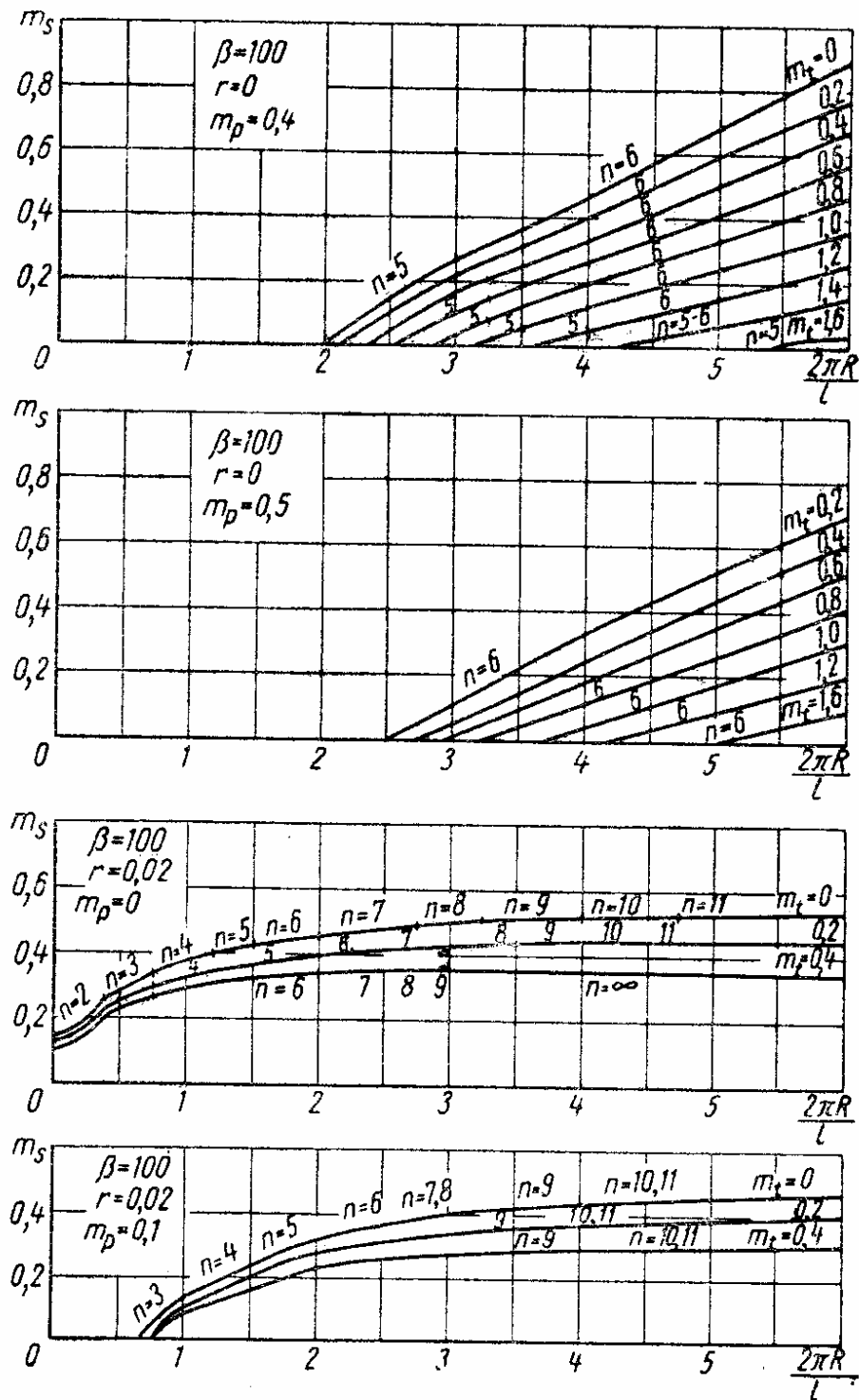


Рис. 17

Значения m_p и m_s определяют по формулам

$$m_p = \alpha m_t, \quad m_s = \gamma m_t. \quad (47)$$

При больших значениях параметра $r\beta$ для расчета можно использовать формулу

$$m_s + \frac{1}{2} m_t + \frac{1}{2} m_p = \frac{1}{r\beta} + g. \quad (48)$$

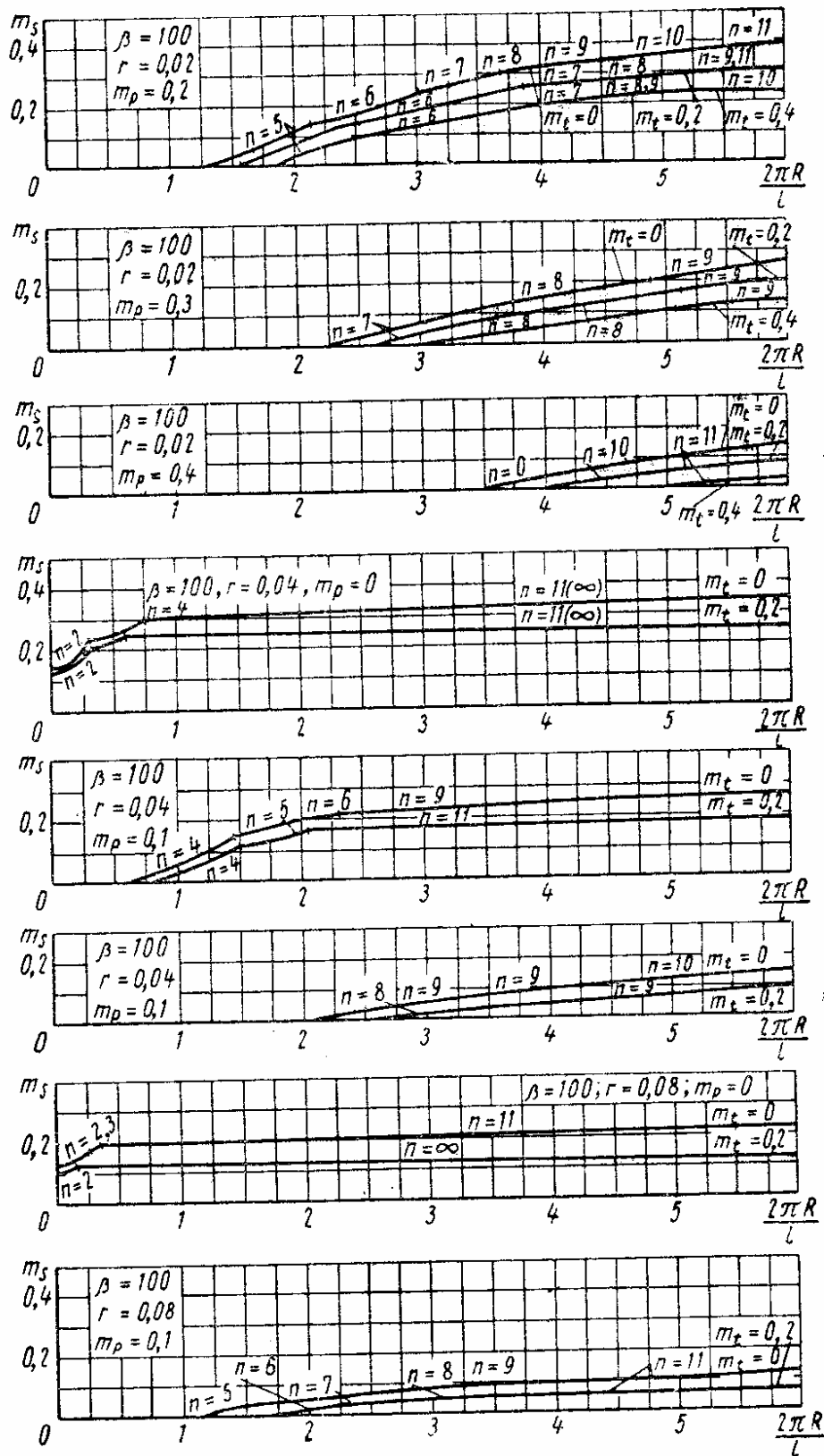


Рис. 18

ПРОГИБЫ И НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ¹

Здесь рассмотрены трехслойные пластинки с внешними слоями из различных изотропных материалов. Приведенные формулы справедливы в пределах пропорциональности.

Пластинки в условиях цилиндрического изгиба

При действии равномерно распределенной по поверхности пластинки поперечной нагрузки q или нагрузки p , равномерно распределенной по прямой параллельно кромкам 1, 2, и сжимающих усилий N (рис. 19), равномерно распределенных по ширине, пластинка изгибается по цилиндрической поверхности при условиях, приведенных на стр. 268.

Прогибы в середине панели (w), максимальные значения нормальных напряжений во внешних слоях и в заполнителе (σ) и касательных напряжений в заполнителе (τ_c) определяют по формулам

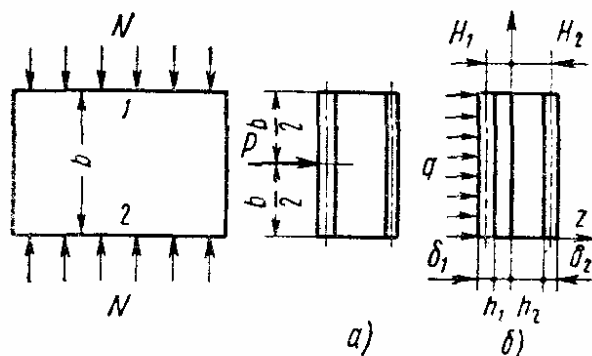


Рис. 19

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{b^2}{8D} \left(\frac{5}{48} p_0 b m_1 + D_t M_1 \right); \\ \sigma &= E_0 \left\{ \frac{1}{8D} \left[p_0 b m_2 + \left(1 - \frac{N b^2 k}{D \pi^2} \right) D_t M_2 \right] z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{B} (B_t - N) - \alpha_0 T^\circ \right\}; \\ \tau_c &= \frac{D'}{4hD} (p_0 m_3 - N D_t M_3) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

В формулах (49) учтен неравномерный по толщине нагрев слоев пластинки. Первый внешний слой имеет температуру T_1° , второй — температуру T_2° . По толщине заполнителя температура меняется линейно от T_1° до T_2° . В случае, когда нагрева нет, члены формул, содержащие T° в виде множителя или t в виде индекса, выпадают.

При действии на пластинку равномерно распределенной нагрузки q следует принимать $p_0 = qb$. Для случая действия нагрузки p в среднем сечении пластинки следует принимать $p_0 = p$ (q — нагрузка на единицу площади; p — нагрузка на единицу ширины пластинки; b — размер пластинки).

¹ Написано Л. Э. Брюккером.

Коэффициенты m_n и M_n ($n = 1, 2, 3$) зависят от условий нагружения и закрепления пластинки, их определяют по формулам табл. 3 [при этом параметр k определяют по формуле (3)].

3. Цилиндрический изгиб пластинок

Кромки 1, 2 шарнирно оперты	
Сосредоточенная нагрузка (рис. 19, а)	Равномерно распределенная нагрузка (рис. 19, б)
$m_1 = \frac{8}{5} \left(1 + \frac{12k}{\pi^2} \right),$ $M_1 = 1; m_2 = 2, M_2 = 8;$ $m_3 = 1, M_3 = \frac{b}{D}; P_0 = p$	$m_1 = \left(1 + \frac{48k}{5\pi^2} \right),$ $M_1 = 1; m_2 = 1, M_2 = 8;$ $m_3 = 1, M_3 = \frac{b}{D}; P_0 = qb$
Кромки 1, 2 защемлены	
Сосредоточенная нагрузка (рис. 19, а)	Равномерно распределенная нагрузка (рис. 19, б)
$m_1 = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{48k}{\pi^2} \right),$ $M_1 = 0; m_2 = -1, M_2 = 0;$ $m_3 = 1, M_3 = 0; P_0 = p$	$m_1 = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{48k}{\pi^2} \right),$ $M_1 = 0; m_2 = -\frac{2}{3}, M_2 = 0;$ $m_3 = 1, M_3 = 0; P_0 = qb$

В формулах (49) обозначено

$$D' = B_1 h_1 H_1 + B_2 h_2 H_2 + D_c;$$

$$2h = h_1 + h_2; H_1 = h_1 + \frac{\delta_1}{2}; H_2 = h_2 + \frac{\delta_2}{2}.$$

При одинаковых внешних слоях

$$(\delta_1 = \delta_2; E_2 = E_1; \nu_2 = \nu_1; \alpha_2 = \alpha_1; h_1 = h_2)$$

$$D_t = \theta [\alpha D_c + 2(1 + \nu_1) \alpha_1 B_1 H_1 h_1];$$

$$B_t = T_{cp}^\circ [\alpha B_c + 2(1 + \nu_1) \alpha_1 B_1];$$

$$\theta = \frac{T_2^\circ - T_1^\circ}{2h}; T_{cp}^\circ = \frac{T_2^\circ + T_1^\circ}{2}.$$

При различных внешних слоях

$$D_t = \alpha \left(\frac{h_2 - h_1}{2} B_c T_{cp}^* + \theta D_c \right) + n_1 H_1 + n_2 H_2;$$

$$B_t = \alpha B_c \left(\frac{h_2 - h_1}{2} \theta + T_{cp}^* \right) - n_1 + n_2;$$

$$n_1 = (1 + \nu_1) \alpha_1 B_1 (\theta h_1 - T_{cp}^*);$$

$$n_2 = (1 + \nu_2) \alpha_2 B_2 (\theta h_2 + T_{cp}^*);$$

$$\theta = \frac{T_2^* - T_1^*}{2h}; \quad T_{cp}^* = \frac{T_2^* h_1 + T_1^* h_2}{2h}.$$

Значения D , B , B_1 , B_2 , h_1 , h_2 и параметр сдвига k вычисляют по формулам (1)–(3), значения α берут в соответствии с выражениями (50)–(55).

При определении по формуле (49) напряжений во внешних слоях $\sigma = \sigma_i$ принимают $E_0 = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2}$, $\alpha_0 = (1 + \nu_i) \alpha_i$, $T^* = T_i^*$, где $i = 1$

для напряжений в первом внешнем слое, $i = 2$ для напряжений во втором внешнем слое; α_1 , α_2 — коэффициенты линейного расширения материала внешних слоев.

При определении по формуле (49) напряжений в заполнителе $\sigma = \sigma_c$ значения E_0 и $\alpha_0 = \alpha$ определяют в зависимости от типа заполнителя по формулам (50)–(55). При этом в формулы для σ_c вводят значения температуры $T^* = T_c^*$ в данной точке заполнителя.

Координату точки по толщине пластинки z отсчитывают в соответствии с рис. 19 [для крайних волокон первого внешнего слоя $z = -(h_1 + \delta_1)$, второго $z = h_2 + \delta_2$].

Сплошной изотропный заполнитель:

$$E_0 = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2}; \quad \alpha = (1 + \nu_c) \alpha_c; \quad G = G_c. \quad (50)$$

Параметры B_c , D_c вычисляют по формулам (4).

Сотовый заполнитель:

$$E_0 = B_c = D_c = 0. \quad (51)$$

Приведенный модуль сдвига G определяют по формулам (1) гл. 9 согласно указаниям, следующим за формулой (5) гл. 10.

Гофрированный и складчатый заполнитель. В случае, когда образующие гофра и складчатого заполнителя расположены перпендикулярно к кромкам 1 и 2 (рис. 19):

$$E_0 = E_x; \quad \alpha = \alpha_z; \quad G = \infty (k = 0). \quad (52)$$

Значения B_c , D_c вычисляют по формулам (6). В случае, когда образующие гофра и складчатого заполнителя расположены параллельно кромкам 1, 2:

$$E_0 = B_c = D_c = 0; \quad G = G_{yz}. \quad (53)$$

Значения приведенных модулей E_x , G_{yz} определяют по формулам (3)—(11) гл. 9.

Заполнитель из армированного пенопласта. При расположении ребер армировки перпендикулярно к кромкам 1, 2 (рис. 19)

$$E_0 = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad \alpha = \alpha_x + \nu_{xy}\alpha_y; \quad G = G_{xz}. \quad (54)$$

При расположении ребер армировки параллельно кромкам 1, 2

$$E_0 = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad \alpha = \alpha_y + \nu_{yx}\alpha_x; \quad G = G_{yz}, \quad (55)$$

где

$$\alpha_x = \frac{\alpha_3 E_3 \delta_3 + (t - \delta_3) \alpha_n E_n}{E_3 \delta_3 + E_n (t - \delta_3)}; \quad \alpha_y = \alpha_n;$$

здесь α_n , E_n — коэффициент линейного расширения и модуль упругости пенопласта. Размеры t , δ_3 показаны на рис. 13 гл. 9.

Значения B_c , D_c , E_x , E_y , ν_{xy} , ν_{yx} , G_{xz} , G_{yz} вычисляют по формулам (8)—(9) и согласно указаниям на стр. 265.

Формулы (49) справедливы при условиях $\frac{2h}{\delta_1 + \delta_2} > 3$ и $k \leq \leq 1$ при определении напряжений, $k \leq 10$ при определении прогибов.

Поперечный изгиб. В случае отсутствия продольных сил при вычислении прогибов и напряжений в формулах (49) принимают $N = 0$. Коэффициенты m_n , M_n определяют по табл. 3.

Жесткостные и температурные параметры для заполнителя определяют в зависимости от заполнителя по формулам:

Сплошной изотропный	(50)
Сотовый	(51)
Гофрированный и складчатый	(52), (53)
Армированный пенопласт	(54), (55)

Значения нормальных и касательных напряжений в заполнителе (σ_c , τ_c), найденные по формулам (49) в случае сотового, гофрированного, складчатого заполнителей и армированного пенопласта, отнесены к осредненному по объему условному однородному заполнителю. Действительные напряжения в элементах сот определяют пересчетом по формуле (61).

Продольно-поперечный изгиб. При продольно-поперечном изгибе продольные силы N определяют из условия работы пластинки в составе конструкции с учетом нагрева. В случае, если опоры пластинки неподвижные, усилия сжатия N , обусловленные нагревом панели, определяют по формуле

$$N = B_t.$$

Значения B_t вычисляют по приведенным выше формулам. Прогибы и напряжения определяют по формулам (49) в зависимости от типа заполнителя [формулы (50)—(55)]. Значения коэффициентов m_n , M_n , найденные по табл. 3, следует разделить на величину $1 - \frac{N}{N_e}$, где N_e — критическая нагрузка, которую определяют по формулам (10) согласно указаниям на стр. 271. В случае растягивающих продольных сил во всех формулах перед N следует изменить знак на обратный.

Прямоугольные пластинки

При совместном действии равномерно распределенной по поверхности поперечной нагрузки q и равномерно распределенных вдоль кромок сжимающих усилий N_x или N_y (рис. 20) прогибы и напряжения при отсутствии нагрева слоев вычисляют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{5}{384} \cdot \frac{qb^4}{D} m_1; \quad \sigma_y = E_0 \left(\frac{qb^2 m_2}{8D} z - \frac{N_y}{B} \right); \\ \sigma_x &= E_0 \left(\frac{qb^2 m_3}{8D} z - \frac{N_x}{B} \right); \quad \tau_{yz} = \frac{D'}{4hD} qbm_4; \\ \tau_{xz} &= \frac{D'}{4hD} qbm_5. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Коэффициенты m_n определяют в зависимости от условий крепления кромок пластинки по табл. 4* [при этом параметр k определяют по формуле (3)].

В формулах (56) обозначено

$$D' = B_1 h_1 H_1 + B_2 h_2 H_2 + D_c;$$

ω — прогибы в середине пластинки; σ_y, σ_x — максимальные значения нормальных напряжений во внешних слоях ($\sigma_{y1}, \sigma_{y2}, \sigma_{x1}, \sigma_{x2}$) и в заполнителе (σ_{yc}, σ_{xc}); τ_{yz}, τ_{xz} —

максимальные значения касательных напряжений в заполнителе.

Значения D, B вычисляют по формулам (1) и (2). При определении $\sigma_{y1, 2}, \sigma_{x1, 2}$ принимают $E_0 = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2}$, где $i = 1$ — для напряжений σ_{y1}, σ_{x1} в первом внешнем слое; $i = 2$ — для напряжений σ_{y2}, σ_{x2} во втором внешнем слое. При определении σ_{yc}, σ_{xc} значения E_0, k определяют в зависимости от типа заполнителя.

Координату точки по толщине пластинки z отсчитывают в соответствии с рис. 20.

Формулы (56) справедливы при условии $\frac{2h}{\delta_1 + \delta_2} > 3$ и $k \leq 1$ при определении напряжений, $k \leq 10$ при определении прогибов.

Поперечный изгиб. В случае отсутствия продольных сил при определении прогибов и напряжений в формулах (56) принимают $N_x = N_y = 0$. Коэффициенты m_n определяют в зависимости от условия опирания кромок пластинки по табл. 4.

В случае сплошного изотропного заполнителя (типа пенопласта различной жесткости) значение E_0, B_c, D_c вычисляют по формулам (4) и (50), а параметр сдвига k — по формулам (3) и (4). В случае сотового

* Для случая, когда кромки 3, 4 защемлены, m_3 (см. табл. 4) берут со знаком минус.

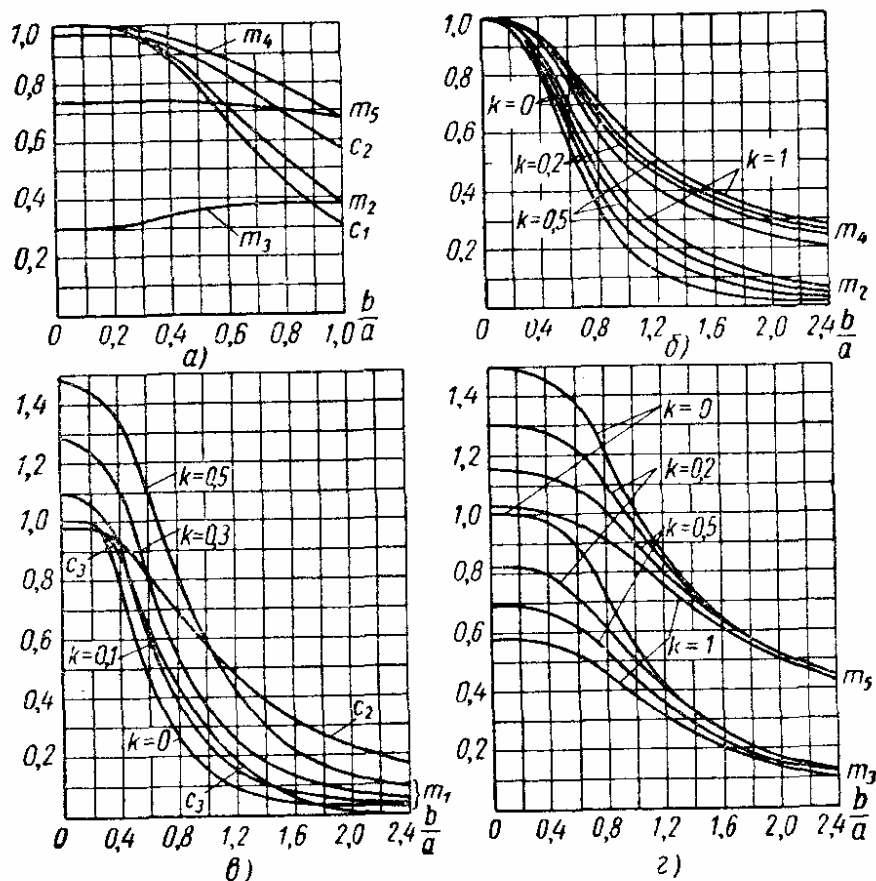


Рис. 21

4. Изгиб прямоугольных пластинок

Кромки 1, 2, 3, 4 шарнирно оперты (рис. 20)	
$m_1 = c_1 + kc_2$; $c_1, c_2, m_2, m_3, m_4, m_5$ по графикам на рис. 21, а	
Кромки 1, 2 шарнирно оперты, кромки 3, 4 защемлены (20)	
m_2, m_3, m_4, m_5 по графикам на рис. 21, б и в	
При $k > 0,5$ $m_1 = c_3 + kc_2$ Коэффициенты c_2, c_3 — по графикам на рис. 21, в	При $k \leq 0,5$ m_1 по графикам на рис. 21, г
Примечание. Значению m_3 , определяемому по графику на рис. 21, г, приписывают знак минус.	

заполнителя $E_0 = B_c = D_c = 0$. Параметр сдвига k вычисляют по формуле (3), причем для G вводят среднее значение модуля сдвига сот:

$$G = \frac{1}{2} (G_{xz} + G_{yz}).$$

Приведенные модули сдвига сотового заполнителя G_{xz} и G_{yz} определяют по формулам (3)—(5) гл. 9.

Касательные напряжения в заполнителе (τ_{yz} и τ_{xz}), найденные по формулам (56) для сот, относятся к условному однородному заполнителю. Напряжения в элементах сот вычисляют пересчетом по формуле (61).

Продольно-поперечный изгиб. При действии продольных сил в направлении короткой стороны пластинки (при $b < a$ действуют усилия N_y , $N_x = 0$; при $a < b$ действуют усилия N_x , $N_y = 0$, см. рис. 20) прогибы и напряжения определяют в зависимости от типа заполнителя (см. стр. 294) по формулам (56). Коэффициенты m_n находят по табл. 4.

В случае действия усилия N_y значения m_n следует разделить на $\left(1 - \frac{N_y}{N_{ye}}\right)$, в случае действия усилия N_x значения m_n делят на $\left(1 - \frac{N_x}{N_{xe}}\right)$. Критические нагрузки N_{ye} , N_{xe} и все параметры, необходимые для их вычисления, определяют по формулам (20) в соответствии с указаниями на стр. 274, 278.

При вычислении N_{xe} следует использовать вторую и пятую графу табл. 2. При вычислении N_{ye} следует иметь в виду, что случаю сжатия пластинки, показанному на рис. 20, усилиями N_y , когда кромки 1, 2 шарнирно оперты, а кромки 3, 4 защемлены, соответствует случай сжатия пластинки, показанный на рис. 3, усилиями N_x , когда кромки 3, 4 шарнирно оперты, а кромки 1, 2 защемлены. Поэтому при определении N_{ye} (см. рис. 20) следует использовать четвертую графу табл. 2 и вычислить свое значение k . Если N — растягивающие силы, то во всех формулах следует изменить знак N .

МЕСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ПАНЕЛИ

Порядок расчета

Местную устойчивость внешних слоев панели и элементов заполнителя проверяют сравнением усилий сжатия и сдвига N_i и T_i , возникающих в этих элементах при действии на панель заданных нагрузок N и T , с соответствующими критическими нагрузками элементов N_{ik} и T_{ik} . Величину усилий N_i и T_i в элементах панелей определяют в предположении, что заданные нагрузки N и T на всю панель распределяются между элементами пропорционально их жесткостям.

Критические нагрузки элементов панели находят в следующем порядке.

Определяют критические усилия сжатия N_{ie} и сдвига T_{ie} этих элементов в предположении идеализированной упругой работы конструкции. Для внешних слоев $i = 1$ и 2, для элементов заполнителя $i = 3$ и 4. При этом для панелей с сотовым заполнителем эти усилия находят сразу для каждого из элементов в отдельности, а для панелей с заполнителем типа гофра или складчатого, сжатых вдоль складок, сначала находят критическую нагрузку местной устойчивости N_e на единицу ширины

всей панели, а затем распределяют эту нагрузку между элементами пропорционально их жесткостям и таким путем определяют N_{ie} для отдельных элементов.

Действительные критические усилия для внешних слоев панели и элементов заполнителя N_{ik} (или T_{ik}) и нагрузки N_k на единицу ширины всей панели с учетом реальной работы конструкции (в том числе при выходе материала за пределы пропорциональности) определяют по найденным усилиям N_{ie} (или T_{ie}) путем пересчета. Здесь (если не оговорено особо) в отличие от расчета на общую устойчивость, под нагрузками N_e или N_k понимают нагрузки, соответствующие исчерпанию несущей способности панели при потере местной устойчивости ее элементами.

Сотовый заполнитель (см. рис. 4, а гл. 9)

Считают, что усилия в элементах при продольном сжатии панели нагрузками N_x и N_y распределяются между внешними слоями пропорционально их жесткостям. Сжимающие усилия во внешних слоях находят по формулам

$$N_{xi} = N_x \frac{B_i}{B_1 + B_2}; \quad N_{yi} = N_y \frac{B_i}{B_1 + B_2} \quad (i = 1 \text{ или } 2). \quad (57)$$

Если панель обладает начальным (технологическим) искривлением, то при ее продольном сжатии в элементах сот — пластинках 3 и 4 — возникают усилия сдвига.

При сжатии панели эти усилия на единицу длины кромки пластинки определяют по формулам:
при сжатии в направлении x

$$T_3 = 1,36 \frac{r}{bh} \omega_T N_x; \quad T_4 = 2,72 \frac{r}{bh} \omega_T N_x; \quad (58a)$$

при сжатии в направлении y

$$T_3 = 2,36 \frac{r}{bh} \omega_T N_y; \quad T_4 = 0; \quad (58b)$$

здесь b — размер панели, опертой или защемленной по нагруженным кромкам, в направлении сжатия.

Значение ω_T — прогиба панели при ее продольном сжатии нагрузкой N_x определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \omega_T &= \frac{\omega_0}{1 - \frac{N_x}{N_{xk}}} \quad \text{при } N_x \leq \frac{7}{9} N_{xk}; \\ \omega_T &= 4,5 \omega_0 \quad \text{при } N_{xk} \geq N_x \geq \frac{7}{9} N_{xk}; \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

здесь ω_0 — стрелу начального искривления панели, назначают в зависимости от технологии изготовления панели; N_{xk} — критическая нагрузка общей устойчивости (см. формулу на стр. 274 и далее).

При сжатии панели в направлении y индекс x в формулах (59) заменяют индексом y .

При поперечном и продольно-поперечном изгибе сперва по формулам, приведенным на стр. 290—296, определяют напряжения σ_{xi} , σ_{yi} во внешних слоях ($i = 1, 2$) и τ_{xz} , τ_{yz} в однородном по объему заполнителе, а затем по формулам (60) и (61) находят сжимающие усилия во внешних слоях ($i = 1, 2$):

$$N_{xi} = \sigma_{xi}\delta_i; \quad N_{yi} = \sigma_{yi}\delta_i \quad (60)$$

и усилия сдвига в элементах сот (см. рис. 1 гл. 9)

$$T_3 = r(0,86\tau_{xz} + 1,5\tau_{yz}); \quad T_4 = 1,73r\tau_{xz}. \quad (61)$$

Критические усилия N_{ie} во внешних слоях панели ($i = 1, 2$) в предположении идеализированной упругой работы конструкции находят по формулам (62), полученным в предположении потери устойчивости с искривлением внешних слоев в пределах каждой сотовой ячейки (т. е. выпучиванием «донышка» каждой ячейки).

При сжатии в направлении x

$$N_{xie} = 34,9 \frac{D_i}{r^2}. \quad (62a)$$

При сжатии в направлении y

$$N_{yie} = 31,3 \frac{D_i}{r^2}. \quad (62b)$$

При одновременном сжатии в направлениях x и y

$$N_{xie} = 34,9 \frac{D_i}{r^2} \cdot \frac{1}{1 + 1,12\chi},$$

где

$$\chi = \frac{N_{yie}}{N_{xie}}.$$

Величину коэффициента χ в случае продольного сжатия определяют по формулам (57), а в случае продольно-поперечного изгиба — по формулам (60).

Значения N_{xie} и N_{yie} определяют также по формулам (79), соответствующим другой форме потери устойчивости — искривлению внешних слоев по цилиндрическим поверхностям. При этом в формулы (79) вместо упругих параметров пенопласта вводят значения E_z и G_{xz} , найденные по формулам (1) и (2) гл. 9. Из двух значений N_{xie} , найденных по формулам (62a), (62b) и (79), в расчет вводят меньшее. Из двух значений N_{yie} также принимают меньшее.

Критические усилия сдвига T_{ie} для элементов сот ($i = 3$) в предположении упругой работы конструкции определяют, рассматривая эти элементы как прямоугольные шарнирно-опертые по контуру пластинки при потере устойчивости от действия в их плоскости равномерно распределенных по контуру сдвигающих усилий.

Действительные критические усилия сжатия N_{ik} во внешних слоях и сдвига T_{ik} в элементах сот с учетом реальной работы конструкции определяют по найденным значениям N_{ie} и T_{ie} при помощи пересчета по следующим формулам (аналогичным приведенным в расчете на общую устойчивость):

для внешних слоев

$$N_{ik} = \varphi_i N_{ie} \quad (i = 1, 2); \quad (63a)$$

для элементов сот

$$T_{ik} = \varphi_i T_{ie} \quad (i = 3); \quad (63б)$$

здесь

$$\varphi_i = \frac{\sigma_{ik}^*}{\sigma_{ie}^*} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Значение интенсивности напряжений σ_{ie}^* определяют по формулам.

Для внешних слоев:

при сжатии в направлении x

$$\sigma_{ie}^* = \frac{N_{xie}}{\delta_i};$$

при сжатии в направлении y

$$\sigma_{ie}^* = \frac{N_{yie}}{\delta_i};$$

при одновременном сжатии в направлениях x и y

$$\sigma_{ie}^* = \frac{1}{\delta_i} \sqrt{N_{xie}^2 + N_{yie}^2 - N_{xie} N_{yie}} \quad (i = 1, 2).$$

Для элементов сот

$$\sigma_{ie}^* = 1,73 \frac{T_{ie}}{\delta_i} \quad (i = 3).$$

Значения σ_{ik}^* вычисляют по одной из формул (13)–(15), полагая $\sigma_{ik}^* = \sigma_{ik}$ и $\sigma_{ie}^* = \sigma_{ie}$.

При этом в формулах (13)–(15) следует полагать $i = 1, 2$ для внешних слоев и $i = 3$ для сот и вводить соответствующие значения характеристик материала.

Далее проверяют устойчивость внешних слоев и элементов сот. Если усилия во внешних слоях N_{xi} , N_{yi} ($i = 1$ или 2) и сотах T_i ($i = 3$ или 4) меньше критических для соответствующего элемента (N_{xik} , N_{yik} , T_{ik}), то устойчивость этого элемента обеспечена.

В тех случаях, когда допускается местная потеря устойчивости одним из внешних слоев, определяют критическую нагрузку на панель, соответствующую исчерпанию несущей способности панели. В случае продольного сжатия панели с различными внешними слоями эти нагрузки, соответствующие потере местной устойчивости менее жестким внешним слоем, определяют по формулам

$$N_{xk} = N_{x1k} \frac{B_1 + B_2}{B_1}; \quad N_{yk} = N_{y1k} \frac{B_1 + B_2}{B_1}; \quad (64)$$

здесь N_{x1k} , N_{y1k} — действительные критические усилия. Индексом 1 обозначен менее жесткий внешний слой ($B_1 < B_2$).

Заполнитель типа гофра (см. рис. 4,6 гл. 9)

Усилия в элементах панели при ее продольном сжатии нагрузками N_x и N_y находят по формулам (65) и (66), полученным в предположении, что усилия распределяются пропорционально жесткостям.

Сжимающие усилия во внешних слоях

$$\left. \begin{aligned} N_{xi} &= N_x \frac{B_i}{B_1 + B_2 + 2hE_x}; \\ N_{yi} &= N_y \frac{B_i}{B_1 + B_2} \quad (i = 1 \text{ или } 2). \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Значение приведенного модуля упругости заполнителя E_x определяют по формуле (6) гл. 9.

Сжимающие усилия в листе гофра

$$N_{xz} = N_x \frac{2htE_x}{(B_1 + B_2 + 2hE_x)s}; \quad N_{yz} = 0. \quad (66)$$

Если панель обладает начальным искривлением, то при ее сжатии в направлении x в листе гофра возникают усилия сдвига

$$T_3 = 1,57 \frac{t}{hb} \omega_T N_x; \quad (67)$$

здесь b — размер панели, опертой или защемленной по нагруженным кромкам в направлении сжатия; ω_T определяют по формулам (59).

Критические нагрузки N_e на единицу ширины всей панели для формы потери устойчивости, соответствующей искривлению обоих внешних слоев и гофра, и в предположении идеализированной упругой работы конструкции находят по формулам (68) и (71).

При сжатии панели в направлении x нагрузка N_{xe} на единицу ширины всей панели будет

$$N_{xe} = \left(\frac{s}{t} + \frac{B_1 + B_2}{B_3} \right) \Phi; \quad (68)$$

здесь

$$\Phi = (2 \sqrt{A_0 B_0} + C_0 + 0,00005 V s_0 \alpha^2 G_3 \delta_3) \frac{1}{K_0}.$$

Коэффициенты A_0 , B_0 , C_0 , K_0 находят по формулам (69) и (70), соответствующим двум возможным формам потери устойчивости. При одной из этих форм искривление внешних слоев происходит по цилиндрическим поверхностям, образующие которых перпендикулярны к направлению сжатия; при другой — элементы внешних слоев искрив-

ляются подобно прямоугольным пластинкам, опертым на гребни гофра. В расчет принимают меньшее из двух значений N_{xe} .

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 0,00001 \frac{D_3}{s_0^3} (500A_1^* - A_2^* \alpha^2 + A_3^* \alpha^4) + \frac{\pi^2}{32} \frac{D_1 + D_2}{t^3} \varepsilon; \\ B_0 &= \pi^2 \left[0,1 D_3 s_0 B_1^* + t \frac{D_1 + D_2}{2} \varepsilon \right]; \\ C_0 &= \frac{D_3}{s_0} [0,2 C_1^* - 0,01 C_2^* \alpha^2 + 0,0002 (1 - \nu_3) C_3^* \alpha^4] + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{4} \frac{D_1 + D_2}{t} \varepsilon; \\ K_0 &= s_0 (0,1 B_1^* + 0,0001 C_3^* \alpha^2) + t \frac{\delta_1 + \delta_2}{2 \delta_3} \varepsilon; \\ \varepsilon &= 0,0001 \left(A_4^* \frac{t^2}{s_0^2} + 0,25 B_2^* \right); \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{D_3}{s_0^3} 0,0001 (100 A_1 - A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha^4); \\ B_0 &= \pi^2 [D_3 s_0 0,2 B_1 + 0,001 t (D_1 + D_2) B_2]; \\ C_0 &= \frac{D_3}{s_0} 0,001 [100 C_1 - C_2 \alpha^2 + 2 (1 - \nu_3) C_3 \alpha^4]; \\ K_0 &= s_0 (0,2 B_1 + 0,001 C_3 \alpha^2) + 0,001 t \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_3} B_2. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Значения коэффициентов $A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*, B_1^*, B_2^*, C_1^*, C_2^*, C_3^*$ и $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, V$ даны на графиках рис. 22 и 23 в зависимости от величины $\frac{s}{2s_0}$ (здесь $s_0 = r\alpha$) для случая, когда $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$. Приведенные формулы справедливы, если

$$0,00005 V s_0 \alpha^2 G_3 \delta_3 \leq 0,3 (2 \sqrt{A_0 B_0} + C_0).$$

В случае, когда гофр пилообразный (см. рис. 7 гл. 9), формулы (69) заменяют следующими:

$$\begin{aligned} A_0 &= 2,5 \frac{D_3}{s} + \frac{1}{4t} (D_1 + D_2); \\ B_0 &= \frac{5}{32} s^3 D_3 + t^3 (D_1 + D_2); \\ C_0 &= s D_3 + t (D_1 + D_2); \\ K_0 &= \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{5}{32} s^3 + t^3 \frac{(\delta_1 + \delta_2)}{\delta_3} \right]. \end{aligned}$$

В этом случае значение V в выражении Φ равно нулю.

При сжатии панели в направлении оси y нагрузки N_{yie} на единицу ширины внешнего слоя находят по формуле

$$N_{yie} = \frac{\pi^2}{4i^2} \left[D_i + 5 \frac{t}{s} D_3 \right] \quad (i = 1 \text{ или } 2). \quad (71)$$

Действительные критические нагрузки N_{xk} или N_{yk} с учетом реальной работы панели определяют по найденным значениям N_{xe} и N_{ye} при помощи пересчета по формулам (72) и (73), аналогичным формулам (63а) и (63б) и в соответствии с пояснениями, приведенными ниже.

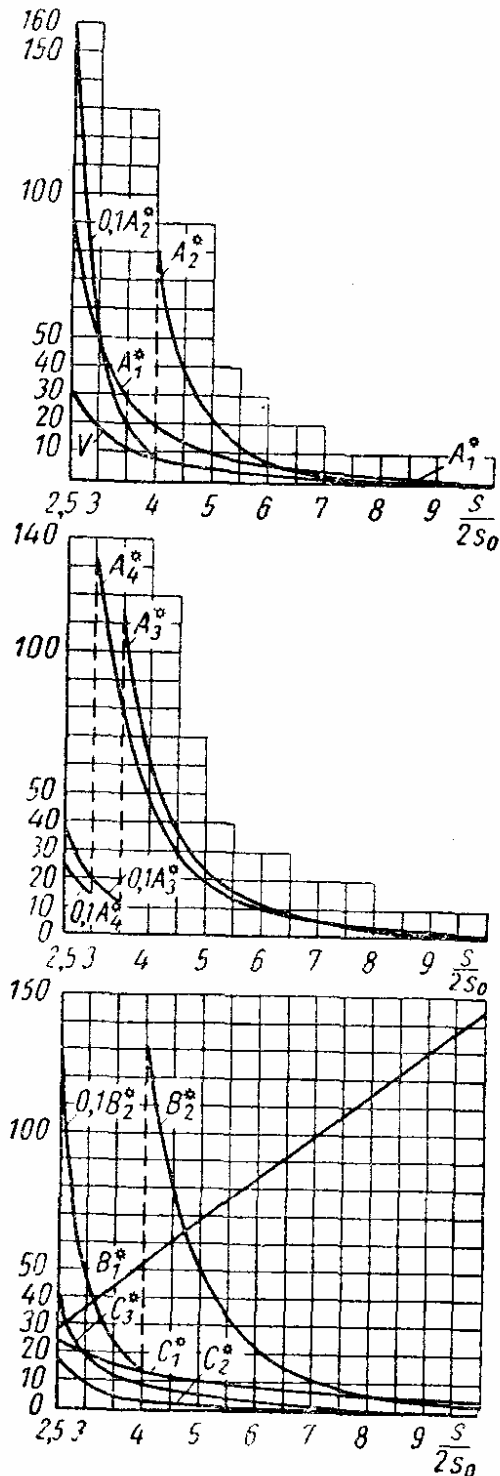


Рис. 22

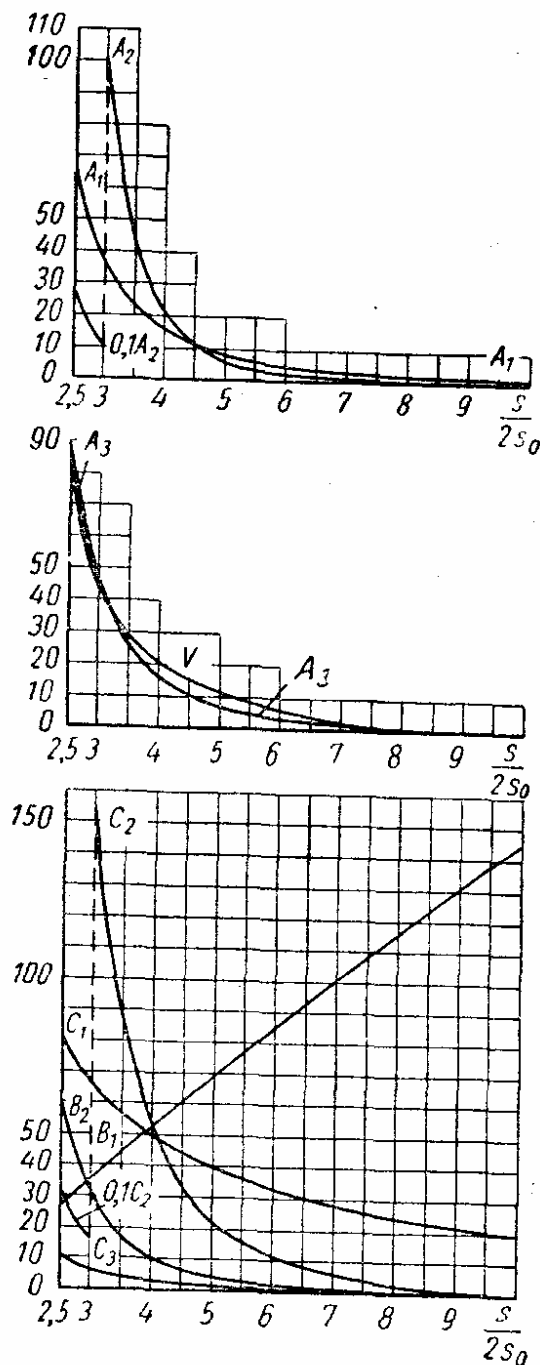


Рис. 23

Если внешние слои и заполнитель панели, сжатой в направлении x , выполнены из одного материала и начальное искривление панели весьма мало (гофр работает только на сжатие), критические нагрузки для отдельных элементов не определяют. Действительные критические нагрузки на единицу ширины всей панели находят пересчетом по формуле [аналогичной формуле (63а) и (63б), записанной для сотового заполнителя]

$$N_{xk} = \varphi N_{xe}; \quad (72)$$

здесь

$$\varphi = \frac{\sigma_k}{\sigma_e}; \quad \sigma_e = \frac{N_{xe}}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \frac{s}{t}}.$$

Значения σ_k находят по одной из формул (13)—(15). При этом индекс i в этих формулах опускают.

Если внешние слои панели, сжатой в направлении y , одинаковы по толщине и материалу, действительные критические нагрузки на единицу ширины всей панели находят пересчетом по формулам

$$N_{yk} = \varphi N_{ye}; \quad \varphi = \frac{\sigma_k}{\sigma_e}; \quad \sigma_e = \frac{N_{ye}}{\delta_1 + \delta_2}. \quad (73)$$

Значения σ_k находят по формулам (13)—(15) так же, как и при использовании формулы (72).

Если внешние слои и заполнитель панели, сжатой в направлении x , выполнены из различных материалов или если панель обладает начальным искривлением (заполнитель работает на сжатие и сдвиг), пересчет производят по формулам (63а) и (63б) и находят действительные критические усилия N_{x1k} , N_{x2k} , N_{x3k} для каждого элемента отдельно. При этом принимают, что распределение нагрузок N_{xe} между элементами будет таким же, как и распределение нагрузок N_x , и усилия в отдельных элементах (N_{x1e} , N_{x2e} , N_{x3e}) находят по формулам (65) и (66). Величину σ_{ie}^* вычисляют по формулам:

для внешних слоев ($i = 1, 2$)

$$\sigma_{ie}^* = \frac{N_{xie}}{\delta_i};$$

для заполнителя ($i = 3$)

$$\sigma_{3e}^* = \frac{1}{\delta_3} \sqrt{N_{xe}^2 + 3T_{3e}^2}.$$

Значение T_{3e} находят по формуле (67) с учетом соотношений (59), полагая $T_{3e} = T_3$ и $N_x = N_{xe}$.

Если внешние слои панели, сжатой в направлении y , различны по толщине или материалу, производят пересчет по формулам (63а) и (63б) и определяют действительные критические усилия N_{y1k} и N_{y2k} отдельно для каждого внешнего слоя. Для внешних слоев ($i = 1; 2$)

$$\sigma_{ie}^* = \frac{N_{yie}}{\delta_i}.$$

Далее проверяют устойчивость внешних слоев и гофра. Если усилия в элементе (N_{xi} , N_{yi}) не превышают соответствующих критических усилий (N_{xik} , N_{yik}), то устойчивость этого элемента обеспечена. Для случаев, относящихся к формулам (72) и (73), эту проверку устойчивости отдельных элементов не выполняют. В этом случае, а также в тех случаях, когда допускается местная потеря устойчивости одним из элементов панели, определяют критические нагрузки на всю панель, соответствующие исчерпанию несущей способности панели при потере местной устойчивости ее элементов. Эти нагрузки находят по формулам: при сжатии в направлении x

$$N_{xk} = N_{x1k} + N_{x2k} + N_{x3k} \frac{s}{t}; \quad (74)$$

при сжатии в направлении y

$$N_{yk} = N_{y1k} \frac{B_1 + B_2}{B_1}. \quad (75)$$

В выражении N_{yk} индексом 1 обозначен менее жесткий слой ($B_1 \leq B_2$).

Если нагрузки на панель при сжатии N_x и N_y не превосходят соответствующих критических нагрузок (N_{xk} , N_{yk}), то устойчивость панели обеспечена.

Складчатый заполнитель (см. рис. 4, в гл. 9)

Усилия во внешних слоях находят по формулам (65), усилия в элементах панели при ее продольном сжатии нагрузками N_x и N_y вычисляют так же, как и при заполнителе типа гофра. Сжимающие усилия в листе заполнителя рассчитывают по формулам (66). Усилия сдвига в листе заполнителя (возникающие вследствие начального искривления панели) находят по формуле (67).

Критические нагрузки N_e на единицу ширины всей панели для формы потери устойчивости, соответствующей искривлению обоих внешних слоев и листа заполнителя, в предположении идеализированной упругой работы конструкции определяют по формулам (76)–(78).

При сжатии панели в направлении x нагрузка N_{xe} на единицу ширины всей панели будет

$$N_{xe} = \frac{\pi^2 a^2}{t} \left[s_1 D_3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{s_1^2} \right)^2 + c D_4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4c^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + d D_5 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4d^2} \right)^2 + (t - c) D_1 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4(t - c)^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + (t - d) D_2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4(t - d)^2} \right)^2 \right]; \quad (76)$$

здесь

$$a^4 = 16 \frac{D_3 s_1 + D_4 c + D_5 d + D_1 (t - c) + D_2 (t - d)}{\frac{16 D_3}{s_1^3} + \frac{D_4}{c^3} + \frac{D_5}{d^3} + \frac{D_1}{(t - c)^3} + \frac{D_2}{(t - d)^3}}$$

[для определения D_4 и D_5 см. формулу (10) гл. 9 и пояснение к ней].

При $c = d = 0$ (пилообразный наполнитель, см. рис. 7 гл. 9)

$$N_{xe} = -\frac{\pi^2 a^2}{2t} \left\{ D_3 s_1 \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{s_1^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{s_1^2} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + 2(D_1 + D_2)(t - c) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4(t - c)^2} \right)^2 \right\}; \quad (47)$$

здесь

$$a^4 = 16 \frac{D_3 s_1 + (D_1 + D_2)(t - c)}{136 \frac{D_3}{s_1^3} + \frac{D_1 + D_2}{(t - c)^3}}.$$

Формулы (76) и (77) относятся к форме потери устойчивости, при которой элементы внешних слоев искривляются подобно прямоугольным пластинкам, опертым на ребра наполнителя. Эта форма имеет место тогда, когда жесткость листа наполнителя не слишком мала по сравнению с жесткостью внешних слоев (ориентировочно $\frac{D_1}{D_3} < 10$; $\frac{D_2}{D_3} < 10$). В противном случае опасной может стать другая форма, при которой внешние слои искривляются по цилиндрическим поверхностям, образующие которых нормальны к направлению сжатия (формулы для этой формы здесь не приведены).

При сжатии панели в направлении y нагрузки N_{yie} на единицу ширины одного внешнего слоя находят по формулам

$$N_{yie} = \pi^2 \frac{D_1 c + D_4(t - c)}{4ct(t - c)}; \quad N_{y2e} = \pi^2 \frac{D_2 d + D_5(t - d)}{4dt(t - d)}. \quad (78)$$

Определение действительных критических нагрузок N_{xk} и N_{yk} панели и ее элементов с учетом реальной работы конструкции и проверку устойчивости элементов и всей панели производят так же, как и в случае наполнителя типа гофра [см. формулы (72)–(75) и пояснения].

Заполнитель из пенопласта

Усилия во внешних слоях панели находят так же, как и в случае сотового наполнителя — при продольном сжатии панели нагрузками N_x и N_y , усилия N_{xi} и N_{yi} находят по формулам (57), а при поперечном и продольно-поперечном изгибе — по формулам (60).

Критические усилия N_{ie} на единицу ширины одного внешнего слоя находят для формы их искривления по цилиндрическим поверхностям, образующие которых нормальны к направлению сжатия («смарщивание» внешних слоев) в предположении идеализированной упругой работы конструкции.

При сжатии в направлении оси x эти усилия находят по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_{xie} &= 0,91\delta_i \sqrt[3]{\frac{E_i E_c G_{xz}}{1 - \nu_i^2}} \text{ при } \frac{h}{\delta_i} > 0,4 \sqrt[3]{\frac{E_i E_c}{(1 - \nu_i^2) G_{xz}^2}}; \\ N_{xie} &= 0,58\delta_i \sqrt[3]{\frac{E_i E_c \delta_i}{(1 - \nu_i^2) h}} \text{ при } \frac{h}{\delta_i} < 0,4 \sqrt[3]{\frac{E_i E_c}{(1 - \nu_i^2) G_{xz}^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

При сжатии в направлении оси y в формулах (79) индекс x заменяют индексом y . В случае изотропного неармированного пенопласта G_{xz} следует заменить на G_c .

При одновременном сжатии в направлениях x и y устойчивость проверяют для каждого из этих направлений с использованием тех же формул (79).

Определение действительных критических нагрузок внешних слоев N_{xik} , N_{yik} и всей панели N_{xk} , N_{yk} с учетом реальной работы конструкции и проверку устойчивости внешних слоев и всей панели производят так же, как и в случае сотового заполнителя [см. стр. 298—300 формулы (63) и (64)].

Заполнитель из армированного пенопласта (см. рис. 13 гл. 9)

Усилия в элементах панели определяют аналогично тому, как это было описано для других типов заполнителя (гофра и др.).

При продольном сжатии панели усилия во внешних слоях определяют по формулам (65) и при поперечном и продольно-поперечном изгибе панели — по формулам (60). Величину модуля упругости E_x заполнителя при расчете по этим формулам находят из соотношений (14) гл. 9. Усилия в армирующих ребрах при продольном сжатии панели нагрузкой N_x , действующей вдоль ребер, определяют по формулам (80) и (81). Сжимающие усилия

$$N_{xz} = N_x t \frac{E_x}{B_1 + B_2 + 2hE_x}. \quad (80)$$

Усилия сдвига, возникающие при сжатии панели в направлении x , вследствие ее начального искривления

$$T_3 = \frac{1,57\omega_T}{bh} tN_x; \quad (81)$$

здесь b — размер панели, опертой или защемленной по нагруженным кромкам, в направлении сжатия. Величину ω_T определяют по формулам (59).

Критические усилия в элементах панели при продольном сжатии в предположении идеализированной упругой работы конструкции вычисляют в следующем порядке.

Критические усилия N_{ie} ($i = 1, 2$) во внешних слоях панели определяют так же, как и в случае заполнителя из неармированного пенопласта по формулам (79) (в эти формулы вводят приведенные упругие параметры армированного пенопласта).

Критические усилия N_{xze} в армирующих ребрах в случае, когда начальное искривление панели весьма мало и ребра работают только на сжатие, вычисляют по двум формулам, соответствующим двум формам потери устойчивости этих ребер. Для элемента панели, включающего в себя два соседних ребра и слой пенопласта между ними, одна из этих форм аналогична кососимметричному искривлению трехслойной пластинки, где эти ребра играют роль внешних слоев, другая форма аналогична симметричному искривлению такой пластинки. Это значит, что при первой форме перемещения двух соседних ребер направлены в одну сторону, а при второй — навстречу одно другому.

$$N_{xze} = mkG_n \frac{t^2}{(t - \delta_3)}, \quad N_{xze} = 2 \cdot 10^3 \xi G_n \delta_3; \quad (82)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{4}{(1+k)^2} \text{ при } k \leq 1; \quad m = \frac{1}{k} \text{ при } k > 1; \\ k &= \frac{\pi^2 E_3 \delta_3 (t - \delta_3)}{16 h^2 (1 - \nu_3^2) G_n}; \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

G_n — модуль сдвига пенопласта; ξ — коэффициент, берут по графику на рис. 24.

В расчет принимают меньшее из двух найденных значений $N_{хзе}$.

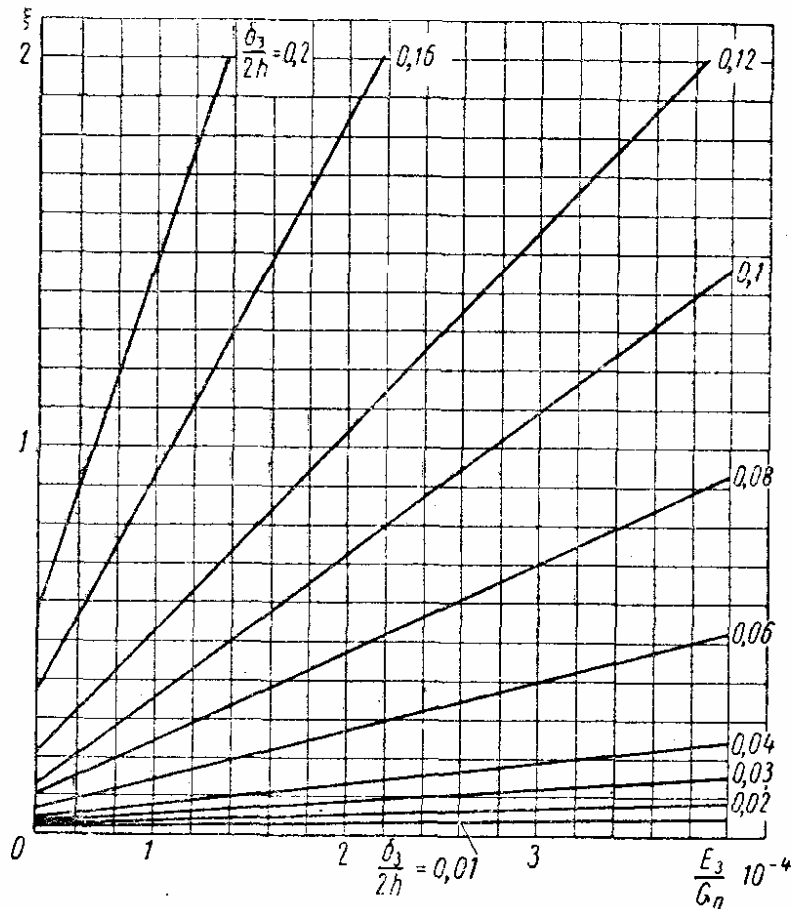


Рис. 24

В случае, когда панель обладает начальным искривлением, ребра заполнителя из армированного пенопласта работают на сжатие и сдвиг; критические усилия $N_{хзе}$ (и $T_{зе}$) армирующих ребер, а также усилия $N_{эле}$, действующие в ребрах по главным площадкам, определяют по формулам (84) и (85):

$$N_{хзе} = m_t \frac{\pi^2 B_3 t^2}{16 h^2}; \quad T_{зе} = m_s \frac{\pi^2 B_3 t^2}{16 h^2}. \quad (84)$$

Принимают, что $\frac{N_{хзе}}{T_{зе}} = \frac{N_{хз}}{T_з} = \frac{m_t}{m_s}$. Величины $N_{хз}$ и $T_з$ определяют по формулам (80) и (81); значения m_t и m_s находят отдельно по графику на рис. 25 в зависимости от значения k , найденного по формуле (83).

Нагрузки $N_{\text{элзэ}}$ определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{элзэ}} &= 1,45\delta_3 \sqrt[3]{E_3 E_n G_n} \text{ при } \frac{t}{\delta_3} > 0,635 \sqrt[3]{\frac{E_3 E_n}{G_n^2} + 1}; \\ N_{\text{элзэ}} &= 1,16\delta_3 \sqrt[3]{E_3 E_n \frac{\delta_3}{(t - \delta_3)}} \text{ при } \frac{t}{\delta_3} < 0,635 \sqrt[3]{\frac{E_3 E_n}{G_n^2} + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Формулы (84) и (85) соответствуют двум формам потери устойчивости, различие между которыми аналогично различию между двумя формами, соответствующими формулам (82). В тех случаях, когда значение k велико (на графике рис. 25 нет кривых для такого k), по формулам (84) усилия не рассчитывают; в этом случае расчет ведут только по формулам (85).

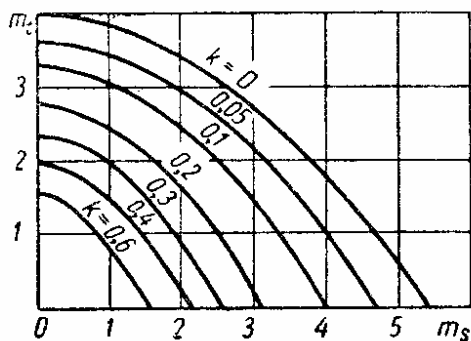


Рис. 25

Действительные критические усилия для внешних слоев $N_{xi\kappa}$ ($i = 1, 2$) и армирующих ребер $N_{x3\kappa}$ и $N_{\text{элз}\kappa}$ с учетом реальной работы конструкции находят пересчетом по формулам (63а), (63б), (64), (13), (14) при $i = 3$. При этом при

определении $N_{i\kappa} = \varphi_i N_{ie}$ для внешних слоев ($i = 1, 2$) σ_{ie}^* находят по формуле $\sigma_{ie}^* = \frac{N_{xie}}{\delta_i}$, а N_{xie} — по формулам (79). При вычислении $N_{x3\kappa} = \varphi_3 N_{x3e}$ для армирующих ребер значение σ_{3e}^* находят по формуле

$$\sigma_{3e}^* = \frac{1}{\delta_3} \sqrt{N_{x3e}^2 + 3T_{3e}^2}.$$

При расчете $N_{\text{элз}\kappa} = \varphi_3 N_{\text{элз}e}$ для армирующих ребер берут

$$\sigma_{3e}^* = \frac{N_{\text{элз}e}}{\delta_3}.$$

Устойчивость внешних слоев и ребер обеспечена, если критические усилия $N_{xi\kappa}$ ($i = 1, 2, 3$) и $N_{\text{элз}\kappa}$ превышают соответствующие действующие усилия [формулы (80) и (81)]. При этом критические усилия $N_{\text{элз}\kappa}$, найденные пересчетом значений, полученных по формулам (85), сравнивают со значением главных сжимающих усилий в ребре, которые находят по формуле

$$N_{\text{элз}} = \frac{N_{x3}}{2} + \sqrt{\frac{N_{x3}^2}{4} + T_3^2};$$

здесь N_{x3} и T_3 определяют по формулам (80) и (81).

Определение критической нагрузки на панель, соответствующей исчерпанию несущей способности панели при потере местной устойчивости внешними слоями, и проверку устойчивости всей панели для этого случая производят так же, как и в случае сотового заполнителя, в соответствии с формулами (64) и указаниями к ним.

Глава 11

ПРОЧНОСТЬ ЗАПОЛНИТЕЛЯ. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПАНЕЛИ. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ЗАПОЛНИТЕЛЯ

Сотовый наполнитель

Для обеспечения прочности сотового наполнителя проверяют прочность пластинок — элементов сот и прочность соединения сот с внешними слоями с учетом начальных технологических несовершенств (начальное искривление продольно-сжатой панели, волнистость внешних слоев).

Элемент сот проверяют на прочность как прямоугольную пластинку, свободно опертую по контуру и нагруженную равномерно распределенными усилиями сдвига T_i ($i = 3, 4$) на единицу длины кромки пластинки. В случае продольного сжатия панели, обладающей начальным искривлением, усилия T_i определяют по формулам (58) гл. 10. В случае поперечного и продольно-поперечного изгиба панели усилия T_i определяют по формулам (61) гл. 10.

Напряжения в соединениях сот с внешними слоями (спайка, склейка) определяют по формулам (4), (5), (7)—(9), как и для сплошного наполнителя типа неармированного пенопласта (см. стр. 310—311). При этом напряжения в этих соединениях рассматривают как условные, отнесенные к некоторому сплошному однородному по объему наполнителю с такими же приведенными упругими параметрами, как и заданный сотовый наполнитель.

Прочность этих соединений проверяют, сравнивая расчетные напряжения, найденные по формуле (4), с пределом прочности соединения. При этом предел прочности соединения находят, распределяя по площади внешнего слоя величину усилия P (здесь P — меньшее из разрушающих усилий при растяжении или сжатии на единицу длины склейки или спайки элемента сот с внешним слоем панели). Следовательно, формула для проверки прочности соединения имеет вид

$$\sigma_{расч} \leq \frac{P}{1,4r} \eta_2, \quad (1)$$

где η_2 — коэффициент, зависящий от качества изготовления панели и материала наполнителя, принимают $\eta_2 = 0,6$; r — радиус сотовой ячейки.

Заполнитель типа гофра и складчатый

Прочность листа гофра или складчатого заполнителя проверяют на совместное действие сжатия и сдвига.

Расчетные напряжения в листе заполнителя при продольном сжатии панели, обладающей начальным искривлением, будут

$$\sigma_{xz} = \frac{N_{xz}}{\delta_3}; \quad \tau_z = \frac{T_z}{\delta_3}.$$

Величины N_{xz} и T_z вычисляют по формулам (66) и (67) гл. 10.

Расчетные напряжения в листе заполнителя при поперечном и продольно-поперечном изгибе панели находят по формулам (см. рис. 4, б, в, гл. 9)

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xc} \frac{t \sin \alpha}{\delta_3}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xc} \frac{t}{\delta_3}; \quad (2)$$

здесь σ_{xc} и τ_{xc} — напряжения в условном однородном по объему заполнителе. В случае изгиба панели эти напряжения находят по формулам гл. 10.

Заполнитель из пенопласта

Прочность заполнителя из пенопласта и армированного пенопласта и склейки заполнителя с внешними слоями панели проверяют на действие напряжений, возникающих при нагружении панели, с учетом начального искривления панели и начальной волнистости внешних слоев (рис. 1).

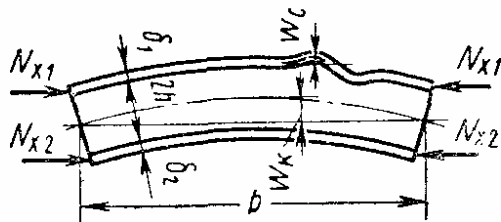


Рис. 1

Для панели с различными внешними слоями проверку выполняют для двух точек, расположенных на поверхности склейки с каждым из внешних слоев ($i = 1$ и 2).

При продольном сжатии трехслойной панели прочность проверяют по формуле

$$\sigma_{расчi} \leq \eta_2 \sigma_v, \quad (3)$$

где σ_v — меньший из пределов прочности материала заполнителя или клея при растяжении или сжатии; $\eta_2 = 0,6$ — коэффициент, зависящий от качества изготовления панели и материала заполнителя.

Расчетные напряжения, определяемые по энергетической теории прочности,

$$\sigma_{расчi} = \sqrt{(\sigma_{zci}^* + \sigma_{xci})^2 + 3(\tau_{xzci} + \tau_{xzci}^*)^2}; \quad (4)$$

где σ_{xci} — напряжения в заполнителе от сжатия панели (здесь и далее $i = 1$ и 2);

$$\sigma_{xci} = \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{E_t} \sigma_{xi}; \quad (5)$$

в случае неармированного пенопласта $E = E_c$, $G = G_c$; в случае армированного $E = E_x$, $G = G_x$; σ_{xi} — напряжение сжатия во внешнем слое

$$\sigma_{xi} = \frac{N_{xi}}{\delta_i}; \quad (6)$$

N_{xi} — расчетное усилие сжатия во внешнем слое; σ_{zci}^* и τ_{xzci}^* — нормальные и касательные напряжения, возникающие в заполнителе вследствие начальной волнистости внешних слоев;

$$\begin{aligned}\sigma_{zci}^* &= \frac{E\omega_c}{\chi h}; \\ \tau_{xzci}^* &= \frac{G\omega_c}{2\chi} \sqrt[4]{\frac{E}{hD_i}}; \\ \chi &= \frac{0,575}{\sigma_{xi}} \sqrt{\frac{EE_i\delta_i}{h}} - 1; \quad (7)\end{aligned}$$

ω_c , ω_k — стрела начальной волнистости внешнего слоя и стрела начального искривления пластинки (см. рис. 1); τ_{xzci} — касательные напряжения, возникающие в заполнителе вследствие начального искривления пластинки.

Для прямоугольной пластинки, свободно опертой по четырем краям и сжатой вдоль размера b ,

$$\tau_{xzci} = \frac{2h + \delta_i}{(2h + \delta_i)^2 - \frac{2h}{G} - \frac{2b^2}{\pi^2 B_i}} \cdot \frac{\pi}{b} \omega_k. \quad (8)$$

Для пластинки, работающей в условиях цилиндрического изгиба ($\frac{a}{b} > 3$ при сжатии вдоль размера b , a — ширина пластинки),

$$\left. \begin{aligned}\tau_{xzci} &= \frac{\pi G \omega_k}{a} \frac{1}{\lambda \left[\frac{G}{\sigma_{xi} \delta_i} h (1 + \lambda^2) - 1 - \frac{\lambda^2}{k_i (1 + \lambda^2)} \right]}; \\ \lambda &= \frac{b}{am}; \quad k_i = \frac{\pi^2 B_i h}{a^2 G}.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Число полуволн m находят по графику на рис. 2.

При поперечном и продольно-поперечном изгибе пластинки проверку прочности заполнителя выполняют по формулам (3) — (9) с той разницей, что σ_{xci} и τ_{xzci} определяют не по формулам (5), (6), (8) и (9), соответствующим сжатию пластинки, а по формулам, соответствующим ее изгибу (см. гл. 10).

При этом σ_{xci} определяют в двух точках, расположенных на поверхностях склейки заполнителя с двумя внешними слоями ($i = 1$ и 2).

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПАНЕЛИ

Пластинки с заполнителем из неармированного и армированного пенопласта при продольном сжатии в условиях цилиндрического изгиба

Графики оптимальных параметров, построенные по методике, описанной в гл. 9 для пластинок, работающих на продольное равномерное сжатие в условиях цилиндрического изгиба (стержни, бесконечно

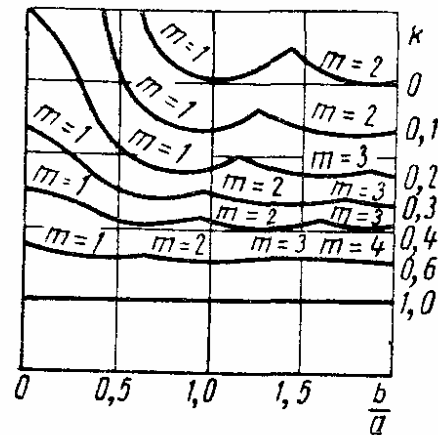


Рис. 2

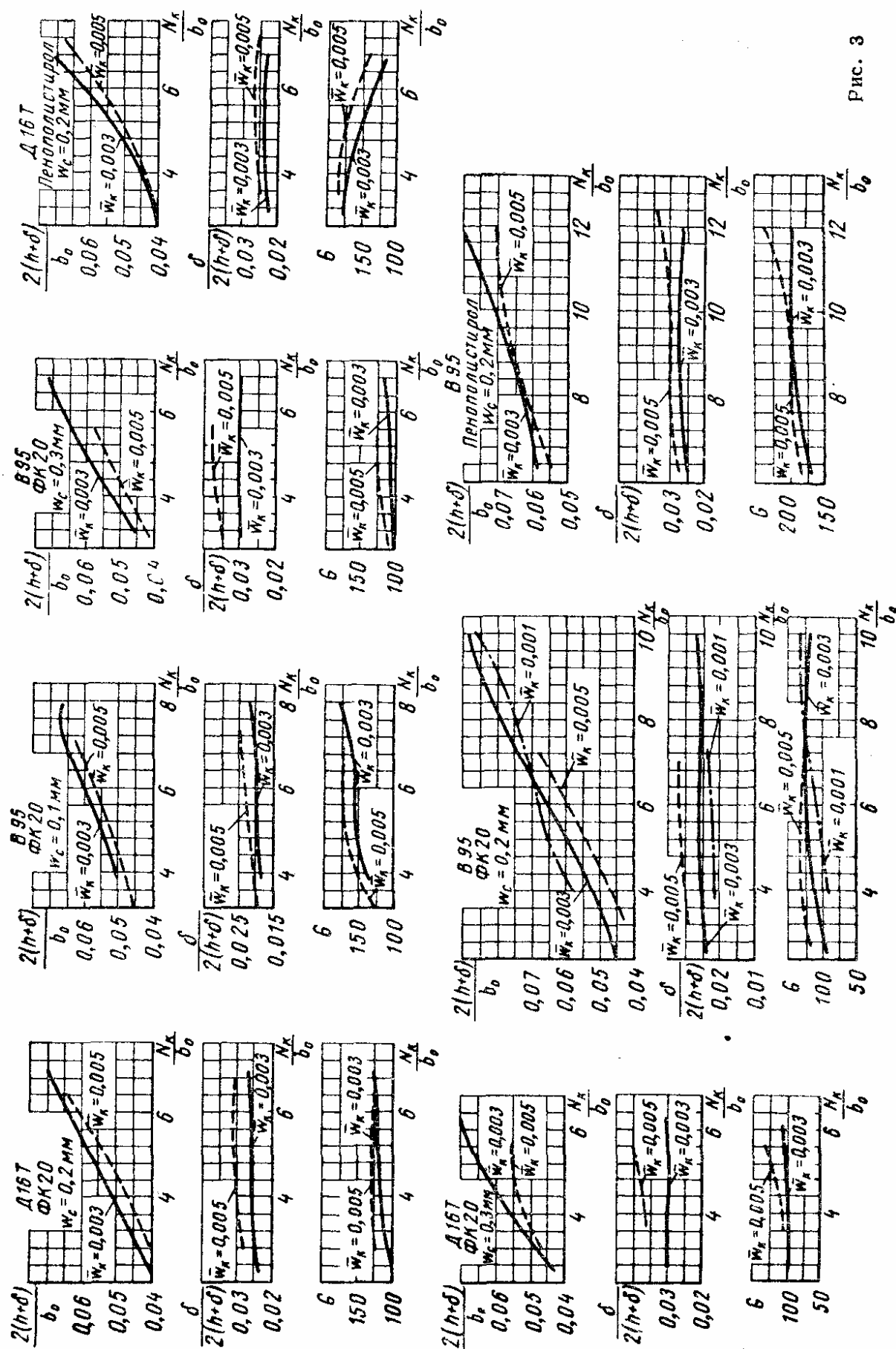


Рис. 3

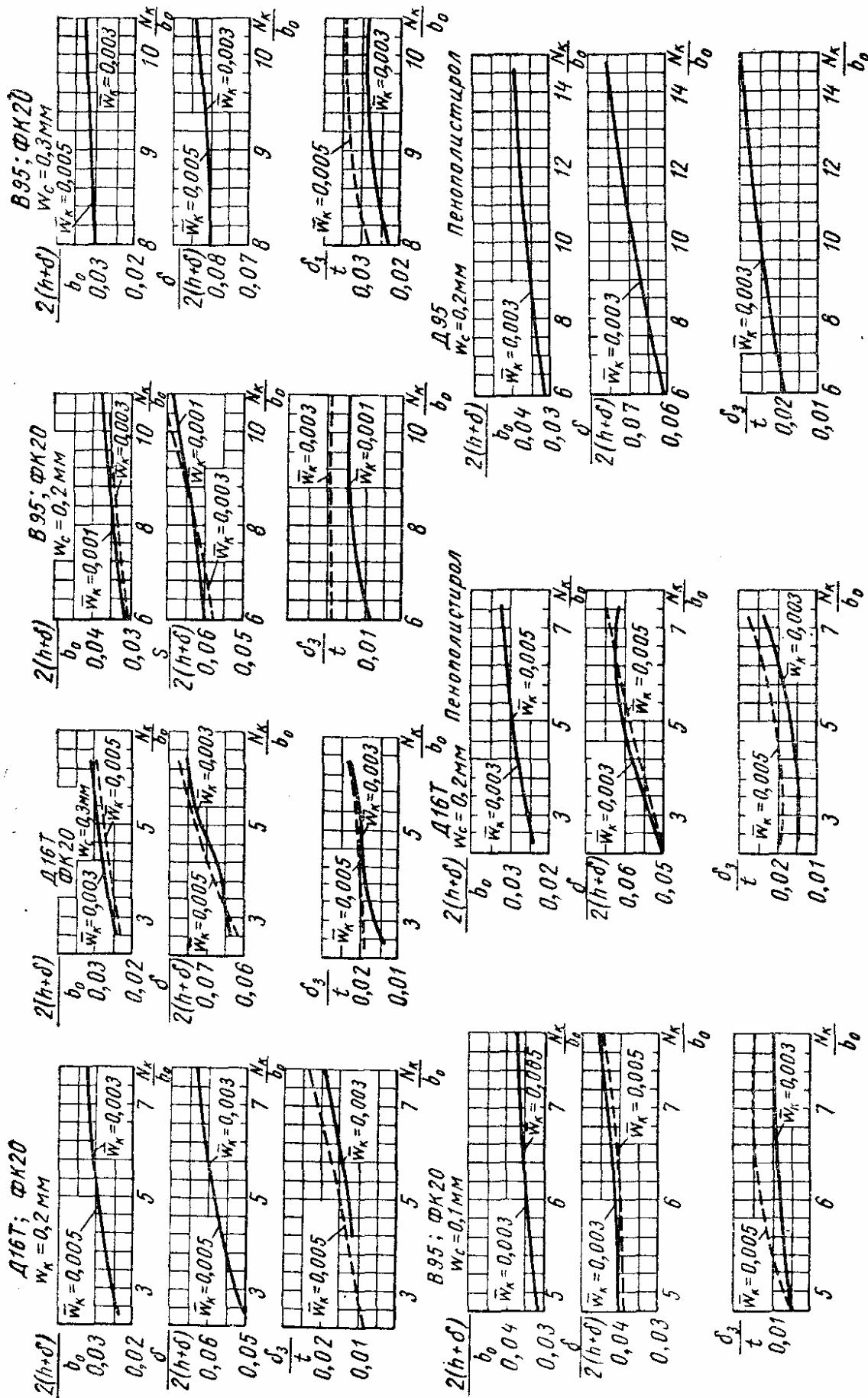


Рис. 4

широкие пластинки), показаны на рис. 3 и 4. Пластинки имеют одинаковые внешние слои и заполнитель из неармированного (рис. 3) и армированного (рис. 4 и 11) пенопласта. Материал внешних слоев и армирующих ребер и марка пенопласта указаны на графиках. По оси абсцисс отложены значения параметра нагружения — отношения критической нагрузки N_k на единицу ширины пластинки к расчетной длине пластинки $b_0 = \nu_0 b$ (в дан/см^2). Здесь b размер — пластинки в направлении сжатия. Для пластинки со свободно опертными кромками $\nu_0 = 1$, для пластинки с защемленными кромками $\nu_0 = 0,5$. Графики построены для различных значений параметров начального искривления пластинки $\bar{w}_k = \frac{w_k}{b_0}$ и начальной волнистости внешних слоев w_c (см. стр. 310—311). По заданным значениям $\frac{N_k}{b_0}$, \bar{w}_k и w_c по графику на рис. 3 определяют оптимальные значения толщины внешних слоев δ , толщины слоя $2h$ и плотность γ заполнителя.

В случае армированного пенопласта (рис. 4) минимуму веса панели соответствует использование пенопласта, плотность которого меньше, чем минимальная плотность для данного класса пенопластов, выпускаемых промышленностью. При расчетах графиков для пенопласта ФК20 принято $\gamma = 980 \text{ н/м}^3$, для пенополистирола — $\gamma = 490 \text{ н/м}^3$. По графикам находят значения $\frac{\delta_3}{t - \delta_3}$. Значения δ_3 и t определяют из условия устойчивости армирующих ребер (см. стр. 306—308).

Пластинки с сотовым заполнителем при продольном сжатии в условиях цилиндрического изгиба

Графики оптимальных параметров, построенные для пластинок, работающих в условиях цилиндрического изгиба на продольное равномерное сжатие (стержни, бесконечно широкие пластинки), показаны на рис. 5—7. Пластинки имеют одинаковые внешние слои и сотовый заполнитель с ячейками в форме правильных шестиугольников. Материалы внешних слоев и сот указаны на графиках. На оси абсцисс отложены значения параметра нагружения $\frac{N_k}{b_0}$ — отношения критической нагрузки N_k на единицу ширины пластинки к расчетной длине $b_0 = \nu_0 b$. Здесь b — размер пластинки в направлении сжатия. Для пластинки со свободно опертными кромками $\nu_0 = 1$, для пластинки с защемленными кромками $\nu_0 = 0,5$. Графики построены для различных значений параметра начального искривления пластинки $\bar{w}_k = \frac{w_k}{b_0}$.

Коэффициент η , входящий в формулы для расчета на устойчивость и характеризующий качество изготовления панелей, принят $\eta = 0,9$.

По заданным значениям $\frac{N_k}{b_0}$ и \bar{w}_k по графикам на рис. 5—7 определяют оптимальные значения безразмерных параметров $\frac{2(h + \delta)}{b_0}$, $\frac{\delta}{2(h + \delta)}$ и $\frac{\delta_3}{r}$. Минимуму веса соответствуют кривые значений $\frac{\delta_3}{r}$, нанесенные

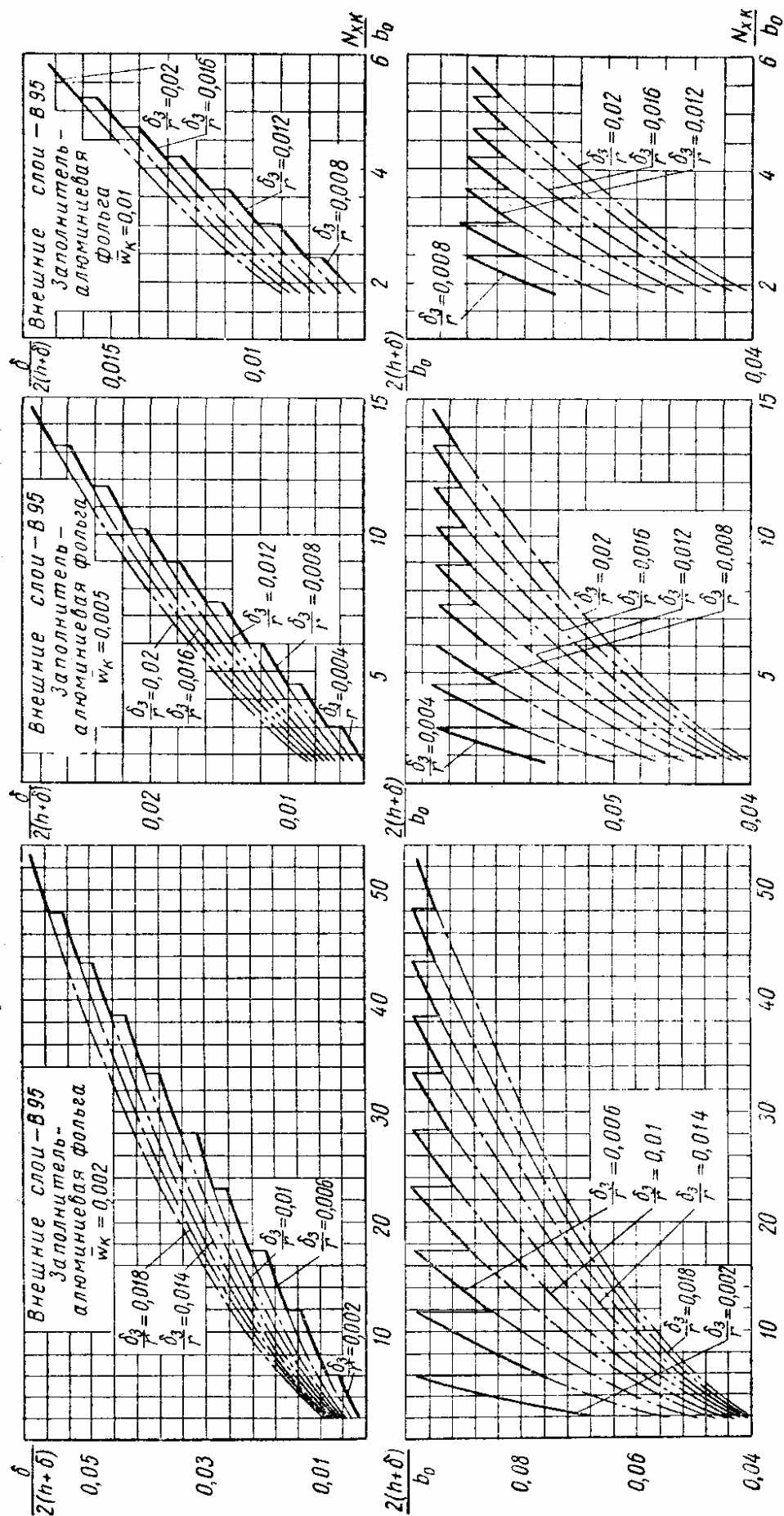


Рис. 5

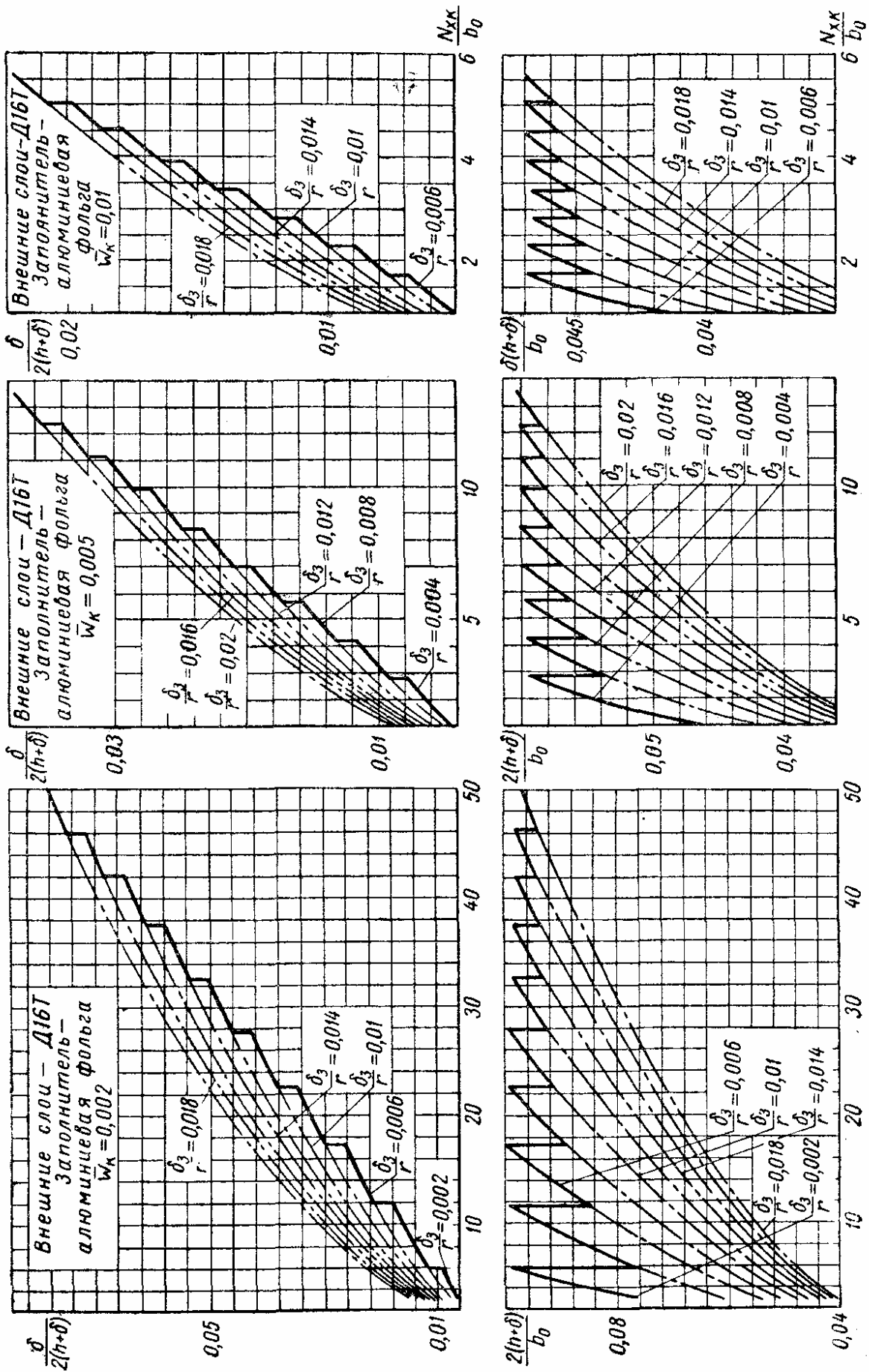


Рис. 6

на графики сплошной линией. Штрих-пунктирные линии значений $\frac{\delta_3}{r}$ используют в том случае, когда значение $\frac{\delta_3}{r}$ задают из конструктивных соображений. Абсолютное значение радиуса сотовой ячейки r (и соответственно значение δ_3) подбирают по найденному значению отношения $\frac{\delta_3}{r}$ из условия обеспечения прочности соединения (спайки, склейки) сот с внешними слоями (см. стр. 309—311) и из условия обеспечения местной устойчивости элемента внешних слоев при внутрисотовом выпучивании [см. формулы (62а) и (62б) гл. 10]. Чем меньше величина r при фиксированном значении $\frac{\delta_3}{r}$, тем легче выполняются эти условия.

Пластинки и пологие оболочки при различных условиях опирания

Графики оптимальных параметров, построенные для случая бесконечно широких пластинок (см. стр. 312—319), можно использовать для различных условий опирания плоских и криволинейных панелей при помощи следующего приема.

Пусть, например, требуется найти оптимальные параметры продольно сжатой свободно опертой по контуру прямоугольной в плане цилиндрической панели (рис. 8). Размеры этой панели в плане, материал ее, параметры, характеризующие начальные технологические несовершенства, и значения нагрузок заданы. Заменим заданную цилиндрическую панель продольно-сжатой свободно опертой по нагруженным кромкам бесконечно широкой пластинкой, у которой, за исключением размеров в плане, все геометрические параметры, а также упругие и прочностные параметры ее внешних слоев и заполнителя такие же, как и у заданной. Размер b бесконечно широкой пластинки в направлении сжатия будем подбирать так, чтобы критические нагрузки общей устойчивости N_k на единицу ширины у заданной панели и заменяющей ее пластинки (в предположении идеализированной упругой работы конструкции) были одинаковы (эти нагрузки N_k определяют по формулам и графикам гл. 10).

Оптимальные параметры будем находить для этой заменяющей пластинки и считать, что они соответствуют заданной панели. При этом считаем, что у обеих панелей одинаков параметр $\bar{\omega}_k$, характеризующий начальное кососимметричное искривление и определяющий величину поперечной силы, возникающей при продольном сжатии панели¹. Подбор ведем методом последовательных приближений.

¹ Для бесконечно широкой пластинки этот параметр $\bar{\omega}_k = \frac{\omega_k}{b_0}$ есть отношение стрелы начальной изогнутости ω_k к приведенной длине пластинки b_0 , т. е. к длине полуволны кососимметричного искривления пластинки при потере устойчивости ($b_0 = \lambda b$, где b — длина пластинки; λ — коэффициент, характеризующий закрепление кромок, в случае свободного опирания обеих нагруженных кромок $\lambda = 1$). Для заданной панели величина параметра $\bar{\omega}_k$, характеризующего технологическое кососимметричное искривление, задается. В общем случае, когда при потере устойчивости панель в направлении сжатия искривляется по нескольким полуволнам, смысл параметра $\bar{\omega}_k$ аналогичен соответствующему отношению ω_k и b_0 для элемента панели, на котором располагается одна полуволна.

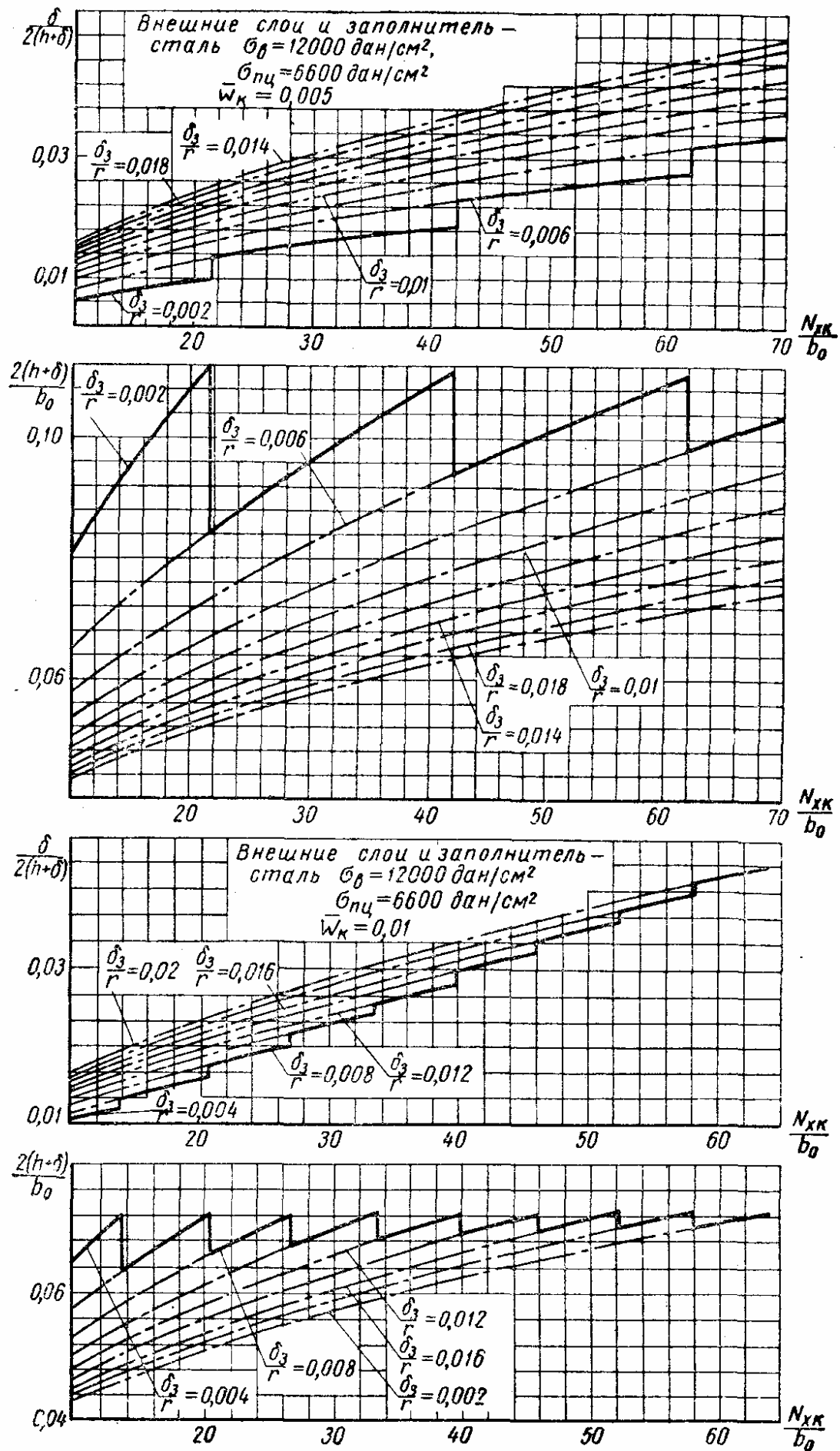
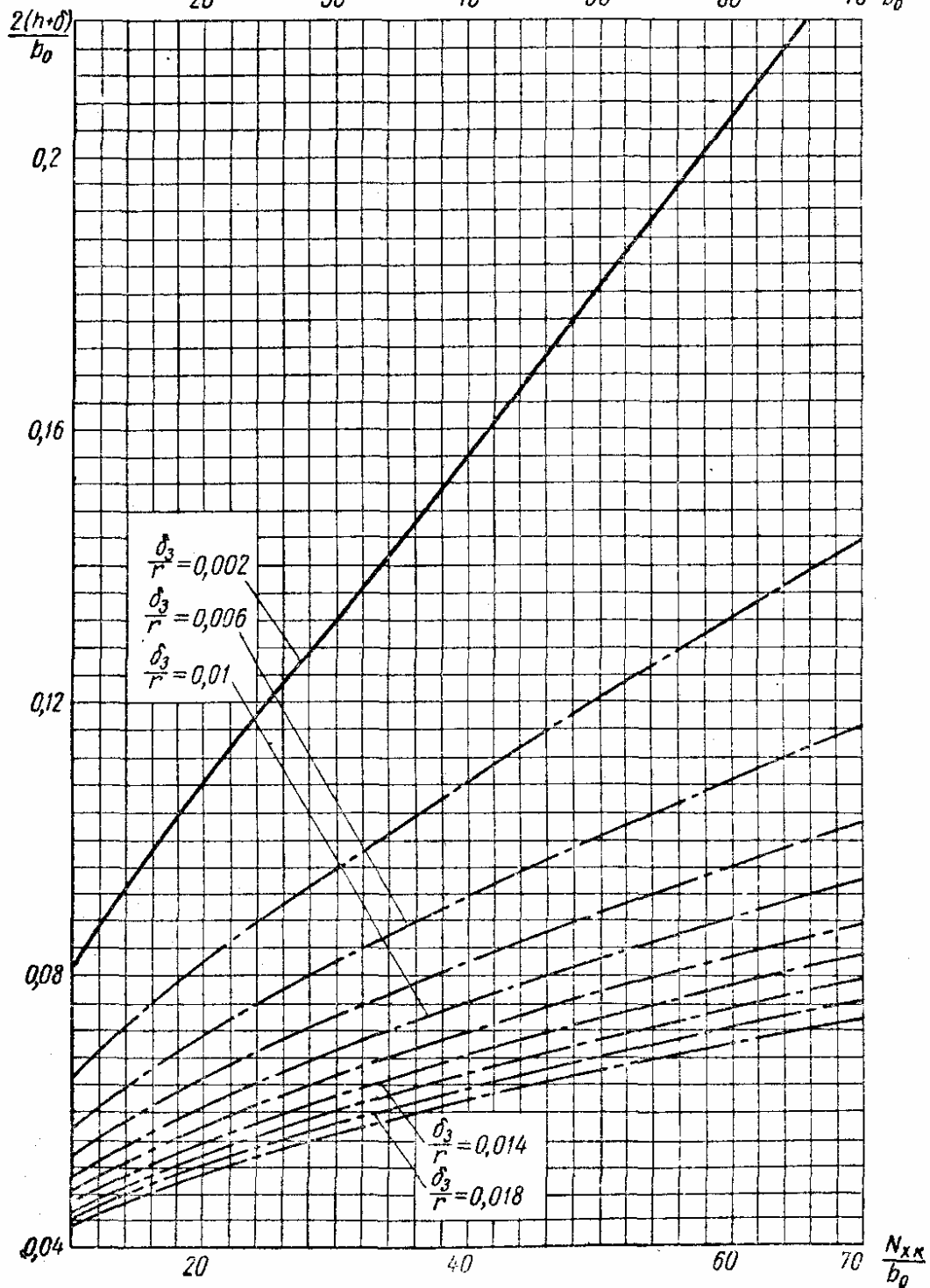
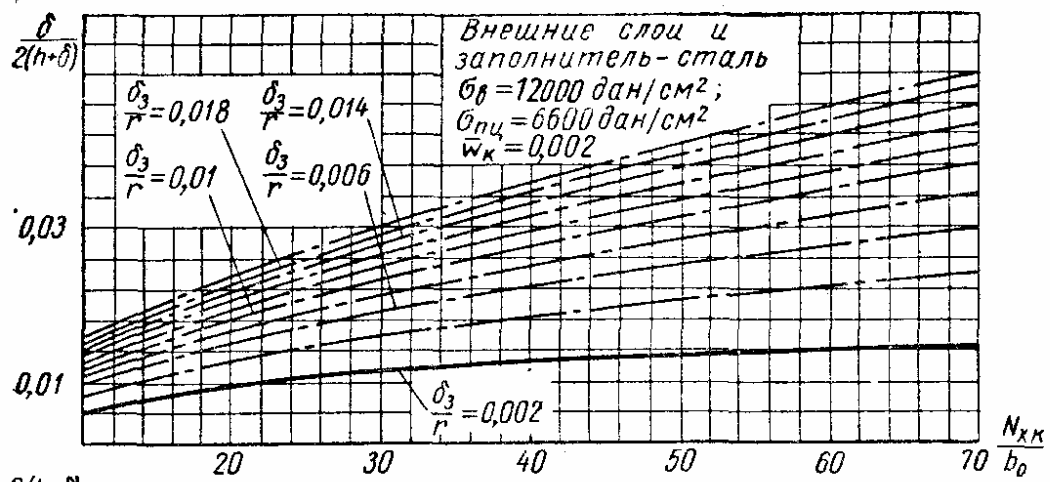


Рис. 7



В первом приближении для обеих панелей, заданной и заменяющей ее, примем модули сдвига заполнителя в направлении сжатия $G = \infty$, зададимся размером h или δ и, исходя из равенства критических нагрузок общей устойчивости, используя соответствующие формулы, найдем размер b заменяющей пластинки через известный размер a^*

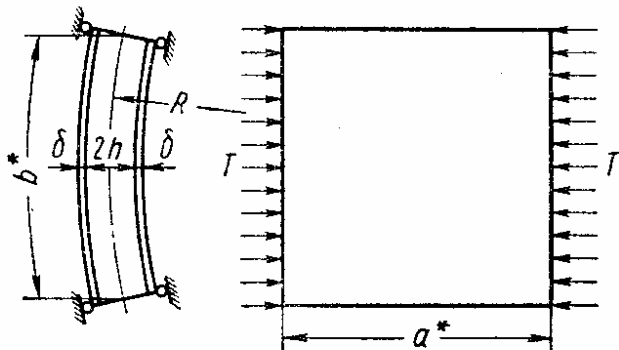


Рис. 8

заданной панели. Для размера заданной панели вводим здесь обозначение a^* , чтобы не смешивать этот размер с размером b заменяющей панели.

Напомним, что размер панели в направлении сжатия для бесконечно широкой пластинки в гл. 10 (см. рис. 4 и 5 гл. 10) обозначен буквой b , а для прямоугольной панели — a .

Теперь для заменяющей пластинки с найденным размером b и параметром ω_k определим оптимальные параметры по графикам рис. 5—7. Будем считать эти параметры параметрами проектируемой панели и найдем во втором приближении размер b , а также параметры h и δ заменяющей пластинки, полагая, что модуль сдвига заполнителя этой пластинки равен найденному в первом приближении значению. Дальнейшие приближения, если они нужны, могут проводиться по той же схеме, пока исходное и полученное значения модулей сдвига заполнителя, h и других параметров панели не окажутся близкими.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Пример 1. Проверочный расчет пластинки с сотовым заполнителем

Дана панель, работающая на продольное сжатие (рис. 9). Нагруженные кромки панели шарнирно оперты, ненагруженные — свободны. Расстояние между нагруженными кромками $b = 30$ см.

Внешние слои панели одинаковы по толщине и материалу и выполнены из дуралюмина с характеристиками: $E_1 = 6,9 \cdot 10^5$ дан/см²; $\nu_1 = 0,33$; $\sigma_v = 4000$ дан/см²; $\sigma_{пц} = 2000$ дан/см². Толщина слоев $\delta_1 = \delta_2 = 0,12$ см.

Заполнитель сотовый из дуралюминовой фольги толщиной $\delta_3 = 0,01$ см с характеристиками: $E_3 = 7,1 \cdot 10^5$ дан/см²; $G_3 = 2,7 \cdot 10^5$ дан/см²; $\nu_3 = 0,31$; $\sigma_v = 1500$ дан/см²; $\sigma_{пц} = 1000$ дан/см². Радиус ячейки сот $r = 0,548$ см.

Высота сот (толщина заполнителя) $2h = 1,5$ см.

Стрела начального технологического искривления всей панели $\omega_0 = 0,06$ см; элементов сот: $f_{03} = 0,03$ см (пластинки 3 см. рис. 4 гл. 9), $f_{04} = 0,04$ см (пластинки 4 см. рис. 4 гл. 9).

Требуется определить критическую нагрузку N на единицу ширины панели.

Расчет на общую устойчивость. Панель работает в условиях цилиндрического изгиба, и расчет на общую устойчивость выполняют в соответствии с указаниями на стр. 268—273.

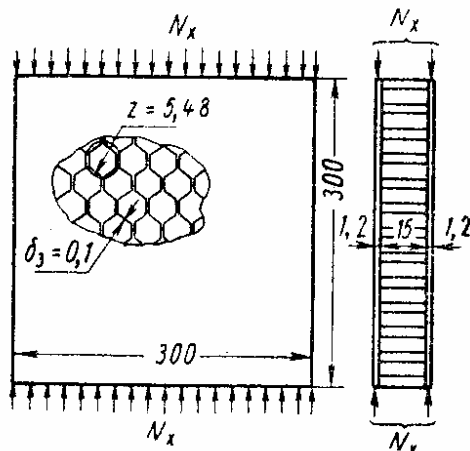


Рис. 9

Жесткости сжатия и изгиба панели с сотовым заполнителем определяются по формулам (1), (2), (5) гл. 10:

$$B_1 = B_2 = \frac{6,9 \cdot 10^5 \cdot 0,12}{1 - 0,33^2} = 0,929 \cdot 10^5 \text{ дан/см};$$

$$D_1 = D_2 = \frac{6,9 \cdot 10^5 \cdot 0,12^3}{12 (1 - 0,33^2)} = 111 \text{ дан/см};$$

$$B_c = D_c = 0; \quad h_0 = 0, \quad h_1 = h_2 = 0,75 \text{ см};$$

$$H_1 = H_2 = 0,75 + 0,06 = 0,81 \text{ см};$$

$$B = 2B_1 = 1,858 \cdot 10^5 \text{ дан/см};$$

$$D = 2 \cdot 111 + 2 \cdot 0,929 \cdot 10^5 \cdot 0,81^2 = 122 \cdot 10^3 \text{ дан} \cdot \text{см};$$

$$D_0 = 2 \cdot 0,929 \cdot 10^5 \cdot 0,75^2 = 105 \cdot 10^3 \text{ дан} \cdot \text{см}.$$

Для определения параметра сдвига k по формуле (3) гл. 10 необходимо определить приведенный модуль сдвига заполнителя G в плоскости, совпадающей с направлением сжатия. В рассматриваемом случае $G = G_{xz}$.

Для определения модуля сдвига G_{xz} полагаем (с последующей проверкой), что элементы сот устойчивости от сдвига не теряют, и используем формулу (1) гл. 9.

Определяем $\kappa = \frac{0,2}{0,1} = 2$ и по рис. 5 гл. 9 находим $\zeta = 0,878$, а затем

$$G_{xz} = 2,7 \cdot 10^5 \frac{0,01}{0,548} \cdot 0,878 = 4340 \text{ дан/см}^2.$$

По формуле (3) гл. 10 находим параметр сдвига k :

$$k = \frac{3,14^2 \cdot 105 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,75 \cdot 4340 \cdot 30^2} = 0,177.$$

Критическую нагрузку N_e в предположении идеализированной упругой работы панели находим по формуле (10) гл. 10:

$$m_t = \frac{1}{1 + 0,177} = 0,85; \quad N_e = \frac{3,14^2 \cdot 122 \cdot 10^3}{30^2} \cdot 0,85 = 1140 \text{ дан/см}.$$

Действительную критическую нагрузку общей устойчивости панели определяем по формулам (11)–(15) гл. 10.

Критическое напряжение в предположении упругой работы конструкции согласно формулам (11) гл. 10 будет

$$\sigma_e = \frac{1140}{2 \cdot 0,12} = 4750 \text{ дан/см}^2.$$

Так как σ_e существенно превышает $\sigma_{нц}$ материала, будем использовать второй способ пересчета — формулы (14) гл. 10. Принимаем

$$\eta = 0,9; \quad \psi_{1,2} = \frac{4000}{4750} = 0,842.$$

Действительное критическое напряжение будет

$$\sigma_{K1,2} = 0,9 \cdot 4000 \frac{1 + 0,842}{1 + 0,842 + 0,842^2} = 2600 \text{ дан/см}^2.$$

Действительная критическая нагрузка на единицу ширины панели согласно формулам (12) гл. 10 будет

$$N_K = 2 \cdot 0,12 \cdot 2600 = 624 \text{ дан/см}$$

Проверка на местную устойчивость. Проверка элементов заполнителя. Для проверки элементов сот на местную устойчивость необходимо по формулам (58) гл. 10 определить расчетные усилия сдвига в пластинках сот 3 и 4 (см. рис. 4, а гл. 9).

Полагаем, что расчетная сжимающая нагрузка N_x , действующая на панель, равна действительной критической нагрузке общей потери устойчивости

$$N_x = 584 \text{ дан/см.}$$

По формуле (59) гл. 10 находим расчетный прогиб панели

$$w_T = 4,5 \cdot 0,06 = 0,27 \text{ см.}$$

По формулам (58) гл. 10 определяем расчетные усилия сдвига, возникающие в элементах сот 3 и 4 при сжатии панели нагрузками T_x .

Находим

$$T_3 = \frac{0,548}{30 \cdot 0,75} \cdot 0,27 \cdot 1,36 \cdot 624 = 5,6 \text{ дан/см;}$$

$$T_4 = \frac{0,548}{30 \cdot 0,75} \cdot 0,27 \cdot 2,72 \cdot 624 = 11,2 \text{ дан/см.}$$

Критические нагрузки T_{3e} и T_{4e} для пластинок сот 3 и 4 в предположении идеализированной упругой работы определим, рассматривая эти пластинки как однослойные прямоугольные шарнирно опертые по контуру, для которых справедливы известные формулы (см. например, [8] стр. 260).

Критическое напряжение для прямоугольной шарнирно опертой пластинки 3 при сдвиге определяют по формуле

$$\tau_{3e} = k_s \frac{\pi^2 E_3}{12 (1 - \nu_3^2)} \left(\frac{\delta_3}{r} \right)^2,$$

где k_s при отношении сторон пластинки $\frac{2h}{r} = \frac{1,5}{0,548} = 2,74$ будет $k_s = 6,2$.

Находим

$$\tau_{3e} = 6,2 \frac{3,14^2 \cdot 7,1 \cdot 10^5}{12 (1 - 0,31^2)} \cdot \frac{0,01^2}{0,548^2} = 1332 \text{ дан/см}^2;$$

$$T_{3e} = 1332 \cdot 0,01 = 13,32 \text{ дан/см}$$

Аналогично

$$\tau_{4e} = 6,2 \frac{3,14^2 \cdot 7,1 \cdot 10^5}{12 (1 - 0,31^2)} \cdot \frac{0,02^2}{0,548^2} = 5320 \text{ дан/см}^2;$$

$$T_{4e} = 5320 \cdot 0,02 = 106,4 \text{ дан/см}$$

Действительные критические усилия определим по формулам на стр. 299.

Вычисляем

$$\sigma_{3e}^* = 1,73 \cdot 1332 = 2307 \text{ дан/см}^2;$$

$$\sigma_{4e}^* = 1,73 \cdot 5320 = 9214 \text{ дан/см}^2.$$

Имеем $\sigma_{3e}^* > \sigma_{nc}$; $\sigma_{4e}^* > \sigma_{nc}$.

Так как σ^* существенно превышает σ_{nc} материала, то действительные критические напряжения будем находить по второму способу пересчета — по формуле (14) гл. 10:

Принимаем $\eta = 0,9$.

$$\sigma_{3k} = 0,9 \cdot 1500 \frac{1 + 0,65}{1 + 0,65 + 0,65^2} = 1075 \text{ дан/см}^2;$$

$$\sigma_{4k} = 0,9 \cdot 1500 \frac{1 + 0,163}{1 + 0,163 + 0,163^2} = 1320 \text{ дан/см}^2;$$

$$\varphi_3 = \frac{1075}{2307} = 0,466; \quad \varphi_4 = \frac{1320}{9214} = 0,144;$$

$$T_{3k} = 0,466 \cdot 13,32 = 6,2 \text{ дан/см;}$$

$$T_{4k} = 0,144 \cdot 106,4 = 15,3 \text{ дан/см.}$$

Убеждаемся, что критические нагрузки $T_{3к}$ и $T_{4к}$ превышают расчетные T_3 и T_4 :

$$6,2 > 5,6; \quad 15,3 > 11,2.$$

Предположение, что элементы сот устойчивы от сдвига не теряют, принятое ранее при определении G_{xz} подтверждается, и пересчет делать не требуется.

Проверка местной устойчивости внешних слоев. Критическое значение нагрузки на один внешний слой в предположении упругой работы конструкции определяем по формулам (62а) и (79) гл. 10, соответствующим двум различным формам местной потери устойчивости внешним слоем панели.

По формуле (62а)

$$N_{x1e} = 34,9 \cdot \frac{111}{0,548^2} = 12,9 \cdot 10^3 \text{ дан/см.}$$

Для расчета N_{x1e} по формуле (79) необходимо вычислить приведенный модуль упругости заполнителя E_z .

Для определения E_z по формуле (2) гл. 9 находим ζ_i по графику на рис. 6 гл. 9. При $\frac{r}{2h} = \frac{0,548}{1,5} = 0,366$, $\frac{r}{\delta_3} = \frac{0,548}{0,01} = 54,8$ и $\frac{r}{\delta_4} = \frac{0,548}{0,02} = 27,4$ находим $\zeta_3 = 0,96$ и $\zeta_4 = 0,97$.

Вычисляем E_z :

$$E_z = \frac{2 \cdot 0,01 \cdot 0,96 + 0,02 \cdot 0,97}{2,6 \cdot 0,548} \cdot 7,1 \cdot 10^5 = 19,2 \cdot 10^3 \text{ дан/см}^2.$$

Для выяснения, какую из двух формул (79) использовать для расчета, проверяем неравенство

$$\frac{0,75}{0,12} = 6,25 > 0,4 \cdot \sqrt[3]{\frac{6,9 \cdot 10^5 \cdot 19,2 \cdot 10^3}{(1 - 0,33^2) (43,4 \cdot 10^2)^2}} = 3,69.$$

Поскольку неравенство выполняется, используем первую формулу (79) и находим

$$N_{x1e} = 0,91 \cdot 0,12 \sqrt[3]{\frac{6,9 \cdot 10^5 \cdot 19200 \cdot 43,4 \cdot 10^2}{(1 - 0,33^2)}} = 4380 \text{ дан/см.}$$

Из двух значений N_{x1e} в расчет вводим меньшее значение, равное 4380 дан/см.

Действительную критическую нагрузку определяем по формулам на стр. 298—299. Принимаем $\eta = 0,9$.

Вычисляем

$$\sigma_{1e} = \frac{4380}{0,12} = 36500 \text{ дан/см}^2.$$

Так как σ_e существенно превышает $\sigma_{нц}$, то действительные критические напряжения будем определять по второму способу пересчета — по формуле (14) гл. 10:

$$\sigma_{1к} = 0,9 \cdot 4000 \frac{1 + 0,11}{1 + 0,11 + 0,11^2} = 3570 \text{ дан/см}^2;$$

$$\varphi = \frac{3570}{36500} = 0,098;$$

$$N_{x1к} = 4380 \cdot 0,098 = 428 \text{ дан/см.}$$

Действительная критическая нагрузка на единицу ширины всей панели

$$N_{хк} = 2N_{x1к} = 856 \text{ дан/см.}$$

Критическая нагрузка, обусловленная местной потерей устойчивости внешними слоями, больше чем критическая нагрузка общей потери устойчивости панели.

Следовательно, принимаем

$$N_K = 624 \text{ дан/см.}$$

Пример 2. Определение оптимальных параметров панели

Цилиндрическая панель с радиусом срединной поверхности $R = 150 \text{ см}$, размерами в плане $a^* = b^* = 50 \text{ см}$ свободно оперта по контуру и сжата усилиями N . Критическое значение $N_K = 530 \text{ дан/см}$ (см. рис. 8). Внешние слои панели одинаковы по толщине и выполнены из алюминиевого сплава Д16Т ($E_{1,2} = 6,9 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2$, $\nu_{1,2} = 0,3$). Сотовый заполнитель выполнен из алюминиевой фольги с характеристиками: $E_3 = 7,1 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2$, $\nu_3 = 0,3$. Панель имеет начальную кососимметричную погибь, которая характеризуется параметром $\bar{\omega}_K^* = 0,002$ вдоль размера a^* . Требуется определить оптимальные параметры этой панели.

Заменяем заданную цилиндрическую панель шарнирно опертой по нагруженным кромкам бесконечно широкой пластинкой с размером b в направлении сжатия, полагая, что критическая нагрузка общей потери устойчивости, высота заполнителя и толщина внешних слоев заданной панели и заменяющей пластинки одинаковы. Определим размер b заменяющей пластинки:

$$b = b^* \sqrt{\frac{m_t}{m_t^*}},$$

где $m_t = \frac{1}{1+k}$ — коэффициент устойчивости заменяющей пластинки (см. стр. 271); $k = \frac{\pi^2 B_0 h}{2 G b^2}$ [см. формулы (3) гл. 10]; m_t^* — коэффициент устойчивости цилиндрической панели, определяют по графикам на рис. 2 гл. 10 в зависимости от параметров

$$\alpha^2 = \frac{(b^*)^4 (1 - \nu^2) B}{\pi^4 R^2 D} \text{ и } k = \frac{\pi^2 B_0 h}{2 G^* (b^*)^2}.$$

В первом приближении положим $G = \infty$, $\frac{D}{B} = h + \frac{\delta}{2} = 1$ и найдем

$$m_t = 1; \quad \alpha^2 = 2,6; \quad m_t^* = 4,8;$$

$$b = 50 \sqrt{\frac{1}{4,8}} = 22,8 \text{ см.}$$

Заметим, что так как кромки пластины свободно оперты, то $b_0 = b \nu_0 = b$ (b_0 — приведенная длина; $\nu_0 = 1$ — коэффициент приведенной длины). Затем определим

$$\frac{N_K}{b} = \frac{N_K}{b_0} = \frac{530}{22,8} = 23,2 \text{ дан/см}^2.$$

По графикам на рис. 5—7 для $\frac{N_K}{b_0} = 23,2 \text{ дан/см}^2$ и $\bar{\omega}_K = 0,002$ определим

$$\frac{2(h + \delta)}{b_0} = 0,092; \quad \frac{\delta}{2(h + \delta)} = 0,0388; \quad \frac{\delta_3}{r} = 0,01;$$

отсюда

$$2(h + \delta) = 0,092 \cdot 22,8 = 2,1 \text{ см};$$

$$\delta = 0,0388 \cdot 2,1 = 0,081 \text{ см};$$

$$h = 0,97 \text{ см}.$$

Модули сдвига определяют по формулам (1) гл. 9:

$$G_{xz} = G_{c3} \frac{\delta_3}{r} \xi = 2,7 \cdot 10^5 \cdot 0,01 \cdot 0,878 = 2370 \text{ дан/см}^2;$$

$$G_{yz} = 0,576 G_{c3} \frac{\delta_3}{r} = 0,576 \cdot 2,7 \cdot 10^5 \cdot 0,01 = 1550 \text{ дан/см}^2;$$

$$G^* = \frac{G_{xz} + G_{yz}}{2} = 1960 \text{ дан/см}^2.$$

Проведем второе приближение.

При найденных из первого приближения значениях G , h и δ получим

$$m_t = \frac{1}{1 + k} = 0,676; \quad \alpha^2 = \frac{(b^*)^4 (1 - \nu^2) B}{\pi^4 R^2 D} = 2,54;$$

$$k = \frac{\pi^2 B_0 h}{2 G^* (b^*)^2} = 0,12; \quad m_t^* = 3,89.$$

Размер заменяющей пластинки будет

$$b = b^* \sqrt{\frac{m_t}{m_t^*}} = 50 \sqrt{\frac{0,676}{3,89}} = 20,7 \text{ см},$$

и далее

$$\frac{N_K}{b} = \frac{N_K}{b_0} = \frac{530}{20,7} = 25,6 \text{ дан/см}^2.$$

По графикам на рис. 5—7 при $\frac{N_K}{b_0} = 25,6 \text{ дан/см}^2$ и $\bar{w}_K = 0,002$ определим

$$\frac{2(h + \delta)}{b_0} = 0,0956; \quad \frac{\delta}{2(h + \delta)} = 0,041; \quad \frac{\delta_3}{r} = 0,01,$$

отсюда

$$2(h + \delta) = 0,0956 \cdot 20,7 = 1,98 \text{ см};$$

$$\delta = 0,041 \cdot 1,98 = 0,081 \text{ см};$$

$$h = 0,91 \text{ см}.$$

Модули сдвига находим по формулам (1) гл. 9:

$$G_{xz} = 2370 \text{ дан/см}^2;$$

$$G_{yz} = 1550 \text{ дан/см}^2;$$

$$G^* = 1960 \text{ дан/см}^2.$$

Аналогичным путем проводим третье приближение, после которого получим значения $h = 0,884 \text{ см}$, $\delta = 0,081 \text{ см}$ и $G_{xz}^* = 2370 \text{ дан/см}^2$, $G_{yz}^* = 1550 \text{ дан/см}^2$, достаточно близко совпадающие с результатом предыдущего приближения. Эти значения считаем оптимальными параметрами панели.

По найденной величине параметра $\frac{\delta_3}{r}$ значения δ_3 и r подбирают так, чтобы была обеспечена прочность соединения сот с внешними слоями и местная

устойчивость внешних слоев при форме искривления, связанной с внутрисотовым выпучиванием. Чем меньше величина r при постоянном значении $\frac{\delta_s}{r}$, тем легче выполняются оба эти условия.

Порядок расчета, показанный на этом примере, сохраняется и для других конфигураций пластинок или оболочек при других условиях закрепления кромок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куршин Л. М., Прусаков А. П. Расчет трехслойных панелей. М., Оборонгиз, 1960.
 2. Александров А. Я., Бородин И. Я., Павлов В. В. Конструкции с заполнителями из пенопластов. М., Оборонгиз, 1962.
 3. Куршин Л. М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. Сб. «Расчет пространственных конструкций». М., Стройиздат. Вып. VII, 1961.
 4. Вопросы расчета элементов авиационных конструкций. Расчет трехслойных панелей и оболочек. Сборник статей, вып. 1. М., Оборонгиз, 1959.
 5. Вопросы расчета элементов авиационных конструкций. Расчет трехслойных панелей и оболочек. Вып. 2. М., Оборонгиз, 1955.
 6. Расчет элементов авиационных конструкций. Расчет трехслойных панелей и оболочек. Вып. 3. «Машиностроение», 1966.
 7. Расчет элементов авиационных конструкций. Расчет трехслойных панелей и оболочек. Вып. 4. «Машиностроение», 1965.
 8. Справочник по строительной механике корабля. Под ред. Ю. А. Шиманского, т. 2. Л., Судпромгиз, 1955.
-

• МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

Глава 12

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные конструкции, состоящие из пластинок и оболочек, как гладких, так и в сочетании с тонкими линейными элементами, широко применяют в судостроении, самолетостроении, ракетостроении и др. Для облегчения веса конструкции или по условиям эксплуатации приходится нарушать сплошность этих конструкций выкружками, отверстиями, лазами, смотровыми щелями.

Возле отверстий появляется зона концентрации повышенных напряжений, причем наибольшие из них могут в несколько раз превышать так называемые «средние напряжения».

Недостаточное знание истинной картины напряженного состояния может привести к перетяжелению несущей конструкции или к разрушению. Поэтому проблеме концентрации напряжений уделяют большое внимание в мировой литературе [29].

При рассмотрении отдельных задач определим возмущение, которое вносит то или иное отверстие в заданное основное напряженное состояние, а также найдем соответствующие коэффициенты концентрации напряжений. Под коэффициентом концентрации напряжений понимают отношение какого-либо компонента тензора напряжений в точке, находящейся в зоне возмущения возле отверстия, к тому же компоненту тензора напряжений в той же точке пластинки (оболочки), но без отверстия, находящейся под действием той же системы внешних усилий, что и пластинка (оболочка) с рассматриваемым отверстием. Отсюда следует, что для плоской задачи в каждой точке, вообще говоря, мы имеем три коэффициента концентрации напряжений. Но так как наибольшие напряжения в зоне концентрации возле свободных отверстий находятся на контуре отверстия, то из трех коэффициентов концентрации остается только один, для тангенциальных напряжений σ_θ , ибо по контуру отверстия не прикладывается никаких внешних усилий.

НАПРЯЖЕНИЯ ОКОЛО ОДНОГО ОТВЕРСТИЯ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Одноосное растяжение. К р у г о в о е о т в е р с т и е. Рассмотрим бесконечную плоскость, ослабленную круговым отверстием радиуса R , при растяжении постоянными усилиями σ_0 , как указано на рис. 1.

Результаты, полученные для бесконечной пластинки, являются достаточно точными для случая, когда размеры конечной пластинки

значительно (в 4—5 раз) превосходят наибольший характерный размер отверстия. Опыты показывают, что отверстие не оказывает заметного влияния на напряжения на расстоянии нескольких (двух-трех) диаметров от края отверстия. В частности, расстояние в пять диаметров может рассматриваться как бесконечно большое расстояние.

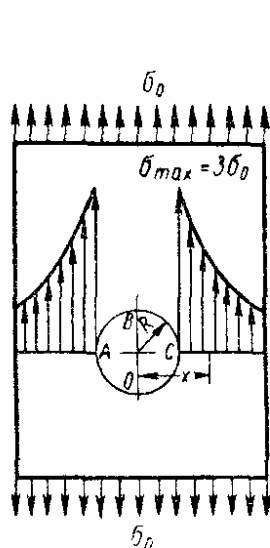


Рис. 1

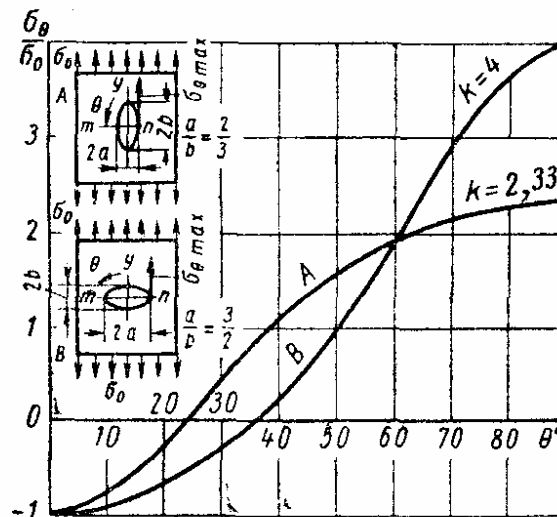


Рис. 2

Распределение напряжений около кругового отверстия в пластинке при одноосном растяжении (рис. 1) определим по формулам:

нормальное (тангенциальное) напряжение

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_0}{2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) - \left(1 + \frac{3R^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right]; \quad (1)$$

нормальное (радиальное) напряжение

$$\sigma_{\rho} = \frac{\sigma_0}{2} \left[\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) + \left(1 - \frac{4R^2}{\rho^2} + \frac{3R^4}{\rho^4} \right) \cos 2\theta \right]; \quad (2)$$

сдвигающее напряжение

$$\sigma_{\rho\theta} = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{2R^2}{\rho^2} - \frac{3R^4}{\rho^4} \right) \sin 2\theta, \quad (3)$$

где R — радиус отверстия; ρ — радиус-вектор точки пластинки.

На контуре пластинки $\rho = R$ получим

$$\sigma_{\theta} = \sigma_0 (1 - 2 \cos 2\theta). \quad (4)$$

Максимальное значение σ_{θ} получим из формулы (4) при $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\sigma_{\theta \max} = 3\sigma_0.$$

т. е. максимальный коэффициент концентрации напряжений

$$k = \frac{\sigma_{\theta \max}}{\sigma_0} = 3. \quad (5)$$

Эллиптическое отверстие. Рассмотрим бесконечную пластинку, ослабленную эллиптическим отверстием с полуосями a и b , при одноосном растяжении (рис. 2).

Максимальный коэффициент концентрации напряжений

$$k = 1 + 2 \frac{a}{b}. \quad (6)$$

Напряжения вдоль контура эллиптического отверстия

$$\sigma_\theta = \sigma_0 \frac{\sin^2 \theta + 2q \sin^2 \theta - q^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + q^2 \cos^2 \theta}, \quad (7)$$

где

$$q = \frac{a}{b}.$$

Квадратное отверстие. Изменение коэффициента концентрации напряжений по контуру квадратного отверстия (a — сторона квадрата) для радиусов закругления углов $r_c = 0,06a$, $r_c = 0,0245a$ приведено в табл. 1.

1. Коэффициенты концентрации напряжений k для квадратного отверстия (рис. 3)

θ°	$\alpha = 0$		$\alpha = 45^\circ$	
	$r_c = 0,06a$	$r_c = 0,0245a$	$r_c = 0,06a$	$r_c = 0,0245a$
0	-0,808	-0,936	0,333	0,412
35	-0,268	-0,544	3,880	6,564
40	0,980	0,605	6,223	9,672
45	3,000	4,368	7,800	11,516
50	3,860	4,460	6,223	9,672
55	3,366	2,888	3,880	6,564
90	1,472	1,760	0,333	0,412

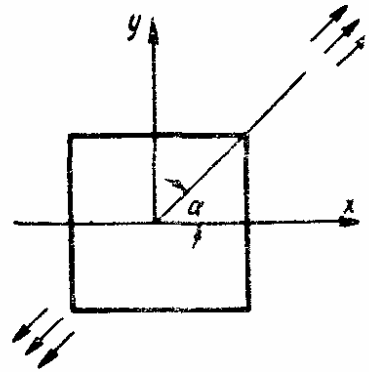


Рис. 3

Прямоугольное отверстие. Кривые изменения коэффициента концентрации напряжений по контуру отверстия для четырех различных расположений отверстия относительно растягивающих сил показаны на рис. 4 и 5. Отношение длины к ширине $\frac{a}{b} = 5$. Максимальная концентрация напряжений — в углах отверстия.

Значения k и k' для различных значений $\frac{a}{b}$ приведены в табл. 2. Коэффициент k показывает концентрацию в углах, k' — в центре стороны, параллельной к направлению приложенной нагрузки.

2. Коэффициенты концентраций k и k' для прямоугольного отверстия

$\frac{a}{b}$	k	k'	$\frac{a}{b}$	k	k'
1 : 5	8,0	2,5	3 : 1	3,2	1,35
1 : 3	6,2	2,2	5 : 1	3,0	1,2
1 : 1	3,0	1,5			

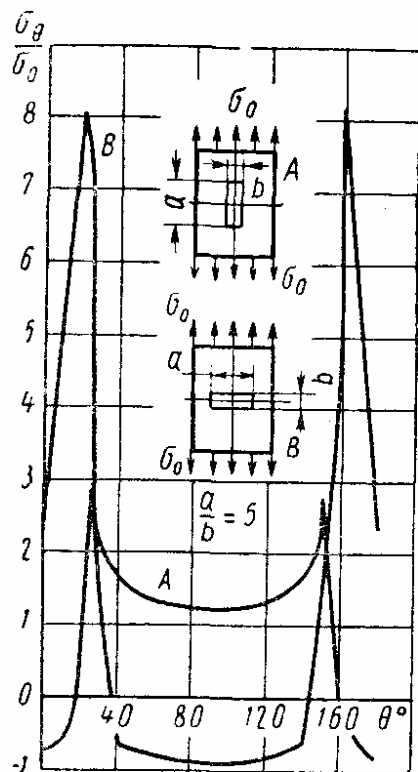


Рис. 4

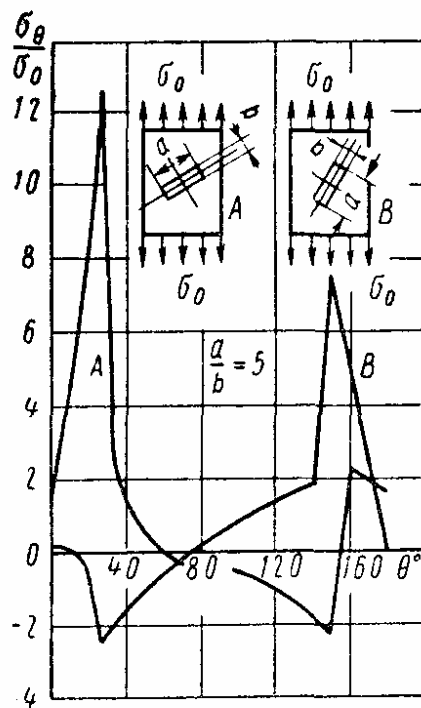


Рис. 5

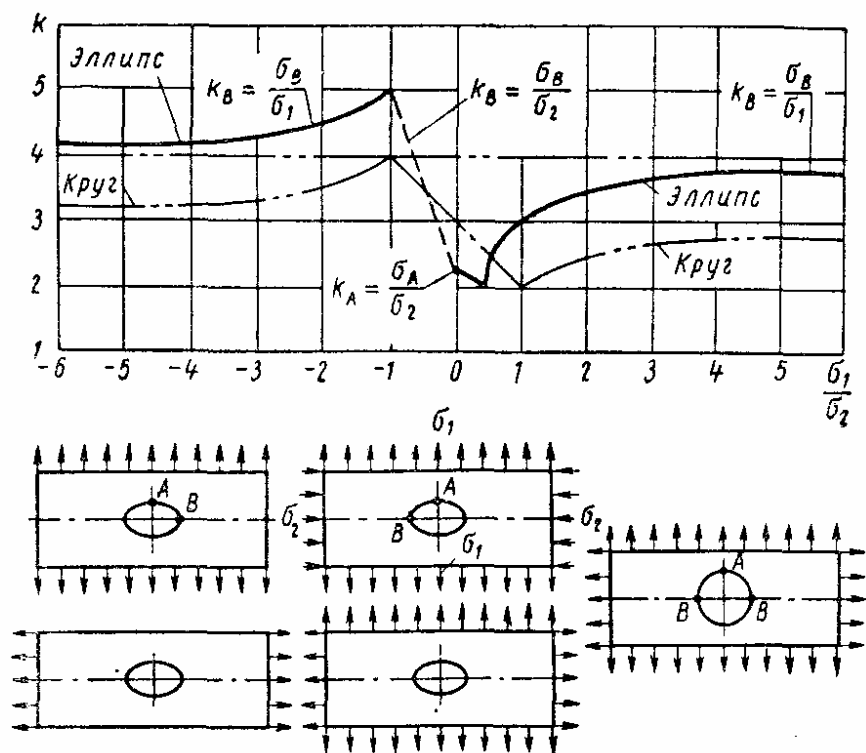


Рис. 6

Двухосное растяжение (сжатие). Изменение максимального коэффициента концентрации напряжений в зависимости от отношения внешних нагрузок $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ для кругового и эллиптического отверстия при $\frac{a}{b} = 1,5$ показано на рис. 6.

Чистый изгиб широкой полосы. Изменение коэффициента концентрации напряжений $k = \frac{\sigma_\theta}{M \frac{R}{J}}$ по контуру отверстия при чистом изгибе

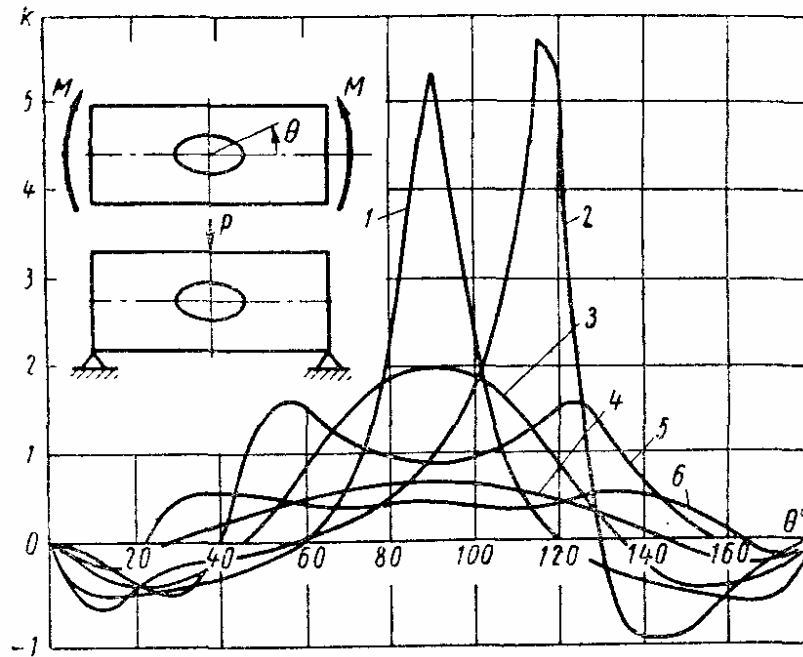


Рис. 7. Изменение коэффициентов концентрации напряжений k по контуру отверстий: 1—ромбовидного; 2—треугольного; 3—кругового; 4—эллиптического; 5—квадратного; 6—прямоугольного

для различных форм отверстий показано на рис. 7 (R — постоянная, характеризующая размер отверстия; для эллипса $R = \frac{a+b}{2}$; J — момент инерции поперечного сечения балки).

Консольный изгиб широкой полосы. Изменение коэффициента концентрации напряжений k по контуру отверстий при изгибе консольной балки, жестко закрепленной на одном конце и нагруженной поперечной нагрузкой p на другом конце, показано на рис. 8. Центр отверстия лежит на оси балки на расстоянии d от зашечленного конца.

Коэффициент концентрации напряжений вычисляют по формуле

$$k = \frac{\sigma_\theta}{p \frac{h^2}{J}}.$$

Влияние границ пластинки. Если отверстие велико по сравнению с шириной пластинки (рис. 9), то ширина пластинки в значительной степени влияет на распределение напряжений. На рис. 9 показано распределение напряжений σ_θ по контуру кругового отверстия (кривая 1)

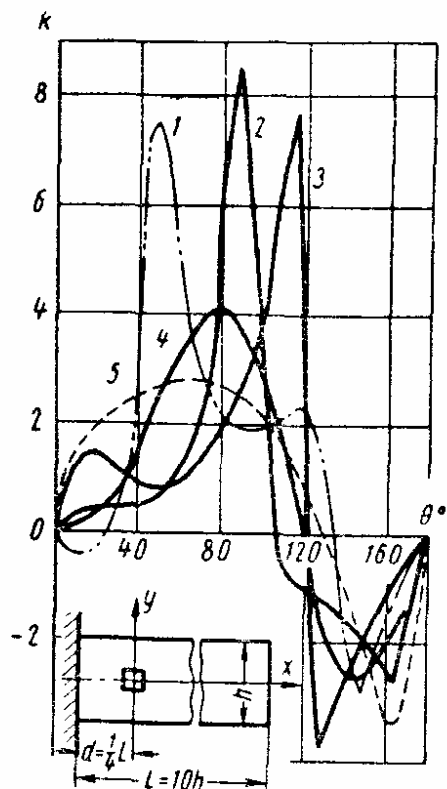


Рис. 8. Изменение коэффициентов концентрации напряжений k по контуру отверстий: 1—квадратного; 2—ромбовидного; 3—треугольного; 4—кругового; 5—эллиптического

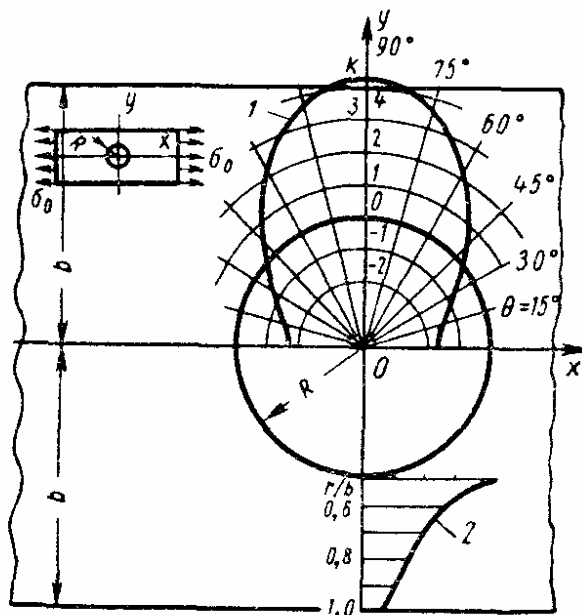


Рис. 9. Распределение напряжений при одноосном растяжении пластинки с круговым отверстием: 1—напряжения σ_θ по контуру отверстия; 2—напряжения σ_x в наиболее опасном сечении ($x = 0$) вдоль оси Oy

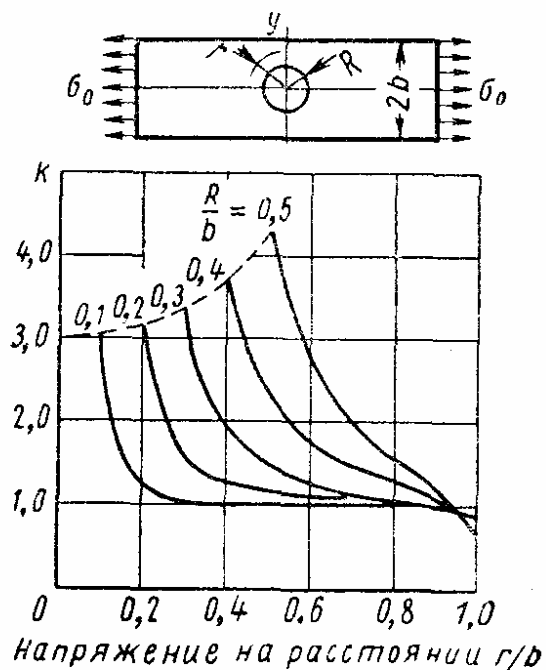


Рис. 10. Изменение коэффициента концентрации напряжений при $\theta = \frac{\pi}{2}$

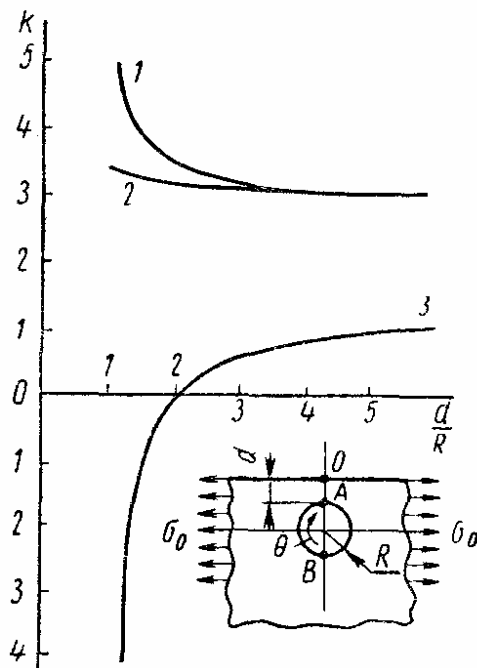


Рис. 11. Изменение коэффициента концентрации напряжений в зависимости от $\frac{R}{d}$: 1—в точке A; 2—в точке B; 3—в точке O

по наиболее опасному сечению $x = 0$ (кривая 2) при одноосном растяжении пластины шириной $2b$, когда $\frac{R}{b} = 0,5$.

Изменение коэффициента концентрации напряжений $k = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ в зависимости от $\frac{r}{b}$, где r — расстояние от центра отверстия, показано на рис. 10.

Отверстие вблизи края. Если круговое отверстие радиуса R расположено вблизи (на расстоянии d) от края, то изменение коэффициента концентрации в зависимости от $\frac{d}{R}$ для случая растяжения пластинки вдоль границы показано на рис. 11.

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА

Эллиптическое отверстие [29, 21]. Анизотропия материала оказывает сильное влияние на величину коэффициента концентрации напряжений лишь в небольшой области около отверстия. Напряженное же состояние по мере удаления от отверстия, как и в случае изотропной среды, быстро затухает.

Например, коэффициент концентрации напряжений k в точке A (рис. 12) эллиптического отверстия, находящегося в неограниченной бесконечной пластинке, характеризуемой упругими константами β_1 и β_2 , определяют по формуле

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{p} = 1 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{a}{b}. \quad (8)$$

В случае изотропной среды $\beta_1 = \beta_2 = 1$, и из формулы (8) следует соотношение (6).

Значения k возле эллиптического $\left(\frac{a}{b} = 3\right)$ и кругового $\left(\frac{a}{b} = 1\right)$ отверстия приведены для некоторых ортотропных материалов в табл. 3 (при расположении отверстия так, как показано на рис. 12).

Квадратное отверстие [21]. Рассмотрим отверстие с уравнением контура

$$\left. \begin{aligned} x &= R_1 (\cos \theta + \varepsilon \cos 3\theta); \\ y &= R_1 (-\sin \theta + \varepsilon \sin 3\theta), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\varepsilon = \pm \frac{1}{9}.$$

Это отверстие мало отличается от квадрата с закругленными углами. При отрицательном ε стороны квадрата параллельны осям координат (рис. 13, а); при положительном ε вершины квадрата лежат на осях

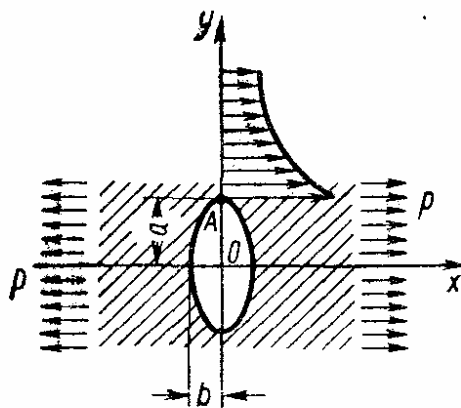


Рис. 12

координат (рис. 13, б). На рис. 13, а приведено изменение коэффициента концентрации напряжений $k = \frac{\sigma_0}{\rho}$ по контуру квадратного отверстия в ортотропной пластинке при растяжении пластины равномерно распределительными усилиями ρ вдоль оси x .

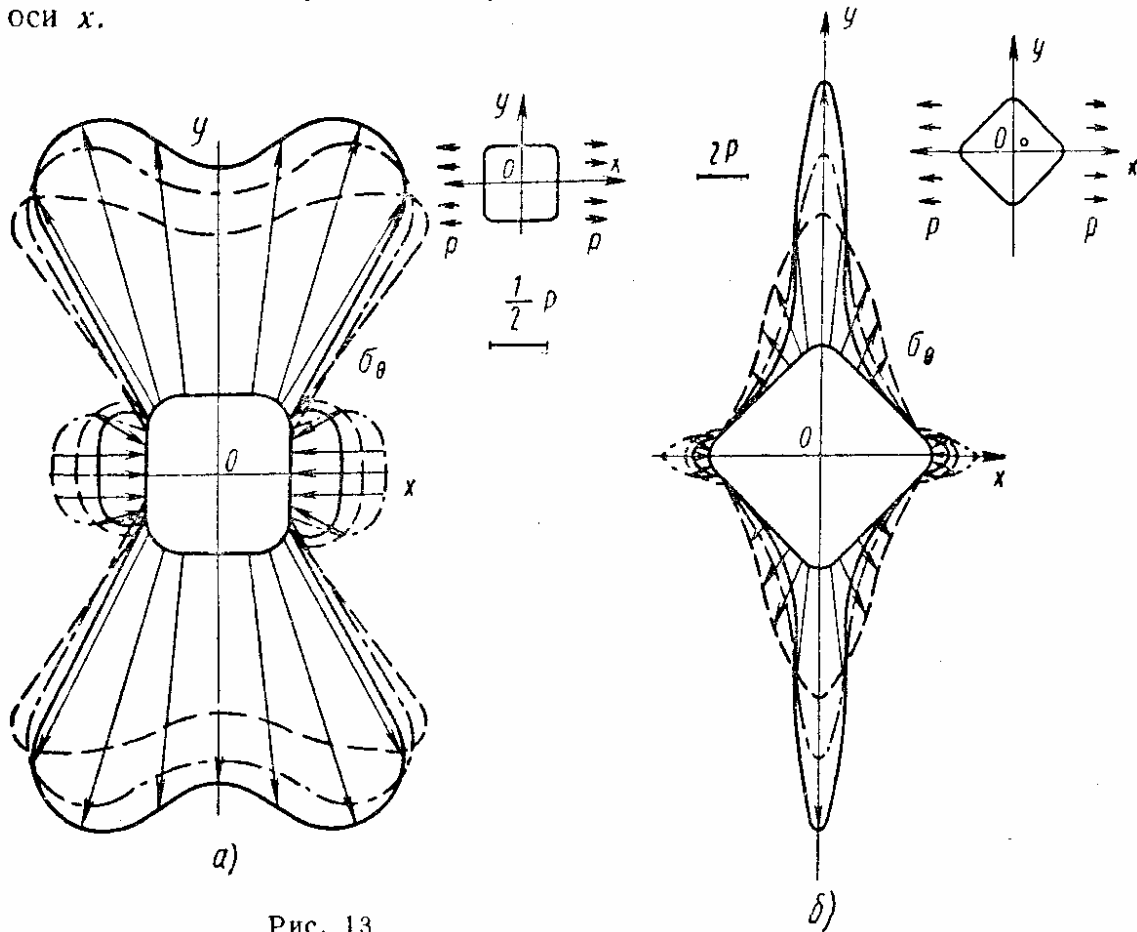


Рис. 13

8. Некоторые значения коэффициента концентрации напряжений для кругового и эллиптического отверстий

$\frac{a}{b}$	Значения k для материалов			
	Изотропная среда	Дуб	Береза	Ель
При растяжении пластинки вдоль большего модуля упругости ($E_x = E_{\max}$)				
3	7	8,95	14,63	18,72
1	3	3,65	5,54	6,91
При растяжении пластинки вдоль меньшего модуля упругости ($E_x = E_{\min}$)				
3	7	5,875	4,546	4,915
1	3	2,625	2,182	2,305

Пластина изготовлена из авиационной фанеры, для которой:

1) упругие постоянные (в $\text{м}^2/\text{н}$)

$$a_{11} = 0,83333 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}; \quad a_{12} = -0,05917 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81};$$

$$a_{22} = 1,66667 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}; \quad a_{66} = 14,2857 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81};$$

константы

$$\beta_1 = 4,11; \quad \beta_2 = 0,343,$$

если ось x направлена вдоль волокон ($E_x = E_{\text{max}}$);

2) упругие постоянные
(в $\text{м}^2/\text{н}$)

$$a_{11} = 1,66667 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81};$$

$$a_{12} = -0,05917 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81};$$

$$a_{22} = 0,83333 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81};$$

$$a_{66} = 14,2857 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81};$$

константы

$$\beta_1 = 0,243; \quad \beta_2 = 2,91,$$

если ось x направлена поперек волокон ($E_x = E_{\text{min}}$).

На графиках (рис. 13) сплошные линии соответствуют случаю, когда $E_x = E_{\text{max}}$, штрих-пунктирные, когда $E_x = E_{\text{min}}$, а штриховые относятся к изотропной пластинке.

Прямоугольное отверстие¹. Изменение $k = \frac{\sigma_\theta}{p}$ по контуру прямоугольного отверстия с закругленными углами и с соотношением сторон $\frac{a}{b} = 2$ в пластине из авиационной фанеры при одноосном растяжении показано на рис. 14. Сплошная линия соответствует $E_x = E_{\text{max}}$, штрих-пунктирная линия $E_x = E_{\text{min}}$, штриховая — изотропной пластинке.

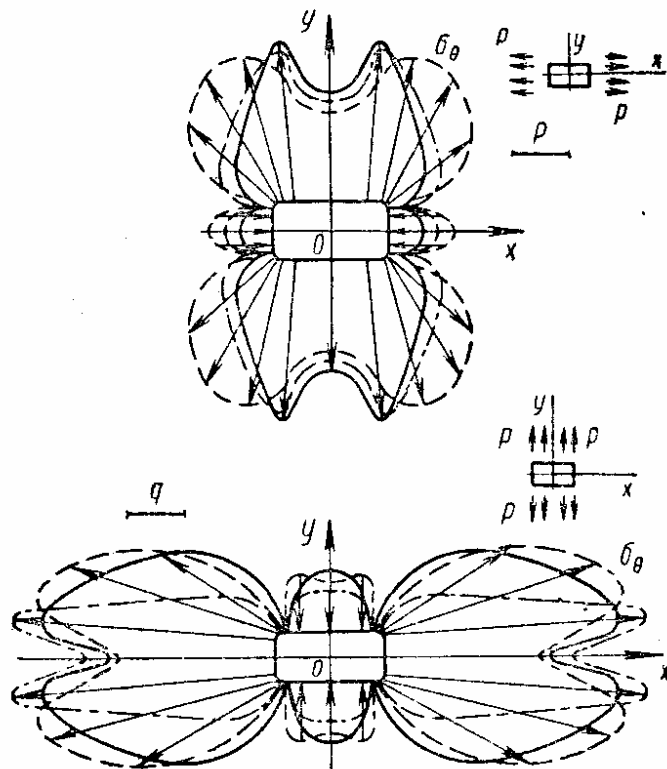


Рис. 14

¹ По данным А. С. Космодамианского.

НАПРЯЖЕНИЯ ВОЗЛЕ ДВУХ ОТВЕРСТИЙ

В ряде работ [29] получены приближенные решения для пластинок, ослабленных отверстиями различной конфигурации. Некоторые из них приведены ниже.

Два равных круговых отверстия [29]. В случае, когда пластинка ослаблена двумя равными круговыми отверстиями радиуса R , изменение коэффициента концентрации напряжений k в точках A, B, D в зависимости от $Q = \frac{l}{2R}$ (где l — расстояние между цен-

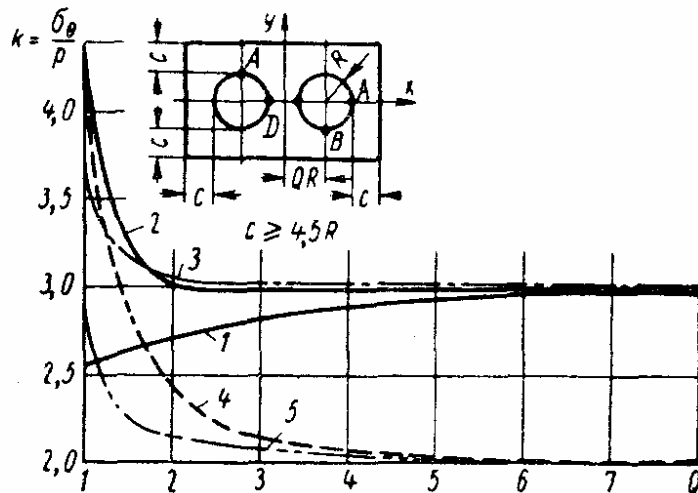


Рис. 15

трами отверстий) приведено на рис. 15. Пластинка растягивается постоянными усилиями p . Кривая 1 соответствует растяжению вдоль оси y (в точке B); кривые 2, 3 — растяжению вдоль оси x (соответственно в точках D и A), кривые 4, 5 соответствуют всестороннему растяжению (соответственно в точках D и A).

Два неравных круговых отверстия¹. Пусть упругая изотропная плоскость ослаблена двумя неодинаковыми круговыми отверстиями. Центры этих отверстий лежат на прямой, совпадающей с осью x (рис. 16). Расстояние между отверстиями s , а между центрами отверстий l . Радиусы малого и большого отверстий соответственно $r = 1$ и R ($R > 1$). На бесконечности заданы растягивающие усилия p и q , как показано на рис. 16.

Графики, характеризующие распределение напряжений σ_θ по контуру малого отверстия и по сечению $y = 0$ между отверстиями при $\frac{R}{r} = 20$ и $\frac{s}{r} = 5$, показаны на рис. 17 и 18. Штриховые линии на этих графиках относятся к среде, ослабленной одним отверстием любого радиуса, и даны для сравнения. Эти графики показывают влияние большого отверстия на напряженное состояние вблизи малого отверстия. Что касается распределения напряжений вблизи большого отверстия, то оно получается примерно таким же, как и в среде с одним отверстием

¹ По данным А. С. Космодамианского.

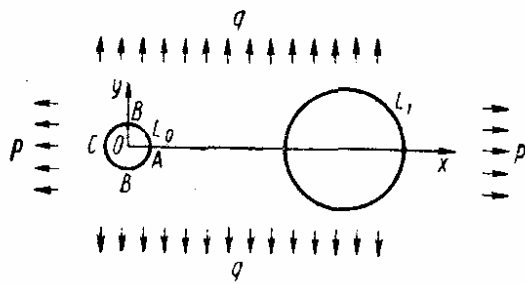


Рис. 16

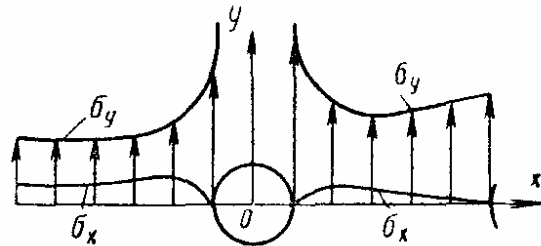
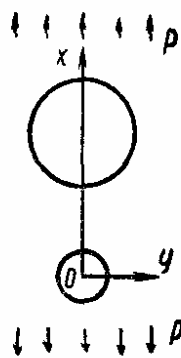
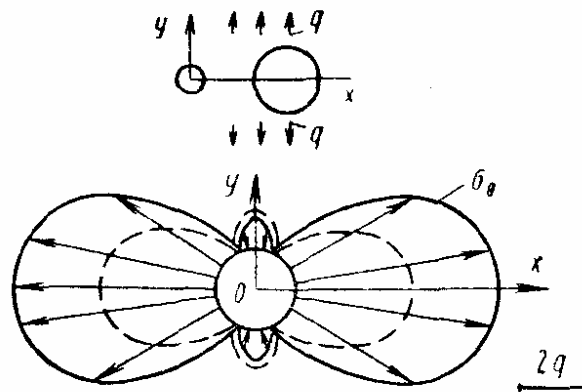


Рис. 18

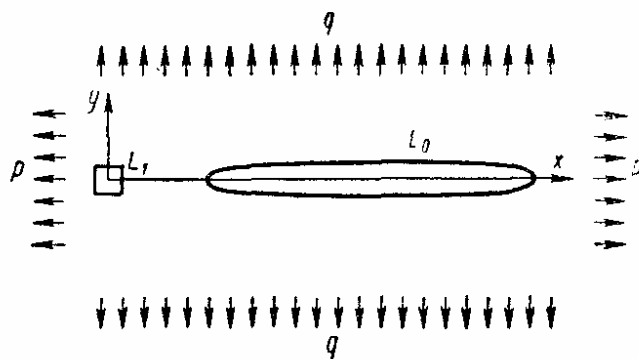
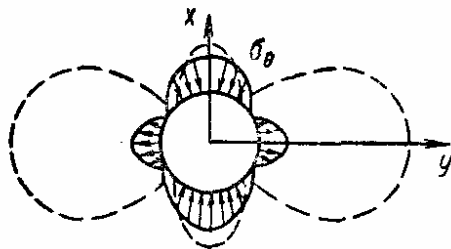


Рис. 19

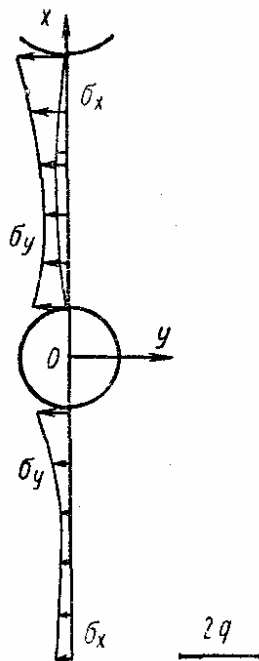


Рис. 17

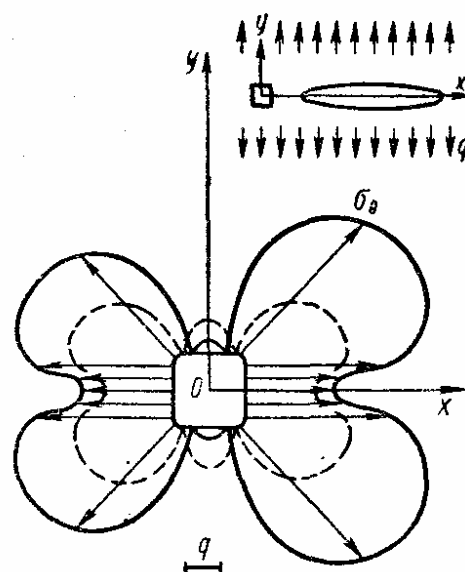


Рис. 20

(малое отверстие незначительно влияет на изменение напряженного состояния вблизи большого отверстия).

Эллиптическое и квадратное отверстие¹. Рассмотрим упругую изотропную плоскость, ослабленную двумя неодинаковыми криволинейными отверстиями, одно из которых является эллиптическим с полуосями a , b , а второе — квадратным с закругленными углами, уравнение контура которого приведено на стр. 333, причем $\epsilon = -\frac{1}{9}$. Расположение отверстий примем таким, как это изображено на рис. 19.

На бесконечности плоскость растягивается в двух направлениях усилиями p и q .

На рис. 20 показаны напряжения по контуру квадратного отверстия для случая, когда

$$\frac{a}{b} = 20; \quad \frac{R}{b} = 10,5; \quad m = \frac{19}{21}; \quad \frac{R_1}{b} = 1,125; \quad \frac{l}{b} = 26;$$

здесь $m = \frac{a-b}{a+b}$; $R = \frac{a+b}{2}$; R_1 — постоянная, влияющая на размеры квадратного отверстия (см. стр. 333); l — расстояние между центрами отверстий.

Штриховой линией на рис. 20 обозначено распределение σ_θ , когда плоскость ослаблена лишь одним квадратным отверстием.

НАПРЯЖЕНИЯ ВОЗЛЕ РЯДА ОТВЕРСТИЙ

На практике перфорированные пластинки обычно ослабляют квадратной (рис. 21, а), прямоугольной (рис. 21, б) или ромбической (рис. 21, в) системой круглых отверстий. Приведем кривые изменения

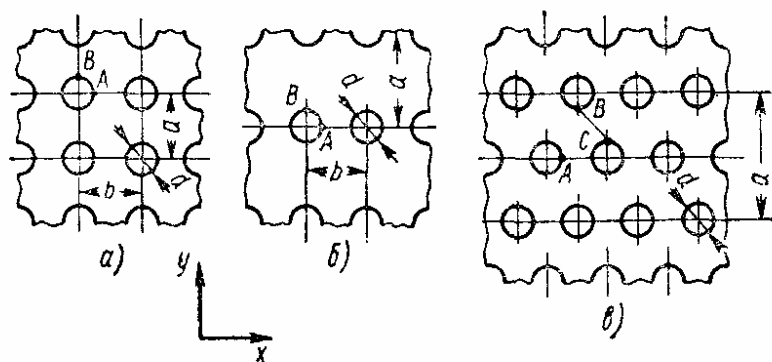


Рис. 21

коэффициента концентрации напряжений возле отверстий в точках А, В, С.

Квадратная сетка. Кривые изменения коэффициента концентрации напряжений

$$k = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_y^0} = \frac{\sigma_{3,4}}{\sigma_x^0}$$

¹ По данным А. С. Космодамианского.

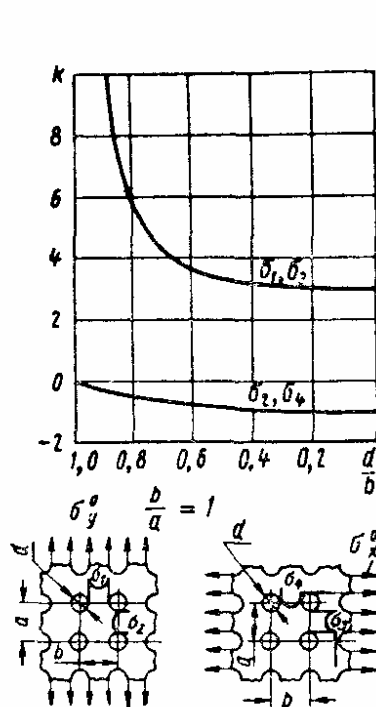


Рис. 22

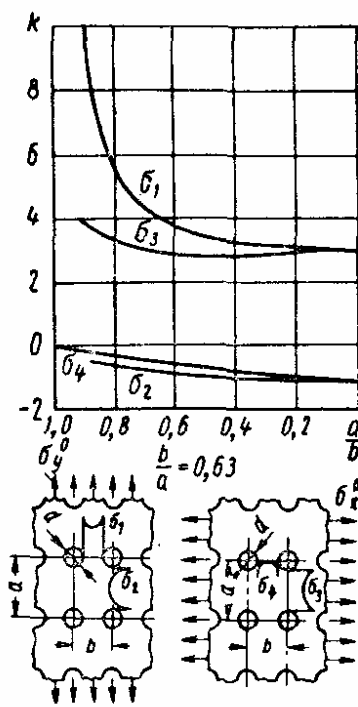


Рис. 23

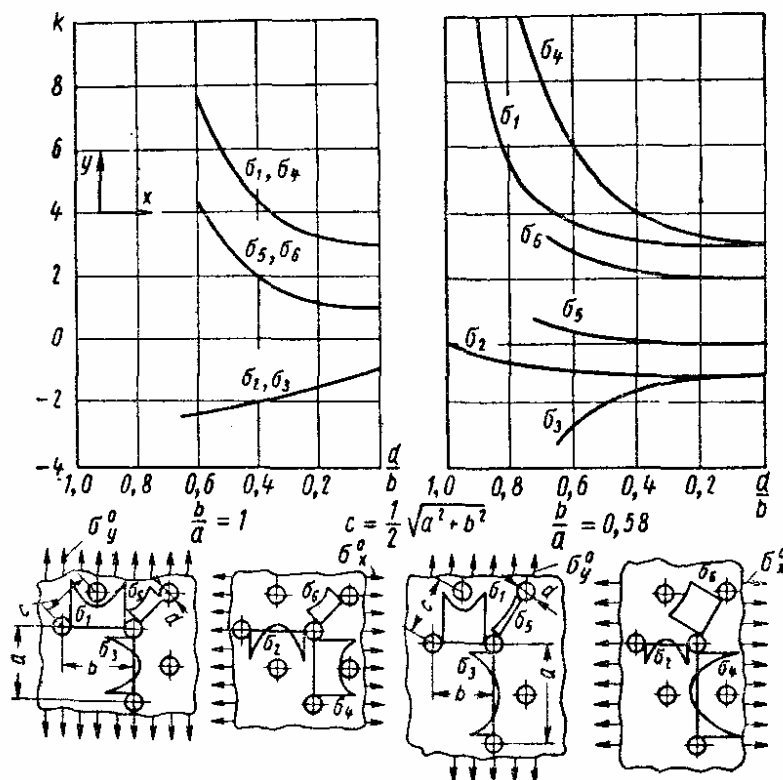
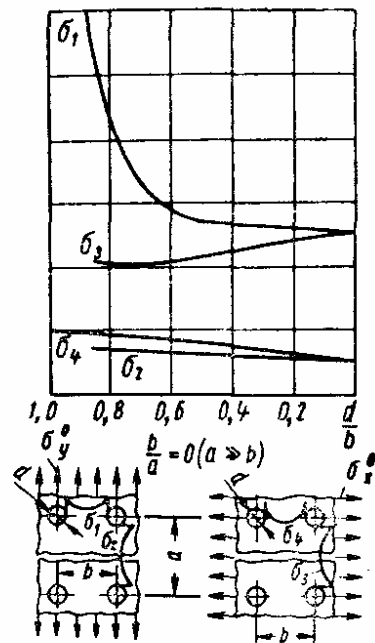


Рис. 24

в зависимости от отношения $\frac{d}{b}$, где d — диаметр кругового отверстия; b — расстояние между центрами отверстий (см. рис. 21) при одноосном растяжении пластинки, ослабленной квадратной сеткой круговых отверстий, показаны на рис. 22.

Прямоугольная сетка. Кривые изменения коэффициента концентрации напряжений

$$k = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_y^0} = \frac{\sigma_{3,4}}{\sigma_x^0}$$

в зависимости от $\frac{d}{b}$ при одноосном растяжении пластинки, ослабленной прямоугольной сеткой круговых отверстий, показаны на рис. 23.

Ромбическая сетка. В том случае, когда пластинка ослаблена ромбической сеткой круговых отверстий, изменения коэффициента концентрации

$$k = \frac{\sigma_{1,3,5}}{\sigma_y^0} = \frac{\sigma_{2,4,6}}{\sigma_x^0}$$

в зависимости от параметра $\frac{d}{b}$ приведены на рис. 24.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЙ С УЧЕТОМ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В основе моментной теории упругости лежит идеально упругая (изотропная или анизотропная) модель сплошной среды, взаимодействие между элементами которой осуществляется при помощи центральных сил (напряжений) и внутренних моментов (моментных напряжений). При этом тензоры напряжений и моментных напряжений являются несимметричными.

Исследования по несимметричной теории упругости в основном ведутся в двух направлениях (вариантах):

1) деформация среды полностью описывается вектором перемещений \vec{u} , считая вектор вращения $\vec{\omega}_1$ заданным $\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$;

2) деформация среды описывается двумя векторами: вектором перемещений \vec{u} и кинематически независимым от \vec{u} вектором вращения $\vec{\omega}_2$.

Механическое поведение новой изотропной модели характеризуют упругие константы: E, ν, l, η_1 (первый вариант) и $E, \nu, l, \eta, \eta_2, \eta_3$ (второй вариант), где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; l и η_i ($i = 1, 2, 3$) — новые постоянные материала (l имеет размерность длины; η_i — безразмерные величины типа коэффициента Пуассона).

Возможные методы постановки эксперимента по определению констант l и η обсуждаются, например, в работах [17, 30, 41].

Моментная теория упругости дает наиболее ощутимые поправки к решениям классической теории упругости для тех классов задач, в которых искомое напряженное состояние имеет наибольший градиент.

К этому классу относят, например, задачи о концентрации напряжений около отверстий.

Круговое отверстие. При одноосном растяжении усилиями p плоскости со свободным от напряжений круговым отверстием радиуса R нормальное (тангенциальное) напряжение σ_θ по контуру отверстия вычисляют по формуле

$$\sigma_\theta = p \left(1 - \frac{2 \cos 2\theta}{1 + F_1} \right), \quad (10)$$

где

$$F_1 = \frac{8(1-\nu)}{4 + \frac{R^2}{l^2} + 2 \frac{R}{l} \cdot \frac{K_0\left(\frac{R}{l}\right)}{K_1\left(\frac{R}{l}\right)}}.$$

Значение отношения $\frac{R}{l} = 3$ соответствует наибольшему возможному отклонению напряжения σ_θ от одноименного в классической теории упругости [23].

При $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$; $\frac{R}{l} = 3$ и $0 \leq \nu \leq 0,5$ коэффициент концентрации находится в пределах $2,4 \leq \frac{\sigma_\theta}{p} \leq 2,6$, т. е. на 12–20% меньше (в зависимости от коэффициента Пуассона ν) значения $\frac{\sigma_\theta}{p} = 3$, даваемого классической теорией упругости.

В случае жесткого кругового включения формулы для радиального σ_r и тангенциального σ_θ напряжений на контуре отверстия имеют вид [40]:

при простом растяжении усилиями p

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= p\nu \left(1 + \frac{2 \cos 2\theta}{3 - 4\nu - F_2} \right); \\ \sigma_r &= p(1 - \nu) \left(1 + \frac{2 \cos 2\theta}{3 - 4\nu - F_2} \right); \end{aligned} \quad (11)$$

при чистом сдвиге усилиями s

$$\sigma_\theta = s\nu \frac{4 \sin 2\theta}{3 - 4\nu - F_2}; \quad \sigma_r = s(1 - \nu) \frac{4 \sin 2\theta}{3 - 4\nu - F_2}, \quad (12)$$

где

$$F_2 = \frac{4(1-\nu)}{2 + \frac{R}{l} \cdot \frac{K_0\left(\frac{R}{l}\right)}{K_1\left(\frac{R}{l}\right)}};$$

$K_0\left(\frac{R}{l}\right)$; $K_1\left(\frac{R}{l}\right)$ — модифицированные функции Бесселя II рода.

Так как $\lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} F_1 = \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} F_2 = 0$, то из соотношений (10)–(12) получаем формулы для напряжений в классической теории упругости.

При простом растяжении среды с жестким включением коэффициент концентрации $\frac{\sigma_r}{\rho} (R; 0)$ выше одноименного классического на 10—50% в зависимости от ν .

Напряженное и деформированное состояние в среде с упругим включением [6] зависит от жесткостей включения μ_1 и среды μ_2 , коэффициен-

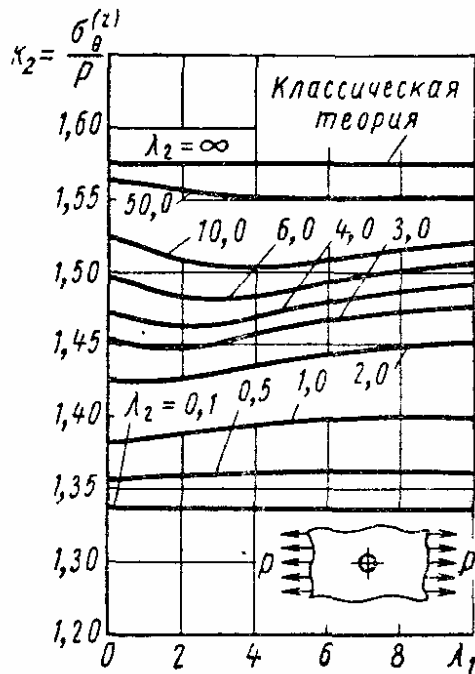


Рис. 25

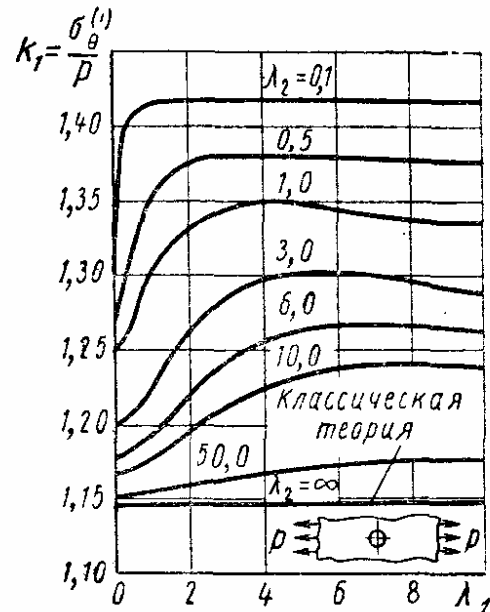


Рис. 26

тов Пуассона ν_1 , ν_2 и отношений $\frac{R}{l_1}$, $\frac{R}{l_2}$. Если $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{2}$, $\nu_1 = \frac{1}{4}$, $\nu_2 = \frac{1}{3}$, то изменение величины коэффициента концентрации напряжений $\frac{\sigma_\theta^{(2)}}{\rho} \left(R, \pm \frac{\pi}{2} \right)$ в зависимости от $\lambda_1 = \frac{R}{l_1}$ и $\lambda_2 = \frac{R}{l_2}$ при простом растяжении показано на рис. 25.

Аналогично построены графики на рис. 26 для коэффициента концентрации напряжений включения $\frac{\sigma_\theta^{(1)}}{\rho} \left(R, \pm \frac{\pi}{2} \right)$ при $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 2$; $\nu_1 = \frac{1}{4}$; $\nu_2 = \frac{1}{3}$.

Криволинейные отверстия. Приближенный метод решения плоских задач моментной теории упругости для областей, ослабленных криволинейным отверстием, изложен в работах [25, 30].

Распределение тангенциальных напряжений σ_θ вдоль четверти контура эллиптического отверстия показано на рис. 27 для случая равномерного всестороннего растяжения (где $\sigma_\theta^{мом}$ — по моментной теории; $\sigma_\theta^{кл}$ — по классической теории).

Как и в классической теории упругости, концентрация напряжений носит локальный характер (рис. 28).

Численные данные для графиков (рис. 26 и 27) получены для $\frac{R}{l} = 3$, $\nu = 0,25$ и $\frac{a}{b} = 1,5$ (a, b — полуоси эллипса).

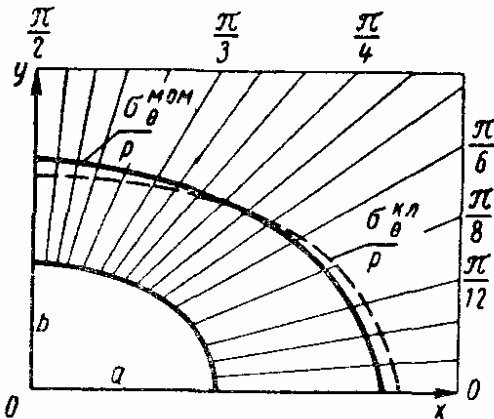


Рис. 27

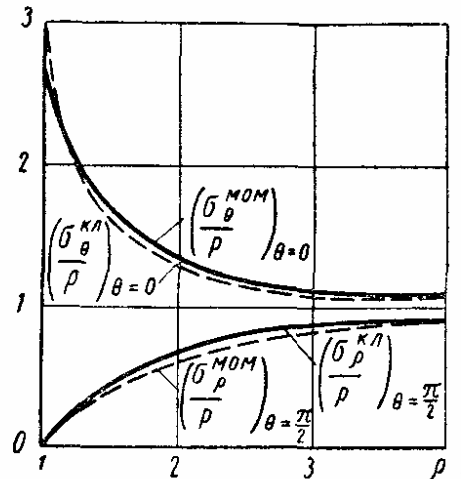


Рис. 28

В работе [32] предложен приближенный метод решения плоских задач для бесконечной области, ослабленной конечным числом произвольно расположенных отверстий, контуры которых являются гладкими кривыми.

ВЛИЯНИЕ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ КОЛЕЦ

Тонкостенные конструкции, состоящие из тонких пластинок, подкрепленных упругими элементами в виде ребер жесткости, находят в последнее время самое широкое применение [29, 35].

Довольно часто упругие элементы используют для подкрепления отверстий в пластинчатых конструкциях для уменьшения концентрации напряжений вблизи отверстий.

Для тонких подкрепляющих колец или колец, имеющих в поперечном сечении фасонный профиль, был принят в качестве расчетного подкрепляющего кольца криволинейный тонкий упругий стержень постоянного или переменного сечения, упругое поведение которого описывается теорией малых деформаций тонких криволинейных стержней.

Решение даже этой упрощенной задачи вызывает огромные вычислительные трудности. Однако в некоторых случаях можно довольно ясно представить себе картину напряженного состояния в пластинке возле упругого кольца и, следовательно, избежать этой большой вычислительной работы, если известно напряженное состояние в этой пластинке возле рассматриваемых отверстий для двух предельных случаев:

а) абсолютно гибкого кольца, т. е. когда отверстие не подкреплено кольцом;

б) абсолютно жесткого кольца.

Для всякого упругого кольца, впаянного в рассматриваемое отверстие пластинки, картина напряженного состояния возле кольца будет представлять некоторое «среднее значение» между этими двумя предельными случаями.

Коэффициенты концентрации напряжений

$$k = \frac{\sigma_{\theta}}{p}, \quad k = \frac{\sigma_r}{p}, \quad k = \frac{\tau_{r\theta}}{p}$$

в некоторых характерных точках различных криволинейных отверстий для абсолютно гибкого и абсолютно жесткого подкрепляющего кольца приведены на рис. 29, где кривые *I* характеризуют напряжения σ_{θ} для отверстия (без усиливающего кольца), кривые *II* —

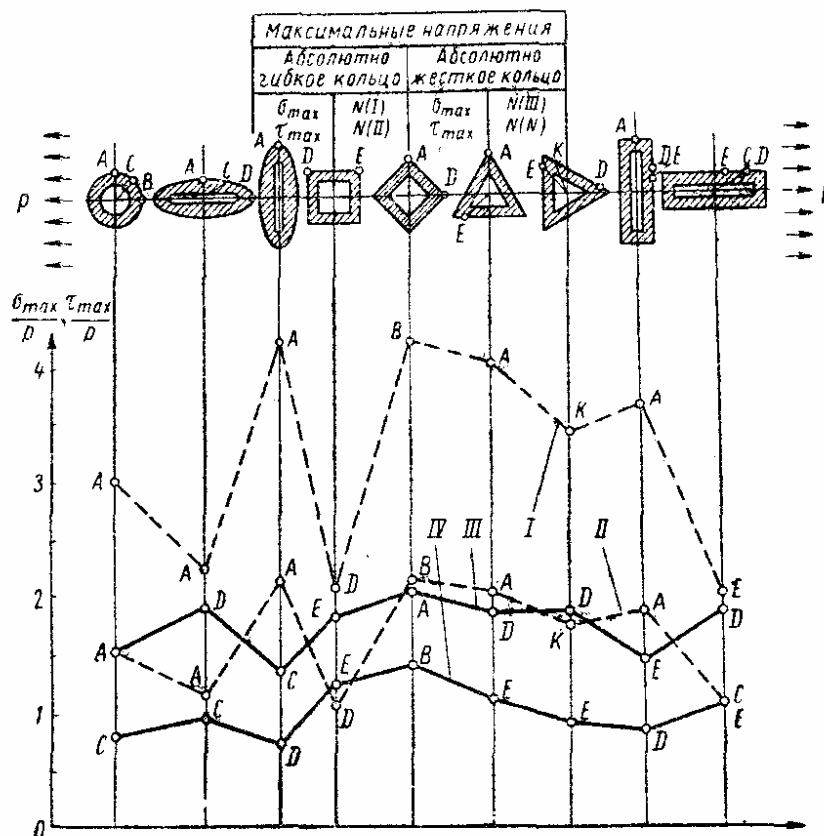


Рис. 29

напряжения σ_{θ} для жесткого кольца, кривые *III* — нормальные напряжения σ_r для жесткого кольца и кривые *IV* — касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ для жесткого кольца.

На рис. 30 и 31 приведены графики $\frac{\sigma_{\theta}}{p}$, $\frac{\sigma_r}{p}$ и $\frac{\tau_{r\theta}}{p}$ по контуру спая пластинки с квадратным и эллиптическим кольцом при растяжении пластинки вдоль оси Ox , Oy или под углом $\alpha = 45^\circ$.

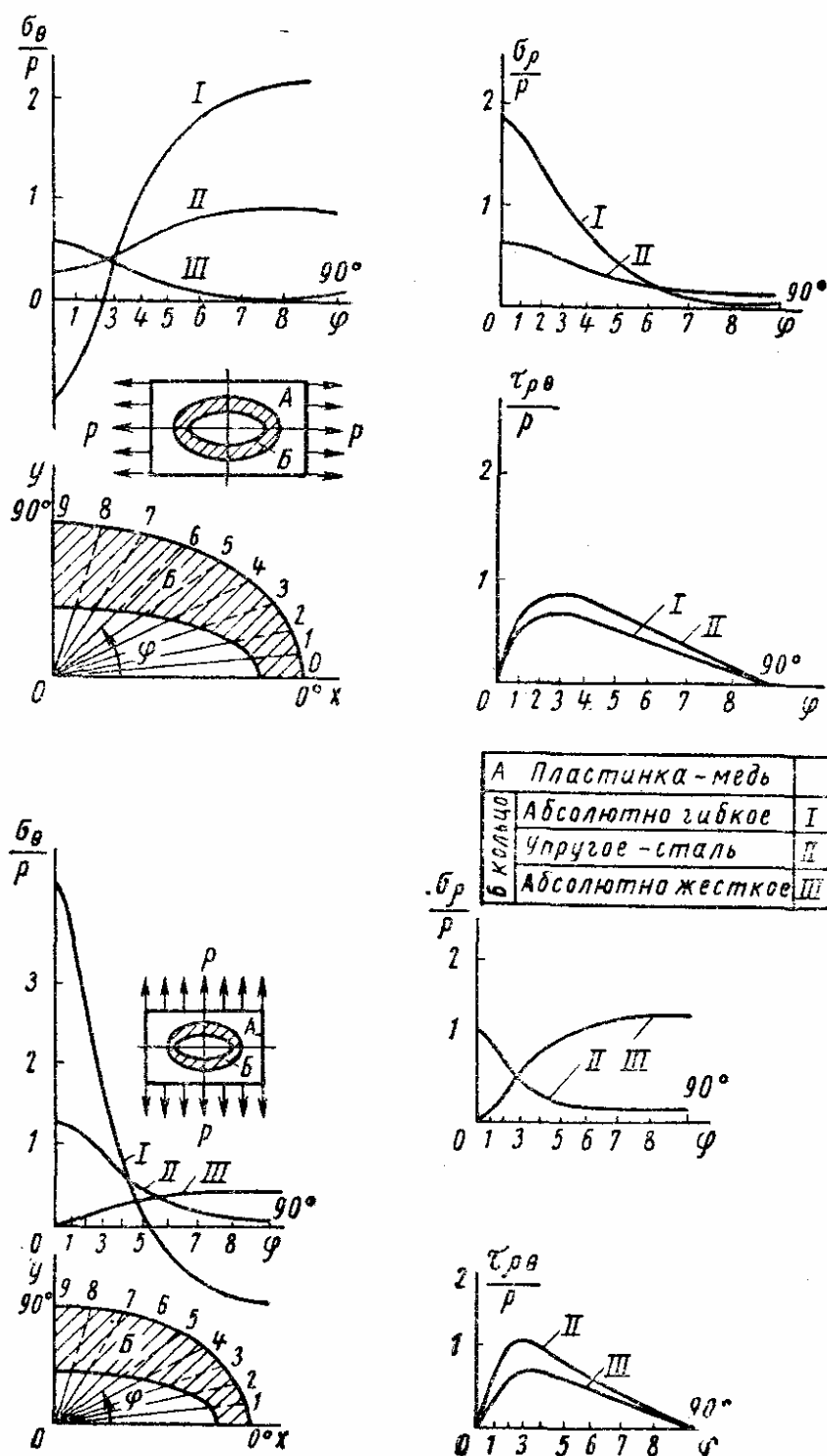


Рис. 30

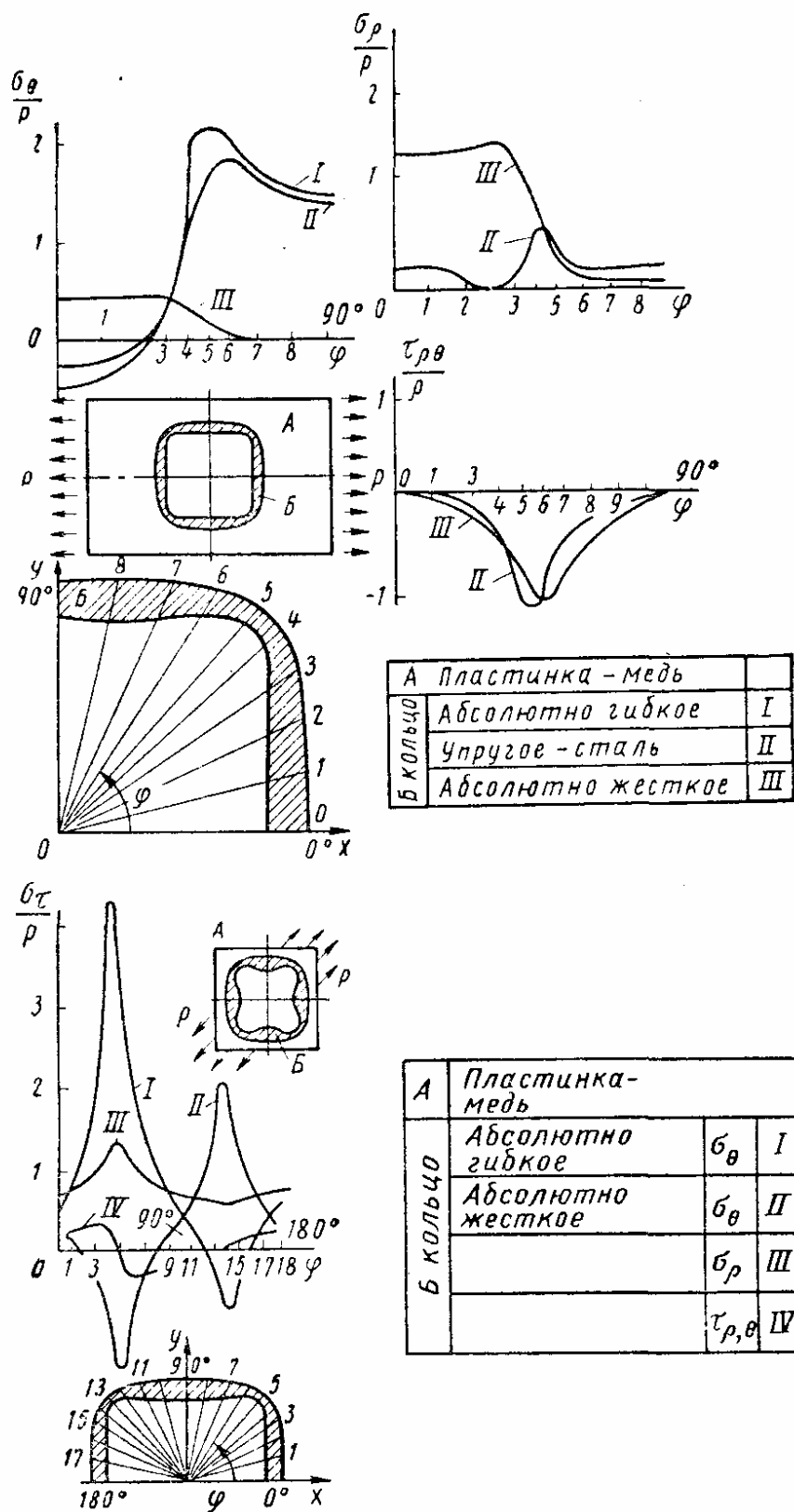


Рис. 31

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКО-УПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Для учета вязко-упругих свойств материала используют соотношения (законы), которые связывают величины напряжений—деформаций во времени. Наиболее современными, с точки зрения возможно более полного и точного описания процесса деформирования во времени, являются соотношения, содержащие временные интегральные операторы с ядрами релаксации и последействия.

Наибольшее применение получила линейная теория вязко-упругой наследственности В. Вольтерра [48]. Уравнения наследственности теории упругости В. Вольтерра получают простой заменой в соотношениях упругости классической теории упругости упругих констант E , G и ν интегральными операторами \bar{E} , \bar{G} и $\bar{\nu}$

$$\bar{E}f = E_0 (1 + \bar{R}_2^*) f; \quad \bar{G}f = G_0 (1 + \bar{R}_1^*) f; \quad \bar{\nu}f = \nu_0 (1 + \bar{R}_3^*) f, \quad (13)$$

где

$$\bar{R}_i^* f = \int_0^t R_i(t, s) f(x, y, r, s) ds \quad (i=1, 2, 3);$$

здесь G , E_0 — соответственно мгновенные модули сдвига и упругости; ν_0 — мгновенный коэффициент Пуассона; $R_i(t, s)$ — ядра релаксации.

Как показал В. Вольтерра, временные интегральные операторы \bar{G} , \bar{E} и $\bar{\nu}$ и пространственные операторы дифференцирования и интегрирования по координатам при умножении обладают свойством переместительности. Поэтому любую задачу с учетом влияния фактора времени (наследственной упругости), если в ней границы не изменяются с течением времени, можно решать как задачу обычной теории упругости, и лишь в окончательном результате следует заменить упругие постоянные G , E и ν соответствующими операторами \bar{G} , \bar{E} и $\bar{\nu}$. Основная трудность, возникающая при применении принципа Вольтерра, состоит в расшифровке различных функций операторов, появляющихся в результате указанной замены.

Здесь в качестве ядра при построении оператора релаксации применяют экспоненциальную функцию дробного порядка, предложенную Ю. Н. Работновым [28]:

$$\mathcal{J}_\alpha(\beta, t - \tau) = (t - \tau)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \quad (-1 < \alpha < 0). \quad (14)$$

При окончательной расшифровке искомых напряжений и деформаций как функций координат и времени в практических расчетах можно воспользоваться аппроксимацией Розовского \mathcal{J}_α^* — оператора в виде

$$\mathcal{J}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1 \approx \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \gamma t^{1+\alpha}}), \quad (15)$$

где $\gamma = (1 + \alpha)^{1+\alpha}$; $\operatorname{Re} \beta > 0$; $-1 < \alpha < 0$.

Эта аппроксимация удобна при обработке экспериментальных кривых ползучести (последействия) и релаксации. Кривую простой ползучести, например, обрабатывают по формуле

$$\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = a [1 - \exp(-b \gamma t^{1+\alpha})], \quad (16)$$

где $\varepsilon(t)$ — деформация (при растяжении или чистом изгибе) в момент времени t ; ε_0 — мгновенная деформация; a и b — параметры ползучести.

Кривые релаксации обрабатывают по аналогичным формулам.

Между параметрами релаксации τ и λ и параметрами ползучести a и b существует связь

$$\lambda_2 = \frac{a}{1+a}; \quad \tau_2 = \left[\frac{\gamma}{(1+a)b} \right]^{\frac{1}{1-a}}. \quad (17)$$

Обработка кривых ползучести и релаксации, полученных из опытов на кручение образцов, аналогична изложенному выше.

Концентрация напряжений возле отверстия в однородных вязкоупругих материалах. Кручение тонкой изотропной плиты (пластинки) с квадратным отверстием. Плита (пластинка) толщиной h находится под действием крутящих моментов H , приложенных по всему краю плиты (пластинки).

Коэффициент концентрации напряжений $k(t)$ определяют по формуле

$$k(t) = \frac{M_0(t)}{H} = \frac{M_0(0)}{H} \times \left[1 + \frac{14\nu_0\delta}{(1+\nu_0)(19+5\nu_0)} \mathfrak{J}_\alpha^*(-\beta_1) \right]; \quad (18)$$

$$k(t) = \frac{M_0(t)}{H} \approx \frac{M_0(0)}{H} \times \left\{ 1 + \frac{14\nu_0\delta [1 - \exp(-\gamma\beta_1 t'^{1+a})]}{(1+\nu_0)[19\beta + 5\nu_0(\beta + \delta)]} \right\}, \quad (19)$$

где

$$\beta_1 = \beta \frac{5\nu_0\delta}{19+5\nu_0}.$$

Изгиб треугольной плиты, ослабленной круговым отверстием. Тонкая плита имеет форму равностороннего треугольника. На внешнем контуре плиты приложены равномерно распределенные изгибающие моменты M .

Коэффициент концентрации напряжений определяют по формуле

$$k(t) = \frac{M_0(t)}{M} = \frac{M_0(0)}{M} [1 + a_1 \mathfrak{J}_\alpha^*(-\beta) + a_2 \mathfrak{J}_\alpha^*(-\beta_1)], \quad (20)$$

где

$$a_1 = \frac{1 - \psi(\theta)}{M_0(0)} \nu_0 \delta; \quad a_2 = \frac{2(5 - \nu_0)\psi(\theta)}{(3 + 16)^2 M_0(0)} \nu_0 \delta;$$

$$\beta_1 = \beta + \frac{\nu_0 \delta}{3 + \nu_0}; \quad \psi(\theta) = \frac{2R}{c} \cos 3\theta$$

($3c$ — высота равностороннего треугольника).

В формулах (18)–(20) ν_0 — значение коэффициента Пуассона при $t = 0$; δ и β — реологические характеристики.

Чистый цилиндрический изгиб плиты с треугольным отверстием. Коэффициент концентрации напряжений определяют по формуле

$$k(t) = \frac{M_0(t)}{M} = \frac{M_0(0)}{M} \times \left\{ 1 - \frac{2\delta [1 - \psi(\theta)] [1 - \exp(-\gamma\beta, t^{1+\alpha})]}{(3 + \nu_0) [3\beta + \nu_0(\delta + \beta)] M_0(0)} \right\}, \quad (21)$$

где обозначения те же, что и в предыдущих формулах.

Концентрация напряжений около отверстий в анизотропных неоднородных материалах. Здесь рассматриваются ориентированные стеклопластики, структура которых составлена из выпрямленных волокон.

Проведенные исследования [2, 3, 4] показывают, что в таких материалах целесообразно выделить два ряда напряжений — напряжения в структуре материала, которые возникают в результате взаимодействия жесткого стеклонаполнителя и сравнительно мягкого полимерного связующего, и средние напряжения, распределение которых обуславливается геометрией исследуемого элемента конструкции (детали).

Истинные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ в случае гексагональной структуры (рис. 32) связаны со средними напряжениями $\langle \sigma_{ik} \rangle$ ($i, k = 1, 2, 3$) соотношениями

$$\sigma_x = k_{c1}^{(x)} \langle \sigma_{11} \rangle + k_{c2}^{(x)} \langle \sigma_{22} \rangle + k_{c3}^{(x)} \langle \sigma_{33} \rangle + k_{c4}^{(x)} \langle \sigma_{23} \rangle + k_{c5}^{(x)} \langle \sigma_{31} \rangle + k_{c6}^{(x)} \langle \sigma_{12} \rangle, \quad (22)$$

и аналогично для $\sigma_y, \dots, \tau_{xy}$, где $k_{ci}^{(x)}, k_{ci}^{(y)}, \dots, k_{ci}^{(xy)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) — коэффициенты концентрации структурных напряжений.

Вследствие вязко-упругих свойств полимерного связующего в композиционном материале между наполнителем и связующим происходит перераспределение напряжений во времени.

Исследования композиционных материалов [5] показали, что при ползучести связующего перераспределение напряжений в их структуре таково, что не превышает 10% от мгновенного.

Растяжение линейно-армированной пластинки с эллиптическим (круговым) отверстием [4]. Линейно-армированная пластинка из стеклопластика на основе эпоксидно-малеинового связующего имеет эллиптическое (круговое) отверстие и растягивается напряжениями $\langle \sigma_\alpha \rangle$. Система декартовых координат (x_1, x_2) расположена в срединной плоскости пластинки, начало координат — в центре отверстия, волокна ориентированы по оси Ox , α — угол наклона направления напряжений $\langle \sigma_\alpha \rangle$ к оси Ox_1 .

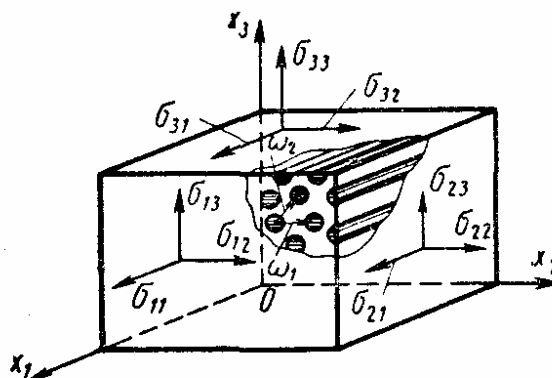


Рис. 32

Наибольший интерес представляет концентрация нормальных напряжений $\langle \sigma_\theta \rangle$, действующих на площадку, перпендикулярную к касательной и контуру отверстия, и касательных напряжений $\langle \sigma_{12} \rangle$ между волокнами.

На рис. 33 кривой 1 показано изменение коэффициента концентрации k_0 напряжений $\langle \sigma_\theta \rangle$ по контуру эллиптического отверстия, большая ось которого параллельна ориентации волокон (что указано соот-

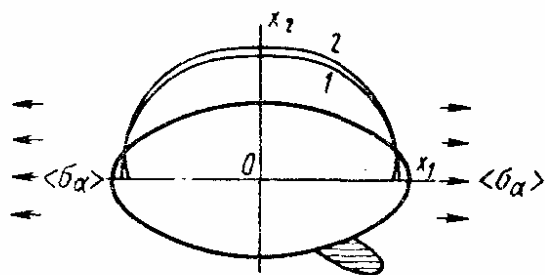


Рис. 33

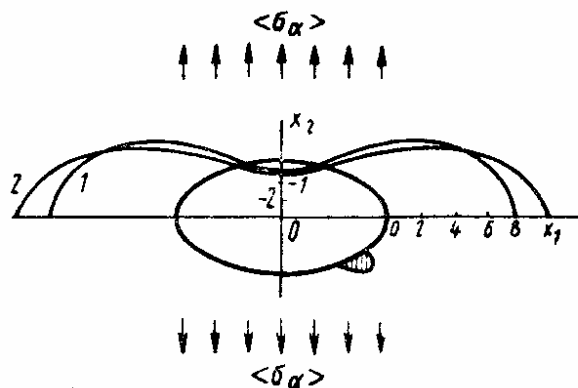


Рис. 34

ветствующей штриховкой в четвертом квадранте части пластинки у контура) при соотношении большой и малой осей $\frac{a}{b} = 2$. Кривая 2 характеризует перераспределение напряжений $\langle \sigma_\theta \rangle$ на контуре отверстия при длительном нагружении пластинки.

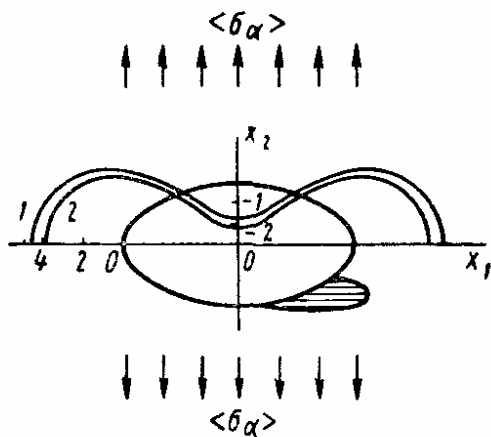


Рис. 35

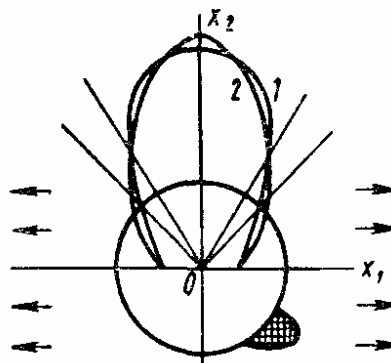


Рис. 36

Изменение коэффициента концентрации напряжений $\langle \sigma_\theta \rangle$ в той же пластинке, но при расположении большой оси эллиптического отверстия перпендикулярно к направлению растяжения, показано на рис. 34. Кривая 1 соответствует начальному напряженному состоянию в пластинке, а кривая 2 — после длительного нагружения (после ~ 500 ч, когда релаксационные процессы практически окончились).

Кривая 2 на рис. 35 показывает изменение во времени коэффициента концентрации напряжений $\langle \sigma_\theta \rangle$ в пластинке, армированной вдоль большой оси эллипса (при $\frac{a}{b} = 2$) и при растяжении перпендикулярно ориентации волокон после длительного нагружения; кривая 1 соответствует мгновенному напряженному состоянию в начальный момент

времени. Вследствие перераспределения напряжений наблюдается уменьшение максимального коэффициента концентрации напряжений k_0 во времени.

Растяжение слоистой пластинки с круговым отверстием [4]. Слоистая равнопрочная пластинка из стеклопластика ослаблена круговым отверстием радиуса b и растянута вдоль одного из главных направлений анизотропии.

На рис. 36 кривой 1 показано изменение коэффициента концентрации напряжений $k_0 = \frac{\sigma_0}{p}$ в начальный момент времени. Кривая 2 соответствует изменению k_0 при длительном нагружении.

ПОЯВЛЕНИЕ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН И ТРЕЩИН

В области повышенных напряжений возле отверстий могут появляться либо пластические зоны, которые сначала частично охватывают контур отверстия (рис. 37, а) и лишь при достижении внешней нагрузкой соответствующих значений могут охватить его полностью, либо трещины, возникающие вследствие охрупчивания материала в точках

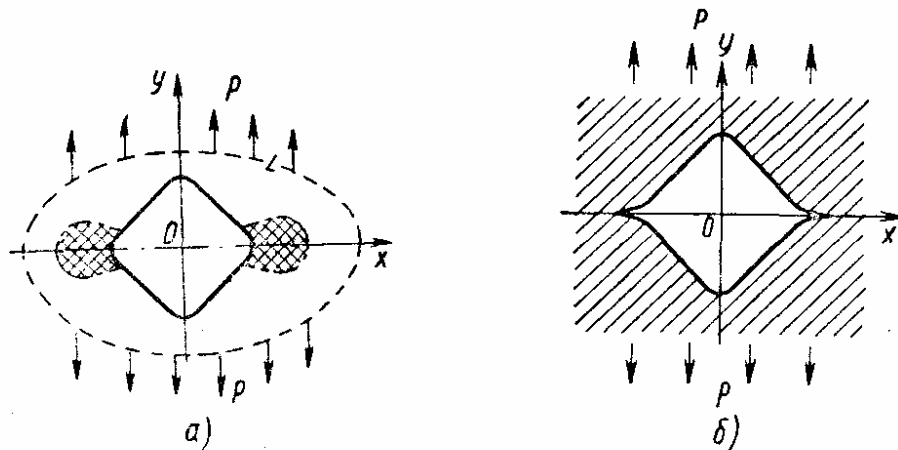


Рис. 37

повышенных напряжений на контуре отверстия (рис. 37, б), идущие внутрь пластины.

Развитие трещин возле отверстия при всестороннем растяжении пластинки. Круговое отверстие. Рассмотрим бесконечную пластинку, ослабленную круговым отверстием радиуса R и одной или двумя равными радиальными трещинами длиной l , когда на «бесконечности» пластинка растягивается постоянными усилиями p . Предполагается, что материал пластинки будет упругим вплоть до разрушения.

Показано [14], что критическую нагрузку $p = p_{кр}$, необходимую для начала развития трещин, определяют из формул: при одной трещине

$$p_{кр} = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{R + \frac{l}{2}} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{1}{1 + \lambda}\right)^2\right] \left[1 + \frac{1}{1 + \lambda}\right]}}; \quad (23)$$

при двух трещинах, лежащих на одной прямой

$$\rho_{кр} = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{R+l} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^4}}; \quad (24)$$

$$\lambda = \frac{l}{R},$$

где $K = \sqrt{\frac{\pi E T}{1-\nu^2}}$ — для плоской деформации; $K = \sqrt{\pi E T}$ — для плоского напряженного состояния; здесь E , ν — упругие константы материала; T — коэффициент поверхностного натяжения.

Эллиптическое отверстие. В том случае, когда трещины выходят на контур произвольного эллиптического отверстия с полуосями a , b для $l > 0,5a$, критическую нагрузку $\rho_{кр}$ определяют из приближенных (с точностью до 5%) формул:

при одной трещине

$$\rho_{кр} = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{a + \frac{l}{2}} \cdot \frac{\left[1 - \frac{m}{(1+l_0)^2}\right] \left[1 + \frac{m}{1+l_0}\right]}{\left[1 - \frac{1}{(1+l_0)^2}\right] \left[1 + \frac{1}{1+l_0}\right]}}; \quad (25)$$

при двух трещинах

$$\rho_{кр} = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{a+l} \cdot \frac{1 - \frac{m^2}{(1+l_0)^4}}{1 - \frac{1}{(1+l_0)^4}}},$$

где

$$1 + l_0 = \frac{1}{a+b} \{a + l + \sqrt{(a+l)^2 - (a^2 - b^2)}\};$$

$$m = \frac{a-b}{a+b}; \quad R = \frac{a+b}{2}.$$

Пластические зоны возле отверстий. К р у г о в о е о т в е р с т и е. Рассмотрим бесконечную пластинку, ослабленную круговым отверстием радиуса R с заданными усилиями на контуре отверстия и на бесконечности. При некоторых соотношениях этих внешних усилий вокруг отверстия возникает пластическая зона, полностью охватывающая отверстие. Требуется определить контур, разделяющий пластическую и упругую зоны.

Для случая, когда к контуру кругового отверстия радиуса R приложены нормальные усилия $\sigma_r = p$, а на бесконечности пластинка растягивается усилиями A и B , найдено [29] уравнение контура, отделяющего пластическую область от упругой, в виде

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right); \quad z = x + iy; \quad \zeta = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

где

$$c = R \exp \left\{ \frac{1}{2k} \left(\frac{A+B}{2} + p - q \right) \right\}; \quad \beta = \frac{B-A}{2k};$$

здесь k — постоянная материала; берут $k = \frac{\sigma_T}{2}$ или $k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$; σ_T — предел текучести материала при одноосном растяжении.

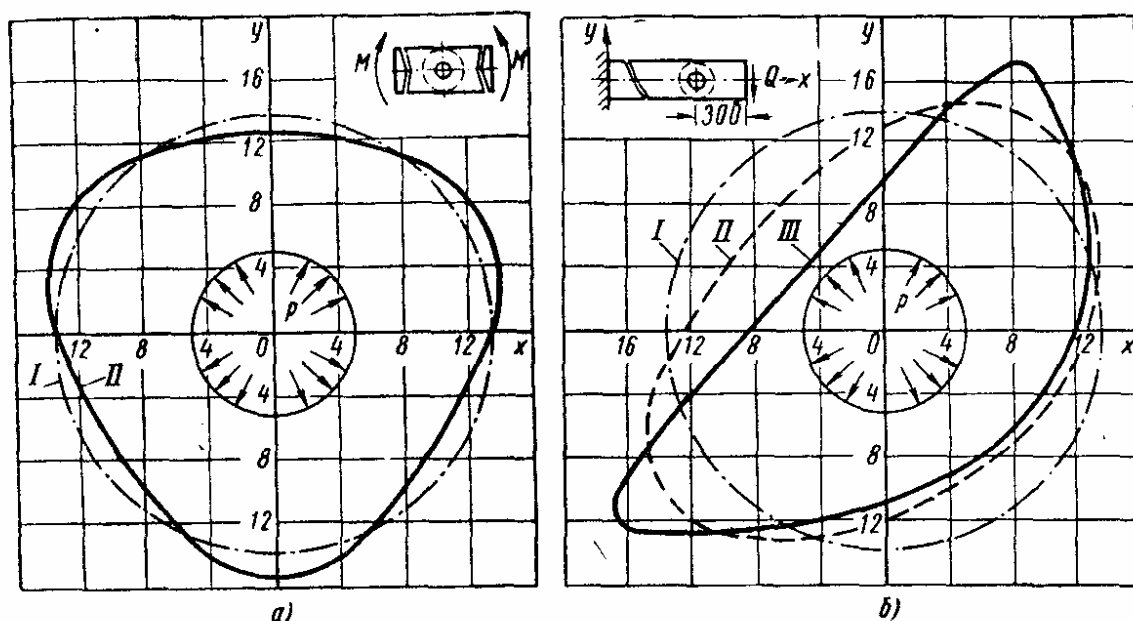


Рис. 38

Для случая стационарного теплового поля при $p = 0$ (см. работу [39])

$$z = \omega(\zeta) = \frac{\gamma}{k} + c \left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right),$$

где γ — постоянная, определяемая тепловым полем.

Для случая нормальных и касательных усилий на контуре отверстия, т. е. $\sigma_r = p$; $\tau_{r\theta} = \tau$ при $r = R$ найдено [29]

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right),$$

где

$$\beta = \frac{B-A}{2\epsilon k}; \quad \epsilon = +1.$$

В случае неоднородного напряженного состояния на бесконечности (чистый изгиб полосы моментом M и изгиб полосы перерезывающей силой Q , рис. 38, а и б) найдено [29] при $\sigma_r = p$ на контуре отверстия.

Чистый изгиб

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + c_1 \frac{1}{\zeta} + \frac{\overline{A} \overline{v}_1^2}{\zeta(\zeta - \overline{v}_1)}, \quad (26)$$

где

$$c = \operatorname{Re} e^{-\frac{k+p}{2k}}; c_1 = \frac{c\alpha^2}{\alpha^2 + k^2 + \alpha k v_1};$$

$$A = -\frac{k c \alpha}{(\alpha^2 + k^2) v_1^2 + k \alpha v_1^3}; \alpha = i \frac{Mc}{4J};$$

$$v_1 = -\frac{k}{2\alpha} + \sqrt{\frac{k^2}{4\alpha^2} + 1};$$

здесь J — момент инерции поперечного сечения балки.

Кривая I рис. 38, a есть граница пластической зоны, возникающей вокруг кругового отверстия радиуса $R = 5$ см, при $p = 3k$ и нулевых напряжениях на бесконечности, а кривая II — граница пластической зоны вокруг того же отверстия при $p = 3k$ и напряженном состоянии на бесконечности, соответствующем чистому изгибу $M = 28,8J$ дан/см².

Изгиб полосы постоянной перерезывающей силой.

$$z = \omega(\xi) = c\xi + \frac{c_1}{\xi} + \frac{\bar{k}_1 \bar{v}_1^2}{\xi(\xi - \bar{v}_1)} + \frac{\bar{k}_2 \bar{v}_2^2}{\xi(\xi - \bar{v}_2)}. \quad (27)$$

где

$$k_1 = -\frac{\bar{c}_1 - c}{v_2 - v_1}; \quad k_2 = \frac{\bar{c}_1 - c}{v_2 - v_1};$$

здесь v_1 и v_2 — корни (по модулю меньше 1) уравнения

$$\delta v^4 + \beta v^3 + kv^2 - \beta v - \delta = 0,$$

где

$$\alpha = i \frac{Qh^2}{2J}; \quad \beta = -\frac{Q(l-a)c}{4J}; \quad \delta = i \frac{Qc^2}{4J}.$$

Постоянную c_1 определяют из уравнения

$$c_1 \delta - \bar{c}_1 [k + \beta(v_1 + v_2) + \delta(v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)] =$$

$$= c \{ \alpha - \delta - [\beta(v_1 + v_2) + \delta(v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)] \}.$$

Кривая I рис. 38, b есть граница пластической зоны, возникающей вокруг кругового отверстия радиуса $R = 5$ см, при $p = 3k$ и нулевых напряжениях на бесконечности, а кривые II и III — границы пластической зоны вокруг того же отверстия при $p = 3k$ и напряженном состоянии на бесконечности, соответствующем изгибу перерезывающей силой $Q = 4000$ дан и $Q = 6000$ дан.

Для случая пластинки с бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий, расположенных на расстоянии l друг от друга, растягиваемой на бесконечности постоянными усилиями A и B , найдено [16]

$$z = \omega(\xi) = c\xi + \frac{c_1}{\xi},$$

где

$$c = R \exp \left\{ \frac{1}{2k} \left(p - k + \frac{A+B}{2} + \frac{2}{3} a_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \right) \right\};$$

$$c_1 = \frac{c}{k} \left(\frac{B-A}{2} + \frac{1}{3} b_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \right);$$

$$a_2 = k \frac{c_1}{c}; \quad b_2 = \frac{2kc + (B-A)c_1 - 4kc_1}{2c \left(1 - \frac{1}{3} c c_1 \pi^2 \varepsilon^2 \right)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{l}.$$

При растяжении пластинки (случай плоского напряженного состояния) усилиями A и B найдено [44]

$$z = \omega(\zeta) = \frac{R(2\zeta^2 + a)^2}{\alpha(a^2 - 4)\zeta^3},$$

где $\alpha = \frac{A+B-2\sigma_T}{\sigma_T-p}$; a — действительный корень уравнения;

$$a^3 + 4a + \beta = 0; \quad \beta = \frac{8(B-A)}{A+B-2\sigma_T}.$$

Случай двухосного растяжения пластинки с круговым отверстием при частичном охвате его пластической зоной рассмотрен в работе [26], где решение задачи проводилось так называемым полуобратным методом. Граница пластической зоны, определенная численным способом, показана на рис. 39.

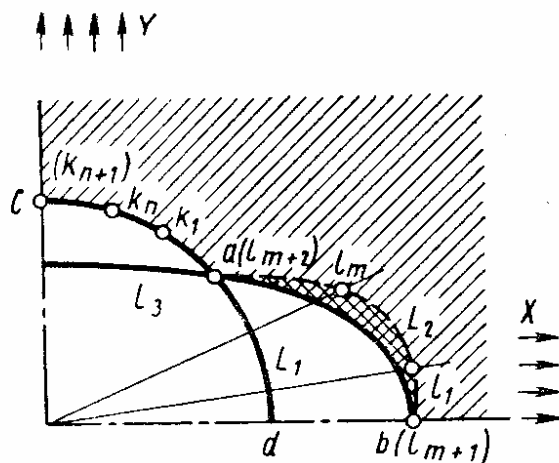


Рис. 39

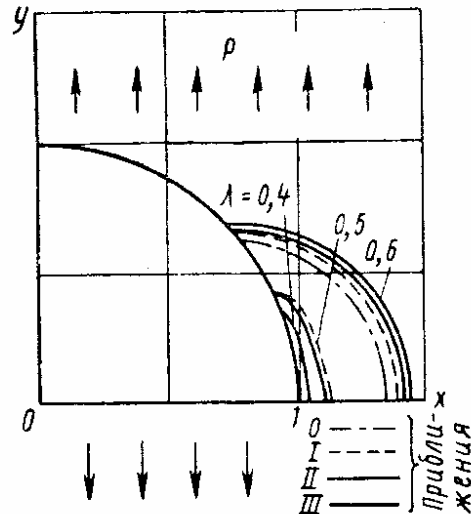


Рис. 40

При одноосном растяжении пластинки с круговым отверстием граница пластической зоны приведена на рис. 40 [15].

Эллиптическое отверстие. Для тонкой пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием, уравнение которого задается в виде

$$r = a + \varepsilon a d_1 \cos 2\theta - \varepsilon^2 \frac{3a d_1^2}{4} (1 - \cos 4\theta) + \dots,$$

получено [13], в предположении, что контур отверстия свободен от внешних усилий, а на бесконечности пластинка растягивается усилиями A^* и B^* под углом θ_0 к главным осям эллипса,

$$\begin{aligned} r_s = & 1 + \varepsilon^* [4d_2 \cos(\theta - \theta_0) + 3\alpha d_1 \cos 2\theta] + \\ & + \varepsilon^{*2} \left\{ d_1^2 \left(\frac{\alpha^2}{4} - 8\alpha^4 \right) - (18d_1 d_2 \alpha \cos 2\theta_0 + 8d_2^2) + \right. \\ & + \left[-d_1^2 \left(\frac{15}{4\alpha^2} - 8\alpha^3 - \frac{3}{4\alpha^4} \right) + (18d_1 d_2 \alpha \cos 2\theta_0 + 16d_2^2 \cos 4\theta_0) \right] \times \\ & \times \cos 4\theta + [18d_1 d_2 \alpha \sin 2\theta_0 + 16d_2^2 \sin 4\theta_0] \sin 4\theta \Big\} + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

где A_2^* и B^* имеют вид

$$A^* = \frac{A+B}{2} + d_2 \frac{A-B}{2}; \quad B^* = \frac{A+B}{2} - d_2 \frac{A-B}{2},$$

где d_1, d_2 — некоторые параметры; $\varepsilon^* = \frac{A-B}{2\alpha k}$; $\alpha = \frac{R}{r_s^0}$;

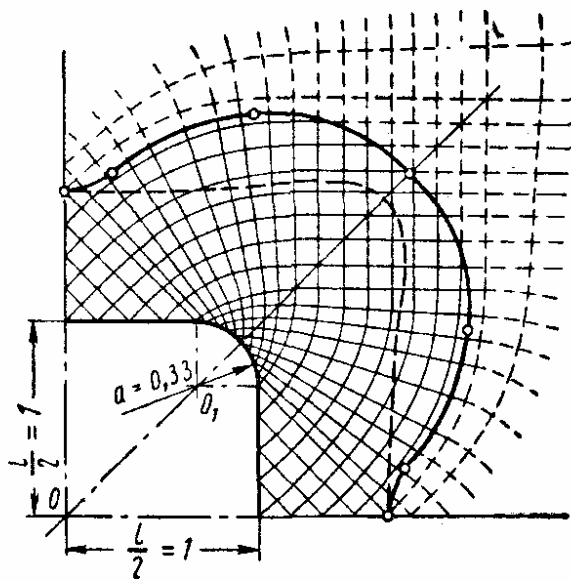


Рис. 41

r_s^0 — размерный радиус пластической зоны при $\varepsilon^* = 0$.

Квадратное отверстие. В работе [36] полуобратным способом с использованием численных методов определена граница пластической зоны в пластинке (случай плоской деформации), ослабленной квадратным отверстием с закругленными углами (рис. 41). Предполагается, что на контуре квадратного отверстия $\sigma_n = \tau_{nt} = 0$, а на бесконечности пластинка сжимается усилиями $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty$. Граница пластической зоны показана на рис. 41.

НЕЛИНЕЙНЫЕ (УПРУГИЕ) ЗАДАЧИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Влияние физической нелинейности на концентрацию напряжений возле отверстий. Цветные металлы, их сплавы и полимерные материалы даже при малых деформациях, при которых справедливы основные соотношения классической теории упругости, точно не следуют закону Гука, а слегка отклоняются от него, поэтому необходимо учитывать нелинейную зависимость деформаций от напряжений. Нелинейность такого характера называют физической.

Приближенный метод решения задач концентрации напряжений около криволинейных отверстий в пластинках с учетом физической нелинейности изложен в работе [11]. Наиболее характерные примеры влияния нагрузки, упругих свойств материала и кривизны контура на коэффициенты концентрации напряжений приведены ниже.

Круговое отверстие. Распределение напряжений около кругового отверстия в пластинке при всестороннем растяжении уси-

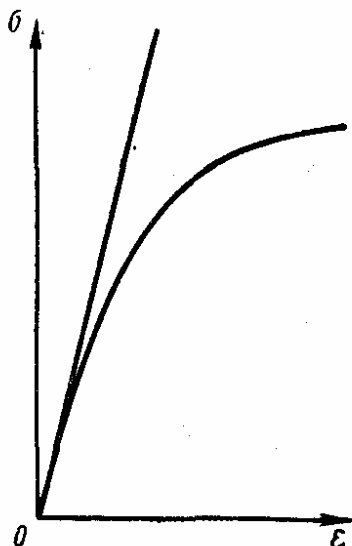


Рис. 42

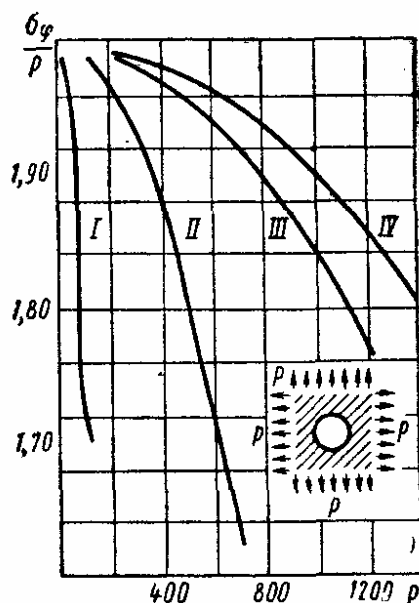


Рис. 43

лиями ρ в первом приближении с учетом физической нелинейности материала (рис. 42) определяют по формулам [42]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^{(0)} + \lambda \sigma_r^{(1)} = \rho \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \frac{\rho^2}{2} \left(2 \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} - \frac{a^6}{r^6} \right) \right]; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^{(0)} + \lambda \sigma_\varphi^{(1)} = \rho \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \frac{\rho^2}{2} \left(2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} - 5 \frac{a^6}{r^6} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Для рассматриваемой задачи коэффициент концентрации по линейной теории достигает своего наибольшего значения на краю отверстия в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$ и равен двум. С учетом же физической нелинейности материала в этой точке

$$k = \left(\frac{\sigma_\varphi}{\rho} \right)_{r=a} = 2(1 - 1,5\lambda\rho^2), \quad (30)$$

где a — радиус отверстия; λ — малый параметр, характеризующий физическую нелинейность материала.

Графики зависимости коэффициента концентрации напряжений k от внешней нагрузки и упругих свойств материала приведены на рис. 43.

Кривая I построена для меди [$\lambda = (0,98)^{-1} \cdot 10^{-15} \text{ м}^4/\text{н}^2$], кривая II — для чистой меди [$\lambda = 0,255 \cdot (0,98)^{-2} \cdot 10^{-16} \text{ м}^4/\text{н}^2$], кривая III — для сплава алюминий—бронза [$\lambda = 0,053 \cdot (0,98)^2 \cdot 10^{-16} \text{ м}^4/\text{н}^2$], кривая IV — для мартеновской стали [$\lambda = 0,32 \cdot (0,98)^2 \cdot 10^{-16} \text{ м}^4/\text{н}^2$].

Эллиптическое отверстие. В случае всестороннего равномерного растяжения усилиями p бесконечной физически нелинейной пластинки с эллиптическим отверстием коэффициент концентрации напряжений, найденный с точностью до 2-го приближения, с учетом физической нелинейности по контуру отверстия будет

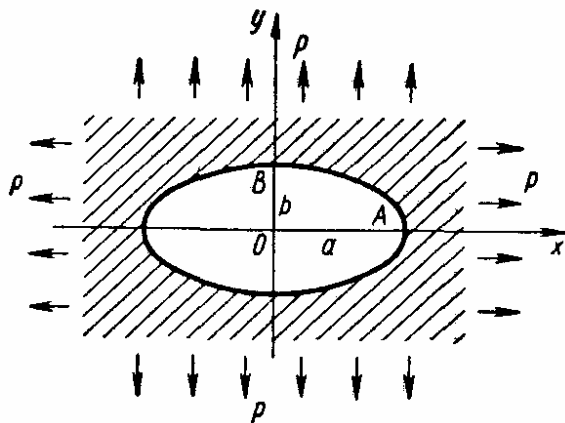


Рис. 44

$$k = \left(\frac{\sigma_\theta}{p} \right)_{\rho=1} = 2 \times \\ \times (1 - 1,500\lambda p^2 + 10,605\lambda^2 p^4 + \\ + 2\varepsilon \cos 2\theta + 2\varepsilon^2 \cos 4\theta - \\ - 10,660\lambda\varepsilon p^2 \cos 2\theta), \quad (31)$$

где $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$; a и b — полуоси эллипса; ρ , θ — ортогональная криволинейная система координат. В табл. 4 приведены значения k по формуле (31), подсчитанные для двух точек A и B (рис. 44) контура отверстия. Значения коэффициента концентрации k в точке A ($\theta = 0^\circ$)

4. Значения коэффициентов концентрации напряжений для меди

p	$\frac{a}{b}$					
		1,00	1,10	1,30	1,50	1,60
Линейная теория $\lambda = 0$	—	$\frac{2}{2}$	$\frac{2,198}{1,818}$	$\frac{2,587}{1,546}$	$\frac{2,960}{1,360}$	$\frac{3,136}{1,289}$
	В линейной теории коэффициент концентрации не зависит от p					
Нелинейная теория	60	$\frac{2,084}{1,920}$	$\frac{2,084}{1,775}$	$\frac{2,412}{1,565}$	$\frac{2,730}{1,431}$	$\frac{2,709}{1,557}$
	70	$\frac{1,904}{1,904}$	$\frac{2,055}{1,772}$	$\frac{2,361}{1,584}$	$\frac{2,660}{1,469}$	$\frac{2,568}{1,667}$
	80	$\frac{1,895}{1,895}$	$\frac{2,301}{1,777}$	$\frac{2,310}{1,616}$	$\frac{2,587}{1,522}$	$\frac{2,414}{1,802}$
	90	$\frac{1,868}{1,868}$	$\frac{2,014}{1,797}$	$\frac{2,264}{1,662}$	$\frac{2,517}{1,593}$	$\frac{2,250}{1,966}$

поставлены в числителе, а в точке $B \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right)$ — в знаменателе; материал—медь $[\lambda = (0,98)^{-1} \cdot 10^{-15} \text{ м}^4/\text{н}^2]$.

Квадратное отверстие. Рассмотрим случай всестороннего растяжения бесконечной физически нелинейной пластинки, ослабленной квадратным отверстием. Отображающая функция внешности квадратного отверстия на внешность круга единичного радиуса имеет вид

$$\omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\xi^3} \right). \quad (32)$$

Коэффициент концентрации напряжений по контуру рассматриваемого отверстия [43]

$$k = \left(\frac{\sigma_\theta}{\rho} \right)_{\rho=1} = 2(1 + 0,666 \cos 4\theta + 0,197 \cos 8\theta - 1,500\lambda\rho^2 - 3,152\lambda\rho^2 \cos 4\theta + 10,608\lambda^2\rho^2). \quad (33)$$

Значения коэффициента концентрации напряжений k по формуле (33) для линейной и нелинейной теории в зависимости от внешней нагрузки p в точках $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 45^\circ$ для алюминиевой бронзы $\lambda = 0,053 \times (0,98)^{-2} \cdot 10^{-15} \text{ м}^4/\text{н}^2$ приведены в табл. 5.

5. Значения коэффициентов концентрации для алюминиевой бронзы

θ°	Коэффициент k по линейной теории	Коэффициент k по нелинейной теории при p в дан/см^2					
		200	400	600	800	1000	1100
0	3,726	3,705	3,645	3,550	3,424	3,278	3,200
45	1,062	1,069	1,092	1,135	1,204	1,307	1,375

Из приведенных данных видно, что учет малой физической нелинейности (см. рис. 42) приводит к более равномерному распределению напряжений в зоне концентрации, а коэффициент концентрации нелинейно зависит от величины внешней нагрузки p и параметров λ и ϵ , характеризующих соответственно физическую нелинейность материала и криволинейность отверстия.

Общая нелинейность. Появление ряда новых полимерных материалов, допускающих большие деформации даже при сравнительно небольших нагрузках, требует учета влияния на концентрацию напряжений физической нелинейности и больших упругих деформаций. Этому вопросу посвящена работа [31].

Исследования в этой области ведут в основном по двум направлениям.

Работы первого направления [31] посвящены исследованию концентрации напряжений для несжимаемых материалов (к таким материалам относится, в частности, резина, которая в очень широких пределах, достигающих 50%, удовлетворяет этому условию

несжимаемости); плотность энергии деформации W выбирают в форме, предложенной Муни,

$$W = c_1 (J_1 - 3) + c_2 (J_2 - 3), \quad (34)$$

где $c_1 \gg 0$, $c_2 \gg 0$ — упругие постоянные материала, определяемые опытным путем; J_1 , J_2 — инварианты тензора деформаций.

В работах второго направления [37] предлагают, что физический закон деформирования имеет вид

$$\tau_i = \mu \operatorname{tg} \vartheta; \quad \vartheta = 2 \sqrt{1,5} \vartheta_i, \quad (35)$$

где τ_i — октаэдрическое касательное напряжение; ϑ_i — интенсивность формоизменения.

Так как рассматриваются большие деформации, то в случае общей нелинейности следует различать формы отверстия до деформации и после деформации.

К р у г о в о е о т в е р с т и е . В случае одноосного растяжения-сжатия усилиями p пластинки из несжимаемого материала, для которого справедливо соотношение (34) с отверстием, которое после деформации будет круговым, максимальный коэффициент концентрации напряжений k^* определяют по формулам:

для плоской деформации

$$k^* = 3 \left(1 + \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{\mu} \right); \quad (36)$$

для плоского обобщенного напряженного состояния

$$k^* = 3 \left[1 + \frac{81 + 13l}{144(1 + l)} \cdot \frac{p}{H_0} \right], \quad (37)$$

где $2h$ — толщина пластинки; μ — модуль сдвига; $l = \frac{c_2}{c_1}$; c_1 , c_2 — постоянные Муни.

Формулы (36) и (37) выведены при условии, что контур отверстия после деформации остается круговым.

Для кругового отверстия до деформации (после деформации оно перешло в овальное) максимальные коэффициенты концентрации напряжений k^{**} определяют по формулам:

для плоской деформации

$$k^{**} = 3 \left(1 - 0,25 \frac{p}{\mu} \right);$$

для тонкой пластинки

$$k^{**} = 3 \left(1 - \frac{47 + 115l}{144(1 + l)} \cdot \frac{p}{H_0} \right).$$

В случае, когда материал деформируется согласно закону (37), коэффициент концентрации напряжений k^{**} для плоской деформации при сжатии

$$k^{**} = 3 \left(1 + 0,2 \frac{p}{\mu} - \frac{p^2}{\mu^2} \right).$$

Эллиптическое отверстие. При растяжении вдоль большой оси эллиптического отверстия при плоской деформации несжимаемого материала, для которого справедливо соотношение (34), максимальный коэффициент концентрации напряжений определяют по формуле

$$k^* = 2 \left(1 + 0,225 \frac{p}{\mu} \right). \quad (38)$$

Формула (38) соответствует случаю, когда в деформированном состоянии отверстие представляет собой эллипс с полуосями: a — большая полуось; b — малая полуось, причем

$$m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{3}.$$

Если растяжение будет вдоль малой оси эллиптического отверстия (при $m = \frac{1}{3}$), коэффициент концентрации напряжений будет соответственно иметь вид

$$k^* = 5 \left(1 + 0,463 \frac{p}{\mu} \right).$$

ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛИТ С ОТВЕРСТИЯМИ, СВОБОДНЫМИ ОТ ВНЕШНИХ УСИЛИЙ

Из всех возможных случаев загрузки плиты ниже приведены результаты для двух наиболее часто встречающихся видов нагрузки: чистый изгиб и чистый цилиндрический изгиб.

Круговое отверстие [29]. При чистом изгибе плиты с круговым отверстием тангенциальный изгибающий момент M_θ на контуре отверстия равен $2M$ и, следовательно,

$$k = \frac{M_\theta}{M} = 2.$$

Распределение изгибающих моментов M_θ по контуру отверстия при чистом цилиндрическом изгибе плиты показано на рис. 45.

Наибольшее значение M_θ достигает при $\theta = \pm 90^\circ$:

$$M_{\theta \max} = \frac{5 + 3\nu}{3 + \nu} M.$$

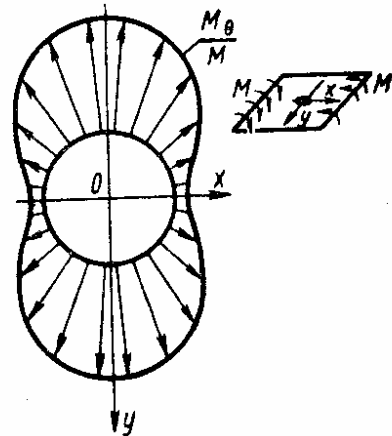


Рис. 45

Эллиптическое отверстие [29]. Распределение тангенциальных изгибающих моментов M_θ по контуру эллиптического отверстия: при чистом изгибе (рис. 46)

$$M_\theta = M \left[2 - \frac{4m(1+\nu)}{3+\nu} \cdot \frac{m - \cos 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \right];$$

$(M_\theta)_{\max}$ при $\theta = \pm 90^\circ$; при чистом цилиндрическом изгибе (рис. 47)

$$M_\theta = M \left[1 + \frac{2(1+\nu)(1-m)}{3+\nu} \cdot \frac{m - \cos 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \right];$$

$(M_\theta)_{\max}$ в точках $\theta = \pm 90^\circ$.

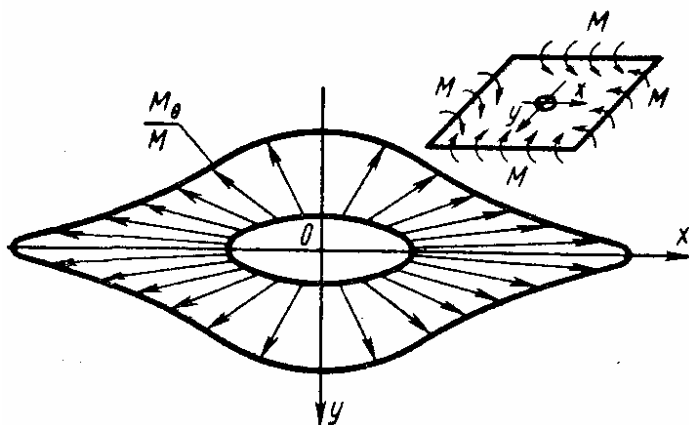


Рис. 46

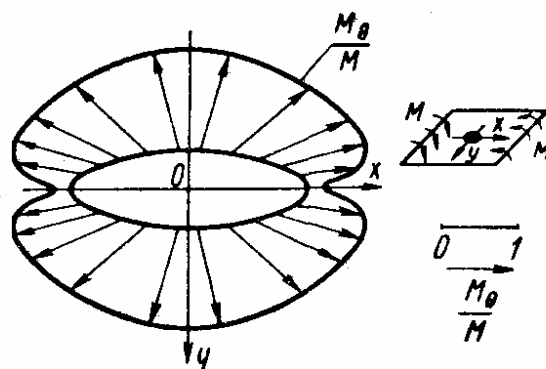


Рис. 47

Квадратное и прямоугольное отверстие с соотношением сторон $\frac{a}{b} = 3,24$. Максимальные значения моментов M_θ при $\nu = 0,3$ приведены в табл. 6.

6. Максимальные значения M_θ

Нагрузка	Вид отверстия		
	Квадрат на рис. 13, а	Квадрат на рис. 13, б	Прямоуголь- ное отверстие
Чистый изгиб	3,576 М	—	4,280 М
Чистый цилиндрический из- гиб	1,282 М	3,310 М	1,998 М

ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛИТ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Пусть тонкая упругая плита ослаблена круговым отверстием радиуса R . Край отверстия подкреплен упругим кольцом малых поперечных размеров. Одна из главных центральных осей инерции поперечного сечения ребра жесткости лежит в плоскости плиты. Подкрепляющее ребро обладает постоянной жесткостью на изгиб A и кручение C .

Обозначим

$$\delta_1 = \frac{A}{RD}; \delta_2 = \frac{C}{RD},$$

где D — цилиндрическая жесткость плиты.

Принимают, что осевая линия ребра жесткости совпадает с контуром отверстия [29, 35].

Чистый изгиб [29]. Изгибающий момент M_θ на контуре отверстия:

$$M_\theta = M \left[1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1+\nu-\delta_1}{1-\nu+\delta_1} \cdot \frac{1}{\rho^2} \right]$$

и не зависит от δ_2 .

При $\delta_1 = 1 + \nu$ $M_r = M_\theta = M$ во всей плите, т. е. подкрепляющее кольцо полностью устраняет концентрацию.

Чистый цилиндрический изгиб [35]. Добиться того, чтобы плита с круговым отверстием, край которого подкреплен кольцом постоянного сечения, работала как сплошная плита без отверстия, в данном случае невозможно. Однако при $\delta_1 = \delta_2 = 0,85$ концентрация почти полностью исчезает. Следует отметить, что коэффициент концентрации в плите зависит главным образом от жесткости кольца на изгиб и в значительно меньшей мере от его жесткости на кручение.

Кручение плиты. Для полного устранения концентрации напряжений в плите при кручении параметры кольца должны быть такими, что $\delta_1 = \delta_2 = 1 - \nu$ [35].

Условие оптимальности подкрепляющего кольца приведено в работе [38] для случая, когда кольцо рассматривается как кривой брус переменной жесткости.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Если внешняя нагрузка, приложенная к пластинке с отверстием, быстро изменяется во времени, так что при составлении уравнений равновесия приходится учитывать силы инерции, получаем динамическую задачу концентрации напряжений.

Простейшая периодическая зависимость от времени задается при помощи функций $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, где ω — круговая частота; t — время. Такое движение, начальные условия которого не принимают во внимание, называют установившимся гармоническим волновым движением.

В упругой среде, подверженной воздействию динамической нагрузки, распространяются два типа волн [18]: волна расширения (вращение среды отсутствует) и волна искажения (имеет место равнообъемное деформирование). Встречаясь с границей области, например, с контуром отверстия, волна одного типа порождает отраженные волны обоих типов. Совокупностью падающей и отраженных волн определяют напряженное состояние тела.

Динамическая задача концентрации напряжений обычно состоит в определении напряжений σ_θ по контуру отверстия в бесконечной пластинке, в которой движется плоская упругая гармоническая волна расширения или сдвига [24].

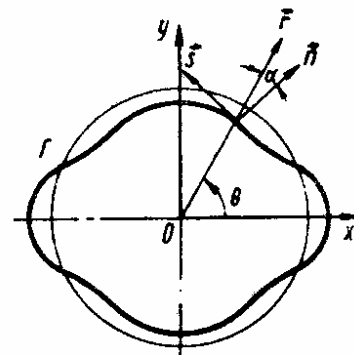


Рис. 48

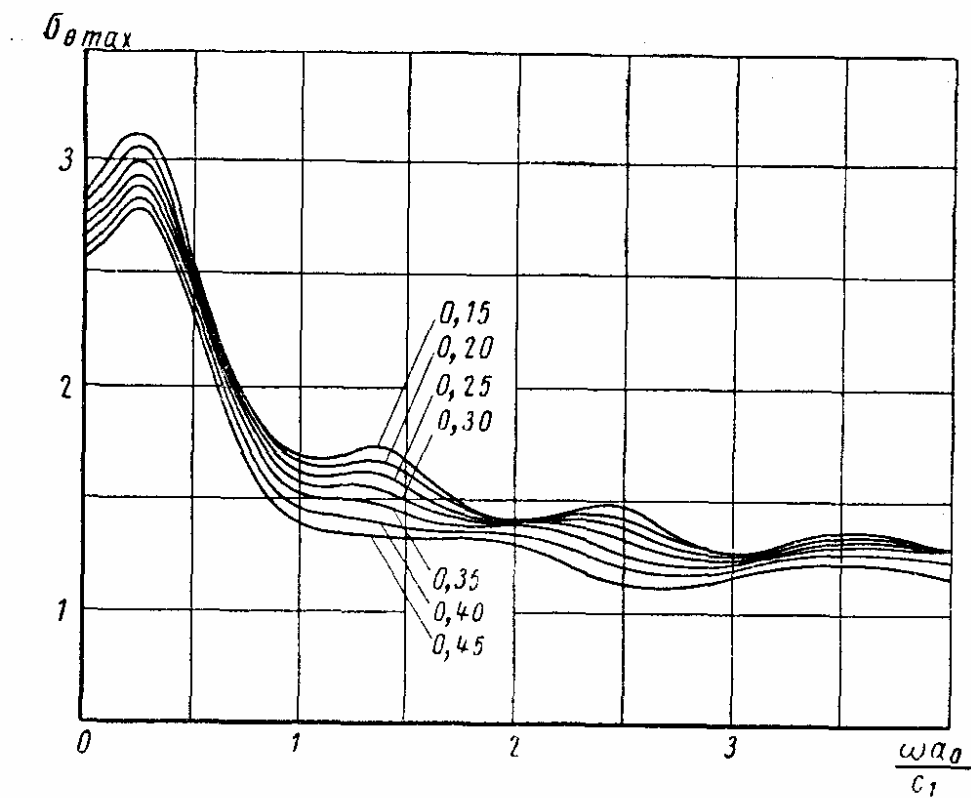


Рис. 49

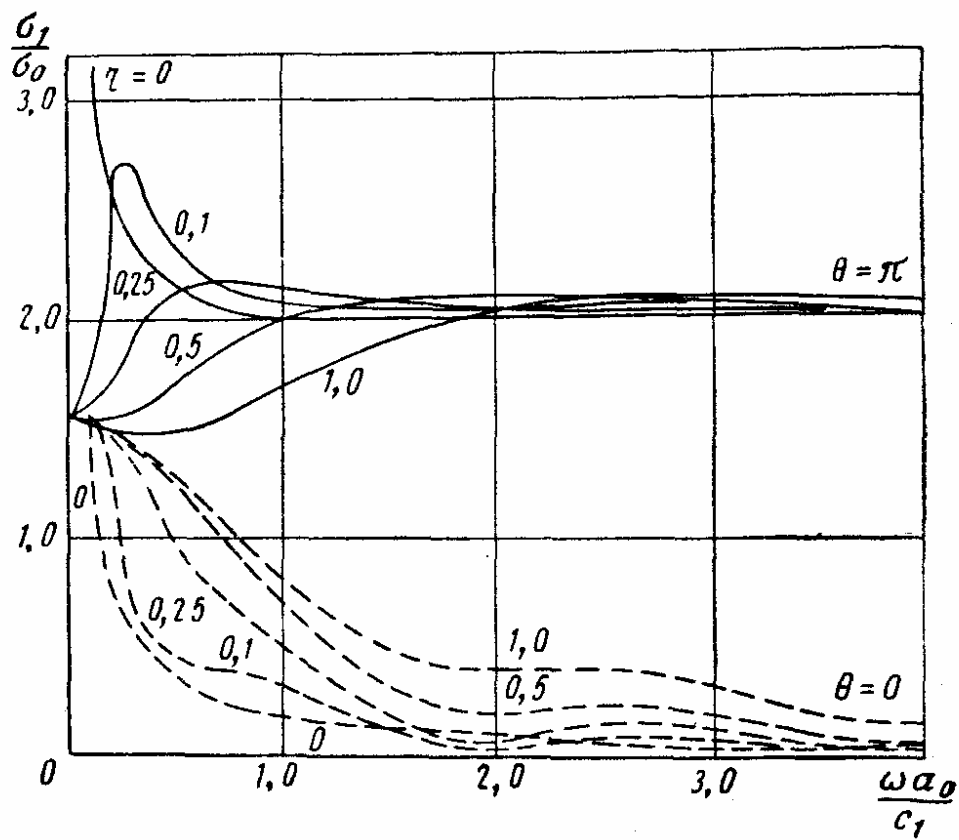


Рис. 50

Напряжения в плоской волне, движущейся в положительном направлении оси x (рис. 48), имеют следующий вид: волна расширения

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \operatorname{Re} \left\{ A \rho e^{i\omega \left(\frac{x}{c_1} - t \right)} \right\}; \\ \sigma_y &= \nu \operatorname{Re} \left\{ A \rho e^{i\omega \left(\frac{x}{c_1} - t \right)} \right\}; \\ \tau_{xy} &= 0; \quad c_1 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}};\end{aligned}$$

волна искажения

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = 0; \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} \left\{ B \rho e^{i\omega \left(\frac{x}{c_1} - t \right)} \right\}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}};\end{aligned}$$

здесь c_1 и c_2 — скорости волн расширения и искажения в тонкой пластинке; E , G и ν — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала; A и B — амплитуды колебаний.

Коэффициент концентрации напряжений на контуре кругового отверстия радиуса a_0 в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$ в зависимости от параметра $\frac{\omega a_0}{c_1}$ [46], обусловленный действием плоской гармонической волны сжатия при $\nu = 0,15 \div 0,45$, показан на рис. 49.

Главное напряжение

$$\sigma_1 = (\sigma_r + \sigma_\theta) + \sqrt{\frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2}{4} + \tau_{r\theta}^2},$$

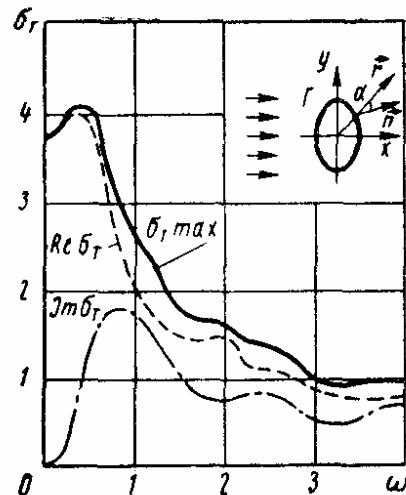


Рис. 51

отнесенное к амплитуде напряжений в падающей волне сжатия, на поверхности спая пластинки и жесткого кругового включения в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ для различных значений $\eta = \frac{g_1}{g}$ (g_1 — плотность включения, g — плотность пластинки) показано на рис. 50 [47].

На рис. 51 дано изменение коэффициента концентрации напряжений на краю эллиптического отверстия с полуосями $a = 3$, $b = 2$ в зависимости от параметра $\frac{\omega a_0}{c_2}$, $a_0 = \frac{a+b}{2}$ в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$ в результате действия падающей волны сжатия [20] при $\nu = 0,28$.

Коэффициент концентрации на контуре квадратного отверстия в точках $\theta = \frac{\pi}{4}$ и $\theta = \frac{3\pi}{4}$ при прохождении в пластинке плоской

волны сдвига [19] при $\nu = 0,28$ показано на рис. 52, а и б. Уравнение контура отверстия в плоскости $z(r, \theta)$ дано аналитической функцией при $\rho = 1$

$$z = a_0 \left(\zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta^3} \right); (\zeta = \rho e^{i\theta}),$$

где

$$\varepsilon = -\frac{1}{6}.$$

Приведенные данные показывают, что напряженное состояние около отверстия зависит от упругих свойств материала, от соотношения между размером отверстия и длиной падающей волны, от формы отверстия.

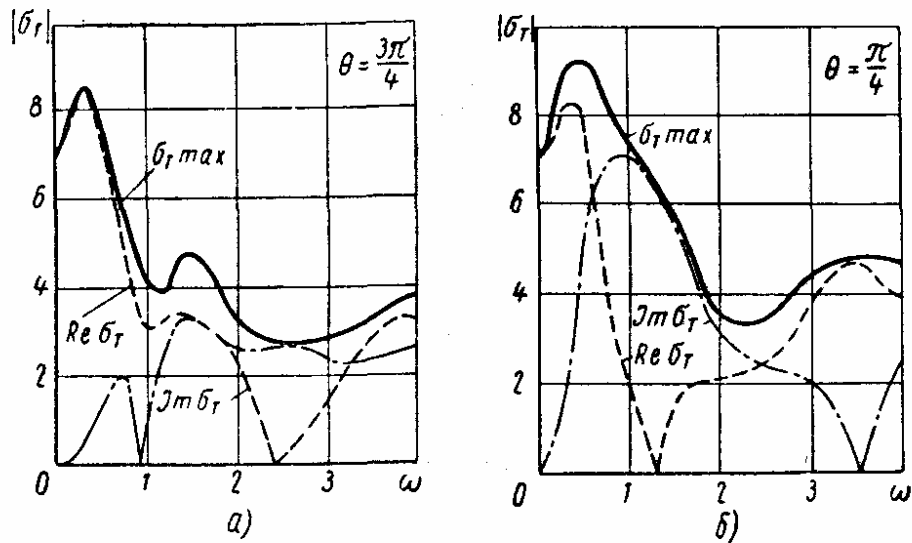


Рис. 52

В некотором диапазоне частот приложенной нагрузки динамический коэффициент концентрации выше статического на 8—10%.

НАПРЯЖЕНИЯ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ В ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ

Тонкостенные оболочки применяют в авиа- и судостроении, химическом машиностроении, ракетной технике и гражданском строительстве. Большинство оболочек имеет отверстия и вырезы различной формы. Отверстия и вырезы вызывают в оболочках возмущения напряженного состояния, причем компоненты дополнительного напряженного состояния, вызванные наличием отверстия, превосходят в несколько раз соответствующие компоненты в той же оболочке без отверстия при той же нагрузке. Хотя эти возмущения быстро затухают при удалении от отверстия, однако значительное увеличение напряжений в зонах возле отверстий существенно влияет на несущую способность всей конструкции.

Ниже приведены коэффициенты концентрации напряжений в тонких упругих оболочках, ослабленных криволинейными отверстиями с уравнением контура [33]

$$\left. \begin{aligned} x &= R [\cos \varphi + \varepsilon \cos N\varphi]; \\ y &= R [\sin \varphi - \varepsilon \sin N\varphi], \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где N — целое положительное число; $|\varepsilon|$ — малая величина ($|\varepsilon| \ll 1$).

Изменяя N и ε , получим соответственно эллиптическое, квадратное и треугольное отверстия, последние с закругленными углами.

Сферическая оболочка [33]. Круговое отверстие [45]. *Равномерное внутреннее давление.* Задача о напряженном состоянии сферической оболочки, нагруженной равномерным внутренним давлением интенсивности p и ослабленной круговым отверстием, которое закрыто крышкой, передающей только действие перерезывающей силы, впервые рассмотрена в работе [45].

Значение T_Φ^* по контуру Γ отверстия можно представить в виде

$$T_\Phi^*|_\Gamma = 2p_0h \left[1 + k^* \cdot 0,93 \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} \right], \quad (40)$$

где R — радиус кривизны срединной поверхности оболочки; r_0 — радиус отверстия; h — толщина оболочки

Коэффициент k^* для некоторых значений $\kappa = \frac{r_0^4}{\sqrt{Rh}} \sqrt{12(1-\nu^2)}$ (здесь ν — коэффициент Пуассона) принимают:

κ	1,35	1,2	1,1	1	0,45	0,2	0,1
k^*	0,9	0,85	0,75	0,70	0,40	0,15	0,08

Следовательно, коэффициент концентрации $k = \frac{T_\Phi^*}{p_0h}$ на контуре отверстия в рассматриваемой оболочке больше k для пластинки в 2,65 раза.

Эллиптическое отверстие [34]. Для эллиптического отверстия

$$N = 1; \varepsilon = \frac{a-b}{a+b}; r_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Равномерное внутреннее давление [34]. Нулевое приближение полностью совпадает с решением для кругового отверстия. Значение усилия T_θ^* на контуре отверстия определяют с точностью до ε^2 по формуле

$$T_\theta^* = p_0h + T_\theta^{(0)} + \frac{a-b}{a+b} T_\theta^{(1)} + \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 T_\theta^{(2)}. \quad (41)$$

Для оболочки с параметрами $R = 200$ см, $\frac{a+b}{2} = 10$ см, $h = 0,2$ см, $\nu = 0,3$

$$k = \frac{T_\theta^*}{p_0h} = 5,30 + \frac{a-b}{a+b} 19,44 \cos 2\theta + \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \times \\ \times (16,93 - 2,49 \cos 2\theta + 10,96 \cos 4\theta). \quad (42)$$

Значения k , подсчитанные по формуле (41) для пластинки и оболочки при $\theta = 0$ (на конце большой полуоси), приведены в табл. 7. Таблица дает представление о быстроте сходимости полученного решения для оболочки с эллиптическим отверстием.

7. Коэффициенты концентрации напряжений оболочки с эллиптическим отверстием ($\theta = 0$)

Точность	$\frac{a}{b}$					
	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
<i>Пластика</i>						
по точному решению . . .	2,00	2,21	2,44	2,62	2,80	3,00
в нулевом приближении . .	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
в первом приближении . .	2,00	2,19	2,39	2,52	2,66	2,80
во втором приближении . .	2,00	2,20	2,43	2,59	2,76	2,96
<i>Оболочка</i>						
в нулевом приближении . .	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30
в первом приближении . .	5,30	6,27	7,05	7,53	8,23	9,19
во втором приближении . .	5,30	6,31	7,25	8,03	8,94	10,20

На рис. 53 показано распределение $\frac{T_{\theta}^*}{\rho_0 h}$, вычисленное по формуле (42) в сечениях $\theta = 0$ (кривая 1) и $\theta = \frac{\pi}{2}$ (кривая 2), и для кругового отверстия (штриховая кривая), (l —безразмерное, отнесенное

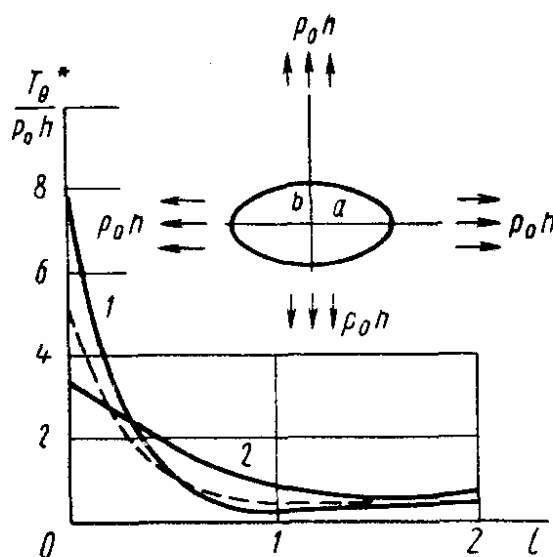


Рис. 53

к $r_0 = \frac{a+b}{2}$, расстояние от контура отверстия), а на рис. 54 — рас-

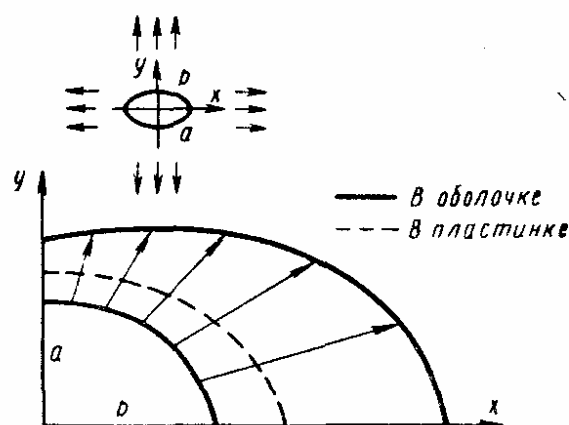


Рис. 54

пределение $k = \frac{T_{\theta}^*}{\rho_0 h}$ по контуру эллиптического отверстия при $R = 200$ см; $r_0 = 10$ см; $h = 0,2$ см; $\nu = 0,3$ см; $\frac{a}{b} = -1,5$.

Квадратное отверстие с закругленными углами [9]. *Равномерное внутреннее давление.*

Для квадратного отверстия с закругленными углами $N = 3$, $\epsilon = \pm \frac{1}{9}$, $r_0 = \frac{9}{20}$ диагонали квадрата. Усилие T_{θ}^* на контуре определяют по формуле

$$T_{\theta}^* = \rho_0 h + T_{\theta}^{(0)} + \epsilon T_{\theta}^{(1)} + \epsilon^2 T_{\theta}^{(2)},$$

где $T_\theta^{(0)}$, $T_\theta^{(1)}$, $T_\theta^{(2)}$ определяют по формулам [9]. Для параметров $R = 200$ см, $r_0 = 10$ см, $h = 0,2$ см, $\nu = 0,3$ получаем значение коэффициента концентрации усилий на контуре отверстия

$$k = 5,85 + 3,22 \cos 4\theta + 1,01 \cos 8\theta. \quad (43)$$

Значения максимального коэффициента концентрации k_{\max} (при $\theta = 0$) приведено в табл. 8.

8. Значения максимального коэффициента концентрации напряжений

Форма	Приближения k			
	0	I	II	Точное решение
Пластинка	2,00	3,33	3,77	4,00
Оболочка	5,30	8,53	10,08	—

На рис. 55 показано распределение $\frac{T_\theta^*}{p_0 h}$ для рассматриваемого примера по сечениям $\theta = 0$ (кривая 1); $\theta = \frac{\pi}{4}$ (кривая 2) и для кругового отверстия штриховая кривая (l — безразмерное, отнесенное к r_0

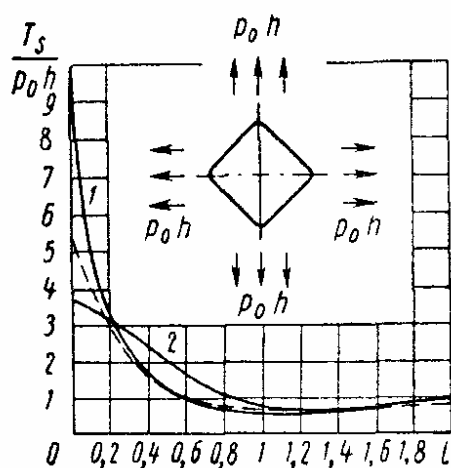


Рис. 55

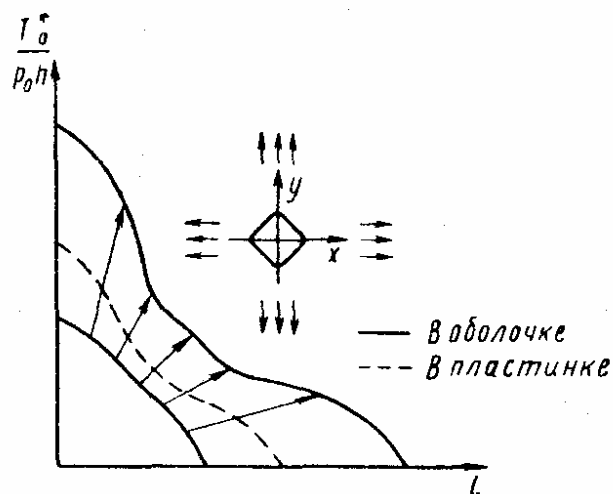


Рис. 56

расстояние от контура отверстия), а на рис. 56 — распределение $k = \frac{T_\theta^*}{p_0 h}$, вычисленное по формуле (43), по контуру отверстия при $\nu = \frac{1}{9}$, $R = 200$ см; $h = 0,2$ см; $r_0 = 10$ см; $\nu = 0,3$.

Цилиндрическая оболочка [8, 22, 33]. К р у г о в о е о т в е р с т и е. Одноосное растяжение. Растяжение вдоль образующей усилиями интенсивности ph .

$$T_{\theta}^{(0)} + T_{\theta}^{0(0)} = ph \left[1 - 2 \cos 2\theta + \frac{\pi\beta^2}{2} \cos 2\theta \right], \quad (44a)$$

где $T_{\theta}^{0(0)}$ — коэффициент при ε^j (где $j = 0$) в разложении T_{θ}^0 в ряд по ε с точностью до ε^2 .

Равномерное внутреннее давление (интенсивность p)

$$T_{\theta}^{(0)} + T_{\theta}^{0(0)} = qh \left[\frac{3}{2} + \cos 2\theta + \pi\beta^2 \left(1 + \frac{5}{4} \cos 2\theta \right) \right], \quad (44b)$$

где

$$q = \frac{pR}{h}.$$

Эллиптическое отверстие [8]. Равномерное внутреннее давление (интенсивность p) для эллиптического отверстия

$$r_0 = \frac{a+b}{2}; \quad \varepsilon = \frac{a-b}{a+b},$$

где a и b — полуоси эллипса. Коэффициент концентрации $k = \frac{T_{\theta}^*}{qh}$,

при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ будет

$$\left. \begin{aligned} (k)_{\theta=0} &= \frac{5}{2} + 4 \frac{a-b}{a+b} + 4 \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \\ &+ \frac{\pi\beta^2}{4} \left[9 + 26 \frac{a-b}{a+b} + 50 \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \right]; \\ (k)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{1}{2} - 2 \frac{a-b}{a+b} + 2 \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \\ &+ \frac{\pi\beta^2}{4} \left[-1 - 6 \frac{a-b}{a+b} + 10 \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Из формул (45) видно, что $(k)_{\theta=0}$ и $(k)_{\theta=\frac{\pi}{2}}$ существенно зависят от

отношения $\frac{a}{b}$, а коэффициент концентрации $(k_{\theta})_{\theta=0}$, кроме того, зависит и от радиуса R оболочки.

Кривизна оболочки оказывает существенное влияние на концентрацию усилий при $\theta = 0$, так при $\frac{a}{b} = 1,3$ коэффициент концентрации k в оболочке увеличивается на 34% по сравнению с пластинкой, а при $\frac{a}{b} = \frac{1}{1,3}$ лишь на 25%.

Чтобы судить о точности этого решения, сравним значения $(k^{(nl)})_{\theta=0}$ и $(k^{(nl)})_{\theta=\frac{\pi}{2}}$ (коэффициенты концентрации усилий в пластинке), полученные из приближенного решения с точностью до ε^2 и точного решения. В результате сравнения получим, что коэффициенты концентрации $k^{(nl)}$ при $\frac{a}{b} = 1,3$ и $\frac{a}{b} = \frac{1}{1,3}$ на концах малой полуоси эллиптического отверстия, полученные из приближенного решения, отличаются от значений этих же коэффициентов, полученных из точного решения, не более чем на 2%.

Одноосное растяжение (вдоль образующей) усилиями ph [7]. Заметим, что полуось a направлена по образующей, а полуось b — по направляющей срединной поверхности цилиндрической оболочки.

Для коэффициента концентрации $k = \frac{T_{\theta}^*}{ph}$ при $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$T_{\theta}^* = T_{\theta}^{(nl)} + T_{\theta}^{(доб)}, \quad (46)$$

где $T_{\theta}^{(nl)}$ — значения усилий в плоской пластинке при соответствующей нагрузке; $T_{\theta}^{(доб)}$ — добавка, которая возникает в оболочке за счет искривленности ее поверхности, находим

$$\left. \begin{aligned} (k)_{\theta=0} &= -1 - 0,649 \frac{(a+b)^2}{4Rh} [1 + 2\varepsilon + 4\varepsilon^2]; \\ (k)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= 3 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2 + 0,649 \frac{(a+b)^2}{4Rh} [1 - 2\varepsilon + 4\varepsilon^2]; \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}.$$

Коэффициенты концентрации напряжений $(k)_{\theta=0}$ и $(k)_{\theta=\frac{\pi}{2}}$, полученные по формулам (47) существенно зависят от $\frac{a}{b}$, а $(k)_{\theta=0}$ также сильно зависит и от радиуса R цилиндрической оболочки. При $\theta = 0$ получаем качественное различие усилий в оболочке по сравнению с пластинкой. Так, в пластинке $(k^{(nl)})_{\theta=0}$ не зависит от отношения $\frac{a}{b}$ и равно минус единице, а в оболочке $(k)_{\theta=0}$ по формуле (47) существенно зависит от отношения $\frac{a}{b}$.

На рис. 57 и 58 соответственно при $\frac{a}{b} = 1,4$ и при $\frac{b}{a} = 1,4$ и $\frac{a+b}{2\sqrt{Rh}} = 0,5$ приведено распределение $\frac{T_{\theta}^*}{ph}$ по контуру эллиптического отверстия.

Квадратное отверстие. Равномерное внутреннее давление. Значения T_0^* при $\nu = 0,3$ и $\varepsilon = \frac{1}{9}$, т. е. в случае, когда диагональ квадрата направлена на образующей цилиндрической оболочки, будут

$$T_0^* = qh \{ 1,5 + 1,125 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 0,37 \cos 6\theta + \\ + 0,335 \cos 8\theta + 0,11 \cos 10\theta + 0,325 \frac{r_0^2}{Rh} [4,26 + \\ + 6 \cos 2\theta + 3,41 \cos 4\theta + 1,93 \cos 6\theta + \\ + 0,89 \cos 8\theta + 0,56 \cos 10\theta] \}$$

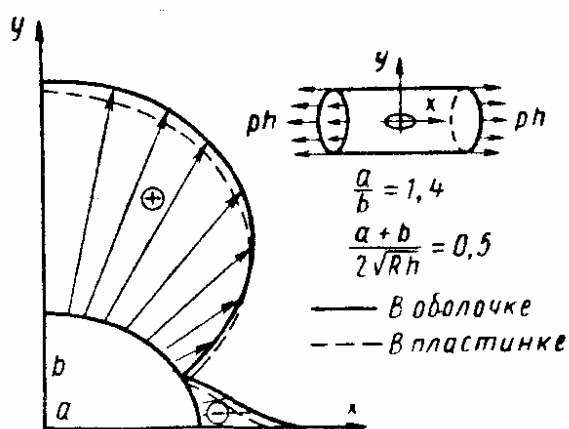


Рис. 57

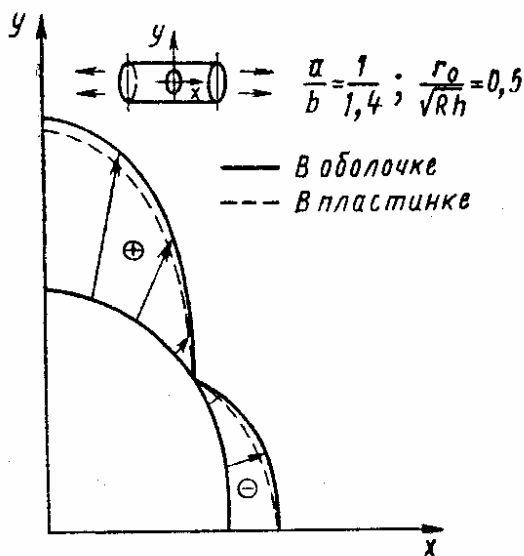


Рис. 58

При $\varepsilon = \frac{1}{9}$, т. е. когда диагональ квадрата направлена под углом $\frac{\pi}{4}$ к образующей, значения T_0^* будут

$$T_0^* = qh \{ 1,5 + 0,9 \cos 2\theta - \cos 4\theta - 0,295 \cos 6\theta + \\ + 0,335 \cos 8\theta + 0,11 \cos 10\theta + 0,325 \frac{r_0^2}{Rh} [4,01 + \\ + 4,44 \cos 2\theta - 2,59 \cos 4\theta - 1,41 \cos 6\theta + \\ + 0,89 \cos 8\theta + 0,56 \cos 10\theta] \}.$$

Значения k для пластинки и оболочки при $\frac{r_0}{\sqrt{Rh}} = 0,6$, $\varepsilon = \frac{1}{9}$ и $\nu = 0,3$ при различных значениях θ приведены в табл. 9.

Кривые, характеризующие $\frac{T_0}{qh}$ по контуру отверстия для $\varepsilon = \frac{1}{9}$ и $\varepsilon = -\frac{1}{9}$ при $\frac{r_0}{\sqrt{Rh}} = 0,5$, показаны на рис. 59 и 60.

9. Значения коэффициента концентрации напряжений k при $\frac{r_0}{\sqrt{Rh}} = 0,6$; $\varepsilon = \frac{1}{9}$; $\nu = 0,3$

Форма	θ	Приближения k			
		0	I	II	Точное решение
Пластина	0	2,50	3,94	4,44	4,68
Оболочка	0	3,55	5,61	4,43	—
Пластина	$\frac{\pi}{2}$	0,50	1,05	1,23	1,30
Оболочка	$\frac{\pi}{2}$	0,38	0,97	1,24	—

Одноосное растяжение. Оболочка растянута усилиями интенсивности ph . Значения T_θ^* в случае, когда диагональ квадрата направлена по образующей, т. е. при $\varepsilon = \frac{1}{9}$, будут

$$T_\theta^* = ph \left[1 - 2,24 \cos 2\theta + 0,66 \cos 4\theta - 0,73 \cos 6\theta + \right. \\ \left. + 0,22 \cos 8\theta - 0,22 \cos 10\theta - 0,65 \frac{r_0^2}{Rh} (0,08 + \right. \\ \left. + 1,34 \cos 2\theta + 0,06 \cos 4\theta + 0,44 \cos 6\theta + 0,11 \cos 10\theta) \right].$$

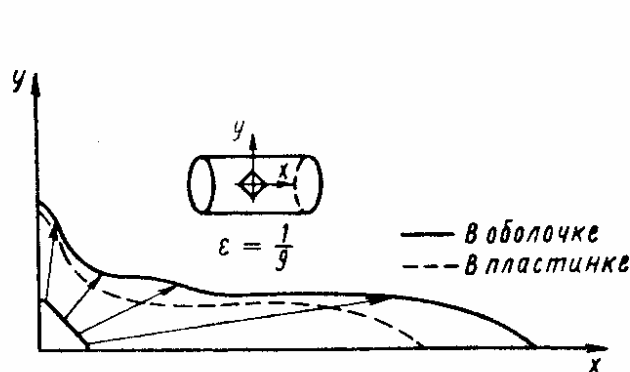


Рис. 59

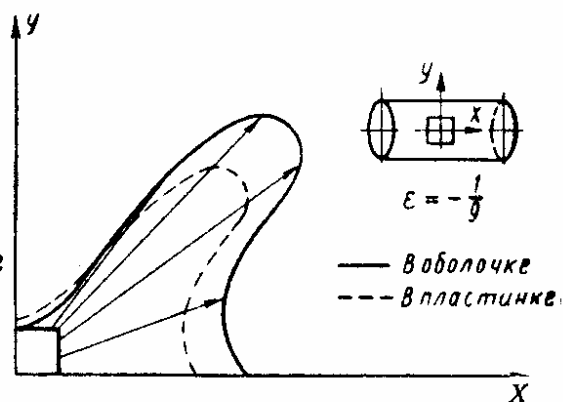


Рис. 60

В случае, когда диагональ квадрата направлена под углом $\frac{\pi}{4}$ к образующей, т. е. при $\varepsilon = -\frac{1}{9}$, будем иметь

$$T_\theta^* = ph \left[1 - 1,8 \cos 2\theta - 0,66 \cos 4\theta + 0,59 \cos 6\theta + \right. \\ \left. + 0,22 \cos 8\theta - 0,22 \cos 10\theta + 0,65 \frac{r_0^2}{Rh} (0,12 - 0,7 \cos 2\theta - \right. \\ \left. - 0,06 \cos 4\theta + 0,22 \cos 6\theta - 0,11 \cos 10\theta) \right].$$

Значения k для пластинки и оболочки при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{r_0}{\sqrt{Rh}} = 0,5$; $\varepsilon = \frac{1}{9}$ и $\nu = 0,3$ приведены в табл. 10.

10. Значения коэффициента концентрации напряжений k

при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{r_0}{\sqrt{Rh}} = 0,5$, $\varepsilon = -\frac{1}{9}$, $\nu = 0,3$

Форма	Приближения k			
	0	I	II	Точное решение
Пластинка	3,00	4,55	5,09	5,38
Оболочка	3,16	4,80	5,37	—

Распределение $\frac{T_\theta^*}{ph}$ по контуру отверстия при $\frac{r_0}{\sqrt{Rh}} = 0,6$ дано на рис. 61 и 62.

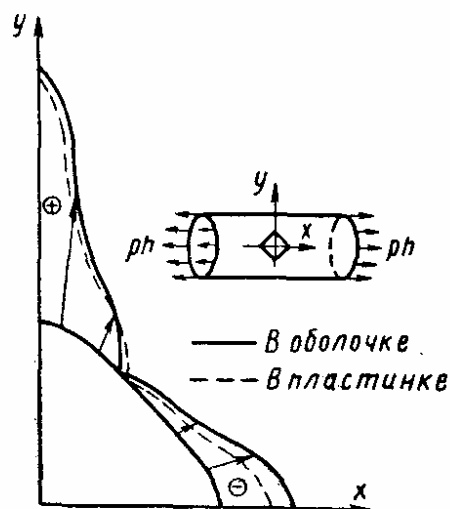


Рис. 61

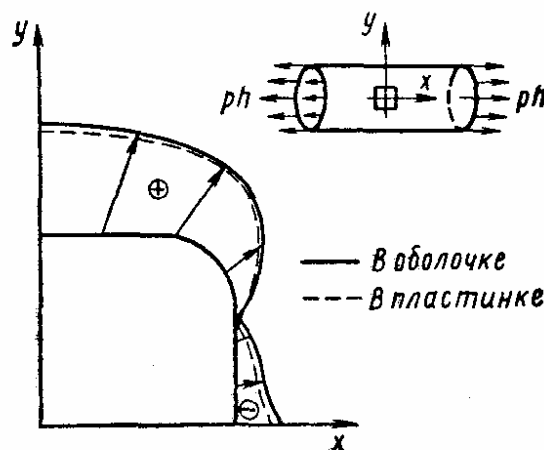


Рис. 62

Коническая оболочка [10.] Круговое отверстие. Одноосное растяжение. Растяжение конической оболочки усилиями интенсивности ph . Значения $T_\theta^*|_{r=1}$ с учетом нулевого и первого приближений определяют по формуле

$$T_\theta^*|_{r=1} = p_0 h \left\{ 1 - 2 \left(1 + \frac{1}{4} \pi \beta^2 \right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + \varepsilon \left[-\cos \theta + \frac{49}{16} \left(1 + \frac{2}{147} \pi \beta^2 \right) \cos 3\theta + \frac{9}{192} \pi \beta^2 \cos 5\theta \right] \right\}.$$

Нулевое приближение совпадает с решением для цилиндрической оболочки.

Распределение k при $\nu = 0,3$; $r = 0,15$; $\frac{r_0}{\sqrt{R_0 h}} = 0,5$ для цилиндрической и конической оболочек показано на рис. 63.

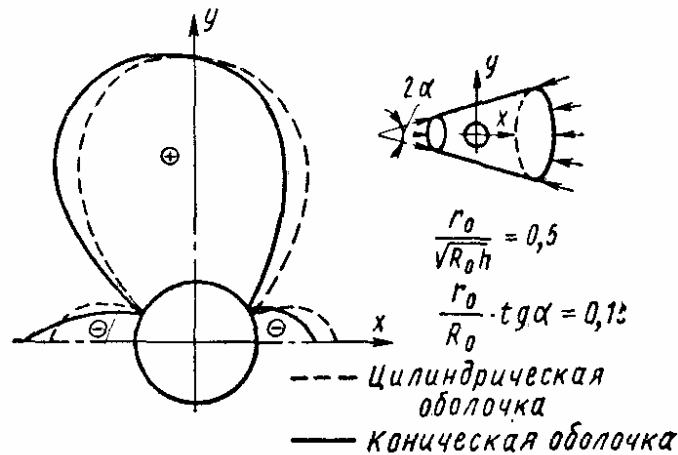


Рис. 63

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

Решения для произвольных форм полостей отсутствуют, поэтому приводим результаты исследования напряженного состояния возле трехосной эллипсоидальной полости (рис. 64):

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - e^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - 1} - k^2 = 0; \quad (48)$$

ρ — эллипсоидальная координата, определяющая семейство эллипсоидальных поверхностей (на поверхности полости $\rho = \rho_0$).

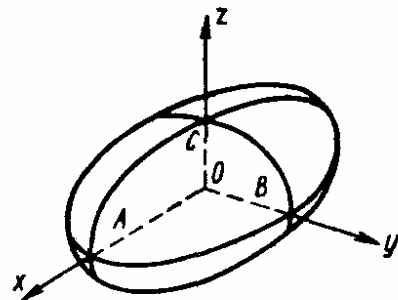


Рис. 64

На бесконечности задано произвольное однородное напряженное состояние, которое можно представить как сумму напряженных состояний:

$$\sigma_x = \sigma_x^0; \quad \sigma_y = \sigma_y^0; \quad \sigma_z = \sigma_z^0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad (49)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0; \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^0; \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}^0, \quad (50)$$

Общее решение уравнений равновесия теории упругости берут в виде

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} [4(1 - \nu) \vec{B} - \text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{B} + B_0)], \quad (51)$$

где \vec{B} , B_0 — гармонический вектор и скаляр; ν и G — коэффициент Пуассона и модуль сдвига соответственно. Напряженное состояние в среде можно представить как сумму однородного напряженного состояния и напряженного состояния, вызванного наличием полости.

Трехосное растяжение. В том случае, когда граничные условия имеют вид (49), напряженное состояние, вызванное наличием полости, определяется гармоническими функциями [49]

$$\left. \begin{aligned} B_x &= x \left(\frac{A}{\rho_0^2} + \rho_0^2 B_2 A_4 \right) \psi_1^{(1)}(\rho); \\ B_y &= y \left[\frac{A}{\rho_0^2 - e^2} - (\rho_0^2 - e^2) B_1 A_4 \right] \psi_1^{(2)}(\rho); \\ B_z &= z \left[\frac{A}{\rho_0^2 - 1} + (\rho_0^2 - 1) (B_1 - B_2) A_4 \right] \psi_1^{(3)}(\rho); \\ B_0 &= (\rho_0^2 + c_1)^2 A_4 \psi_2^{(4)}(\rho) [B_1 (y^2 - z^2) + \\ &+ B_2 (z^2 - x^2) + B_3] + A_5 [x^2 \psi_1^{(1)}(\rho) + y^2 \psi_1^{(2)}(\rho) + \\ &+ z^2 \psi_1^{(3)}(\rho) - k^2 \psi_0(\rho)], \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(\rho) &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}; \quad \psi_1^{(1)}(\rho) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)}; \\ \psi_1^{(2)}(\rho) &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)}; \quad \psi_1^{(3)}(\rho) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)}; \\ \psi_2^{(4)}(\rho) &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 + c_1)^2 \Delta(\lambda)}; \quad \Delta(\lambda) = \sqrt{(\lambda^2 - e^2)(\lambda^2 - 1)}; \\ B_1 &= -\frac{1}{3} [c_1 (2e^2 - 1) + e^2]; \quad B_2 = -\frac{1}{3} [c_1 (e^2 + 1) + 2e^2]; \\ B_3 &= -\frac{1}{9} [2c_1 (e^4 - e^2 + 1) + e^2 (1 + e^2)]; \\ c_1 &= \frac{1}{3} (\sqrt{e^4 - e^2 + 1} - e^2 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Функции $\psi_i^{(j)}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$) выражают через эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода.

На рис. 65 показано изменение коэффициента концентрации напряжений в точке A (см. рис. 64) в зависимости от отношений осей эллипсоида при $\sigma_z = 1$ на бесконечности, а на рис. 66 дана такая же зависимость в точке B .

При граничных условиях (49) в вершинах эллипсоида $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ равны нулю.

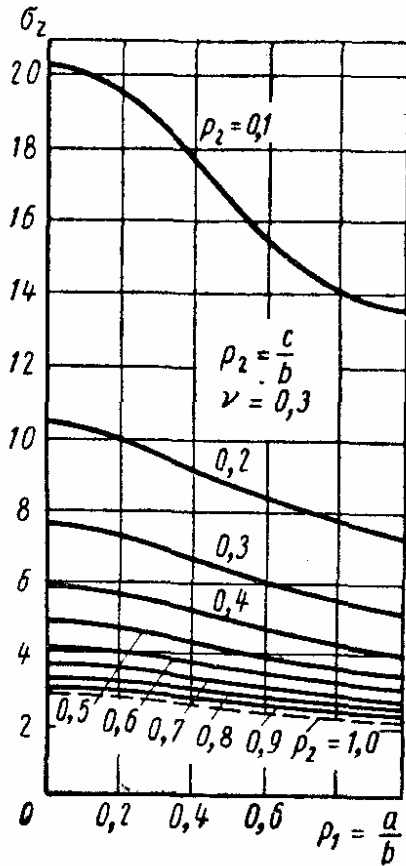


Рис. 65

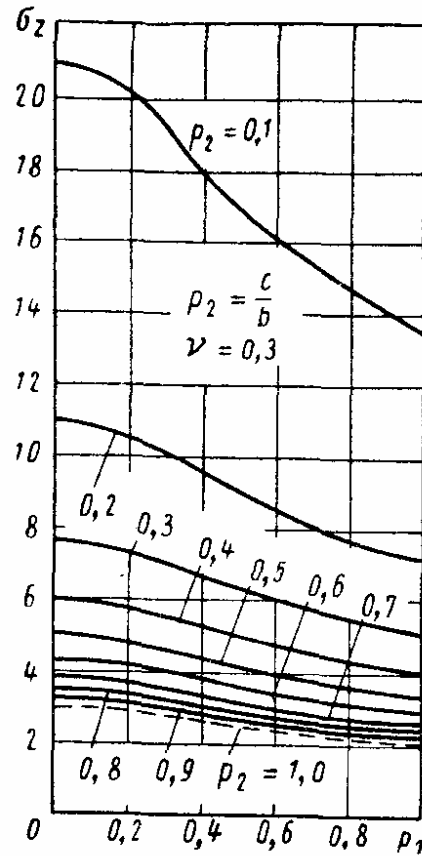


Рис. 66

Чистый сдвиг. Если на бесконечности задано однородное поле чистого сдвига (50), то напряженное состояние, вызванное наличием полости, определяется гармоническими функциями [27]

$$\left. \begin{aligned} B_x &= (A_1 + A_2) y \psi_1^{(2)}(\rho) - \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0^2} D_1 z \psi_1^{(3)}(\rho); \\ B_y &= -\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 - e^2} A_1 x \psi_1^{(1)}(\rho) + (C_1 + C_2) z \psi_1^{(3)}(\rho); \\ B_z &= -\frac{\rho_0^2 - e^2}{\rho_0^2 - 1} C_1 y \psi_1^{(2)}(\rho) + (D_1 + D_2) x \psi_1^{(1)}(\rho); \\ B_0 &= -\rho_0^2 A_2 x y \psi_2^{(1)}(\rho) - (\rho_0^2 - e^2) C_2 y z \psi_2^{(2)}(\rho) - \\ &\quad - (\rho_0^2 - 1) D_2 z x \psi_2^{(3)}(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_2^{(1)}(\rho) &= \frac{1}{e^2} (\psi_1^{(2)}(\rho) - \psi_1^{(1)}(\rho)); \\ \psi_2^{(2)}(\rho) &= \frac{1}{1 - e^2} (\psi_1^{(3)}(\rho) - \psi_1^{(2)}(\rho)); \\ \psi_2^{(3)}(\rho) &= \psi_1^{(3)}(\rho) - \psi_1^{(1)}(\rho). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Постоянные A_1, A_2, c_1, c_2, D_1 и D_2 находятся из граничных условий. Коэффициенты концентрации напряжений в вершинах эллипсоида при чистом сдвиге на бесконечности (50) определяют по формулам: в точке A

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0; \\ \tau_{yz} = \tau_{yz}^0 \left\{ 1 - \frac{\rho_0 [2\rho_0^2 - (e^2 + 1)] \Delta(\rho_0)}{2(1-\nu)(\rho_0^2 - e^2)} \left[\frac{(1-2\nu)(\rho_0^2 - e^2)}{2\rho_0^2 - (e^2 + 1)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\psi_1^{(2)}(\rho_0) + \psi_1^{(3)}(\rho_0)) + (\rho_0^2 - e^2) \psi_2^{(2)}(\rho_0) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

в точке B

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0; \\ \tau_{zx} = \tau_{zx}^0 \left\{ 1 - \frac{\rho_0 (2\rho_0^2 - 1) \Delta(\rho_0)}{2(1-\nu)(\rho_0^2 - 1)} \left[\frac{(1-2\nu)(\rho_0^2 - 1)}{2\rho_0^2 - 1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\psi_1^{(2)}(\rho_0) + \psi_1^{(3)}(\rho_0)) + (\rho_0^2 - 1) \psi_2^{(3)}(\rho_0) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

в точке C

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 \left\{ 1 - \frac{(2\rho_0^2 - e^2) \Delta(\rho_0)}{2(1-\nu)\rho_0} \left[\frac{(1-2\nu)\rho_0^2}{2\rho_0^2 - e^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\psi_1^{(2)}(\rho_0) + \psi_1^{(1)}(\rho_0)) + \rho^2 \psi_2^{(1)}(\rho_0) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^{(1)}(\rho) &= \frac{1}{e^2} [F(\varphi, e) - E(\varphi, e)]; \\ \psi_1^{(2)}(\rho) &= \frac{1}{e^2(1-e^2)} [E(\varphi, e) - (1-e^2)F(\varphi, e)] - \\ &\quad - \frac{1}{(1-e^2)\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 - e^2}}; \\ \psi_1^{(3)}(\rho) &= -\frac{E(\varphi, e)}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2} \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - e^2}{\rho^2 - 1}}; \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\left. \begin{aligned} F(\varphi, e) &= \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}}; \\ E(\varphi, e) &= \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} d\psi; \\ \varphi &= \arcsin \frac{1}{\rho}; \quad \psi = \arcsin \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

При чистом сдвиге на бесконечности $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ равны нулю в вершинах эллипсоида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б а б а е в М. А., Ц у р п а л И. А. Двухосное однородное напряженное состояние физически нелинейной пластинки с круговым отверстием. «Инженерный журнал». Т. V. Вып. 5, 1965.
2. В а н Ф о Ф ы Г. А. О концентрации напряжений в стеклопластиках. Концентрация напряжений. Вып. 1. Киев, изд-во «Наукова думка», 1965.
3. В а н Ф о Ф ы Г. А. Напряженное и деформированное состояние синтетических материалов при сдвиге. «Прикладная механика». № 1. Вып. 5, 1965.
4. В а н Ф о Ф ы Г. А., С а в и н Г. Н. Об основных соотношениях в теории ориентированных стеклопластиков. «Механика полимеров». Т. 1. 1965.
5. В а н Ф о Ф ы Г. А., С а в и н Г. Н. Распределение напряжений около эллиптического отверстия в пластинке из волокнистых материалов. «Прикладная механика». Т. 1. Вып. 5. 1966.
6. В е й т ц м а н (V. Weitsman). Влияние моментного напряжения на концентрацию напряжений вокруг цилиндрического включения в одноосном поле кручения. Tr. ASME—E, «Прикладная механика», 1965, № 2.
7. Г у з ь А. Н. Концентрація напружень біля еліптичного отвору з малим ексцентриситетом в циліндричній оболонці. ДАН УРСР, № 10, 1963.
8. Г у з ь А. Н. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий на боковой поверхности кругового цилиндра. «Инженерный журнал». Т. 4. Вып. 2, 1964.
9. Г у з ь А. Н. Концентрація напружень біля квадратного отвору в сферичній оболонці. ДАН УРСР, 1964.
10. Г у з ь А. Н. Напряженное состояние конической оболочки, ослабленной круговым отверстием. «Инженерный журнал». Вып. 3, 1965.
11. Г у з ь А. Н., С а в и н Г. Н., Ц у р п а л И. А. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке. Arch. Mech. Stos. v. 16, N 4, Warszawa, 1964.
12. Г у з ь А. Н., Г о л о б о р о д ь к о С. А. Про напружений стан біля квадратного отвору з заокругленими кутами в циліндричній оболонці. «Прикладная механика». Т. X. Вып. 6, 1964.
13. И в л е в Д. Д. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности. ДАН СССР. Т. 113, № 2, 1957.
14. К а м и н с к и й А. А. О критических нагрузках, вызывающих начало развития трещин возле отверстия. МТТ, № 4, 1966.
15. К е р и м о в Р. Ю. Развитие пластических зон возле кругового отверстия при одноосном растяжении пластинки. «Прикладная механика». Т. 1. Вып. 9, 1965.
16. К о с м о д а м и а н с к и й А. С. Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых круговых вырезов. Изв. АН СССР, ОТН. «Механика и машиностроение», № 4, 1961.
17. К о й т е р В. Т. Моментные напряжения в теории упругости. М., изд-во «Мир», № 3 (91), 1965.
18. К о л ь с к и й Г. Волны напряжений в твердых телах. М., ИЛ, 1955.
19. К у б е н к о В. Д. Динамическая концентрация напряжений около квадратного отверстия (установившиеся волновые движения). «Прикладная механика». Т. 2. Вып. 12, 1966.
20. К у б е н к о В. Д. Динамічна концентрація напружень біля еліптичного отвору. ДАН УРСР, № 3, 1967.
21. Л е х н и ц к и й С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.

22. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1947.
23. Миндлин Р. Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. М., изд-во «Мир», № 4 (86), 1964.
24. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ТТ. 1, 2. М., ИЛ, 1958.
25. Немиш Ю. Н. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости. «Прикладная механика». Т. II. Вып. 4, 1966.
26. Перлин П. И. Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг отверстий. Труды Московского физико-технического института, № 5, 1960.
27. Подільчук Ю. М. Напружений стан навколо еліпсоїдальної порожнини при довільних сталих зусиллях на нескінченності. ДАН УРСР, № 9, 1964.
28. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. «Прикладная математика и механика». Т. XII. Вып. 1, 1948.
29. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., ГИТТИ, 1951.
30. Савин Г. Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. Изд-во Киевского госуниверситета, 1965.
31. Савин Г. Н. Нелинейные задачи концентрации напряжений около отверстий в пластинах. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван. АН Армянской ССР, 1964.
32. Савин Г. Н., Гузь А. Н. Об одном способе решения плоских задач моментной теории упругости для многосвязных областей. «Прикладная механика». Т. II. Вып. 1, 1966.
33. Савин Г. Н., Гузь А. Н. О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках. Изв. АН СССР, «Механика и машиностроение». Вып. 6, 1964.
34. Савин Г. Н., Гузь А. Н. Концентрація напружень біля еліптичного отвору в сферичній оболонці. ДАН УРСР, № 1, 1964.
35. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев, изд-во «Наукова думка», 1964.
36. Сажин В. С. Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг отверстия, близкого к квадрату. «Инженерный журнал», т. IV, вып. 2, 1964.
37. Толконников Л. А. Конечные плоские деформации несжимаемого материала. ПММ, XXIII. Вып. 1, 1959.
38. Тульчий В. И. К вопросу об изгибе подкрепленных пластинок. Концентрация напряжений. Киев, «Наукова думка». Вып. 1, 1965.
39. Фомин В. Л. Упруго-пластическое равновесие плоскости с круговым вырезом при наличии стационарного температурного поля. «Ученые записки Ленинградского университета», № 280. Серия математических наук. Вып. 35, 1960.
40. Хартрент (R. J. Hartranft), Си (G. Sih). Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений около кругового включения. Тр. ASME—E, «Прикладная механика», 1965 № 2.
41. Хопмен (W. H. Horrmann), Шоуэн (F. O. F. Schahwan). Физическая модель изотропного упругого материала с тремя константами. Тр. ASME—E, «Прикладная механика», 1965, № 4.
42. Цурпал И. А. Напряженное состояние вблизи криволинейного отверстия в физически нелинейной пластинке. Сб. «Прочность корпуса судна». Вып. 67. Л., НТО Судостроительной промышленности, 1965.
43. Цурпал И. А. Концентрация напряжений около квадратного отверстия в физически нелинейной упругой пластинке. Изв. АН СССР, «Механика», № 6, 1965.
44. Черепанов Г. П. Об одном методе решения упруго-пластической задачи. Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», № 1, 1963.
45. Шевляков Ю. А. Концентрація напружень біля кругового отвору в сферичному днищі. ДАН УРСР, № 1, 1955.
46. Рао J. H. Dynamical stress concentration in elastic plate. Journal of Applied Mechanics, ASME, E, 1961, N 2.
47. Рао J. H., Моу C. C. Dynamical stress concentration in an elastic plate with circular inclusion. Proceeding of the 4-th US National Congress of Applied. Mechanics, Berkeley, California, 1962.
48. Volterra V. Theory of Functionals and of Integro-differential Equations. Blackie, London, 1930.
49. Sadowsky M. A., Sternberg E. Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity. J Appl Mech., 16, N 2, 1949.

Глава 13

ТЕОРИЯ КОНТАКТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Исследование деформаций и напряжений в местах силового контакта деталей представляет собой один из наиболее сложных разделов математической теории упругости. Начало теории деформации упругих тел в местах контакта на основе использования общих уравнений теории упругости и методов теории потенциала положено работой Г. Герца [41].

Теория контактных напряжений и деформаций имеет большое практическое значение, и поэтому формулы для определения размеров площадки контакта, сближения соприкасающихся тел и наибольшего давления получили широкое распространение. Но обоснование применяющихся формул почти не приводится в массовой литературе и заменяется ссылками на общие курсы теории упругости или на работы А. Н. Динника [12] и Н. М. Беляева [5, 6, 7] *. Изучение этих материалов осложняется, в свою очередь, наличием в них малознакомых широким инженерным кругам математических уравнений теории потенциала и общих уравнений теории упругости.

Для оценки прочности детали недостаточно знания величины наибольшего давления по поверхности контакта. Необходимо изучить напряженное состояние во всей зоне контакта. А. Н. Динником и Н. М. Беляевым установлено, что независимо от формы площадки контакта наиболее опасное напряженное состояние наступает не у поверхности контакта, а на некоторой глубине под ней.

В основе всех теоретических выводов и заключений лежат следующие предположения:

материал соприкасающихся деталей однороден и изотропен, а поверхности их достаточно гладкие;

нагрузки, приложенные к телам, вызывают в зоне контакта только упругие деформации, подчиняющиеся закону Гука;

площадка контакта весьма мала по сравнению с общими поверхностями соприкасающихся деталей;

силы давления нормальны к поверхности соприкасания тел; силами трения по поверхности контакта пренебрегают.

Теория контакта, основанная на этих допущениях, получила широкое применение в ряде практических задач как достаточно рациональная расчетная схема, которую при необходимости можно уточнить путем введения экспериментальных поправочных коэффициентов, например, в расчетах на контактную прочность зубчатых и червячных передач, шариковых и роликовых подшипников, в разработке проблем чистоты обрабатываемых поверхностей.

* См. список литературы к гл. 14.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ТЕЛ

В результате соприкосновения двух тел и их деформации под действием сжимающих сил точки поверхности получают некоторые перемещения. Предположение о малости площадки контакта по сравнению с общей поверхностью соприкасающихся тел позволяет использовать для определения перемещений решение теории упругости о деформации тела больших размеров, ограниченного плоскостью (упругое полупространство) под действием на него сосредоточенной силы, перпендикулярной к граничной плоскости (рис. 1). Обозначим через w перемещения произ-

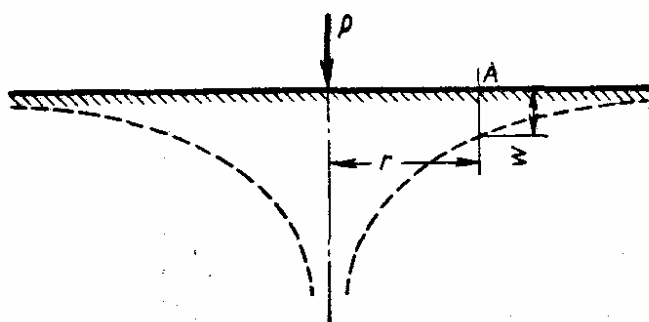


Рис. 1

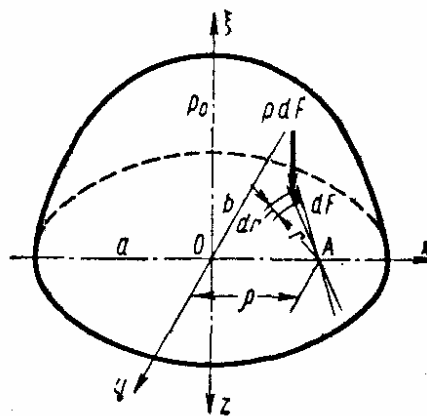


Рис. 2

вольной точки A граничной плоскости по направлению нормали к этой плоскости. Перемещение определяют по известной формуле Буссинеска¹

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{P}{r} = k \frac{P}{r}, \quad (1)$$

где r — расстояние от точки приложения сосредоточенной силы P до точки, в которой вычисляют перемещение; E — модуль упругости материала тела; ν — коэффициент Пуассона; $k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E}$ — коэффициент, обобщающий свойства материала.

Зависимость перемещения w от расстояния r по формуле (1) показана штриховой линией на рис. 1.

В результате сжатия соприкасающихся тел по образовавшейся граничной площадке контакта сжимающая сила P будет распределена в виде нормального давления. Перемещение w некоторой точки A граничной площади от действия давления p можно определить, используя принцип независимости действия сил, как сумму перемещений от элементарных сил $p dF$ (рис. 2):

$$w = k \int_F \frac{p dF}{r}, \quad (2)$$

где r — расстояние от точки A , в которой определяют перемещение w , до точки приложения элементарной силы $p dF$.

В зависимости от формы соприкасающихся тел меняется форма площадки контакта и распределение давления p , т. е. изменяется и величина перемещений.

¹ Обоснование и элементарный вывод формулы (1) дан в работе [30].

Из выражений (1) и (2) следует, что по мере удаления точки, в которой определяют перемещение, от начала координат величина w уменьшается и на бесконечности обращается в нуль. В связи с этим можно представить, что система координат x, y, z жестко связана с телом на бесконечности, т. е. что найденные перемещения представляют собой перемещения точек тела относительно весьма удаленной от места приложения сил и, следовательно недеформированной части тела.

ДЕФОРМАЦИЯ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ТЕЛ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ТОЧЕЧНОГО КОНТАКТА

Два ограниченных некоторыми криволинейными поверхностями тела соприкасаются в какой-то точке, которую принимают за начало координат. Оси z_1 и z_2 направляют по общей нормали к соприкасающимся поверхностям внутрь каждого из тел. Оси x и y расположены в общей касательной плоскости, как показано на рис. 3.

Представим семейство плоскостей, проходящих через оси z . Пересечение плоскостей этого семейства с поверхностью тела носит название нормальных сечений. У каждого из тел будет два нормальных сечения, называемых главными нормальными сечениями, для которых кривизна в точке O имеет минимальное и максимальное значения.

Обозначим k_{11} и k_{12} — кривизны главных нормальных сечений тела I в точке контакта O ; k_{21} и k_{22} — кривизны главных нормальных сечений тела II в той же точке; ω — угол между плоскостями кривизны k_{11} и k_{22} .

Назовем соответствующими точки A_1 и A_2 , лежащие на поверхности тел в окрестности начала координат, для которых $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Из рассмотрения уравнений поверхностей соприкасающихся тел можно показать, что [30] расстояние $z_1 + z_2$ между соответствующими точками A_1 и A_2 выражается зависимостью

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2, \quad (3)$$

в которой параметры A и B имеют значения

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \left[(k_{11} + k_{12}) + (k_{21} + k_{22}) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega} \right]; \\ B &= \frac{1}{4} \left[(k_{11} + k_{12}) + (k_{21} + k_{22}) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

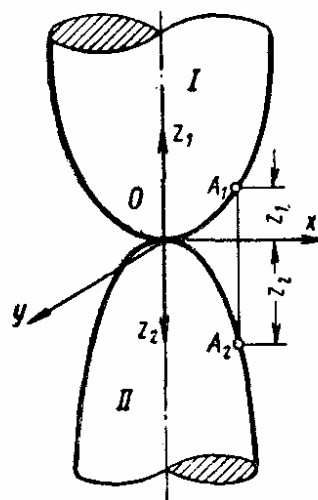


Рис. 3

Для рассматриваемого случая (рис. 3), когда расстояние между двумя соответствующими точками A_1 и A_2 — существенно положительная величина, параметры A и B тоже должны быть положительными.

Полагая в формуле (3)

$$z_1 + z_2 = C = \text{const},$$

получим уравнение проекции на общую касательную плоскость геометрического места точек поверхностей соприкасающихся тел, находящихся на расстоянии C одно от другого. Уравнение этого геометрического места принимает вид

$$Ax^2 + By^2 = C. \quad (5)$$

Так как величины A и B положительны, то уравнение (5) представляет собой (рассматривая $C > 0$ как параметр) систему подобных эллипсов, центры которых лежат в начале координат O .

Уравнение семейства подобных эллипсов можно представить в виде

$$\frac{x^2}{\frac{C}{A}} + \frac{y^2}{\frac{C}{B}} = 1;$$

если ось x расположить по большей оси семейства, то $\frac{C}{A} > \frac{C}{B}$ и, следовательно, $A < B$. При вычислениях по формулам (4) нужно большую величину принимать за B , а меньшую за A .

Рассмотрим некоторые случаи касания тел.

К а с а н и е ш а р а р а д и у с а R_1 с ш а р о м р а д и у с а R_2

$$k_{11} = k_{12} = \frac{1}{R_1}; \quad k_{21} = k_{22} = \frac{1}{R_2};$$

тогда из формул (4)

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (6)$$

и, следовательно, кривые равных расстояний представляют собой окружности.

При соприкосновении шара радиуса R_1 с плоскостью величина R_2 обращается в бесконечность и $k_{21} = k_{22} = 0$. Если шар радиуса R_1 соприкасается со сферической полостью радиуса R_2 , то величину R_2 и кривизны $k_{21} = k_{22}$ нужно рассматривать как отрицательные. Расстояние между соответствующими точками будет соответственно равно разности $z_1 - z_2$.

К а с а н и е ц и л и н д р о в с р а д и у с а м и R_1 и $R_2 \leq R_1$, оси которых взаимно перпендикулярны,

$$k_{11} = \frac{1}{R_1}; \quad k_{12} = 0; \quad k_{21} = \frac{1}{R_2}; \quad k_{22} = 0; \quad \text{угол } \omega = \frac{\pi}{2},$$

$\cos 2\omega = -1$ и, следовательно,

$$A = \frac{1}{2R_1}; \quad B = \frac{1}{2R_2}, \quad (7)$$

т. е. при $R_1 \neq R_2$ кривые равных расстояний представляют собой эллипсы, которые при $R_1 = R_2$ переходят в окружности.

Касание параллельных цилиндров с радиусами R_1 и $R_2 \leq R_1$. В отличие от предыдущего случая угол $\omega = 0$, $\cos 2\omega = 1$ и получаем

$$A = 0; B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (8)$$

т. е. кривые равных расстояний представляют собой семейство прямых, параллельных оси x , уравнения которых получают выражение

$$y = \pm \sqrt{\frac{C}{B}}. \quad (9)$$

Если цилиндр радиуса R_2 соприкасается с цилиндрической полостью (впадиной) радиуса R_1 , то величину R_1 и соответствующую кривизну k_{11} нужно рассматривать как отрицательную.

Касание шара радиуса R_1 с цилиндром радиуса R_2

$$\left. \begin{aligned} k_{11} = k_{12} = \frac{1}{R_1}; \quad k_{21} = \frac{1}{R_2}; \quad k_{22} = 0; \\ A = \frac{1}{2R_1}; \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь кривые равных расстояний представляют семейство эллипсов. При $R_2 = \infty$, т. е. при касании шара с плоскостью, эллипсы переходят в окружности, а при $R_1 = \infty$, т. е. при касании цилиндра с плоскостью, — в прямые, параллельные оси x .

Теперь определим деформации тел в местах контакта, величины размеров площади контакта и давления, распределенного по этой площади.

Перемещение точки A_1 , в жестко связанной на бесконечности с первым телом системой координат x_1, y_1, z_1 (см. стр. 383), w_1 параллельно оси z_1 , представляет собой перемещение относительно недеформированной части тела, расположенной далеко от области контакта. Перемещение точки O первого тела, т. е. точки первоначального контакта (см. рис. 3), обозначим через $w_1(0)$. Взаимное перемещение этих точек, вызванное деформацией тела, будет равно разности перемещений $[w_1(0) - w_1]$. Аналогично можно найти взаимное перемещение точек A_2 и O второго тела $[w_2(0) - w_2]$.

До деформации расстояние между соответствующими точками A_1 и A_2 , лежащими на одной вертикали, было равно $z_1 + z_2$. После деформации это расстояние изменилось на величину

$$[w_1(0) - w_1] + [w_2(0) - w_2].$$

Очевидно, что при сжатии тел силами, действующими вдоль общей оси z , в соприкосновение придут те точки, для которых

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= [w_1(0) - w_1] + [w_2(0) - w_2] = \\ &= [w_1(0) + w_2(0)] - (w_1 + w_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Сумма перемещений $w_1(0)$ и $w_2(0)$ точек первоначального касания характеризует их взаимное перемещение в целом или их сближение δ . Тогда

$$[w_1(0) + w_2(0)] = \delta \quad (12)$$

и

$$z_1 + z_2 = \delta - (w_1 + w_2). \quad (13)$$

Зависимость (13) представляет собой уравнение перемещений контактной задачи. Если A_1 и A_2 совпадают с точкой первоначального касания, то обе части уравнения обращаются в нуль. По мере удаления соответствующих точек A_1 и A_2 от оси z левая часть зависимости (13) возрастает и соответственно уменьшается в правой части член, содержащий $(w_1 + w_2)$. Среди всех точек, приходящих в соприкосновение при деформации тел, величина $z_1 + z_2$ будет наибольшей у контурных точек площадки контакта.

Выше было установлено, что семейство кривых равных расстояний

$$z_1 + z_2 = \text{const} \quad (14)$$

представляет собой семейство подобных и подобно расположенных эллипсов

$$Ax^2 + By^2 = \text{const}. \quad (15)$$

Это позволяет вывести заключение, что контур площадки контакта представляет собой эллипс, полуоси которого совпадают с полуосями эллипсов по выражению (15).

Учитывая, что размеры площади контакта малы по сравнению с общими размерами соприкасающихся тел, можно использовать выражение (2) для определения упругих перемещений w_1 и w_2 , представив их в виде

$$w_1 = k_1 \int_F \frac{p dF}{r} \quad \text{и} \quad w_2 = k_2 \int_F \frac{p dF}{r}, \quad (16)$$

где

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}; \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2};$$

F — площадь контакта, т. е. площадь, ограниченная контурным эллипсом.

Уравнение перемещений (13) можно, используя выражения (3) и (16), представить в виде

$$Ax^2 + By^2 = \delta - k_0 \int_F \frac{p dF}{r}$$

или

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = k_0 \int_F \frac{p dF}{r}, \quad (17)$$

где

$$k_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right].$$

Уравнение (17) представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестного закона распределения давления p по эллиптической площадке контакта F . Кроме того, подлежат определению также размеры площадки контакта (большая a и малая b полуоси контурного эллипса) и величина сближения δ соприкасающихся тел.

Подберем закон распределения давления p , чтобы удовлетворить интегральному уравнению (17).

Так как в центре эллиптической площадки контакта перемещение наибольшее, то в этой точке будет и наибольшее давление p_0 . Пространственная эпюра распределения давлений по эллиптической площадке может быть представлена эллипсоидом с полуосями a , b и c *

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{c}\right)^2 = 1,$$

т. е. примем, что давление p в произвольной точке x, y площади контакта пропорционально ординате ξ эллипсоида и выражается следующим равенством:

$$p = p_0 \frac{\xi}{c} = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}. \quad (18)$$

Из выражения (18) следует, что рассматриваемое распределение давления p по площади эллипса $F = \pi ab$ вполне определяется полуосями a и b и не зависит от третьей полуоси эллипсоида c . Выбор величины c определяет собой только форму эллипсоида давлений, но не влияет на величину отношения

$$\frac{\xi}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Сжимающая сила P является равнодействующей давлений по площади контакта:

$$P = \int_F p dF = \frac{p_0}{c} \int_F \xi dF;$$

в последнем выражении

$$\int_F \xi dF = \frac{2}{3} \pi abc$$

как объем полуэллипсоида.

Следовательно,

$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi ab}; \quad (19)$$

при распределении давления по эллипсоидальному закону наибольшее давление в 1,5 раза превышает среднее.

Предположение об эллипсоидальном распределении давления (18) позволяет выразить правую часть уравнения перемещений (17) в виде

* Подробное обоснование и вывод см. в работе [30].

квадратичной зависимости от координат x и y , т. е. виде, аналогичном левой части того же уравнения. Другими словами, сделанное предположение о распределении давления удовлетворяет интегральному уравнению (17) и позволяет определить как размеры площади контакта, так и величину сближения.

Правая часть уравнения перемещений (17) с использованием выражения (18) после интегрирования и преобразований [30] принимает вид

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = \eta \frac{p_0}{a} \left[abK - \frac{b}{a} Dx^2 - \frac{a}{b} (K - D) y^2 \right], \quad (20)$$

где

$$\eta = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}.$$

Приравнявая свободные члены и коэффициенты при x^2 и y^2 в левой и правой частях равенства, получим

$$\delta = \eta p_0 bK; \quad (21)$$

$$A = \eta p_0 \frac{b}{a^2} D; \quad (22)$$

$$B = \eta p_0 \frac{1}{b} (K - D); \quad (23)$$

здесь величина K представляет собой эллиптический интеграл первого рода

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}; \quad (24)$$

L — интеграл второго рода

$$L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (24a)$$

и D — их сочетание

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)]. \quad (24б)$$

Указанные эллиптические интегралы являются функциями относительного эксцентриситета контурного эллипса площадки контакта

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Исключая ηp_0 из выражений (22) и (23), приходим к следующему трансцендентному уравнению для определения эксцентриситета:

$$\frac{A}{B} = (1 - e^2) \frac{D}{K - D}. \quad (25)$$

Задаваясь различными значениями e и используя таблицы полных эллиптических интегралов, можно определить по формуле (25) соответствующие значения отношения $\frac{A}{B}$. Графическая зависимость $\frac{A}{B} = f(e)$ показана на рис. 4. Если обозначить сумму главных кривизн поверхностей соприкасающихся тел в месте первоначального контакта

$$\sum k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}, \quad (26)$$

нетрудно показать, используя выражения (4), что

$$\sum k = 2(A + B). \quad (26a)$$

После преобразования соотношений (19) и (21)–(23) можно представить выражения для полуосей эллипса, наибольшего давления p_0 и сближения δ в следующей форме:
большая полуось контурного эллипса

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta P}{\sum k}}, \quad (27)$$

где

$$n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{B}{A}\right) D};$$

малая полуось контурного эллипса

$$b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta P}{\sum k}},$$

где

$$n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B}\right) (K - D) \sqrt{1 - e^2}}; \quad (28)$$

наибольшая интенсивность давления p_0 между сжимаемыми телами

$$p_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\sum k}{\eta}\right)^2 P}, \quad (29)$$

где

$$n_p = \frac{1}{n_a n_b};$$

сближение δ соприкасающихся тел

$$\delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k P^2}, \quad (30)$$

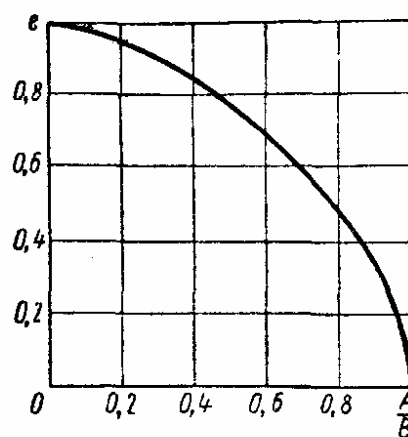


Рис. 4

где

$$n_\delta = K \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B}{A}} \cdot \frac{1}{D}}. \quad (31)$$

Из зависимостей (27)–(30) следует, что при круговой площадке контакта ($e = 0$) все коэффициенты n_a , n_b , n_p и n_δ будут равны 1 и в этом частном случае

$$\left. \begin{aligned} a = b &= \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta P}{\sum k}}; \quad p_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\sum k}{\eta} \right)^2 P}; \\ \delta &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k P^2}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

При касании сферических поверхностей радиусов R_1 и R_2 сумма кривизн

$$\sum k = 2 \left(\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right) = 2 \frac{R_1 \pm R_2}{R_1 R_2};$$

знак минус берут при касании шара радиуса R_1 и впадины радиуса R_2 .

В другом предельном случае, когда $e = 1$, т. е. при соприкосновении двух цилиндров неограниченной длины с параллельными осями (до деформации они соприкасаются по линии) после приложения сжимающих сил, равномерно распределенных по длине цилиндров, соприкасание будет по узкой полосе, ограниченной двумя прямыми.

Параметры A и B , определяемые по формулам (8), будут

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Этим значениям A и B отвечает переход эллипса $e = 1$ в бесконечную полоску шириной $2b$ и $a = \infty$. Эллипсоид давления при $a = \infty$ переходит в эллиптический цилиндр. Распределение давления по ширине $2b$ полосы контакта

$$p = p_0 \frac{\xi}{c} \quad (33)$$

изображается ординатами эллипса

$$\left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{\xi}{c} \right)^2 = 1. \quad (34)$$

Вводя понятие о линейной интенсивности q распределения нагрузки по длине цилиндра

$$q = \int_{-b}^{+b} p \, dy = \frac{p_0}{c} \int_b^{+b} \xi \, dy = \frac{p_0}{c} \cdot \frac{\pi b c}{2}, \quad (35)$$

можно определить наибольшее давление

$$p_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{q}{b}. \quad (36)$$

Полуширина полосы контакта может быть определена из общей формулы (28) как предельный случай при эксцентриситете $e = 1$

$$b = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\eta q}{\sum k}}. \quad (37)$$

Подстановка величины b по формуле (37) в выражение (36) приводит к следующему выражению для наибольшего давления:

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sum k}{\eta}} q. \quad (38)$$

Полученные формулы (37) и (38) широко применяют и в случае расчетов соприкасающихся цилиндров конечной длины, например, при расчете зубьев цилиндрических зубчатых колес на контактную прочность. Затруднения возникают при определении сближения цилиндров. Действительно, предельный переход в общей формуле (30) приводит к заключению, что сближение обращается в бесконечность. Это объясняется тем, что предельный переход соответствует рассмотрению двух цилиндров неограниченной длины ($a = \infty$), находящихся под действием бесконечно большой нагрузки $P = 2qa$.

Вместе с тем очевидно, что для цилиндров конечной длины сближение δ конечно и зависит не только от деформаций в месте контакта, но и в значительной мере обусловлено деформациями всего тела. Рассматривая круговой цилиндр конечной длины, нагруженный с двух сторон давлением, распределенным по ширине площадки контакта по эллиптическому закону, и учитывая не только деформацию в непосредственной близости от площадки контакта, но и общую деформацию цилиндра, можно получить для изменения величины диаметра, параллельного направлению действующих сил, следующее выражение:

$$\delta = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E} q \left[\ln \frac{2R}{b} + 0,407 \right], \quad (39)$$

в котором R — радиус цилиндра, b — полуширина площадки контакта.

Применяя эту формулу к случаю сжатия двух параллельных цилиндров с радиусами R_1 и R_2 , можно найти сближение их центров:

$$\delta = \frac{2q}{\pi} \left[-\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right]. \quad (40)$$

Для облегчения использования формул (27)–(30) в табл. 1 рассмотрены частные случаи соприкасающихся поверхностей.

Значительное упрощение вычислений дает применение табл. 2, в которой значения коэффициентов n_a , n_b , n_p и n_δ даны в зависимости от величины

$$\Omega = \frac{B - A}{B + A} = \frac{\sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}}{k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}}. \quad (41)$$

1. Размеры площадки контакта, величины наибольшего давления и сближения соприкасающихся тел

Форма соприкасающихся тел и их взаимное расположение	Размеры площадки контакта	Величина наибольшего давления между соприкасающимися телами	Сближение соприкасающихся тел
Два тела, ограниченные криволинейными поверхностями и соприкасающиеся до деформации в одной точке	<p>Большая полуось эллипса</p> $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta P}{\sum k}}$ <p>Малая полуось эллипса</p> $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta P}{\sum k}}$	$\rho_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\sum k}{\eta} \right)^2 P};$ $n_p = \frac{1}{n_a n_b}$	$\delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k P^2}$
Два сферических тела радиусов R_1 и R_2	<p>Радиус круговой площадки контакта</p> $a = b = 0,9086 \sqrt[3]{\frac{P}{\eta P} \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$	$\rho_0 = 0,5784 \sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2} \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 R_1} \right)^2}$	$\delta = 0,8255 \sqrt[3]{(\eta P)^2 \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$
Два сферических тела с одинаковыми модулями упругости и $\nu = 0,3$	$a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$	$\rho_0 = 0,3880 \sqrt[3]{P E^2 \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \right)^2}$	$\delta = 1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E} \right)^2 \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$
Два цилиндра со взаимно перпендикулярными осями и равными радиусами	<p>Радиус круговой площадки контакта</p> $a = b = 0,9086 \sqrt[3]{\eta P R}$	$\rho_0 = 0,5784 \sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2 R^2}}$	$\delta = 0,8255 \sqrt[3]{\frac{(\eta P)^2}{R}}$

Аналогичные цилиндры с одинаковыми модулями упругости и $\nu = 0,30$	$a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{PR}{E}}$	$p_0 = 0,3880 \sqrt[3]{P \left(\frac{E}{R}\right)^2}$	$\delta = 1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{1}{R}}$
Два цилиндра радиусов R_1 и R_2 с параллельными осями; q — нагрузка на единицу длины цилиндра	Полуширина полосы контакта $b = 1,128 \sqrt{\eta q \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$	$p_0 = 0,5642 \sqrt{\frac{q}{\eta} \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$	$\delta = \frac{2q}{\pi} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right]$
Аналогичные цилиндры с одинаковыми модулями упругости и $\nu = 0,30$	$b = 1,522 \sqrt{\frac{q}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$	$p_0 = 0,4180 \sqrt{qE \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$	$\delta = 0,579 \frac{q}{E} \cdot \left[\ln \frac{4R_1 R_2}{b^2} + 0,814 \right]$

Примечания: 1. Нагрузка, сжимающая соприкасающиеся тела, обозначена через P .

2. Упругая постоянная соприкасающихся тел $\eta = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_2^2}$, где ν_1 и ν_2 , E_1 и E_2 — соответственно коэффициенты Пуассона и модули упругости первого и второго тел.

3. Главные кривизны соприкасающихся тел в точке первоначального контакта: для первого тела k_{11} и k_{12} , для второго тела k_{21} и k_{22} ; главные кривизны положительны, если соответствующий центр кривизны расположен внутри рассматриваемого тела; сумма главных кривизн соприкасающихся тел $\sum k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}$.

4. Значения коэффициентов n_a , n_b , n_p и n_δ в зависимости от аргумента

$$\Omega = \frac{1}{\sum k} \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2} + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega$$

приведены в табл. 2; здесь ω — угол между плоскостями кривизн k_{11} и k_{22} .

5. При соприкосновении сферического тела радиуса R_1 и сферической впадины радиуса R_2 в соответствующих формулах сумма $(R_2 + R_1)$ заменяется разностью $(R_2 - R_1)$; аналогично поступают и при соприкосновении цилиндра радиуса R_1 и цилиндрической впадины радиуса R_2 с параллельными осями.

2. Численные значения коэффициентов n_a , n_b , n_p , n_δ , входящих в выражения для полуосей эллиптической площадки контакта, наибольшего давления и сближения соприкасающихся тел

e^2	$\frac{A}{B}$	Ω	n_a	n_b	n_p	n_δ
0,050	0,9623	0,01923	1,013	0,9873	0,9999	0,9999
0,100	0,9240	0,03949	1,027	0,9742	0,9997	0,9997
0,150	0,8852	0,06087	1,042	0,9606	0,9992	0,9992
0,200	0,8459	0,08350	1,058	0,9465	0,9985	0,9985
0,250	0,8059	0,1075	1,076	0,9318	0,9974	0,9974
0,300	0,7652	0,1330	1,095	0,9165	0,9960	0,9960
0,350	0,7238	0,1602	1,117	0,9005	0,9942	0,9942
0,400	0,6816	0,1894	1,141	0,8837	0,9919	0,9919
0,450	0,6384	0,2207	1,168	0,8660	0,9890	0,9889
0,500	0,5942	0,2545	1,198	0,8472	0,9853	0,9852
0,550	0,5489	0,2913	1,233	0,8271	0,9805	0,9804
0,600	0,5022	0,3314	1,274	0,8056	0,9746	0,9744
0,650	0,4540	0,3755	1,322	0,7822	0,9669	0,9667
0,700	0,4040	0,4245	1,381	0,7565	0,9571	0,9566
0,750	0,3518	0,4795	1,456	0,7278	0,9440	0,9432
0,760	0,3410	0,4914	1,473	0,7216	0,9409	0,9400
0,770	0,3301	0,5036	1,491	0,7152	0,9376	0,9366
0,780	0,3191	0,5161	1,511	0,7086	0,9340	0,9329
0,790	0,3080	0,5291	1,532	0,7019	0,9302	0,9290
0,800	0,2967	0,5423	1,554	0,6949	0,9262	0,9248
0,810	0,2853	0,5560	1,578	0,6876	0,9219	0,9203
0,820	0,2738	0,5702	1,603	0,6801	0,9172	0,9155
0,830	0,2620	0,5848	1,631	0,6723	0,9121	0,9102
0,840	0,2501	0,5999	1,660	0,6642	0,9067	0,9045
0,850	0,2380	0,6155	1,693	0,6557	0,9008	0,8983
0,860	0,2257	0,6317	1,729	0,6468	0,8944	0,8916
0,870	0,2132	0,6486	1,768	0,6374	0,8873	0,8841
0,880	0,2004	0,6662	1,812	0,6276	0,8796	0,8759
0,890	0,1873	0,6845	1,861	0,6171	0,8710	0,8668
0,900	0,1739	0,7037	1,916	0,6059	0,8614	0,8566
0,910	0,1603	0,7238	1,979	0,5938	0,8507	0,8451
0,920	0,1462	0,7449	2,053	0,5808	0,8386	0,8320
0,930	0,1317	0,7673	2,141	0,5665	0,8246	0,8168
0,940	0,1166	0,7911	2,248	0,5505	0,8082	0,7990
0,950	0,1010	0,8166	2,381	0,5325	0,7887	0,7775
0,955	0,09287	0,8300	2,463	0,5224	0,7774	0,7650
0,960	0,08456	0,8441	2,557	0,5114	0,7647	0,7509
0,965	0,07600	0,8587	2,669	0,4993	0,7504	0,7349
0,970	0,06715	0,8741	2,805	0,4858	0,7338	0,7163
0,975	0,05797	0,8904	2,975	0,4704	0,7144	0,6943
0,980	0,04838	0,9077	3,199	0,4524	0,6909	0,6675
0,981	0,04639	0,9113	3,253	0,4484	0,6856	0,6613
0,982	0,04439	0,9150	3,311	0,4442	0,6799	0,6549
0,983	0,04237	0,9187	3,373	0,4398	0,6740	0,6481
0,984	0,04032	0,9225	3,441	0,4352	0,6678	0,6409
0,985	0,03823	0,9264	3,514	0,4304	0,6612	0,6333
0,986	0,03613	0,9303	3,594	0,4253	0,6542	0,6251
0,987	0,03400	0,9342	3,683	0,4199	0,6467	0,6164
0,988	0,03183	0,9383	3,781	0,4142	0,6387	0,6071
0,989	0,02962	0,9425	3,890	0,4080	0,6300	0,5970
0,990	0,02737	0,9467	4,014	0,4014	0,6206	0,5860
0,991	0,02508	0,9511	4,156	0,3942	0,6104	0,5741
0,992	0,02273	0,9556	4,320	0,3864	0,5990	0,5608
0,993	0,02033	0,9601	4,515	0,3777	0,5864	0,5460
0,994	0,01787	0,9649	4,750	0,3680	0,5721	0,5292
0,995	0,01533	0,9698	5,046	0,3568	0,5555	0,5096
0,996	0,01269	0,9749	5,432	0,3436	0,5358	0,4864
0,997	0,009934	0,9803	5,976	0,3273	0,5112	0,4574
0,998	0,007018	0,9861	6,837	0,3058	0,4783	0,4186
0,999	0,003850	0,9923	8,609	0,2722	0,4267	0,3579

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ТЕОРИИ КОНТАКТА

Нелинейный характер зависимости от величины нагрузки как размеров площадки контакта, так и величины сближения соприкасающихся тел (за исключением сближения двух параллельных цилиндров) и ряд допущений, положенных в основу их вывода, вызвали появление большого количества экспериментальных исследований деформаций соприкасающихся тел в местах контакта.

Первое экспериментальное исследование было проведено Г. Герцем [41]. Исследовалось сжатие стеклянной сферической линзы и стеклянной пластины, покрытой предварительно копотью. При сжатии копоть сплющивалась, и можно было измерить размеры площадки контакта. При сжатии шара и плоскости из одного материала радиус круговой площадки

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} R P}.$$

В опытах Герца радиус линзы $R = 28 \text{ мм}$, $E_{\text{стекла}} = 0,28 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$. Коэффициент Пуассона для стекла колеблется от 0,20 до 0,32. Этому соответствует изменение радиуса площадки контакта

$$\text{от } a = 0,1825 \sqrt[3]{P} \text{ до } a = 0,1868 \sqrt[3]{P}.$$

Из опытов была получена в среднем при изменении нагрузки от 1,63 до 28,5 кг, следующая зависимость:

$$a = 0,1845 \sqrt[3]{P},$$

что достаточно хорошо согласуется с теоретически полученными величинами.

Опыты, поставленные другими исследователями по сжатию шаров (Штрибека, Динника и др.), а также по сжатию цилиндров (Динника, Павлова и Галай), тоже хорошо подтверждают полученные зависимости, однако до тех пор пока нагрузки, приложенные к соприкасающимся телам, не приводят к образованию в зоне контакта остаточных деформаций.

Глава 14

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДЕТАЛЕЙ В МЕСТАХ КОНТАКТА

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ И КРУГОВАЯ ПЛОЩАДКИ КОНТАКТА

Исследование напряженного состояния соприкасающихся тел может быть проведено в следующем порядке. Каждое из тел рассматривают как полупространство, т. е. тело весьма больших размеров, ограниченное с одной стороны плоскостью. Возможность такой замены обусловлена малостью размеров площадки контакта по сравнению с размерами соприкасающихся тел.

Компоненты напряженного состояния в произвольной точке полупространства определяют вначале от дейст-

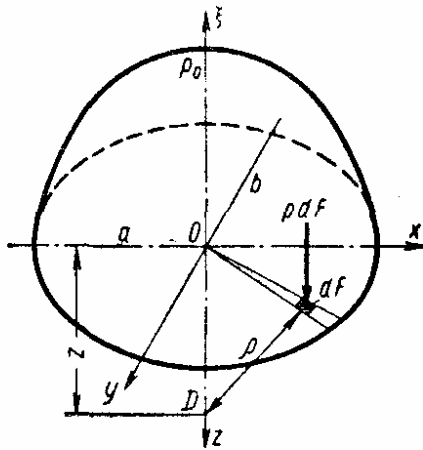


Рис. 1

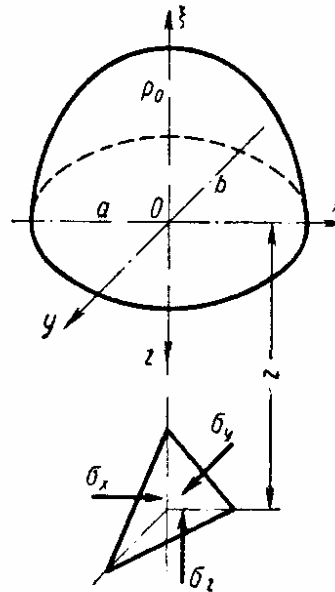


Рис. 2

вия как бы сосредоточенной силы $p dF$ (рис. 2 гл. 13). Далее, на основании принципа независимости действия сил суммируют составляющие напряжений в точке тела от действия всех элементарных сил, распределенных по эллиптической площадке контакта. Подробнее см. в работе [30].

Совмещая координатные оси x и y соответственно с большой и малой осями контурного эллипса площадки контакта, рассмотрим напряженное состояние в следующих точках соприкасающихся тел:

а) в контурных точках поверхности площадки контакта и

б) на оси z , проходящей через центр площадки контакта нормально к ее поверхности.

Напряженное состояние в некоторой точке D (рис. 1) характеризуется тем, что в площадках, параллельных координатным плоскостям, отсутствуют касательные напряжения $\tau_{zy} = \tau_{zx} = \tau_{yx} = 0$. Следовательно, нормальные напряжения в этих площадках σ_x , σ_y и σ_z (рис. 2) будут главными для рассматриваемой точки:

$$\sigma_x = -p_0 \frac{\frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}}{1 + \frac{z^2}{a^2}}} + 2 \frac{z}{a} (L - K) - \right. \\ \left. - 2\nu \left[1 - \frac{a^2}{b^2} \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}}{1 + \frac{z^2}{a^2}}} + \frac{z}{a} \left(\frac{a^2}{b^2} L - K \right) \right] \right\}; \quad (1)$$

$$\sigma_y = -p_0 \frac{\frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \left\{ -1 + \frac{1 + \frac{z^2}{a^2} \left(2 \frac{a^2}{b^2} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}}} - \right. \\ \left. - 2 \frac{z}{a} \left(\frac{a^2}{b^2} L - K \right) + 2\nu \left[1 - \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}}{1 + \frac{z^2}{a^2}}} + \frac{z}{a} (L - K) \right] \right\}; \quad (2)$$

$$\sigma_z = -p_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}}. \quad (3)$$

В частном случае при круговой площадке контакта выражения (1) — (3) примут вид

$$\sigma_x = \sigma_y = -p_0 \left[(1 + \nu) - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{a^2}} - (1 + \nu) \frac{z}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{z} \right]; \quad (4)$$

$$\sigma_z = -p_0 \frac{1}{1 + \frac{z^2}{a^2}}. \quad (5)$$

Полагая коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$ и задаваясь различными значениями отношения полуосей, по формулам (1) — (3) можно построить графики (рис. 3, $a - z$) изменения главных напряжений σ_x , σ_y и σ_z для различных точек оси z , т. е. в зависимости от отношения $\frac{z}{a}$.

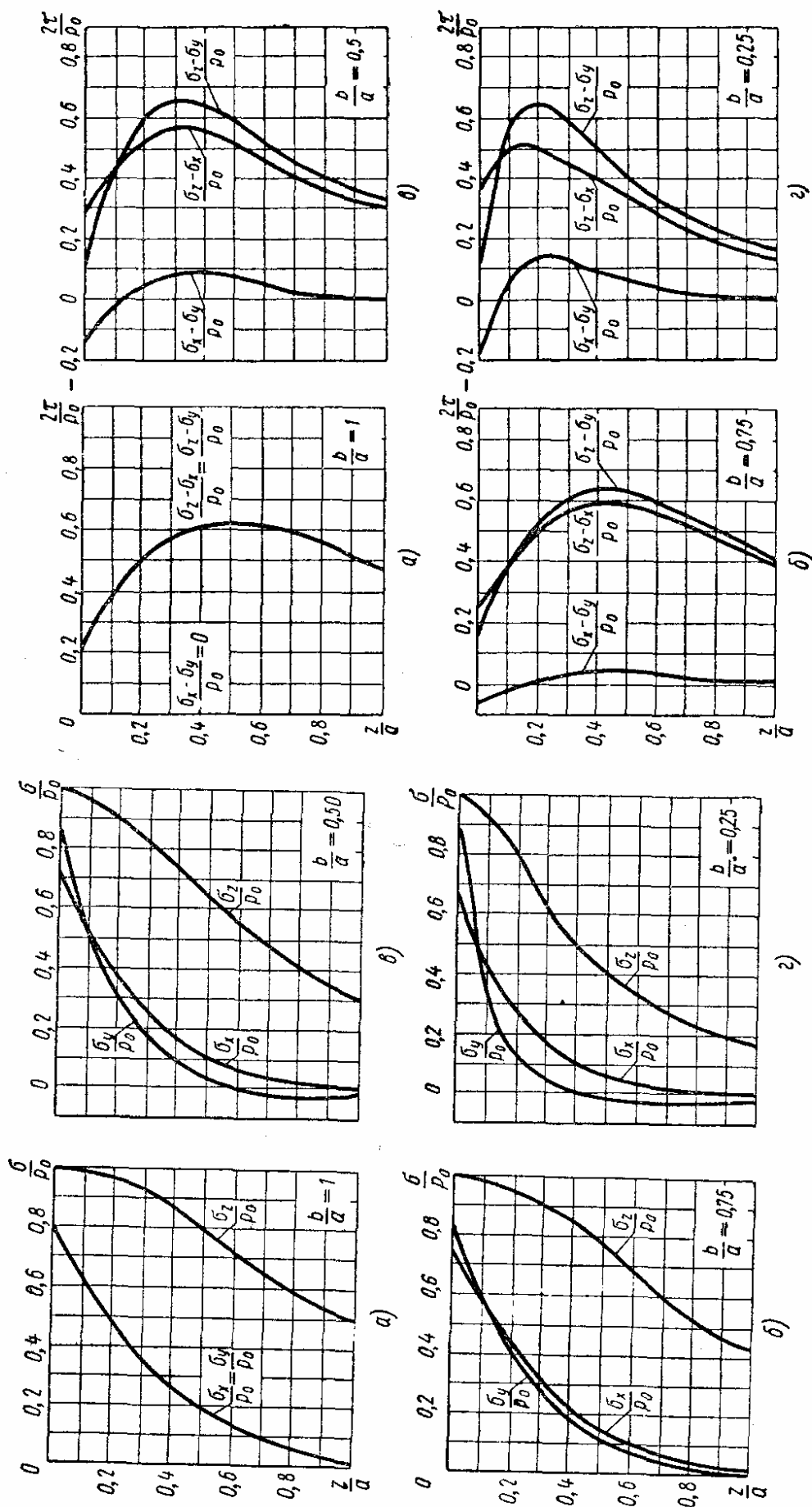


Рис. 4

Рис. 3

В расчетах на прочность большое значение имеют величины наибольших касательных напряжений в семействах площадок, нормальных к главным площадкам (радиусы трех окружностей круговой диаграммы напряженного состояния). Задаваясь различными значениями отношения полуосей эллипса, рассмотрим изменение разностей каждой пары значений главных напряжений, т. е. удвоенных величин наибольших касательных напряжений, в зависимости от отношения $\frac{z}{a}$. Результаты вычислений показаны на графиках рис. 4, а—г.

Величины наибольших значений попарных разностей главных напряжений σ_x , σ_y и σ_z для различных глубин залегания $\frac{z}{a}$ при различных значениях отношений полуосей b и a приведены в табл. 1.

1. Отношение величин наибольших значений попарных разностей главных напряжений σ_x , σ_y , σ_z к давлению и относительные ординаты $\frac{z}{a}$ соответствующих точек оси z

$\frac{b}{a}$	$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{p_0}$	$\frac{z}{a}$	$\frac{\sigma_z - \sigma_x}{p_0}$	$\frac{z}{a}$	$\frac{\sigma_z - \sigma_y}{p_0}$	$\frac{z}{a}$
0,25	0,136	0,22	0,518	0,15	0,646	0,18
0,5	0,086	0,34	0,565	0,30	0,650	0,31
0,75	0,037	0,43	0,598	0,41	0,635	0,41
1,0	0	езде	0,620	0,48	0,620	0,48

Из табл. 1 следует, что наибольшая величина разности главных напряжений (σ_z и σ_y) достигает $0,650p_0$ при $z = 0,31a$ и при отношении $\frac{b}{a} = 0,5$. Следовательно, наибольшее касательное напряжение составляет $0,325p_0$ и остается почти неизменным для других соотношений полуосей. Так, при $b = a$, т. е. для круговой площадки контакта, величина уменьшается только до значения $0,310p_0$.

Для характеристики напряженного состояния в точках, лежащих на поверхности площадки контакта соприкасающихся тел, достаточно рассмотреть центр и точки контура эллиптической площадки. Полагая $z = 0$ в формулах (1)—(3), получим выражения для напряжений в центре площадки контакта

$$\sigma_x = -p_0 \frac{2\nu + \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}; \quad (6)$$

$$\sigma_y = -p_0 \frac{1 + 2\nu \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}; \quad (7)$$

$$\sigma_z = -p_0. \quad (8)$$

Напряженное состояние в точках контура эллиптической площадки контакта характеризуется напряжениями σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (нормальное напряжение σ_z и касательные $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ и $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ равны нулю), выражения для которых имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p_0(1-2\nu) \frac{\beta}{e^2} \left[1 - \frac{x}{ae} \operatorname{arcth} \frac{ex}{a} - \frac{\beta y}{be} \operatorname{arctg} \frac{ey}{b\beta} \right]; \\ \sigma_y &= p_0(1-2\nu) \frac{\beta}{e^2} \left[1 - \frac{x}{ae} \operatorname{arcth} \frac{ex}{a} - \frac{\beta y}{be} \operatorname{arctg} \frac{ey}{b\beta} \right]; \\ \tau_{xy} &= -p_0(1-2\nu) \frac{\beta^2}{e^2} \cdot \frac{xy}{ab} \left[\frac{x}{ae} \operatorname{arcth} \frac{ex}{a} - \frac{\beta y}{be} \operatorname{arctg} \frac{ey}{b\beta} \right], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\beta = \frac{b}{a} \text{ и } e^2 = 1 - \beta^2.$$

В общем случае $\tau_{xy} \neq 0$ и нормальные напряжения в отличие от центра площадки контакта не являются главными напряжениями. Одним из главных напряжений будет $\sigma_z = \sigma_2 = 0$, а два другие определяют по известным формулам

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \quad \sigma_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Во всех точках контурного эллипса площадки контакта имеет место плоское напряженное состояние, называемое чистым сдвигом ($\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$). Плоскость чистого сдвига совпадает с координатной плоскостью xy .

На концах большой полуоси $x = a$, $y = 0$ отсутствует касательное напряжение $\tau_{xy} = 0$, а нормальные напряжения в площадках, параллельных координатным плоскостям, будут

$$\sigma_x = -\sigma_y = -p_0(1-2\nu) \frac{\beta}{e^2} \left[1 - \frac{1}{e} \operatorname{arcth} e \right]. \quad (10)$$

Эти напряжения и $\sigma_z = 0$ будут главными. При соотношении $\frac{b}{a} = 0,5$ и $\nu = 0,3$ $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0,8660$; $\sigma_x = 0,139p_0$; $\sigma_y = -0,139p_0$.

Следовательно, в точках концов большой оси эллипса в направлении этой оси будет наблюдаться растяжение, а в перпендикулярном направлении (параллельно малой оси) — сжатие. На концах малой полуоси $x = 0$; $y = b$ также отсутствуют касательные напряжения; напряжения σ_x и σ_y будут главными и определяться по формуле

$$\sigma_x = -\sigma_y = -p_0(1-2\nu) \frac{\beta}{e^2} \left[1 - \frac{\beta}{e} \operatorname{arctg} \frac{e}{\beta} \right]. \quad (11)$$

При $\frac{b}{a} = 0,5$ и $\nu = 0,3$ $\sigma_x = -0,105 p_0$; $\sigma_y = +0,105 p_0$, т. е. в этих точках в направлении малой оси будет растяжение, а в направлении, параллельном большой оси, — сжатие.

Исследование напряженного состояния точек у поверхности контакта показывает, что максимальные касательные напряжения, в зависимости от величины отношения геометрических параметров A и B , определяемых формулами (4) гл. 13, получаются или в центре площадки или по концам большой оси контурного эллипса. Так, при $\frac{A}{B} < 0,33$ большее

значение имеет касательное напряжение в центре эллипса, а при $\frac{A}{B} > 0,33$ — по концам большой оси. Величина наибольшего касательного напряжения не превышает $0,2p_0$, т. е. оно значительно меньше наибольшего касательного напряжения в рассмотренных выше точках оси z .

В частном случае, для круговой площадки контакта (рис. 5), в центре площадки напряжения будут:

наибольшие сжимающие напряжения

$$\sigma_3 = \sigma_z = -p_0$$

и два других главных напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{1+2\nu}{2} p_0.$$

При $\nu = 0,3$ главные напряжения в центре будут

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,8p_0; \quad \sigma_3 = -p_0,$$

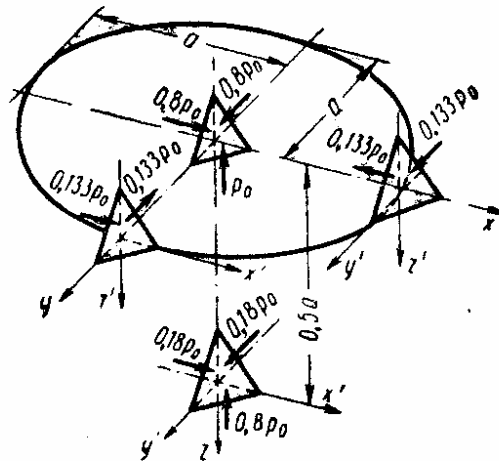


Рис. 5

т. е. имеет место напряженное состояние, близкое к всестороннему равномерному сжатию. Максимальное касательное напряжение в этой точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,1p_0.$$

В точках контура круговой площадки действуют: наибольшее растягивающее напряжение, направленное вдоль радиуса (при $\nu = 0,3$),

$$\sigma_1 = \frac{1-2\nu}{3} p_0 = 0,133p_0;$$

промежуточное главное напряжение $\sigma_2 = \sigma_z = 0$; третье главное напряжение направлено по касательной к контуру площадки

$$\sigma_3 = -\frac{1-2\nu}{3} p_0 = -0,133p_0.$$

Как в общем случае эллиптической площадки, так и в частном случае при круговой площадке контакта, во всех точках контура будет иметь место двухосное напряженное состояние, называемое чистым сдвигом. Максимальное касательное напряжение (при $\nu = 0,3$)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,133p_0.$$

Максимальное касательное напряжение достигает своего наибольшего значения в точке, лежащей на оси z на расстоянии $z \approx 0,5a$, где a — радиус площадки контакта. Величины главных напряжений для указанной точки ($\nu = 0,3$) будут

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,180p_0; \quad \sigma_3 = -0,8p_0.$$

Наибольшая величина касательного напряжения в этой точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,310p_0.$$

ПЛОЩАДКА КОНТАКТА В ВИДЕ ПОЛОСЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ

Такая площадка получается при первоначальном линейном контакте.

Путем несложных преобразований выражений (1)–(3), полагая $a = \infty$, можно определить значения главных напряжений σ_x , σ_y , σ_z в точках, лежащих на расстоянии z от средней линии площадки контакта:

$$\sigma_x = -p_0 2\nu \left[\sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} - \frac{z}{b} \right]; \quad (12)$$

$$\sigma_y = -p_0 \left[\frac{1 + 2\left(\frac{z}{b}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}} - 2\frac{z}{b} \right]; \quad (13)$$

$$\sigma_z = -p_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}}. \quad (14)$$

В точках средней линии полосы при $z = 0$ напряжения будут

$$\sigma_x = -2\nu p_0; \quad \sigma_y = -p_0; \quad \sigma_z = -p_0. \quad (15)$$

Следует отметить, что так как длина соприкасающихся цилиндров предполагается неограниченно большой, а давление распределенным равномерно вдоль длины, то начало координат можно совместить с любой точкой средней линии полосы контакта. Ось x направлена вдоль полосы по средней линии, а ось y лежит в плоскости полосы контакта, перпендикулярно средней линии, ось z перпендикулярна полосе контакта и направлена внутрь тела. Напряженное состояние не зависит от координаты x , т. е. постоянно вдоль полосы контакта.

Изменение напряжений σ_x , σ_y и σ_z в зависимости от величины отношения $\frac{z}{b}$ показано на рис. 6. В рассматриваемом интервале изменения $\frac{z}{b}$ все три главные напряжения представляют собой напряжения сжатия.

Для расчетов на прочность необходимо знание наибольших касательных напряжений в семействе площадок, нормальных к главным. На рис. 7 изображены зависимости изменения разностей каждой пары

главных напряжений от отношения $\frac{z}{b}$. Максимальные значения разностей, т. е. удвоенные величины касательных напряжений, достигают

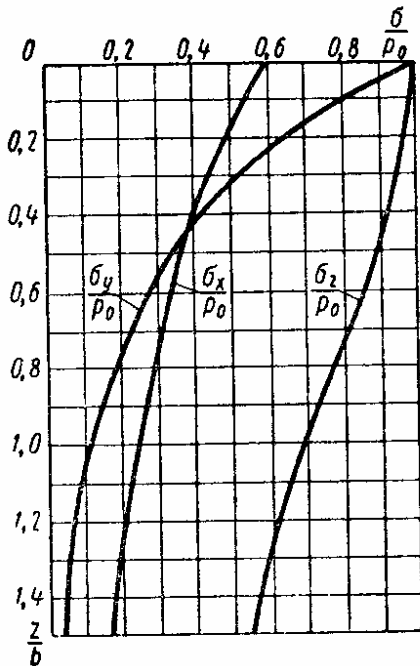


Рис. 6

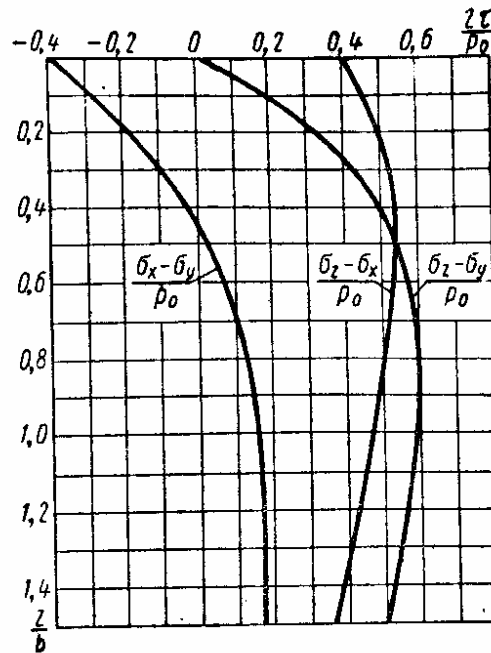


Рис. 7

при определенных отношениях $\frac{z}{b}$ следующих величин:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= 0,400\rho_0 & \text{при } \frac{z}{b} &= 0; \\ \sigma_z - \sigma_x &= 0,524\rho_0 & \text{при } \frac{z}{b} &= 0,5; \\ \sigma_z - \sigma_y &= 0,600\rho_0 & \text{при } \frac{z}{b} &= 0,8. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Касательные напряжения достигают наибольшего значения в точке, лежащей на глубине $z = 0,8b$ от поверхности контакта, по двум взаимно перпендикулярным площадкам, нормальным к плоскости yOz и образующих углы 45° с осью z (рис. 8).

На контуре полосы все три главных напряжения, а следовательно, и их разности обращаются в нуль.

Для расчета деталей на прочность необходимо решение:

1) задачи о распределении напряжений в детали и о характере напряженного состояния в той или иной точке этой детали;

2) вопроса о допустимости того или иного напряженного состояния с точки зрения прочности детали.

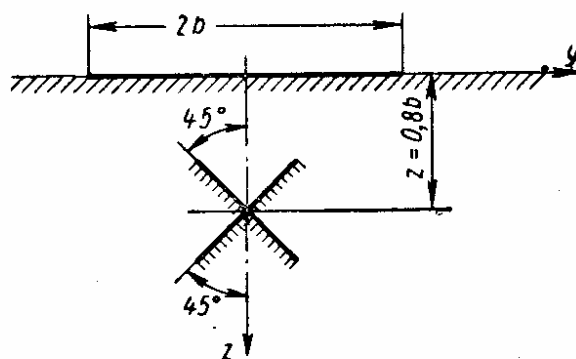


Рис. 8

Первая задача — вспомогательная с инженерной точки зрения, для рассмотренных точечного и линейного первоначального контактов теоретически полностью разрешена.

Современное состояние физики твердого тела еще не позволяет дать теоретическое решение второй задачи. Поэтому практическое решение этого вопроса основано на введении некоторых гипотез (теорий) прочности.

Для вязких (пластичных) материалов в настоящее время наиболее распространенными гипотезами являются:

- 1) гипотеза наибольших касательных напряжений;
- 2) гипотеза потенциальной энергии формоизменения или гипотеза средних касательных напряжений. Эквивалентное напряжение по теории наибольших касательных напряжений будет

$$\sigma_{\text{эkv}}^I = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\text{max}} \quad (17)$$

и по гипотезе средних касательных напряжений

$$\sigma_{\text{эkv}}^{II} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (18)$$

где σ_1 — наибольшее, σ_2 — среднее и σ_3 — наименьшее из трех главных напряжений (с учетом знака).

Для площадки контакта в виде полосы максимальное эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{эkv}}^I$ по гипотезе наибольших касательных напряжений будет в точке $z = 0,8b$ $\sigma_{\text{эkv}}^I = 0,600p_0$, а по гипотезе средних касательных напряжений максимальное значение эквивалентного напряжения

$$\sigma_{\text{эkv}}^{II} = 0,557p_0 \text{ при } z = 0,7b.$$

Используя рассмотрение напряженного состояния в общем случае эллиптической площадки контакта, можно установить максимальные (расчетные) значения эквивалентных напряжений при различных соотношениях между полуосями a и b контура площадки контакта. Результаты вычислений сведены в табл. 2.

2. Величины наибольших эквивалентных напряжений по гипотезе максимальных касательных напряжений и по гипотезе средних касательных напряжений

Форма контура площадки контакта	$\frac{b}{a}$	$\frac{\sigma_{\text{эkv}}^I}{p_0}$	$\frac{\sigma_{\text{эkv}}^{II}}{p_0}$
Круг	1	0,620	0,620
Эллипс	0,75 0,50 0,25	0,625 0,649 0,646	0,617 0,611 0,587
Полоса	0	0,600	0,557

ВЛИЯНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ СИЛ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЗОНЕ КОНТАКТА

В ряде случаев инженерной практики приходится учитывать действие на площадке контакта, кроме рассмотренной выше нормальной, также и касательную нагрузку. Примеры наличия касательных сил на поверхности контакта многочисленны. В случаях, когда имеет место видимое относительное скольжение (работа зубчатых колес и т. п.), величина касательных нагрузок ограничивается силой сцепления

$$Q = \mu_0 P,$$

где μ_0 — коэффициент сцепления (трения); P — нормальная нагрузка.

Но и в тех случаях, когда видимое относительное скольжение не имеет места, касательная нагрузка $Q = \mu P$ (где $\mu < \mu_0$) может быть достаточно велика и в зависимости от условий работы в той или иной степени приближается к своему предельному значению — силе сцепления.

В связи со сложностью точного решения контактной задачи при одновременном действии нормальных и касательных сил приведем приближенное решение; основное его допущение заключается в том, что для нормальных сил сохраняется эллипсоидальный закон распределения и что касательные силы пропорциональны нормальным, т. е.

$$\frac{q}{p} = \frac{q_0}{p_0} = \frac{Q}{P} = \mu = \text{const}, \quad (19)$$

где q — интенсивность касательных сил в произвольной точке площадки контакта; q_0 — их наибольшая интенсивность.

Исследование напряженного состояния соприкасающихся тел в случае первоначального контакта по линии при наличии касательных нагрузок дано в работах [19, 33].

В случае действия касательных сил, направленных перпендикулярно к общей образующей, и распределенных по площадке контакта согласно зависимости (19), во всех точках срединной плоскости xOz (рис. 9) нормальные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ равны нулю, а касательные напряжения определяют из зависимости

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = q_0 \left[2 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} - 2 \frac{z}{b} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}} \right]; \quad (20)$$

здесь ось z перпендикулярна плоскости полосы контакта, оси x и y лежат в плоскости контакта, причем ось x вдоль средней линии полосы, а ось y перпендикулярна средней линии.

В частном случае для точек, лежащих на средней линии полосы контакта ($z = 0$), касательные напряжения

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = q_0. \quad (21)$$

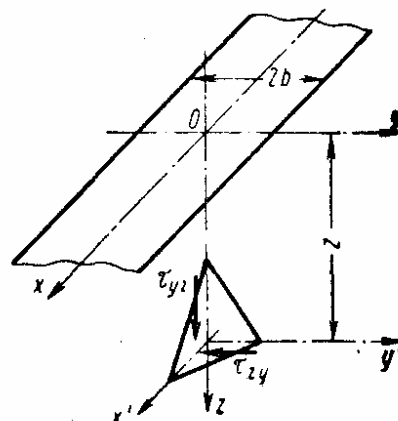


Рис. 9

Компоненты напряженного состояния в точках, принадлежащих площадке контакта ($y < b$),

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu q_0 \frac{y}{b}; \quad \sigma_y = 2q_0 \frac{y}{b}; \quad \sigma_z = 0; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = q_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для точек поверхности соприкасающихся тел, лежащих вне площадки контакта ($y > b$),

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu q_0 \left[\frac{y}{b} - \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1} \right]; \\ \sigma_y &= 2q_0 \left[\frac{y}{b} - \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1} \right]; \\ \sigma_z &= 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Эпюры напряжений вдоль оси y по формулам (22) и (23) показаны на рис. 10. Нормальные напряжения σ_x и σ_y достигают наибольших значений у контура площадки контакта ($y = \pm b$).

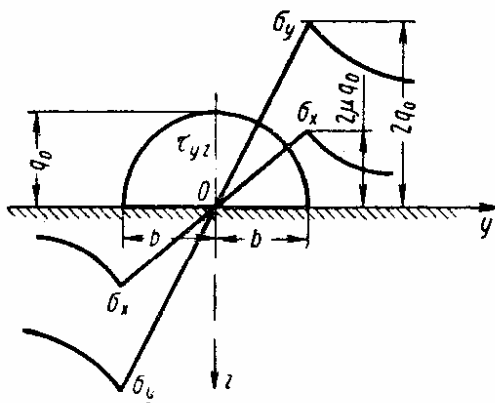


Рис. 10

Имея выражения для компонентов напряженного состояния, как от нормальных, так и от касательных сил, нетрудно путем простого наложения исследовать эффект их совместного действия. Влияние касательных сил сказывается в постепенном приближении точки с наибольшим касательным напряжением из глубины к поверхности соприкасающихся тел и в росте величины этого напряжения с увеличением значения коэффициента трения.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Пример 1. Установить закон распределения общей нагрузки между отдельными шариками радиального подшипника качения.

Решение.

Излагаемое ниже исследование закона распределения нагрузки между шариками основано на двух допущениях:

1) в подшипнике, находящемся под нагрузкой, радиальный зазор между шариками и кольцами отсутствует;

2) изгибом колец подшипника пренебрегают и учитывают только контактные деформации шарика и беговых дорожек колец в местах их касания.

Представим себе, что под действием нагрузки Q на подшипник (реакция со стороны вала) внутреннее кольцо переместилось как твердое тело по направлению силы Q на величину δ_0 .

Так как изгибом кольца пренебрегают и рассматривают его как твердое тело, то (рис. 11)

$$ab = a_1b_1 = a_2b_2 = \dots = \delta_0.$$

Из треугольников $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ и т. д. определяем радиальное перемещение δ_1 , δ_2 , ..., δ_n через величину δ_0 :

$$\left. \begin{aligned} a_1c_1 = \delta_1 = \delta_0 \cos \gamma; \\ a_2c_2 = \delta_2 = \delta_0 \cos 2\gamma; \\ \dots \dots \dots \\ a_nc_n = \delta_n = \delta_0 \cos n\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где γ , 2γ , ..., $n\gamma$ — углы между направлением действующей силы и радиальной осью соответствующего шарика.

Наибольший из этих углов $n\gamma \leq \frac{\pi}{2}$, так как шарики верхней половины подшипника не участвуют в передаче нагрузки Q от внутреннего кольца подшипника наружному.

Величины радиальных перемещений δ_0 , δ_1 , δ_2 , ..., δ_n , обусловленные контактной деформацией, представляют собой сближения соприкасающихся тел (шариков и колец подшипника).

Для вычисления соответствующих реакций воспользуемся формулой (30) гл. 13. С ее помощью можно выразить величины δ_0 , δ_1 , δ_2 , ..., δ_n через соответствующие силы P_0 , P_1 , P_2 , ..., P_n , представляющие собой силы взаимодействия между шариками и кольцами подшипника.

Силы, действующие со стороны шариков на внутреннее кольцо, показаны на рис. 11.

Для данного подшипника с конкретными размерами искомые величины δ_0 , δ_1 , δ_2 , ..., δ_n можно представить согласно формуле (30) гл. 13 в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \text{const } P_0^{\frac{2}{3}}; \\ \delta_1 &= \text{const } P_1^{\frac{2}{3}}; \\ \dots \dots \dots \\ \delta_n &= \text{const } P_n^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Из первых двух уравнений (25) следует

$$\frac{\delta_1}{\delta_0} = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

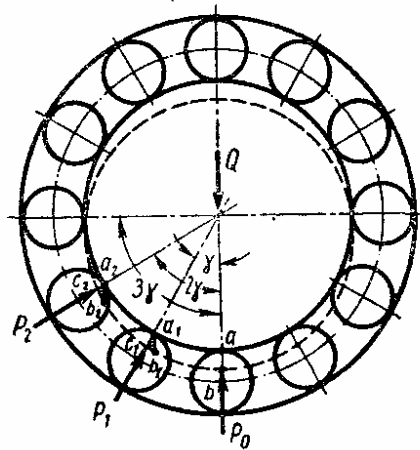


Рис. 11

Далее, используя первое из уравнений (24), находим

$$P_1 = P_0 \cos^{3/2} \gamma.$$

Совершенно аналогично можно все силы P_1 , P_2 , ..., P_n выразить через P_0 :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_0 \cos^{3/2} \gamma; \\ P_2 &= P_0 \cos^{3/2} 2\gamma; \\ \dots \dots \dots \\ P_n &= P_0 \cos^{3/2} n\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Используя условие равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием вертикальной силы Q и радиальных сил P_0 , P_1 , P_2 , ..., P_n , можно написать

$$Q = P_0 + 2P_1 \cos \gamma + 2P_2 \cos 2\gamma + \dots + 2P_n \cos n\gamma$$

или, выражая $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ через P_0 согласно формулам (26), получаем

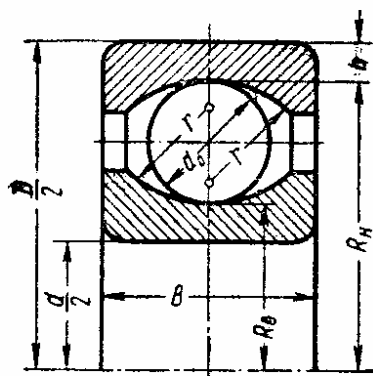
$$Q = P_0 [1 + 2 \cos^{5/2} \gamma + 2 \cos^{5/2} 2\gamma + \dots + 2 \cos^{5/2} n\gamma].$$

Введем обозначение

$$m = \frac{i}{1 + 2 \cos^{5/2} \gamma + 2 \cos^{5/2} 2\gamma + \dots + 2 \cos^{5/2} n\gamma}, \quad (27)$$

где i — общее число шариков в подшипнике; тогда приходим к следующему выражению для усилия P_0 на наиболее нагруженный (нижний) шарик:

$$P_0 = m \frac{Q}{i}. \quad (28)$$



$d = 85 \text{ мм}$
 $D = 150 \text{ мм}$
 $B = 28 \text{ мм}$
 $d_0 = 19,84 \text{ мм}$
 $i = 10$
 $r = 10,23 \text{ мм}$
 $h = 6,33 \text{ мм}$
 $R_0 = 48,83 \text{ мм}$
 $R_H = 68,67 \text{ мм}$

Пусть общее число шариков в одно-
рядном подшипнике $i = 12$ (см. рис. 11),
тогда

$$\gamma = \frac{360^\circ}{i} = 30^\circ;$$

$$(\cos 30^\circ)^{5/2} = (0,866)^{5/2} = 0,698;$$

$$(\cos 60^\circ)^{5/2} = (0,500)^{5/2} = 0,177,$$

и, следовательно, введенный по фор-
муле (27) коэффициент

$$m = \frac{12}{1 + 2 \cdot 0,698 + 2 \cdot 0,177} = 4,37.$$

Рис. 12

Непосредственными вычислениями легко показать, что при изменении числа шариков от $i = 10$ до $i = 20$ значение коэффициента m мало отличается от 4,37. Следовательно, теоретическое значение усилия P_0 на наиболее нагруженный шарик будет

$$P_0 = 4,37 \frac{Q}{i}.$$

Следует отметить, что оба допущения, положенные в основу исследования, оправдываются только частично. При наличии радиального зазора и учете деформации изгиба колец можно ожидать некоторого увеличения усилия, происходящего на нижний шарик. Вследствие этого принято увеличивать коэффициент m , брать его равным $m = 5$ и вычислять усилие на наиболее нагруженный шарик по формуле

$$P_0 = 5 \frac{Q}{i}. \quad (29)$$

Пример 2. Для радиального однорядного шарикоподшипника 217 (рис. 12) легкой серии допускается статическая нагрузка $Q = 3400 \text{ даН}$.

При действии этой нагрузки требуется определить:

1) размеры полуосей a и b контурного эллипса площадки контакта наиболее нагруженного шарика с дорожками качения внутреннего и наружного колец;

2) величину наибольшего давления p_0 по площадке контакта.

Решение

Главные кривизны шарика

$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_0} = \frac{2}{1,984} = 1,008 \text{ 1/см.}$$

Главные кривизны наружной дорожки качения

$$k_{21} = -\frac{1}{R_H} = -\frac{1}{6,867} = -0,1456 \text{ 1/см.}$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1,023} = -0,9775 \text{ 1/см.}$$

Обе величины отрицательны, так как соответствующие центры кривизны лежат вне рассматриваемого тела, т. е. наружного кольца.
Главные кривизны внутренней дорожки качения

$$k_{21} = \frac{1}{R_g} = \frac{1}{4,883} = 0,2048 \text{ 1/см};$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1,023} = -0,9775 \text{ 1/см}.$$

Геометрический параметр, характеризующий кривизну соприкасающихся тел, определяют по формуле (31) гл. 13.
В рассматриваемом случае $k_{11} = k_{12}$ и формула принимает вид

$$\Omega = \frac{B - A}{B + A} = \frac{k_{21} - k_{22}}{\sum k}.$$

При касании шарика с наружной дорожкой качения

$$\sum k = 2 \cdot 1,008 - 0,1456 - 0,9775 = 0,8929 \text{ 1/см};$$

$$\Omega = \frac{B - A}{B + A} = \frac{-0,1456 + 0,9775}{0,8929} = 0,9317.$$

Для соприкасания шарика с внутренней дорожкой качения

$$\sum k = 2 \cdot 1,008 + 0,2048 - 0,9775 = 1,243 \text{ 1/см};$$

$$\Omega = \frac{B - A}{B + A} = \frac{0,2048 + 0,9775}{1,243} = 0,9509.$$

Интерполируя по табл. 2 гл. 13 находим значения коэффициентов n_a , n_b , n_p в зависимости от величины параметра Ω .

При касании шарика с наружной дорожкой качения

$$n_a = 3,526 + \frac{0,9317 - 0,9269}{0,9428 - 0,9269} (3,899 - 3,526) = 3,639;$$

$$n_b = 0,4297 - 0,302 (0,4297 - 0,4076) = 0,4230;$$

$$n_p = 0,6600 - 0,302 (0,6600 - 0,6297) = 0,6508$$

При касании шарика с внутренней дорожкой качения

$$n_a = 4,079 + \frac{0,9509 - 0,9488}{0,9517 - 0,9488} (4,178 - 4,079) = 4,151;$$

$$n_b = 0,3971 - 0,724 (0,3981 - 0,3932) = 0,3946;$$

$$n_p = 0,6161 - 0,724 (0,6161 - 0,6086) = 0,6107.$$

Материал шариков и колец — хромистая сталь, для которой модуль упругости $E = 2,12 \cdot 10^6 \text{ дан/см}^2$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, тогда упругая постоянная

$$\eta = 2 \frac{1 - \nu^2}{E} = 0,858 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{дан}.$$

Допускаемая радиальная нагрузка на подшипник $Q = 3400 \text{ дан}$. Сила Давления на наиболее нагруженный шарик по формуле (29) будет

$$P = 5 \frac{Q}{i} = 5 \frac{3400}{12} = 1700 \text{ дан}.$$

По формулам (27) и (28) гл. 13 для полуосей контурного эллипса имеем для площадки контакта между наиболее нагруженным шариком и наружной дорожкой качения

$$a = 3,639 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{0,858 \cdot 10^{-6}}{0,8929} \cdot 1700} = 3,639 \cdot 0,1348 = 0,491 \text{ см};$$

$$b = 0,4230 \cdot 0,1348 = 0,0570 \text{ см}.$$

Аналогично для площадки контакта между наиболее нагруженным шариком и внутренней дорожкой качения

$$a = 4,151 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{0,858 \cdot 10^{-6} \cdot 1700}{1,243}} = 4,151 \cdot 0,1207 = 0,501 \text{ см};$$

$$b = 0,3946 \cdot 0,1207 = 0,0476 \text{ см}.$$

Величина наибольшего давления по площадке контакта шарика с наружным кольцом подшипника по формуле (29) гл. 13 будет

$$p_0 = \frac{0,6508}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{0,8929}{0,858 \cdot 10^{-6}} \right)^2 \cdot 1700} = 29\,100 \text{ дан/см}^2.$$

Аналогично для площадки контакта между шариком и внутренним кольцом

$$p_0 = \frac{0,6167}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{1,243}{0,858 \cdot 10^{-6}} \right)^2 \cdot 1700} = 34\,000 \text{ дан/см}^2.$$

В специальной литературе в качестве допускаемого значения при расчете шарикоподшипников на статическую грузоподъемность приводятся величины порядка $30\,000 \text{ дан/см}^2$ и выше.

Пример 3. Определить величину наибольшего давления, возникающего между находящимися в зацеплении зубьями прямозубых цилиндрических колес при контакте в полюсе зацепления. Рассмотреть следующие случаи:

- 1) ведомое и ведущее колеса выполнены из одинакового материала;
- 2) ведущее колесо выполнено из стали, а ведомое колесо из чугуна.

Р е ш е н и е.

При работе зубчатых передач нагрузка на их зубья меняется во времени по величине, оставаясь постоянной по знаку (при отсутствии реверсирования). Это многократное периодическое изменение во времени напряженного состояния рабочей поверхности зубьев вызывает образование и дальнейшее развитие микротрещин усталости. В случае наличия обильной смазки трещины усталости проявляют себя путем прогрессивного выкрашивания рабочих поверхностей, что служит наиболее частой причиной выхода тяжело нагруженных зубчатых передач из строя [29, 38].

Необходимой составной частью расчета на выносливость (усталость) рабочей поверхности зуба является определение величины наибольшего давления по площадке контакта. До деформации находящиеся в зацеплении зубья соприкасаются по линии, а после деформации — по узкой полоске, ограниченной параллельными прямыми (площадки контакта).

Опыт показывает, что выкрашивание рабочих поверхностей зубьев начинается и протекает наиболее интенсивно поблизости от полюса зацепления. Поэтому и расчет рабочих поверхностей на выносливость принято относить к моменту контакта соприкасающихся зубьев в полюсе зацепления.

При определении наибольшего давления по площадке контакта находящихся в зацеплении зубьев используют найденные выше результаты для случая статического контакта цилиндрических тел с параллельными образующими. Эти результаты получены в предположении, что цилиндры не перемещаются один относительно другого и нагрузки прикладываются к цилиндрам статически, т. е. возрастают постепенно и медленно от нуля до своего конечного значения. Материал цилиндров предполагается изотропным, т. е. с одинаковыми упругими свойствами по всем направлениям.

В действительности в зубчатой передаче эти предпосылки нарушаются — происходит перемещение (качение со скольжением) рабочих поверхностей соприкасающихся зубьев, нагрузка на зуб быстро возрастает от нуля до своего конечного значения и затем также быстро падает до нуля; в ряде случаев нагрузка носит ударный характер. Механическая и термическая обработка рабочей поверхности зуба нарушает изотропность материала. Слой смазки

(масляная пленка), находящийся между соприкасающимися поверхностями зубьев, также несколько изменяет распределение давления по площадке контакта.

Следовательно, имеет место довольно значительное отличие условий работы находящихся в зацеплении зубьев от предпосылок, положенных в основу вывода выражения (38) гл. 13 для наибольшего давления между соприкасающимися круговыми цилиндрами с параллельными осями. Несмотря на это, выражение (38) гл. 13 все же лежит в основе расчета рабочей поверхности зуба на контактную прочность (выносливость). Соответствующий выбор допускаемых значений давлений, проверенных практикой применения зубчатых передач, позволяет получать достаточно хорошие результаты.

Итак, принимая, что наибольшее давление имеет место по средней линии полосы контакта, для определения его величины воспользуемся формулой (38) гл. 13

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sum k}{\eta} q}.$$

Полагая, что коэффициент Пуассона для стали и для чугуна примерно одинаков ($\nu = 0,30$), можно представить выражение для комбинированной упругой постоянной η материалов соприкасающихся зубьев в следующем виде:

$$\eta = (1 - \nu)^2 \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right] = 2(1 - \nu^2) \frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} = 1,82 \frac{1}{E_{np}},$$

где E_{np} — приведенный модуль упругости,

$$E_{np} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}.$$

Полагая для стали модуль упругости $E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ даН/см}^2$ и для чугуна $E_2 = 10^6 \text{ даН/см}^2$, находим, что

$$E_{np} = 1,33 \cdot 10^6 \text{ даН/см}^2.$$

При одинаковых материалах ведущего и ведомого колес

$$E_{np} = E.$$

Обозначим соответственно через ρ_1 и ρ_2 радиусы кривизны профилей зуба ведомого и зуба ведущего колес в полюсе зацепления, тогда сумма главных кривизн будет

$$\sum k = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_{np}},$$

где ρ_{np} — приведенный радиус кривизны.

Используя введенные обозначения, легко представить выражение (38) гл. 13 для наибольшего давления в следующем виде:

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{1,82\pi} \cdot \frac{qE_{np}}{\rho_{np}}} = 0,418 \sqrt{\frac{qE_{np}}{\rho_{np}}}.$$

Радиусы кривизн ρ_1 и ρ_2 эвольвентных профилей соприкасающихся зубьев в полюсе зацепления K (рис. 13) изображаются отрезками AK и BK общей касательной к основным окружностям I и II . Из геометрических соображений

$$\rho_1 = \frac{d_1}{2} \sin \alpha; \quad \rho_2 = \frac{d_2}{2} \sin \alpha,$$

где d_1 и d_2 — диаметры начальных окружностей ведущего и ведомого колес; α — угол зацепления.

Нагрузка на единицу длины зуба

$$q = \frac{P_n}{l} = \frac{P}{l \cos \alpha},$$

где l — длина зуба или ширина зубчатого колеса; P_n — сила нормального давления между находящимися в зацеплении зубьями; P — окружное усилие (рис. 14).

Тогда искомая величина наибольшего давления будет

$$p_0 = 0,418 \sqrt{\frac{4E_{np}}{\sin 2\alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{P}{l}}.$$

Окружное усилие P в дан может быть выражено через передаваемую мощность N в л. с. и скорость v в м/сек на начальной окружности, а именно

$$P = 75 \frac{N}{v};$$

здесь

$$v = \frac{\pi d_1 n_1}{60} = \frac{\pi d_2 n_2}{60},$$

где n_1 и n_2 — соответственно числа оборотов ведущего и ведомого колес в минуту.

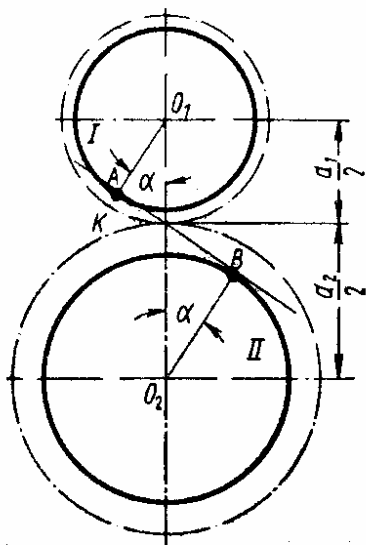


Рис. 13

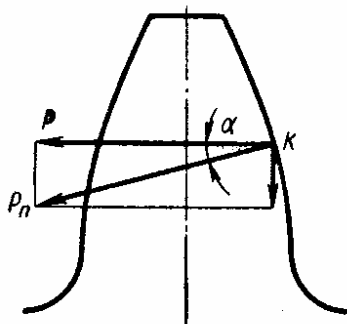


Рис. 14

При отсутствии сил трения максимальное касательное напряжение достигает наибольшей величины на глубине $z = 0,8b$ под поверхностью контакта (b — полуширина площадки контакта см. стр. 393). Эту величину наибольшего касательного напряжения можно выразить через наибольшее давление

$$\tau_{\max} = 0,30p_0.$$

или

$$\tau_{\max} = 0,125 \sqrt{\frac{4E_{np}}{\sin 2\alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{P}{l}}.$$

Влияние сил трения, распределенных по площадке контакта находящихся в зацеплении зубьев, на напряженное состояние заключается в том, что точки максимальных касательных напряжений приближаются к поверхности контакта ($z < 0,8b$) и величина напряжения несколько возрастает. Так, при коэффициенте трения $\mu = 0,2$

$$\tau_{\max} = 0,34p_0.$$

или

$$\tau_{\max} = 0,142 \sqrt{\frac{4E_{np}}{\sin 2\alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{P}{l}}. \quad (30)$$

Критическое рассмотрение и дальнейшее преобразование выражения (30) с целью его использования при расчете зубчатых колес на контактную прочность произведено в работе [38]. Там же проведен анализ расчетных зависимостей, используемых при оценке контактной прочности (выносливости) рабочих поверхностей зубьев.

Пример 4. Определить величину наибольшего давления, возникающего в цилиндрических опорах подвижной системы измерительных приборов (рис. 15).

Материал подшипника — агат; материал цапфы — закаленная сталь 50. Динамическая нагрузка на опору $P = 1$ дан;

длина подшипника $l = 2$ мм; диаметры цапфы и подшипника соответственно $d_u = 1,18$ мм, $d_n = 1,21$ мм.

Решение.

Расчет цилиндрических опор в общем машиностроении ведут в предположении, что цапфа опирается на подшипник всей рабочей поверхностью. Для опор сравнительно больших размеров, цапфы которых имеют большую твердость, чем вкладыши, это предположение достаточно хорошо отражает действительные условия работы.

В приборостроении часто подшипники изготавливают из минералов высокой твердости (агат, корунд, сапфир), а цапфы из закаленной стали. Это сочетание материалов затрудняет возможность приработки поверхностей. Первоначальные же поверхности подшипников, в особенности малой длины, несколько

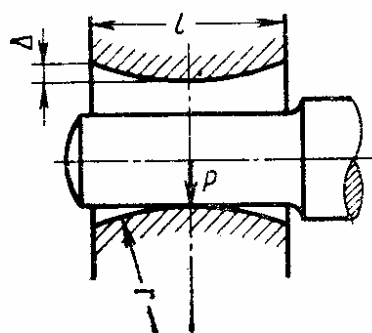


Рис. 15

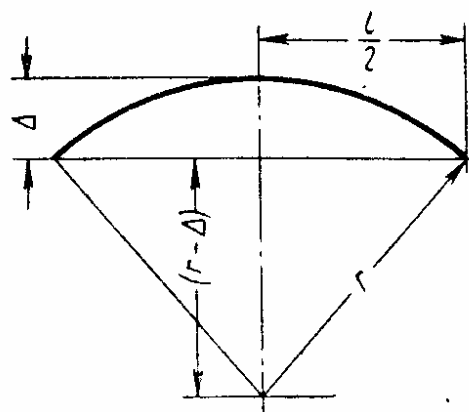


Рис. 16

отличаются от цилиндрической. Имеет место увеличение диаметров начала и конца отверстия (рис. 15). В работе [35] указано на необходимость учета этого явления.

Принимая, что осевое сечение подшипника ограничено дугами окружности радиуса r , общую несоосность Δ отверстия и инструмента можно рассматривать как высоту кругового сегмента с хордой l (см. рис. 16) и тогда

$$r^2 = (r - \Delta)^2 + \left(\frac{1}{2} l\right)^2,$$

откуда радиус осевого сечения будет

$$r = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \Delta^2}{2\Delta} \approx \frac{l^2}{8\Delta}.$$

Общая несоосность Δ зависит от точности станка при чистовой обработке отверстия и колеблется от 0,01 до 0,04 мм. Принимая $\Delta = 0,02$ мм при $l = 2$ мм, радиус осевого сечения

$$r = \frac{1 + 0,02^2}{2 \cdot 0,02} \approx 25 \text{ мм}.$$

Главные кривизны подшипника (отверстия) в месте соприкосновения с цапфой (см. рис. 15)

$$k_{11} = \frac{1}{r}; \quad k_{12} = -\frac{2}{d_n},$$

где $k_{11} > 0$, так как соответствующий центр кривизны лежит внутри подшипника, а $k_{12} < 0$, ибо соответствующий центр кривизны расположен вне тела (на оси отверстия под цапфу).

Главные кривизны поверхности цапфы

$$k_{21} = 0; \quad k_{22} = \frac{2}{d_u}.$$

Так как плоскости главных кривизн k_{11} и k_{21} совпадают, угол $\omega = 0$ и $\cos 2\omega = 1$, то геометрические параметры A и B поверхности контакта тел, определяемые формулами (4), гл. 13 будут

$$A = \frac{1}{2} (k_{11} + k_{21}) = \frac{1}{2r} = 0,020 \text{ 1/мм};$$

$$B = \frac{1}{2} (k_{12} + k_{22}) = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{d_n} + \frac{2}{d_u} \right] = 0,021 \text{ 1/мм}.$$

В рассматриваемом случае можно считать $A = B$ и, следовательно, эллиптическая площадка контакта обращается в круговую. Сумма главных кривизн соприкасающихся тел в точке первоначального контакта

$$\sum k = \frac{1}{r} - \frac{2}{d_n} + \frac{2}{d_u} = 0,040 - 1,653 + 1,695 = 0,082 \text{ 1/мм}.$$

Модуль упругости материалов: для агата $E_1 = 10^6 \text{ дан/см}^2 = 10^5 \text{ н/мм}^2$, для стали $E_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ дан/см}^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ н/мм}^2$. Коэффициент Пуассона для агата примем таким же, как у стекла, т. е. $\nu_1 = 0,32$, а для стали $\nu_2 = 0,28$. Упругая постоянная соприкасающихся тел

$$\eta = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} = \frac{1 - 0,32^2}{10^5} + \frac{1 - 0,28^2}{2 \cdot 10^5} = \frac{1,358}{10^5} \text{ мм}^2/\text{н}.$$

Наибольшее давление в центре площадки контакта определяют по формуле (29) гл. 13

$$p_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\sum k}{\eta} \right)^2 P}.$$

Для эллиптической площадки контакта значение коэффициента n_p берут из табл. 2 гл. 13 в зависимости от величины отношения $\frac{A}{B}$. В случае круговой площадки контакта ($A = B$) коэффициент $n_p = 1$.

Величину нагрузки P определяют специальным динамическим расчетом [35] подвижной системы прибора. В рассматриваемом случае $P = 10 \text{ н}$, тогда наибольшее давление между подшипником и цапфой будет

$$p_0 = 0,3183 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{0,082}{1,358 \cdot 10^5} \right)^2 \cdot 10} = 260 \text{ н/мм}^2 = 2600 \text{ дан/см}^2.$$

Установление допустимой величины наибольшего давления требует специальных исследований, в частности, проведения поверочных расчетов опор подвижных систем ряда приборов, при различных режимах работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андожский В. Д. Расчет зубчатых передач. Гл. 5. Расчет зубьев на контактную прочность. М., Машгиз, 1955.
2. Ачеркан Н. С. Расчет металлорежущих станков. Гл. 4, § 25. Расчет направляющих. М., Машгиз, 1952.
3. Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности. Гл. 5. Классические задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
4. Бейзельман Р. Д., Спицин Н. А., Цыпкин Б. В. Подшипники качения. М., Машгиз, 1945.
5. Белаяев Н. М. Местные напряжения при сжатии упругих тел. Сб. «Инженерные сооружения и строительная механика», Л. 1924.
6. Белаяев Н. М. К вопросу о местных напряжениях в связи с сопротивлением рельс смятию. Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения. Вып. 99, 1929.
7. Белаяев Н. М. Вычисление наибольших расчетных напряжений при сжатии соприкасающихся тел. Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения. Вып. 102, 1929.
8. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
9. Лаголев Н. И. Сопротивление перекачиванию твердых тел. Прикладная математика и механика. Т. 9. Вып. 4, 1945.
10. Грубин А. Н. Контактная задача для зубчатых и червячных зацеплений в простейших предположениях. Ленинградское отделение научного инженерно-технического общества машиностроителей. Кн. 6. Теория и расчет зубчатых колес. М., Машгиз, 1948.

11. Грубин А. Н. Контактные напряжения в зубчатых и червячных зацеплениях. Сб. «Исследование контакта деталей машин». М., Машгиз, 1949.
 12. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел (1909). Избр. труды. Т. 1. Киев, изд-во АН УССР, 1952.
 13. Ишлинский А. Ю. Теория сопротивления перекачиванию (трению качения) и смежные явления. Сб. «Трение и износ в машинах». Т. 2. Изд-во АН СССР, 1939.
 14. Ишлинский А. Ю. Трение качения. Прикладная математика и механика. Т. 2. Вып. 2, 1939.
 15. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бринеля. Прикладная математика и механика. т. 8, вып. 3, 1944.
 16. Ильющин А. А. Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации. Гл. 6. Вдавливание штампов и несущая способность несжимаемого твердого тела. М., Гостехиздат, 1948.
 17. Кильчевский Н. А. Теория соударений твердых тел. М., Гостехиздат, 1949.
 18. Кован В. М. и Корсаков В. С. Сборник задач и упражнений по технологии машиностроения. М., Машгиз, 1947.
 19. Ковальский Б. С. Напряжения на площадке местного сжатия при учете силы трения. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1942.
 20. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гл. 7. Проблемы Буссинеска и Герца. М., Гостехиздат, 1947.
 21. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гл. 2. Неограниченная упругая среда и упругое полупространство. Гл. 5. Пространственные контактные задачи. М., Гостехиздат, 1955.
 22. Ляв А. Математическая теория упругости. Гл. 8. Передача силы. М., Гостехиздат, 1935.
 23. Макушин В. М. Напряженное состояние и прочность деталей в местах контакта. Труды кафедры «Сопротивление материалов» Московского высшего технического училища. Сб. «Некоторые вопросы теоретических и экспериментальных исследований в области прочности». 1947.
 24. Макушин В. М. Деформация и напряженное состояние деталей в местах контакта. М., Машгиз, 1952.
 25. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения (граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике) М., Гостехиздат, 1946.
 26. Народецкий М. З. К задаче о соприкосновении двух цилиндров. Доклады АН СССР. Т. 56, № 5, 1947.
 27. Петрусович А. И. Качество поверхности и прочность материалов при контактных напряжениях. М., изд-во АН СССР, 1946.
 28. Петрусович А. И. Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1951.
 29. Петрусович А. И. Зубчатые передачи. Червячные передачи. Справочник машиностроителя. Т. 4. М., Машгиз, 1955.
 30. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. II. Гл. VI. Упругие перемещения и напряженное состояние в местах силового контакта деталей. М., Машгиз, 1958.
 31. Пригоровский Н. И. Местные напряжения. Справочник машиностроителя. Т. 3. М., Машгиз, 1955.
 32. Решетов Д. Н. Фрикционные передачи и вариаторы. Энциклопедический справочник «Машиностроение». Т. 2. М., Машгиз, 1948.
 33. Саверин М. М. Контактная прочность материала в условиях одно-временного действия нормальной и касательной нагрузки. М., Машгиз, 1946.
 34. Серенсен С. В. Прочность при контактных напряжениях. Справочник машиностроителя. Т. 3. М., Машгиз, 1955.
 35. Сивоконенко И. М. Опоры подвижных систем приборов. Л., Судпромгиз, 1952.
 36. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гл. 7. Давление штампа на пластическое тело. М., изд-во АН СССР, 1946.
 37. Спицин Н. А. Подшипники качения. Энциклопедический справочник «Машиностроение». Т. 2. М., Машгиз, 1948.
 38. Часовников Л. Д. Расчет зубчатых передач. М., Машгиз, 1951.
 39. Часовников Л. Д. Червячные передачи и редукторы. Винтовые зубчатые передачи. М., Машгиз, 1953.
 40. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
 41. Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper, Gesammelte Werke. Bd. I. Leipzig, 1895.
-

Глава 15

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

ЦИЛИНДРЫ, НАГРУЖЕННЫЕ ДАВЛЕНИЕМ

Теория расчета цилиндров, нагруженных постоянным по длине давлением, позволяет определять напряжения в трубах, цилиндрах машин, в напрессованных деталях и т. п., когда давление распределено равномерно и краевые эффекты, связанные, например, с наличием дна, отсутствуют. При упругих деформациях решение задачи является точным (т. е. оно выполняется без каких-либо специальных гипотез, кроме

общих гипотез теории упругости о свойствах материала).

Приводимые формулы пригодны также и для тех случаев, когда давление распределено только по части длины детали или когда концы цилиндра закреплены. В этих случаях, однако, определяют лишь напряжения, возникающие на достаточном расстоянии от мест изменения давления или от концов цилиндра; вблизи указанных мест напряжения и деформации рассчитывают методами, приведенными в гл. 16.

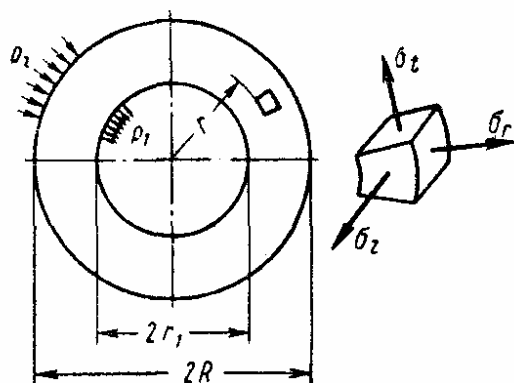


Рис. 1.

Приняты следующие обозначения (рис. 1):

R — наружный радиус цилиндра;

r_1 — внутренний радиус цилиндра;

r — текущий радиус;

$\rho = \frac{r}{R}$ — безразмерный текущий радиус;

$k = \frac{r_1}{R}$ — отношение внутреннего радиуса к наружному;

p_1 — внутреннее давление в цилиндре;

p_2 — внешнее давление на цилиндр;

u — радиальное перемещение;

$\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$ — нормальные напряжения в цилиндрическом, радиальном и поперечном сечениях цилиндра;

$\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_z$ — относительные удлинения в соответствующих направлениях;

ν — коэффициент Пуассона.

При деформации цилиндра поперечные сечения его остаются плоскими и в них равномерно распределены нормальные напряжения σ_z .

Величину напряжения σ_z определяют делением продольной силы N , воспринимаемой стенками цилиндра, на площадь его поперечного сечения $F = \pi R^2 (1 - k^2)$.

Если продольная сила обусловлена давлением p_1 и p_2 на его торцы ($N = p_1 \pi r_1^2 - p_2 \pi R^2$), то

$$\sigma_z = \frac{p_1 k^2 - p_2}{1 - k^2}. \quad (1)$$

Возможны случаи нагружения, при которых продольная сила отсутствует (например, если радиальное давление обусловлено запрессовкой), при этом, конечно, $\sigma_z = 0$.

Напряжения σ_r и σ_t удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{d}{d\rho} (\rho \sigma_r) - \sigma_t = 0. \quad (2)$$

Деформации ε_r и ε_t связаны с радиальным перемещением u формулами

$$\varepsilon_r = \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{d\rho}; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{R} \cdot \frac{u}{\rho}. \quad (3)$$

Исключая отсюда u , получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{d}{d\rho} (\rho \varepsilon_t) - \varepsilon_r = 0. \quad (4)$$

Выражая деформации через напряжения с помощью уравнений закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t - \nu \sigma_z); \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_z - \nu \sigma_r); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_r - \nu \sigma_t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и учитывая, что $\frac{d\sigma_z}{d\rho} = 0$, получаем уравнение совместности, выраженное через напряжения,

$$\frac{d}{d\rho} (\rho \sigma_t) - \sigma_r - \nu \left[\frac{d}{d\rho} (\rho \sigma_r) - \sigma_t \right] = 0. \quad (6)$$

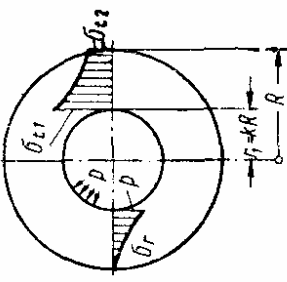
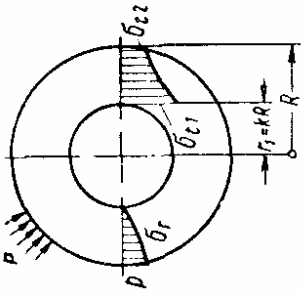
Совместное решение уравнений (2) и (6) приводит к формулам

$$\sigma_r = A - B \frac{1}{\rho^2}; \quad \sigma_t = A + B \frac{1}{\rho^2}, \quad (7)$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r = r_1 (\rho = k) \quad \sigma_r &= -p_1; \\ \text{при } r = R (\rho = 1) \quad \sigma_r &= -p_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

1. Формулы для расчета цилиндров, нагруженных внутренним или наружным давлением

Схема и эпюры напряжений	Напряжения σ_l	Радиальное перемещение при отсутствии продольной силы *	Эквивалентное напряжение в опасной точке **	
			по энергетической теории	по теории О. Мора ***
	$\sigma_{t1} = p \frac{1+k^2}{1-k^2}$ $\sigma_{t2} = p \frac{2k^2}{1-k^2}$	$u_{r=r_1} = \frac{pr_1}{E} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu \right)$ $u_{r=R} = \frac{pR}{E} \cdot \frac{2k^2}{1-k^2}$	$\sigma_{экв} = p \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \psi \right)$	
		$\sigma_{t1} = -p \frac{2}{1-k^2}$ $\sigma_{t2} = -p \frac{1+k^2}{1-k^2}$	$u_{r=r_1} = -\frac{pr_1}{E} \cdot \frac{2}{1-k^2}$ $u_{r=R} = -\frac{pR}{E} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \nu \right)$	$\sigma_{экв} = \frac{2p}{1-k^2} \psi$

* При наличии продольной силы, обусловленной давлением на днища, возникает напряжение σ_z , определяемой формулой (1) и дополнительные радиальные перемещения $\Delta u_{r=r_1} = -\frac{\nu}{E} \sigma_z r_1$; $\Delta u_{r=R} = -\frac{\nu}{E} \sigma_z R$.

** Опасной точкой всегда является точка у внутренней поверхности цилиндра. Формулы: а) — продольная сила отсутствует; б) — при наличии продольной силы, вызванной давлением на днища.

*** ψ — отношение предельного напряжения при растяжении к предельному напряжению при сжатии $\left(\psi = \frac{\sigma_{тр}}{\sigma_{мс}} \text{ или } \psi = \frac{\sigma_{ср}}{\sigma_{сж}} \right)$.

отсюда

$$A = \frac{1}{1 - k^2} (p_1 k^2 - p_2); \quad B = \frac{k^2}{1 - k^2} (p_1 - p_2). \quad (9)$$

Радиальное перемещение любой точки цилиндра можно выразить через напряжения в той же точке по формуле

$$u = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta - \nu \sigma_z) r. \quad (10)$$

Примерные эпюры напряжений и расчетные формулы для цилиндров, нагруженных только внутренним или только внешним давлением, приведены в табл. 1.

ПРЕССОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

При прессовой горячей или холодной посадке деталей на поверхности их соединения возникают контактные давления p_k . Величину контактного давления определяют из условия равенства суммы абсолютных значений радиальных перемещений обеих деталей и разности радиусов посадочных поверхностей до запрессовки (т. е. половины диаметрального натяга δ). Отсюда получена формула

$$p_k = \frac{\frac{\delta}{d}}{\frac{1}{E_1} \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \nu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \nu_2 \right)}, \quad (11)$$

где δ — натяг; d — диаметр посадочной поверхности; $k_1 = \frac{d_1}{d}$ и $k_2 = \frac{d}{d_2}$ — отношение диаметров (рис. 2); E_1, E_2, ν_1, ν_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно для внутренней и внешней деталей.

Если обе детали выполнены из материалов с одинаковыми упругими характеристиками, формула (11) существенно упрощается и принимает вид

$$p_k = \frac{E \frac{\delta}{d}}{\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} + \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2}}. \quad (12)$$

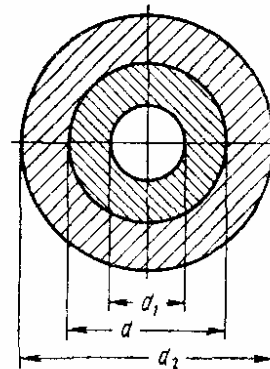


Рис. 2

При пользовании формулой (11) следует иметь в виду, что оставшиеся после шлифования на поверхности детали гребешки при запрессовке частично снимаются. Поэтому действительный натяг δ несколько меньше, чем определенный по замерам деталей до запрессовки (при шлифованных поверхностях — на 10—20 мкм).

Напряжения в каждой из деталей, возникшие при запрессовке подсчитывают от давления p_k по формулам табл. 1.

Весь расчет справедлив только в пределах упругости, т. е. пока эквивалентное напряжение ни в одной из деталей не превышает предела пропорциональности.

Если длины сопрягаемых деталей различны, контактное давление неравномерно распределяется по длине посадки, возрастая к концам втулки (рис. 3). При этом среднее контактное давление оказывается более высоким, чем рассчитанное по формулам (11) или (12). Прибли-

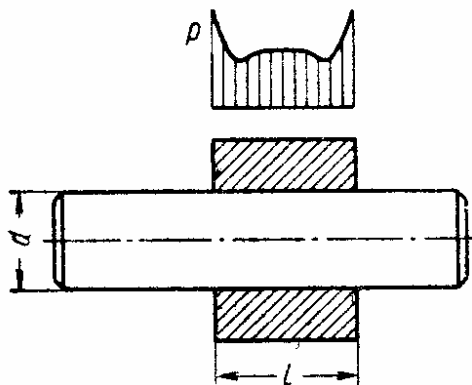


Рис. 3

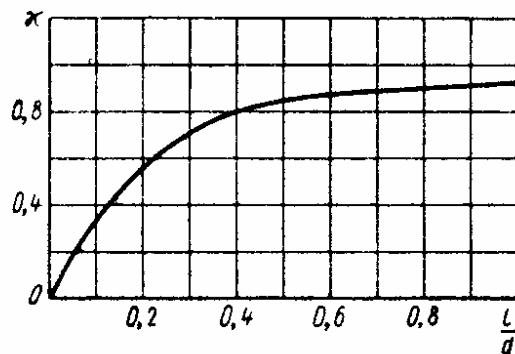


Рис. 4

женно среднее контактное давление с учетом выступающих концов внутренней детали можно определить [1] по формуле

$$p_k = \frac{\frac{\delta}{d}}{\frac{\kappa}{E_1} \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \nu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \nu_2 \right)}, \quad (13)$$

где все обозначения соответствуют формуле (11), а коэффициент κ определяют в зависимости от отношения длины втулки к посадочному диаметру по графику на рис. 4.

Усилие запрессовки (распрессовки) соединения вычисляют по формуле

$$P = \mu p_k \pi d l, \quad (14)$$

где μ — коэффициент трения; d — посадочный диаметр; l — длина соединения.

Крутящий момент, при котором соединение провертывается,

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \mu p_k \pi d^2 l. \quad (15)$$

СКРЕПЛЕНИЕ ЦИЛИНДРОВ

Внутреннее давление, воспринимаемое монолитным цилиндром без пластических деформаций, не может быть увеличено сверх $\frac{\sigma_r}{\sqrt{3}}$, как бы не увеличивали толщину стенок цилиндра (см. табл. 1).

В самом деле, при неограниченном увеличении наружного диаметра цилиндра

$$k = \frac{r_1}{R} \rightarrow 0 \text{ и } \sigma_{\text{экв}} \rightarrow p \sqrt{3}.$$

Причиной этого является малое участие наружных слоев цилиндра в восприятии нагрузки (см. эпюры в табл. 1). Поэтому увеличение наружного диаметра цилиндра не приводит к соответствующему увеличению его прочности.

Изготавливая цилиндр скрепленным, т. е. состоящим из двух или более концентрических труб, надетых одна на другую с натягом, можно достигнуть уменьшения суммарных напряжений во внутренней части цилиндра.

Эпюры начальных напряжений в скрепленном цилиндре показаны на рис. 5, а, а эпюры суммарных напряжений после нагружения цилиндра внутренним давлением p — на рис. 5, б.

Ниже приведены основные расчетные формулы [1] для двухслойного составного цилиндра. Эти формулы получены на основе предположения об отсутствии осевых напряжений; эквивалентные напряжения рассчитаны по теории прочности наибольших касательных напряжений, материал обоих цилиндров одинаковый.

Обозначения (см. рис. 5, а):

$k_1 = \frac{r_1}{r_k}$ — отношение внутреннего радиуса r_1 цилиндра к радиусу r_k посадочной поверхности;

$k_2 = \frac{r_k}{R}$ — отношение радиуса посадочной поверхности r_k к наружному радиусу R цилиндра;

$k = \frac{r_1}{R} = k_1 k_2$ — отношение внутреннего радиуса составного цилиндра к наружному;

p — внутреннее рабочее давление в составном цилиндре;

p_k — контактное давление после соединения цилиндров (при отсутствии рабочего давления p);

p'_k — контактное давление при наличии внутреннего давления p ;

δ — диаметральный натяг.

Из условия равнопрочности внутреннего и наружного цилиндров определяют необходимое контактное давление

$$p'_k = p \frac{1 - k_2^2}{2 - k_1^2 - k_2^2}. \quad (16)$$

Чтобы получить такое значение p'_k , надо в результате посадки создать начальное контактное давление

$$p_k = p \left[\frac{1 - k_2^2}{2 - k_1^2 - k_2^2} - \frac{k_1^2 (1 - k_2^2)}{1 - k_1^2 - k_2^2} \right]. \quad (17)$$

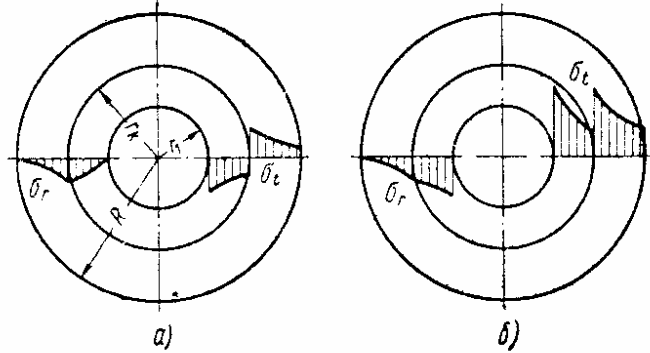


Рис. 5

После приложения давления p эквивалентные напряжения в опасных точках обоих цилиндров будут одинаковыми. Эти напряжения определяют по формулам

$$\sigma_{\text{эв}} = p \frac{2}{2 - k_1^2 - k_2^2}. \quad (18)$$

Наименьшее значение эквивалентного напряжения достигается, если радиус посадочной поверхности равен среднему геометрическому внутреннего и наружного радиусов:

$$r_k = \sqrt{r_1 R}. \quad (19)$$

В этом случае

$$k_1 = k_2 = \sqrt{k}. \quad (20)$$

Необходимое начальное контактное давление

$$p_k = p \frac{1 - k}{2(1 + k)}; \quad (21)$$

соответствующий диаметральный натяг

$$\delta = \frac{p}{E} 2r_k. \quad (22)$$

Эквивалентное напряжение в опасных точках обоих цилиндров составляет

$$\sigma_{\text{эв}} = \frac{p}{1 - k}. \quad (23)$$

Отношение этого напряжения к эквивалентному напряжению (подсчитанному также по теории наибольших касательных напряжений) в несоставном цилиндре таких же размеров будет

$$\frac{\sigma_{\text{сост}}}{\sigma_{\text{спл}}} = \frac{1 + k}{2}. \quad (24)$$

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРАХ

При неравномерном нагреве в деталях возникают температурные напряжения. Ниже приведены формулы для напряжений, справедливые при осесимметричном поле температур, постоянном по длине цилиндра или изменяющемся по линейному закону. Предполагается также, что упругие постоянные материала (E , ν) постоянны (не зависят от температуры). При выводе этих формул использованы уравнения равновесия и совместности деформаций [см. уравнения (2) и (4)], а также условие сохранения плоских сечений

$$\frac{d\epsilon_z}{d\rho} = 0. \quad (25)$$

В уравнениях, связывающих деформации с напряжениями, учитывают влияние температуры

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t - \nu \sigma_z) + \alpha t; \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_z - \nu \sigma_r) + \alpha t; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_r - \nu \sigma_t) + \alpha t, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Совместное решение уравнений равновесия и совместности деформаций с учетом уравнений (16) и (17), а также граничных условий

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \rho = k \quad \sigma_r &= 0; \\ \text{при } \rho = 1 \quad \sigma_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

приводит к следующим значениям температурных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t r \, dr + \frac{r^2 - r_1^2}{r^2 (R^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^R \alpha t r \, dr \right]; \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t r \, dr + \frac{r^2 + r_1^2}{r^2 (R^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^R \alpha t r \, dr \right]; \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{2}{R^2 - r_1^2} \int_{r_1}^R \alpha t r \, dr - \alpha t \right]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

В этих формулах α — коэффициент линейного расширения материала; t — превышение температуры данной точки цилиндра над температурой его наружной поверхности в том же поперечном сечении. Если распределение температуры известно, входящие в выражения (28) интегралы могут быть определены аналитически или численно.

В частном случае, если поток тепла установившийся, температура распределяется по закону

$$t = \frac{T}{\ln \frac{r_1}{R}} \ln \frac{r}{R}, \quad (29)$$

где T — разность между температурой внутренней и наружной поверхности цилиндра. При этом напряжения составляют

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\ln k} \left[-\ln \rho - \frac{k^2}{1-k^2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \ln k \right] . \\ \sigma_t &= \frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\ln k} \left[1 - \ln \rho - \frac{k^2}{1-k^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \ln k \right] ; \\ \sigma_z &= \frac{E\alpha T}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\ln k} \left[-1 - 2 \ln \rho - \frac{2k^2}{1-k^2} \ln k \right] . \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Характер распределения температурных напряжений по толщине стенки цилиндра показан на рис. 6, на котором приведены эпюры напряжений при $k = 0,5$, $\nu = 0,3$.

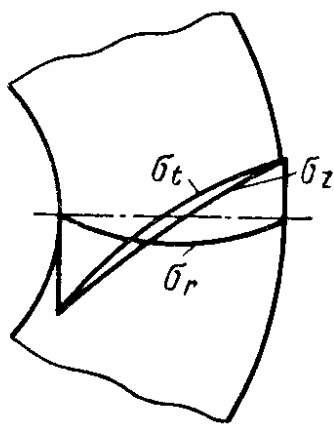


Рис. 6

2. Значения температурных напряжений

k	$\left[\frac{\sigma(1-\nu)}{E\alpha T} \right]_{\rho=1}$	$\left[\frac{\sigma(1-\nu)}{E\alpha T} \right]_{\rho=k}$	k	$\left[\frac{\sigma(1-\nu)}{E\alpha T} \right]_{\rho=1}$	$\left[\frac{\sigma(1-\nu)}{E\alpha T} \right]_{\rho=k}$
$k \rightarrow 0$	0	-1,00	0,6	0,417	-0,583
0,1	0,206	-0,794	0,7	0,441	-0,559
0,2	0,270	-0,730	0,8	0,463	-0,537
0,3	0,315	-0,685	0,9	0,483	-0,517
0,4	0,355	-0,645	1,0	0,500	-0,500
0,5	0,388	-0,612			

Значения напряжений $\sigma_z = \sigma_t$ у наружной и внутренней поверхностей цилиндров с различными отношениями $\frac{r_1}{R} = k$ приведены в табл. 2.

Методы решения задачи о температурных напряжениях в толстостенных цилиндрах с учетом температурной зависимости механических характеристик материала рассмотрены в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. II. Гл. I. М., Машгиз, 1958.
2. Малинин Н. Н. Расчет неравномерно нагретых толстостенных труб. Сб. «Расчеты на прочность машиностроительных конструкций». МВТУ. Вып. 31. М., Машгиз, 1955.

Глава 16

ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ПО ДЛИНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При осесимметричной переменной по длине деформации цилиндра в точках его возникают нормальные напряжения σ_r , σ_t , σ_z и касательные τ_{rz} .

Напряжения связаны между собой уравнениями равновесия бесконечно малого элемента (рис. 1). При отсутствии массовых сил эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{\rho} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \tau_{rz}) + \rho \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} = 0, \quad (2)$$

где введены безразмерные координаты $\rho = \frac{r}{R}$;

$\zeta = \frac{z}{R}$; R — наружный радиус цилиндра.

Относительные деформации могут быть выражены через радиальное (u) и осевое (w) перемещения точки по формулам

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho}; & \epsilon_t &= \frac{1}{R} \cdot \frac{u}{\rho}; & \epsilon_z &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta}; \\ \gamma_{rz} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

С другой стороны, деформации связаны с напряжениями уравнениями закона Гука; таким образом, приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{R}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t - \nu \sigma_z); & \frac{u}{\rho} &= \frac{R}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_z - \nu \sigma_r); \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} &= \frac{R}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_r - \nu \sigma_t); & \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} &= 2(1 + \nu) \frac{R}{E} \tau_{rz}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

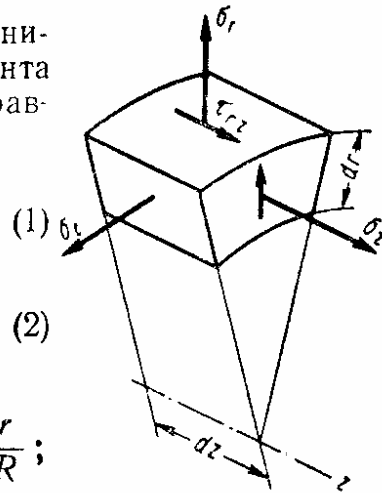


Рис. 1

На цилиндрических поверхностях (внутренней $\rho = \frac{r_1}{R} = k$ и наружной $\rho = 1$) должны выполняться граничные условия, т. е. напряжения σ_r и τ_{rz} должны равняться заданным поверхностным силам:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \rho = k \quad \sigma_r = -p_1(\xi), \quad \tau_{rz} = \tau_1(\xi); \\ \text{при } \rho = 1 \quad \sigma_r = -p_2(\xi), \quad \tau_{rz} = \tau_2(\xi). \end{array} \right\} \quad (5)$$

Также должны быть выполнены условия на торцовых поверхностях цилиндра:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } z = 0 \quad \sigma_z = \sigma_0(\rho), \quad \tau_{rz} = \tau_0(\rho); \\ \text{при } z = l \quad \sigma_z = \sigma_l(\rho), \quad \tau_{rz} = \tau_l(\rho). \end{array} \right\} \quad (6)$$

Исключая из уравнений (4) перемещения u и w , получим два уравнения совместности деформаций, выраженные через напряжения

$$(1 + \nu)(\sigma_r - \sigma_t) + \nu\rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\sigma_r + \sigma_z) - \rho \frac{\partial \sigma_t}{\partial \rho} = 0; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\sigma_t - \nu\sigma_r - \nu\sigma_z) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \rho}(\sigma_z - \nu\sigma_r - \nu\sigma_t) - 2(1 + \nu) \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое из этих уравнений является условием существования функции радиальных перемещений u , второе — условием существования функции осевых перемещений w .

Система напряжений $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$ и τ_{rz} , удовлетворяющая уравнениям равновесия (1) и (2), уравнениям совместности деформаций (7) и (8) и граничным условиям, представляет собой точное решение задачи.

Эта задача может быть сформулирована также в перемещениях. Для этого следует с помощью уравнений (4) выразить напряжения через перемещения и подставить в уравнения равновесия. Таким способом будут получены два уравнения в частных производных относительно перемещений u и w .

Рассматриваемая задача является весьма сложной и ее решения (кроме элементарных), точно удовлетворяющие всем граничным условиям, неизвестны [5].

Если длина цилиндра велика по сравнению с его диаметром и напряженное состояние вблизи торцов не является предметом исследования, условия на торцах достаточно удовлетворить по Сен-Венану.

В этом случае цилиндр можно рассматривать как имеющий бесконечную длину.

Точное решение для бесконечно длинного сплошного цилиндра, нагруженного ступенчатым нормальным давлением на боковой поверхности, получено в работе [9]. Используя метод суперпозиции, это решение можно использовать для расчета сплошного цилиндра при нормальной нагрузке, произвольно изменяющейся по длине.

В работах [5, 7] рассмотрены так называемые однородные решения для сплошного цилиндра, т. е. решения, соответствующие загрузке осесимметричной нагрузкой торцов цилиндра при свободной боковой его поверхности.

К сожалению, система однородных решений не позволяет полностью удовлетворить граничным условиям, наложенным на нормальные и касательные нагрузки на торце. Метод приближенного решения этой задачи предложен в работе [5].

Для полого цилиндра выкладки, связанные с построением точных решений, становятся чрезвычайно сложными и предпочтение должно быть отдано приближенным решениям задачи; методы таких решений приведены в работах [1, 2, 3, 6].

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Элементарные решения

Нормальное давление, изменяющееся по длине цилиндра по линейному закону. Если внутреннее p_1 и наружное p_2 давления изменяются по линейному закону в зависимости от ξ , то распределение напряжений в каждом поперечном сечении цилиндра совпадает с тем, которое имеет место при постоянных по длине давлениях, т. е.

$$\sigma_r = A - B \frac{1}{\rho^2}; \quad \sigma_l = A + B \frac{1}{\rho^2},$$

где

$$A = \frac{1}{1 - k^2} (p_1 k^2 - p_2)$$

и

$B = \frac{k^2}{1 - k^2} (p_1 - p_2)$ — также линейные функции ξ [см. формулы (7)–(9) гл. 15].

Напряжения в поперечных сечениях цилиндра отсутствуют

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{rz} = 0.$$

Легко видеть, что указанная система напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия (1), (2), уравнениям совместности (7, 8) и граничным условиям на цилиндрических поверхностях:

$$\text{при } \rho = k \quad \sigma_r = -p_1;$$

$$\text{при } \rho = 1 \quad \sigma_r = -p_2.$$

Торцы цилиндра при этом свободны от напряжений.

Радиальные перемещения

$$u = \frac{R}{E} \left[(1 - \nu) A \rho + (1 + \nu) B \frac{1}{\rho} \right]; \quad (9)$$

осевые перемещения

$$w = - \frac{R}{E} \left[\frac{1 - \nu}{2} \cdot \frac{dA}{d\xi} \rho^2 + (1 + \nu) \frac{dB}{d\xi} \ln \rho \right] - \frac{2\nu R}{E} \int A d\xi + C. \quad (10)$$

Первый член в формуле (10) характеризует деформацию поперечных сечений цилиндра (одинаковую для всех сечений, так как A и B — линейно зависят от ξ), второй — упругие их перемещения без искажения плоскости и третий — перемещение цилиндра как жесткого тела.

Цилиндр, нагруженный постоянными по длине осевыми поверхностными силами (рис. 2). Условия на боковых поверхностях в этом случае таковы:

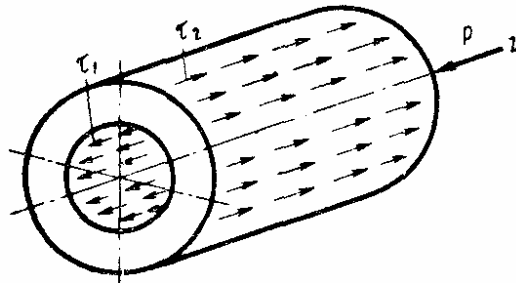


Рис. 2

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \rho = k \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = \tau_1; \\ \text{при } \rho = 1 \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = \tau_2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Решение задачи получим, предполагая, что напряжения σ_r и σ_t везде отсутствуют, напряжение τ_{rz} не зависит от ξ , а напряжение σ_z не зависит от ρ .

Тогда первое из уравнений равновесия (1) удовлетворяется тождественно, а второе приводит к равенству

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} (\rho \tau_{rz}) = - \frac{d\sigma_z}{d\xi} = 2C,$$

где C — постоянная.

Интегрируя это равенство и определяя постоянные из условий (11) на поверхности, получаем

$$\tau_{rz} = C\rho + C_1 \frac{1}{\rho}; \quad \sigma_z = C_2 - 2C\xi, \quad (12)$$

где

$$C = \frac{\tau_2 - \tau_1 k}{1 - k^2}; \quad C_1 = \frac{(\tau_1 - k\tau_2)k}{1 - k^2}. \quad (13)$$

Величина постоянной C_2 зависит от того, на каком торце приложена осевая нагрузка, уравновешивающая равнодействующую $P = 2\pi Rl(\tau_2 - k\tau_1)$, действующих на боковую поверхность цилиндра касательных сил. Если эта нагрузка приложена на торце $z = l$, а торец $z = 0$ свободен от нормальных напряжений, $C_2 = 0$.

Перемещения определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\nu R}{E} (C_2 - 2C\xi) \rho; \\ w &= \frac{R}{E} [C(\rho^2 - \xi^2) + 2(1 + \nu)C_1 \ln \rho + C_2 \xi + C_3], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где C_3 — постоянная, определяющая перемещения цилиндра как жесткого тела.

Синусоидальная нагрузка на цилиндр

Предполагаем, что нагрузки на цилиндрических поверхностях заданы выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r = r_1 \quad \sigma_r &= -P_1 \cos \beta \xi, \\ \tau_{rz} &= T_1 \sin \beta \xi; \\ \text{при } r = R \quad \sigma_r &= -P_2 \cos \beta \xi, \\ \tau_{rz} &= T_2 \sin \beta \xi. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Следовательно, рассматриваем симметричное относительно сечения $\zeta = 0$ нагружение.

Все приведенные ниже формулы пригодны и для кососимметричной нагрузки, если заменить в них $\cos \beta \zeta$ и $\sin \beta \zeta$ соответственно на $\sin \beta \zeta$ и $(-\cos \beta \zeta)$.

Выражения для перемещений, зададим в форме

$$w = RW \sin \beta \zeta; \quad u = RU \cos \beta \zeta, \quad (16)$$

где W и U — искомые функции безразмерного радиуса ρ .

Подставив принятые выражения перемещений в формулы (3) для деформаций, а затем вычислив по закону Гука напряжения, следует потребовать выполнения уравнений равновесия (1) и (2).

Таким способом получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U(\rho)$ и $W(\rho)$:

$$\left. \begin{aligned} -\beta \left(U' + \frac{1}{\rho} U \right) + (1 - 2\nu) \left(W'' + \frac{1}{\rho} W' \right) - \\ - 2(1 - \nu) \beta^2 W = 0; \\ 2(1 - \nu) \left(U'' + \frac{1}{\rho} U' - \frac{1}{\rho^2} U \right) - \\ - (1 - 2\nu) \beta^2 U + \beta W' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где штрихами обозначены производные по ρ .

Исключая из этой системы одну из функций, например U , приходим к уравнению четвертого порядка

$$\begin{aligned} W^{IV} + \frac{2}{\rho} W''' - \left(\frac{1}{\rho^2} + 2\beta^2 \right) W'' + \\ + \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{2\beta^2}{\rho} \right) W' + \beta^4 W = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

которое может быть представлено также в виде

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} - \beta^2 \right) \left(\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho} - \beta^2 W \right) = 0. \quad (19)$$

Общим решением этого уравнения является выражение

$$W = C_1 I_0(\beta \rho) + C_2 K_0(\beta \rho) + C_3 \rho I_1(\beta \rho) + C_4 \rho K_1(\beta \rho); \quad (20)$$

здесь $I_n(\beta \rho) = i^{-n} J_n(i\beta \rho)$ — бесселева функция от мнимого аргумента; $K_n(\beta \rho)$ — функция Макдональда (при $\rho = 0$ функции K_0 и K_1 обращаются в бесконечность).

Функция U определяется равенством

$$\begin{aligned} U = -C_1 I_1(\beta \rho) + C_2 K_1(\beta \rho) + C_3 \left[-\rho I_0(\beta \rho) + \frac{4(1 - \nu)}{\beta} I_1(\beta \rho) \right] + \\ + C_4 \left[\rho K_0(\beta \rho) + \frac{4(1 - \nu)}{\beta} K_1(\beta \rho) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

Напряжения в цилиндре находят из выражений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \left\{ \beta C_1 \left(\frac{1}{\beta \rho} I_1 - I_0 \right) - \beta C_2 \left(\frac{1}{\beta \rho} K_1 + K_0 \right) + \right. \\ &\quad + C_3 \left[(3 - 2\nu) I_0 - \left(\beta \rho + \frac{4(1-\nu)}{\beta \rho} \right) I_1 \right] - \\ &\quad \left. - C_4 \left[(3 - 2\nu) K_0 + \left(\beta \rho + \frac{4(1-\nu)}{\beta \rho} \right) K_1 \right] \right\} \cos \beta \xi; \\ \sigma_t &= 2G \left\{ -C_1 \frac{1}{\rho} I_1 + C_2 \frac{1}{\rho} K_1 + \right. \\ &\quad + C_3 \left[\frac{4(1-\nu)}{\beta \rho} I_1 - (1 - 2\nu) I_0 \right] + \\ &\quad \left. + C_4 \left[\frac{4(1-\nu)}{\beta \rho} K_1 + (1 - 2\nu) K_0 \right] \right\} \cos \beta \xi; \\ \sigma_z &= 2G [C_1 \beta I_0 + C_2 \beta K_0 + C_3 (\beta \rho I_1 + 2\nu I_0) + \\ &\quad + C_4 (\beta \rho K_1 - 2\nu K_0)] \cos \beta \xi; \\ \tau_{rz} &= 2G \{ C_1 \beta I_1 - C_2 \beta K_1 + C_3 [\beta \rho I_0 - 2(1-\nu) I_1] - \\ &\quad - C_4 [\beta \rho K_0 + 2(1-\nu) K_1] \} \sin \beta \xi. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В формулах для напряжений аргумент $\beta \rho$ бесселевых функций для краткости опущен. Граничные условия (15) приводят к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1 — C_4 .

В общем случае полого цилиндра выкладки являются сложными; они существенно упрощаются для цилиндра сплошного; в этом случае должны равняться нулю коэффициенты C_2 и C_4 при функциях, обращающихся в бесконечность при $\rho = 0$.

Постоянные C_1 и C_3 для сплошного цилиндра определяют из уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2GD(\beta)} \left\{ P [2(1-\nu) I_1(\beta) - \beta I_0(\beta)] + \right. \\ &\quad + T \left[\frac{1}{\beta} (\beta^2 + 4 - 4\nu) I_1(\beta) - (3 - 2\nu) I_0(\beta) \right] \Big\}; \\ C_3 &= \frac{1}{2GD(\beta)} \{ P \beta I_1(\beta) + T [I_1(\beta) - \beta I_0(\beta)] \}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где

$$D(\beta) = (\beta^2 + 2 - 2\nu) I_1^2(\beta) - \beta^2 I_0^2(\beta). \quad (24)$$

Значительный интерес представляет случай большого β , т. е. нагрузки, быстро изменяющейся по длине цилиндра.

Можно показать, что если длина волны нагрузки $\frac{2\pi R}{\beta}$ мала по сравнению с радиусом R цилиндра, деформации и напряжения локализуются вблизи поверхности цилиндра, не проникая вглубь. При этом, в пределе, решение задачи для цилиндра переходит в решение соответствующей задачи плоской деформации для полуплоскости.

Несинусоидальная нагрузка сплошного цилиндра

Решение в рядах Фурье. Произвольная нормальная и касательная нагрузка, распределенная по длине $2L$ цилиндра, может быть представлена в виде тригонометрического ряда

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{\rho=1} &= -p_0 - \sum_{s=1}^{\infty} P_s \cos \beta_s \zeta; \\ (\tau_{rz})_{\rho=1} &= \sum_{s=1}^{\infty} T_s \sin \beta_s \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_s &= \frac{\pi R}{L} s; \quad p_0 = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L (\sigma_r)_{\rho=1} dz; \\ P_s &= -\frac{R}{L} \int_{-\frac{L}{R}}^{\frac{L}{R}} (\sigma_r)_{\rho=1} \cos \beta_s \zeta d\zeta; \\ T_s &= \frac{R}{L} \int_{-\frac{L}{R}}^{\frac{L}{R}} (\tau_{rz})_{\rho=1} \sin \beta_s \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Приведенные выражения относятся к симметричной относительно сечения $\zeta = 0$ нагрузке. Как уже указывалось для кососимметричной нагрузки, $\cos \beta \zeta$ и $\sin \beta \zeta$ должны быть заменены на $\sin \beta \zeta$ и $(-\cos \beta \zeta)$. Нагрузка p_0 вызывает напряжения и деформации, определяемые формулами Ляме, а каждый из последующих членов разложения — в соответствии с приведенными выше формулами.

Следовательно, в каждом частном случае нагружения задача сводится к суммированию соответствующих рядов.

Эффективные приемы такого суммирования рассмотрены в работе [5], гл. 7, § 5.

Указанный метод расчета использован в работах¹ Л. Файлона [10] и М. Бартона [11], в которых приведены числовые результаты для ряда частных случаев нагружения.

Так, например, Л. Файлон исследовал распределение осевых напряжений σ_z в цилиндре длины $2L = \pi R$, нагруженном равномерно распределенными касательными силами на участках $-\frac{2}{3}L < z < \frac{2}{3}L$ и $-\frac{1}{3}L$ и $\frac{1}{3}L < z < \frac{2}{3}L$ (рис. 3). Отношение напряжения σ_z

¹ Некоторые результаты Файлона приведены в курсе теории упругости С. П. Тимошенко.

в различных точках цилиндра к среднему напряжению $\sigma_m = q \frac{2\pi R \frac{L}{3}}{\pi R^2}$ приведено в табл. 1.

1 Отношение $\frac{\sigma_z}{\sigma_m}$

$\frac{z}{L}$	$\rho = 0$	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,4$	$\rho = 0,6$	$\rho = 1$
0	0,689	0,719	0,810	0,962	1,117
0,1	0,673	0,700	0,786	0,937	1,163
0,2	0,631	0,652	0,720	0,859	1,344
0,3	0,582	0,594	0,637	0,737	2,022
0,4	0,539	0,545	0,565	0,617	1,368

Из табл. 1 видно, что при такой малой (по сравнению с зоной приложения нагрузки) длине средней части цилиндра распределение напряжений в среднем сечении далеко не равномерное. На торцах цилиндра имеют место самоуравновешенные нормальные напряжения, в данном случае довольно значительные. Так, в центре торцового сечения $z = L$, $\rho = 0$ $\sigma_z = 0,311 \sigma_m$ (растяжение), а на периферии ($z = L$, $\rho = 1$) $\sigma_z = -0,117 \sigma_m$ (сжатие).

Решение в форме интеграла Фурье. Распространение изложенного выше метода тригонометрических рядов на цилиндр бесконечной длины ($L \rightarrow \infty$) приводит к представлению искомых величин в виде интегралов Фурье.

Формальная запись соответствующих выражений не представляет труда, но вычисление интегралов затруднительно. Приемы вычисления указаны в работе [5], гл. 7, § 6.

Результаты расчета (рис. 4) для сплошного цилиндра, нагруженного ступенчатым давлением, приведены в работе [9]. Здесь при $\zeta < 0$ $(\sigma_r)_{\rho=1} = 0$; при $\zeta > 0$ $(\sigma_r)_{\rho=1} = -p$.

Графики распределения напряжений и радиальных перемещений по длине цилиндра на рис. 4 вычислены при $\nu = 0,3$. Эти графики показывают, что влияние скачка давления в сечении $\zeta = 0$ распространяется вдоль оси цилиндра на расстояние порядка его радиуса в обе стороны. Вне этой зоны напряжения и деформации с высокой точностью определяются формулами Ляме (т. е. в левой части цилиндра стремятся к нулю, а в правой $\sigma_z \rightarrow 0$; $\tau_{rz} \rightarrow 0$; $\sigma_r \rightarrow -p$, $\sigma_l \rightarrow -p$, $u_{\rho=1} \rightarrow -\frac{p(1-\nu)}{E} R$).

Рассмотренная задача имеет весьма большое значение, так как с ее помощью можно, пользуясь принципом независимости действия сил, рассчитать напряжения и деформации, вызываемые нормальной нагрузкой, изменяющейся по длине цилиндра по произвольному закону. С этой целью реальный закон распределения нагрузки аппроксимируют

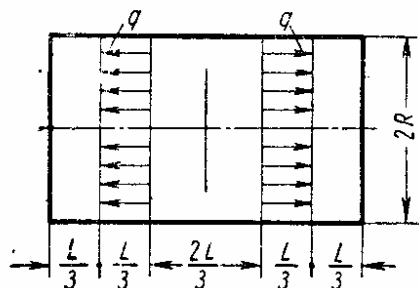


Рис. 3

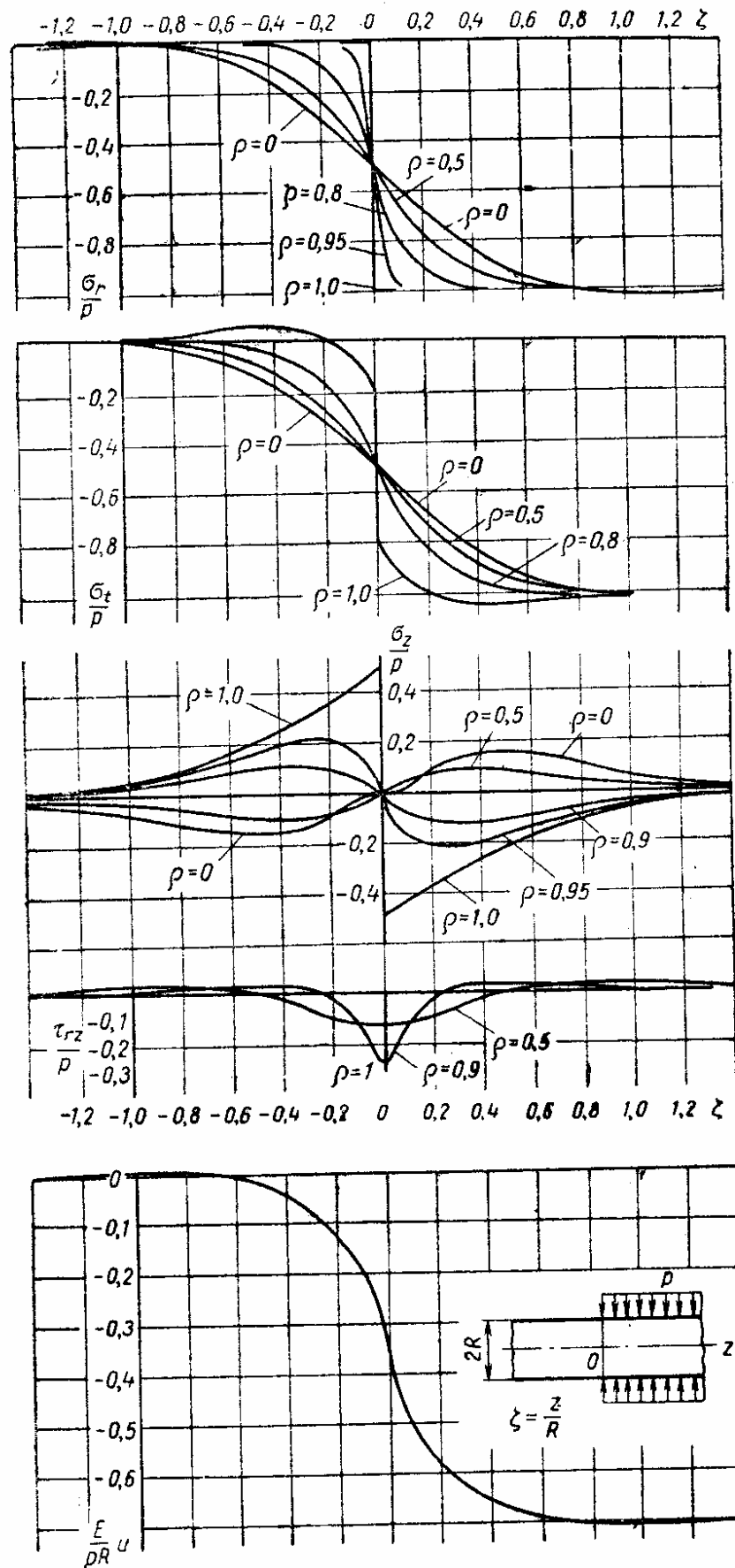


Рис. 4

ступенчатым, а затем напряжения и деформации, вызываемые каждой из элементарных ступенек, суммируют.

Схема разложения нагрузки для случая, когда равномерным давлением нагружен участок боковой поверхности цилиндра, показан на

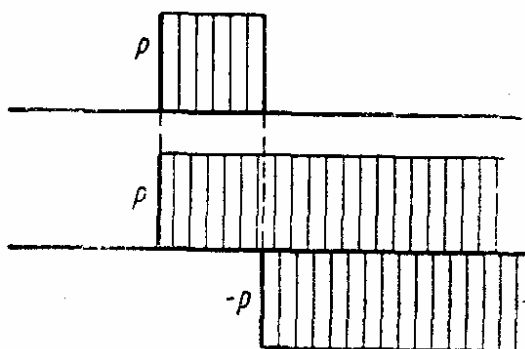


Рис. 5

рис. 5. Из схемы следует, что для получения эпюр напряжений в этом случае необходимо из эпюр рис. 4 вычесть такие же эпюры, смещенные вправо на длину участка нагружения. Полученные таким способом эпюры для случая, когда длина загруженного участка составляет $0,15R$, даны на рис. 6. Эпюры свидетельствуют о том, что при малой длине участка нагружения формулы Ляме не могут быть использо-

ваны для оценки напряжений и деформаций. Решение задачи о нагружении цилиндра касательными силами с помощью интеграла Фурье рассмотрено П. З. Лифшицем (см. [5], гл. 7, § 8).

Напряжения вблизи торца сплошного цилиндра

При представлении решения задачи об осесимметричном нагружении цилиндра в рядах или с помощью интеграла Фурье не удастся точно выполнить граничные условия на торцах цилиндра. Если торцы удалены от места нагружения более чем на R , то это несущественно, так как на такой длине влияние нагрузки затухает.

В противном случае, на напряженное состояние, соответствующее нагружению цилиндра по боковым поверхностям, следует наложить напряженное состояние, соответствующее нагружению торцов при свободной боковой поверхности.

Для отыскания решений задачи, удовлетворяющих на цилиндрической поверхности условиям $(\sigma_r)_{\rho=1} = 0$ и $(\tau_{rz})_{\rho=1} = 0$ (однородных решений), можно использовать формулы (21)–(24), полученные для синусоидальной нагрузки.

При этом необходимо потребовать, чтобы постоянные C_1 и C_3 не обращались в ноль при равных нулю величинах нагрузки P и T . Это возможно только, если определитель $D(\beta)$ системы уравнений для C_1 и C_3 обращается в ноль.

Следовательно, характеристические показатели β определяются уравнением

$$(\beta^2 + 2 - 2\nu) I_1^2(\beta) - \beta^2 I_0^2(\beta) = 0. \quad (26)$$

Корни этого уравнения являются комплексными вида $\beta_s = \pm \gamma_s \pm \pm i\delta_s$. Вычисление корней (см. работу [7]), дало следующие их значения (при $\nu = 0,25$):

s	1	2	3
γ_s	1,367	1,558	1,818
δ_s	2,698	6,060	9,320

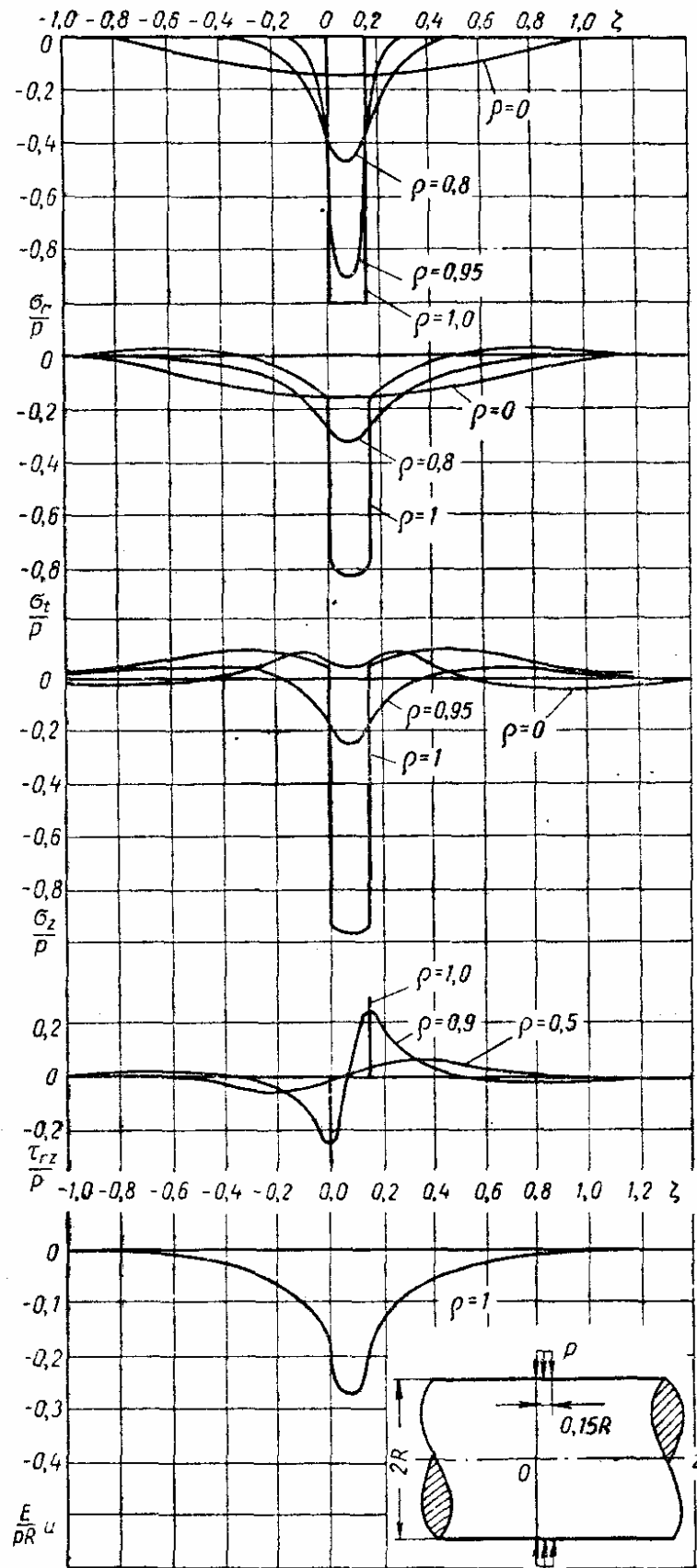


Рис. 6

При $s > 3$ может быть использовано асимптотическое выражение корней:

$$\gamma_s = \frac{1}{2} \ln 4\pi s;$$

$$\delta_s = \pi s - \frac{1}{4\pi s} \left[\ln 4\pi s + \frac{7}{2} - 4v \right].$$

Так как теперь показатели β являются комплексными, место тригонометрических функций $\cos \beta \zeta$ и $\sin \beta \zeta$ займут функции

$$e^{\pm \delta_s \zeta} (A_s \cos \gamma_s \zeta + B_s \sin \gamma_s \zeta).$$

При этом затухающим с удалением от торца $\zeta = 0$ решениям соответствует знак минус перед δ_s .

Соответственно должны быть также преобразованы в связи с комплексностью β формулы для напряжений и перемещений.

В результате установлено, что каждому значению β_s корня уравнения (26) соответствует однородное решение с перемещениями и напряжениями, определяемыми формулами

$$\begin{aligned} u^{(s)} &= \frac{1}{2G} \{ M_s [u^{(s,r)} \cos \gamma_s \zeta - u^{(s,i)} \sin \gamma_s \zeta] - \\ &\quad - N_s [u^{(s,r)} \sin \gamma_s \zeta + u^{(s,i)} \cos \gamma_s \zeta] \} e^{-\delta_s \zeta}; \\ w^{(s)} &= \frac{1}{2G} \{ M_s [w^{(s,r)} \cos \gamma_s \zeta - w^{(s,i)} \sin \gamma_s \zeta] - \\ &\quad - N_s [w^{(s,r)} \sin \gamma_s \zeta + w^{(s,i)} \cos \gamma_s \zeta] \} e^{-\delta_s \zeta}; \\ \varphi_k^{(s)} &= \{ M_s [\varphi_k^{(s,r)} \cos \gamma_s \zeta - \varphi_k^{(s,i)} \sin \gamma_s \zeta] - \\ &\quad - N_s [\varphi_k^{(s,r)} \sin \gamma_s \zeta + \varphi_k^{(s,i)} \cos \gamma_s \zeta] \} e^{-\delta_s \zeta}, \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, 3, 4$, причем $\varphi_1 = \sigma_r$; $\varphi_2 = \sigma_t$; $\varphi_3 = \sigma_z$; $\varphi_4 = \tau_{rz}$.

В этих формулах M_s и N_s — произвольные коэффициенты; $u^{(s,r)}$, $u^{(s,i)}$, ..., $\tau_{rz}^{(s,r)}$, $\tau_{rz}^{(s,i)}$ — функции безразмерного радиуса ρ . В табл. 2 приведены значения этих функций для $s = 1$ и $s = 2$, заимствованные из работы [5]. Графики функций показаны на рис. 7.

Напряженное и деформированное состояние цилиндра, нагруженного на торце, описывается суммой выражений, соответствующих различным номерам s .

Если нагрузки на торце $\zeta = 0$ $\sigma_z = F(\rho)$ и $\tau_{rz} = -\Phi(\rho)$ заданы, то необходимо подобрать коэффициенты M_s , N_s ($s = 1, 2 \dots$) так, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \sum_{s=1}^{\infty} [M_s \sigma_z^{(s,r)} - N_s \sigma_z^{(s,i)}]; \\ \Phi(\rho) &= - \sum_{s=1}^{\infty} [M_s \tau_{rz}^{(s,r)} - N_s \tau_{rz}^{(s,i)}]. \end{aligned}$$

2. Значения функций $\varphi_k^{(s, r)}$, $\varphi_k^{(s, i)}$

Функция	$\rho = 0$	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,6$	$\rho = 0,8$	$\rho = 1,0$
$u^{(1, r)}$	0	0,1478	0,2124	0,3240	0,3059	0,2241
$u^{(1, i)}$	0	-0,2394	-0,3376	-0,4836	-0,4706	-0,4422
$u^{(2, r)}$	0	-0,4335	-0,524	-0,190	-0,0927	0,0600
$u^{(2, i)}$	0	0,4759	0,522	0,011	-0,2208	-0,2322
$w^{(1, r)}$	0,8906	0,7953	0,6819	-0,358	-0,1568	-0,3050
$w^{(1, i)}$	-0,1552	-0,1139	-0,0707	0,051	-0,0441	-0,2799
$w^{(2, r)}$	-1,118	-0,7377	0,1756	0,388	0,0794	-0,2448
$w^{(2, i)}$	0,5443	0,2753	0,0306	-0,137	0,0462	-0,1173
$\sigma_r^{(1, r)}$	0,4302	0,403	0,368	0,172	0,014	0
$\sigma_r^{(1, i)}$	-1,699	-1,517	-1,309	-0,485	-0,081	0
$\sigma_r^{(2, r)}$	-2,119	-1,247	-0,34	1,58	0,721	0
$\sigma_r^{(2, i)}$	3,490	1,658	-0,02	-2,233	-0,746	0
$\sigma_t^{(1, r)}$	0,4302	0,4571	0,485	0,6053	0,676	0,7004
$\sigma_t^{(1, i)}$	-1,699	-1,638	-1,562	-1,185	-0,843	-0,4769
$\sigma_t^{(2, r)}$	-2,119	-1,959	-1,75	-0,602	0,2103	0,3456
$\sigma_t^{(2, i)}$	3,490	2,784	2,024	-0,244	-0,6687	-0,2271
$\sigma_z^{(1, r)}$	-2,522	-2,273	-1,966	-0,450	0,776	1,681
$\sigma_z^{(1, i)}$	1,195	0,952	0,685	-0,221	-0,351	0,303
$\sigma_z^{(2, r)}$	6,369	4,252	2,092	-2,42	-0,456	2,151
$\sigma_z^{(2, i)}$	-4,479	-2,410	-0,581	1,17	-0,551	0,335
$\tau_{r, z}^{(1, r)}$	0	-0,5007	-0,7186	-1,030	-0,7628	0
$\tau_{r, z}^{(1, i)}$	0	0,6171	0,8357	0,8790	0,4486	0
$\tau_{r, z}^{(2, r)}$	0	2,669	3,17	0,54	-1,325	0
$\tau_{r, z}^{(2, i)}$	0	-2,880	-3,04	0,28	0,889	0

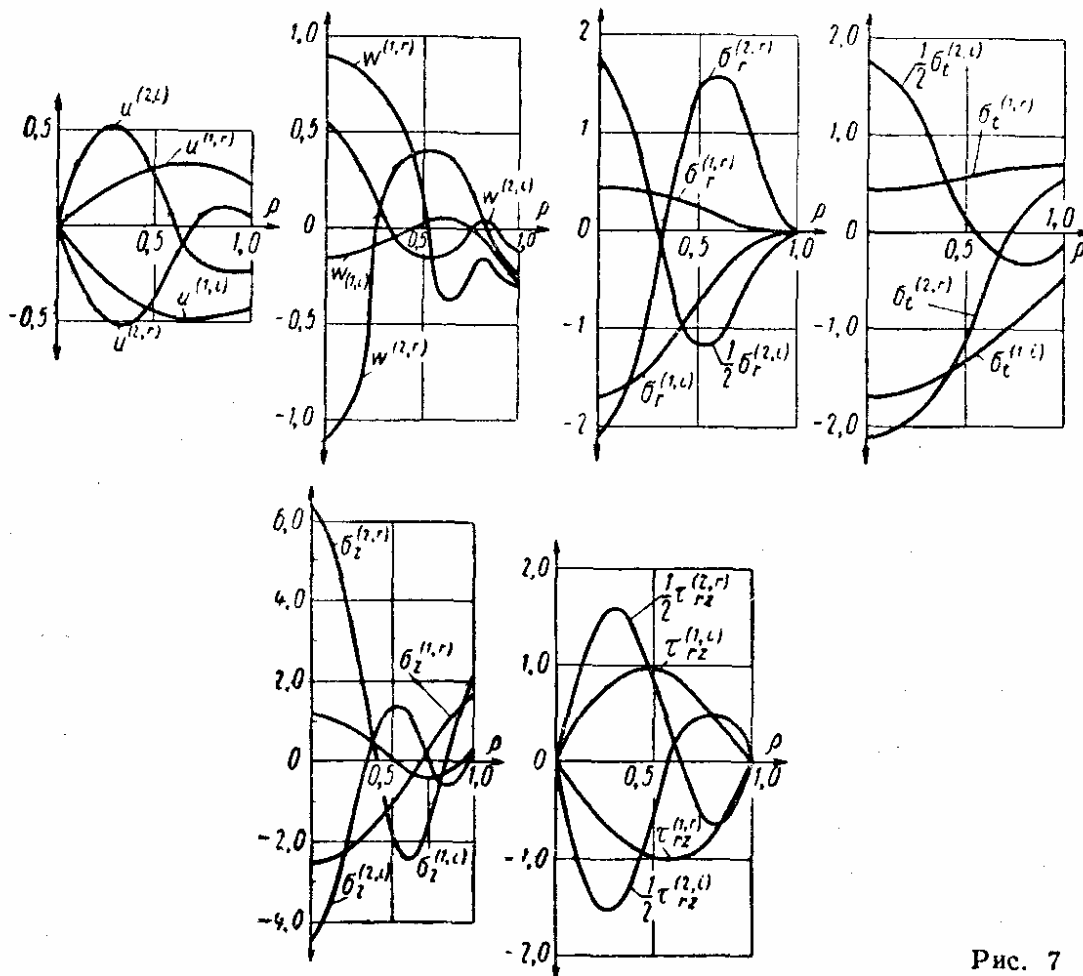


Рис. 7

А. И. Лурье предложил для приближенного решения задачи при ограниченном числе n учитываемых членов ряда определять коэффициенты M_s , N_s из условия минимума выражения

$$I = \int_0^1 \left\{ \left[F(\rho) - \sum_{s=1}^n (M_s \sigma_z^{(s,r)} - N_s \sigma_z^{(s,i)}) \right]^2 + \left[\Phi(\rho) + \sum_{s=1}^n (M_s \tau_{rz}^{(s,r)} - N_s \tau_{rz}^{(s,i)}) \right]^2 \right\} \rho d\rho.$$

Это условие приводит к системе линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

При $n = 2$ коэффициенты определяют по формулам

$$\begin{aligned} M_1 &= 2,391\varphi_1 - 0,4256\varphi_2 - 4,222\psi_1 - 0,1830\psi_2; \\ M_2 &= -0,4256\varphi_1 + 0,9730\varphi_2 + 1,675\psi_1 - 0,7215\psi_2; \\ N_1 &= -4,222\varphi_1 + 1,675\varphi_2 + 12,44\psi_1 + 0,2018\psi_2; \\ N_2 &= -0,1830\varphi_1 - 0,7215\varphi_2 + 0,2018\psi_1 + 1,360\psi_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \int_0^1 [F(\rho) \sigma_z^{(s,r)} - \Phi(\rho) \tau_{rz}^{(s,r)}] \rho d\rho; \\ \psi_s &= - \int_0^1 [F(\rho) \sigma_z^{(s,i)} - \Phi(\rho) \tau_{rz}^{(s,i)}] \rho d\rho \end{aligned}$$

($s = 1, 2$).

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ

Основные уравнения

Методы решения, основанные на точном выполнении уравнений теории упругости для полого цилиндра, не отличаются от методов, рассмотренных выше применительно к цилиндру сплошному. Решение также может быть разложено в тригонометрический ряд или представлено в виде интеграла Фурье.

Однако трудоемкость вычислений возрастает в такой степени, что получение количественных результатов становится затруднительным. Можно указать лишь работу Г. С. Шапиро [8], в которой получены некоторые числовые результаты для полого цилиндра, нагруженного равномерным давлением на участке боковой поверхности.

Для полого цилиндра следует отдать предпочтение более простым приближенным методам. Ниже кратко изложен такой метод [1, 3, 6]. Рассмотрим цилиндр с наружным радиусом R , внутренним r_1 , нагруженный на цилиндрических поверхностях нормальными и касательными силами $p_1(z)$, $\tau_1(z)$ (на внутренней поверхности), $p_2(z)$, $\tau_2(z)$ (на наружной поверхности).

Введем безразмерные координаты $\frac{s}{R} = \rho$, $\frac{z}{R} = \zeta$. Отношение радиусов обозначается $\frac{r_1}{R} = k$.

Решение может быть использовано при $0,2 \leq k \leq 0,9$. При $k \geq 0,9$ цилиндр можно рассматривать как тонкую оболочку (см. гл. 22 т. 1).

Выражение для касательного напряжения зададим в виде ряда

$$\tau_{rz} = \Phi'_1(\zeta) \rho + \Phi'_2(\zeta) \frac{1}{\rho} + Z'_1(\zeta) V'_1(\rho) + Z'_2(\zeta) V'_2(\rho), \quad (27)$$

где

$$\Phi'_1(\zeta) = \frac{1}{1-k^3} (\tau_2 - k\tau_1)\zeta; \quad \Phi'_2(\zeta) = \frac{1}{1-k^2} (\tau_1 - k\tau_2); \quad (28)$$

$V'_1(\rho)$, $V'_2(\rho)$ — заданные функции ρ , равные нулю при $\rho = k$ и $\rho = 1$; $Z'_1(\zeta)$, $Z'_2(\zeta)$ — искомые функции.

Первых два слагаемых выражения (27) позволяют удовлетворить условиям, наложенным на касательные напряжения на поверхностях $\rho = k$ и $\rho = 1$; они представляют собой точные значения указанных напряжений, если нагрузки τ_1 и τ_2 постоянны [см. формулы (12)].

Последующие члены формулы (27) соответствуют напряжениям, возникающим в связи с изменением по длине цилиндра касательных и нормальных нагрузок. Функции Φ' , Z' , V' представлены в виде производных от первообразных функций Φ , Z , V для упрощения выкладок.

Увеличение числа учитываемых членов ряда (27) приводит к увеличению точности расчетов, однако прогрессивно возрастает и их трудоемкость. Удовлетворительную точность расчета достигают при удержании двух функций Z_1 и Z_2 .

В качестве функций $V_1(\rho)$ и $V_2(\rho)$ в работе [7] приняты выражения

$$\left. \begin{aligned} V_1(\rho) &= \frac{1}{18(1+k)} \left[-2(1+k)\rho^3 + 3(1+k + \right. \\ &\quad \left. + k^2)\rho^2 - k^3(3+k+k^2) - 6k^2 \ln \frac{\rho}{k} \right]; \\ V_2(\rho) &= \frac{1}{4}(\rho-k)^2(1-\rho)^2 + \frac{\lambda}{6}(\rho-k)^2(3-k-2\rho), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где λ — коэффициент, не зависящий от ρ .

При заданном законе изменения τ_{rz} можно, интегрируя уравнения (1) и (2) с учетом уравнения совместности (7), получить значения всех компонент напряжения и радиального перемещения. При интегрировании учитывают, что при $\rho = k$ $\sigma_r = -p(\zeta)$ и при $\rho = 1$ $\sigma_r = -p_2(\zeta)$.

Полученные формулы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -2\Phi_1(\zeta) - Z_1 \frac{1}{\rho} (\rho V_1')' - Z_2 \frac{1}{\rho} (\rho V_2')'; \\ \sigma_r &= A(\zeta) - B(\zeta) \frac{1}{\rho^2} - \Phi_1''(\zeta) \times \\ &\quad \times \frac{(3+\nu)(1-\rho^2)(\rho^2-k^2)}{8\rho^2} + \\ &\quad + \Phi_2'(\zeta) \frac{1+\nu}{2} \left[\ln \frac{1}{\rho} - \frac{k^2(1-\rho^2)}{\rho^2(1-k^2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln \frac{1}{k} \right] - \frac{\nu}{\rho} \sum_{i=1}^2 Z_i V_i' + \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 Z_i'' \left[\frac{1-\nu}{\rho^2} \int_k^\rho V_i \rho d\rho - V_i(\rho) - J_i \left(1 - \frac{k^2}{\rho^2} \right) \right]; \\ \sigma_t &= A(\zeta) + B(\zeta) \frac{1}{\rho^2} + \Phi_1''(\zeta) \frac{1}{8\rho^2} \times \\ &\quad \times [(3+\nu)(k^2+\rho^2+k^2\rho^2) - (1+3\nu)\rho^4] + \\ &\quad + \Phi_2''(\zeta) \left[\frac{(1+\nu)(\rho^2+k^2)}{2\rho^2(1-k^2)} \ln \frac{1}{k} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{\rho}{k} + \frac{1-\nu}{2} \right] - \nu \sum_{i=1}^2 Z_i V_i'' + \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 Z_i'' \left[J_1 \left(1 + \frac{k^2}{\rho^2} \right) - \nu V_i - \frac{1-\nu}{\rho^2} \int_k^\rho V_i \rho d\rho \right]; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 u = \frac{\rho R}{E} \left\{ A(\zeta) (1 - \nu) + B(\zeta) \frac{1 + \nu}{\rho^2} + \right. \\
 + \Phi_1''(\zeta) \left[\frac{1 - \nu}{2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k^2}{\rho^2} - \right. \\
 \left. - \frac{1 - \nu^2}{8\rho^2} (\rho^4 - 2\rho^2 k^2 + k^2) \right] + \\
 + \Phi_2''(\zeta) \frac{1}{8\rho^2} \{ [3 + k^2 + \nu(1 - k^2)] \times \\
 \times [\rho^2 + k^2 - \nu(\rho^2 - k^2)] - (1 - \nu^2) \times \\
 \times (\rho^2 - k^2)^2 \} + 2\nu\Phi_1(\zeta) + \\
 + \nu(1 + \nu) \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^2 Z_i V_i' + \\
 + \sum_{i=1}^2 Z_i'' \left[J_i \left(1 - \nu + \frac{1 + \nu}{\rho^2} k^2 \right) - \frac{1 - \nu^2}{\rho^2} \times \right. \\
 \left. \times \int_k^\rho V_i \rho d\rho \right] \left. \right\} \quad (30)
 \end{aligned}$$

В приведенных выше формулах

$$\left. \begin{aligned}
 A(\zeta) &= \frac{1}{1 - k^2} (p_1 k^2 - p_2); \quad B(\zeta) = \frac{k^2}{1 - k^2} (p_1 - p_2); \\
 J_i &= \frac{1}{1 - k^2} \left[V_i(1) - (1 - \nu) \int_k^1 V_i \rho d\rho \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Величина $-2\Phi_1(\zeta)$, входящая в формулы для σ_z и u , представляет собой равномерно распределенное по поперечному сечению цилиндра напряжение, соответствующее нормальной силе N в этом сечении:

$$-2\Phi_1 = \frac{N}{\pi R^2 (1 - k^2)}.$$

Найденные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям на цилиндрических поверхностях.

Также выполняется уравнение совместности (7). Уравнение совместности (8), т. е. условие существования функции ω , точно не выполняется.

В соответствии с вариационным принципом Кастилиано [4] наилучшее приближение может быть достигнуто при экстремальном значении энергии деформации.

Выразив удельную энергию деформации через напряжения и проинтегрировав ее по всему объему цилиндра, приходим к выражению

3. Коэффициенты уравнении (32) и (33)

Коэффициенты	$k = 0,2$	$k = 0,4$	$k = 0,5$	$k = 0,6$	$k = 0,8$	$k = 1,0$
$\lambda \frac{10^3}{(1-k)^2}$	88,133	60,292	52,485	46,728	39,393	35,000
s_1^2	1,95	1,33	1,06	0,915	0,680	0,545
$m_1^4 (1-k)^2$	11,4	6,75	5,42	4,55	3,40	2,72
$n_1 (1-k)^3$	4,40	7,90	9,15	9,95	11,2	12,0
$q_1 (1-k)^3$	22,6	17,1	15,5	14,4	12,9	12,0
$a_1 (1-k)^3$	22,9	17,1	13,8	11,0	6,71	3,60
$b_1 (1-k)^3$	36,9	13,5	7,69	3,74	-1,01	-3,60
$c_1 (1-k)^3$	-2,23	-2,57	-2,37	-2,04	-1,12	0
$d_1 (1-k)^3$	-7,29	-4,58	-3,60	-2,75	-1,28	0
$s_2^2 (1-k)^2$	8,55	6,60	6,35	6,20	6,05	6,00
$m_2^4 (1-k)^4$	178	142	136	132	129	128
$n_2 (1-k)^4$	18,4	28,9	32,6	35,1	39,1	42,1
$q_2 (1-k)^4$	-62,9	-53,4	-50,9	-48,6	-45,2	-42,1
$a_2 (1-k)^5$	180	169	167	165	166	168
$b_2 (1-k)^5$	-186	-183	-179	-176	-171	-168
$c_2 (1-k)^5$	-3,0	-2,43	-1,86	-1,25	-0,339	0
$d_2 (1-k)^5$	7,63	3,89	2,56	1,60	0,380	0

полной энергии в виде функционала, зависящего от неизвестных функций Z_1 и Z_2 . Условия стационарного значения этого функционала (уравнения Эйлера) представляют собой систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно Z_1 и Z_2 .

Надлежащим выбором коэффициента λ в формуле (29) можно добиться того, чтобы эти два уравнения стали практически независимыми. Соответствующие значения λ (при $\nu = 0,3$) приведены в табл. 3. Уравнения принимают вид

$$Z_1^{IV} - 4s_1^2 Z_1'' + 4m_1^4 Z_1 = f_1(\xi); \quad (32)$$

$$Z_2^{IV} - 4s_2^2 Z_2'' + 4m_2^4 Z_2 = f_2(\xi), \quad (33)$$

где

$$f_1(\xi) = \frac{d^2}{d\xi^2} (-n_1 \rho_1 + q_1 \rho_2) + \frac{d}{d\xi} (a_1 \tau_1 + b_1 \tau_2) + \frac{d^3}{d\xi^3} (c_1 \tau_1 + d_1 \tau_2); \quad (34)$$

$$f_2(\xi) = \frac{d^2}{d\xi^2} (-n_2 p_1 + q_2 p_2) + \frac{d}{d\xi} (a_2 \tau_1 + b_2 \tau_2) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{d^3}{d\xi^3} (c_2 \tau_1 + d_2 \tau_2). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Значения входящих в эти выражения числовых коэффициентов приведены в табл. 3. Для облегчения интерполяции в таблице приведены

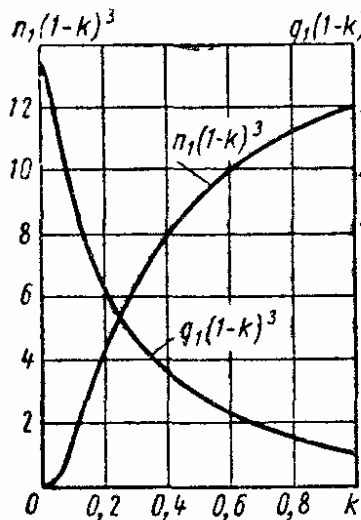


Рис. 8

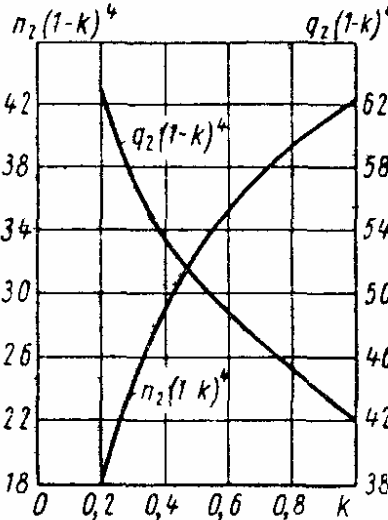


Рис. 9

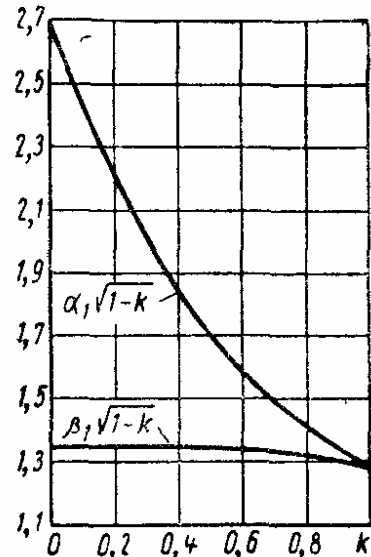


Рис. 10

не сами значения коэффициентов, а их произведения на $(1 - k)$ в различных степенях. Графики зависимости коэффициентов n и q от k приведены на рис. 8 и 9.

Характеристические уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям (32) и (33), имеют корни

$$x = \pm \alpha \pm \beta i,$$

где $\alpha = \sqrt{m^2 + s^2}$; $\beta = \sqrt{m^2 - s^2}$.

Изменение этих величин в зависимости от k показано на рис. 10 и 11.

Практическую важность имеют лишь затухающие с увеличением ξ решения уравнений (32) и (33).

В дальнейшем будут использованы следующие функции, являющиеся решениями уравнения (32) без правой части:

$$\left. \begin{aligned} S_1(\xi) &= \frac{1}{\sin \varphi_1} e^{-\alpha_1 \xi} \sin(\beta_1 \xi + \varphi_1); \\ S_2(\xi) &= -\frac{1}{2m_1^2} S_1'(\xi) = \frac{1}{m_1 \sqrt{2} \sin \varphi_1} e^{-\alpha_1 \xi} \sin \beta_1 \xi; \\ S_3(\xi) &= S_2'(\xi) = -\frac{1}{\sin \varphi_1} e^{-\alpha_1 \xi} \sin(\beta_1 \xi - \varphi_1); \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

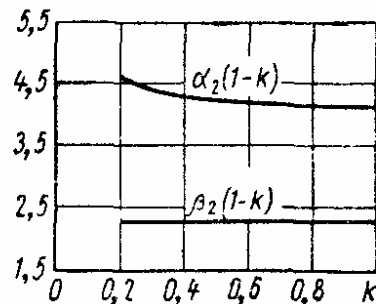


Рис. 11

$$\left. \begin{aligned} S_4(\xi) = S_3(\xi) &= \frac{m_1 \sqrt{2}}{\sin \varphi_1} e^{-\alpha_1 \xi} \sin(\beta_1 \xi - 2\varphi_1); \\ S_5(\xi) = S_4'(\xi) &= -\frac{2m_1^2}{\sin \varphi_1} e^{-\alpha_1 \xi} \sin(\beta_1 \xi - 3\varphi_1), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где $\varphi_1 = \arctg \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

Также введем функции $T_1 \div T_5$, отличающиеся от функций $S_1 \div S_5$ заменой $\alpha_1; \beta_1; m_1$ на $\alpha_2; \beta_2; m_2$ и являющиеся решениями уравнения (33) без правой части.

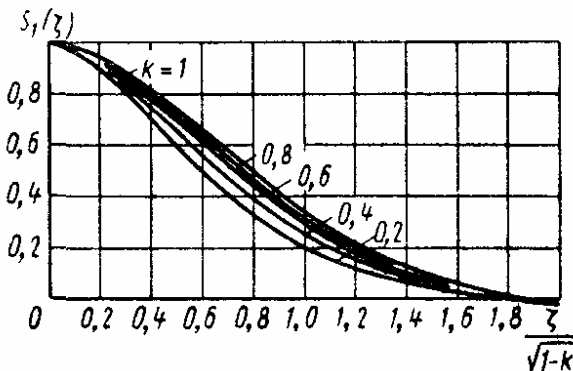


Рис. 12

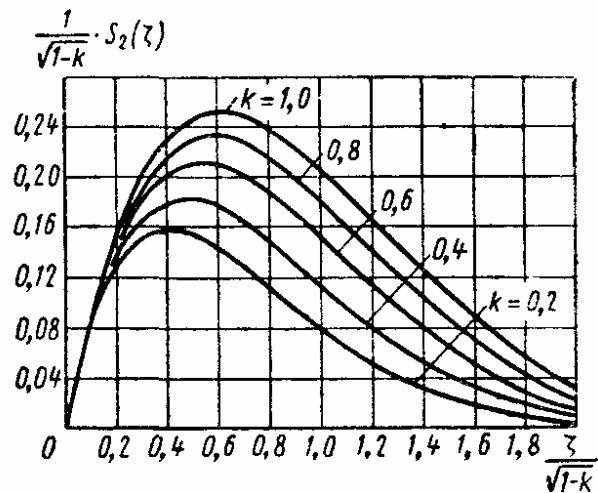


Рис. 13

Графики функций S и T приведены на рис. 12—21.

Выражения функций $Z_1(\xi)$ и $Z_2(\xi)$ для длинного цилиндра, на который воздействуют элементарные нормальные и касательные на-

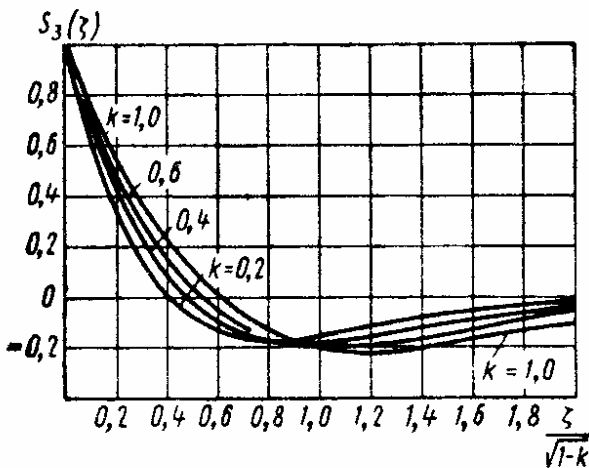


Рис. 14

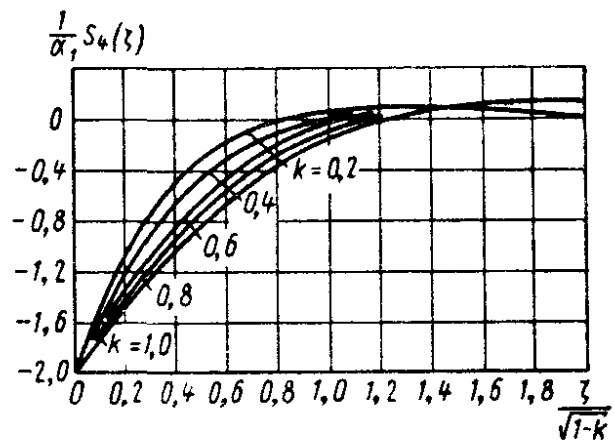
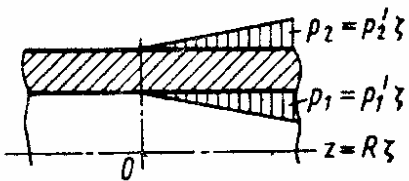
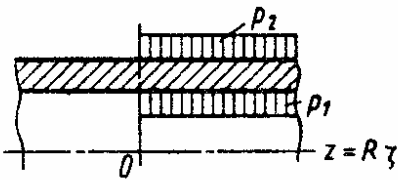
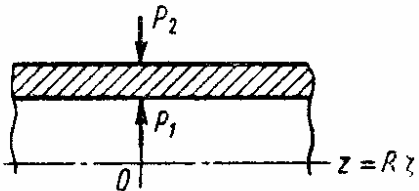
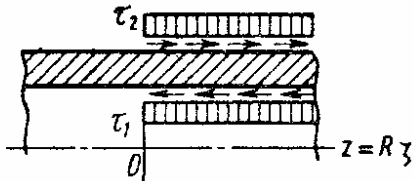


Рис. 15

грузки, приведены в табл. 4 [3]. Эти выражения представляют собой частные решения уравнений (32) и (33) при данном виде нагрузки.

Все рассмотренные здесь виды нагрузок имеют в начале координат особенность (излом или скачок эпюры давления, сосредоточенная нагрузка). С удалением от сечения $\xi = 0$ функции Z быстро затухают.

4. Выражения функций Z для длинного цилиндра

Схема нагружения	Формулы *
	$Z_1 = \frac{-n_1 p_1' + q_1 p_2'}{4\alpha_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)} S_1 (\pm \xi),$ $Z_2 = \frac{-n_2 p_1' + q_2 p_2'}{4\alpha_2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2)} T_1 (\pm \xi)$
	$Z_1 = \pm \frac{n_1 p_1 - q_1 p_2}{4\alpha_1} S_2 (\pm \xi);$ $Z_2 = \pm \frac{n_2 p_1 - q_2 p_2}{4\alpha_2} T_2 (\pm \xi)$
	$Z_1 = \frac{n_1 P_1 - q_1 P_2}{4\alpha_1 R} S_3 (\pm \xi),$ $Z_2 = \frac{n_2 P_1 - q_2 P_2}{4\alpha_2 R} T_3 (\pm \xi)$
	$Z_1 = \frac{a_1 \tau_1 + b_1 \tau_2}{4\alpha_1 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)} S_1 (\pm \xi) -$ $- \frac{c_1 \tau_1 + d_1 \tau_2}{4\alpha_1} S_3 (\pm \xi)$ $Z_2 = \frac{a_2 \tau_1 + b_2 \tau_2}{4\alpha_2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2)} T_1 (\pm \xi) -$ $- \frac{c_2 \tau_1 + d_2 \tau_2}{4\alpha_2} T_3 (\pm \xi)$

* Верхний знак относится к правой части цилиндра ($\xi > 0$), нижний — к левой ($\xi < 0$).

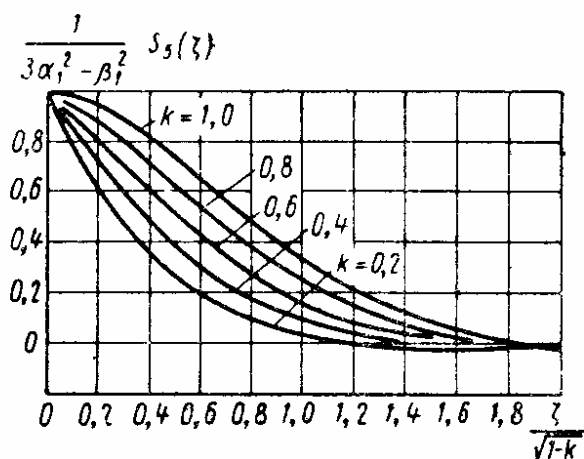


Рис. 16

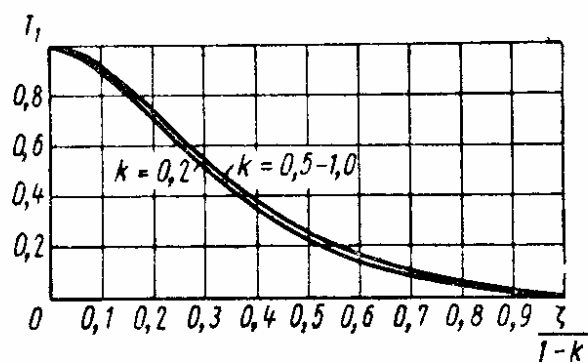


Рис. 17

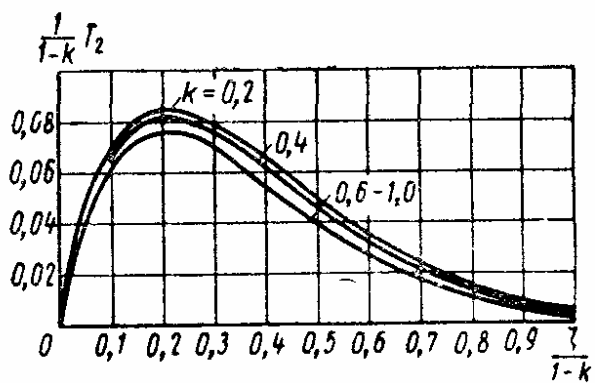


Рис. 18

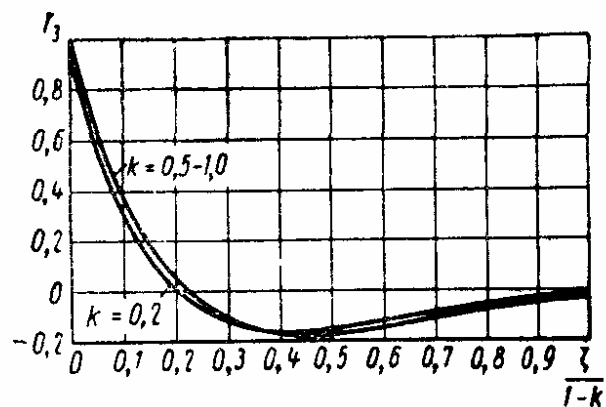


Рис. 19

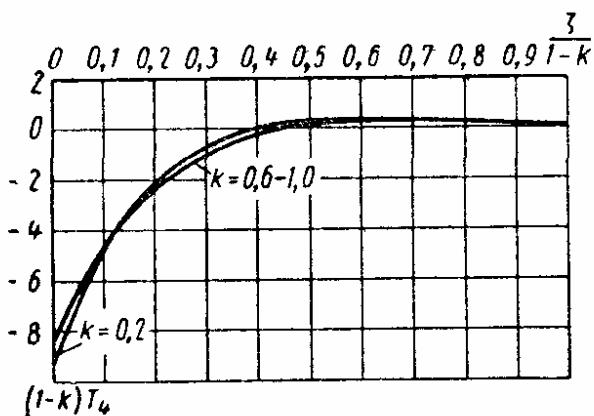


Рис. 20

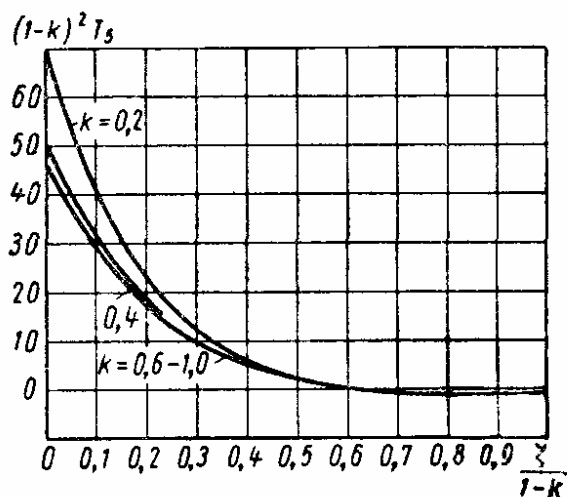


Рис. 21

Поэтому, вдали от мест, где нагрузки имеют особенности, т. е. на расстоянии, большем $2R\sqrt{1-k}$, напряжения и деформации определяются формулами Ляме.

Произвольный закон распределения осесимметричных нагрузок на боковых поверхностях цилиндра может быть всегда аппроксимирован как кусочно-линейный, содержащий конечное число изломов и скачков нагрузки. При этом функции Z , обусловленные действием всей нагрузки, получаются суммированием функций, соответствующих каждой из особенностей нагрузки.

После определения функций Z напряжения и радиальные перемещения можно вычислить по формулам (30). Производные функций Z вычисляются с учетом дифференциальных соотношений между функциями $S_1 \div S_5$ и $T_1 \div T_5$, выражаемых формулами (35). Для практических вычислений формулы (30) можно упростить. Если предположить, что на каждом участке касательные нагрузки постоянны (т. е. τ_1 и τ_2 изменяются по ступенчатому закону), то $\Phi_1''(\xi) = \Phi''(\xi) = 0$ на каждом участке и соответствующие слагаемые из формул (30) выпадают.

Далее, эти формулы приобретают особенно простой вид при расчете напряжений у внутренней ($\rho = k$) и наружной ($\rho = 1$) поверхностей цилиндра.

При $\rho = k$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_1(\xi); \quad \tau_{rz} = \tau_1(\xi); \\ \sigma_z &= \frac{N}{F} - Z_1(\xi) V_1''(k) - Z_2(\xi) V_2''(k); \\ u \frac{E}{r_1} &= p_1(\xi) \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu \right) - p_2(\xi) \frac{2}{1-k^2} + \\ &+ Z_1''(\xi) 2J_1 + Z_2''(\xi) 2J_2 - \nu \frac{N}{F}; \\ \sigma_t &= u \frac{E}{r_1} + \nu \sigma_z - \nu p_1(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

При $\rho = 1$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_2(\xi); \quad \tau_{rz} = \tau_2(\xi); \\ \sigma_z &= \frac{N}{F} - Z_1(\xi) V_1'(1) - Z_2(\xi) V_2''(1); \\ u \frac{E}{R} &= p_1(\xi) \frac{2k^2}{1-k^2} - p_2(\xi) \left(\frac{1-k^2}{1-k^2} + \nu \right) + \\ &+ Z_1''(\xi) K_1 + Z_2''(\xi) K_2 - \nu \frac{N}{F}; \\ \sigma_t &= u \frac{E}{R} - \nu p_2(\xi) + \nu \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

В формулах (36) и (37) N — нормальная сила в данном поперечном сечении цилиндра, определяемая из уравнений статики,

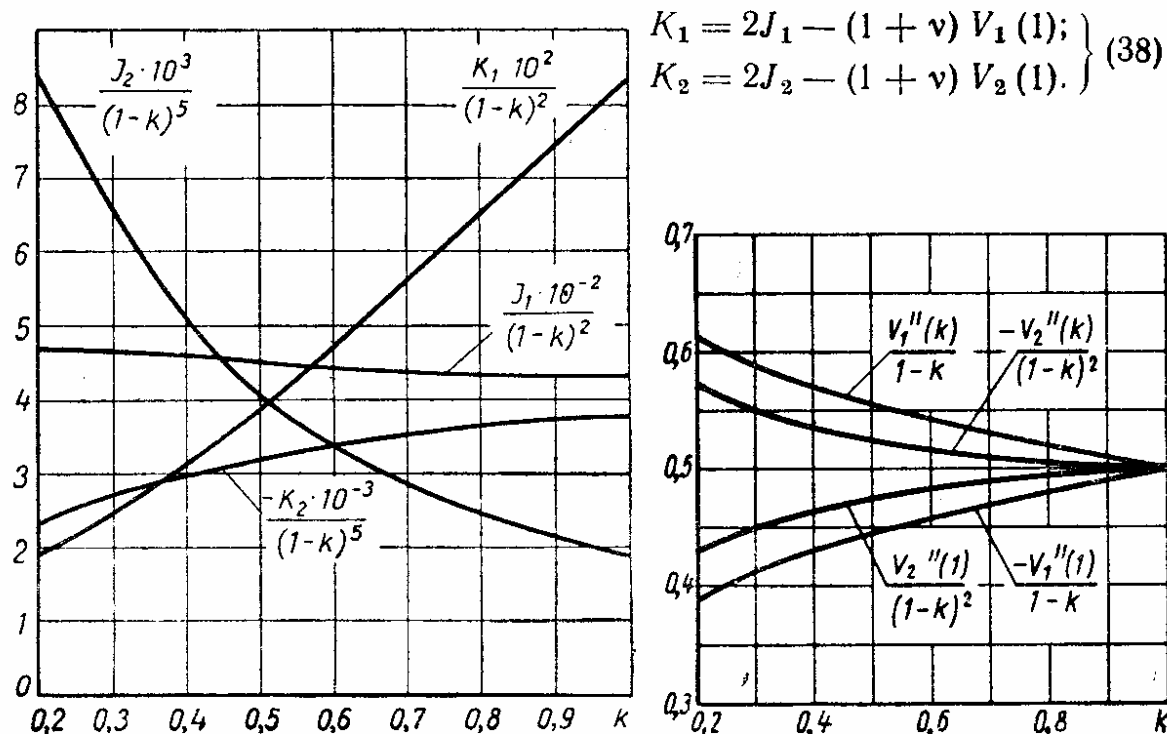


Рис. 22

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= 2J_1 - (1 + \nu) V_1(1); \\ K_2 &= 2J_2 - (1 + \nu) V_2(1). \end{aligned} \right\} (38)$$

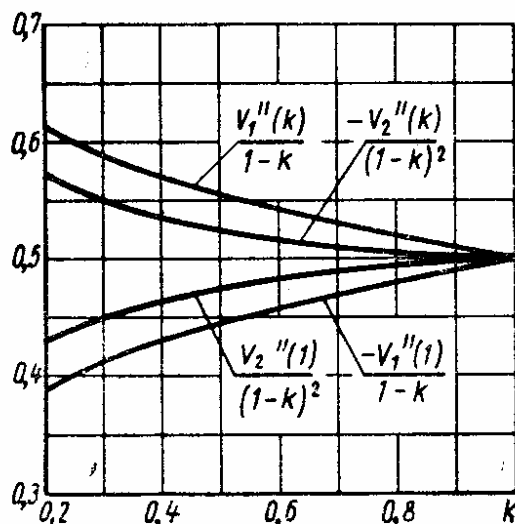


Рис. 23

Графики зависимости от k величин $J_1 K_1 V_1''(\rho) V_1''(1)$ и соответствующих величин с индексом 2 показаны на рис. 22 и 23.

5. Значения функций V_i'' и K_i

Функция	$k = 0,2$	$k = 0,4$	$k = 0,5$	$k = 0,6$	$k = 0,8$	$k = 1,0$
$\frac{1}{1-k} V_1''(k)$	0,611	0,572	0,556	0,541	0,519	0,500
$\frac{1}{1-k} V_1''(1)$	-0,389	-0,428	-0,444	-0,459	-0,481	-0,500
$\frac{1}{(1-k)^2} V_2''(k)$	0,571	0,536	0,526	0,519	0,508	0,500
$\frac{1}{(1-k)^2} V_2''(1)$	0,429	0,464	0,474	0,481	0,482	0,500
$\frac{10^2}{(1-k)^2} K_1$	1,910	3,148	3,890	4,702	6,478	8,333
$\frac{10^3}{(1-k)^5} K_2$	-2,298	-2,982	-3,182	-3,369	-3,627	-3,792

Цилиндр конечной длины. Выполнение условий на торцах

Если особенности внешней нагрузки (изломы или скачки эпюры давления) удалены от торцов цилиндра более чем на $2R \sqrt{1-k}$, а касательная нагрузка вблизи торцов отсутствует, то построенные выше решения для бесконечного цилиндра оставляют торцы практически ненагруженными. Следовательно, в этом случае граничные условия на свободных торцах выполняются автоматически.

В противном случае формулы (30), примененные к торцовым сечениям, показывают наличие на них нормальных напряжений σ_z и касательных τ_{rz} . Если, в действительности, торцы свободны, то, чтобы выполнить граничные условия, надо на решение, полученное для бесконечного цилиндра, наложить решение задачи, отвечающее нагрузке на торцах, равной σ_z и τ_{rz} с обратным знаком.

В связи с этим необходимо рассмотреть нагружение цилиндра нагрузкой на торцах.

Так как решения однородных уравнений (32) и (33) являются быстро затухающими, достаточно рассмотреть полубесконечный цилиндр с нагрузкой на торце.

Если на торце $\xi = 0$ имеются касательные $\tau_0(\rho)$ и нормальные $\sigma_0(\rho)$ нагрузки, распределенные по закону

$$\tau_0(\rho) = Q_1 V_1'(\rho) + Q_2 V_2'(\rho); \quad (39)$$

$$\sigma_0(\rho) = M_1 \frac{1}{\rho} (\rho V_1') + M_2 \frac{1}{\rho} (\rho V_2')', \quad (40)$$

где Q_1, Q_2, M_1, M_2 — постоянные, то выражение функций Z_1 и Z_2 имеет вид [6]

$$\left. \begin{aligned} Z_1(\xi) &= M_1 S_1(\xi) + Q_1 S_2(\xi); \\ Z_2(\xi) &= M_2 T_1(\xi) + Q_2 T_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Функции S и T определяют формулами (35).

Если действительный закон распределения торцовых нагрузок $\tau_0(\rho)$ и $\sigma_0(\rho)$ отличается от даваемого формулами (39) и (40), он может быть представлен в этой же форме приближенно, причем

$$Q_1 = \frac{1}{L_{11}} \int_k^1 \tau_0(\rho) V_1' \rho d\rho; \quad Q_2 = \frac{1}{L_{12}} \int_k^1 \tau_0(\rho) V_2' \rho d\rho;$$

$$M_1 = \frac{1}{L_{21}} \int_k^1 \sigma_0(\rho) (\rho V_1')' d\rho; \quad M_2 = \frac{1}{L_{22}} \int_k^1 \sigma_0(\rho) (\rho V_2')' d\rho;$$

здесь

$$L_{11} = \int_k^1 (V_1')^2 \rho d\rho; \quad L_{12} = \int_k^1 (V_2')^2 \rho d\rho;$$

$$L_{21} = \int_k^1 [(\rho V_1')']^2 \frac{d\rho}{\rho}; \quad L_{22} = \int_k^1 [(\rho V_2')']^2 \frac{d\rho}{\rho}.$$

Таким образом, с помощью решений (41) однородных уравнений можно сравнительно легко приближенно выполнить силовые граничные условия на торцах.

Значительно сложнее выполнить геометрические граничные условия. В связи с приближенностью решения последние можно выполнить только интегрально. Так, на заделанном торце условия $u(\rho) = 0$ и $w(\rho) = 0$ должны быть заменены интегральными

$$\int_k^1 u(\rho) V_1' \rho d\rho = 0; \quad \int_k^1 u(\rho) V_2' \rho d\rho = 0; \quad (42)$$

$$\int_k^1 w(\rho) (\rho V_1')' d\rho = 0; \quad \int_k^1 w(\rho) (\rho V_2')' d\rho = 0. \quad (43)$$

При этом величину u определяют по формуле (30). Осевое перемещение w не может быть найдено непосредственно, так как уравнение совместности (8) не выполняется, однако интегралы, входящие в выражения (43), определяются из естественных граничных условий, возникающих при рассмотрении минимума энергии деформации. В наиболее простом случае, когда давления p_1 и p_2 около торца не изменяются

$\left(\frac{dp_1}{d\xi} = \frac{dp_2}{d\xi} = 0 \right)_{\xi=0}$, а касательные нагрузки отсутствуют ($\tau_1 = \tau_2 = 0$) $_{\xi=0}$, условия (43) эквивалентны условиям

$$Z_1''' - 4s_1^2 \frac{2-\nu}{2(1-\nu)} Z_1' = 0; \quad Z_2''' - 4s_2^2 \frac{2-\nu}{2(1-\nu)} Z_2' = 0. \quad (44)$$

Примеры расчета и некоторые числовые результаты

Эпюры напряжений и радиальных перемещений для длинного полого цилиндра с отношением $k = \frac{r_1}{R} = 0,5$, нагруженного равномерным внешним давлением в правой части ($\xi > 0$) и свободного от нагрузки в левой части ($\xi < 0$), показаны на рис. 24.

Функции $Z_1(\xi)$ и $Z_2(\xi)$ рассчитаны по формулам табл. 4 (схема 2), а напряжения и перемещения — по формулам (36) и (37). Как видно из эпюр, влияние скачка давления распространяется в обе стороны примерно на $1,2R$; вне этой зоны напряжения и деформации определяют по формулам Ляме.

Следует обратить внимание на то, что в точке разрыва внешней нагрузки ($\xi = 0, \rho = 1$) напряжения также разрывны. Разрыв напряжения σ_z равен p , а напряжения $\sigma_t = 2\nu p$. Так как решение приближенное, оно дает непрерывное распределение σ_z . Вероятная форма точной зависимости показана пунктиром.

Аналогичные эпюры для цилиндра с соотношением радиусов $k = 0,7$ показаны на рис. 25.

Значение эпюр, приведенных на рис. 24 и 25, состоит в том, что их можно использовать как линии влияния для расчета цилиндра при нормальной нагрузке, распределенной по произвольному закону на наружной поверхности. Для этого эпюру давления надо аппроксимировать

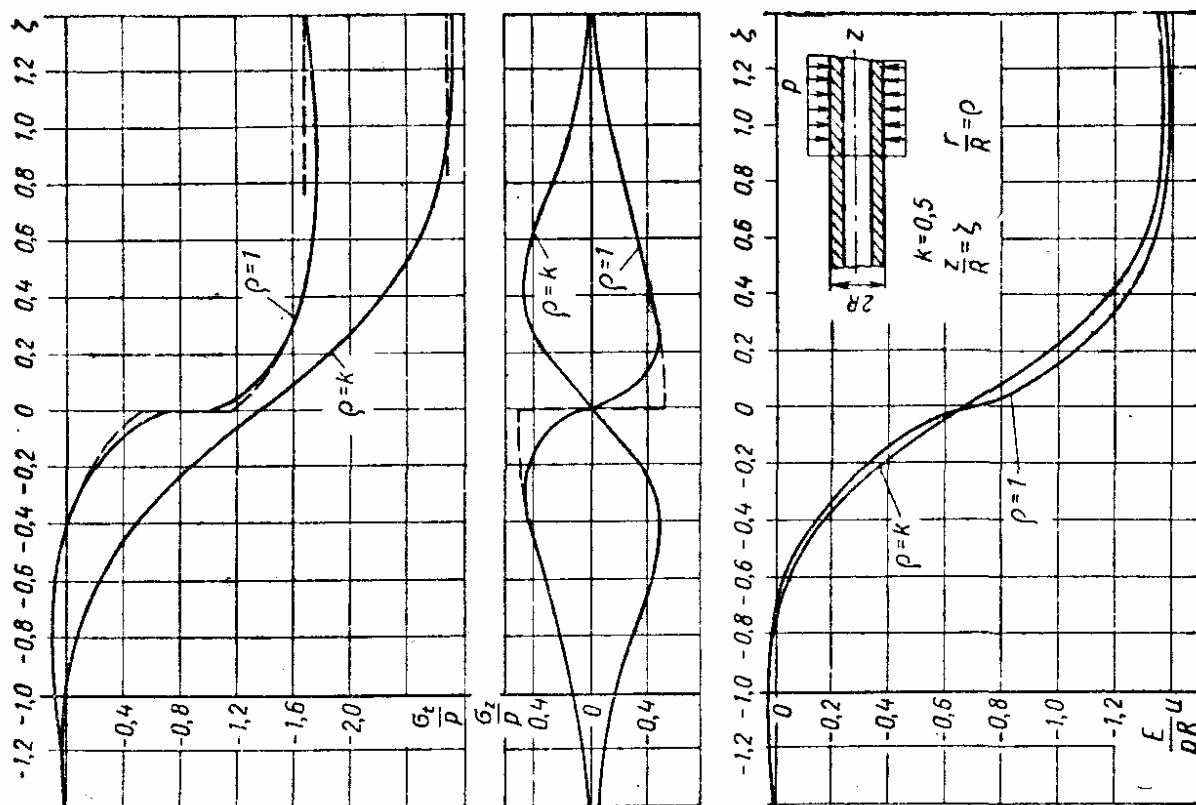


Рис. 25

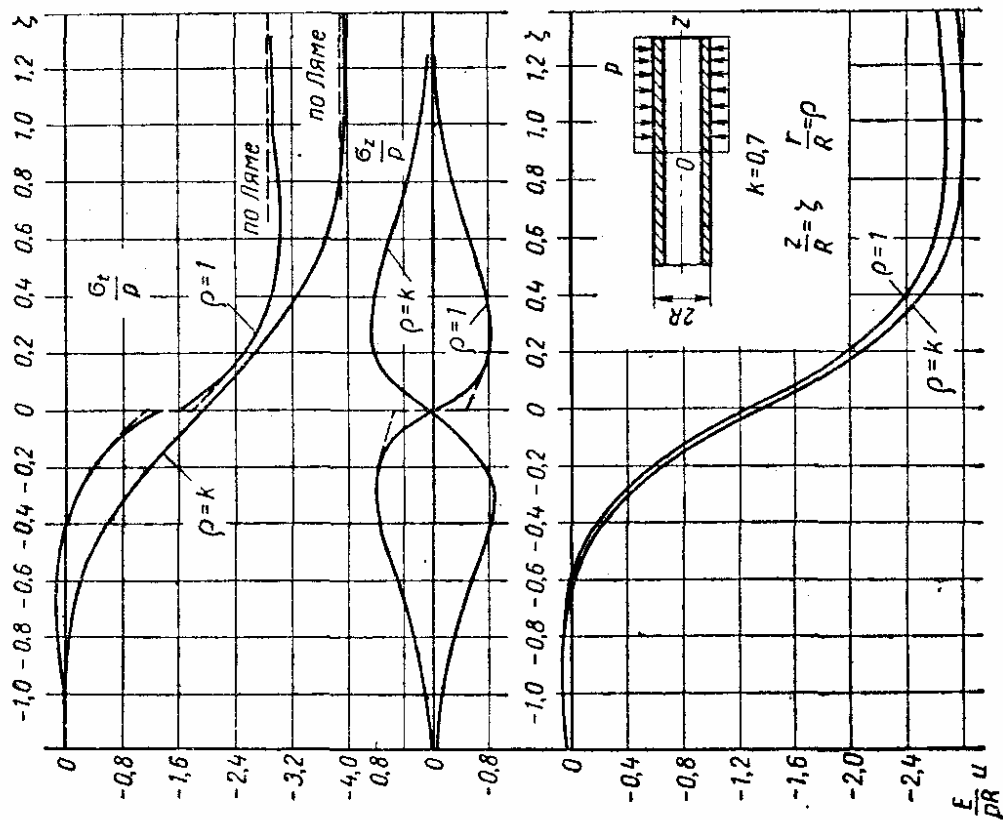


Рис. 24

ступенчатым графиком и суммировать напряжения и перемещения, вызываемые каждой из элементарных нагрузок, на которые подразделяется заданная нагрузка.

Бесконечный цилиндр, нагруженный постоянным давлением на участке боковой поверхности (рис. 26). В связи с симметрией задачи достаточно рассмотреть только правую часть цилиндра ($\xi > 0$). Функции Z_1 и Z_2

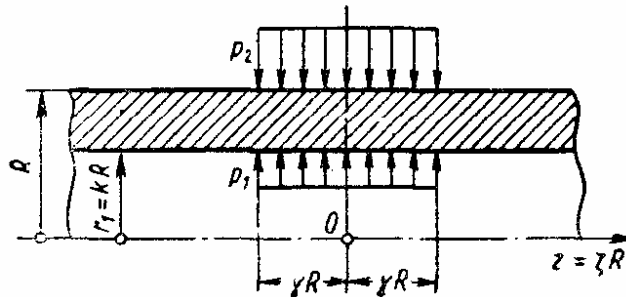


Рис. 26

определяют по формулам:
при $\xi < \gamma$

$$Z_1 = \frac{-n_1 p_1 + q_1 p_2}{4\alpha_1} \times \\ \times [-S_2(\gamma + \xi) - S_2(\gamma - \xi)];$$

$$Z_2 = \frac{-n_2 p_1 + q_2 p_2}{4\alpha_2} \times \\ \times [-T_2(\gamma + \xi) - T_2(\gamma - \xi)];$$

при $\xi > \gamma$

$$Z_1 = \frac{-n_1 p_1 + q_1 p_2}{4\alpha_1} [-S_2(\gamma + \xi) + S_2(\xi - \gamma)];$$

$$Z_2 = \frac{-n_2 p_1 + q_2 p_2}{4\alpha_2} [-T_2(\gamma + \xi) + T_2(\xi - \gamma)].$$

На основании этих значений функций Z по формулам (36) и (37) рассчитаны радиальные перемещения u и напряжения σ_z в сечении $\xi = 0$

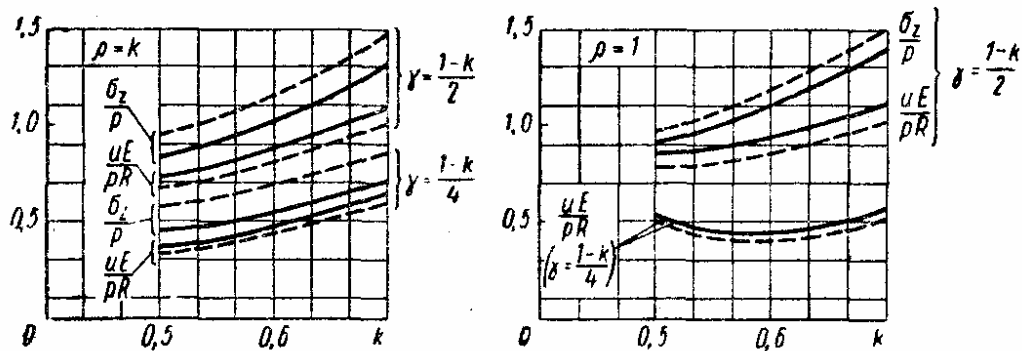


Рис. 27

при нагружении снаружи ($p_1 = 0$, $p_2 = p$) и при длине нагруженного участка, равной толщине стенки ($\gamma = \frac{1-k}{2}$) и половине этой толщины ($\gamma = \frac{1-k}{4}$).

Графики зависимости соответствующих величин от k приведены на рис. 27. Пунктирными линиями показаны результаты вычислений Г. С. Шапиро [8].

Полубесконечный цилиндр, нагруженный давлением на участке вблизи торца. В этом случае (рис. 28) решение получается наложением решений, соответствующих загрузке бесконечного цилиндра на части длины и загрузке торца полубесконечного цилиндра. Величины ком-

пенсирующих нагрузок на торце подбирают так, чтобы суммарные напряжения на торце отсутствовали.

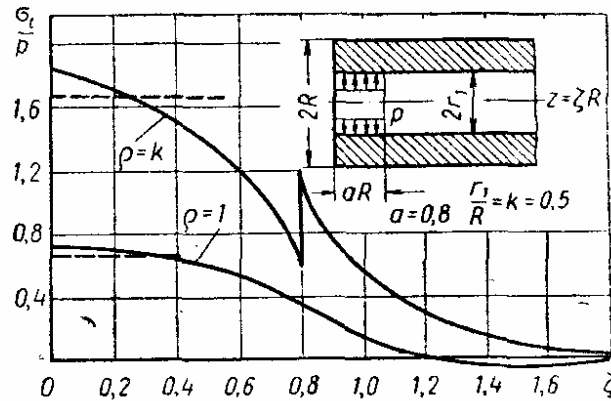


Рис. 28

Суммарные выражения для функций Z_1 и Z_2 имеют вид:
при $0 < \zeta < a$

$$Z_1 = \frac{n_1 p_1 - q_1 p_2}{4\alpha_1} [S_2(a - \zeta) - S_3(a) S_2(\zeta) - S_2(a) S_1(\zeta)];$$

$$Z_2 = \frac{n_2 p_1 - q_2 p_2}{4\alpha_2} [T_2(a - \zeta) - T_3(a) T_2(\zeta) - T_2(a) T_1(\zeta)];$$

при $\zeta > a$

$$Z_1 = \frac{n_1 p_1 - q_1 p_2}{4\alpha_1} [-S_2(\zeta - a) - S_3(a) S_2(\zeta) - S_2(a) S_1(\zeta)];$$

$$Z_2 = \frac{n_2 p_1 - q_2 p_2}{4\alpha_2} [T_2(\zeta - a) - T_3(a) T_2(\zeta) - T_2(a) T_1(\zeta)].$$

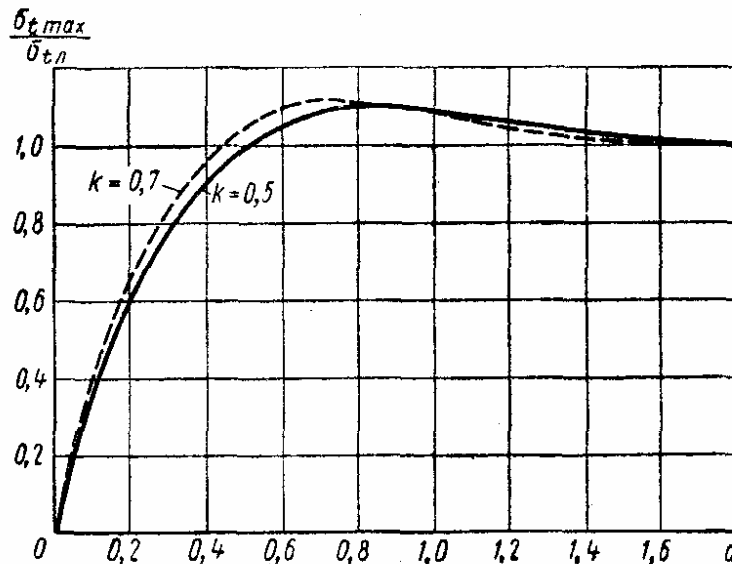


Рис. 29

Для цилиндра с отношением радиусов $k = 0.5$, нагруженного только внутренним давлением ($p_1 = p$, $p_2 = 0$) на длине $0.8R$, эпюры окружных напряжений показаны на рис. 28 (штриховыми линиями отмечен уровень напряжений по формулам Ляме). На рис. 29 приведены

значения максимальных напряжений σ_t в зависимости от длины загруженного участка, отнесенные

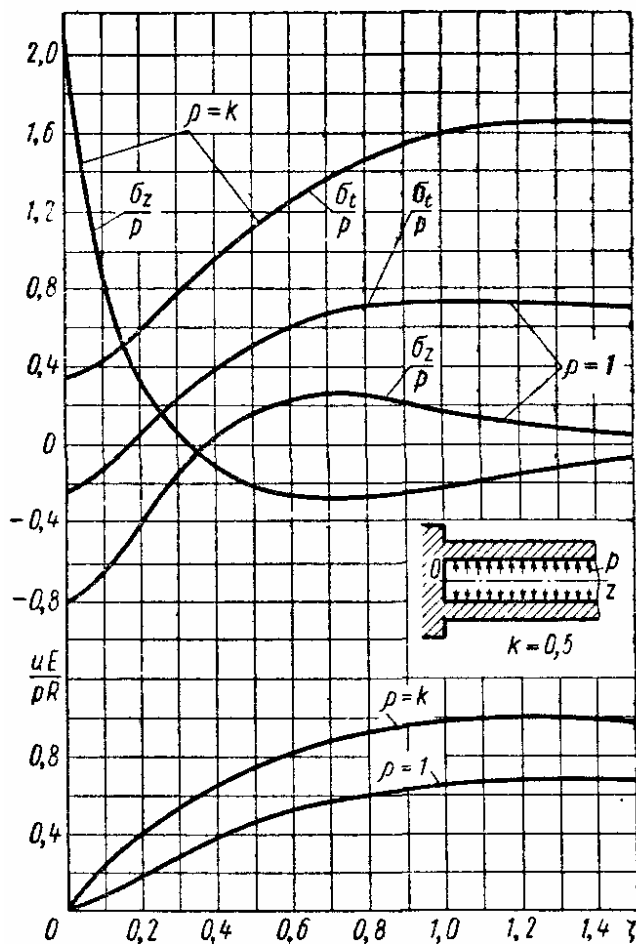


Рис. 30

$$\kappa \sigma_{t,2} = p \frac{1 + k^2}{1 - k^2}.$$

Цилиндр с заделанным торцом. Эпюры напряжений σ_t и σ_z радиальных перемещений и для цилиндра с заделанным краем [6] показаны на рис. 30. При расчете использован не энергетический критерий (42) отсутствия перемещений в заделке, а выполнялось требование равенства нулю перемещения u при $\rho = k$ и $\rho = 1$.

Следует иметь в виду, что эпюры на рис. 30 дают представление о распределении напряжений лишь на некотором удалении от заделки.

Около самой заделки имеет место концентрация напряжений во входящих углах, не учитываемая приближенным решением. Действительные напряжения здесь зависят от размеров галтелей и реального осуществления заделки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Расчет симметрично нагруженных цилиндрических деталей. В кн. «Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении» под ред. С. Д. Пономарева. М., Машгиз, 1950.
2. Бояршинов С. В. Расчет толстостенных полых цилиндров, находящихся под действием произвольной осесимметричной нагрузки. Сб. «Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций» (МВТУ, вып. 26). М., Машгиз, 1953.
3. Горский В. Г. Расчет полых цилиндров, находящихся под действием осесимметричных касательных нагрузок. «Расчеты на прочность», сб. 9, М., Машгиз, 1963.
4. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
5. Лурье А. И. Пространственная задача теории упругости. М., ГИТТЛ, 1955.
6. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. II, гл. V, М., Машгиз, 1958.
7. Прокопов В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Труды ЛПИ, № 2, 1950.
8. Шапиро Г. С. О сжатии бесконечного полого цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности. Прикладная математика и механика, т. VII, № 5, 1943.
9. Rankin A. Shrink-Fit stresses and Deformations, Journal of Appl. Mech., 1944, N 3, p A 77.
10. Filon L. On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under certain practical Systems of Loads, Phil Trans of the Royal Soc, London, Ser A, 198, 1902.
11. Barton M., The circular Cylinder with a Band of a finite Length on the Surface, Journ of Appl. Mech. 1941, N 3.

А

Анизотропия материалов — Влияние на концентрацию напряжений около отверстий 333—335, 349—351

Д

Детали — Контакт силовой — см. *Контакт деталей силовой*

Деформации — см. также под наименованиями объектов, например: *Оболочки вращения переменной толщины* — Деформации; *Пластинки из стеклопластиков ориентированных* — Деформации

— упруго-пластические — Учет при расчете оболочек 97—113; — Учет при расчете оболочек вращения переменной толщины 121, 133—136; — Учет при расчете пластинок круглых переменной толщины 121, 126, 127

Диски переменной толщины — Изгиб и растяжение 123

— Изгиб с учетом влияния сил в основной поверхности 124, 125

Днища эллиптические — Расчет 25, 26

З

Заполнители 245

— Напряжения нормальные и касательные 290—294

— Параметры упругие приведенные 256—267

— Прочность — Проверка 248, 256, 309—311

— — Расчет с учетом начальных технологических несовершенств 254, 255, 309

Заполнители из пенопласта (сплошные изотропные) 245, 246

— Жесткости при сжатии и изгибе 270

— Напряжения нормальные и касательные 290—293, 310, 311

— Параметры оптимальные 311, 312, 314

— Параметры упругие приведенные 247, 253

— Прочность — Проверка 310, 311

— Расчет на местную устойчивость элементов 254, 305, 306

— Расчет на прочность 248

Заполнители из пенопласта армированного 247, 265

— Жесткости при сжатии и изгибе 270, 271, 274

— Модули сдвига и упругости нормальной приведенные 265, 266

— Модуль секущий приведенный 267

— Напряжения нормальные и касательные 290, 291, 293, 310, 311

— Параметры оптимальные 311, 313, 314

— Параметры упругие приведенные 247, 253, 265—267

— Прочность — Проверка 310, 311

— Расчет на местную устойчивость элементов 254, 306—308

— Расчет на прочность 248

Заполнители пилообразные 258

— Модули сдвига приведенные 258, 263

— Модули упругости нормальной приведенные 260

— Расчет на местную устойчивость элементов 301, 305

Заполнители складчатые 245, 257

— Жесткости при сжатии и изгибе 270, 278

— Модули сдвига приведенные 261—264

— Модули упругости нормальной приведенные 265

— Напряжения нормальные и касательные 290—293, 310

— Параметры упругие приведенные 247, 253, 254, 260—265

— Прочность — Проверка 310

— Расчет на местную устойчивость элементов 304, 305

Заполнители сотовые 245, 257

— Жесткости при сжатии и изгибе 270, 278, 280, 321

— Модули сдвига приведенные 256

— Модули упругости нормальной приведенные 257, 258

— Напряжения нормальные и касательные 290—293, 309

— Параметры оптимальные 314—319

— Параметры упругие приведенные 247, 253, 254, 256—258

— Прочность — Проверка 309

— Расчет на местную устойчивость элементов 254, 297—299, 321—323

— Расчет проверочный — Примеры 320—324

— Усилия сдвига 298

Заполнители типа гофра 245, 257

— Жесткости при сжатии и изгибе 270, 278

— Модули сдвига приведенные 258, 259

— Модули упругости нормальной приведенные 260

- Напряжения нормальные и касательные 290—283, 310
- Параметры упругие приведенные 247, 253, 254, 258—260
- Прочность — Проверка 310
- Расчет на местную устойчивость элементов 254, 300—304

- Зубчатые колеса цилиндрические** — Давления наибольшие между сцепляющимися зубьями — Расчет 410—412
- Зубья — Кривизны профилей 411

И

- Изгиб** — см. также под наименованиями объектов, например: *Пластины круглые переменной толщины* — Изгиб; *Плиты тонкие* — Изгиб
- цилиндрический пластинок трехслойных 268—273, 290—292, 311, 314
- цилиндрический плит тонких 349, 361, 363

К

- Кольца круговые** — см. *Круговые кольца*
- Компенсаторы линзовые** — Расчет 34—38
- Контакт деталей силовой** 381
- Деформации соприкасающихся тел 383—394
- Кривизны соприкасающихся тел 383—385, 389
- — Расчет — Примеры 408, 409, 411, 413, 414
- Напряженное состояние 396—404
- — Влияние касательных сил 405, 406
- Перемещения граничных точек соприкасающихся тел 382, 383, 385—388
- Площадка контакта — Давления — Распределение 387, 390
- — Давления наибольшие 387, 389, 391—393
- — — Расчет — Примеры 408, 410—412, 414
- Площадка контакта в виде полоски — Напряжения главные и касательные 402, 403, 405, 412
- — Напряжения эквивалентные 404
- — Размеры 391, 393
- — Распределение давлений 390
- Площадка контакта круговая 390, 396
- — Напряжения главные и касательные 401, 402
- — Напряжения нормальные 397
- — Радиус 392, 393, 395
- Площадка контакта эллиптическая 386, 396
- — Напряжения главные и касательные 398—402
- — Напряжения нормальные 397, 400
- — Размеры полуосей 389, 392—394, 408—410

- — Распределение давлений 387, 390
- — Эксцентриситет относительный 388, 389
- Расстояния между соответствующими точками соприкасающихся тел 383, 385, 386
- Сближение соприкасающихся тел 388, 389, 391—394, 407
- Теория 381—394
- — Результаты проверки экспериментальной 395
- — Уравнения 382, 384, 386—388

- Концентрация напряжений в вершинах полостей эллипсоидальных** 376—378
- — около двух отверстий квадратного и эллиптического 337, 338
- — около двух отверстий круговых 336, 337

- Концентрация напряжений около отверстий** 327

- Влияние анизотропии материалов 333—335, 349—351
- Влияние вязко-упругих свойств материала 347—351
- Влияние нелинейности общей 359—361
- Влияние нелинейности физической 356—359
- Влияние расположения отверстий 330—333, 338—340
- Задачи динамические 363—366
- Задачи моментной теории упругости 340—343
- Задачи нелинейные (упругие) 356—361
- Особенности при стеклопластике ориентированных 349—351
- Появление пластических зон 352—356
- Появление трещин 351, 352
- Уменьшение с помощью подкрепляющих колец 343—346, 362, 363

- Концентрация напряжений около отверстия квадратного в оболочках вращения** 368, 369, 372—374

- в пластинках бесконечных Влияние нелинейности 359; — Задачи динамические 365, 366; — Коэффициенты при растяжении одноосном 329, 333—335, 337, 338, 344, 346; — Появление пластических зон и трещин 351, 356
- в плитах тонких 348, 362
- в полосах широких 331

- Концентрация напряжений около отверстия кругового в оболочках вращения** 366, 367, 370, 374, 375
- в плитах тонких 348, 361, 363

- Концентрация напряжений около отверстия кругового в пластинках бесконечных** — Влияние нелинейности общей 360

- Влияние нелинейности физической 357, 358
- Задачи динамические 364, 365
- Задачи моментной теории упругости 341, 342
- Коэффициенты при растяжении двухосном 330, 331, 335

- Коэффициенты при растяжении одноосном 328, 331—334, 336, 337, 341, 342, 349—351
- Появление пластических зон и трещин 351—355

Концентрация напряжений около отверстия кругового в пластинках перфорированных 338—340

- кругового в полосах широких 331, 332, 354
- прямоугольного в пластинках бесконечных 329, 330, 335, 344
- прямоугольного в плитах 362
- прямоугольного в полосах широких 331
- ромбовидного в полосах широких 331, 332
- треугольного в пластинках бесконечных 344
- треугольного в плитах тонких 349
- треугольного в полосах широких 331, 332

Концентрация напряжений около отверстия эллиптического в оболочках вращения 366, 367, 368, 370, 371

- в пластинках бесконечных — Влияние нелинейности 358, 361; — Задачи динамические 365; — Коэффициенты при растяжении двухосном 330, 331; — Коэффициенты при растяжении одноосном 328, 329, 333, 337, 338, 344, 345, 349—351; — Появление пластических зон и трещин 352, 355, 356
- в плитах тонких 361
- в полосах широких 330, 331

Круговые кольца — Применение для подкрепления отверстий — Влияние на уменьшение концентрации напряжений 343—346, 362, 363

- очень жесткие — Применение для подкрепления края оболочек вращения 15, 19, 23
- упругие — Запрессовка в оболочку вращения 33, 34; — Применение для подкрепления края оболочек вращения 19—23; 39—41; — Применение для сопряжения двух оболочек вращения 9—19; — Расчет 7—9

Кольцевые ребра — Применение для подкрепления оболочек конических и цилиндрических 16—19

Крышки сферические — Расчет при подкреплении по краю упругим кольцом 23

М

Материалы — Анизотропия — Влияние на концентрацию напряжений около отверстий 333—335, 349—351

Н

Напряжения — см. также под наименованиями объектов, например: *Панели трехслойные* — Напряжения; *цилиндры толстостенные* — Напряжения

- Концентрация — см. *Концентрация напряжений*
- Релаксация 214, 347, 348

О

Оболочки — Анализ жестко-пластический 100—107

- Нагрузка локальная — Замена сосредоточенной или распределенной по линии 50—53
- Несущая способность — Определение 100—109
- Ползучесть 118, 119
- Ползучесть неустановившаяся 116—119
- Ползучесть установившаяся 114—116
- Расчет при деформациях упруго-пластических 97—113
- Расчет при нагрузках локальных 49—53
- Расчет при нагрузках сосредоточенных 49, 52, 93—95
- Энергия — Диссипация пластическая 104, 111

Оболочки вращения — Напряжения и их концентрация около отверстия квадратного 368, 369, 372—374

- Напряжения и их концентрация около отверстия кругового 366, 367, 370, 374, 375
- Напряжения и их концентрация около отверстия эллиптического 366, 367, 368, 370, 371

Оболочки вращения анизотропные — Эффект краевой 178, 179

- длинные 178; — Расчет 179, 180; — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 181, 183—186; — Расчет при нагрузке силами и моментами 182, 183; — Условия граничные 181
- конические — Перемещения и силы внутренние 163, 164; — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 183, 184
- многослойные 152 — Деформации и перемещения 154, 155; — Напряжения 158; — Слой — Коэффициенты упругости 156, 157; — Теория 152—158; — Толщина приведенная относительная 152, 153; — Уравнения равновесия 154; — Уравнения упругости 155
- однослойные — Перемещения и силы внутренние 159—167; — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 161—163; — Теория безмоментная 158—167
- пластические — Несущая способность 113
- сферические — Перемещения и силы внутренние 165—167; — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 184—186
- цилиндрические — см. *Оболочки цилиндрические анизотропные*

Оболочки вращения из стеклонитей с многослойной намоткой 237; — Наматывание косое 220; — Наматывание по геодезическим линиям 236, 238; — Расход нитей 240; — Расчет 238—241

— консольные — Жесткость при подкреплении по краю упругим кольцом 39—41; — Напряжения местные 62—65; — Расчет при нагрузке обратносимметричной 41—43

Оболочки вращения ортотропные многослойные 167

— Деформации 168, 173

— Жесткость 168, 172

— Моменты изгибающие 167, 170, 172, 174

— Напряжения и перемещения 167, 171, 173, 178

— Силы внутренние 167, 172

— Теория 157, 158

— Теория безмоментная 175—178

— Теория при нагружении симметричным 167—175

— — Уравнения — Интегрирование асимптотическое 174—178

— — Уравнения дифференциальные 169, 170, 173, 174

— — Уравнения равновесия 167

— — Уравнения упругости 168

Оболочки вращения ортотропные однослойные — Расчет 173—175; — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 163, 165

— ортотропные цилиндрические — см. *Оболочки цилиндрические ортотропные*

Оболочки вращения переменной толщины 121, 133

— Деформации 134, 140, 142

— Напряжения и перемещения 140, 142, 144, 145

— Поверхность основная 133

— Равновесие элемента — Условия 134

— Расчет — Методы начальных и основных параметров 140, 141

— Расчет при деформациях упругопластических 121, 133—136

— Расчет при сосредоточенных нагрузках 145, 146

— Температурные величины 135

— Уравнения дифференциальные разрешающие 136

— Уравнения интегральные 137—139

— — Матричная форма 139, 140

— Уравнения упругости 135

— Условия краевые 142, 143

Оболочки вращения сетчатые — Теория 232, 235—237

Оболочки вращения составные 7

— Влияние несоосности и различия в диаметрах 45—47

— Запрессовка упругого кольца 33, 34

— Подкрепление по краю очень жестким кольцом 15, 19, 23

— Подкрепление по краю упругим кольцом 19—23, 39—41

— Расчет — Случай обратносимметричный 12, 16, 20, 41, 46

— — Случай симметричный 9—15, 20

— Расчет при заданных краях 15, 19, 23

— Расчет при нагрузках разрывных температурных 26—33

— Сопряжение 24—26

— Сопряжение через упругое кольцо 9—19

Оболочки двухслойные эквивалентные — Расчет 100, 102

— из стеклонитей с многослойной намоткой — Наматывание 220, — 236, 238; — Расход нитей 240; —

Расчет 238—241

— из стеклопластиков ориентированных 211; — Деформации и напряжения 216—219, 227; — Конструкции оптимальные 232—235; — Материалы — см. *Стеклопластики*; — Расчет — Принципы 211, 212, 215, 231, 232; — Расчет приближенный 215—221

— из стеклопластиков ориентированных цилиндрические — Конструкции оптимальные с днищем 233, 234

— из упрочняющегося материала — Анализ пластический 110, 111; — Зависимости между деформациями, моментами и усилиями 97, 98; — Расчет — Методы 99, 100, 107

Оболочки конические — Напряжения и их концентрация около отверстия кругового 374, 375; — Несущая способность 109; — Ползучесть неустановившаяся 118, 119

— анизотропные — Перемещения и силы внутренние 163, 164; — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 183, 184

— из стеклонитей с многослойной намоткой — Расчет 240, 241

— консольные — Жесткость при подкреплении по краю упругим кольцом 39—41

— составные — Расчет с кольцевым ребром 16, 17

Оболочки минимального веса — Проектирование 111—113

Оболочки сферические — Напряжения и их концентрация около отверстия квадратного 368, 369; — Напряжения и их концентрация около отверстия кругового или эллиптического 367, 368; — Несущая способность — Определение 105—107, 109

— анизотропные — Перемещения и силы внутренние 165—167; — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 184—186

— из стеклонитей с многослойной намоткой — Расход нитей 240; — Расчет 238, 239

— составные — Расчет на цилиндрической опоре 43—45; — Расчет при подкреплении по краю упругим кольцом 23; — Расчет при температуре линейно изменяющейся 33

Оболочки торообразные составные — Запрессовка упругого кольца 33, 34

— Расчет 34—38

Оболочки трехслойные 243

- Заполнители — см. *Заполнители*
- Конструктивные особенности 245—247
- Моменты изгибающие и крутящие 248, 249
- Обозначения 243, 244
- Параметры оптимальные 317
- Работа — Особенности 245—247
- Равновесие элемента — Условия 248
- Расчет — Последовательность 256
- Расчет на изгиб поперечный и продольно-поперечный 247, 248, 252
- Расчет на устойчивость общую 247, 248, 252, 253, 268
- Силы перерезывающие 248, 250
- Теория 248—253
- — Уравнения устойчивости 250, 252
- Усилия в срединной поверхности 248, 249
- Условия граничные 251

Оболочки трехслойные цилиндрические — см. *Оболочки цилиндрические трехслойные*

- упруго-идеально-пластические — Расчет 107, 109, 110

Оболочки цилиндрические — Нагрузка локальная; — Замена сосредоточенной или распределенной по линии 51—53

- Накладки подкрепляющие — Выбор при действии момента элементарного 92, 93
- — Выбор при действии нагрузки элементарной 91
- Напряжения и их концентрация около отверстия квадратного 372—374
- Напряжения и их концентрация около отверстия кругового или эллиптического 370, 371
- Напряжения местные под действием моментов равномерно распределенных 65—68
- Напряжения местные под действием моментов сосредоточенных 55—57
- Напряжения местные под действием сил неравномерно распределенных 68
- Напряжения местные под действием сил равномерно распределенных 65—67
- Напряжения местные под действием сил сосредоточенных 53—55
- Несущая способность — Определение 108
- Перемещения при действии сил взаимно уравновешенных 61, 62
- Перемещения при действии сил сосредоточенных 58
- Расчет при деформациях упруго-пластических 100, 102, 103, 109, 110
- Расчет при нагрузках локальных 49, 51—53
- Расчет при нагрузках локальных краевых 62—65
- Расчет при нагрузках локальных сосредоточенных 53—62
- Расчет при нагрузках локальных элементарных 89—93

Оболочки цилиндрические анизотропные — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 181, 182, 190, 191

- круговые — Перемещения и силы внутренние 161—163
- круговые консольные — Перемещения и силы внутренние 162, 189, 190
- круговые многослойные — Напряжения 193, 194; — Теория техническая 192—196
- многослойные — Теория 187, 188
- однослойные — Деформации 189; — Перемещения и силы внутренние 160—163, 189—192; — Теория безмоментная 188—192
- полубесконечные — Расчет при нагрузке силами и моментами 182, 183
- эллиптического поперечного сечения — Расчет 191, 192

Оболочки цилиндрические двухслойные минимального веса — Проектирование 112, 113

- длинные — Перемещения радиальные 59—61
- защемленные на краях — Несущая способность 108
- из стеклопластиков ориентированных — Конструкции оптимальные с днищем 233, 234
- из упрочняющегося материала — Расчет 100
- круговые консольные — Жесткость 40; — Напряжения местные при моментах, приложенных к краю 64, 65; — Напряжения местные при нагрузках или силах, приложенных к краю 62, 63; — Расчет при обратнoсимметричной нагрузке 41—43
- круговые с днищем эллиптическим — Расчет 25, 26

Оболочки цилиндрические круговые составные — Влияние несоосности и различия в диаметрах 45—47

- Расчет при подкреплении упругими кольцами 18, 19
- Расчет при различных коэффициентах расширения частей 30, 31
- Расчет при температуре, изменяющейся кусочно-линейно 27
- Расчет при температуре, изменяющейся линейно 31—33
- Расчет при температуре, изменяющейся скачком 28, 29, 33
- Расчет с кольцевым ребром 17—19

Оболочки цилиндрические ортотропные — Расчет 191, 192; — Расчет при локальных нагрузках 57, 58, 68, 69

- ортотропные многослойные круговые — Коэффициенты жесткостей и упругости 202; — Моменты и силы внутренние 198, 200, 204, 207, 208; — Напряжения в слоях 198, 201, 205, 208, 209; — Расчет 206, 211; — Теория техническая 196—210

- ортотропные однослойные — Расчет 163
- полубесконечные — Несущая способность 102, 103; — Расчет 109, 110
- с днищами жесткими — Несущая способность 109
- Оболочки цилиндрические свободно опертые** — Давление внутреннее — Влияние на напряжениях при элементарных нагрузках 89—91
- Расчет при моменте изгибающем M_x 79—84
- Расчет при моменте изгибающем M_y 84—89
- Расчет при нагрузках элементарных 73—91
- Расчет при силе радиальной равномерно распределенной по отрезку образующей 69—73
- Расчет при силе радиальной элементарной 74—78
- Оболочки цилиндрические трехслойные** 280
- Коэффициенты критические 282, 283, 286, 288
- — Графики 284—289
- Моменты критические 280
- Нагрузки критические 280—282
- Параметры жесткостные и расчетные 280
- Усилия критические 280
- — Интенсивность 282

П

Панели трехслойные 245

- Заполнители — см. *Заполнители*
- Изгиб поперечный и продольно-поперечный 247, 298, 309
- Конструктивные особенности 245—247
- Нагрузки критические 256, 268, 269, 271—273, 296—298, 300, 302—306, 308, 321—323
- Напряжения 256, 273, 299, 303, 322, 323
- Обозначения 243, 244
- Параметры жесткостные 269—271
- Параметры оптимальные — Графики 255, 311—313, 315, 316, 318, 319
- — Определение 248, 255, 256, 311, 314, 317, 320
- Параметры сдвига 269
- Прогибы 256, 297
- Проектирование 246, 247, 256
- Прочность заполнителя — Проверка 309—311
- Работа — Особенности 245—247
- Расчет — Последовательность 256, 266, 296, 297
- Расчет на устойчивость местную элементов 247, 254, 256, 296, 297
- — Особенности при заполнителе из пенопласта 305, 306
- — Особенности при заполнителе из пенопласта армированного 306—308
- — Особенности при заполнителе складчатом 304, 305

- — Особенности при заполнителе соевом 297—299, 321—323
- — Особенности при заполнителе типа гофра 300—304
- — Примеры 321—324
- Расчет на устойчивость общую 247, 266
- — Примеры 320, 321
- Расчет проверочный — Примеры 320—326
- Усилия сжимающие 297, 298, 300, 304—306

Панели трехслойные квадратные плоские — Расчет проверочный при соевом заполнителе 320—324

- прямоугольные плоские — Нагрузки критические 274—279; — Параметры жесткостные 274, 278
- прямоугольные цилиндрические — Нагрузки критические 274—279; — Параметр кривизны 274, 278; — Параметры жесткостные 274, 278; — Параметры оптимальные — Определение 317, 320, 324—326

Пластинки анизотропные — Теория 147—149

- гофрированные 147; — Характеристики 149
- круглые — Расчет при давлении равномерном 151
- прямоугольные — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 149, 150
- эллиптические — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 151

Пластинки бесконечные — Напряжения и их концентрация около двух отверстий 336—338

- Напряжения и их концентрация около отверстия при изгибе или кручении 348, 349
- Напряжения и их концентрация около отверстия при растяжении 327—330, 336, 337
- — Влияние анизотропии материала 333—335, 349—351
- — Влияние нелинейности общей 360, 361
- — Влияние нелинейности физической 357—359
- — Влияние расположения 330, 331
- — Задачи динамические 363—366
- — Задачи моментной теории упругости 340—343
- — Подкрепляющие кольца 344—346
- — Появление пластических зон и трещин 351—356

Пластинки из стеклопластиков ориентированных 211

- Деформации и напряжения 216—219, 227
- Материалы — см. *Стеклопластики*
- Расчет — Принципы 211, 212, 215, 231, 232
- Расчет приближенный 215—221

Пластинки круглые — Нагрузка локальная нормальная — Замена сосредоточенной силой 51

- анизотропные — Расчет 151
- конструктивно-ортотропные 127; — Деформации сдвига 131; — Уравнения дифференциальные 128—130; — Уравнения упругости 128, 131, 132
- Пластины круглые переменной толщины 121**
 - Деформации 121, 122, 125
 - Изгиб 123, 125, 126
 - Изгиб с учетом влияния сил в основной поверхности 124, 125
 - Моменты и усилия окружные и радиальные 122, 125
 - Равновесие элемента — Условия 122, 123
 - Растяжение 123, 126
 - Расчет — Особенности программирования на ЭЦВМ 127
 - Расчет при деформациях упруго-пластических 121, 126, 127
 - Уравнения упругости 122
 - Условия краевые 125
- Пластины круглые трехслойные — Расчет 131—133**
 - перфорированные — Концентрация напряжений около круговых отверстий 338—340
 - прямоугольные анизотропные — Расчет при равномерно распределенной нагрузке 149, 150
 - прямоугольные трехслойные — Изгиб поперечный 294, 295; — Изгиб продольно-поперечный 296; — Напряжения 294
- Пластины трехслойные 243**
 - Заполнители — см. *Заполнители*
 - Изгиб поперечный и продольно-поперечный 293—296
 - Изгиб цилиндрический 268—273, 290—292, 311, 314
 - Конструктивные особенности 245—247
 - Нагрузки критические 256, 268, 269, 271—273, 321
 - Напряжения нормальные во внешних слоях 290—294
 - Обозначения 243, 244
 - Параметры жесткостные 269—271
 - Параметры оптимальные при заполнителе из пенопласта или армированного пенопласта 311—314
 - Параметры оптимальные при заполнителе сотовом 314—319
 - Параметры оптимальные при различных условиях опирания 317, 320
 - Параметры сдвига 269
 - Прогибы 290, 291, 293, 294
 - Прочность заполнителя — Проверка 309—311
 - Работа — Особенности 245—247
 - Равновесие элемента — Условия 248
 - Расчет — Последовательность 256, 296, 297
 - Расчет на устойчивость местную элементов 254, 296—308
 - Расчет на устойчивость общую 248, 253, 256, 268—278, 320, 321
 - Расчет проверочный при сотовом заполнителе — Примеры 320—324
 - Теория 248, 250—253
 - — Уравнения устойчивости общей 250—252
 - Условия граничные 251
- Пластины трехслойные круглые — Расчет 131—133**
 - прямоугольные 294—296
- Пластины эллиптические анизотропные — Расчет при нагрузке равномерно распределенной 151**
- Плиты тонкие — Изгиб 348**
 - Изгиб при отверстии круговом подкрепленном 362, 363
 - Изгиб при отверстии, свободном от внешних усилий 361, 362
 - Изгиб цилиндрический 349, 361, 363
 - Концентрация напряжений около отверстия 348, 349, 363
 - Кручение 348, 363
- Подшипники шариковые радиальные — Давления наибольшие по площадке контакта шарика 408, 410**
 - Кривизны колец и шариков 408, 409
 - Нагрузка — Распределение между шариками 406—408
 - Площадка контакта шарика эллиптическая — Размеры полуосей 408—410
- Получность 347, 348**
 - оболочек 118, 119
 - оболочек неустановившаяся 116—119
 - оболочек установившаяся 114—116
- Полости эллипсоидальные 375**
 - Концентрация напряжений в вершинах 376—378
 - Растяжение трехосное 376
 - Сдвиг чистый 377—379
- Полосы бесконечные анизотропные — Расчет при нагрузке сосредоточенной силой 150**
 - сферические анизотропные однослойные — Перемещения и силы внутренние 166, 167
 - широкие — Концентрация напряжений около кругового отверстия 331, 332; — Появление пластических зон около отверстия 354
- Посадки прессовые — Давления контактные 419, 420**
 - Усилия запрессовки (распрессовки) 420

Р

- Растяжение дисков переменной толщины 123**
 - образцов стеклопластиков ориентированных 221—223, 225—227
 - пластинок бесконечных — см. *Пластины бесконечные* — Напряжения и их концентрация около отверстия при растяжении
 - пластинок круглых переменной толщины 123, 126
 - полостей эллипсоидальных трехосное 375
 - стеклопластиков слоистых 230, 351
- Ребра кольцевые — Применение для подкрепления оболочек конических и цилиндрических 16—19**

Резервуары сферические — Расчет на цилиндрической опоре 43—45
Релаксация напряжений 214, 347, 348

С

Сдвиг 131, 232, 269, 298

— чистый полостей эллипсоидальных 377—379

Сильфоны — Расчет 36, 37

Скрепление цилиндров толстостенных 420—422

Соединения прессовые — Давления контактные 419, 420

— Усилия запрессовки (распрессовка) 420

Сопряжение оболочек вращения составных 9—19, 24—26

Сосуды цилиндрические — Расчет при скачкообразно меняющейся толщине 25

Стеклопластики анизотропные 219, 228; — Деформации — Зависимость от времени 223—226

— армированные — Концентрация напряжений около отверстий 349, 350; — Упругость при изгибе 231, 232

— армированные в двух неортогональных направлениях 220, 221

— армированные звездообразно 228—230

— армированные ортогонально — Коэффициенты упругости 219, 220, 222, 223; — Образцы — Растяжение 227; — Состояние напряженное плоское — Прочность 226—228

Стеклопластики ориентированные 211

— Жесткость 219, 220

— Концентрация напряжений около отверстий 349—351

— Коэффициенты упругости 218, 231

— Моделирование 214, 215

— Напряжения и их релаксация 214

— Образцы — Растяжение 221—223, 225—227

— Связующие — Деформации и их зависимость от времени 211, 212

— Модуль динамических 213

— Свойства упруго-вязкие 213—215

— Сопротивление сдвигу 232

— Состояние напряженное двухосное — Закон Гука 212, 213

— Состояние напряженное плоское — Закон Гука 216

— Упругость 215—221

— Энергия потенциальная 218

Стеклопластики ортотропные 219; — Состояние напряженное одноосное — Упругость 221—223

— слоистые, изотропные при плоском нагружении — Концентрация напряжений около отверстий 351; — Коэффициенты упругости 228, 229; — Прочность и растяжение одноосное 230, 351; — Структура диагональная 229

Тела соприкасающиеся — Деформация 383—394

— Касание 384, 385, 390

— Контакт силовой — см. *Контакт деталей силовой*

— Кривизны 383—385, 389

— — Расчет — Примеры 408, 409, 411, 413, 414

— Напряженное состояние 396—404

— — Влияние касательных сил 405, 406

— Перемещение граничных точек 382, 383, 385—388

— Расстояния между соответствующими точками 383, 385, 386

— Расчет 391—393

— Сближение 388, 389, 391—394, 407

Теория контакта деталей силового 381—394; — Результаты проверки экспериментальной 395; — Уравнения 382, 384, 386—388

— наследственности вязко-упругой — Уравнения Вольтерра 347

Теория оболочек вращения анизотропных многослойных 152—158

— анизотропных однослойных безмоментная 158—167

— ортотропных многослойных 157, 158

— ортотропных многослойных безмоментная 175—178

— ортотропных многослойных при нагружении симметричном 167—175; — Уравнения — Интегрирование асимптотическое 174—178; — Уравнения дифференциальные 169, 170, 173, 174; — Уравнения равновесия 167; — Уравнения упругости 168

— сетчатых 232, 235—237

Теория оболочек трехслойных 248—253; — Уравнения устойчивости 250, 252

— цилиндрических анизотропных многослойных 187, 188

— цилиндрических анизотропных многослойных круговых 192—196

— цилиндрических анизотропных однослойных безмоментная 188—192

— цилиндрических ортотропных многослойных круговых 196—202; — Уравнения — Метод интегрирования 203—210

Теория пластинок анизотропных 147—149

— пластинок трехслойных 248, 250—253; — Уравнения общей устойчивости 250—252

— упругости моментная — Задачи о концентрации напряжений около отверстий 340—343

Трубы анизотропные горизонтальные консольные — Расчет 189, 190

— анизотропные эллиптического поперечного сечения — Расчет 192

— гофрированные — Расчет 34—36

У

**Устойчивость местная элементов за-
полнителей из пенопласта** — Расчет
254, 305, 306

— из пенопласта армированного —
Расчет 254, 306—308

— пилообразных — Расчет 301, 305

— складчатых — Расчет 304, 305

— сотовых — Расчет 254, 297—299,
321—323

— типа гофра — Расчет 254, 300—304

**Устойчивость местная элементов пане-
лей трехслойных** — Расчет — см. *Па-
нели трехслойные* — Расчет на устой-
чивость местную элементов

— местная элементов пластинок трех-
слойных — Расчет 254, 296—308

— общая оболочек трехслойных —
Расчет 247, 248, 252, 253, 268; —
Уравнения 250, 252

— общая панелей трехслойных —
Расчет 247, 266; — Расчет — При-
меры 320, 321

— общая пластинок трехслойных —
Расчет 248, 253, 256, 268—278,
320, 321; — Уравнения 250—252

Ц

Цилиндры — Касание с шаром 385

Цилиндры полые 439 — см. также *Ци-
линдры толстостенные*

— Напряжения и перемещения 440,
441, 447

— — Эпюры 450, 451, 454

— Напряжения касательные 439

— Расчет вариационным методом 439—
454

— Расчет при давлении равномерном
на участке боковой поверхности 450

— Условия на торцах 449, 450

Цилиндры полые бесконечные — Расчет
452

— полубесконечные — Расчет 452, 454

— с заделанным торцом — Напря-
жения и перемещения 454

— соприкасающиеся параллель-
ные — Расчет 391, 393

— соприкасающиеся с взаимно пер-
пендикулярными осями — Расчет
392, 393

Цилиндры сплошные 431

— Деформации при переменной по
длине нагрузке 431—438

— Напряжения вблизи торца 434,
436—438

— Напряжения при переменной по
длине нагрузке 431, 432

— Расчет при нагрузке несинусоидаль-
ной 431—434

— Расчет при нагрузке синусоидаль-
ной 430

**Цилиндры сплошные бесконечной дли-
ны** — Расчет при давлении равно-
мерном на участке боковой поверх-
ности 434, 435

— Расчет при давлении ступенчатом
432, 433

— Расчет при переменной по длине на-
грузке 426

Цилиндры толстостенные 416

— Давления контактные при скрепле-
нии 421, 422

— Деформации при переменной по
длине нагрузке 425—430

— Деформация плоская при постоян-
ном по длине давлении 416—424

— Напряжения 417, 418

— Напряжения при переменной по
длине нагрузке 425—427, 430

— Напряжения при скреплении 421,
422

— Напряжения температурные 422—
424

— Перемещения 418, 419

— Перемещения при переменной по
длине нагрузке 426—428

— Расчет при давлении, изменяющемся
по длине 427, 428

— Расчет при давлении, постоянном по
длине 416—419

— Расчет при нагрузке синусоидаль-
ной 428—430

— Расчет при осевых поверхностных
силах, постоянных по длине 428

— Скрепление 420—422

Ш

Шары — Касание с цилиндром 385

— соприкасающиеся один с дру-
гим — Касание 384; — Расчет 392

Э

Энергия оболочек — Диссипация пла-
стическая 104, 111

— потенциальная стеклопластиков
ориентированных 218

ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ. Справочник, том 2.
Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко

Редактор издательства Д. В. Баженов Технический редактор Т. Ф. Соколова
Корректор А. П. Озерова Художник А. Я. Михайлов

Сдано в производство 11/X 1967 г. Подписано к печати 22/III 1968 г.
Т-04969. Тираж 40 000 экз. Печ. л. 24,36 Бум. л. 7,25. Уч.-изд. л. 31.
Формат 84×108¹/₃₂. Цена 1 р. 84 к. Зак. № 1783

Издательство «МАШИНОСТРОЕНИЕ», Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Ленинград, ул. Моисеенко, 10

Замеченные опечатки в томе 1

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
51	7-я снизу	$+ \sum_{j=1}^m \kappa \{ \ln (t_0 - z_j) + \ln (\bar{t}_0 - \bar{z}_j) \}$	$+ \sum_{j=1}^m \kappa \{ \ln (t_0 - z_j) + \ln (\bar{t}_0 - \bar{z}_j) \}$
270	1-я »	$\frac{n}{\rho}$	$\frac{h}{\rho}$
285	5-я сверху	$= -2G\theta \left[\frac{\Omega}{\rho} (1 - \right.$	$= -2G\theta \left[\frac{\Omega}{l} (1 - \right.$
293	3-я снизу	$= -R \int_0^{\varphi} [G_1(\varphi) -$	$= -R \int_0^{\varphi} [Q_1(\varphi) -$
341	2-я »	$= \frac{1}{\mu} \int_0^{\varphi} \sin \mu (\varphi - \varphi_1)$	$= \frac{1}{\mu} \int_0^{\varphi} \sin (\varphi - \varphi_1)$
343	8-я сверху	$w = \frac{R^4}{EJ}$	$M = R^2$
343	9-я »	$M = R^2$	$w = \frac{R^4}{EJ}$
473	6-я »	$-D_{\xi-b})] P_2$	$-D_{\xi-b}) P_2]$
473	1-я снизу	$-D_{\xi-b})] P_1$	$-D_{\xi-b}) P_1]$
477	Табл. 2 2-я снизу	В схемах 4 и 5	В схеме 1
521	Табл. 4, 2-я графа, 1-я сверху	$- \frac{1}{m+1} \times$	$- \frac{1}{2m+1} \times$
625	8-я »	$Q_r = -\frac{1}{r} [$	$Q_r = \frac{1}{r} [$
630	4-я снизу	$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\beta} \right) +$	$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\alpha} \right) +$
661	3-я »	$\frac{d (R_\varphi \sin \theta)^2}{d\theta} r_k$	$\frac{d (R_\varphi \sin \theta)^2 T_k}{d\theta}$
689	11-я сверху	значком	скачком
701	2-я снизу	$= \frac{1}{b} \chi(0) -$	$= \frac{1}{b} [\chi(0) -$
707	8-я сверху	$\sigma_x^{(p)}$	$\sigma_x^{(p)} = 0$
718	12-я снизу	}	$\rho = \sqrt{\frac{s_1}{s_2}}$
726	6-я »		$+ \frac{1-2\nu}{4}$
730	3-я сверху		$\sqrt{12(1-\nu^2)}$
763	4-я »	$-b(1+\cos \theta_1)$	$-b(1-\cos \theta_1)$
797	1-я »	$(1-\sin \theta)$	$(1+\alpha \sin \theta)$
798	5-я »		