

ПРОЧНОСТЬ • УСТОЙЧИВОСТЬ • КОЛЕБАНИЯ

3



ПРОЧНОСТЬ • УСТОЙЧИВОСТЬ • КОЛЕБАНИЯ

Том 3

СПРАВОЧНИК В ТРЕХ ТОМАХ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

И. А. Биргера и Я. Г. Пановко



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**С. А. Амбарцумян, В. Л. Бидерман,
И. А. Биргер, В. В. Болотин, А. С. Вольмир,
Л. М. Качанов, Я. Г. Пановко, В. И. Феодосьев**



ИЗДАТЕЛЬСТВО „МАШИНОСТРОЕНИЕ“

Москва • 1968

Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. д-ра техн. наук И. А. Биргера и чл.-корр. АН Латвийской ССР Я. Г. Пановко.

В третьем томе даны методы расчета стержней на устойчивость при упругих и пластических деформациях, приведены справочные сведения по определению критических нагрузок, частот и амплитуд собственных колебаний стержней, пластинок и оболочек под действием периодических и ударных нагрузок, случайных сил, потока газа.

Рис. 774. Табл. 203. Библ. 219 названий.

АВТОРЫ ТОМА:

Болотин В. В., д-р техн. наук проф.; **Вольмир А. С.**, д-р техн. наук проф.; **Диментберг М. Ф.**, канд. техн. наук; **Кильдибеков И. Г.**, инж.; **Москаленко В. Н.**, канд. физ.-мат. наук; **Новичков Ю. Н.**, канд. физ.-мат. наук; **Пановко Я. Г.**, чл.-корр. АН Латвийской ССР; **Швейко Ю. Ю.**, канд. техн. наук

ОГЛАВЛЕНИЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ

Введение (Я. Г. Пановко)	7
Глава 1. Устойчивость стержней (Я. Г. Пановко).	13
Упругие стержни на жестких опорах.	13
Общие сведения	13
Однопролетные стержни постоянного сечения.	16
Стержни со ступенчатым изменением жесткости.	21
Стержни с непрерывным изменением жесткости.	23
Стержни с непрерывным изменением жесткости под действием распределенной нагрузки	29
Многопролетные стержни (неразрезные балки).	29
Упругие стержни на упругих опорах или сплошном упругом основании.	34
Общие сведения	34
Однопролетные стержни на упругих опорах.	35
Многопролетные стержни (неразрезные балки) на упругих опорах	35
Стержни на сплошном упругом основании.	35
Упругие плоские рамы	43
Общие сведения	43
Основные зависимости	44
Упругие круговые кольца	50
Общие сведения	50
Плоская форма потери устойчивости	50
Пространственная форма потери устойчивости.	50
Особые случаи прямолинейных упругих стержней.	52
Витые (естественно закрученные) стержни при сжатии.	52
Стержни под действием следящих сжимающих сил.	53
Скручиваемые стержни	56
Тонкостенные стержни	57
Общие сведения	57
Центрально сжатые стержни	59
Внецентренно сжатые стержни	63
Устойчивость при поперечной нагрузке.	66
Устойчивость плоской формы изгиба.	66
Общие сведения	66
Балка с узким прямоугольным сечением (полоса).	67
Балка двутаврового профиля	75
Витые пружины	77
Общие сведения	77
Потеря устойчивости сжатой пружины при отсутствии посадки витков	77
Потеря устойчивости сжатой пружины с посаженными витками	79
Потеря устойчивости скручиваемой пружины.	79
Потеря устойчивости растянутой пружины с посаженными вит- ками	80
Устойчивость сжатых стержней за пределами пропорциональ- ности	80
Общие сведения	80
Теория продольного изгиба центрально сжатого стержня.	81
Эмпирические зависимости	85
Потеря устойчивости внецентренно сжатых стержней.	86
Устойчивость сжатых стержней при ползучести материала.	88
Общие сведения	88
Расчетные формулы	89
Литература	89

Глава 2. Устойчивость пластинок (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибекое)	91
Устойчивость пластинок в пределах упругости	91
Прямоугольные пластинки	91
Общие сведения	91
Расчетные формулы	92
Анизотропные и подкрепленные пластинки	100
Закритическая деформация подкрепленных пластинок	105
Круглые пластинки	109
Пластинки других форм	111
Прямоугольные пластинки за пределами упругости	113
Устойчивость пластинок при высоких температурах	117
Общие сведения	117
Пластинки в неравномерном температурном поле	117
Выпучивание пластинок при ползучести	120
Литература	126
Глава 3. Устойчивость оболочек (А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибекое)	127
Устойчивость оболочек в пределах упругости	127
Особенности потери устойчивости оболочек	127
Цилиндрические оболочки	129
Основные уравнения для круговых оболочек	129
Замкнутые круговые оболочки	135
Круговые панели	158
Конические оболочки	164
Исходные зависимости линейной теории для круговых оболочек	164
Устойчивость при осевом сжатии	168
Действие внешнего давления	170
Кручение	173
Подкрепленные оболочки при действии внешнего давления	174
Оболочки вращения	176
Сферические оболочки	176
Эллипсоидальные оболочки	183
Полгие оболочки при действии поперечной нагрузки	184
Исходные зависимости	184
Панель, прямоугольная в плане	187
Коническая панель	191
Сферическая панель	194
Цилиндрические оболочки за пределами упругости	198
Устойчивость оболочек при высоких температурах	203
Основные зависимости	203
Устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки	206
Выпучивание оболочек при ползучести	209
Литература	215

КОЛЕБАНИЯ

Глава 4. Основы теории колебаний механических систем (Я. Г. Пановко)	216
Основные понятия	216
Кинематика колебательных процессов	216
Действующие переменные силы при колебаниях	217
Возмущающие силы	218
Восстанавливающие силы	220
Силы трения	224
Число степеней свободы колебательных систем	225
Колебания линейных систем с одной степенью свободы	236
Свободные колебания	236
Вынужденные колебания	245
Колебания нелинейных систем с одной степенью свободы	254
Системы с нелинейной упругой характеристикой	254
Нелинейные диссипативные системы	262
Фрикционные автоколебательные системы	267
Колебания систем с несколькими степенями свободы	271
Свободные колебания	271
Вынужденные колебания	281
Литература	284

Глава 5. Свободные и вынужденные колебания стержней и стержневых систем (Я. Г. Пановко)	285
Свободные колебания (точные методы исследования)	285
Общие сведения	285
Продольные и крутильные колебания стержней; поперечные колебания струн	287
Изгибные колебания стержней	294
Свободные колебания (приближенные способы исследования)	305
Способ замены распределенных параметров сосредоточенными	305
Формула Рэлея	305
Формула Граммеля	309
Формула Донкерли	311
Способ последовательных приближений для определения первой собственной частоты колебаний	311
Способ последовательных приближений для определения второй собственной частоты	312
Метод Ритца	312
Метод Галеркина	313
Оценки С. А. Бернштейна	314
Вынужденные колебания	314
Гармоническое возмущение. Замкнутая форма решения	314
Общий случай действия возмущающих сил. Разложение решения по собственным формам	317
Колебания рамных систем	319
Общие сведения	319
Свободные колебания	321
Вынужденные колебания	322
Критические числа оборотов валов	324
Вал с одним диском	324
Гирскопический эффект	325
Вал с несколькими дисками	327
Вал с распределенной массой	327
Жесткий ротор в упругих подшипниках	330
Влияние трения на критические состояния	330
Присоединенные динамические системы как гасители колебаний	331
Общие сведения	331
Динамический гаситель колебаний	331
Маятниковый гаситель крутильных колебаний вращающихся валов	333
Маятниковый гаситель процессии вращающихся валов (автоматический балансировщик)	334
Вязкий поглотитель колебаний	336
Поглотитель колебаний с сухим трением	337
Динамический гаситель колебаний с вязким трением	338
Сопоставление свойств динамических гасителей и поглотителей колебаний	340
Конструкционное демпфирование	341
Общие сведения	341
Конструкционное демпфирование в простых соединениях	343
Литература	346
Глава 6. Параметрические колебания упругих систем (В. В. Болотин)	347
Предварительные замечания	347
Дифференциальные уравнения параметрических колебаний упругих систем (особый случай)	349
Дифференциальные уравнения параметрических колебаний упругих систем (общий случай)	351
Примеры вывода уравнений параметрических колебаний	353
Области неустойчивости уравнения Матье-Хилла	355
Определение областей неустойчивости для систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами	360
Влияние демпфирования на границы областей неустойчивости	363
Влияние перемещений в невозмущенном состоянии	365
Учет нелинейных факторов при параметрических колебаниях упругих систем	367
Литература	368

Г л а в а 7. Колебания пластинок (В. В. Болотин, В. Н. Москаленко)	370
Дифференциальные уравнения колебаний пластинок	370
Колебания изотропных пластинок, прямоугольных в плане . . .	375
Колебания пластинок других форм	390
Влияние нелинейности, начальных усилий в срединной поверхности, инерции вращения и деформации поперечного сдвига . .	397
Применение асимптотического метода к расчету пластинок на колебания	406
Литература	416
Г л а в а 8. Колебания оболочек (В. В. Болотин, В. Н. Москаленко)	418
Дифференциальные уравнения колебаний тонких упругих оболочек	418
Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек . . .	423
Колебания сферических оболочек	443
Колебания конических оболочек	453
Применение асимптотического метода к расчету оболочек на колебания	461
Литература	466
Г л а в а 9. Теория аэрогидроупругости (В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков, Ю. Ю. Швейко)	468
Введение	468
Определение гидроаэродинамических сил, действующих на деформируемые поверхности	470
Задачи аэрогидроупругости для стержней	473
Флаттер плоских панелей (линейные задачи)	480
Флаттер оболочек и криволинейных панелей	489
Нелинейные задачи панельного флаттера	501
Колебания упругих тел, взаимодействующих с жидкостью . . .	508
Литература	509
Г л а в а 10. Статистические задачи колебаний и устойчивости упругих систем (В. В. Болотин, М. Ф. Диментберг)	513
Введение	513
Квазистатистические методы решения задач статистической динамики . .	517
Корреляционные методы	523
Применение корреляционных методов к исследованию колебаний линейных систем с конечным числом степеней свободы	528
Применение корреляционных методов к исследованию колебаний распределенных систем	531
Методы исследования нелинейных и параметрических случайных колебаний	538
Методы теории марковских процессов	540
Литература	544
Предметный алфавитный указатель (М. З. Рафес, К. М. Хасьминская)	547

ВВЕДЕНИЕ

Явления потери устойчивости. Форму равновесия статически нагруженной конструкции называют устойчивой, если малым возмущающим воздействиям соответствуют малые отклонения от этой формы. Нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости, называют *критическими*, а соответствующие состояния — *критическими состояниями*. Опасность потери устойчивости особенно велика для легких, тонкостенных конструкций типа гибких стержней, пластинок и оболочек.

Явления потери устойчивости весьма разнообразны. Наиболее важны следующие случаи проявления неустойчивости:

- 1) появление качественно новых смежных форм равновесия;
- 2) появление несмежных форм равновесия;
- 3) исчезновение устойчивых форм равновесия;
- 4) полное исчезновение любых форм равновесия;
- 5) достижение недопустимо больших скоростей деформаций в конструкциях, материал которых обладает свойством ползучести.

Появление качественно новых форм равновесия. Примером может служить центральное сжатие первоначально прямого упругого стержня (задача Эйлера). При умеренных значениях сжимающей силы прямолинейная форма равновесия — единственная и притом устойчивая форма равновесия; малым возмущениям этой формы, которые осуществляются, например, при помощи малой дополнительной поперечной нагрузки, соответствуют малые прогибы. При критическом значении сжимающей силы прямолинейная форма становится неустойчивой и после малых возмущений стержень приобретает новую (устойчивую) форму равновесия, которой соответствует изогнутая ось.

При сжимающих силах, даже ничтожно превышающих критическое значение, дополнительные напряжения изгиба достигают весьма больших значений и непосредственно угрожают прочности конструкции. Поэтому критическое состояние, как непосредственно предшествующее разрушению, считается недопустимым в реальных условиях эксплуатации. Определение критических нагрузок является ответственной частью инженерного расчета конструкции и позволяет избежать потери устойчивости введением надлежащего запаса.

Совокупность равновесных состояний, соответствующих различным значениям параметра нагрузки, иллюстрируют диаграммами состояний равновесия. Для стержня на рис. 1, а диаграмма состояний равновесия имеет вид, показанный на рис. 1, б. По оси абсцисс отложены значения характерного перемещения (например, прогиба верхнего конца стержня), а по оси ординат — значения сжимающей силы. Здесь контурными линиями показаны устойчивые состояния равновесия, а крестиками — неустойчивые состояния равновесия.

Появление смежных равновесных форм называют *бифуркацией*, или *разветвлением* форм равновесия. Точку A на рис. 1, б называют точкой бифуркации.

Появление несмежных форм равновесия. В начале нагружения при монотонном росте нагрузки обычно происходит также монотонное

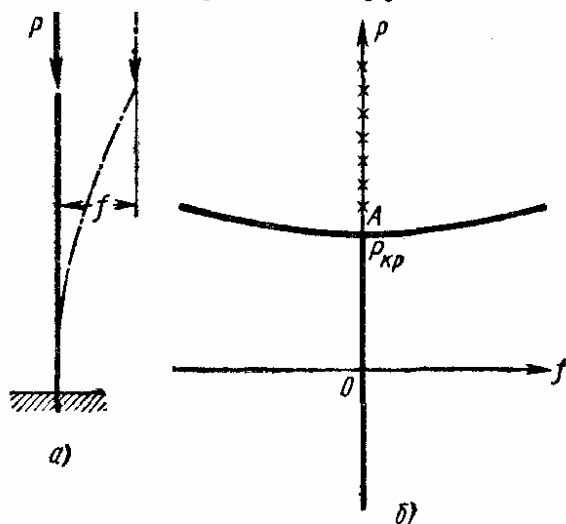


Рис. 1

(почти по линейному закону) возрастание упругих деформаций и перемещений. Однако в некоторых особенных системах на определенном уровне нагружения происходит «хлопок» и система скачком приобретает новую конфигурацию. Такова, например, «хлопающая мембрана», показанная на рис. 2, а; соответствующая диаграмма равновесных состояний показана на рис. 2, б. Такая диаграмма типична для ряда иных конструкций, например, для сжатых вдоль оси тонких цилиндрических оболочек. При постепенном росте интенсивности нагрузки q прогибы

мембраны растут, следуя кривой AB . Точке B соответствует критическое состояние, так как при дальнейшем росте нагрузки происходит мгновенный перескок в точку B' на участке кривой CD (см. горизонтальную прямую BB') и дальнейший процесс определяется точками этого участка. Если после нагружения до какой-либо точки D начать обрат-

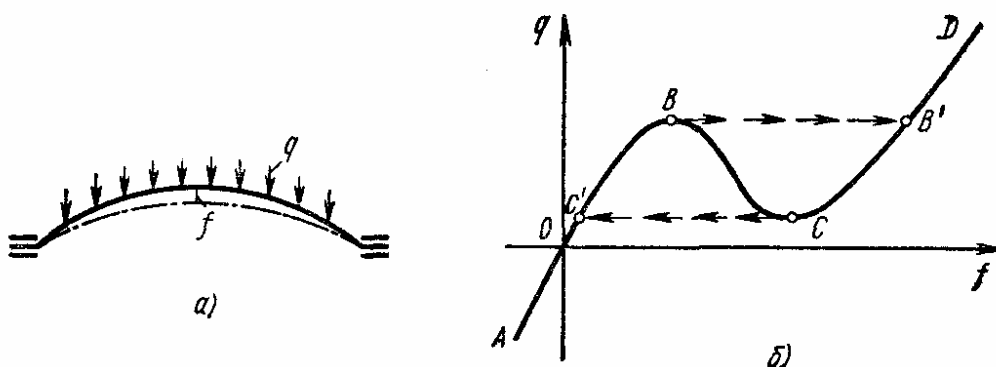


Рис. 2

ную разгрузку, то она будет соответствовать точкам участка DC , вплоть до точки C . В этой точке происходит обратный хлопок мембраны (см. нижнюю горизонтальную прямую CC') и дальнейший процесс характеризуется снова первым участком кривой AB вплоть до полной разгрузки мембраны (точка O).

Точки, лежащие на участке BC кривой, также соответствуют состояниям равновесия, но эти состояния неустойчивые и не реализуются ни при монотонном нагружении, ни при обратной монотонной разгрузке. Если искусственно завести мембрану в состояние, соответствующее какой-либо точке этого неустойчивого участка BC , то после любого сколь угодно малого возмущения мембрана совершит перескок на ка-

кой-либо из устойчивых участков (AB или CD в зависимости от направления приложенного возмущения).

В подобных системах характерно существование двух критических значений нагрузки — *верхнего критического значения*, соответствующего точке B , и *нижнего критического значения*, соответствующего точке C (в некоторых случаях нижнее критическое значение оказывается отрицательным).

Хлопающая мембрана представляет собой систему, способность которой к перескокам используют в технических целях; в других случаях перескоки практически означают выход конструкции из строя.

Исчезновение устойчивых форм равновесия. В некоторых системах критическое состояние характеризуется исчезновением устойчивых форм равновесия и при достижении критического уровня нагружения система уже не может находиться в покое, — достаточно любого возмущения, чтобы система пришла в состояние движения, которое с течением времени все дальше уводит систему от исходного состояния равновесия. Это движение может быть аperiodическим (монотонный уход от исходного состояния равновесия) или носить характер колебаний с постепенно возрастающей амплитудой. В этих случаях диаграмма равновесных состояний имеет вид, показанный на рис. 3, *а*. Ниже критического значения нагрузки состояния равновесия устойчивы, а выше

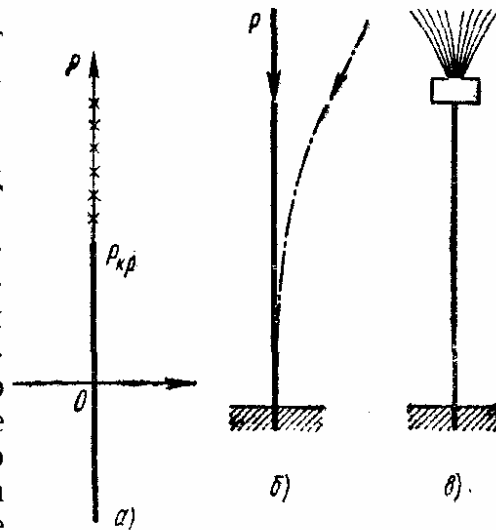


Рис. 3

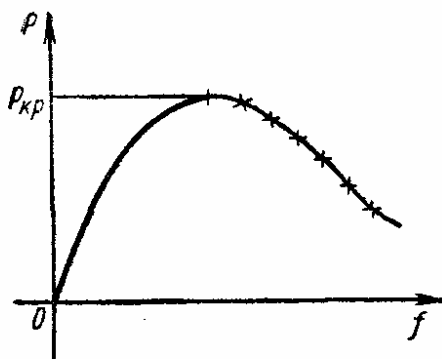


Рис. 4

этого значения — неустойчивы.

В частности, к системам этого типа относится консольный стержень (рис. 3, *б*), нагруженный на конце «следящей» силой, т. е. силой, направление которой совпадает с направлением касательной к оси на конце стержня при любой деформации; такая сила возникает, например, вследствие реактивного действия отходящей струи жидкости или газа (рис. 3, *в*).

Полное исчезновение любых форм равновесия. В этом случае типичная диаграмма равновесных состояний имеет вид, показанный на рис. 4, и характеризуется тем, что при нагрузках, превосходящих критическое значение, равновесие вообще невозможно.

Подобная кривая получается, например, при внецентренном сжатии упруго-пластического стержня [иногда этот вид потери устойчивости называют потерей устойчивости второго рода, подразумевая под потерей устойчивости первого рода описанный ранее случай 1 (см. стр. 7)]. При $P > P_{кр}$ система не может вообще находиться в состоянии равновесия (в предыдущем случае 3 такие состояния существуют, хотя являются неустойчивыми), т. е., можно сказать, что происходит не потеря устойчивости формы равновесия, а утрата самого свойства равновесия (потеря несущей способности) и система приходит в состояние движения;

в данном случае это движение носит характер аperiodического ухода от исходной формы со все возрастающей скоростью.

Потеря устойчивости при ползучести материала. Если материал, из которого выполнена конструкция, обладает свойством ползучести, то деформации и перемещения монотонно увеличиваются с течением времени при неизменной внешней нагрузке. Так как конфигурация системы постепенно меняется, то в некоторых случаях при этом происходит постепенное же перераспределение напряжений; поэтому скорости деформаций возрастают и могут достигнуть недопустимо больших значений

и оказаться даже бесконечно большими.

Время, после истечения которого наступает указанное состояние, называют критическим временем; оно зависит от уровня нагружения, чем больше заданная нагрузка, тем меньше соответствующее ей критическое время. В этом случае понятие критической нагрузки, в сущности, лишается содержания.

Указанные явления могут возникнуть, например, при внецентренном сжатии стержня (рис. 5, а). Прогиб конца этого стержня с течением

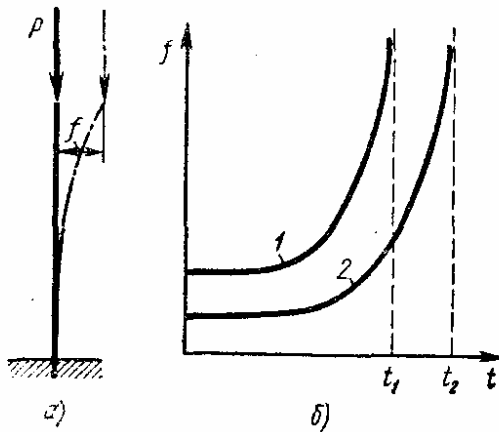


Рис. 5

времени увеличивается со все возрастающей скоростью, как это показано на рис. 5, б. Кривая 1 соответствует нагрузке, превосходящей нагрузку, для которой построена кривая 2; поэтому критическое время t_1 в первом случае меньше, чем критическое время t_2 во втором случае.

Перечисленные пять важнейших типов потери устойчивости практически наиболее важны и отражены в справочном материале, приведенном в гл. 1—3 для конкретных типов конструкций. Вопросы потери устойчивости при периодическом нагружении (явление параметрического резонанса, см. гл. 6), динамического продольного изгиба при ударной нагрузке здесь не рассматриваются.

Методы решения задач об устойчивости форм равновесия. Наиболее общим методом исследования устойчивости является *динамический метод*. Предполагают, что исследуемая форма равновесия каким-либо образом нарушена, и изучают движение, которое возникает после такого начального возмущения. По свойствам возмущенного движения судят об устойчивости или неустойчивости исследуемой формы равновесия; если движение представляет собой колебания с постепенно возрастающими амплитудами или носит аperiodический характер с увеличивающимися отклонениями, то исходная форма равновесия является неустойчивой, в противном случае, когда система все время остается в окрестности исходной формы равновесия, последняя является устойчивой.

Для практического использования этого метода необходимо предварительное изучение возможных форм равновесия при различных уровнях нагружения, т. е. построение диаграммы состояний равновесия; лишь после этого становится возможным установить с помощью динамического метода, какие из этих состояний устойчивы и какие неустойчивы. Следует иметь в виду, что во многих случаях (кроме случая 3, см. стр. 9) сама структура диаграммы состояний равновесия дает

возможность выделить ветви устойчивых и неустойчивых состояний и дополнительное динамическое исследование оказывается излишним; при этом главная трудность состоит именно в построении указанной диаграммы, а не в контроле равновесия отдельных ее ветвей. Исключение представляет случай 3 (см. стр. 9), когда динамический метод оказывается принципиально единственным методом исследования устойчивости.

В настоящее время особенно подробно изучены задачи, относящиеся к случаю 1 (бифуркационные задачи). Для определения точек бифуркации пользуются способом Эйлера или энергетическим методом.

Основная идея способа Эйлера состоит в следующем. Предполагают, что смежная, качественно новая форма равновесия существует, тогда из уравнений, характеризующих эту форму равновесия, определяют нагрузки, при которых она становится возможной. При постановке соответствующих задач идеализируют геометрию системы и способ ее нагружения (идеально прямолинейная форма исходного стержня, идеально плоская исходная форма срединной поверхности пластинки, отсутствие эксцентрицитетов нагрузки и т. п.). Многие из этих задач (в случаях большой гибкости конструкции) допускают решение на основе гипотезы о физической линейности (т. е. использование закона Гука), но нередко приходится учитывать физическую нелинейность (пластические свойства материала).

Поскольку рассматривается форма равновесия, смежная с исходной (исследуемой на устойчивость), постольку решение основывается на предположении о сколь угодно малых величинах отклонений системы от исходной формы равновесия (геометрическая линеаризация задачи).

В обычных случаях распределенной деформативности конструкции указанные выше уравнения равновесия оказываются дифференциальными и задача сводится к определению собственных значений и соответствующих собственных форм, отвечающих тем или иным заданным граничным условиям. После этого критические значения нагрузки легко определяют через найденные собственные значения. Эти операции удается выполнить в замкнутом виде только в сравнительно простых случаях (стержни постоянного поперечного сечения при несложных типах нагружения продольными силами, пластинки постоянной толщины при совпадении их границ с координатными линиями и в условиях сравнительно простого нагружения силами, лежащими в срединной поверхности). В других случаях приходится пользоваться приближенными способами решения дифференциальных уравнений.

Энергетический метод оказывается особенно удобным в тех относительно сложных случаях, когда способ Эйлера не позволяет получить решение в замкнутой форме. Суть энергетического метода состоит в исследовании изменения полной энергии системы (вариации полной энергии) при переходе из исходной формы равновесия в возмущенную форму равновесия. Критическому значению нагрузки соответствует нулевое значение этого изменения.

При практическом использовании энергетического метода заранее задаются видом отклоненной формы равновесия и тем самым неизбежно вносят некоторую приближенность в решение. При этом важно, чтобы предположенная возмущенная конфигурация системы удовлетворяла граничным условиям данной задачи. Среди рассматриваемых возможных отклоненных конфигураций ближе остальных к истинной та конфигурация, которой соответствует наименьшее значение вычисленной

энергетическим методом критической нагрузки. Согласно этому методу отклоненная форма равновесия задается с точностью до нескольких неопределенных параметров, и затем соотношения между ними определяются из условий минимума полной энергии системы.

Способ Эйлера и энергетический метод (в частности, метод Ритца) позволяют найти критическую нагрузку, но не дают возможность

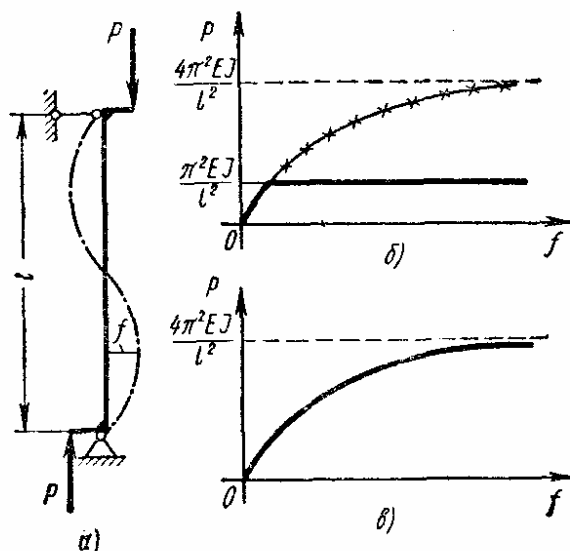


Рис. 6

построить всю кривую равновесных состояний в закритической области; впрочем, в большинстве случаев этого достаточно, поскольку само достижение критического состояния обычно является недопустимым.

В случаях 2 и 4 требуется построение кривой равновесных состояний или, по крайней мере, определение характерных точек этой кривой (т. е. точек максимума или минимума, определяющих верхнюю и нижнюю критические нагрузки). Как правило, при этом учитывают геометрическую нелинейность задачи, так как перемещения уже не всегда можно считать доста-

точно малыми. Во многих случаях приходится учитывать также и физическую нелинейность, связанную с отклонениями от закона Гука.

При построении подобных диаграмм важно не пропустить ни одной из ветвей. Так, для стойки, показанной на рис. 6, а, полная диаграмма выглядит подобно рис. 6, б, хотя при недостаточно тщательном анализе можно прийти к диаграмме, изображенной на рис. 6, в, из которой следует ошибочное заключение относительно критического значения нагрузки (с четырехкратной ошибкой).

В случае 5 требуется построение кривых $f = f(t)$ при различных уровнях нагружения. Существенную роль играет принятый закон ползучести, т. е. зависимость скорости деформации ползучести от напряжения.

Глава 1

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

УПРУГИЕ СТЕРЖНИ НА ЖЕСТКИХ ОПОРАХ *

Общие сведения

При эйлеровой форме потери устойчивости критическую силу определяют из дифференциального уравнения изогнутой оси, справедливого для любого участка стержня, в пределах которого продольная сила неизменна:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) + N \frac{d^2 v}{dz^2} = 0; \quad (1)$$

здесь $v = v(z)$ — прогиб сечения с абсциссой z ; EJ — жесткость при изгибе; N — продольная сила. Для стержней с постоянной жесткостью ($EJ = \text{const}$) дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \alpha^2 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \quad (3)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2)

$$v = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + C_3 z + C_4 \quad (4)$$

должно удовлетворять четырем граничным условиям (по два условия на каждом конце стержня). Поочередное использование этих условий приводит к однородной относительно C_i системе линейных алгебраических уравнений. Критическую силу находят из равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов этой системы.

Пример 1. Определение критической силы для стержня с заделанными концами (см. табл. 1, схему 5).

На каждом из концов прогиб и угол поворота сечения равны нулю, т. е.

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = 0; \quad v(l) = 0; \quad v'(l) = 0.$$

Согласно выражению (4) приходят к однородной относительно C_i системе уравнений

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0; \\ \alpha C_1 + C_3 &= 0; \\ C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l + C_3 l + C_4 &= 0; \\ \alpha C_1 \cos \alpha l - \alpha C_2 \sin \alpha l + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

* Написано совместно с И. И. Губановой.

и критическую силу определяют из условия

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & l & 1 \\ \alpha \cos \alpha & -\alpha \sin \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

После разворачивания определителя получается трансцендентное уравнение

$$\sin \frac{\alpha l}{2} \left(\sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \cos \frac{\alpha l}{2} \right) = 0,$$

наименьший корень которого

$$\alpha l = 2\pi.$$

Следовательно, согласно формуле (3) критическая сила будет

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Многопролетные стержни (неразрезные балки), стержни со ступенчатым изменением жесткости, а также стержни, нагруженные несколькими продольными силами в промежуточных сечениях, подразделяют на отдельные участки с таким расчетом, чтобы в пределах каждого из них можно было пользоваться дифференциальным уравнением (2). При этом на границах участков должны выполняться условия сопряжения, относящиеся к самой функции и ее производным

$$\begin{aligned} v_+ &= v_-; \quad v'_+ = v'_-; \quad (EJv'')_+ = (EJv'')_-; \\ (EJv''')_+ &= (EJv''')_- \pm Pv', \end{aligned}$$

здесь индексы минус и плюс относятся соответственно к сечениям, расположенным непосредственно слева и справа от границы между участками. В этих случаях удобно пользоваться представлением решения дифференциального уравнения через начальные параметры

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + \varphi_0 z - M_0 \frac{1 - \cos \alpha z}{N} - Q_0 \frac{\alpha z - \sin \alpha z}{\alpha N}; \\ \varphi &= \varphi_0 + M_0 \frac{\alpha \sin \alpha z}{N} - Q_0 \frac{1 - \cos \alpha z}{N}; \\ M &= M_0 \cos \alpha z + \frac{Q_0}{\alpha} \sin \alpha z; \\ Q &= -\alpha M_0 \sin \alpha z + Q_0 \cos \alpha z; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

здесь v_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 — начальные параметры — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале участка (при $z = 0$).

Пример 2. Составим уравнение для определения критической силы консольного стержня, нагруженного двумя сжимающими силами P_1 и P_2 (см. схему в табл. 3); при этом $v_0=0$, $\varphi_0=0$, $Q_0=0$. Пользуясь выражениями (5), получаем для конца первого участка ($z=a$)

$$\left. \begin{aligned} v_a &= -\frac{M_0}{P_1 + P_2} (1 - \cos \alpha_1 a); \\ \varphi_a &= \frac{\alpha_1 M_0}{P_1 + P_2} \sin \alpha_1 a; \\ M_a &= M_0 \cos \alpha_1 a; \\ Q_a &= -\alpha_1 M_0 \sin \alpha_1 a. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $\alpha_1 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EJ}}$. Принимая величины v_a , φ_a , M_a и Q_a в качестве начальных параметров и вновь пользуясь выражениями (5), находим для конца второго участка

$$M_{2a} = M_a \cos \alpha_2 (l - a) + \frac{Q_a}{\alpha_2} \sin \alpha_2 (l - a),$$

где $\alpha_2 = \sqrt{\frac{P_1}{EJ}}$. Так как на конце второго участка должно быть $M_{2a}=0$, то

$$M_a \cos \alpha_2 (l - a) + \frac{Q_a}{\alpha_2} \sin \alpha_2 (l - a) = 0. \quad (7)$$

Система пяти уравнений (6) и (7) однородна относительно пяти параметров M_0 , v_a , φ_a , M_a и Q_a . Критическую силу определяют из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\frac{1 - \cos \alpha_1 a}{P_1 + P_2}; & -1; & 0; & 0; & 0 \\ \frac{\alpha_1 \sin \alpha_1 a}{P_1 + P_2}; & 0; & -1; & 0; & 0 \\ \cos \alpha_1 a; & 0; & 0; & -1; & 0 \\ -\alpha_1 \sin \alpha_1 a; & 0; & 0; & 0; & -1 \\ 0; & 0; & 0; & \cos \alpha_2 (l - a); & \frac{\sin \alpha_2 (l - a)}{\alpha_2} \end{vmatrix} = 0,$$

в котором содержатся значения обеих сжимающих сил P_1 и P_2 .

С помощью этих способов решен ряд задач о критических силах для стержней, состоящих из участков постоянного сечения, с постоянной в пределах каждого участка сжимающей силой. Результаты решений

приведены в готовом виде на стр. 17—18. Критическая сила представлена в виде

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (8)$$

где μ — коэффициент, зависящий от устройства опор и способа нагружения стержня и называемый *коэффициентом длины*. Произведение μl называют *приведенной длиной*.

Формулой (8) можно пользоваться при условии, что *гибкость* стержня, определяемая выражением

$$\lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{J_{\min} F}}, \quad (9)$$

удовлетворяет неравенству

$$\lambda \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}}. \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) F — площадь сечения стержня; $\sigma_{нц}$ — предел пропорциональности. Если условие (10) не выполняется, то потеря устойчивости наступает при напряжениях, превосходящих предел пропорциональности, и критическую силу определяют по указаниям, приведенным на стр. 80—88.

Формулу (9) представляют также в виде

$$P_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}, \quad (11)$$

причем коэффициент η связан с коэффициентом длины μ соотношением

$$\eta = \frac{\pi^2}{\mu^2}. \quad (12)$$

Однопролетные стержни постоянного сечения

Действие сосредоточенных нагрузок. Значения коэффициентов μ и η для различных случаев нагружения стержней приведены в табл. 1—4.

Критическое соотношение между сжимающими силами, приложенными в промежуточных сечениях консольного стержня, можно найти по приближенной формуле (рис. 1)

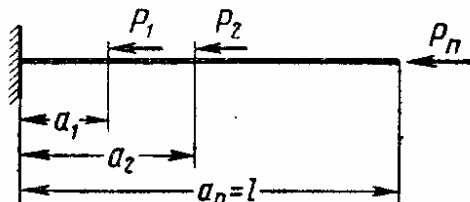


Рис. 1

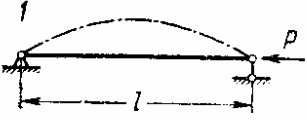
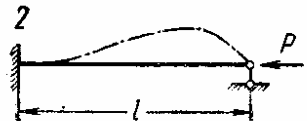
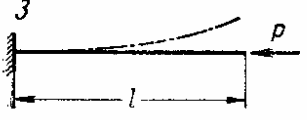
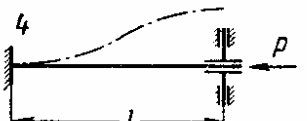
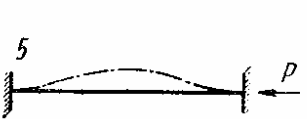
$$P_1 \left(\frac{a_1}{l} \right)^2 + P_2 \left(\frac{a_2}{l} \right)^2 + \dots + P_n = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{4l^2}. \quad (13)$$

Для устойчивости стержня необходимо, чтобы левая часть соотношения (13) была меньше правой части.

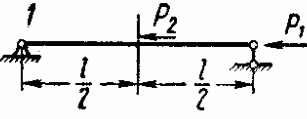
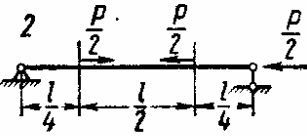
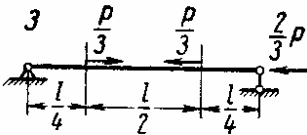
Действие распределенных нагрузок. Если внешняя продольная нагрузка приложена непрерывно, то дифференциальное уравнение задачи записывают так:

$$EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left(N \frac{dv}{dz} \right) = 0, \quad (14)$$

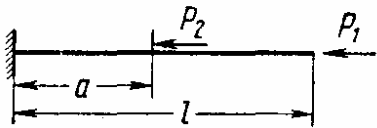
1. Значения коэффициента μ для стержня, нагруженного на концах

Схема	Характер закрепления концов стержня	μ
	Оба конца шарнирно оперты	1
	Один конец заделан, второй конец шарнирно оперт	0,699
	Один конец заделан, второй конец свободен	2
	Один конец заделан, на втором конце подвижная заделка	1
	Оба конца заделаны	0,5

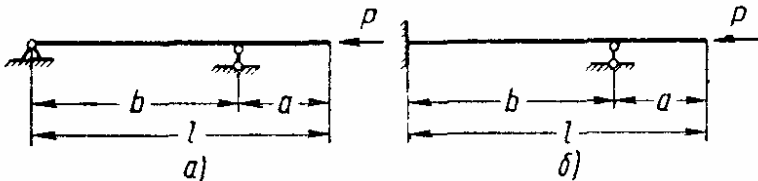
2. Значения коэффициента μ для двухопорных стержней, нагруженных на концах и в пролете

Схема	$\frac{P_2}{P_1}$	μ	Схема	μ
	0	1,00		0,773
	0,25	0,95		
	0,50	0,91		0,858
	0,75	0,89		
	1,00	0,87		
	2,00	0,82		

3. Значения коэффициента η для консольного стержня, нагруженного двумя сжимающими силами [в формуле (11) $P_{кр} = (P_1 + P_2)_{кр}$]

								
$\frac{a}{l}$	$\frac{P_2}{P_1}$							
	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
0	2,467	2,714	2,961	3,701	4,935	7,402	14,80	27,14
0,1	2,467	2,714	2,960	3,698	4,930	7,377	14,68	26,66
0,2	2,467	2,710	2,953	3,679	4,880	7,207	13,78	23,19
0,3	2,467	2,703	2,936	3,622	4,712	6,769	11,70	16,82
0,4	2,467	2,688	2,904	3,525	4,470	6,074	9,187	11,57
0,5	2,467	2,665	2,856	3,384	4,136	5,268	7,060	8,210
0,6	2,467	2,635	2,793	3,211	3,759	4,497	5,504	6,048
0,7	2,467	2,599	2,715	3,020	3,385	3,830	4,376	4,660
0,8	2,467	2,557	2,636	2,821	3,040	3,280	3,551	3,685
0,9	2,467	2,513	2,551	2,641	2,734	2,832	2,936	2,986
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

4. Значения коэффициента μ для двухопорного стержня с консолью

										
Схема	$\frac{b}{l}$									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
a	2,00	1,87	1,73	1,60	1,47	1,35	1,23	1,13	1,06	1,01
б	2,00	1,85	1,70	1,55	1,40	1,26	1,11	0,975	0,852	0,75

где N обозначает продольную сжимающую силу в текущем сечении. Например, если исследуется устойчивость консольного стержня и $q = \text{const}$, то $N = q(l - z)$ (начало координат совмещено с зашлепленным сечением, l — длина консоли). Даже в простейшем случае, когда $q = \text{const}$, дифференциальное уравнение (14) имеет переменные коэффициенты и не интегрируется в элементарных функциях. При решении подобных задач приходится обращаться к какому-либо приближенному методу решения; ниже на стр. 24—25 изложены пригодные здесь методы Рэлея, Тимошенко и Ритца (они применены к случаю стержня переменной жесткости), а здесь поясним метод Галеркина.

Согласно этому методу задаются предполагаемой формой изгиба в виде суммы функций с неопределенными множителями f_1, f_2, \dots, f_n

$$v = f_1 v_1(z) + f_2 v_2(z) + \dots + f_n v_n(z).$$

Каждый член этой суммы должен удовлетворять граничным условиям задачи (геометрическим и силовым).

Далее образуются уравнения типа

$$\int_0^l \left[EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left(N \frac{dv}{dz} \right) \right] v_k dz = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

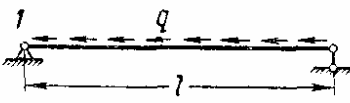
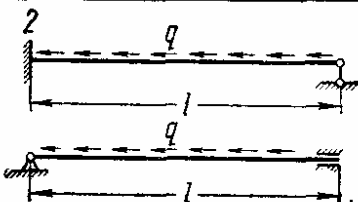
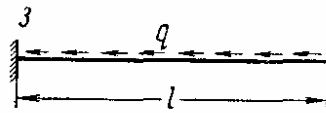
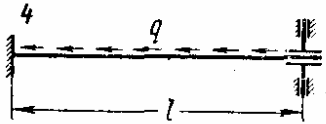
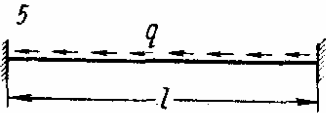
(число таких уравнений равно числу членов принятой суммы). После интегрирования получается система однородных уравнений относительно неопределенных параметров f_1, f_2, \dots, f_n . Для того чтобы все эти параметры одновременно не обращались в нуль, необходимо, чтобы равнялся нулю определитель, составленный из коэффициентов указанной системы уравнений; это дает уравнение, определяющее критическую нагрузку. В простейшем случае задаются одной функцией $v_1(z)$.

Значения коэффициентов μ приведены в табл. 5 и 6.

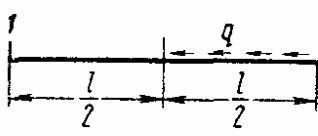
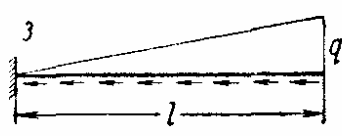
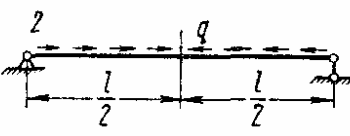
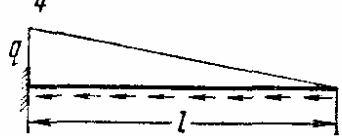
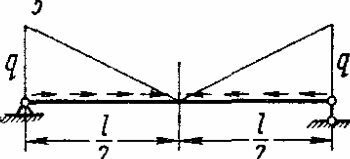
5. Значения коэффициента μ в формуле критической нагрузки

$$(ql)_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}$$

при нагрузке, равномерно распределенной по всей длине стержня

Схема	Характер закрепления концов стержня	μ
	Оба конца шарнирно оперты	0,715
	Один конец заделан, второй конец шарнирно оперт	0,433 0,576
	Один конец заделан, второй конец свободный	1,12
	Один конец заделан, на втором конце подвижная заделка	0,725
	Оба конца заделаны	0,364

6. Значения коэффициента μ при нагрузке, неравномерно распределенной по длине стержня

Схема	μ	Схема	μ
	1,486		1,388
	0,560		0,782
	0,694		
Примечание. Для всех схем $\left(\frac{ql}{2}\right)_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}$.			

Пример 3. Определить критическую нагрузку для консольного стержня постоянного поперечного сечения, нагруженного равномерно распределенной сжимающей нагрузкой $q = \text{const}$.

Задаемся формой изогнутой оси стержня в виде

$$v = fz^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{l} + \frac{z^2}{6l^2} \right).$$

Принятое выражение удовлетворяет геометрическим граничным условиям на защемленном конце ($v = 0$; $v' = 0$ при $z = 0$) и силовым граничным условиям на свободном конце ($v'' = 0$; $v''' = 0$ при $z = l$).

Подставляем в уравнение Галеркина (15) принятое выражение формы изогнутой оси

$$\int_0^l \left\{ EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + q \frac{d}{dz} \left[(l - z) \frac{dv}{dz} \right] v \right\} dz = 0$$

$$\int_0^l \left[EJ \frac{4}{l} + q \left(2l - 8z + \frac{8z^2}{l} - \frac{8}{3} \cdot \frac{z^3}{l^2} \right) z^2 \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{l} + \frac{z^2}{6l^2} \right) \right] dz = 0;$$

отсюда находим

$$q_{кр} = 10,9 \frac{EJ}{l^3}.$$

Этот результат отличается на 38% от точного решения, полученного с помощью функций Бесселя (табл. 5, схема 3).

Одновременное действие сосредоточенных и распределенных сжимающих сил. Если к правым концам стержней в табл. 7 приложены дополнительные силы P (на рисунках они не показаны), то значения $P_{кр}$ определяются формулой (11) в зависимости от параметра n , представляющего собой отношение нагрузки ql к эйлеровому значению критической силы для данного стержня. Для схемы 1

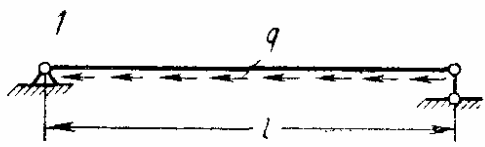
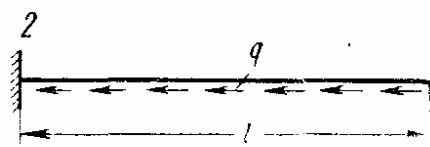
$$n = ql : \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}; \quad (16)$$

для схемы 2

$$n = ql : \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{4l^2}. \quad (17)$$

При больших значениях параметра n коэффициент η может оказаться отрицательным. Это значит, что для устойчивости равновесия необходима растягивающая продольная сила P .

7. Значения коэффициента η в формуле (11)

n		
0	9,87	2,47
0,25	8,62	2,28
0,50	7,40	2,08
0,75	6,08	1,91
1,00	4,77	1,72
2,00	-0,66	0,96
3,00	-4,94	0,15
4,00	-9,87	-0,69
5,00	-14,80	-1,56

Стержни со ступенчатым изменением жесткости

Значения коэффициента η для определения критической силы по формуле (11) в случае нагружения однопролетных стержней (рис. 2) приведены в табл. 8 и 9.

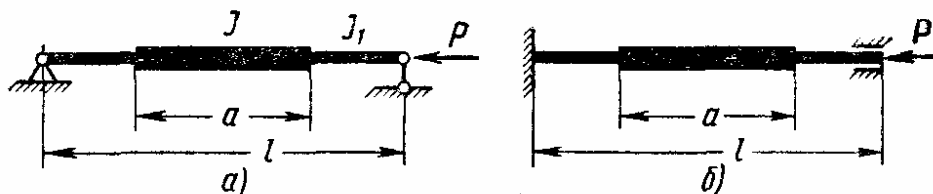


Рис. 2

Для консольного стержня, изображенного на рис. 3, критическая сила может быть определена по приближенной формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} : \left[\frac{l-b}{l} + \frac{(l-b)}{l} \cdot \frac{J}{J_1} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{J}{J_1} - 1 \right) \sin \frac{\pi b}{l} \right] \quad (18)$$

8. Значения коэффициента η для стержня, показанного на рис. 2, а

$J_1 : J$	η при $a : l$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,01	0,153	0,270	0,598	2,26	π^2
0,10	1,47	2,40	4,50	8,59	π^2
0,20	2,80	4,22	6,69	9,33	π^2
0,40	5,09	6,68	8,51	9,67	π^2
0,60	6,98	8,19	9,24	9,78	π^2
0,80	8,55	9,18	9,63	9,84	π^2
1,00	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2

9. Значения коэффициента η для стержня, показанного на рис. 2, б

$J_1 : J$	η при $a : l$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,01	0,614	1,08	2,39	8,48	$4\pi^2$
0,10	5,87	9,48	15,5	17,1	$4\pi^2$
0,20	11,1	16,3	20,5	21,1	$4\pi^2$
0,40	20,2	24,9	26,3	27,5	$4\pi^2$
0,60	27,7	30,6	31,1	32,5	$4\pi^2$
0,80	34,0	35,3	35,4	36,4	$4\pi^2$
1	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$

(схема а) и по приближенной формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_1}{4l^2} : \left[\left(1 - \frac{J_2 - J_1}{J_1} \cdot \frac{(l - b_1)^2}{l^2} \right) \left(1 - \frac{J_3 - J_2}{J_2} \cdot \frac{(l - b_2)^2}{l^2} \right) \dots \right. \\ \left. \dots \left(1 - \frac{J_n - J_{n-1}}{J_{n-1}} \cdot \frac{(l - b_{n-1})^2}{l^2} \right) \right] \quad (19)$$

(схема б).

В табл. 10 и 11 даны значения коэффициента η для двухпорных стержней со ступенчатым изменением жесткости при продольной сжи-

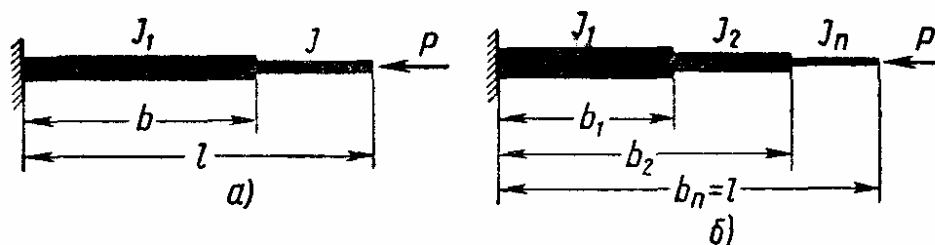


Рис. 3

мающей нагрузке, изменяющейся вдоль оси стержня по линейному закону симметрично относительно середины пролета. Критическую нагрузку определяют по формуле

$$\left(\frac{ql}{4} \right)_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}. \quad (20)$$

10. Значения коэффициента η для стержня, показанного на рис. 4, а

$\frac{J_1}{J}$	Число участков с различными моментами инерции				
	2	3	4	5	10
0,2	5,20	6,32	6,48	7,32	7,40
0,4	9,88	10,9	11,1	11,2	11,2
0,6	14,0	14,6	14,7	14,76	14,8
0,8	17,4	17,8	17,8	17,9	18,0
1,0	20,5	20,5	20,5	20,5	20,5

11. Значения коэффициента η для стержня показанного на рис. 4, б

$\frac{J_1}{J}$	Число участков с различными моментами инерции		
	2	3	4
0,2	18,1	21,8	22,8
0,4	31,2	34,2	34,3
0,6	41,0	42,4	42,4
0,8	49,4	49,5	49,5
1,0	54,8	54,8	54,8

В таблицах через J и J_1 обозначены соответственно наибольшее и наименьшее значения момента инерции поперечного сечения. Принято, что в пределах пролета имеется несколько участков равной длины, причем разности между моментами инерции двух соседних участков одинаковы.

Стержни с непрерывным изменением жесткости

В случаях непрерывного изменения жесткости поперечных сечений стержня основное дифференциальное уравнение (1) становится уравнением с переменными коэффициентами. При этом интегрируемые в замкнутой форме случаи составляют редкое исключение (см. ниже табл. 12 и далее); как правило, для определения критических нагрузок приходится пользоваться приближенными способами. Из таких способов особенно часто применяют *энергетический метод*.

Согласно энергетическому методу критическое состояние определяется равенством $U - W = 0$, в котором U — потенциальная энергия изгиба, соответствующая изогнутой форме оси стержня; W — работа заданных внешних сжимающих сил на перемещениях, определяющих переход из основной формы равновесия в смежную (возмущенную) форму равновесия. Для однопролетного стержня выражения U и W имеют вид

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz; \quad (21)$$

$$W = \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 dz, \quad (22)$$

причем функцией $v = v(z)$, определяющей изогнутую форму оси стержня, задаются заранее с учетом тех или иных конкретных граничных условий.

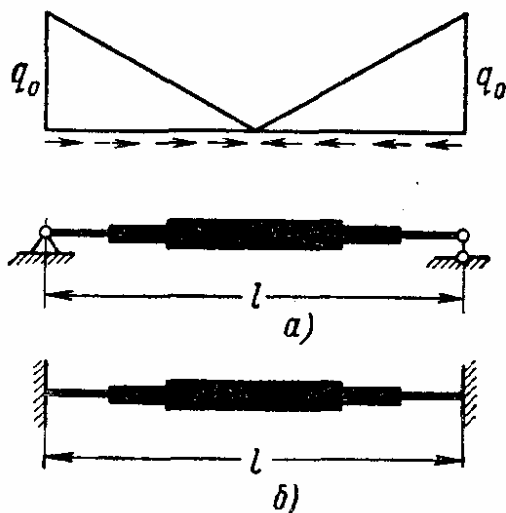


Рис. 4

В простейшем варианте энергетического метода (*метод Рэлея*) форма изгиба задается с точностью до одного неопределенного параметра, представляющего собой масштаб кривой (значение этого параметра несущественно для окончательных результатов); соответственно формула Рэлея имеет вид

$$P_{кр} = \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz : \int_0^l \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 dz. \quad (23)$$

Пример 4. Определим критическую силу для однопролетного шарнирно опертого сжатого стержня, поперечное сечение которого имеет переменный момент инерции

$$J = J_0 \sin \frac{\pi z}{l}$$

(J_0 — момент инерции среднего сечения стержня).
Принимая в качестве кривой изгиба функцию

$$v = f \sin \frac{\pi z}{l},$$

удовлетворяющую граничным условиям задачи (f — неопределенный параметр), находим числитель формулы (23)

$$\int_0^l EJ_0 \sin \frac{\pi z}{l} \left(-f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} \right) dz = \frac{2\pi^3 EJ_0}{3l^3} f^2$$

и знаменатель той же формулы

$$\int_0^l \left(f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l} \right)^2 dz = \frac{\pi^2}{4l} f^2;$$

отсюда находим критическую силу

$$P_{кр} = \frac{8\pi EJ_0}{3l^2}.$$

Вместо выражения (21) для определения потенциальной энергии можно воспользоваться выражением

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dz}{EJ} \quad (24)$$

(*способ Тимошенко*). Для однопролетного стержня, нагруженного на конце сжимающей силой P ,

$$M = -Pv,$$

и формула Тимошенко принимает вид

$$P_{кр} = \int_0^l \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 dz : \int_0^l \frac{v^2 dz}{EJ}. \quad (25)$$

Пример 5. Определим критическую силу для условий предыдущего примера с помощью формулы Тимошенко.

Числитель в формуле (25)

$$\int_0^l \left(f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l} \right)^2 dz = \frac{\pi^2 f^2}{2l}.$$

Знаменатель в той же формуле находим в виде

$$\frac{1}{EJ_0} \int_0^l f^2 \sin \frac{\pi z}{l} dz = \frac{2lf^2}{\pi EJ_0};$$

отсюда находим критическую силу

$$P_{кр} = \frac{\pi^3 EJ_0}{4l^2}.$$

Важное значение имеет *теорема Рэлея*, согласно которой полученные по формулам (23) или (25) результаты всегда выше истинного значения критической силы (при условии, что принятая форма изгиба удовлетворяет всем геометрическим граничным условиям задачи). Поэтому из нескольких результатов, полученных путем использования различных функций $v(z)$, ближе к истинному наименьший. *Метод Ритца* дает возможность получать уточненные решения с любой желательной степенью точности. Согласно этому методу кривую изгиба оси стержня задают в виде суммы ряда функций, каждая из которых удовлетворяет всем граничным условиям задачи, и вводят в выражение изогнутой оси с неопределенным множителем

$$v = f_1 v_1(z) + f_2 v_2(z) + \dots + f_n v_n(z). \quad (26)$$

Выражение (26) подставляют в формулу полной потенциальной энергии стержня

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz - \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 dz, \quad (27)$$

и уравнение для определения критической силы получают из условий

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial f_1} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial f_2} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial f_n} = 0. \quad (28)$$

Пример 6. Определим методом Ритца критическую силу для консольного стержня постоянного сечения, нагруженного на свободном конце сжимающей силой (пример поясняет применение метода Ритца, которым можно пользоваться и в случае переменного сечения).

Задаемся формой изгиба оси

$$v = f_1 z^2 + f_2 z^4.$$

Независимо от значений параметров f_1 и f_2 каждый из членов этого выражения удовлетворяет геометрическим граничным условиям, т. е. условиям на защемленном конце

$$v = 0, \quad v' = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Составляем выражение полной энергии (27):

$$\mathcal{E} = 2EJl \left(f_1^2 + 4f_1 f_2 l^2 + \frac{36}{5} f_2^2 l^4 \right) - 2Pl^3 \left(\frac{1}{3} f_1^2 + \frac{4}{5} f_1 f_2 + \frac{4}{7} f_2^2 l^6 \right).$$

Образуя затем обе частные производные $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial f_1}$ и $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial f_2}$ и приравняв их нулю, приходим к следующей однородной системе двух алгебраических уравнений относительно параметров f_1 и f_2 :

$$\begin{aligned} \left(EJ - \frac{Pl^2}{3}\right) f_1 + \left(2EJl^2 - \frac{2Pl^4}{5}\right) f_2 &= 0; \\ \left(EJ - \frac{Pl^2}{5}\right) f_1 + \left(\frac{18}{5} EJl^2 - \frac{2Pl^4}{7}\right) f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы оба параметра одновременно не обращались в нуль, необходимо, чтобы нулю равнялся определитель, составленный из коэффициентов полученной системы:

$$\begin{vmatrix} EJ - \frac{Pl^2}{3} & 2EJl^2 - \frac{2Pl^4}{5} \\ EJ - \frac{Pl^2}{5} & \frac{18}{5} EJl^2 - \frac{2Pl^4}{7} \end{vmatrix} = 0.$$

Развертывая этот определитель, приходим к квадратному уравнению для критической силы

$$\left(\frac{Pl^2}{EJ}\right)^2 - 45 \frac{Pl^2}{EJ} + 105 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения

$$P_{кр} = 2,50 \frac{EJ}{l^2}$$

всего на 1,2% отличается от известного точного значения критической силы.

При учете трех членов ряда

$$v = f_1 z^2 + f_2 z^4 + f_3 z^6$$

ошибка оказывается равной всего 0,4%.

Для определения критической нагрузки можно также использовать интегральные уравнения, приведенные в работе [1].

Ниже приведены некоторые частные результаты, полученные путем точного интегрирования дифференциального уравнения задачи.

В табл. 12—16 приведены значения коэффициента η для определения критической силы по формуле (11) для стержней переменной жесткости, которая изменяется вдоль оси по закону

$$J(z) = J_0 (a + bz)^n. \quad (29)$$

В таблицах обозначено: J — наибольший момент инерции поперечного сечения; J_1 — наименьший момент инерции поперечного сечения. Оба момента инерции определяют относительно оси, перпендикулярной к плоскости потери устойчивости.

Показатель степени n принят равным целым числом.

Случай $n = 1$ соответствует сплошному стержню прямоугольного поперечного сечения постоянной высоты; ширина сечения меняется по линейному закону. Случай $n = 2$ с достаточной точностью соответствует пирамидальному стержню, составленному из четырех угловых поясов, соединенных решеткой (или обшитых тонкими листами). Случай $n = 3$ соответствует стержню прямоугольного сечения постоянной ширины, когда высота сечения меняется по линейному закону. Случай $n = 4$ соответствует сплошному пирамидальному (коническому) стержню.

14. Значения коэффициента η для стержня, показанного на рис. 5

$J_1 : J$	$a : l$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	n
<i>Шарнирно опертый стержень (рис. 5, а)</i>						
0	5,78	7,04	8,35	9,36	9,80	1
	1,00	1,56	2,78	6,25	9,59	2
0,01	5,87	7,11	8,40	9,40	9,80	1
	3,45	4,73	6,58	8,61	9,71	2
	2,55	3,65	5,42	7,99	9,63	3
	2,15	3,13	4,84	7,53	9,56	4
0,10	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	1
	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	2
	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	3
	4,81	6,11	7,68	9,10	9,77	4
0,20	7,01	7,99	8,90	9,73	9,82	1
	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	2
	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	3
	6,02	7,20	8,42	9,38	9,80	4
0,40	7,87	8,59	9,19	9,70	9,85	1
	7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	2
	7,52	8,38	9,10	9,62	9,84	3
	7,48	8,33	9,10	9,62	9,84	4
0,60	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	1
	8,51	9,04	9,48	9,74	9,85	2
	8,50	9,02	9,46	9,74	9,85	3
	8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	4
0,80	9,27	9,53	9,69	9,82	9,86	1
	9,24	9,50	9,69	9,82	9,86	2
	9,23	9,50	9,69	9,81	9,86	3
	9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	4
<i>Стержень с заделанными концами (рис. 5, б)</i>						
0,2	20,36	22,36	23,42	25,55	29,00	1
	18,94	22,25	22,91	24,29	27,67	2
	18,48	20,88	22,64	23,96	27,24	3
	18,23	20,71	22,49	23,80	27,03	4
0,4	26,16	27,80	28,96	30,20	33,08	1
	25,54	27,35	28,52	29,69	32,59	2
	25,32	27,20	28,40	29,52	32,44	3
	25,23	27,13	28,33	29,46	32,35	4
0,60	31,04	32,20	32,92	33,80	35,80	1
	30,79	32,02	32,77	33,63	35,64	2
	30,72	31,96	32,72	33,56	35,60	3
	30,68	31,94	32,69	33,54	35,56	4
0,80	35,40	36,00	36,36	36,84	37,84	1
	35,35	35,97	36,34	36,80	37,81	2
	35,33	35,96	36,32	36,80	37,80	3
	35,32	35,96	36,32	36,78	37,80	4

Коэффициенты η для нагружения стержня, состоящего из трех участков (рис. 5), приведены в табл. 14; участок стержня имеет постоян-

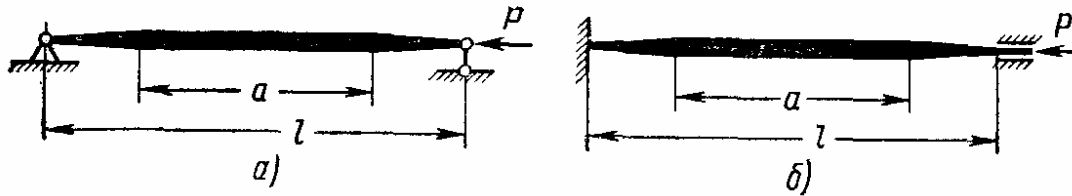


Рис. 5

ное поперечное сечение с моментом инерции J , а два остальных участка симметричны и имеют переменное поперечное сечение, момент инерции которого меняется по закону (29).

Стержни с непрерывным изменением жесткости под действием распределенной нагрузки

Консольный стержень переменной жесткости, когда момент инерции меняется по закону

$$J = J_0 \left(\frac{l - z}{l} \right)^n, \quad (30)$$

где J_0 — момент инерции сечения в заделке, рассчитывают в следующем порядке. Принято, что интенсивность осевой продольной нагрузки следует зависимости

$$q = q_0 \left(\frac{l - z}{l} \right)^k, \quad (30a)$$

причем q_0 — интенсивность нагрузки в сечении $z = 0$. Показатель степени k принимают $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (рис. 6). Критическое значение суммарной нагрузки определяют по формуле

$$P_{кр} = \int_0^l q_{кр} dz = \eta \frac{EJ_0}{l^2}. \quad (31)$$

Значения коэффициента η приведены в табл. 15.

Многопролетные стержни (неразрезные балки)

Критическую силу определяют по формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l_1)^2}, \quad (32)$$

где l_1 — длина одного из пролетов стержня; коэффициент μ берут по графикам на рис. 7—16, предварительно вычислив вспомогательные параметры по формулам табл. 16.

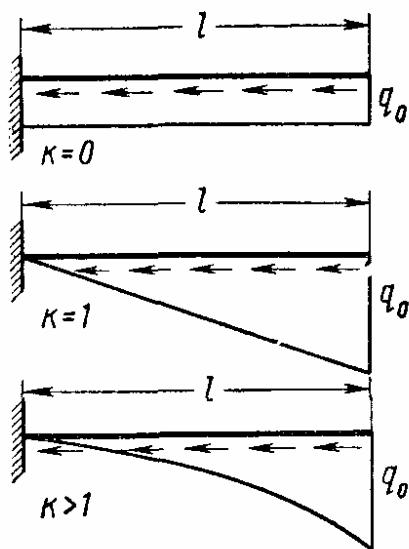


Рис. 6

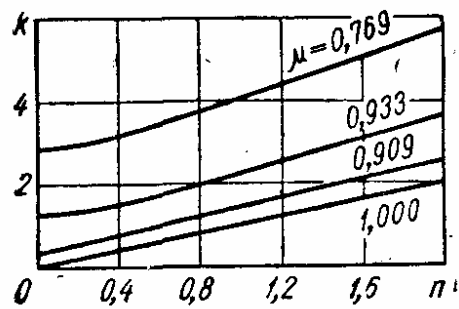


Рис. 7

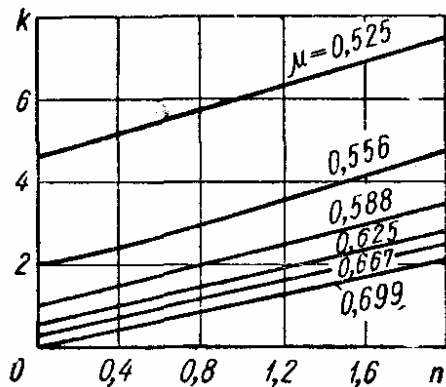


Рис. 8

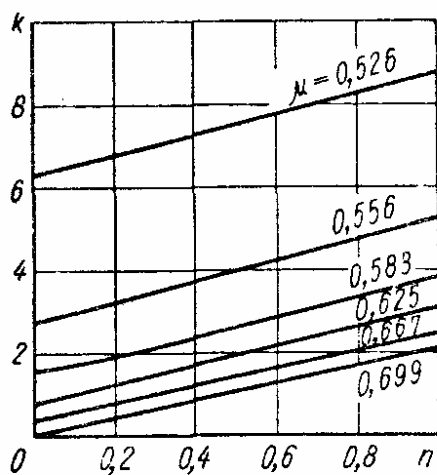


Рис. 9

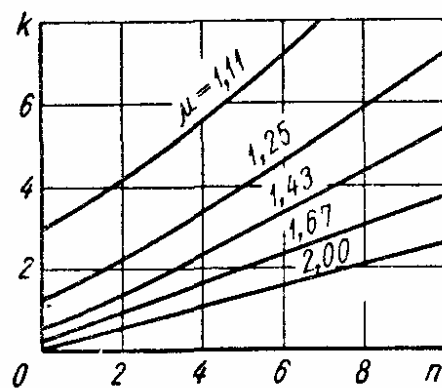
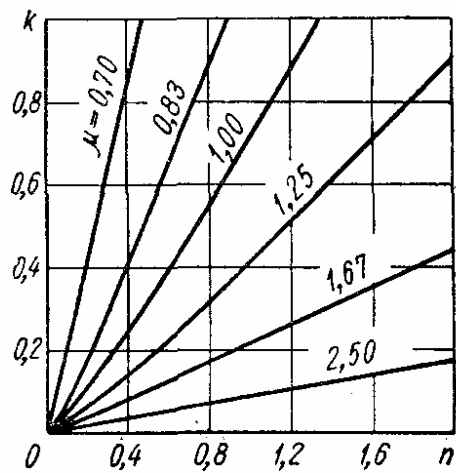
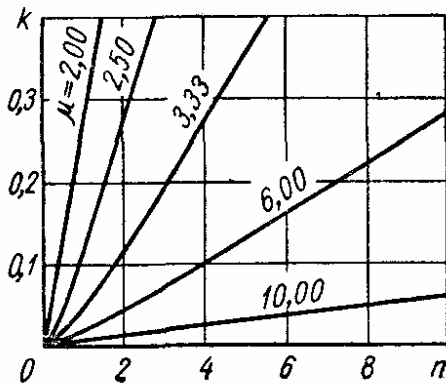


Рис. 10



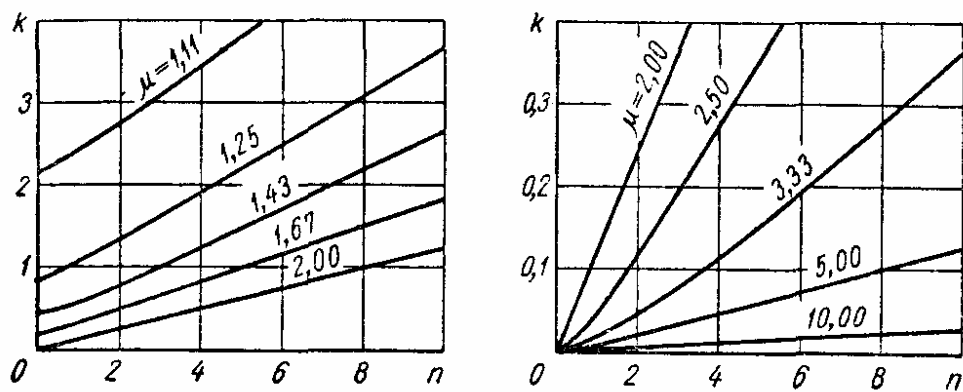


Рис. 11

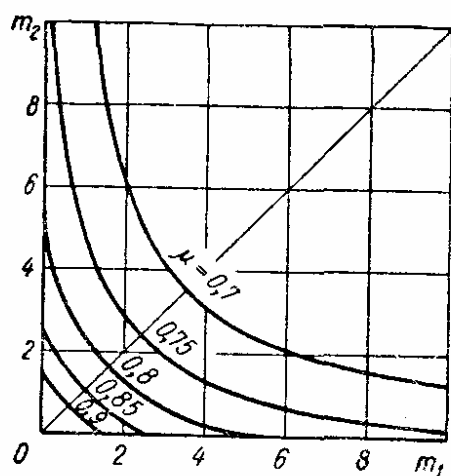


Рис. 12

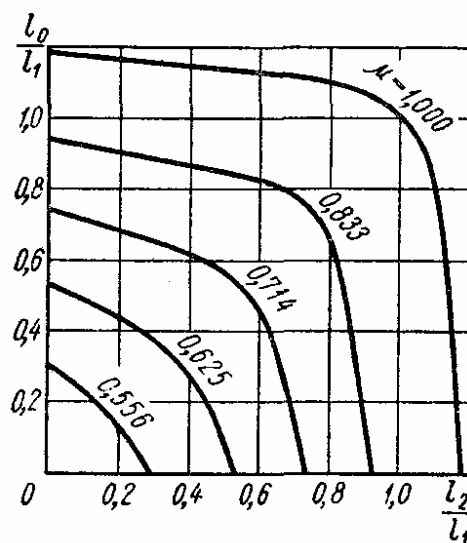


Рис. 13

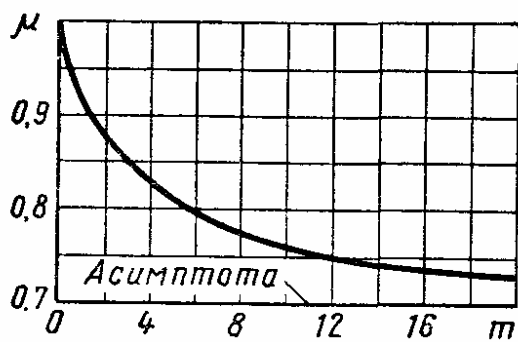


Рис. 14

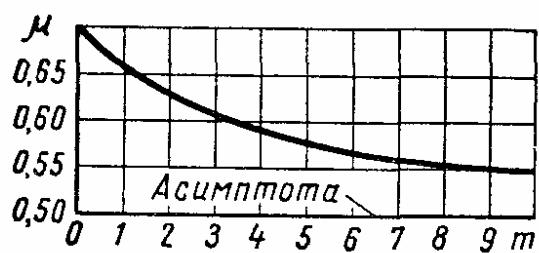


Рис. 15

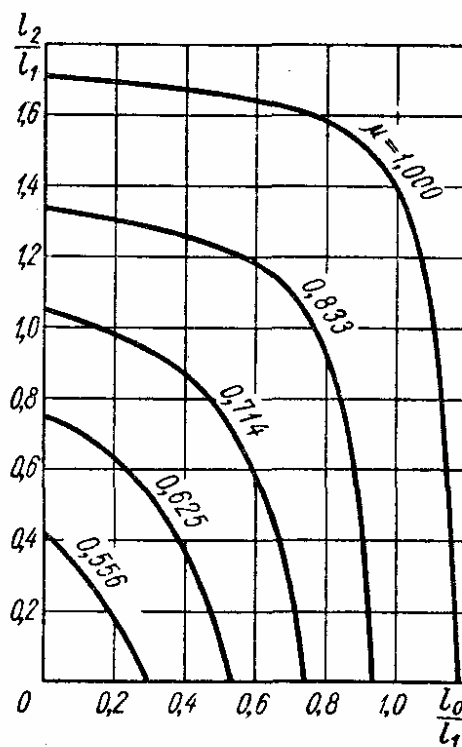
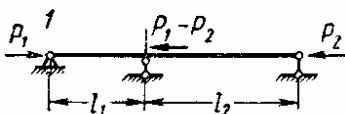
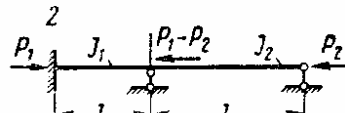
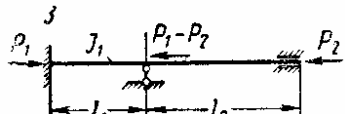
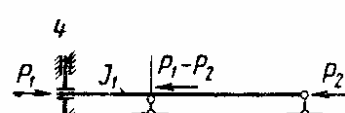
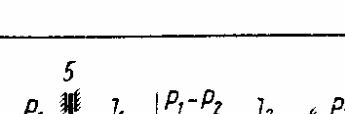
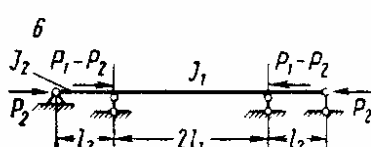


Рис. 16

15. Коэффициенты η для консольного стержня (рис. 6)

k	n				
	0	1	2	3	4
0	7,87	5,78	3,67	—	—
1	16,1	13,0	9,87	6,59	—
2	27,3	23,1	18,9	14,7	10,2
3	41,3	36,1	30,9	25,7	20,2
4	—	52,1	45,8	39,5	33,0
5	—	—	63,6	—	—

16. Выбор коэффициента μ для многопролетных стержней

Схема	Характер опирания концов	Вспомога- тельные параметры	Коэффи- циент μ по гра- фику на рис.
Двухпролетные стержни			
	Оба конца шарнирно оперты	$k = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}$ $n = \frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}$	7
	Один конец заделан, второй шарнирно оперт		9
	Оба конца заделаны		8
	Один конец шарнирно оперт, второй подвижно заделан		10
	Концы заделаны — один подвижно, второй неподвижно		11
Трехпролетные стержни			
	Симметричная балка; все опоры шарнирные	$k = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}$ $n = \frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}$	10

Продолжение табл. 16

Схема	Характер опи- рания концов	Вспомога- тельные параметры	Коэффи- циент μ по гра- фику на рис.
<p>7</p>	Опоры шарнирные; сжат только сред- ний пролет	$m_1 = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}$ $m_2 = \frac{3J_2 l_1}{J_1 l_2}$	12
<p>8</p>	Оба конца шарнир- но оперты; жест- кость и продоль- ная сила постоян- ны	$n = \frac{l_0}{l_1}$ $r = \frac{l_2}{l_1}$	13
<p>9</p>	Оба конца шарнир- но оперты; сжат только крайний пролет	—	14
<p>10</p>	Симметричная бал- ка; оба конца за- деланы	—	11
<p>11</p>	Оба конца задела- ны; сжат только крайний пролет	—	15
<p>12</p>	Один конец шар- нирно оперт, вто- рой заделан; же- сткость и про- дольная сила по- стоянны	—	16
Многопролетные стержни с одинаковыми пролетами (n — число пролетов)			
<p>13</p>	Оба конца шарнир- но оперты	—	$\mu = 1$
<p>14</p>	Оба конца задела- ны	—	По табл. 17
<p>15</p>	Один конец шар- нирно оперт, вто- рой заделан		

17. Значения коэффициентов μ для схем 14 и 15 табл. 16

Число пролетов	Схема 14	Схема 15	Число пролетов	Схема 14	Схема 15
1	0,500	0,699	6	0,939	0,983
2	0,699	0,879	7	0,954	0,988
3	0,814	0,939	8	0,964	0,990
4	0,879	0,964	9	0,971	0,992
5	0,917	0,977	10	0,977	0,994

УПРУГИЕ СТЕРЖНИ НА УПРУГИХ ОПОРАХ ИЛИ СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Общие сведения

В зависимости от конструкции опорных устройств, в расчетной практике применяют схемы опор двух видов: упруго-перемещающиеся опоры, оказывающие упругое сопротивление поступательному перемещению соответствующих сечений (рис. 17, а), и упруго-поворачивающиеся опоры, создающие упругое сопротивление повороту сечений

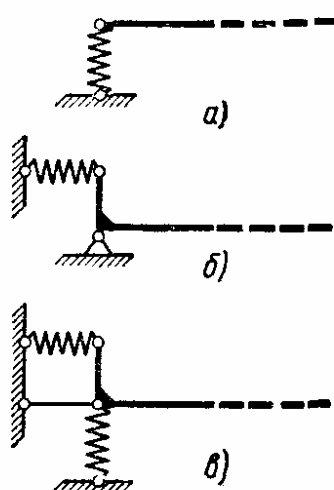


Рис. 17

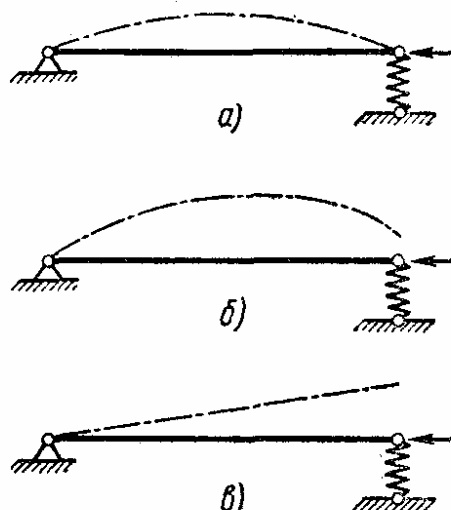


Рис. 18

(рис. 17, б). Реакция опоры *первого вида* представляет собой силу, пропорциональную осадке опоры; коэффициент жесткости опоры далее будем обозначать буквой r . Реакция опоры *второго вида* представляет собой момент, пропорциональный углу поворота; коэффициент жесткости опоры будем обозначать буквой s . В общем случае опора может обладать упругими свойствами обоих видов (рис. 17, в).

Существуют три типа потери устойчивости стержней на упругих опорах:

1) при относительно больших жесткостях упруго-перемещающихся опор потеря устойчивости происходит так, как если бы опора была абсолютно жесткой (рис. 18, а). Наименьшую жесткость опор, при которой возможен этот тип потери устойчивости, называют *критической жесткостью*;

2) при средних жесткостях упруго-перемещающихся опор возмущенная форма равновесия характеризуется как изгибом стержня, так и осадкой опор (рис. 18, б);

3) при малых жесткостях упруго-перемещающихся опор потеря устойчивости может происходить без всякого изгиба оси стержня (рис. 18, в). Этот тип потери устойчивости возможен только в схеме двухопорного стержня.

Предполагается, что сплошное упругое основание обладает свойствами винклеровской модели, т. е. интенсивность распределенной реакции основания принимается пропорциональной осадке (прогибу оси стержня).

Однопролетные стержни на упругих опорах

Значения коэффициента μ для определения критической силы по формуле (8) находят по графикам на рис. 19—32, пользуясь указаниями табл. 18, которая охватывает два первых типа потери устойчивости. Значения коэффициента μ для третьего типа потери устойчивости приведены в табл. 19.

Вспомогательные безразмерные коэффициенты жесткости опор

$$m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}; \quad m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}; \quad n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}; \quad (33)$$

здесь l — длина стержня; EJ — жесткость при изгибе; r_1, s_1 — коэффициенты жесткости левой опоры; r_2, s_2 — коэффициенты жесткости правой опоры.

Многопролетные стержни (неразрезные балки) на упругих опорах

Значения коэффициента μ для определения критической силы по формуле (8) находят по графикам на рис. 33—38, пользуясь указаниями табл. 19. На графиках обозначено: $c = \frac{rl^3}{EJ}$ — безразмерный коэффициент жесткости опоры (здесь r — коэффициент жесткости упруго-перемещающейся опоры); $k = \frac{a}{l}$; $m = \frac{sl}{2EJ}$ для схем 4 и 5 табл. 19.

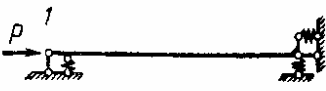
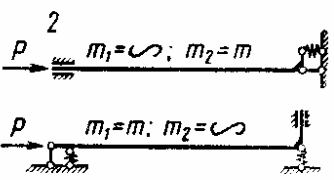
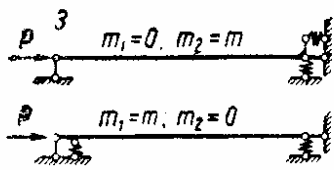
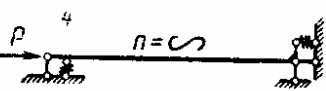
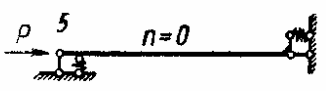
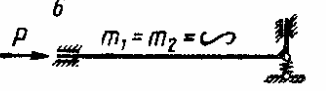
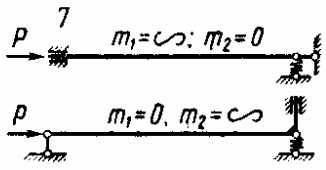
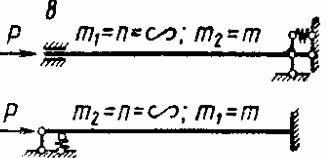
Стержни на сплошном упругом основании

В случае постоянного поперечного сечения дифференциальное уравнение изогнутой оси (возмущенной формы равновесия), если сжимающая сила одинакова во всех сечениях стержня, т. е. в отсутствии распределенной продольной внешней нагрузки, имеет вид

$$EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} + kv = 0, \quad (34)$$

где k — коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели), равный отношению реакции основания к его осадке.

18. Выбор коэффициента μ для однопролетных стержней на упругих опорах

Схема	Коэффициент μ по графику на рис.	Пределы изменения μ
<p>1</p>  <p> $n = 0$ $n = 0,5$ $n = 1,0$ $n = 2,0$ $n = 4$ $n = 10$ </p>	<p>19 20 21 22 23 24</p>	$0,5 \leq \mu \leq \infty$
<p>2</p>  <p> $m_1 = \infty; m_2 = m$ $m_1 = m; m_2 = \infty$ </p>	25	$0,5 \leq \mu \leq 2$
<p>3</p>  <p> $m_1 = 0; m_2 = m$ $m_1 = m; m_2 = 0$ </p>	26	$0,7 \leq \mu < \infty$
<p>4</p>  <p>$n = \infty$</p>	12 27 (при $m_1 = m_2 = m$)	$0,5 \leq \mu < 1$
<p>5</p>  <p>$n = 0$</p>	19 28 (при $m_1 = m_2 = m$)	$1 \leq \mu < \infty$
<p>6</p>  <p>$m_1 = m_2 = \infty$</p>	30	$0,5 \leq \mu \leq 1$
<p>7</p>  <p> $m_1 = \infty; m_2 = 0$ $m_1 = 0; m_2 = \infty$ </p>	29	$0,7 \leq \mu \leq 2$
<p>8</p>  <p> $m_1 = n = \infty; m_2 = m$ $m_2 = n = \infty; m_1 = m$ </p>	15	$0,5 \leq \mu \leq 0,7$

Продолжение табл. 18

Схема	Коэффициент μ по графику на рис.	Пределы изменения μ
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 9 </div> <div> </div> </div>	31	$1 \leq \mu \leq 2$
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 10 </div> <div> </div> </div>	14	$0,7 \leq \mu \leq 1$
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 11 </div> <div> </div> </div>	32	$2 \leq \mu < \infty$
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 12 </div> </div>	—	$\mu = 1$
<p>Примечание. Для схемы 12 необходима также проверка устойчивости по формуле</p> $P_{кр} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} l.$ <p>За расчетное принимают наименьшее из двух полученных значений критической силы.</p>		

 19. Выбор коэффициентов μ для многопролетных стержней на упругих опорах (n — число пролетов)

Схема	Коэффициент μ по гра- фику на рис.	Схема	Коэффициент μ по гра- фику на рис.
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 1 </div> </div>	33	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 3 </div> <div> $n=2$ $n=3$ $n=4$ </div> </div>	36 37 38
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 2 </div> <div> $n=2$ $n=3$ $n=4$ </div> </div>	29 34 35	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 4 </div> </div>	14
		<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div> 5 </div> </div>	15

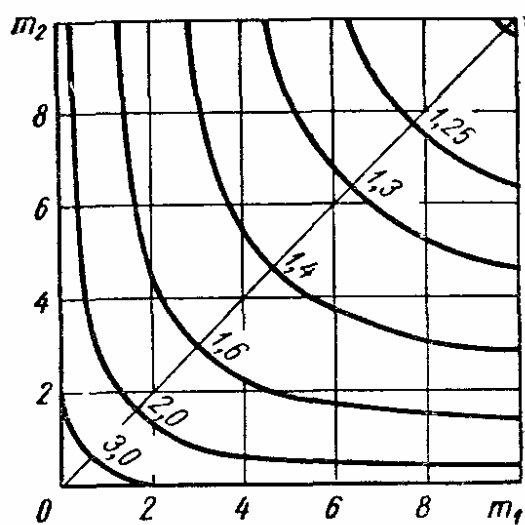


Рис. 19

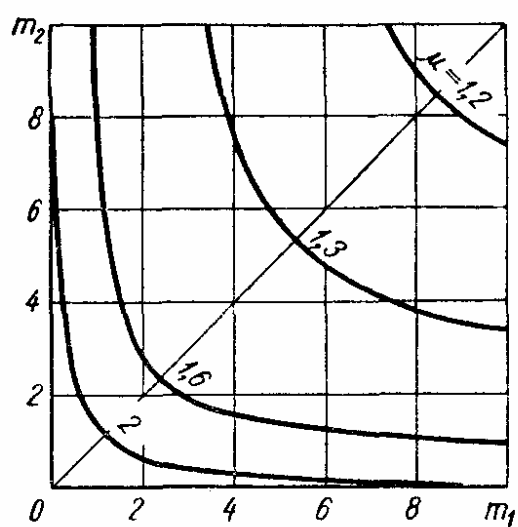


Рис. 20

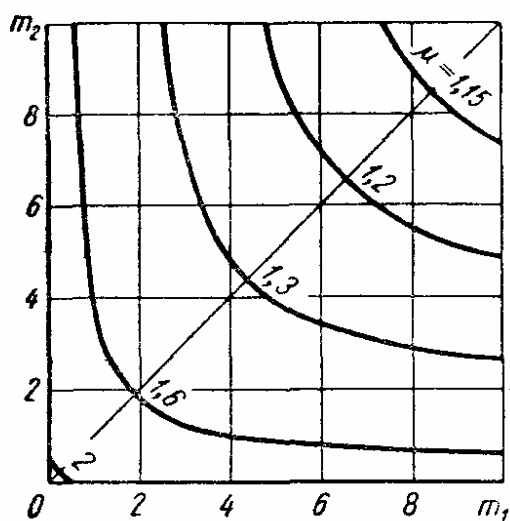


Рис. 21

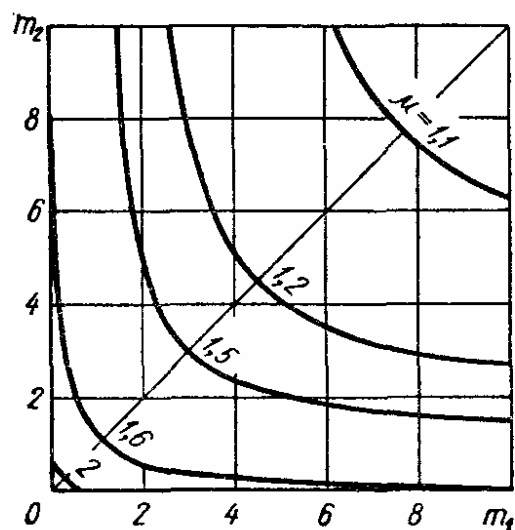


Рис. 22

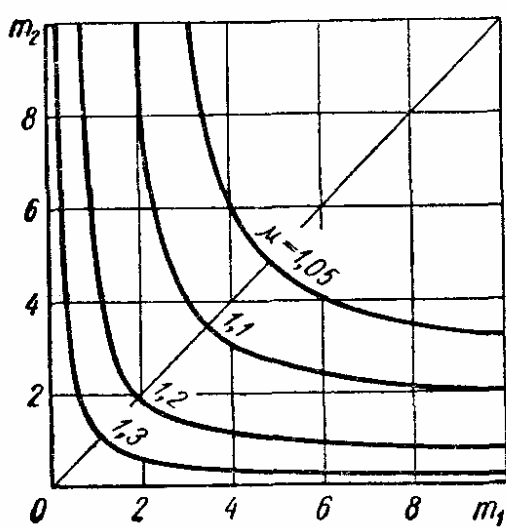


Рис. 23

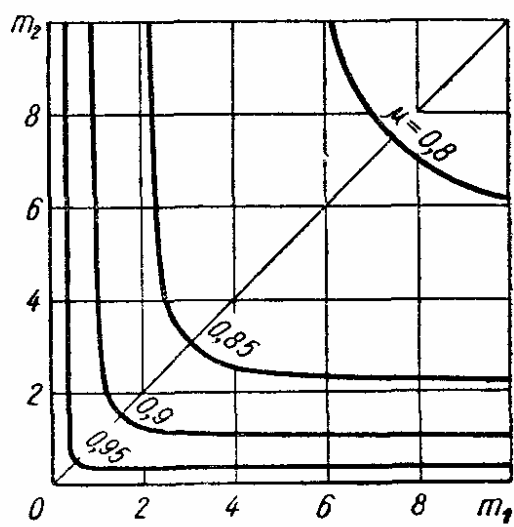


Рис. 24

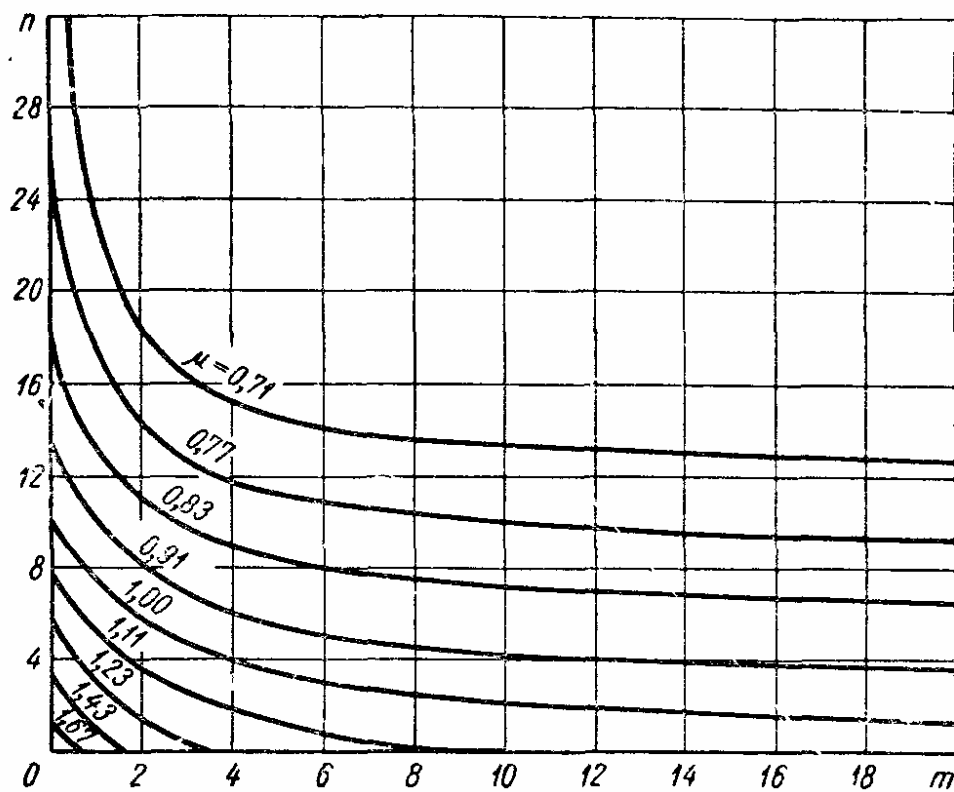


Рис. 25

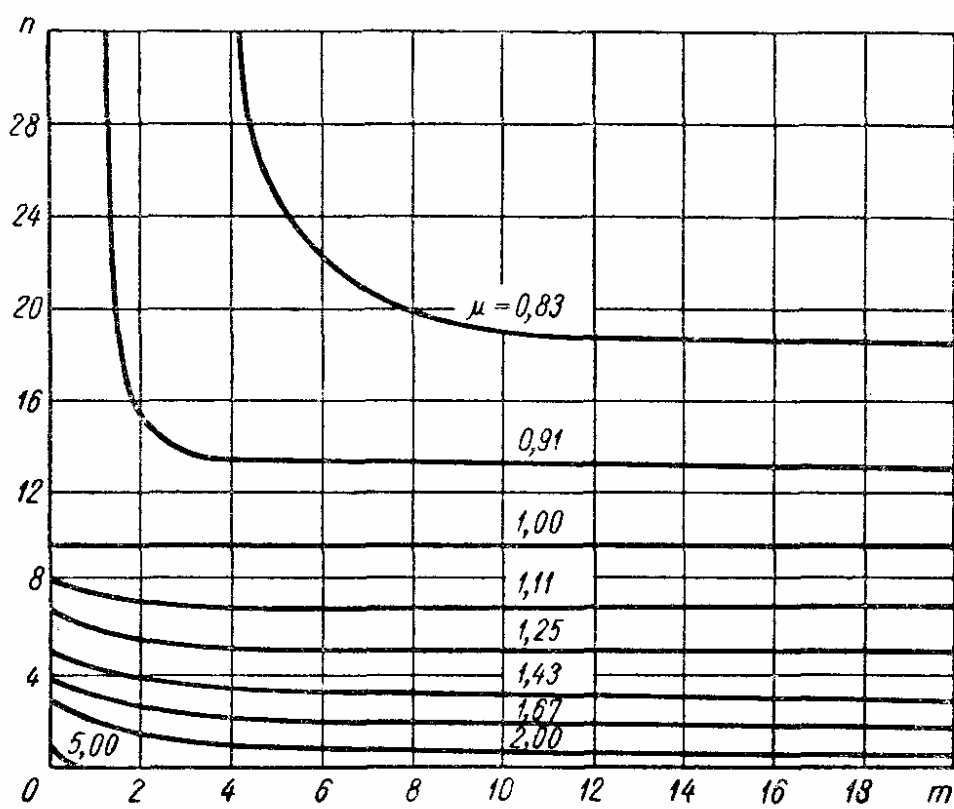


Рис. 26

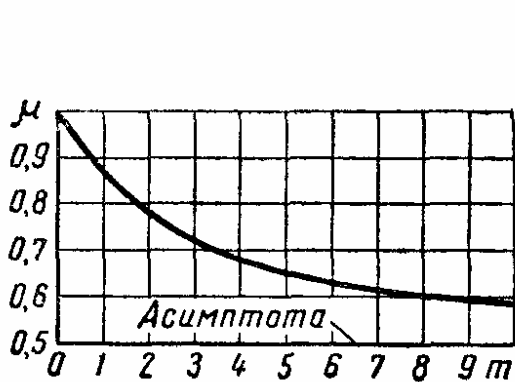


Рис. 27

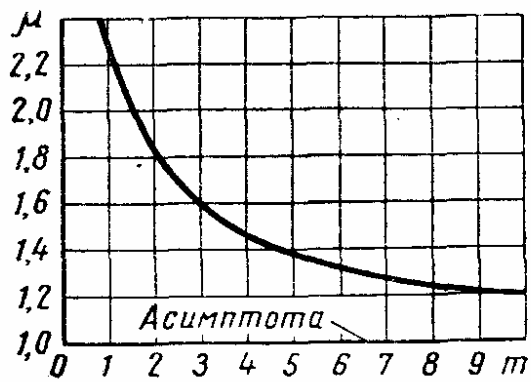


Рис. 28

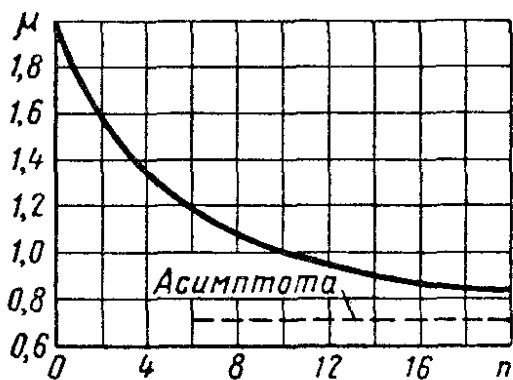


Рис. 29

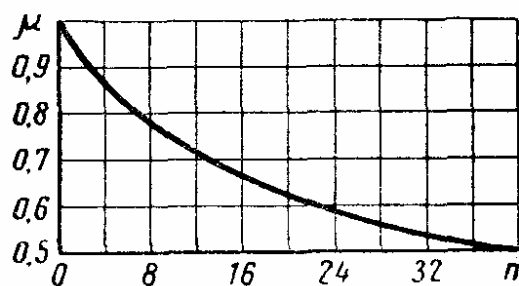


Рис. 30

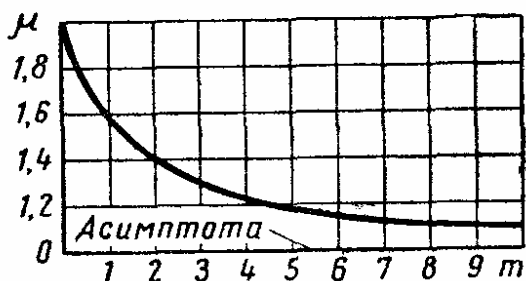


Рис. 31

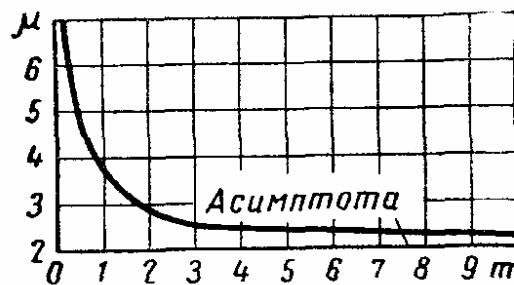


Рис. 32

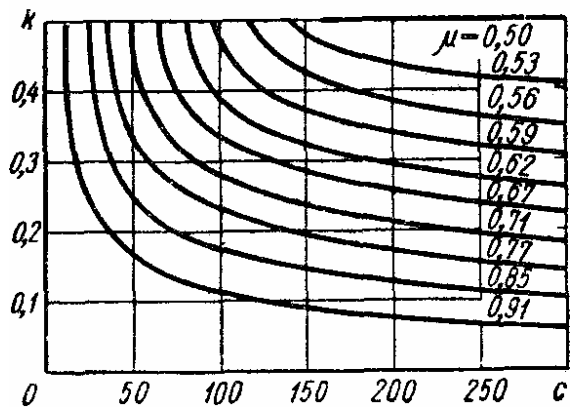


Рис. 33

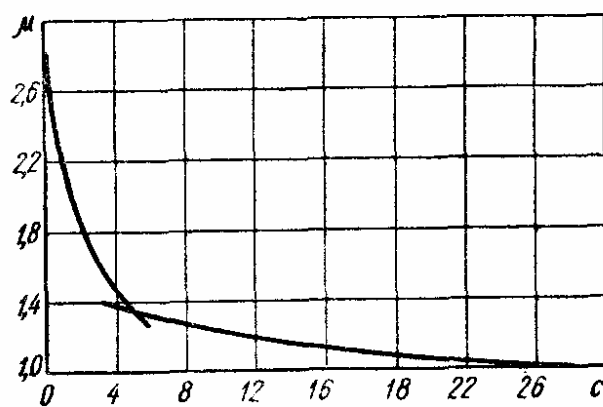


Рис. 34

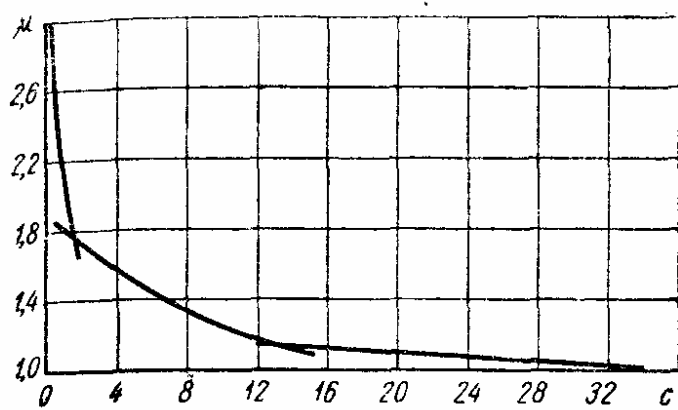


Рис. 35

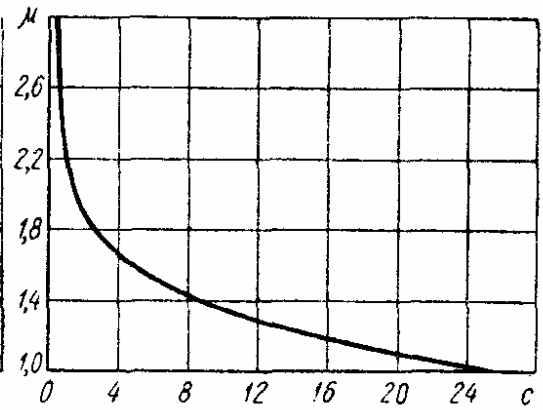


Рис. 36

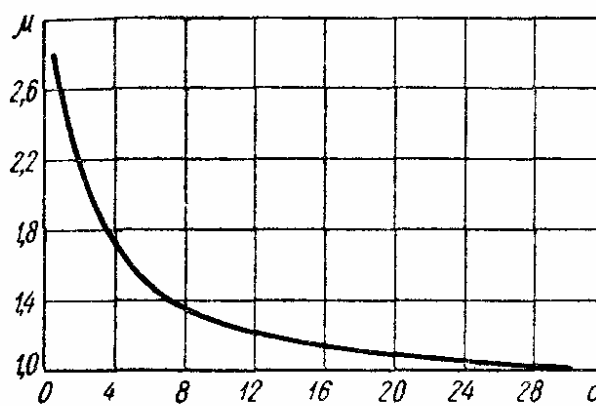


Рис. 37

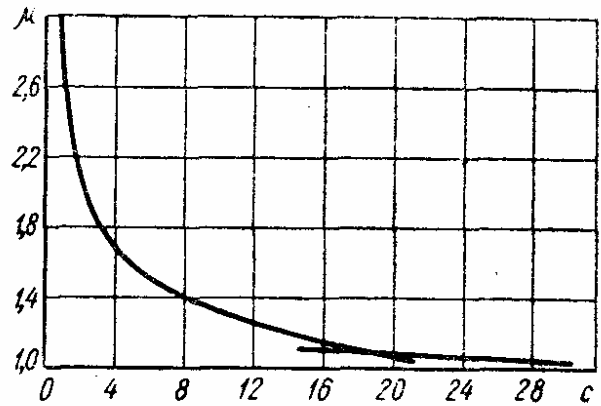


Рис. 38

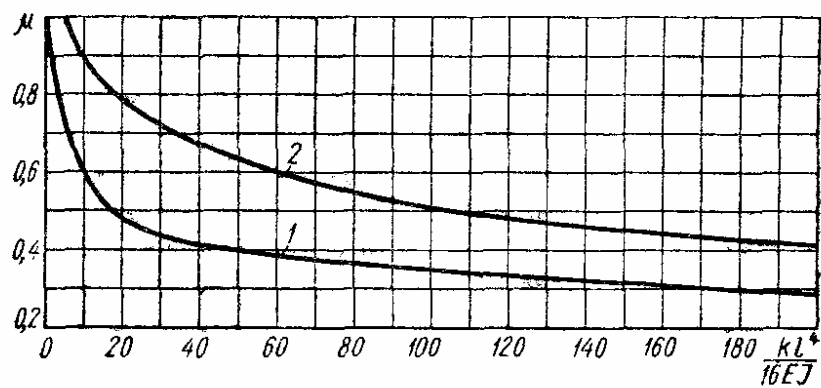


Рис. 39

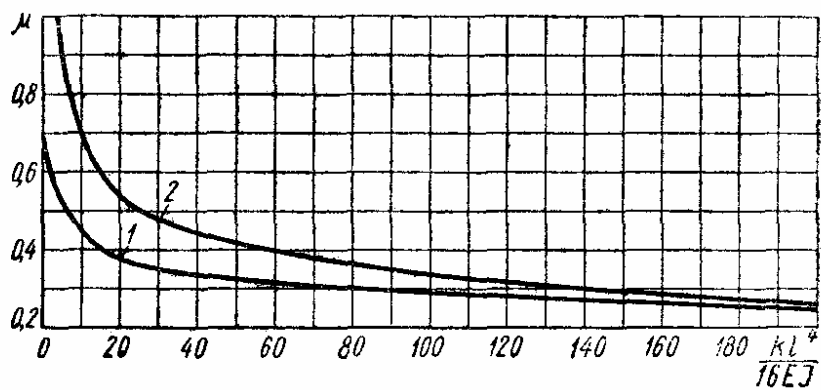


Рис. 40

Если обозначить

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}}; \quad \frac{k}{EJ} = r; \quad m = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - r}}, \quad (35)$$

то решением уравнения (34) будет

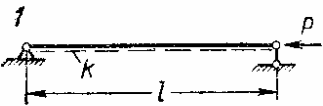
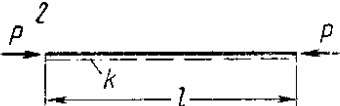
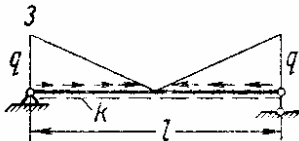
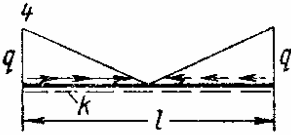
$$v = C_1 \sin mz + C_2 \cos mz + C_3 z + C_4. \quad (36)$$

Оно должно удовлетворять четырем граничным условиям (по два условия на каждом конце стержня). Использование этих условий приводит к однородной относительно C_i системе линейных алгебраических уравнений. Уравнение для критической силы получают из условия, что определитель, составленный из коэффициентов этой системы, не равен нулю.

Число полуволн, на которые подразделяется стержень при потере устойчивости, должно быть найдено из условия минимума сжимающей силы.

Значения коэффициентов μ для определения критической сжимающей нагрузки находят по графикам на рис. 39—40 в соответствии с указаниями табл. 20.

20. Выбор коэффициента μ для упругих стержней на сплошном упругом основании

Схема	Характеристика системы	Коэффициент по графику на рис.
	Концы шарнирно оперты, силы приложены к конечным сечениям	39, кривая 1
	Концы свободные, силы приложены к конечным сечениям	39, кривая 2
	Концы шарнирно оперты, нагрузка распределена вдоль оси и возрастает по линейному закону от середины к концам	40, кривая 1
	То же, что и в схеме 3, но концы свободные	40, кривая 2
<p>Примечание. Критическая нагрузка для схем 3 и 4 будет</p> $\left(\frac{ql}{4}\right)_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}.$		

* Написано совместно с Н. Г. Калинин.

Основные зависимости

Выражения для единичных реакций r_{ik} в зависимости от способа закрепления концов элемента рамы и вида смещения приведены в табл. 21.

В расчетных формулах, приведенных в табл. 21, функции

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(v) &= \frac{v^2}{3 \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right)}; & \varphi_2(v) &= \frac{1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}}{\frac{8}{v} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)}; \\ \varphi_3(v) &= \frac{\frac{v}{\sin v} - 1}{\frac{4}{v} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)}; \\ \varphi_4(v) &= \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right); & \eta_1(v) &= \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3}; \\ \eta_2(v) &= \eta_1\left(\frac{v}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

причем

$$v = \sqrt{\frac{N}{EJ}} l, \quad (40)$$

где l — длина стержня; EJ — его жесткость при изгибе; N — продольная сила.

Значения этих функций даны в табл. 22.

Пример 7. Определить критическую нагрузку для рамы, показанной на рис. 41. Длины и жесткости всех стержней одинаковы.

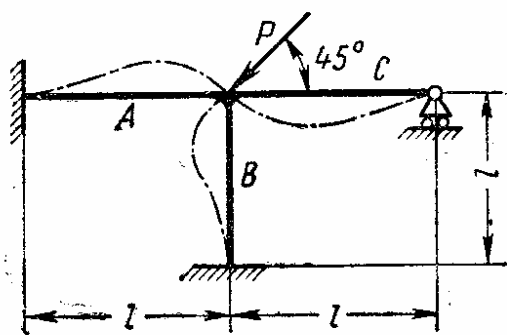


Рис. 41

Сжимающие силы в сечениях стержней

$$N_A = 0,707P;$$

$$N_B = 0,707P;$$

$$N_C = 0.$$

При единичном повороте узла рамы возникают следующие реакции (табл. 21, схема 1): на стержень А

$$r_{11}^A = 4\varphi_2(v) \frac{EJ}{l};$$

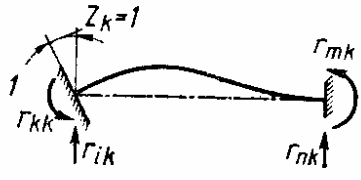
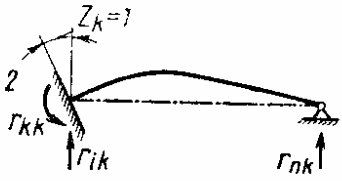
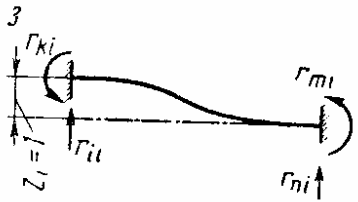

на стержень В (табл. 21, схема 1)

$$r_{11}^B = 4\varphi_2(v) \frac{EJ}{l};$$

на стержень С (табл. 21, схема 2)

$$r_{11}^C = 3\varphi_1(0) \frac{EJ}{l}.$$

21. Расчетные формулы для единичных реакций

Схема	Тип единичного смещения	Расчетные формулы
	Единичный поворот	$r_{kk} = 4\varphi_2 \frac{EJ}{l} ; \quad r_{ik} = 6\varphi_4 \frac{EJ}{l}$ $r_{mk} = 2\varphi_3 \frac{EJ}{l} ; \quad r_{nk} = -r_{ik}$
		$r_{kk} = 3\varphi_1 \frac{EJ}{l} ; \quad r_{ik} = 3\varphi_1 \frac{EJ}{l^2}$ $r_{nk} = -r_{ik}$
	Единичное смещение	$r_{ki} = r_{mi} = 6\varphi_4 \frac{EJ}{l} ; \quad r_{ii} = 12\eta_2 \frac{EJ}{l^3}$ $r_{ni} = -r_{ii}$
		$r_{ik} = 3\varphi_1 \frac{EJ}{l^2} ; \quad r_{ii} = 3\eta_1 \frac{EJ}{l^3}$ $r_{ni} = -r_{ii}$

Так как $\varphi_1(0) = 1$ (см. табл. 22), то полная реакция в дополнительной связи будет

$$r_{11} = r_{11}^A + r_{11}^B + r_{11}^C = \frac{EJ}{l} [8\varphi_2 + 3]$$

и уравнение устойчивости принимает вид

$$8\varphi_2 + 3 = 0.$$

По табл. 22 подбором находим наименьший корень этого трансцендентного уравнения

$$\nu = 4,91.$$

22. Значения функций, вычисленные по формулам (39)

ν	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	η_1	η_2
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9941	0,8556	0,9641
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9788	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	1,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\frac{\pi}{2}$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	—0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	—0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	—0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	—0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	—0,6372	0,5980
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9260	—0,8103	0,5565
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	—0,9931	0,5131
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	—1,1861	0,4675
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	—1,3896	0,4198
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	—1,6040	0,3701
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	—1,8299	0,3181
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	—2,0679	0,2641
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	—2,3189	0,2080
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	—2,5838	0,1498
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	—2,8639	0,0893
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	—3,1609	0,0267
π	0	0,6168	1,2336	0,8224	—3,2898	0
3,20	—0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	—3,4768	—0,0380
3,30	—0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	—3,8147	—0,1051
3,40	—0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	—4,1781	—0,1742
3,50	—0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	—4,5727	—0,2457
3,60	—0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	—5,0062	—0,3191
3,70	—0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	—5,4903	—0,3951
3,80	—1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	—6,0436	—0,4736
3,90	—1,6468	0,3407	1,4584	0,7133	—6,6968	—0,5542
4,00	—2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	—7,5058	—0,6372
4,10	—2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	—8,5839	—0,7225
4,20	—4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	—10,196	—0,8103
4,30	—6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	—13,158	—0,9004
4,40	—15,330	0,0648	1,7310	0,6202	—21,783	—0,9931
4,50	+227,80	—0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	—1,0884
4,60	—	—0,0807	1,8933	0,5772	—	—1,1861
4,70	—	—0,1646	1,9919	0,5543	—	—1,2865
4,80	—	—0,2572	2,1056	0,5305	—	—1,3896
4,90	—	—0,3612	2,2377	0,5054	—	—1,4954

Продолжение табл. 22

ν	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	η_1	η_2
5,00	—	—0,4772	2,3924	0,4793	—	—1,6040
5,10	—	—0,6099	2,5757	0,4520	—	—1,7155
5,20	—	—0,7630	2,7961	0,4234	—	—1,8299
5,30	—	—0,9423	3,0648	0,3931	—	—1,9477
5,40	—	—1,1563	3,3989	0,3621	—	—2,0679
5,50	—	—1,4181	3,8234	0,3291	—	—2,1917
5,60	—	—1,7481	4,3794	0,2944	—	—2,3189
5,70	—	—2,1804	5,1346	0,2580	—	—2,4495
5,80	—	—2,7777	6,2140	0,2195	—	—2,5838
5,90	—	—3,6678	7,8726	0,1790	—	—2,7218
6,00	—	—5,1589	10,727	0,1361	—	—2,8639
6,10	—	—8,2355	16,739	0,0906	—	—3,0102
6,20	—	—18,594	37,308	0,0424	—	—3,1609
2π	—	—	—	0	—	—3,2898

Согласно формуле (39) находим

$$N_{кр} = \frac{\nu^2 EJ}{l^2} = 24,2 \frac{EJ}{l^2},$$

т. е. критическая нагрузка на раму составляет

$$P_{кр} = \frac{24,2}{0,707} \cdot \frac{EJ}{l^2} = 34,2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Для некоторых однопролетных рам данные для расчетов приведены в табл. 23 и на рис. 42—46.

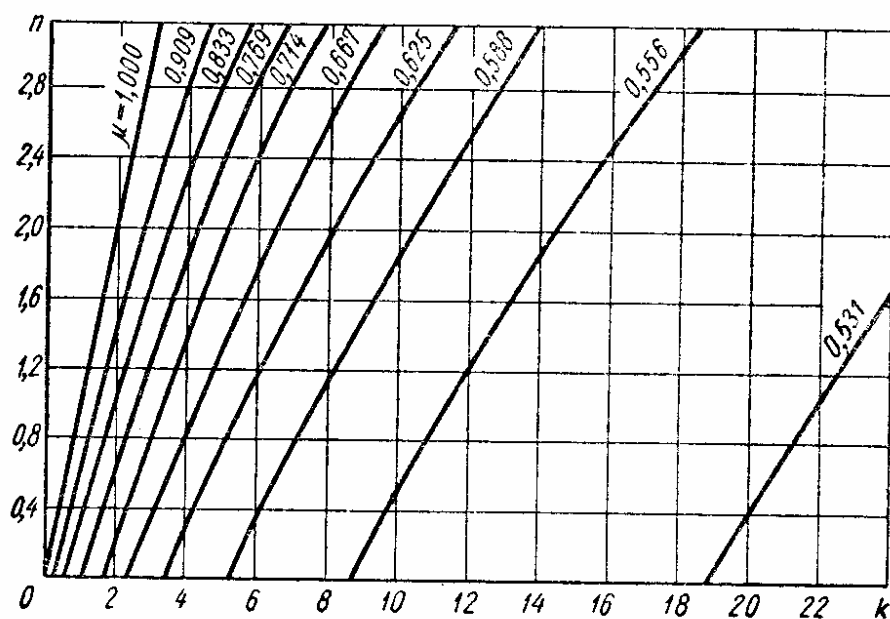


Рис. 42

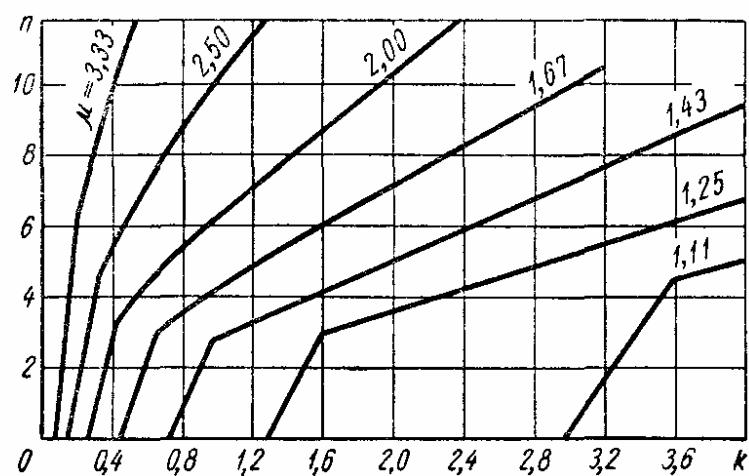


Рис. 43

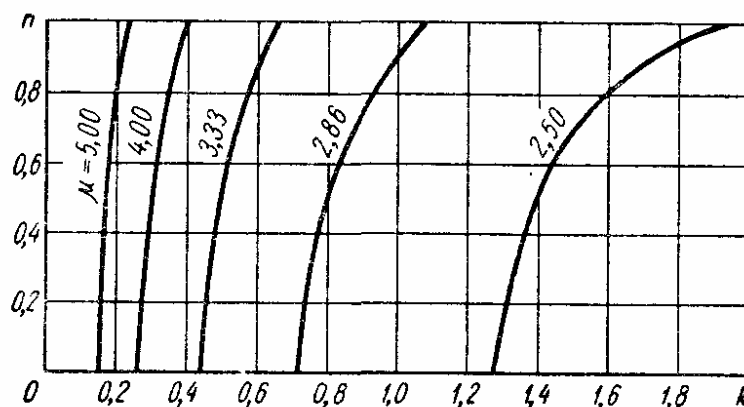


Рис. 44

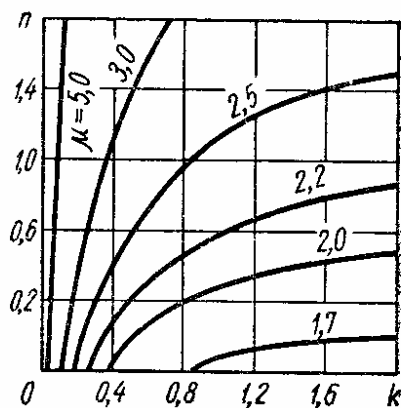


Рис. 45

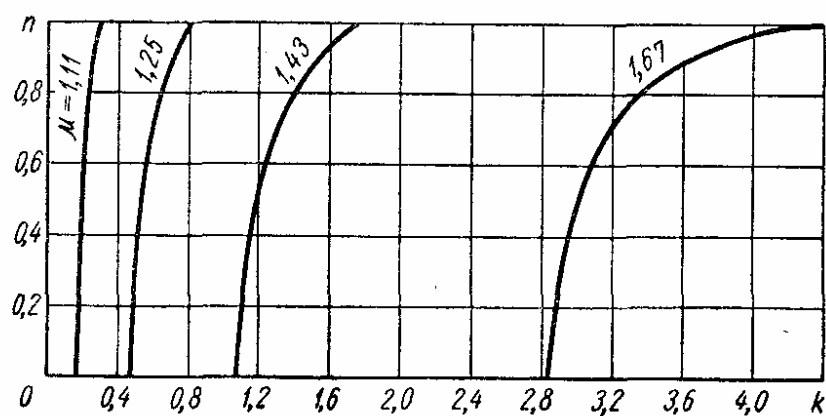
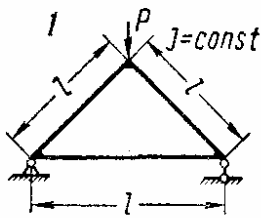
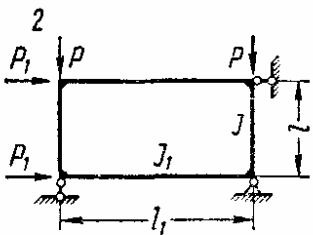
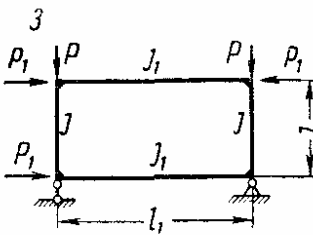
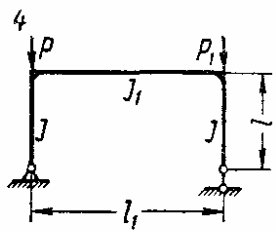
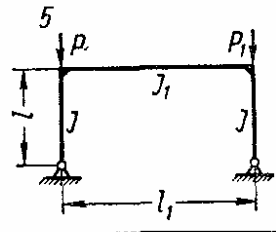
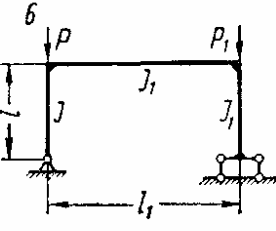
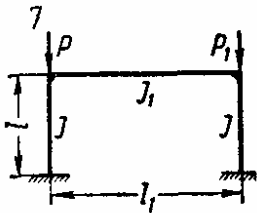


Рис. 46

23. Расчетные данные для некоторых однопролетных рам

Схема	Вспомогательные коэффициенты	Коэффициент μ
	—	$\mu = 0,814$
	$k = \frac{J_1 l}{J l_1}$ $n = \frac{P_1 l_1}{P l}$	По рис. 42
		По рис. 43
	$k = \frac{J_1 l}{J l_1}$ $n = \frac{P_1}{P}$	По рис. 44
		По рис. 45
		По рис. 46

Продолжение табл. 23

Схема	Вспомогательные коэффициенты	Коэффициент μ
	$k = \frac{J_1 l}{J l_1}$ $n = \frac{P_1}{P}$	$\mu = \frac{2 + 5k}{1 + 5k} \sqrt{\frac{1 + n}{2}}$

УПРУГИЕ КРУГОВЫЕ КОЛЬЦА

Общие сведения

Рассмотрим условия потери устойчивости кругового кольца, испытывающего действие равномерно распределенной сжимающей нагрузки, направленной к центру кольца (рис. 47). Предполагаем, что одна из главных центральных осей инерции поперечного сечения лежит в плоскости кривизны кольца, причем все поперечные сечения одинаковы.

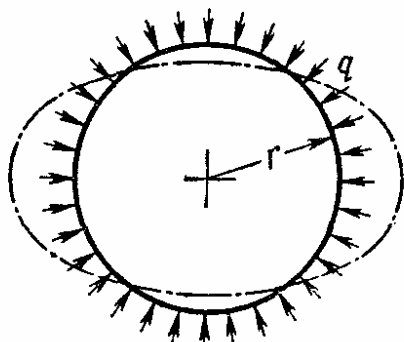


Рис. 47

При достижении нагрузкой q критического значения $q_{кр}$ исходная (круговая) форма оси кольца становится неустойчивой и возникает возмущенная (изогнутая) форма равновесия; в зависимости от параметров кольца изгиб оси может произойти в плоскости кривизны кольца (*плоская*

форма потери устойчивости) или с превращением оси в пространственную кривую (*пространственная форма* потери устойчивости).

Плоская форма потери устойчивости

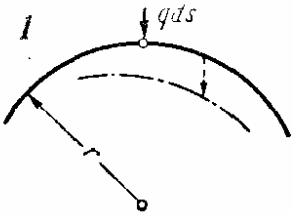
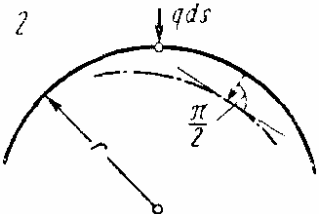
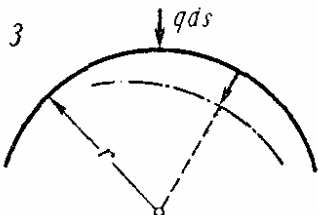
Критическое значение нагрузки $q_{кр}$ существенно зависит от поведения векторов нагрузки при изгибе оси кольца (табл. 24).

В табл. 24 обозначено: B_y — жесткость при изгибе в плоскости кривизны кольца; r — радиус осевой линии.

Пространственная форма потери устойчивости

Такая форма потери устойчивости возможна при условиях, приведенных в табл. 25. В таблице обозначено: B_x — жесткость при изгибе из плоскости кольца, C — жесткость при кручении ($C = GJ_K$); r — радиус осевой линии кольца.

24. Значения $q_{кр}$ в зависимости от поведения нагрузки

Схема	Случай расположения нагрузки	Критическая нагрузка $q_{кр}$
	Элементарные векторы нагрузки $q ds$ остаются параллельными первоначальному направлению	$\frac{4B_y}{r^3}$
	Элементарные векторы нагрузки $q ds$ остаются нормальными к изогнутой оси кольца	Бесшарнирное кольцо $\frac{3B_y}{r^3}$; кольцо с одним шарниром $\frac{1,39B_y}{r^3}$; кольцо с двумя шарнирами $\frac{0,80B_y}{r^3}$
	Элементарные векторы нагрузки остаются направленными к центру кольца	$\frac{4,50B_y}{r^3}$

Примечание. См. также к табл. 25.

25. Значения $q_{кр}$ и условия возникновения пространственной формы потери устойчивости

Схема в табл. 24	$q_{кр}$	Условия потери устойчивости
1	$\frac{9B_x}{\left(4 + \frac{B_x}{C}\right) r^3}$	$q_{кр} < \frac{4B_y}{r^3}$
2	$\frac{3B_x}{r^3}$	$B_x < B_y$
3	$\frac{12B_x}{\left(4 + \frac{B_x}{C}\right) r^3}$	$q_{кр} < \frac{4,5B_y}{r^3}$

Примечание. Если указанные условия потери устойчивости не выполняются, то расчетной является плоская форма потери устойчивости (см. табл. 24).

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Витые (естественно закрученные) стержни при сжатии

Пусть x, y, z — неподвижная прямоугольная система координат, ось которой z совмещена с осью стержня; ξ, η — главные центральные оси поперечного сечения; витыми (естественно закрученными) называют такие стержни, для которых угол ψ между осями ξ и x (или, что то же самое, угол между осями η и y) является функцией координаты z (рис. 48, а). Практическими примерами стержней этого типа могут слу-

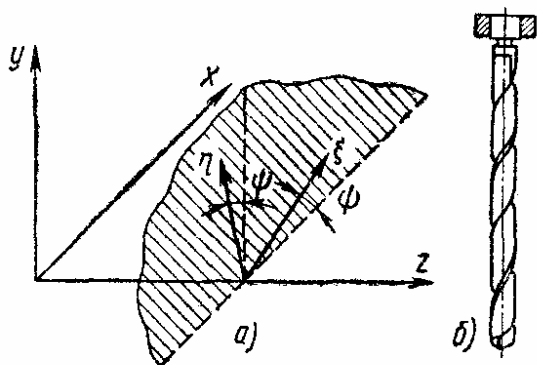


Рис. 48

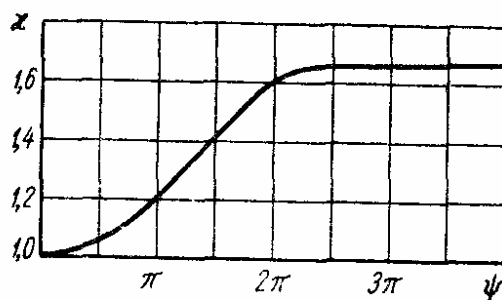


Рис. 49

жить спиральное сверло (рис. 48, б), лопасти воздушных винтов, лопасти турбин, буровые штанги и т. п.

Характеристикой закрученности стержня служит относительная крутка

$$r = \frac{d\psi}{dz}, \quad (41)$$

которая во многих случаях постоянна по длине стержня

$$r = \frac{\Psi}{l}, \quad (42)$$

где l — длина стержня; Ψ — полный угол естественной закрученности, т. е. угол поворота системы осей ξ, η относительно системы осей x, y при переходе от одного конца стержня к другому.

Если главные изгибные жесткости поперечного сечения

$$B_x = EJ_x; \quad B_y = EJ_y \quad (43)$$

равны между собой, то естественная закрученность не влияет на критическое значение сжимающей силы

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 B_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 B_y}{(\mu l)^2}. \quad (44)$$

Естественная закрученность оказывает влияние на критическое значение сжимающей силы только в случаях неравенства главных жесткостей B_x и B_y , а именно, повышает его. Критическую силу определяют по формуле

$$P_{кр} = \kappa \frac{\pi^2 B_y}{(\mu l)^2} \quad (45)$$

(предполагаем, что $B_y < B_x$), причем поправочный коэффициент $\kappa > 1$ зависит от параметров стержня.

Типичная зависимость коэффициента κ от полного угла закрученности Ψ показана на рис. 49 (график построен для стержня, у которого отношение главных жесткостей равно 0,2). При углах Ψ , возрастающих от нуля до значения 2π , коэффициент κ постепенно увеличивается, но при больших значениях он остается практически постоянным.

Для значительно закрученных стержней ($\Psi > 2\pi$) поправочный коэффициент κ может быть определен по приближенной формуле

$$\kappa = \frac{2B_x}{B_x + B_y}.$$

Стержни под действием следящих сжимающих сил

Следящими называют силы, направление которых меняется в зависимости от угловых перемещений сечений, в которых приложены силы. В частности, следящей является нагрузка на кольцо в схеме 2, табл. 25.

Действие продольных сжимающих сил, направление которых совпадает с касательной на конце стержня, показано на рис. 50. Если в этом сечении имеется опора (рис. 50, а), то критическое значение сжимающей силы не отличается от значения, получаемого по формуле Эйлера (44). Если же конец стержня свободен (рис. 50, б), то потеря устойчивости происходит иначе.

При достижении сжимающей силой критического значения прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой, но искривленных форм равновесия вообще не существует и стержень приходит в состояние колебаний с неограниченно возрастающими амплитудами. Для исследования этого типа потери устойчивости метод Эйлера неприменим, и необходимо пользоваться динамическим методом, т. е. составлять уравнения возмущенного движения и исследовать условия возникновения колебаний с возрастающими амплитудами.

Вследствие существенно динамического характера потери устойчивости критическая сила оказывается зависящей от распределения масс по длине стержня.

Наиболее простым оказывается решение в случае, когда масса сосредоточена в концевом сечении стержня. Обозначив через f прогиб конца стержня, имеем, что поперечная сила инерции концевой груза будет

$$R = -m\ddot{f}. \quad (46)$$

Соответственно, изгибающий момент в текущем сечении стержня

$$M = EJv'' = P(f - v) - (P\varphi_i - R)(l - z),$$

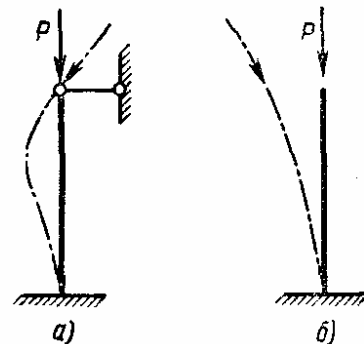


Рис. 50

где $v = v(z, t)$ — прогиб в текущем сечении в произвольный момент времени t ; $\varphi_l = \varphi_l(t)$ — угол поворота концевого сечения. Отсюда следует дифференциальное уравнение

$$v'' + \alpha^2 v = \alpha^2 f - \left(\alpha^2 \varphi_l - \frac{R}{EJ} \right) (l - z),$$

в котором обозначено

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Проинтегрировав это уравнение по координате z и подчинив решение граничным условиям на защемленном конце, получим

$$v = \frac{1}{\alpha} \left(\varphi_l - \frac{R}{\alpha^2 EJ} \right) (\alpha l \cos \alpha z - \sin \alpha z - \alpha l + \alpha z) + f (1 - \cos \alpha z).$$

На свободном конце стержня должно быть

$$v = f; \quad v' = \varphi_l;$$

отсюда следуют два равенства

$$\left(\varphi_l - \frac{R}{\alpha^2 EJ} \right) (\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l) - \alpha f \cos \alpha l = 0;$$

$$\left(\varphi_l - \frac{R}{\alpha^2 EJ} \right) (1 - \alpha l \sin \alpha l - \cos \alpha l) + \alpha f \sin \alpha l - \varphi_l = 0.$$

Исключив угол φ_l и подставив выражение (46) для силы инерции, приходим к основному дифференциальному уравнению задачи

$$\ddot{f} + \omega^2 f = 0,$$

где обозначено

$$\omega^2 = \frac{\alpha^2 EJ}{m (\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l)}.$$

Условие устойчивости имеет вид

$$\omega^2 > 0; \quad \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l > 0;$$

отсюда получают критическое значение параметра αl :

$$\alpha l = 4,493$$

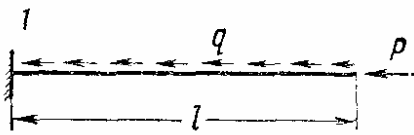
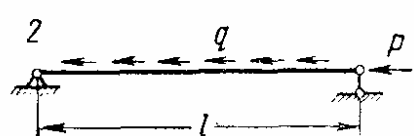
и критическое значение силы

$$P_{кр} = 20,2 \frac{EJ}{l^2},$$

которое в данном случае примерно в 8 раз больше критического значения силы, если она сохраняет неизменное направление, параллельное первоначальному.

Результаты решения других, более сложных случаев, приведены в табл. 26.

26. Некоторые случаи определения критических нагрузок при действии следящих сжимающих сил

А. Сосредоточенная нагрузка $\left(P_{кр} = \eta \frac{EJ_{\min}}{l^2} \right)$	
Характеристика массовых свойств	Значение коэффициента η
Невесомый стержень с сосредоточенной на конце массой	20,19
То же, но концевая масса обладает конечным радиусом инерции ρ	По рис. 51, а
Масса m равномерно распределена по длине стержня (инерция вращения не учтена)	20,5
То же, но, кроме того, на конце имеется сосредоточенная масса M	По рис. 51, б
Б. Распределенная нагрузка $\left(q_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^3} \right)$	
Схема	Значение коэффициента η
	18,96
	40,7

Скручиваемые стержни

Скручиваемый длинный стержень может потерять устойчивость, причем ось его принимает форму кривой двойкой кривизны. Критическим является то значение крутящего момента, при котором прямолинейная форма оси перестает быть формой устойчивого равновесия.

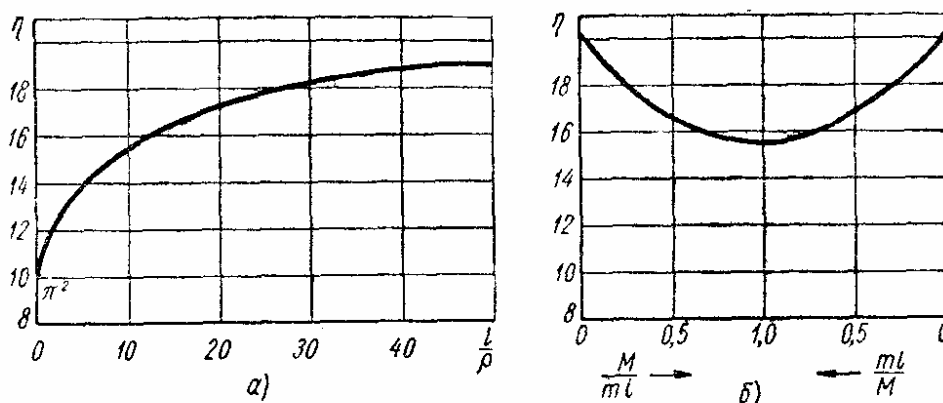


Рис. 51

Если кроме крутящих моментов на стержень действует также продольная сила, то критическое значение скручивающего момента снижается (при сжатии) или возрастает (при растяжении).

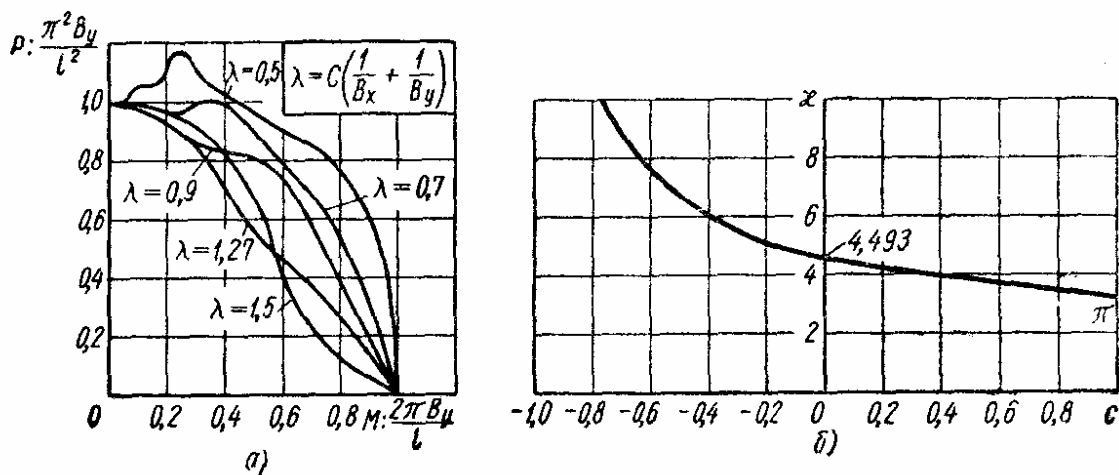


Рис. 52

Данные для определения критических значений скручивающих моментов при различных способах закрепления концов двухопорного скручиваемого стержня приведены в табл. 27.

Обозначения: B_x и B_y — главные жесткости при изгибе;

$$k = \frac{B_y}{B_x} \leq 1;$$

C — жесткость стержня при кручении.

27. Формулы для определения критических скручивающих моментов

Закрепление концов стержня	Действующая нагрузка	k	Критическое значение
Шарнирное	Скручивающие моменты	1	$M_{кр} = \frac{2\pi B_y}{l}$
	Скручивающие моменты и сжимающая сила P	1	$M_{кр} = \frac{2\pi B_y}{l} \sqrt{1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 B_y}}$
	То же	0,5	См. график на рис. 52, а
Концы заделаны	Скручивающие моменты	1	$M_{кр} = \frac{8,97 B_y}{l}$
	То же и сжимающая сила P	—	$l_{кр} = 4\kappa \frac{B_y}{M + \sqrt{M^2 + 4B_y P}}$ <p>Коэффициент κ по графику на рис. 52, б в зависимости от</p> $c = \frac{4BP}{(M^2 + \sqrt{M^2 + 4BP})^2}$

ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

Общие сведения *

Для тонкостенных стержней с открытым профилем сечения характерна относительно небольшая жесткость при кручении. Вследствие этого при сжатии (центральной или внецентренной), а также при изгибе таких стержней становится возможным особый вид потери устойчивости, выражающийся в появлении закрученных или изогнуто-закрученных форм равновесия (рис. 53).

Обозначения: x, y — главные центральные оси поперечного сечения; z — продольная ось стержня, проходящая через центры тяжести его поперечных сечений; a_x и a_y — координаты центра изгиба поперечного сечения в системе осей x и y ; u и v — перемещения центра изгиба сечения в направлениях осей x и y ; φ — угол поворота сечения вокруг центра изгиба; J_x и J_y — главные центральные моменты инерции поперечного сечения; EJ_x и EJ_y — главные жесткости при изгибе;

* Об особенностях тонкостенных стержней, их секториальных характеристиках и расчетах на прочность и жесткость см. т. I, гл. 12.

GJ_κ — жесткость при свободном кручении; J_ω — секториальный момент инерции; EJ_ω — секториальная жесткость; r_p — полярный радиус инерции поперечного сечения; $k^2 = \frac{GJ_\kappa}{EJ_\omega}$ (рис. 54).

Возмущенная форма равновесия характеризуется тремя функциями $u(z)$, $v(z)$ и $\varphi(z)$ и описывается системой трех дифференциальных

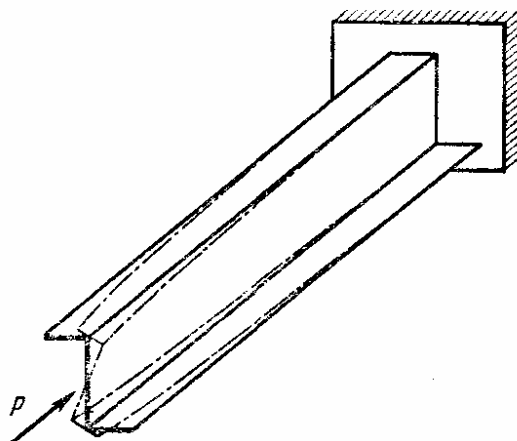


Рис. 53

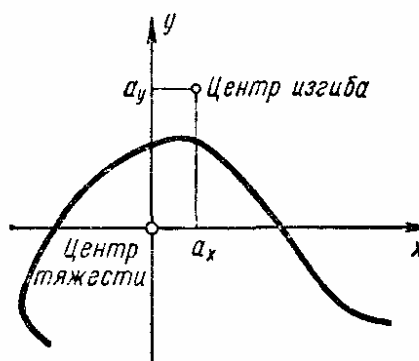


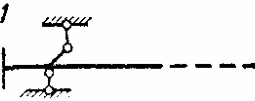
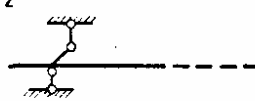

Рис. 54

уравнений. Решение этой системы должно удовлетворять граничным условиям, зависящим от закрепления концов стержня (табл. 28 и 29), где предполагается, что при свободе перемещений концов отсутствуют активные нагрузки на этих концах.

28. Граничные условия, соответствующие изгибу в плоскостях xz и yz

Схема	Характеристика закрепления конца	Граничные условия
1	Заделка: поворот и прогиб невозможны	$u=0; u'=0$ или $v=0; v'=0$
2	Шарнирная опора: прогиб равен нулю, изгибающий момент отсутствует	$u=0; u''=0$ или $v=0; v''=0$
3	Свободный конец: изгибающий момент и поперечная сила равны нулю	$u''=0; u'''=0$ или $v''=0; v'''=0$

29. Граничные условия, соответствующие закручиванию
вокруг оси z

Схема	Характеристика закрепления конца	Граничные условия
	Полная заделка: поворот и деформация отсутствуют	$\varphi = 0;$ $\varphi' = 0$
	Частичная заделка: поворот невозможен, деформация свободная	$\varphi = 0$ $\varphi'' = 0$
	Частичная заделка: свободный поворот, деформация отсутствует	$\varphi' = 0;$ $\varphi''' = k^2 \varphi'$
	Свободный конец: свободный поворот, свободная деформация	$\varphi'' = 0;$ $\varphi''' = k^2 \varphi'$

Центрально сжатые стержни

Возмущенные формы равновесия описываются системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + Pa_y \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0; \\ EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - Pa_x \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0; \\ EJ_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (Pr_p^2 - GJ_\kappa) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + P \left(a_y \frac{d^2 u}{dz^2} - a_x \frac{d^2 v}{dz^2} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где P — сжимающая сила.

Случай, когда сечение имеет две оси симметрии. В этом случае $a_x = a_y = 0$ и система дифференциальных уравнений (47) распадается на три уравнения

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} &= 0; \\ EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0; \\ EJ_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (Pr_p^2 - GJ_\kappa) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Вследствие независимости дифференциальных уравнений (48) возможны три различные и несвязанные один с другим возмущенные формы равновесия: две чисто изгибные и одна чисто крутильная; каждой из них соответствует свое критическое значение нагрузки.

При граничных условиях

$$u = v = \varphi = 0; \quad u'' = v'' = \varphi'' = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = l \quad (49)$$

(см. схему 1 в табл. 30) решением системы (48) служат выражения

$$u = A \sin \frac{\pi z}{l}; \quad v = B \sin \frac{\pi z}{l}; \quad \varphi = C \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (50)$$

Для существования этих возмущенных форм равновесия должны выполняться неравенства $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, что приводит к следующим трем критическим значениям сжимающей силы:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{\pi^2 E J_x}{l^2}; & P_y &= \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}; \\ P_\omega &= \frac{1}{r_p^2} \left(\frac{\pi^2 E J_\omega}{l^2} + G J_\kappa \right). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

За расчетную принимают наименьшую из найденных трех критических сил.

При других способах закрепления концов стержня критические значения сжимающей силы определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{\pi^2 E J_x}{(\mu l)^2}; & P_y &= \frac{\pi^2 E J_y}{(\mu l)^2}; \\ P_\omega &= \frac{1}{r_p^2} \left[\frac{\pi^2 E J_\omega}{(\nu l)^2} + G J_\kappa \right], \end{aligned} \right\} \quad (52)$$






где μ — коэффициент длины при изгибных формах потери устойчивости; ν — коэффициент длины при крутильной форме потери устойчивости. Значения μ см. стр. 17, значения ν приведены в табл. 30.

Случай, когда сечение имеет одну ось симметрии. Пусть главная центральная ось поперечного сечения x является его осью симметрии. Тогда $a_y = 0$ и система уравнений (47) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} E J_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} &= 0; \\ E J_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - P a_x \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0; \\ E J_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (P r_p^2 - G J_\kappa) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - P a_x \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Первое из этих уравнений соответствует чисто изгибной форме потери устойчивости (изгиб в плоскости симметрии стержня), а два других уравнения — изгибно-крутильной форме потери устойчивости

30. Значения коэффициента длины ν

Схема	Коэффициент длины ν
	1
	0,5
	0,7
	2
	2

(изгиб из плоскости симметрии, сопровождаемый закручиванием сечений). В рассматриваемом случае чисто крутильная форма потери устойчивости невозможна.

При граничных условиях (49) система дифференциальных уравнений (53) удовлетворяется решениями (50). При этом можно получить критическую силу

$$P_y = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}, \quad (54)$$

соответствующую изгибу в плоскости симметрии, а также уравнение для определения критических сил $P = P_1$, $P = P_2$, определяющих появление изгибно-крутильной формы потери устойчивости,

$$\begin{vmatrix} P_x - P & P a_x \\ P a_x & (P_\omega - P) r_p^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (55)$$

В этом уравнении P_x и P_ω находят по формулам (52).

Корни квадратного уравнения (55) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \left[P_x + P_\omega - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(P_x + P_\omega)^2 - 4P_x P_\omega \left(1 - \frac{a_x^2}{r_p^2} \right)} \right] : 2 \left(1 - \frac{a_x^2}{r_p^2} \right); \\ P_2 &= \left[P_x + P_\omega + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(P_x + P_\omega)^2 - 4P_x P_\omega \left(1 - \frac{a_x^2}{r_p^2} \right)} \right] : 2 \left(1 - \frac{a_x^2}{r_p^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Так как $P_1 < P_2$, то расчетное значение критической силы определяется как наименьшее из значений P_y и P_1 . Если $P_y < P_1$, то раньше возникает изгибная форма потери устойчивости (изгиб в плоскости симметрии), если же $P_y > P_1$, то раньше наступает изгибно-крутильная форма потери устойчивости (изгиб из плоскости симметрии, сопрово-

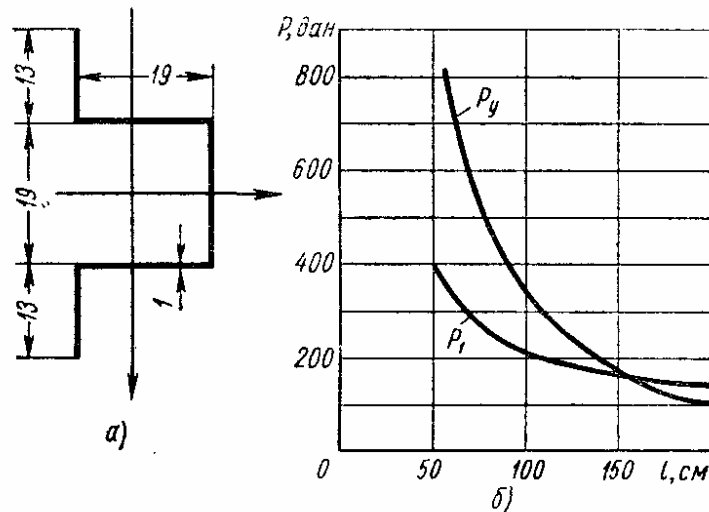


Рис. 55

ждаемый закручиванием сечений). С уменьшением длины стержня отношение $P_1 : P_y$ возрастает и вместе с этим становится все более возможным, что расчетной окажется изгибно-крутильная форма потери устойчивости. В качестве примера на рис. 55, а показано сечение дуралюминового стержня, а на рис. 55, б — графики критических сил P_1 и P_y в зависимости от длины стержня l . При $l < 160$ см расчетной оказывается изгибно-крутильная форма потери устойчивости.

При изгибно-крутильной возмущенной форме равновесия стержня центр поворота сечений не совпадает ни с центром тяжести, ни с центром изгиба; координата c_x центра поворота определяется формулой

$$c_x = \frac{a_x}{1 - \frac{P}{P_x}}. \quad (57)$$

Общий случай поперечного сечения. В общем случае для определения критических значений сжимающей силы нужно исходить из полной системы дифференциальных уравнений (47). При граничных условиях (49) критические значения являются корнями уравнения:

$$\begin{vmatrix} P_y - P & 0 & -Pa_y \\ 0 & P_x - P & Pa_x \\ -Pa_y & Pa_x & (P_\omega - P) r_p^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (58)$$

которому можно придать вид

$$a_3 P^3 + a_2 P^2 + a_1 P + a_0 = 0; \quad (59)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= P_x P_y P_\omega r_p^2; \\ a_1 &= -(P_x P_y + P_y P_\omega + P_x P_\omega) r_p^2; \\ a_2 &= (P_x + P_y + P_\omega) r_p^2 - a_y^2 P_x - a_x^2 P_y; \\ a_3 &= -r_p^2 + a_x^2 + a_y^2. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Трем корням кубического уравнения (59) соответствуют три различные изгибно-крутильные формы равновесия; чисто изгибная форма равновесия в общем случае невозможна. Наименьший из корней принимается за расчетное значение критической силы. Этот корень всегда меньше, чем P_x , P_y или P_ω .

Внецентренно сжатые стержни

В общем случае внецентренного сжатия ось стержня перестает быть прямолинейной, а сечения стержня закручиваются. При этом упругое равновесие стержня описывается системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + P (a_y - e_y) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0; \\ EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - P (a_x - e_x) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0; \\ EJ_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + [P (r_p^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) - GJ_\kappa] \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \\ + P (a_y - e_y) \frac{d^2 u}{dz^2} - P (a_x - e_x) \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

здесь e_x и e_y — координаты точки приложения сжимающей силы в системе главных центральных осей;

$$\left. \begin{aligned} \beta_x &= \frac{T_y}{2J_y} - a_x; \quad \beta_y = \frac{T_x}{2J_x} - a_y; \\ T_x &= \int_{(F)} y (x^2 + y^2) dF; \quad T_y = \int_{(F)} x (x^2 + y^2) dF. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

При $e_x = e_y = 0$ система дифференциальных уравнений (61) переходит в систему дифференциальных уравнений (47), относящихся к случаю центрального сжатия.

Случай, когда сила приложена в центре изгиба сечения. При этом $e_x = a_x$ и $e_y = a_y$ и система дифференциальных уравнений (61) распадается на три независимых уравнения

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} &= 0; \\ EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0; \\ EJ_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + [(r_p^2 + 2\beta_x a_x + 2\beta_y a_y) P - GJ_\kappa] \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Первые два уравнения соответствуют изгибным возмущенным формам равновесия, а третье — чисто крутильной форме равновесия. При граничных условиях (49) соответствующие критические значения нагрузки определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}; \quad P_y = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}; \\ P_\omega^* &= \frac{\frac{\pi^2 EJ_\omega}{l^2} + GJ_\kappa}{r_p^2 + 2\beta_x a_x + 2\beta_y a_y}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Сечение имеет одну ось симметрии и сжимающая сила приложена в одной из точек этой оси. Пусть ось x совмещена с осью симметрии поперечного сечения. Тогда $e_y = 0$; $a_y = 0$ и система дифференциальных уравнений (61) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} &= 0; \\ EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} - P(a_x - e_x) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0; \\ EJ_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + [P(r_p^2 + 2\beta_x e_x) - GJ_\kappa] \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - & \\ - P(a_x - e_x) \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Первое уравнение определяет чисто изгибную форму потери устойчивости, которой соответствует критическая сила

$$P_y = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}. \quad (66)$$

Два последних уравнения системы (65) определяют изгибно-крутильные формы равновесия. Соответствующие им критические силы являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} P_x - P & P(a_x - e_x) \\ P(a_x - e_x) & P_{\omega} r_p^2 - P(r_p^2 + 2\beta_x e_x) \end{vmatrix} = 0. \quad (67)$$

Эти корни определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2a_2} \left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \right); \\ P_2 &= \frac{1}{2a_2} \left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= P_x P_{\omega} r_p^2; \\ a_1 &= P_x (r_p^2 + 2\beta_x e_x) + P_{\omega} r_p^2; \\ a_2 &= r_p^2 + 2\beta_x e_x - (a_x - e_x)^2. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Расчетным является меньшее из значений P_y и P_1 .

Общий случай поперечного сечения. Выражения (50) можно рассматривать как выражения для вариаций перемещений на любом уровне нагружения. Обозначив наибольшие значения этих вариаций через u_0 , v_0 , φ_0 , получим однородные соотношения

$$\left. \begin{aligned} (P_y - P) u_0 - P(a_y - e_y) \varphi_0 &= 0; \\ (P_x - P) v_0 + P(a_x - e_x) \varphi_0 &= 0; \\ -P(a_y - e_y) u_0 + P(a_x - e_x) v_0 + \\ + [P_{\omega} r_p^2 - P(r_p^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y)] &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

отсюда следует кубическое уравнение, определяющее критические значения нагрузки,

$$a_3 P^3 + a_2 P^2 + a_1 P + a_0 = 0, \quad (71)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= P_x P_y P_{\omega} r_p^2; \\ a_1 &= -P_{\omega} (P_x + P_y) r_p^2 - P_x P_y (r_p^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y); \\ a_2 &= P_{\omega} r_p^2 + (P_x + P_y) (r_p^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y) - \\ &\quad - P_x (a_y - e_y)^2 - P_y (a_x - e_x)^2; \\ a_3 &= (a_x - e_x)^2 + (a_y - e_y)^2 - (r_p^2 + 2\beta_x e_x + 2\beta_y e_y). \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Наименьший из корней уравнения (71) принимают за расчетное значение критической силы.

Устойчивость при поперечной нагрузке

При действии поперечной нагрузки, проходящей через центры изгиба сечений и параллельной одной из главных осей, происходит изгиб, не сопровождаемый закручиванием. Однако при достижении нагрузкой некоторого критического значения эта изогнутая форма равновесия перестает быть устойчивой и возникает новая возмущенная форма равновесия, характеризующаяся закручиванием стержня. Особенно большое практическое значение это явление имеет в случаях поперечного изгиба узких высоких балок в плоскости наибольшей жесткости. Случай прямоугольного и двутаврового поперечного сечения см. стр. 66—76.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА *

Общие сведения

Более высокую прочность и жесткость имеют балки с узкими и высокими сечениями. Однако в этих случаях возникает опасность потери устойчивости плоской формы изгиба. Такой вид потери устойчивости называют опрокидыванием; при опрокидывании балка скручивается, а ее ось изгибается в плоскости наименьшей жесткости.

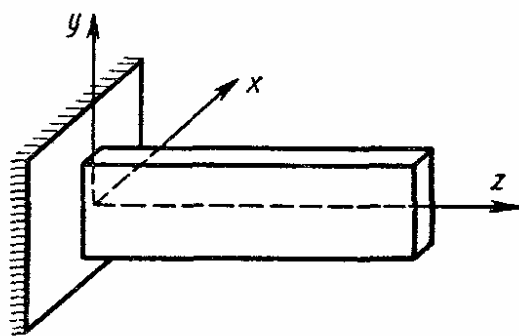


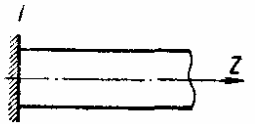
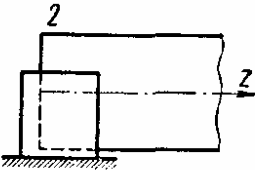
Рис. 56

Обозначения (рис. 56): $B_y = EJ_y$ — жесткость при изгибе в плоскости xz (наименьшая жесткость); $B_x = EJ_x$ — жесткость при изгибе в плоскости yz (наибольшая жесткость); $C = GJ_k$ — жесткость свободного кручения; M_z — крутящий момент; M_x , M_y — изгибающие моменты соответственно в плоскостях yz и xz ; Q_x и Q_y — поперечные силы в направлениях осей x и y ; φ — угол поворота сечения вокруг продольной оси z .

моменты соответственно в плоскостях yz и xz ; Q_x и Q_y — поперечные силы в направлениях осей x и y ; φ — угол поворота сечения вокруг продольной оси z .

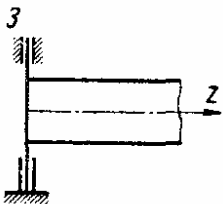
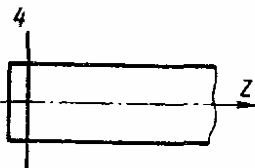
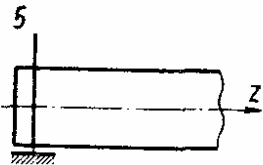
Типы опорных устройств приведены в табл. 31.

31. Типы опорных устройств

Схема	Характеристика опорного устройства	Опорные реакции
	Полная заделка	$M_x; M_y; M_z;$ $Q_x; Q_y$
	Заделка в плоскости xz , шарнир в плоскости yz	$M_x = 0; M_y; M_z;$ $Q_x; Q_y$

* Написано совместно с В. Ф. Луковниковым.

Продолжение табл. 31

Схема	Характеристика опорного устройства	Опорные реакции
	Шарнир в плоскости xz , заделка в плоскости yz	M_x ; $M_y = 0$; M_z ; Q_x , Q_y
	Шарнир в плоскости xz , направляющие в плоскости yz	$M_x = 0$; $M_y = 0$; M_z ; Q_x ; $Q_y = 0$
	Шарниры в плоскостях xz и yz	$M_x = 0$; $M_y = 0$; M_z ; Q_x ; Q_y

Балка с узким прямоугольным сечением (полоса)

Основное дифференциальное уравнение задачи, описывающее возмущенную форму равновесия, имеет вид

$$\varphi'' + \frac{M_x^2}{B_y C} \varphi = 0; \quad (73)$$

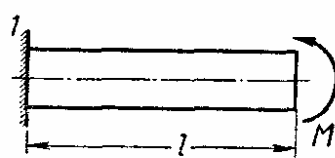
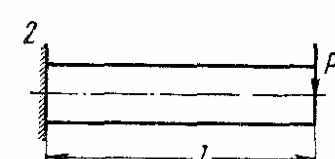
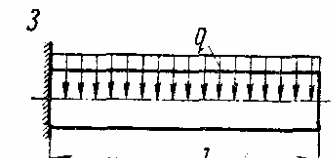
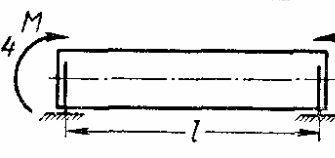
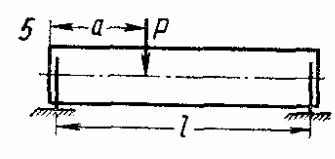
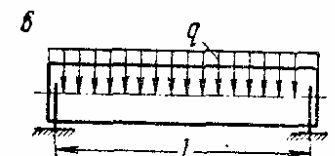
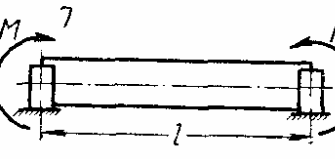
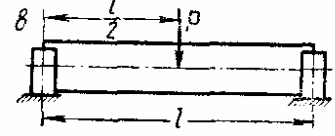
в общем случае оно имеет переменные коэффициенты. Интегрированием уравнения (73) и подчинением решения соответствующим граничным условиям получены результаты для ряда частных задач (табл. 32).

Результаты, приведенные в табл. 32, получены в предположении, что отношение сторон сечения $\frac{b}{h}$ весьма мало и изгибом в плоскости yz можно пренебречь. Однако опрокидывание может произойти и в случаях, когда отношение сторон $\frac{b}{h}$ не очень мало, но длина l достаточно велика. В этих случаях можно пользоваться теми же выражениями для критических нагрузок, но с несколько большими значениями коэффициентов. Так, для схемы 2 при $\frac{b}{h} = \frac{1}{10}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$ вместо коэффициента 4,01 соответственно получится 4,08; 4,32; 5,03.

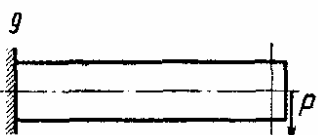

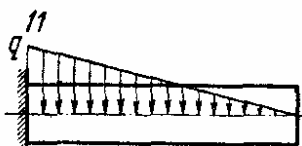
Если консольная полоса имеет переменную высоту, меняющуюся по закону,

$$h = h_0 \sqrt[n]{1 - \frac{z}{l}}, \quad (74)$$

32. Критические нагрузки для некоторых случаев нагружения полосы

Схема	Критическая нагрузка												
	$M_{кр} = \frac{\pi \sqrt{B_y C}}{2l}$ <p>При потере устойчивости плоскость действия пары сохраняет неизменную ориентацию в системе подвижных осей, жестко связанных с перемещающимся торцовым сечением</p>												
	$P_{кр} = \frac{4,01 \sqrt{B_y C}}{l^2}$												
	$(ql)_{кр} = \frac{12,85 \sqrt{B_y C}}{l^2}$												
	$M_{кр} = \frac{\pi \sqrt{B_y C}}{l}$												
	$P_{кр} = \frac{k \sqrt{B_y C}}{l^2}$ <table><tr><td>a : l</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,5</td></tr><tr><td>k</td><td>56,01</td><td>29,11</td><td>21,01</td><td>17,82</td><td>16,94</td></tr></table>	a : l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	k	56,01	29,11	21,01	17,82	16,94
a : l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5								
k	56,01	29,11	21,01	17,82	16,94								
	$(ql)_{кр} = \frac{28,31 \sqrt{B_y C}}{l^2}$												
	$M_{кр} = \frac{2\pi \sqrt{B_y C}}{l}$												
	$P_{кр} = \frac{44,5 \sqrt{B_y C}}{l^2}$												

Продолжение табл. 32

Схема	Критическая нагрузка
	$P_{кр} = \frac{5,56 \sqrt{B_y C}}{l^2}$
	$(ql)_{кр} = 15,95 \frac{\sqrt{B_y C}}{l^2}$
	$\left(\frac{q_0 l}{2}\right)_{кр} = \frac{26,5 \sqrt{B_y C}}{l^2}$

то критическое значение полной нагрузки $Q_{кр}$ определяют по формуле

$$Q_{кр} = \frac{m \sqrt{B_y C}}{l^2}. \quad (75)$$

Коэффициент m зависит от значения показателя корня и вида нагружения (табл. 33).

33. Значения коэффициента m в формуле (75)

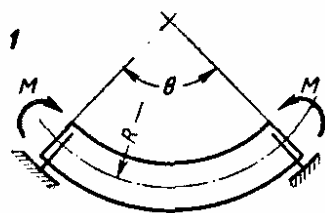
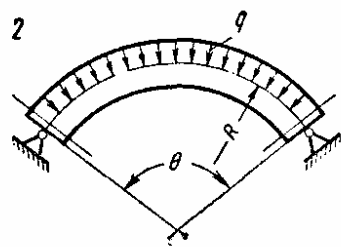
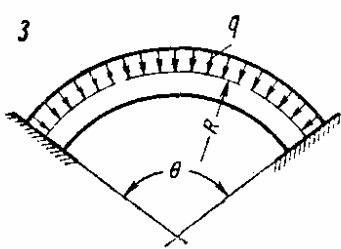
Способ нагружения	n			
	4	2	1,333	1
Сосредоточенная сила на конце (см. схему 2 в табл. 32)	3,61	3,21	2,81	2,40
Распределенная нагрузка (см. схему 3 в табл. 32)	12,8	11,2	10,4	9,60

Формулы для определения критических нагрузок на полосу с круговой осью приведены в табл. 34.

В более сложных случаях нагружения критические значения нагрузок определяют энергетическим методом. Часто практикуют тригонометрическую аппроксимацию функции φ . Более точные результаты получают в том случае, когда для приближенного выражения $\varphi(z)$ принимают функцию прогиба балки, закрепленной и нагруженной так же, как и исследуемая полоса (в плоскости наименьшей жесткости). Такие функции автоматически удовлетворяют всем граничным условиям и достаточно точно отражают действительную деформацию балки.

Ряд полученных таким способом результатов приведен в табл. 35.

14. Критические нагрузки для некоторых случаев нагружения полосы с круговой осью

Схема	Критическая нагрузка														
<div>1</div> 	<div>$M_{кр} = \frac{B_y + C}{2R} \pm$$\pm \sqrt{\left(\frac{B_y + C}{2R}\right)^2 + \frac{B_y C}{R^2} \left(\frac{\pi^2}{\theta^2} - 1\right)}$</div> <div>Нижний знак определяет критическое значение момента, направленного противоположно показанному на схеме</div>														
<div>2</div> 	<div>Если при опрокидывании нагрузка остается параллельной первоначальному направлению, то</div> <div>$(qR)_{кр} = \frac{B_y}{R^2} \cdot \frac{(\pi^2 - \theta^2)^2}{\theta^2 \left(\pi^2 + \theta^2 \frac{B_y}{C}\right)}.$</div> <div>Если при опрокидывании нагрузка остается направленной к исходному центру кривизны, то</div> <div>$(qR)_{кр} = \frac{\pi^2 B_y}{R^2} \cdot \frac{\pi^2 - \theta^2}{\theta^2 \left(\pi^2 + \theta^2 \frac{B_y}{C}\right)}$</div>														
<div>3</div> 	<div>Нагрузка остается параллельной своему первоначальному направлению. Значения коэффициента m:</div> <table><tr><td>θ</td><td>$\pi : 4$</td><td>$\pi : 2$</td><td>π</td><td>$1,063\pi$</td><td>$1,10\pi$</td><td>$1,24\pi$</td></tr><tr><td>m</td><td>60,1</td><td>12,6</td><td>1,85</td><td>1,54</td><td>1,40</td><td>1,00</td></tr></table> <div>$(qR)_{кр} = \frac{m B_y}{R^2}$</div>	θ	$\pi : 4$	$\pi : 2$	π	$1,063\pi$	$1,10\pi$	$1,24\pi$	m	60,1	12,6	1,85	1,54	1,40	1,00
θ	$\pi : 4$	$\pi : 2$	π	$1,063\pi$	$1,10\pi$	$1,24\pi$									
m	60,1	12,6	1,85	1,54	1,40	1,00									

Для определения критических соотношений между несколькими действующими на полосу силами может быть использован *метод наложения*. Он позволяет получить результат по критическим значениям более простых нагрузок, из которых состоит заданная нагрузка.

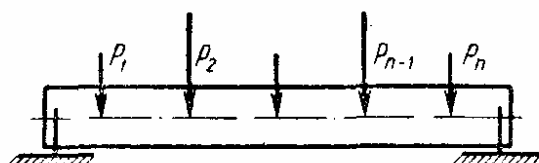


Рис. 57

Для схемы, показанной на рис. 57, критические комбинации сил P_i определяют по формуле

$$\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_{икр}} = 1, \quad (76)$$

где P_i — заданные силы; $P_{икр}$ — критические значения сил (определенные в предположении, что другие нагрузки отсутствуют).

Если в формуле (76) использованы точные значения критических сил $P_{икр}$, то вычисление дает заниженные значения критических нагрузок. При использовании приближенных значений для $P_{икр}$, знак

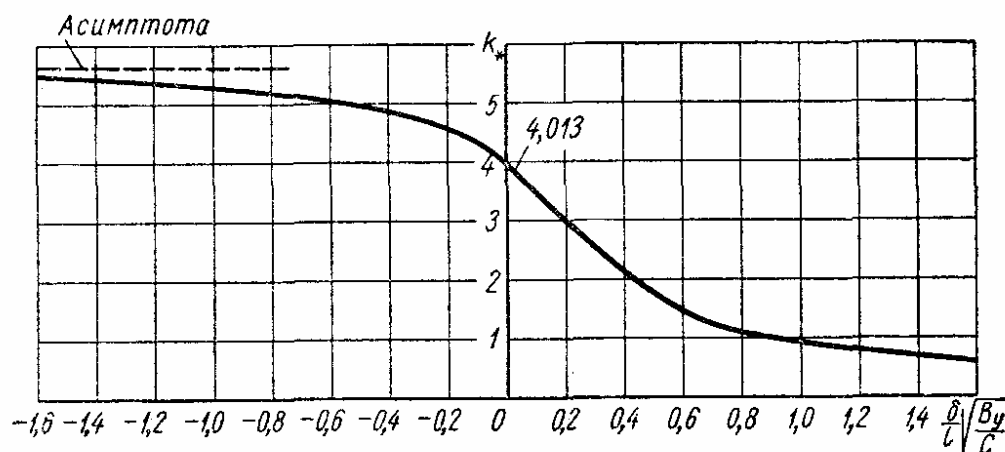


Рис. 58

погрешности, получаемой при пользовании формулой (76), остается неопределенным.

Критическая нагрузка уменьшается с повышением уровня точек приложения и увеличивается с понижением этого уровня. На рис. 58

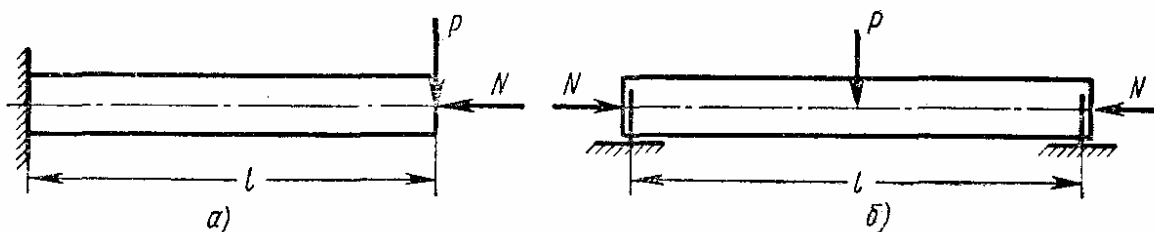


Рис. 59

дан график, характеризующий этот эффект для схем 2 и 5 в табл. 32; в последнем случае предполагаем, что $k = 0,5$. По оси абсцисс отложены значения безразмерного параметра $\frac{\delta}{h} \sqrt{\frac{B_y}{C}}$ (δ — расстояние от оси

балки до уровня приложения нагрузки; если нагрузка приложена выше оси, то $\delta > 0$, в противном случае $\delta < 0$). По оси ординат отложены зна-

чения коэффициента k_0 , на который следует умножить критическое значение, полученное в предположении, что нагрузка приложена к оси балки.

Если кроме поперечной нагрузки на полосу действуют сжимающие силы, то критические значения поперечной нагрузки уменьшаются. Для консольной полосы (рис. 59, а) критическая сила составляет

$$P_{кр} = k_0 \frac{\sqrt{B_y C}}{l^2}. \quad (77)$$

Значения коэффициента k_0 принимают:

$\frac{N}{P} \sqrt{\frac{C}{B_y}}$	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,33	0,5	1,0	2,0	3,0
k_0	4,58	4,29	4,01	3,74	3,47	3,14	2,77	1,95	1,15	0,80

Для двухопорной полосы (рис. 59, б) критическое значение момента

$$M_{кр} = \frac{\pi \sqrt{B_y C}}{l} \sqrt{1 - \frac{N l^2}{\pi^2 B_y}}. \quad (78)$$

В других подобных случаях можно пользоваться приближенной зависимостью

$$\frac{P_{кр}^2}{P_{к0}^2} + \frac{N_{кр}^2}{N_{к0}^2} = 1, \quad (79)$$

в которой $P_{кр}$ и $N_{кр}$ — критические значения поперечной и продольной нагрузок при их совместном действии; $P_{к0}$ и $N_{к0}$ — критические значения этих нагрузок при действии каждой из них в отдельности.

Балка двутаврового профиля

Дифференциальные уравнения устойчивости плоской формы изгиба имеют вид

$$\left. \begin{aligned} B_y u'' + (M_y \varphi)'' &= 0; \\ \frac{h^2}{2} B_y \varphi^{IV} - C \varphi'' + M_y u'' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

здесь h — высота балки. В сложных случаях отказываются от решения системы уравнений (80) и используют энергетический метод, исходя из следующего выражения для полной потенциальной энергии:

$$U = \frac{C}{2} \int_0^l (\varphi')^2 dz + \frac{D h^2}{4} \int_0^l (\varphi'')^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^l M_y \varphi u'' dz, \quad (81)$$

в котором D — жесткость одной из полок двутавра при изгибе в ее плоскости.

Формулы для определения критических нагрузок в зависимости от параметров балки, а также безразмерного коэффициента

$$\kappa = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2C}{D} \quad (82)$$

даны в табл. 36.

ВИТЫЕ ПРУЖИНЫ

Общие сведения

При сжатии витых пружин возможна *потеря устойчивости двух типов*: а) если в процессе нагружения не происходит посадки витков, то при определенном (критическом) значении сжимающей силы исходная форма равновесия становится неустойчивой и появляется бесконечно близкая к исходной возмущенная форма равновесия, характеризующаяся изгибом оси пружины (эйлеров тип потери устойчивости); б) если в процессе нагружения происходит посадка витков (или если пружина изготовлена с витками, посаженными один на другой), то при дальнейшем росте сжимающей силы может произойти потеря устойчивости путем *перескока* в новое состояние равновесия (существенно отличающееся от исходного).

Эйлерова потеря устойчивости может произойти также при *скручивании* витой пружины; при достижении скручивающими моментами критических значений основная форма равновесия становится неустойчивой и происходит переход в новое состояние равновесия, при котором ось пружины становится кривой двойкой кривизны.

При *растяжении* витых пружин возможен особый вид потери устойчивости, характеризующийся перекашиванием витков; это явление возможно только в тех случаях, когда пружина навита с начальным натяжением и посадка витков не нарушается вплоть до потери устойчивости.

Потеря устойчивости сжатой пружины при отсутствии посадки витков

Круглая пружина (рис. 60). О б о з н а ч е н и я: $B_x = EJ_x$ и $B_y = EJ_y$ — жесткости сечения витка при изгибе относительно главных центральных осей инерции сечения; $C = GJ_k$ — жесткость сечения витка при кручении; D — средний диаметр пружины; H_0 — начальная высота пружины.

Если выполняется неравенство

$$\frac{H_0}{D} < \sqrt{\frac{\eta \left(2 - \frac{C}{B_y}\right)}{1 + \frac{C}{B_x}}}, \quad (83)$$

то потеря устойчивости вообще *невозможна*. Коэффициент η в зависимости от закрепления концов пружины имеет следующие значения:

	η
Нижний виток зашцеилен, верхний виток свободен . . .	2,47
Оба торцовых витка подперты	9,87
Нижний виток зашцеилен, верхний виток подперт . . .	20,2
Оба торцовых витка зашцеилены	39,5

Если неравенство (83) не выполняется, то возможна потеря устойчивости, причем критическую осадку определяют по формуле

$$\lambda_{кр} = \frac{H_0}{2 - \frac{C}{B_y}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\eta \left(2 - \frac{C}{B_y}\right)}{1 + \frac{C}{B_x}} \left(\frac{D}{H_0}\right)^2} \right]. \quad (84)$$

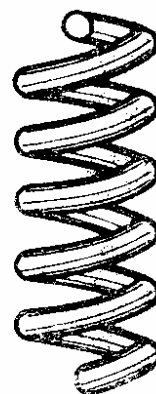


Рис. 60

По критической осадке (84) можно определить критическую силу

$$P_{кр} = \frac{4C\lambda_{кр}}{\pi n D^3}, \quad (85)$$

здесь n — число витков.

Если пружина имеет подпертые торцовые витки и изготовлена из круглого прутка, то условие (83) принимает вид

$$\frac{H_0}{D} < 2,55, \quad (86)$$

а формулу (84) для критической осадки можно записать

$$\lambda_{кр} = 0,833H_0 \left(1 - \sqrt{1 - 6,58 \left(\frac{D}{H_0} \right)^2} \right). \quad (87)$$

Призматическая пружина из круглого прутка (рис. 61). Вспомогательные коэффициенты

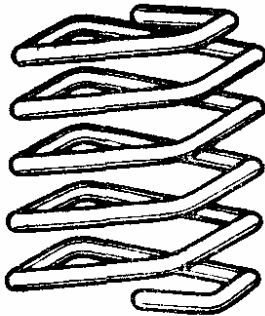


Рис. 61

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{3}{12\beta(1+\beta) + 3,2(1+\beta^3)}, \\ \xi_1 &= \frac{1}{2[1 - 1,07\gamma(1+3\beta)]}; \\ \xi_2 &= \frac{1}{8\gamma(1+0,8\beta)\xi_1}, \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

где $\beta = \frac{b}{a} \leq 1$ — отношение короткой стороны витка к длинной. В частности, для пружины с квадратным основанием $\gamma = 0,099$; $\xi_1 = 0,868$; $\beta_2 = 0,808$.

Потеря устойчивости невозможна, если выполняется неравенство

$$\frac{H_0}{a} < \eta \xi_2. \quad (89)$$

В частности, пружина с квадратным основанием и подпертыми торцовыми витками не теряет устойчивость, если

$$H_0 < 7,94a. \quad (90)$$

Если условие (89) нарушено, то потеря устойчивости происходит при осадке

$$\lambda_{кр} = H_0 \xi_1 \left[1 - \sqrt{1 - \eta \xi_2 \left(\frac{a}{H_0} \right)^2} \right] \quad (91)$$

(критическая осадка). Для пружины с квадратным основанием

$$\lambda_{кр} = 0,868H_0 \left[1 - \sqrt{1 - 0,808\eta \left(\frac{a}{H_0} \right)^2} \right]. \quad (92)$$

После вычисления критической осадки находят критическую силу

$$P_{кр} = \frac{8\gamma C \lambda_{кр}}{n a^3} \quad (93)$$

Потеря устойчивости сжатой пружины с посаженными витками

Сжатая пружина с посаженными витками изображена на рис. 62. При силах $P < P_*$ единственной формой равновесия служит начальная форма, показанная на рис. 62, а. При силах $P > P_*$ существуют *три* состояния равновесия: одно состояние равновесия с прямолинейной осью пружины (рис. 62, а) и два состояния равновесия, которым соответствует изгиб оси пружины (рис. 62, б); устойчивой является форма, которая характеризуется большими прогибами. Кривая состояний равновесия

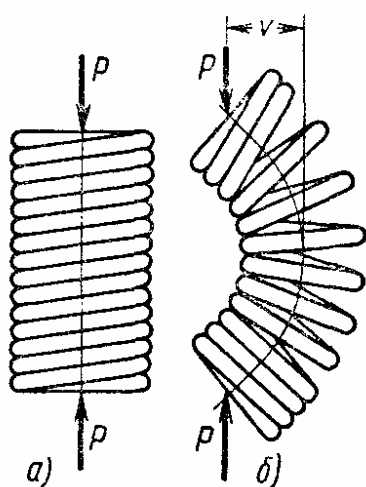


Рис. 62

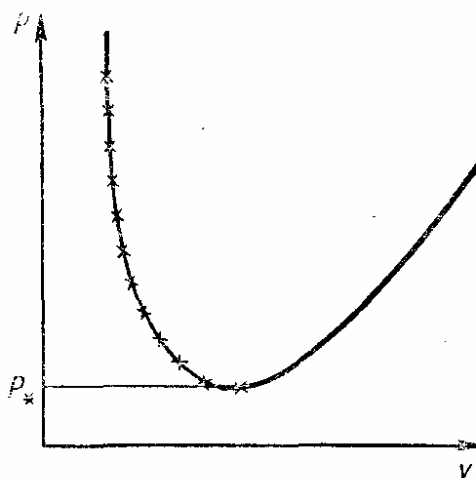


Рис. 63

показана на рис. 63, причем крестиками отмечены неустойчивые искривленные состояния равновесия. Если $P > P_*$, то для перехода из основной формы равновесия в искривленную форму необходимо преодолеть некоторый *деформационный барьер*, т. е. создать возмущение в виде дополнительной боковой силы, способной создать достаточно большой изгиб оси (большой, чем изгиб, характеризующий крестиками на рис. 63). За критическое значение можно принять наименьшее значение сжимающей силы, при котором становятся возможными искривленные формы равновесия, т. е. величину P_* , определяемую приближенной формулой

$$P_* = \frac{E d^3}{n^2 D}, \quad (94)$$

где n — число витков; d — диаметр сечения витка; D — диаметр пружины.

Потеря устойчивости скручиваемой пружины

Ниже даны расчетные формулы, относящиеся к пружине из круглого прутка.

Обозначения: $B = EJ_x$ — жесткость сечения витка при изгибе; C — жесткость сечения витка при кручении; D — средний диаметр пружины; ν — коэффициент Пуассона; n — число витков.

Если расстояние между торцами может свободно изменяться, то критическое значение скручивающего момента определяют по формуле

$$M_{кр} = \pm \frac{4B}{nD(2 + \nu)}. \quad (95)$$

В случае, когда расстояние между торцами (их центрами) остается неизменным, то критическое значение скручивающего момента составляет

$$M_{кр} = \pm \frac{4B}{nD(2 + \nu)} \left[1 \mp \frac{2\nu}{1 + \nu} n \sin \alpha_0 \right], \quad (96)$$

где α_0 — угол подъема витков. Если момент закручивает пружину, принимают верхние знаки в формуле (96), если раскручивает — нижние.

Потеря устойчивости растянутой пружины с посаженными витками

Характер потери устойчивости такой пружины показан на рис. 64. Критическое значение растягивающей силы

$$P_{кр} = \frac{Ed^5}{8D^3}, \quad (97)$$

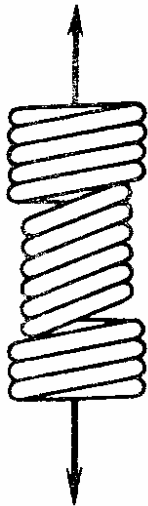


Рис. 64

где D — средний диаметр пружины; d — диаметр сечения витка.

При отношении $\frac{D}{d} < 10$ (для пружинных сталей) до потери устойчивости возникнут пластические деформации и формула (97) становится непригодной. Она непригодна и в тех случаях, когда до потери устойчивости произошло раскрытие зазоров между витками (если зазоры раскрываются, то потеря устойчивости вообще становится невозможной).

В случае, когда происходит потеря устойчивости и возникает перекашивание витков, то после разгрузки пружина не восстанавливает свою исходную форму вследствие действия сил трения между витками.

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Общие сведения

Приведенные ранее соотношения относятся к случаям потери устойчивости в упругой области, т. е. справедливы при условии, что вплоть до достижения критического состояния максимальные напряжения не превышают предела пропорциональности материала. Ниже приведены сведения, необходимые для расчетов на устойчивость сжатых стержней с первоначально прямолинейной осью, если критическое напряжение, определяемое по формуле Эйлера,

$$\sigma_э = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (98)$$

превосходит предел пропорциональности $\sigma_{пц}$. В формуле (98): E — модуль упругости материала; $\lambda = \frac{\mu l}{r_{\min}}$ — гибкость стержня; μ — коэффициент длины, зависящий от способов закрепления концов стержня; $r_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$ — наименьший радиус инерции поперечного сечения; J_{\min} — наименьший момент инерции поперечного сечения; F — площадь поперечного сечения. Если

$$\sigma_{\varepsilon} > \sigma_{пц}, \quad (99)$$

то потеря устойчивости происходит за пределами пропорциональности; при этом формула (98) уже не определяет истинного значения критического напряжения.

Критической гибкостью называют величину

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}, \quad (100)$$

зависящую только от свойств материала стержня. Значения λ_* ориентировочно следующие:

Сталь:	λ_*
Ст.3	105
15ХСНД	90
Хромомолибденовая	55
Дуралюмин	50
Чугун	55

При $\lambda > \lambda_*$ потеря устойчивости происходит в пределах пропорциональности материала, при $\lambda < \lambda_*$ выполняется неравенство (99) и необходимо пользоваться данными ниже указаниями.

Теория продольного изгиба центрально сжатого стержня

Теория Кармана. Теория основана на идее Эйлера о том, что потеря устойчивости выражается в появлении смежных форм равновесия при неизменной нагрузке. Предполагается, что свойства материала при сжатии стержня характеризуются некоторой опытной диаграммой $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (рис. 65). Если потеря устойчивости происходит при некотором напряжении $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$ (см. точку m на рис. 65), то в волокнах, расположенных с выпуклой стороны стержня, возникнут дополнительные напряжения сжатия

$$\Delta\sigma_- = E_* \Delta\varepsilon_-, \quad (101)$$

здесь $E_* = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ — касательный модуль (зависящий от напряжения $\sigma_{пц}$).

Соответственно, в волокнах, расположенных с вогнутой стороны стержня, возникнет разгрузка, которую можно считать следующей линейному закону:

$$\Delta\sigma_+ = E \Delta\varepsilon_+. \quad (102)$$

При этом эпюра равномерно распределенных напряжений сжатия (рис. 66, а) принимает вид, изображенный на рис. 66, б. При потере устойчивости нейтральная ось смещается в сторону от центра тяжести поперечного сечения, и переход в возмущенную форму равновесия

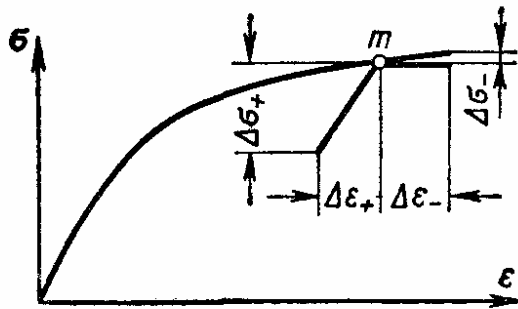


Рис. 65

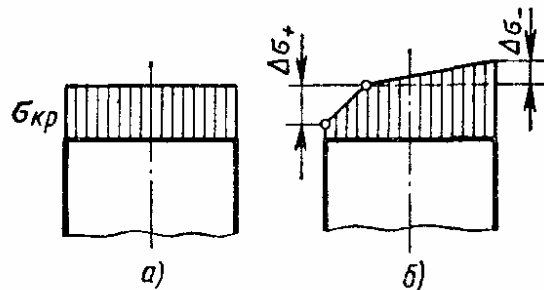


Рис. 66

сопровождается укорочением оси. Основанные на этих предпосылках дальнейшие выкладки приводят к следующей формуле для критической силы:

$$P_k = \frac{\pi^2 T J_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (103)$$

в которой T — *приведенный модуль* (двойной модуль, модуль Кармана), зависящий от модулей E и E_* , а также от формы сечения. Критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}. \quad (104)$$

Для прямоугольного сечения

$$T = \frac{2EE_*}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_*})^2}; \quad (105)$$

для двутаврового сечения с весьма тонкой стенкой

$$T = \frac{4EE_*}{E + E_*}. \quad (106)$$

Для материала, имеющего ясно выраженную площадку текучести, $E_* = 0$ и приведенный модуль формально обращается в нуль. Это означает, что сжимающая сила не может превзойти значения $P_{нц} = \sigma_{нц} F$, которое и должно быть принято за критическое.

Кривая «критическое напряжение — гибкость» на основе теории Кармана строится следующим способом. Располагая кривой $\sigma = \sigma(\epsilon)$ (и, следовательно, значением E), для каждого значения $\sigma_{кр}$ определяют соответствующее значение касательного модуля E_* и затем по формулам типа (105) или (106) вычисляют значение приведенного модуля T . После этого по формуле (104) определяют гибкость

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{T}{\sigma_{кр}}}. \quad (107)$$

Пример 8. Построить кривую $\sigma_{кр} - \lambda$ для двутаврового стержня из дuralюмина Д16Т.

Диаграмма $\sigma(\epsilon)$ показана на рис. 67. Предел пропорциональности $\sigma_{пц} = 2000 \text{ дан/см}^2$; модуль упругости $E = 7,5 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2$. Для определения

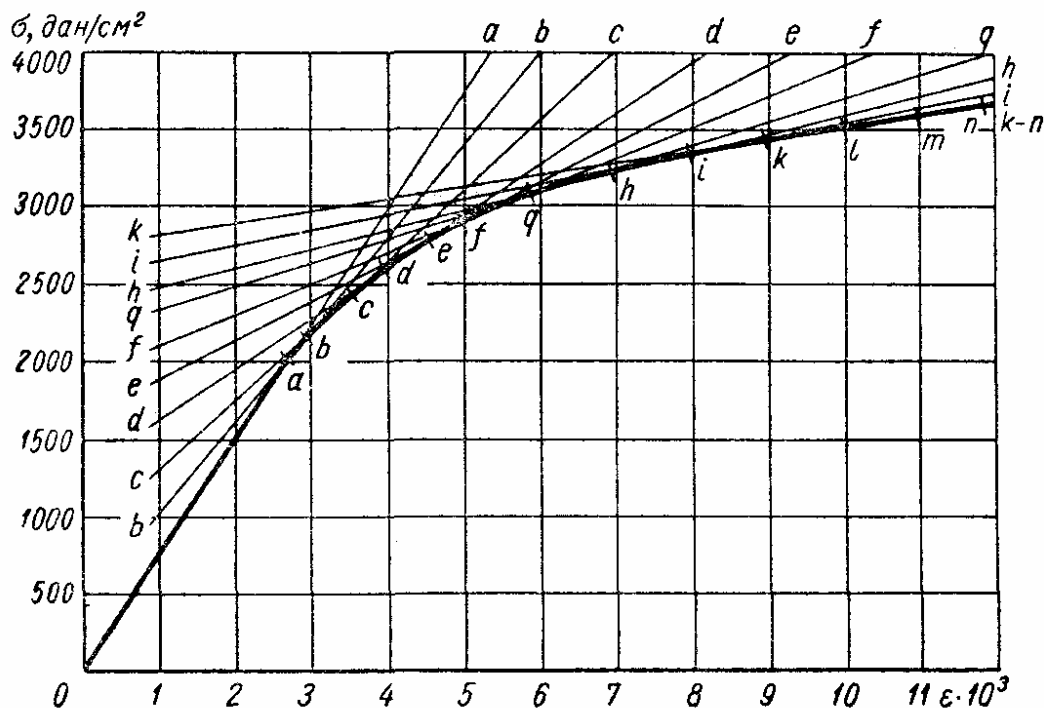


Рис. 67

касательного модуля E_* через каждую из отмеченных буквами a, b, \dots, n точек проводят касательную и находят тангенсы углов, составляемых касательными с осью абсцисс. Найденные таким способом значения E_* приведены в табл. 37. Далее по формуле (106) вычисляют значения приведенного

37. Результаты расчета двутаврового стержня по теории Кармана

Точки на диаграмме рис. 67	$\epsilon \cdot 10^3$	в дан/см ²			λ	Точки на диаграмме рис. 67	$\epsilon \cdot 10^3$	в дан/см ²			λ
		σ	$E_* \cdot 10^{-5}$	$T \cdot 10^{-5}$				σ	$E_* \cdot 10^{-5}$	$T \cdot 10^{-5}$	
a	2,67	2000	7,50	7,50	60,5	h	7,0	3200	1,17	2,03	25,0
b	3,0	2200	5,96	6,65	54,7	i	8,0	3320	0,97	1,72	22,6
c	3,5	2460	4,34	5,50	47,0	k	9,0	3400	0,82	1,48	20,8
d	4,0	2640	3,72	4,97	43,0	l	10,0	3450	0,82	1,48	20,6
e	5,0	2780	2,55	3,81	36,8	m	11,0	3560	0,82	1,48	20,2
f	5,0	2900	2,05	3,22	33,0	n	12,0	3640	0,82	1,48	20,0
g	6,0	3080	1,50	2,50	28,3						

модуля T и, наконец, определяют с помощью формулы (107) значения гибкости λ . Полученная зависимость показана на рис. 68. При $\lambda > 60,5$, т. е. в упругой области, кривая соответствует формуле Эйлера (99). На том же

графике даны опытные точки. При $\lambda > 60,5$ они почти точно лежат на кривой Эйлера, а при $\lambda < 60,5$ опытные точки располагаются несколько ниже расчетной кривой.

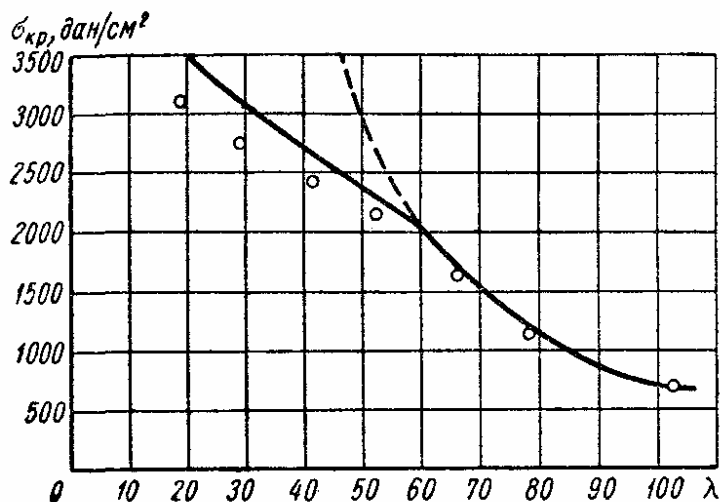


Рис. 68

Теория Шенли. В отличие от концепции Кармана, в теории Шенли изучается возможность появления (и последующего развития) смежной формы равновесия при *монотонно возрастающей* нагрузке.

Согласно этой теории, смежная (изогнутая) форма равновесия стержня появляется уже при касательно-модульной нагрузке

$$P_* = \frac{\pi^2 E_* J_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (108)$$

причем с дальнейшим ростом нагрузки прогибы монотонно возрастают и при значении нагрузки

$$P = P_K = \frac{\pi^2 T J_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (109)$$

формально обращаются в бесконечность. При этом каждому значению P , лежащему в пределах $P_* < P < P_K$, соответствует определенная форма изгиба, характеризующая конечными прогибами (рис. 69). Указанный процесс сопровождается непрерывным развитием зоны разгрузки и при достаточно больших прогибах могут возникнуть вторичные пластические деформации (в зоне растяжения), благодаря которым полная потеря устойчивости происходит не при $P = P_K$, а при несколько меньшей силе, лежащей в интервале $[P_*, P_K]$.

Практическая ценность концепции Шенли вытекает из того, что кривая Шенли является предельной (сверху) кривой для семейства кривых, относящихся к случаям внецентренного нагружения стержня. Поэтому область, расположенная выше кривой Шенли, практически нереализуема.

За критическое напряжение следует считать напряжение, при котором начинается продольный изгиб стержня, т. е. напряжение, соответствующее касательно-модульной нагрузке.

Для построения кривой «критическое напряжение — гибкость» на основе теории Шенли нужно выполнить операции, указанные выше

в связи с рис. 67, но остановиться на вычисленных значениях E_* , не определяя двойного модуля T . После этого по формуле

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E^*}{\sigma_{кр}}} \quad (110)$$

находят гибкости, соответствующие принятым значениям критического напряжения $\sigma_{кр}$.

38. Результаты расчета двутаврового стержня по теории Шенли

Точки на диаграмме рис. 67	$\varepsilon \cdot 10^3$	σ	$E_* \cdot 10^{-5}$	λ	Точки на диаграмме рис. 67	$\varepsilon \cdot 10^3$	σ	$E_* \cdot 10^{-5}$	λ
		в дан/см ²					в дан/см ²		
<i>a</i>	2,67	2000	7,50	60,5	<i>h</i>	7,0	3200	1,17	18,9
<i>b</i>	3,0	2200	5,96	51,6	<i>i</i>	8,0	3320	0,97	17,0
<i>c</i>	3,5	2460	4,34	42,0	<i>k</i>	9,0	3400	0,82	15,4
<i>d</i>	4,0	2640	3,72	37,5	<i>l</i>	10,0	3450	0,82	15,3
<i>e</i>	4,5	2780	2,55	30,2	<i>m</i>	11,0	3560	0,82	15,1
<i>f</i>	5,0	2900	2,05	26,5	<i>n</i>	12,0	3640	0,82	14,9
<i>g</i>	6,0	3080	1,50	22,0					

Пример 9. Построить кривую $\sigma(\varepsilon)$ с помощью теории Шенли. Условия — см. пример 8.

Заимствуя из табл. 37 левую часть (до значений E_*), находим по формуле (110) результаты, приведенные в табл. 38. Кривая, построенная по данным табл. 38, почти точно пройдет через опытные точки, показанные на рис. 68.

Эмпирические зависимости

При гибкостях, удовлетворяющих условию $\lambda < \lambda_*$, критическое напряжение приближенно может быть найдено по формуле

$$\sigma_{кр} = \sigma_c - (\sigma_c - \sigma_{пц}) \frac{\lambda^2}{\lambda_*^2}, \quad (111)$$

в которой σ_c — предел прочности при сжатии. С неограниченным уменьшением гибкости λ формула (111) дает $\sigma_{кр} = \sigma_c$, а при $\lambda = \lambda_*$ по формуле (111) получится $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$, как и по формуле Эйлера (для той же критической гибкости).

Если положить

$$\sigma_{кр} = \varphi \sigma_c, \quad (112)$$

то для коэффициента φ из выражения (111) следует

$$\varphi = 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{пц}}{\sigma_c}\right) \frac{\lambda^2}{\lambda_*^2}. \quad (113)$$

Нормами строительного проектирования предусмотрены значения коэффициента φ , приведенные в табл. 39.

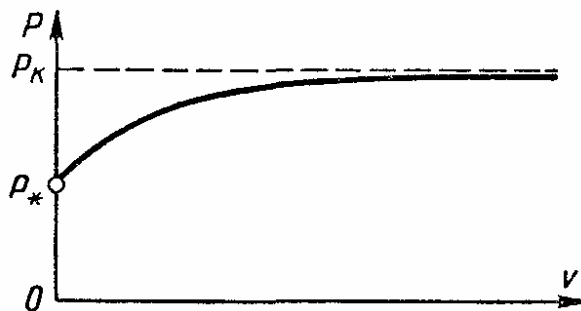


Рис. 69

39. Значения коэффициента φ для некоторых материалов

Гибкость λ	Сталь			Чугун	
	Ст. 0 Ст. 2 Ст. 3 Ст. 4	Ст. 5	15ХСНД	СЧ 15-32 СЧ 12-28 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,87
30	0,95	0,93	0,93	0,81	0,75
40	0,92	0,90	0,90	0,69	0,60
50	0,89	0,84	0,83	0,57	0,43
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23
80	0,75	0,66	0,63	0,26	0,18
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14
100	0,60	0,50	0,45	0,16	0,12
110	0,52	0,43	0,39	—	—
120	0,45	0,38	0,33	—	—
130	0,40	0,32	0,29	—	—
140	0,36	0,28	0,25	—	—
150	0,32	0,27	0,23	—	—
160	0,29	0,24	0,21	—	—
170	0,26	0,21	0,19	—	—
180	0,23	0,19	0,17	—	—
190	0,21	0,17	0,15	—	—
200	0,19	0,15	0,13	—	—

Приближенная стандартная кривая для определения коэффициента φ в формуле (112) показана на рис. 70. По оси абсцисс отложены значения относительной гибкости [10]

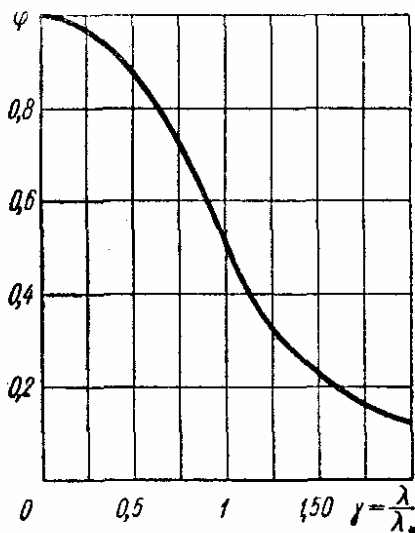


Рис. 70

$$\gamma = \frac{\lambda}{\lambda_*}. \quad (114)$$

При построении кривой было принято в формуле (111), что $\frac{\sigma_{нц}}{\sigma_c} = 0,50$ (это приближенно верно для ряда материалов), так что

$$\varphi = 1 - \frac{\gamma^2}{2} \quad (0 < \gamma < 1). \quad (115)$$

При $\gamma > 1$ кривая строилась в соответствии с формулой Эйлера

$$\varphi = \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (116)$$

Потеря устойчивости внецентренно сжатых стержней

При внецентренном сжатии изгиб оси стержня возникает уже при сколь угодно малых значениях продольной силы. Характерная кривая зависимости наибольший прогиб — сжимающая сила имеет вид, изо-

браженный на рис. 71. Для этой зависимости типично существование максимума сжимающей силы, который и определяет критическое состояние стержня.

При построении теории этого явления считают, что сечения при изгибе остаются плоскими, а перемещения малыми. Для точек, в которых деформация сжатия монотонно возрастает, принимают, что напряжения следуют кривой $\sigma = \sigma(\epsilon)$, полученной при испытаниях на сжатие, а для точек, в которых возникает разгрузка, считают, что она следует линейному закону.

На рис. 72 показаны теоретически построенные кривые для стальных стержней с гибкостями $\lambda = 40 \div 150$ при эксцентриситете сжимающей силы $e = \frac{h}{24}$ (h — наименьший размер прямоугольного

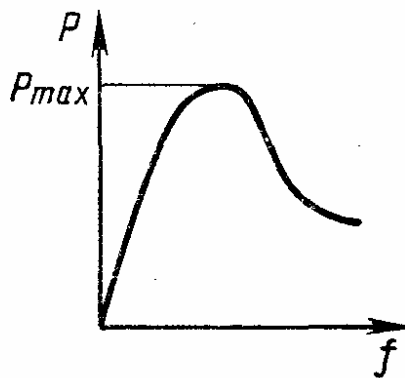


Рис. 71

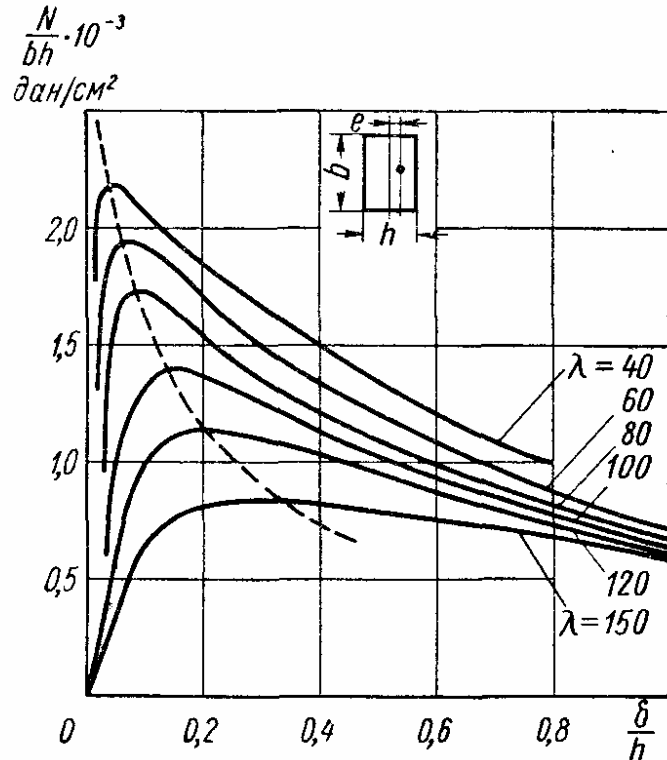


Рис. 72

поперечного сечения; N — сжимающая сила; δ — прогиб). Штриховая линия проходит через максимумы построенных кривых; по значениям $\sigma_{кр}$ и λ в этих точках может быть построена зависимость критического напряжения от гибкости. Кривые этого типа даны на рис. 73 (рис. 73, а относится к стержням с прямоугольным сечением, рис. 73, б — к стержням с тавровым сечением). Верхняя кривая ($m=0$, где m — относительный эксцентриситет сжимающей силы $e : \frac{h}{6}$) определяет критическое напряжение для центрально сжатых стержней (при $\lambda > \lambda_*$ эти напряжения следуют гиперболе Эйлера).

Если за пределом пропорциональности материал следует закону идеальной пластичности, то критические напряжения можно определять, решая уравнение

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{кр}} \left(1 - \alpha_1 \frac{m \sigma_{кр}}{\sigma_{нц} - \sigma_{кр}} \right) \left(1 - \alpha_2 \frac{m \sigma_{кр}}{\sigma_{нц} - \sigma_{кр}} \right), \quad (117)$$

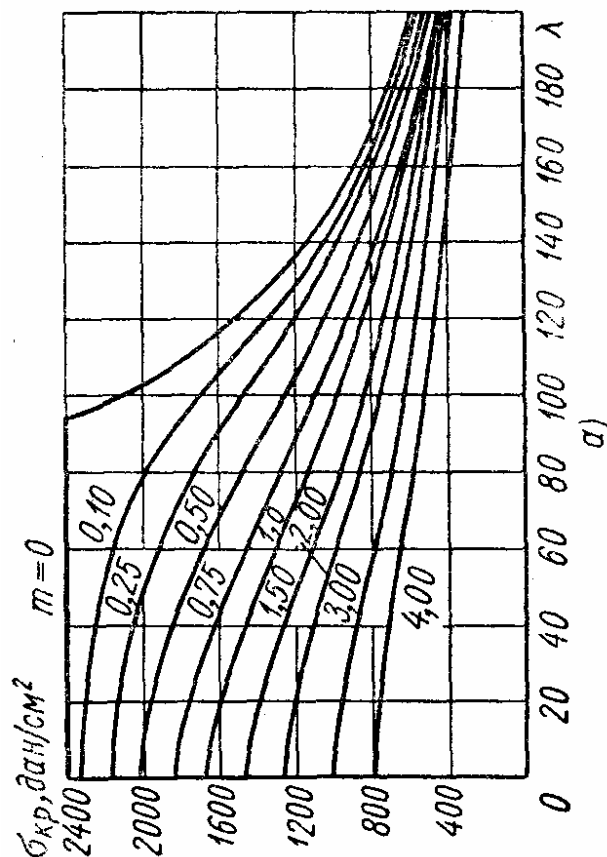
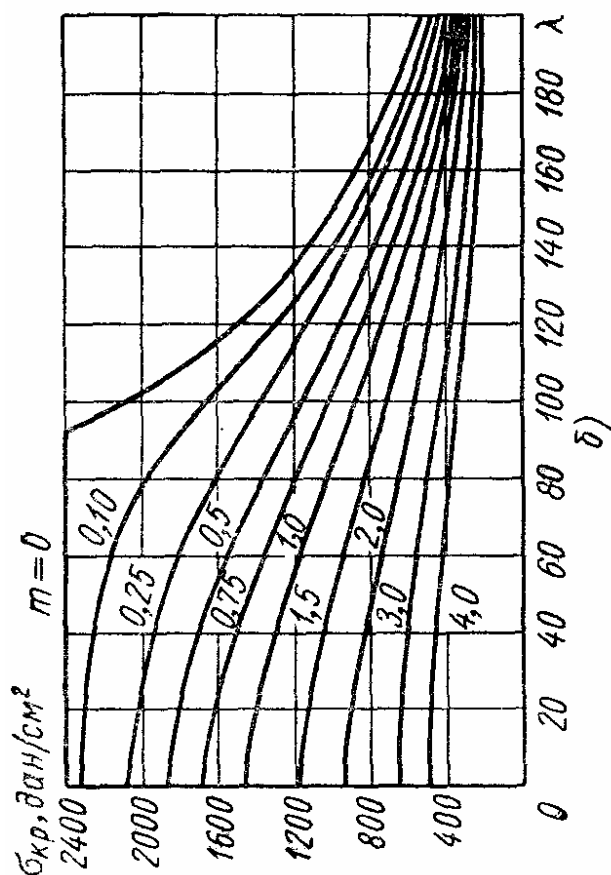


рис. 73

в котором

$m = \frac{eF}{W}$ — относительный эксцентриситет сжимающей силы, а коэффициенты α_1 и α_2 берут из табл. 40.

40. Значения коэффициентов α_1 и α_2 в формуле (117)

Форма сечения	α_1	α_2
	0,5	0,5
	0,5	0,5
	0,5	0,5
	0,4	0,4
	0,4	0,4
	0,9	0,1
	0,9	0,1

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА

Общие сведения

Если материал стержня обладает ясно выраженным свойством ползучести, то малый начальный изгиб (вызванный начальным эксцентриситетом сжимающей силы или начальной погибью) постепенно увеличивается и по прошествии некоторого времени процесс может закончиться резким выпучиванием. Это время называется *критическим временем*.

При построении теории этого явления чаще всего исходят из реологического закона

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k\sigma^n, \quad (118)$$

где σ — напряжение; ε — деформация; E — модуль упругости; k и n — коэффициенты, зависящие от температуры; точками обозначена операция дифференцирования по времени.

Решение задачи об определении критического времени существенно зависит от показателя степени n в выражении (118). Так, при $n=3$ можно найти такой момент времени, при котором прогибы формально стремятся к бесконечности (рис. 74); при $n=1$ прогибы монотонно возрастают со временем, причем каждому конечному значению времени соответствует конечное значение прогиба. В последнем случае понятие критического времени должно быть особо обусловлено (например, за критическое время может быть принято такое время, по истечении которого прогибы достигли определенного предела).

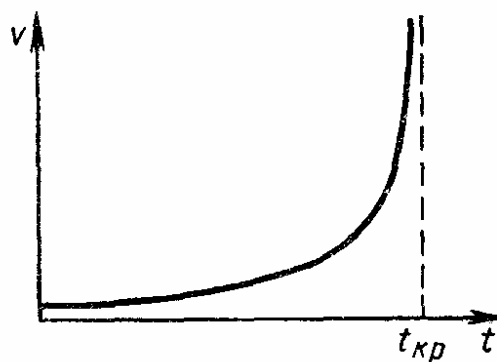


Рис. 74

Расчетные формулы

Окончательные расчетные формулы могут быть получены лишь для стержней с наиболее простыми формами поперечных сечений. Ниже приведены формулы для двутаврового стержня с весьма тонкой стенкой при $n=3$.

Критическое время

$$t_{кр} = \frac{\sigma_3 - \sigma}{6Ek\sigma^3} \ln \frac{1 + \zeta_0^2}{\zeta_0^2}, \quad (119)$$

где $\sigma = \frac{P}{F}$; P — сжимающая сила; F — площадь сечения; $\sigma_3 = \frac{P_3}{F}$; P_3 — эйлерова сила; ζ_0 — наибольший начальный прогиб, отнесенный к высоте сечения.

При $\zeta_0 \ll 1$ можно пользоваться формулой

$$t_{кр} = \frac{\sigma - \sigma_3}{6Ek\sigma^3} \ln \zeta_0^2. \quad (120)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчет на прочность деталей машин. М., «Машиностроение», 1966.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., изд-во «Наука», 1966.
3. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. III. М., Машгиз, 1959.

4. П а н о в к о Я. Г., Г у б а н о в а И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., Изд-во «Наука», 1967.
 5. П и к о в с к и й А. А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. М., Физматгиз, 1961.
 6. Л е й т е с С. Д. Справочник по определению свободных длин элементов стальных конструкций. М., «Проектстальконструкция», 1963.
 7. Р ж а н и ц ы н А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
 8. С м и р н о в А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. М., Госстройиздат, 1947.
 9. Ч у д н о в с к и й В. Г. Методы расчета колебаний и устойчивости упругих систем. Киев, изд-во АН УССР, 1952.
 10. Т а т у р Г. К. Некоторые обобщения в теории продольного изгиба. Инженерный сборник. Т. VII. М., изд-во АН СССР, 1950.
 11. В л а с о в В. З. Тонкостенные упругие стержни. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1959.
 12. Б ы ч к о в Д. В. Расчет балочных и рамных систем из тонкостенных элементов. М., Стройиздат, 1948.
 13. Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
 14. Б о л о т и н В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
-

Глава 2

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ

Общие сведения

Как и в случае стержней, при определении критических нагрузок на пластинку исследуют формы равновесия, бесконечно близкие к начальному состоянию; при этом можно считать, что дополнительные напряжения в срединной поверхности пластинки, появляющиеся при выпучивании, малы по сравнению с изгибными напряжениями. Так как при решении бифуркационных задач внешнюю поперечную нагрузку не учитывают, то для получения дифференциального уравнения выпученной поверхности необходимо в уравнении теории жестких пластинок [см. т. 1, гл. 17, уравнение (19)] принять $q=0$. Одновременно при исследовании смежных состояний изгиба необходимо учесть проекции повернутых внутренних усилий, показанных на рис. 1, где изображен элемент пластинки $dx dy$ в изогнутом состоянии.

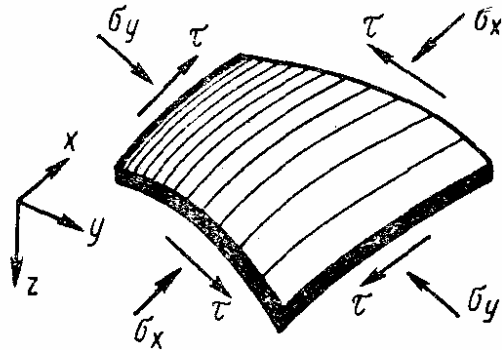


Рис. 1

Нормальные усилия σ_x , σ_y считают положительными при сжатии, касательные усилия τ считают положительными, если их направления соответствуют рис. 1. Определяя сумму проекций усилий в срединной поверхности на ось z и вводя эту величину в правую часть уравнения теории жестких пластинок [см. т. 1, гл. 17, уравнение (19)], получим

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) h. \quad (1)$$

Вместо уравнения (24) гл. 17 т. 1 получим следующее окончательное соотношение (уравнение устойчивости) [1]:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Для определения критических усилий используют дифференциальное уравнение (2) с учетом заданных граничных условий (о граничных условиях см. т. 1, гл. 17).

Такое решение в замкнутой форме чаще всего невыполнимо (кроме простейших случаев). Поэтому при решении задач устойчивости пластинок используют энергетический метод. Для этого в выражения для энергии изгиба U и работы внешних сил W [1]

$$U = \frac{1}{2} D \iint_F \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy; \quad (3)$$

$$W = \frac{h}{2} \iint_F \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (4)$$

подставляют «подходящую» (удовлетворяющую граничным условиям) функцию $w = w(x, y)$. Полная энергия системы определится как разность энергии изгиба и работы внешних сил:

$$\mathcal{E} = U - W. \quad (5)$$

Критическому состоянию соответствует равенство нулю выражения (5); из этого условия можно найти критические комбинации краевых нагрузок.

Приведенные ниже формулы для расчета пластинок на устойчивость в упругой области справедливы при относительно малой толщине пластинки, при которой интенсивность напряжений σ_i в любой точке пластинки, определяемая как для плоского напряженного состояния, меньше предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ (считается, что предел пропорциональности равен пределу упругости)

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Например, для удлиненной пластинки, сжатой вдоль длинной стороны, при условии шарнирного закрепления краев, отношение ширины к толщине должно быть

$$\frac{b}{h} \geq \sqrt{3,6 \frac{E}{\sigma_{пц}}} \approx 1,9 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}.$$

Предельное значение $\frac{b}{h}$ для мягкой стали равно 60, для дуралюмина — 36.

Если отношение $\frac{b}{h}$ лежит ниже указанного предела, используют результаты решения задач об устойчивости пластинок при пластических деформациях.

Расчетные формулы

Для сжатой прямоугольной пластинки со сторонами a и b критическое напряжение будет

$$\sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^3 h}, \quad (6)$$

где

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad (7)$$

ν — коэффициент Пуассона; h — толщина пластинки; здесь и ниже толщина считается постоянной. Значения коэффициента K зависят от способа закрепления краев пластинки. Используемые на схемах обозначения способов закрепления краев пластинок показаны на рис. 2.

Значения коэффициента K приведены в табл. 1 и на рис. 3 [1].

1. Значения коэффициента K в формуле (6)

	$\frac{a}{b}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
	K	27	13,2	8,41	6,25	5,14	4,53	4,20	4,04	4,00	4,04
	$\frac{a}{b}$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	От 2 до ∞	
	K	4,13	4,28	4,47	4,34	4,20	4,08	4,05	4,01	4,00	

	$\frac{a}{b}$	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,00	∞
	K	3,65	2,15	1,44	1,14	0,95	0,84	0,76	0,70	0,56	0,456

	$\frac{a}{b}$	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
	K	2,70	1,70	1,47	1,36	1,33	1,34	1,38	1,36	1,33

	$\frac{a}{b}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	K	9,44	7,69	7,05	7,00	7,29	7,83	7,69

Величину критической силы для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру и нагруженной сосредоточенными силами (рис. 4), определяют по формуле

$$P_{кр} = K \frac{\pi D}{b}.$$

Коэффициент K имеет следующие значения:

$\frac{a}{b}$	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	3,0
K	17,68	11,96	8,17	5,27	4,73	4,6

Для длинной пластинки ($a \gg b$) критические усилия находят по формулам:

при шарнирном опирании
длинных краев

$$P_{кр} = \frac{4\pi D}{b},$$

при защемленных длин-
ных краях

$$P_{кр} = \frac{8\pi D}{b}.$$

Рис. 2. Обозначения способов закрепления краев пластинок: a — защемленный край; b — шарнирно опертый край; v — свободный край

Критическое напряжение для прямоугольной пластинки при действии нормальных усилий, изменяющихся по линейному закону $\sigma_x =$

$$= \sigma_0 \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right), \text{ будет}$$

$$\sigma_{0, кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}; \quad (8)$$

значения коэффициента K в зависимости от коэффициента α и отношений сторон пластинки $\frac{a}{b}$ приведены в табл. 2 [1].

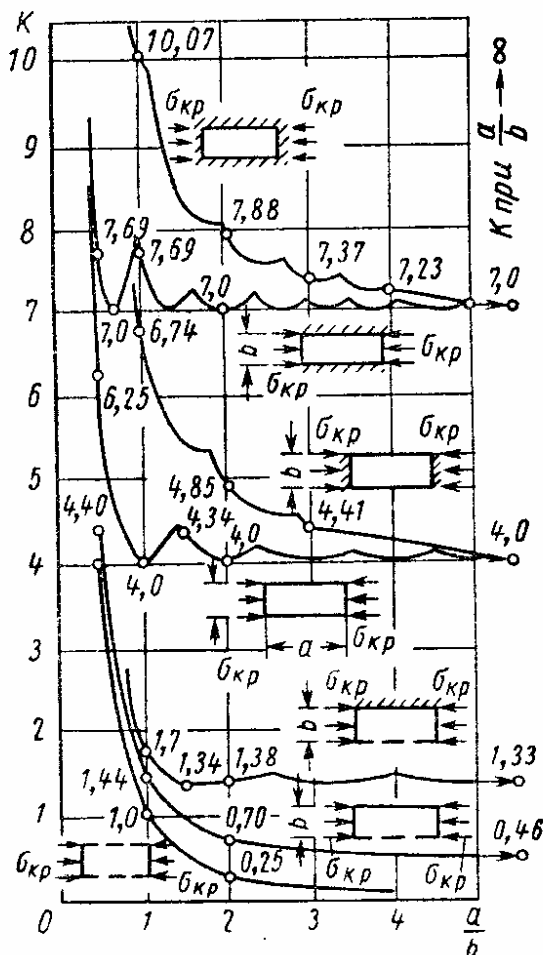


Рис. 3

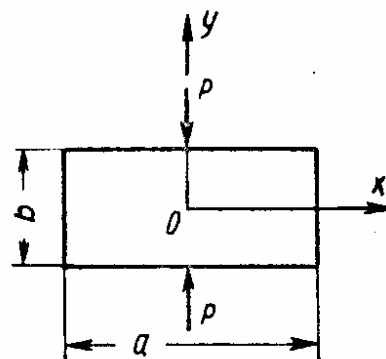
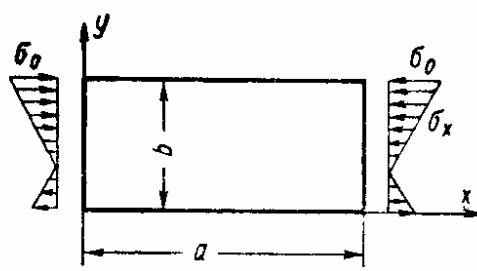


Рис. 4

Для пластинки, нагруженной касательными усилиями, критическое касательное напряжение находят по формуле

$$\tau_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (9)$$

2. Значения коэффициента K в формуле (8)


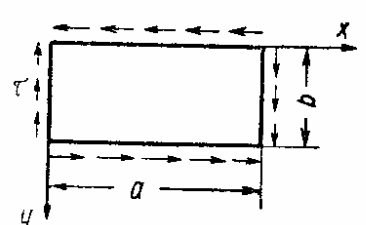
a	$\frac{a}{b}$								
	0,4	0,5	0,6	0,667	0,75	0,8	0,9	1,0	1,5
$\frac{2}{4}$	29,1	25,6	24,1	23,0	24,1	24,4	25,6	25,6	24,3
$\frac{4}{3}$	18,7	—	12,9	—	11,5	11,2	—	11,0	11,5
$\frac{1}{4}$	15,1	—	9,7	—	8,4	8,1	—	7,8	8,4
$\frac{4}{5}$	13,3	—	8,3	—	7,1	6,9	—	6,6	7,1
$\frac{2}{3}$	10,8	—	7,1	—	6,1	6,0	—	5,8	6,1

Значения коэффициента K приведены в табл. 3.

Для определения K можно также пользоваться приближенной зависимостью

$$K = 5,34 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2, \quad (10)$$

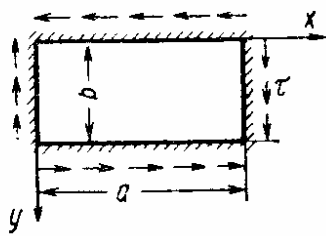
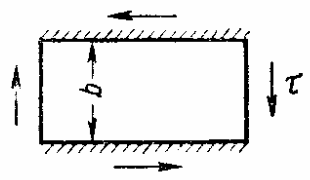
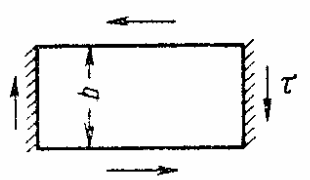
где a — длинная сторона пластинки.

3. Значения коэффициента K в формуле (9)


$\frac{a}{b}$	K	$\frac{a}{b}$	K
1,0	9,34	1,8	6,64
1,1	8,47	2,0	6,47
1,2	7,97	3,0	6,04
1,3	7,57	5,0	5,71
1,4	7,30	∞	5,34
1,6	6,90		

Значения коэффициента K в формуле (9) для пластинок, на которые действуют равномерно распределенные по всем кромкам касательные усилия при других граничных условиях, приведены в табл. 4 [1].

4. Значения коэффициента K в формуле (9)

	$K \approx 8,98 + 5,6 \left(\frac{b}{a} \right)^2,$ <p>где b — длина короткой стороны</p>
	<p>Кривая 1 на рис. 5</p>
	<p>Кривая 2 на рис. 5</p>

Пластинка, шарнирно закрепленная по всем краям, подвергается одновременному сжатию в двух направлениях (рис. 6).

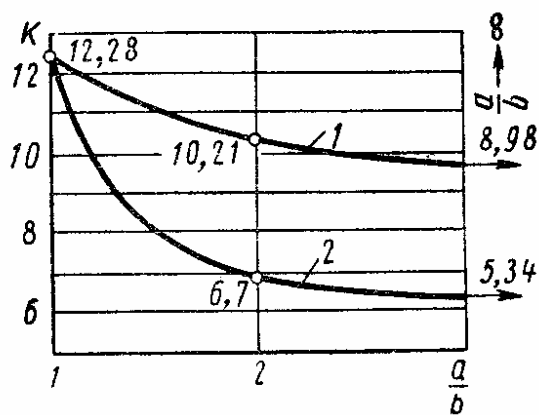


Рис. 5

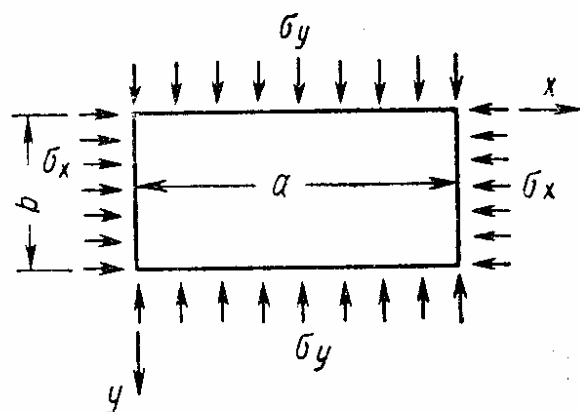


Рис. 6

Обозначим

$$\lambda = \frac{a}{b}; \quad \varphi = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \quad (11)$$

Критические напряжения

$$\sigma_{x, \text{кр}} = K_x \frac{\pi^2 D}{b^2 h}, \quad \sigma_{y, \text{кр}} = K_y \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = \varphi \sigma_{x, \text{кр}}; \quad (12)$$

величину K_x определяют по формуле [1]

$$K_x = \frac{\left[\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + n^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + \varphi n^2}, \quad (13)$$

где m и n — числа полуволн в направлениях осей x и y соответственно.

Минимальные значения K_x в зависимости от λ и φ даны на рис. 7; здесь нанесены также значения m и n для отдельных ветвей.

Прямоугольная пластинка, зашлепленная по всем краям, подвергается одновременно сжатию в двух направлениях (рис. 8) [5].

Критические напряжения определяют, исходя из следующей приближенной зависимости:

$$\left(\sigma_x + \frac{a^2}{b^2} \sigma_y \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2 D a^2}{h} \times \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right). \quad (14)$$

Если известно значение одного из напряжений, то по формуле (14) находят значение второго напряжения. Формула (14) дает хорошие результаты, если пластинка по форме близка к квадратной и при условии, что напряжения σ_x и σ_y мало отличаются одно от другого.

Прямоугольная пластинка, шарнирно закрепленная по краям, при совместном действии усилий сжатия (растяжения), равномерно распределенных по краям $x=0$, $x=a$, и касательных усилий, равномерно распределенных по всем сторонам пластинки (рис. 9) [1].

Приближенная формула для определения критического напряжения имеет вид

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{0, кр}} + \left(\frac{\tau_{кр}}{\tau_{0, кр}} \right)^2 = 1, \quad (15)$$

где $\sigma_{0, кр}$ и $\tau_{0, кр}$ — критические напряжения сжатия и сдвига при раздельном действии сжатия и сдвига. Если задано отношение $\sigma_{кр}/\tau_{кр}$ или известна одна из этих величин, то по уравнению (15) находят значения критических напряжений.

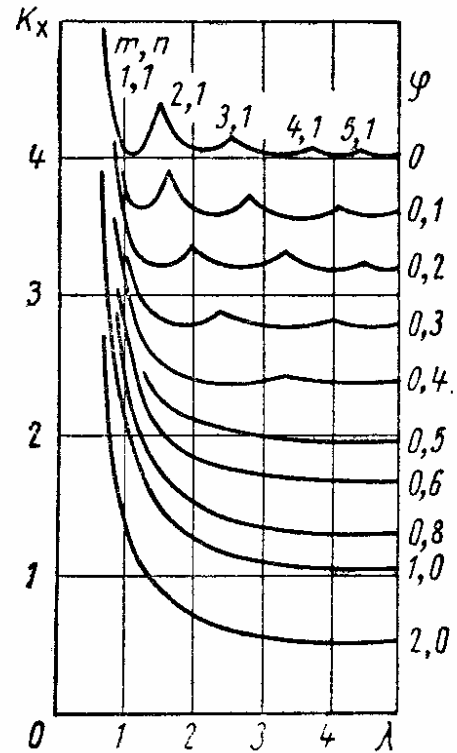


Рис. 7

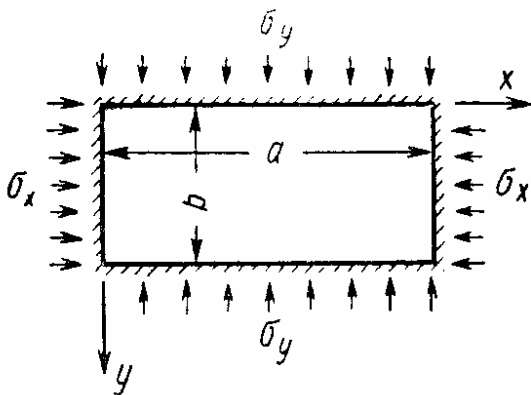


Рис. 8

В случае, если напряжения σ являются растягивающими, перед первым членом в левой части уравнения (15) следует принять знак минус.

Приведем результаты уточненного, по сравнению с уравнением (15), решения, полученного для пластинки с конечным отношением сторон. Представим критические напряжения в виде

$$\sigma_{кр} = K_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2 h};$$

$$\tau_{кр} = K_{\tau} \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (16)$$

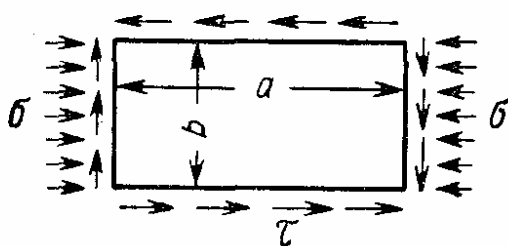


Рис. 9

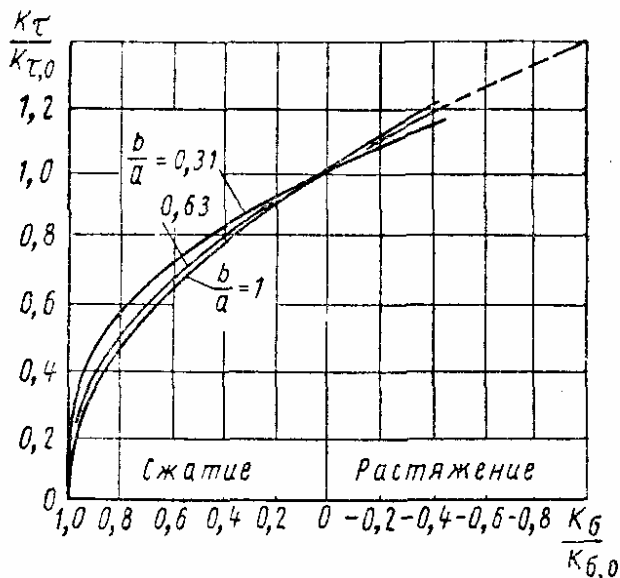


Рис. 10

Значения K_{σ} и K_{τ} в зависимости от отношений сторон $\lambda = \frac{a}{b}$ приведены в табл. 5; здесь знак минус перед K_{σ} соответствует напряжениям растяжения. Уточненные зависимости в координатных осях $K_{\sigma}/K_{\sigma,0}$, $K_{\tau}/K_{\tau,0}$ даны на рис. 10.

5. Значения коэффициентов K_{σ} и K_{τ} в формулах (16) для схемы на рис. 9

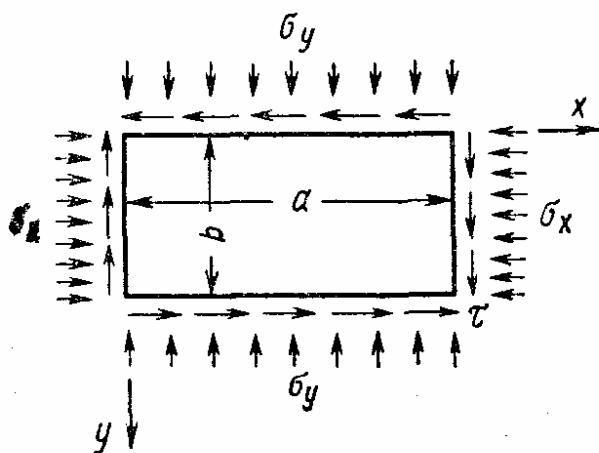


Рис. 11

$\lambda = 1$		$\lambda = 1,6$		$\lambda = 3,2$	
K_{σ}	K_{τ}	K_{σ}	K_{τ}	K_{σ}	K_{τ}
-1,0	10,57	-2,0	8,46	-1,0	7,45
0	9,42	0	7,0	0	6,75
1,0	8,15	2,0	5,31	1,7	5,4
2,0	6,67	2,83	4,46	2,5	4,66
3,0	4,72	3,6	2,95	3,0	4,14
3,6	3,02	3,9	2,09	3,7	3,29
4,0	0	4,2	0,06	4,017	2,19

Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям, подвергается сжатию (растяжению) в двух направлениях и сдвигу (рис. 11).

Критические напряжения определяют исходя из зависимости [3]

$$\tau_{кр} = \sqrt{c^2 \left(2 \sqrt{1 - \frac{\sigma_y}{c}} + 2 - \frac{\sigma_x}{c} \right) \left(2 \sqrt{1 - \frac{\sigma_x}{c}} + 6 - \frac{\sigma_y}{c} \right)}, \quad (17)$$

где

$$c = \frac{0,823E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2; \quad (18)$$

σ_x и σ_y отрицательны при растяжении.

Прямоугольная пластинка, у которой все края защемлены, подвергается сжатию в двух направлениях и сдвигу (направления координатных осей, как на рис. 11). Зависимость для определения критических напряжений имеет вид [3]

$$\tau_{кр} = \sqrt{c^2 \left(2,31 \sqrt{4 - \frac{\sigma_y}{c} + \frac{4}{3} - \frac{\sigma_x}{c}} \right) \times \dots \times \left(2,31 \sqrt{4 - \frac{\sigma_y}{c} + 8 - \frac{\sigma_x}{c}} \right)}, \quad (19)$$

где величину c определяют по формуле (18). Напряжения σ_x и σ_y отрицательны при растяжении.

Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям, подвергается действию касательных усилий по всем краям и нормальных усилий изгиба (рис. 12). Распределение нормальных усилий по краям $x = 0$, $x = a$ отвечает уравнению

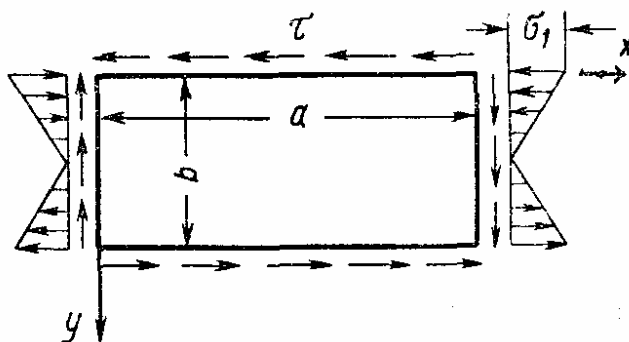


Рис. 12

$$\sigma = \sigma_1 \left(1 - \frac{2y}{b} \right). \quad (20)$$

Критические напряжения

$$\sigma_{1, кр} = K_\sigma \frac{\pi^2 D}{b^2 h}; \quad \tau_{кр} = K_\tau \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (21)$$

6. Коэффициенты K_σ и K_τ в формулах (21) для пластинки, подвергающейся одновременному действию изгиба и сдвига

$\lambda = 1$		$\lambda = \frac{4}{5}$		$\lambda = \frac{2}{3}$		$\lambda = \frac{1}{2}$	
K_τ	K_σ	K_τ	K_σ	K_τ	K_σ	K_τ	K_σ
0	25,6	0	24,5	0	23,9	0	26,6
2	24,6	4	22,8	4	23,05	4	25,4
4	22,2	8	17,7	8	20,35	8	24,3
6	18,4	10	13,25	12	15,23	12	22,55
8	12,4	11	10,01	14	11,04	16	19,94
9	6,85	12	4,61	15	8,0	20	16,13
9,42	0	12,26	0	16,09	0	24	10,26
—	—	—	—	—	—	26	5,41
						26,9	0

Коэффициенты K_σ и K_τ связаны приближенным соотношением

$$\left(\frac{K_\sigma}{K_{\sigma,0}} \right)^2 + \left(\frac{K_\tau}{K_{\tau,0}} \right)^2 = 1, \quad (22)$$

где $K_{\sigma,0}$, $K_{\tau,0}$ — значения коэффициентов K_σ и K_τ при раздельном действии изгиба и сдвига. Уточненные значения K_σ и K_τ в зависимости

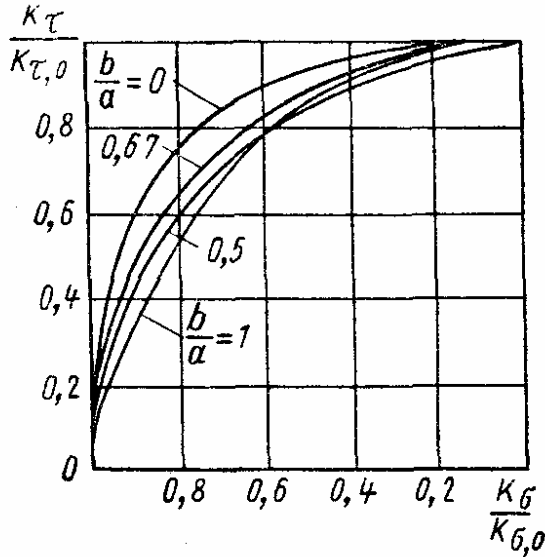


Рис. 13

от $\lambda = \frac{a}{b}$ даны в табл. 6 и на рис. 13.

Анизотропные и подкрепленные пластинки

Основные определения и соотношения теории анизотропных пластинок рассмотрены в гл. 5 т. 2. Уравнение устойчивости для ортотропной пластинки имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + h \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (23)$$

При $D_1 = D_2 = D_3$ уравнение (23) переходит в уравнение (2).

Для прямоугольной ортотропной пластинки, сжатой в одном направлении, при шарнирном закреплении краев в уравнении (23) следует принять $\sigma_y = \tau = 0$ (направление координатных осей см. табл. 1). Приняв выражение для прогиба

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (24)$$

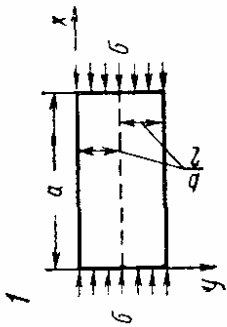
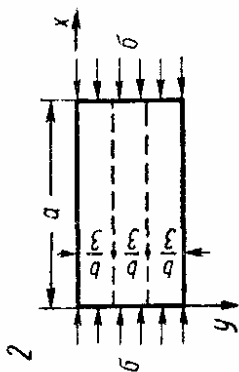
(m, n — числа полуволн по направлениям осей x, y), из уравнения (23) получим

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}{b^2} \left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \left(\frac{mb}{a} \right)^2 + \frac{2D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} n^2 + \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \left(\frac{a}{mb} \right)^2 \right]. \quad (25)$$

Для получения $\sigma_{кр}$ нужно в выражении (25) принять $n = 1$; путем варьирования числа m получается следующая зависимость для удлиненной пластинки ($a \gg b$):

$$\sigma_{кр} = \frac{2\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}{b^2} \left(1 + \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} \right). \quad (26)$$

7. Критические напряжения для некоторых случаев подкрепления прямоугольных пластинок

Схема	Критическое напряжение	Значение K	Обозначения
<p>1</p> 	$\sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$	$K = \frac{(1 + \lambda^2)^2 + 2\gamma}{\lambda^2 (1 + 2\delta)}$ <p>или по табл. 8</p>	$\lambda = \frac{a}{b}; \quad \gamma = \frac{B}{bD};$ $\delta = \frac{F}{bh},$ <p>где B — жесткость при изгибе ребра; F — площадь сечения ребра; D — цилиндрическая жесткость пластинки; c_i — расстояние ребер от края $y = 0$</p>
<p>2</p> 		$K = \frac{(1 + \lambda^2)^2 + 3\gamma}{\lambda^2 (1 + 3\delta)}$ <p>или по табл. 9</p>	
<p>Как предыдущая, но число ребер более двух</p>	$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \times \frac{\sum_i \gamma_i \sin^2 \frac{\pi c_i}{b}}{\lambda^2 \left(1 + 2 \sum_i \delta_i \sin^2 \frac{\pi c_i}{b} \right)}$	—	

Продолжение табл. 7

Схема	Критическое напряжение	Значение K	Обозначения
<p>3</p>	$\sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$	$K = \frac{(1 + \lambda^2)^2 + 2\gamma\lambda^2}{\lambda^2}$ Предельное значение γ см. в табл. 10	$\lambda = \frac{a}{b}; \quad \gamma = \frac{B}{bD},$ где B — жесткость при изгибе ребра; D — цилиндрическая жесткость пластинки
<p>4</p>	—	Предельное значение γ см. в табл. 10	$\gamma = \frac{B}{aD}$ Остальные обозначения прежние
<p>5</p>	—		

<div>6</div>			Предельное значение γ см. табл. 10	$\gamma = \frac{B}{aD}$ Остальные обозначения прежние																													
<div>7</div>	$\tau_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$ (в случае длинной пластинки, подкрепленной несколькими ребрами)	<table><tr><td>γ</td><td>K</td><td>γ</td><td>K</td><td>γ</td><td>K</td></tr><tr><td>5</td><td>6,98</td><td>40</td><td>9,9</td><td>80</td><td>11,4</td></tr><tr><td>10</td><td>7,7</td><td>50</td><td>10,4</td><td>90</td><td>11,7</td></tr><tr><td>20</td><td>8,67</td><td>60</td><td>10,8</td><td>100</td><td>12,0</td></tr><tr><td>30</td><td>9,36</td><td>70</td><td>11,1</td><td>—</td><td>—</td></tr></table>	γ	K	γ	K	γ	K	5	6,98	40	9,9	80	11,4	10	7,7	50	10,4	90	11,7	20	8,67	60	10,8	100	12,0	30	9,36	70	11,1	—	—	$\gamma = \frac{\sum_2 B_i \sin \frac{\pi c_i}{b}}{Db}$, где B_i — жесткость при изгибе ребра, находящегося на расстоянии c_i от края пластинки
γ	K	γ	K	γ	K																												
5	6,98	40	9,9	80	11,4																												
10	7,7	50	10,4	90	11,7																												
20	8,67	60	10,8	100	12,0																												
30	9,36	70	11,1	—	—																												

Для пластинки с конечным отношением сторон

$$m = 1 \text{ при } 0 < \frac{a}{b} < \sqrt[4]{4 \frac{D_1}{D_2}};$$

$$m = 2 \text{ при } \sqrt[4]{4 \frac{D_1}{D_2}} < \frac{a}{b} < \sqrt[4]{36 \frac{D_1}{D_2}};$$

$$m = 3 \text{ при } \sqrt[4]{36 \frac{D_1}{D_2}} < \frac{a}{b} < \sqrt[4]{144 \frac{D_1}{D_2}} \text{ и т. д.}$$

При исследовании устойчивости подкрепленных пластинок возможны два пути решения задач. Первый путь основан на «разнесении» жесткости ребер вдоль сечения пластинки с последующим рассмотрением устойчивости эквивалентной анизотропной пластинки. Примеры такого приведения подкрепленной пластинки к анизотропной рассмотрены в т. 1 гл. 17. Такой подход к расчету применим в случае, если ребра расположены достаточно часто.

Если исследуют устойчивость пластинки с редко расположенными ребрами, применяют другой подход к задаче, при котором рассматривают условия сопряжения пластинки и ребер по линиям связи, или используют энергетический метод, в последнем случае учитывают энергию деформации пластинки, энергию изгиба ребер, работу внешних усилий, действующих на пластинку, и работу внешних сил, приложенных к ребрам. Результаты решения задач по определению критических усилий применительно к различным случаям подкрепления прямоугольных пластинок приведены в табл. 7—10 [5].

8. Значения коэффициента K для схемы I табл. 7

λ	$\gamma = 5$			$\gamma = 10$			$\gamma = 15$			$\gamma = 20$			$\gamma = 25$		
	$\gamma = 5$			$\gamma = 10$			$\gamma = 15$			$\gamma = 20$			$\gamma = 25$		
	$90^\circ 0' = \varphi$	$01^\circ 0' = \varphi$	$02^\circ 0' = \varphi$	$90^\circ 0' = \varphi$	$01^\circ 0' = \varphi$	$02^\circ 0' = \varphi$	$90^\circ 0' = \varphi$	$01^\circ 0' = \varphi$	$02^\circ 0' = \varphi$	$90^\circ 0' = \varphi$	$01^\circ 0' = \varphi$	$02^\circ 0' = \varphi$	$90^\circ 0' = \varphi$	$01^\circ 0' = \varphi$	$02^\circ 0' = \varphi$
0,6	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5
0,8	15,4	14,6	13,0	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8	16,8
1,0	12,0	11,1	9,72	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0
1,2	9,83	9,06	7,88	15,3	14,2	12,4	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5
1,4	8,62	7,91	6,82	12,9	12,0	10,3	16,1	15,7	13,6	16,1	16,1	16,1	16,1	16,1	16,1
1,6	8,01	7,38	6,32	11,4	10,5	9,05	14,7	13,6	11,8	16,1	16,1	16,1	16,1	16,1	16,1
1,8	7,84	7,19	6,16	10,6	9,70	8,35	13,2	12,2	10,5	15,9	14,7	14,4	16,2	16,2	14,7
2,0	7,96	7,29	6,24	10,2	9,35	8,03	12,4	11,4	9,80	14,6	13,4	11,6	16,0	15,4	13,3
2,2	8,28	7,58	6,50	10,2	9,30	7,99	12,0	11,0	9,45	13,9	12,7	10,9	15,8	14,5	12,4
2,4	8,79	8,06	6,91	10,4	9,49	8,15	11,9	10,9	9,37	13,5	12,4	10,6	15,1	13,8	11,9
2,6	9,27	8,50	7,28	10,8	9,86	8,48	12,1	11,1	9,53	13,5	12,4	10,6	14,8	13,6	11,6
2,8	8,62	7,91	6,31	11,4	10,4	8,94	12,5	11,5	9,85	13,7	12,6	10,8	14,8	13,6	11,6
3,0	8,31	7,62	6,53	12,0	11,1	9,52	13,1	12,0	10,3	14,1	13,0	11,1	15,2	13,9	11,9
3,2	8,01	7,38	6,32	11,4	10,5	9,05	13,9	12,7	10,9	14,8	13,5	11,6	15,6	14,3	12,3
3,6	7,84	7,19	6,16	10,6	9,70	8,35	13,2	12,2	10,5	15,9	14,7	12,6	16,2	15,7	13,5
4,0	7,96	7,29	6,24	10,2	9,35	8,03	12,4	11,4	9,8	14,6	13,4	11,6	16,0	15,4	13,3

Примечание. Значения K , указанные жирным шрифтом и лежащие выше их, равны значениям K для шарнирно опертой пластинки с шириной, равной $\frac{b}{2}$.

9. Значения коэффициента K для схемы 2 табл. 7

λ	$\gamma = \frac{10}{3}$		$\gamma = 5$		$\gamma = \frac{20}{3}$		$\gamma = 10$	
	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$
0,6	26,8	24,1	36,4	33,2	36,4	36,4	36,4	36,4
0,8	16,9	15,0	23,3	20,7	29,4	26,3	37,2	37,1
1,0	12,1	10,7	16,3	14,5	20,5	18,2	28,7	25,6
1,2	9,61	8,51	12,6	11,2	15,5	13,8	21,4	19,0
1,4	8,32	7,36	10,5	9,32	12,7	11,3	17,2	15,2
1,6	7,70	6,81	9,40	8,31	11,1	9,82	14,5	12,8
1,8	7,51	6,64	8,85	7,83	10,2	9,02	12,9	11,4
2,0	7,61	6,73	8,70	7,69	9,78	8,65	11,9	10,6

10. Предельные значения γ , при которых ребра остаются прямыми при выпучивании пластинки

Схема в табл. 7							
3		4		5		6	
λ	γ	λ	γ	λ	γ	λ	γ
0,50	12,6	0,60	101	2	0,83	3	0,64
0,60	7,18	0,80	42,6	1,5	2,9	2,5	1,37
0,70	4,39	1,0	21,7	1,25	6,3	2	3,53
0,80	2,80	1,2	12,4	1,0	15	1,5	10,7
0,90	1,82	1,4	7,71	—	—	1,2	22,6
1,00	1,26	—	—	—	—	—	—
1,20	0,433	—	—	—	—	—	—
1,41	0	—	—	—	—	—	—

Закритическая деформация подкрепленных пластинок

Подкрепленные пластинки, подвергающиеся сжатию. Редукционные коэффициенты. Для пластинки, подкрепленной по краям достаточно жесткими ребрами и подвергающейся сжатию, потеря устойчивости не означает потери несущей способности: пластинка и после выпучивания продолжает воспринимать возрастающую нагрузку. В послекритической стадии нагружения происходит углубление выпучин, причем прогибы становятся сравнимыми с толщиной; поэтому исследование закритической деформации пластинок должно быть проведено на основе уравнений теории гибких пластинок [см. т. 1, гл. 18, уравнения (17), (18)]. При продолжающемся сжатии после потери устойчивости напряжения по ширине пластинки распределяются неравномерно: возрастающая нагрузка воспринимается главным образом продольными ребрами и прилегающими к ним участками пластинки, напряжения в средней части пластинки мало отличаются от критической величины (рис. 14). Степень участия пластинки в работе конструкции на каждом этапе нагружения характеризуется *редукционным коэффициентом* φ . Нагрузка P , воспринимаемая пластинкой:

$$P = \varphi b h \sigma_p, \quad (27)$$

где b — ширина пластинки; h — толщина; σ_p — напряжение в краевом волокне пластинки.

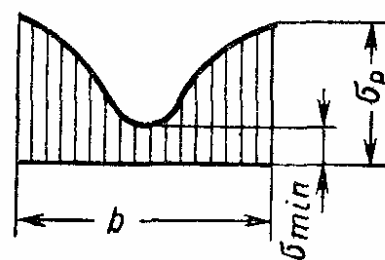


Рис. 14

Редукционный коэффициент равен отношению приведенной ширины b_{np} к ширине пластинки b :

$$\varphi = \frac{b_{np}}{b}, \quad (28)$$

причем b_{np} — суммарная ширина краевых полос, которые условно считают работающими совместно с подкрепляющими ребрами.

Если известно выражение для напряжения σ_x в произвольной точке пластинки по ширине, то среднее напряжение σ по ширине будет

$$\sigma = \frac{1}{b} \int_0^b \sigma_x dy. \quad (29)$$

и нагрузка, передающаяся пластинке, определится через среднее напряжение в виде

$$P = \sigma b h. \quad (30)$$

Сравнивая выражения (27) и (30), получим

$$\varphi = \frac{\sigma}{\sigma_p}. \quad (31)$$

Следовательно, редукционный коэффициент равен отношению среднего напряжения по ширине пластинки к напряжению в краевом волокне.

Т. Карман получил простую формулу для редукционного коэффициента, исходя из следующих рассуждений. Представим себе «приведенную пластинку» шириной b_{np} , полученную в результате сочленения «работающих» краевых полос. Считая, что нормальные напряжения равномерно распределены по ширине b_{np} , имеем критическое значение σ_p для приведенной пластинки:

$$\sigma_p = K \frac{\pi^2 D}{b_{np}^2 h}, \quad (32)$$

где D — цилиндрическая жесткость пластинки.

Критическое напряжение для исходной пластинки

$$\sigma_{kp} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (33)$$

Сравнивая формулы (32) и (33), находим

$$\varphi = \sqrt{\frac{\sigma_{kp}}{\sigma_p}}. \quad (34)$$

Обозначим

$$n^* = \frac{\sigma_p}{\sigma_{kp}}, \quad (35)$$

тогда

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{n^*}}. \quad (36)$$

Для квадратной пластинки, края которой шарнирно оперты на жесткие ребра, остающиеся прямолинейными в процессе деформации, редуционный коэффициент будет [1]

$$\varphi = 0,5 + \frac{0,5}{n^*}, \quad (37)$$

где n^* — по-прежнему определяется формулой (35). Формула (37) получена в результате решения нелинейной задачи в первом приближении, при этом считалось, что продольные края пластинки свободно смещаются. Решение задачи во втором приближении см. в работе [2].

Для прямоугольной шарнирно опертой пластинки редуционный коэффициент определяют по приближенной формуле

$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{1}{n^*}}. \quad (38)$$

Графики $\varphi(n^*)$ по формулам (36) и (38) показаны на рис. 15. На графике даны также уточненные, по сравнению с формулой (38), данные (решение Леви) и результаты, полученные с помощью цифровой электронно-вычислительной машины (метод сеток) [1].

Приведем рекомендации для практических расчетов. Если число подкрепляющих обшивку ребер значительно, причем ребра являются заведомо жесткими на изгиб, при определении редуционных коэффициентов нужно использовать зависимость, полученную методом сеток (рис. 15), или решение Леви и формулу (38) (в пределах значений n^* , приводимых на графике рис. 15, эти результаты близки к кривой метода сеток).

В случае, когда конструкция состоит из обшивки, подкрепленной относительно слабыми подкрепляющими ребрами, т. е. если нет уверенности, что кромки пластинки остаются прямолинейными, а также для изолированных панелей следует пользоваться формулой (36).

При определении несущей способности пластинок обычно исходят из условий прочности и устойчивости подкрепляющих ребер.

Приведем формулы, относящиеся к квадратной пластинке при иных граничных условиях. Если пластинка шарнирно оперта на жесткие ребра, остающиеся прямолинейными во время деформации, причем продольные края неподвижны, редуционный коэффициент будет [2]

$$\varphi = \frac{2}{3 + \nu} + \frac{1}{n^*} \cdot \frac{1 + \nu}{3 + \nu}; \quad (39)$$

при $\nu = 0,3$ получим

$$\varphi = 0,6 + \frac{0,4}{n^*}. \quad (40)$$

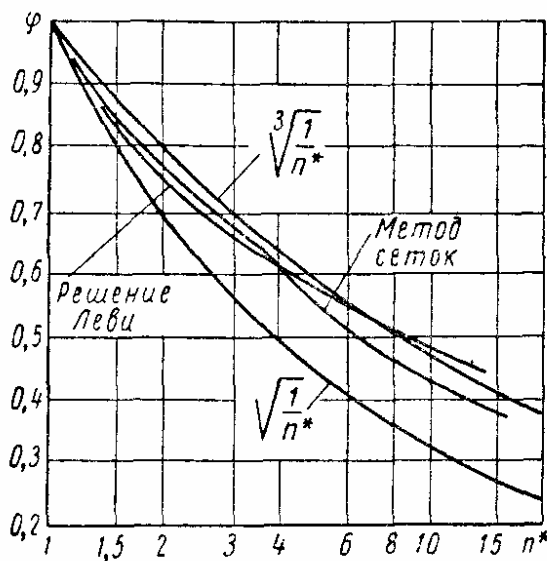


Рис. 15

Для квадратной пластинки, защемленной по краям при свободно смещающихся продольных кромках, редуцированный коэффициент определяют по формуле

$$\varphi = 0,7 + \frac{0,3}{n^*}. \quad (41)$$

Закритическая деформация подкрепленных пластинок при сдвиге. В случае, если удлиненная пластинка ($a \gg b$) подвергается по всем кромкам действию касательных усилий, значительно превышающих критическую величину (рис. 16), пользуются упрощенной моделью диагонально растянутого поля.

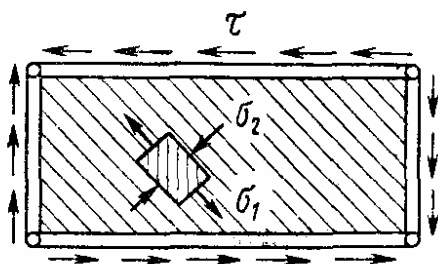


Рис. 16

Как известно, при чистом сдвиге оси главных напряжений составляют с кромками углы, равные 45° , и одно из главных напряжений является растягивающим, а другое—сжимающим. При потере устойчивости пластинки происходит как бы гофрирование пластинки по направлению главного сжимающего напряжения. Если края

пластинки остаются в первоначальной плоскости, то и здесь выпучивание ведет к образованию напряжений в срединной поверхности. В случае сдвига волокна пластинки, параллельные складкам, могут нести значительные растягивающие усилия, передающиеся на продольные

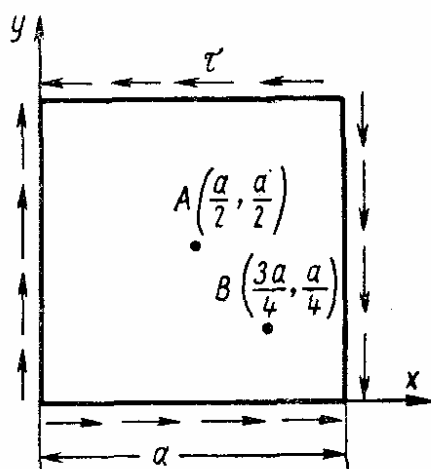


Рис. 17

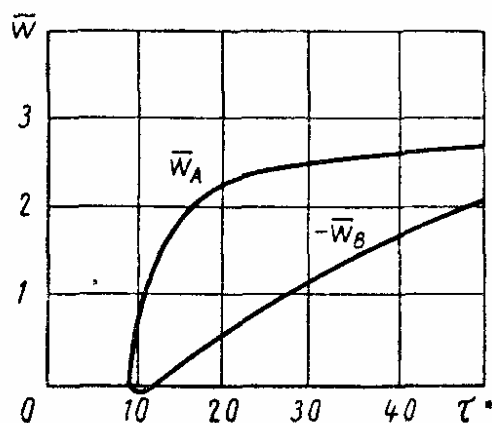


Рис. 18

ребра. Реакции от продольных ребер воспринимают, в свою очередь, поперечные элементы; последние оказываются сжатыми. Следовательно, создается система наклонных растягивающих усилий, уравновешенных реакциями поперечных ребер (стоек). Такая упрощенная модель распределения напряжений в срединной поверхности и напряжений изгиба носит название модели диагонально растянутого поля.

Указанный подход к задаче приводит к следующей формуле для растягивающего напряжения [1]:

$$\sigma_1 = \frac{2\tau}{\sin 2\alpha}, \quad (42)$$

где α — угол между направлением складок и длинной стороной пластинки. Угол α близок к 40° . Сжимающими напряжениями σ_2 можно пренебречь.

Квадратная пластинка со стороной a , шарнирно опертая по краям, испытывает действие сдвигающих усилий τ , распределенных по всем кромкам; края пластинки сближаются свободно (рис. 17).

Модель диагонально растянутого поля уместна лишь при значительно развитой закритической деформации пластинки. В случае, если критическое напряжение сдвига превышено незначительно, исследование должно основываться на теории гибких пластинок. Результаты решения задачи, основанного на теории гибких пластинок и выполненного с помощью электронной цифровой машины, приведены на рис. 18 [1]. Здесь принят параметр нагрузки

$$\tau^* = \frac{\tau}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^2; \quad (43)$$

через $\bar{w}_A = \frac{w_A}{h}$ и $\bar{w}_B = \frac{w_B}{h}$ обозначены безразмерные прогибы в точках $A \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$ и $B \left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4} \right)$. Величина \bar{w}_B на рис. 18 отложена с обратным знаком.

КРУГЛЫЕ ПЛАСТИНКИ

При потере устойчивости круглых пластинок могут иметь место случаи осесимметричного и несимметричного выпучивания. При осесимметричном выпучивании срединная поверхность пластинки переходит в поверхность вращения. Несимметричная форма потери устойчивости возникает, например, в случае подкрепленной пластинки при радиальном сжатии, либо пластинки, воспринимающей поперечное давление и имеющей большие прогибы [1]; в последнем случае при достаточно больших прогибах у контура пластинки появляются значительные сжимающие напряжения, что и ведет к потере устойчивости. При несимметричном выпучивании образуется ряд вмятин как в радиальном, так и в окружном направлениях.

При исследовании осесимметричной деформации сплошной пластинки исходят из дифференциального уравнения

$$D \left(\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} \right) = h\sigma_r\theta; \quad (44)$$

здесь D — цилиндрическая жесткость пластинки; $\theta = -\frac{dw}{dr}$; w — прогиб; r — радиальная координата; h — толщина пластинки.

Если интенсивность радиальных сжимающих усилий, равномерно распределенных по контуру пластинки, равна p , то в уравнении (44) следует принять $\sigma_r = -p$.

В случае кольцевой пластинки и осевой симметрии изогнутой поверхности дифференциальное уравнение имеет вид

$$D \left(\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} \right) = h\sigma_r\theta + \frac{C_0}{r}, \quad (45)$$

где C_0 — постоянная.

В работе [1] приведены также исходные зависимости для исследования задач при несимметричном выпучивании.

О граничных условиях для круглых пластинок см. т. 1, гл. 17. Ниже приведены решения отдельных задач.

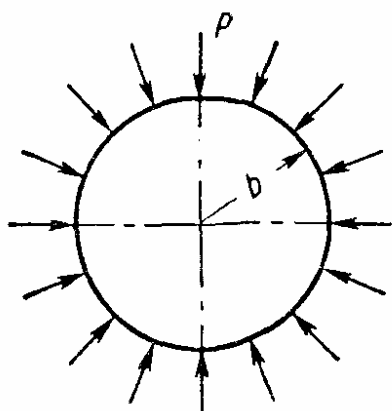


Рис. 19

Круглая пластинка шарнирно закреплена по контуру и подвергается действию радиальных сжимающих усилий p , равномерно распределенных вдоль контура.

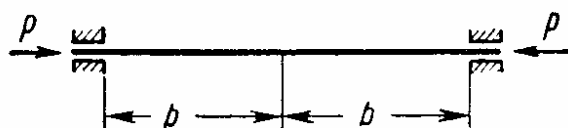


Рис. 20

При шарнирном закреплении краев (рис. 19) и защемлении (рис. 20) по контуру критическое напряжение будет

$$p_{кр} = K \frac{D}{b^2 h} = K \frac{E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2. \quad (46)$$

Для случая, показанного на рис. 19, $K = 4,2$; для случая на рис. 20 $K = 14,68$. Этим двум случаям соответствует осесимметричная форма потери устойчивости.

Кольцевая пластинка, сжатая радиальными усилиями, рав-

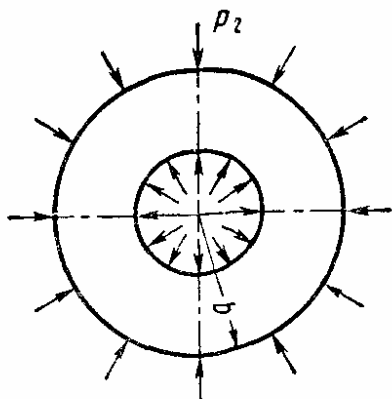


Рис. 21

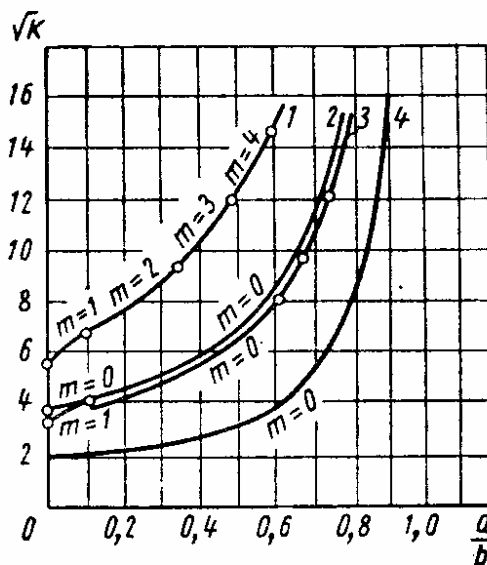


Рис. 22

номерно распределенными по внутреннему и наружному контурам (рис. 21) и имеющим одинаковую интенсивность ($p_1 = p_2 = p$) [1].

Критическое напряжение

$$p_{кр} = K \frac{D}{b^2 h}. \quad (47)$$

Значения коэффициента K выбирают по графикам на рис. 22, где приведен \sqrt{K} при $\nu = 0,3$ для следующих случаев закрепления пла-

стинки: 1 — защемление по обоим краям; 2 — шарнирное опирание по обоим краям; 3 — защемление по внешнему краю и свободное смещение, без поворота, по внутреннему; 4 — шарнирное закрепление по внешнему краю и свободное смещение, без поворота, по внутреннему.

На графики нанесены также числа m узловых диаметров, которым соответствуют наименьшие напряжения при заданном отношении $\frac{a}{b}$.

Для первых двух случаев опирания пластинки, при $\frac{a}{b} \rightarrow 0$ (сплошная пластинка с подкрепленным центром), число узловых диаметров $m = 1$. При $\frac{a}{b} > 0,1$ характер выпучивания различен: защемленная пластинка получает тем больше вмятин по окружности, чем больше отношение $\frac{a}{b}$, шарнирно опертая пластинка выпучивается осесимметрично.

ПЛАСТИНКИ ДРУГИХ ФОРМ

Рассмотрим несколько конкретных случаев расчета пластинок, имеющих форму равностороннего треугольника и параллелограмма.

Если равносторонняя треугольная пластинка, шарнирно опертая по всему контуру, подвергается равно-

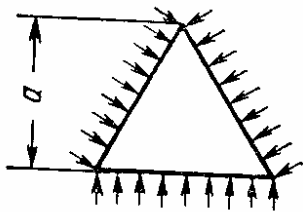


Рис. 23

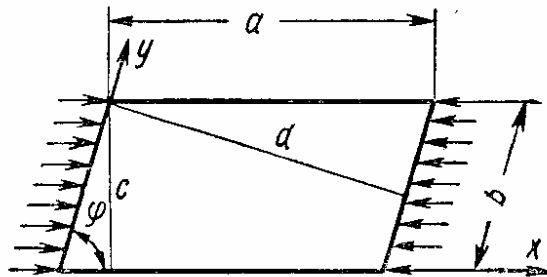


Рис. 24

мерному сжатию со всех сторон (рис. 23) [3], то критическое напряжение будет

$$\sigma_{кр} = 4 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2. \quad (48)$$

Для пластинки, имеющей форму параллелограмма, шарнирно опертой по всем кромкам и равномерно сжатой в направлении, параллельном двум сторонам (рис. 24), имеем [4]

$$c = b \sin \varphi; \quad d = a \sin \varphi.$$

Меньшую из величин c и d обозначим через f . Тогда

$$\sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{f} \right)^2. \quad (49)$$

Значения коэффициента K приведены в табл. 11.

11. Значения коэффициента K в формуле (49)

φ°	$\frac{a}{b}$						
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3	∞
90	1	1,56	2,08	4,0	4,00	4,0	4,0
60	1,31	1,95	2,60	4,99	4,54	4,13	4,0
45	1,86	2,48	3,20	5,96	5,0	4,25	4,0
30	2,71	3,28	3,90	6,68	5,30	4,35	4,0

В случае действия касательных усилий, равномерно распределенных по всем кромкам, на приведенную выше пластинку, следует различать положительный сдвиг (рис. 25, а) и отрицательный сдвиг (рис. 25, б).

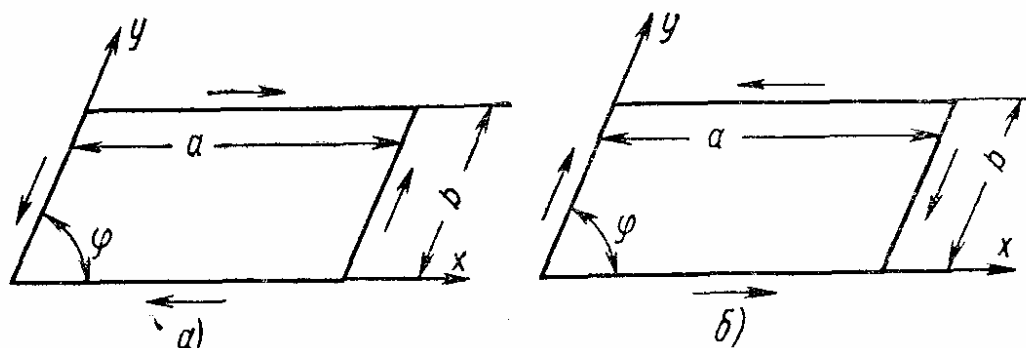


Рис. 25

Критическое напряжение

$$\tau_{кр} = K \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{f} \right)^2. \quad (50)$$

Значения коэффициента K принимают по табл. 12.

12. Значения коэффициента K в формуле (50)

$\frac{b}{a}$	φ°				
	90	75	60	45	30
1,0	9,34	13,78	20,58	31,9	53,5
	9,34	6,64	4,74	3,58	2,46
0,7	7,26	10,6	15,52	23,8	39,7
	7,26	5,25	3,79	2,69	1,78
0,4	6,19	9,9	12,70	18,91	30,65
	6,19	4,30	3,21	2,17	1,37
0	5,35	7,61	10,9	16,1	25,9
	5,35	3,78	2,63	1,79	1,11

П р и м е ч а н и е. В числителе указаны значения коэффициента K при положительном сдвиге, в знаменателе — при отрицательном.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Приводимые ниже соотношения и формулы применяют в случаях, когда интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau^2} \quad (51)$$

превосходит предел пропорциональности материала

$$\sigma_i > \sigma_{нц}. \quad (52)$$

В зависимости от того, какая теория пластичности положена в основу исследования, различают несколько методов расчета на устойчивость за пределами упругости.

1. Метод, основанный на применении теории малых упруго-пластических деформаций (теории деформаций) с учетом эффекта разгрузки. Применение теории деформаций равнозначно рассмотрению пластинки в пластической стадии как нелинейно-упругого тела. Теория деформаций без учета эффекта разгрузки в случае сжатого стержня сводится к теории «двух модулей».

2. Расчет по теории деформаций без учета эффекта разгрузки. В применении к стержням этот метод соответствует случаю, когда имеет место возрастание сжимающей нагрузки при выпучивании стержня (расчет сжатых стержней по касательно-модульной нагрузке).

3. Применение теории течения, устанавливающей зависимости между напряжениями и приращениями пластических деформаций (скоростями изменения деформаций).

Значения критических напряжений, определяемые в имеющихся решениях по теории деформаций, лежат ближе к экспериментальным данным, чем вычисленные по теории течения.

Ниже приведены расчетные данные, полученные по теории деформаций без учета эффекта разгрузки. Входящие в эти формулы величины φ_c , φ_k , t и r определяют по диаграмме, связывающей интенсивность напряжений σ_i с интенсивностью деформаций ε_i . Для случая плоского напряженного состояния будет

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{4} \gamma^2}. \quad (53)$$

Если считать коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$, то диаграмма $\sigma_i(\varepsilon_i)$ совпадает с диаграммой $\sigma(\varepsilon)$, полученной для одноосного растяжения (или сжатия) образцов из данного материала. Обозначим через E_c секущий модуль, E_k — касательный модуль, T — приведенный модуль. Тогда с учетом указанного выше допущения имеем

$$E_c = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad E_k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon};$$

$$T = \frac{4EE_k}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_k})^2}. \quad (54)$$

Величины φ_c , φ_k , t и r будут

$$\varphi_c = \frac{E_c}{E}; \quad \varphi_k = \frac{E_k}{E}; \quad t = \frac{T}{E}; \quad (55)$$

$$r = (1 - \varphi_c) \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right) \left[\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{t}{\frac{\sqrt{t}}{2} + \varphi_c \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)} \right]. \quad (56)$$

Значения расчетных параметров φ_c , φ_k , t и r , соответствующие примерной диаграмме $\sigma(\epsilon)$ для дуралюмина Д16Т ($E = 7,5 \cdot 10^5 \text{ даН/см}^2$; $\sigma_{nc} = 2000 \text{ даН/см}^2$), приведены в табл. 13, а для стали Ст.3 ($E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ даН/см}^2$, $\sigma_{nc} = 2000 \text{ даН/см}^2$, $\sigma_T = 2400 \text{ даН/см}^2$) — в табл. 14.

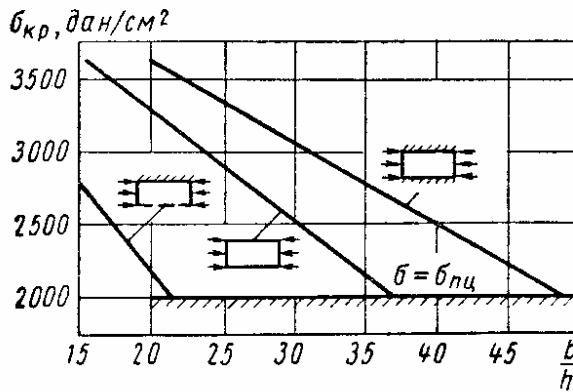


Рис. 26

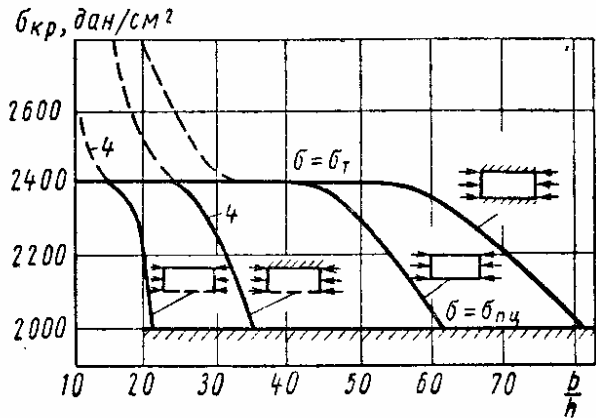


Рис. 27

Выразим критическое напряжение $\sigma_{кр}$ в упруго-пластической области через критическое напряжение $\sigma_{кр.э}$, определяемое по известным формулам и графикам, относящимся к упругой области, и поправочный коэффициент η :

$$\sigma_{кр} = \eta \sigma_{кр.э}. \quad (57)$$

Аналогично для касательных напряжений

$$\tau_{кр} = \eta \tau_{кр.э} \quad (58)$$

Значение коэффициента η находят по формулам табл. 15 [1].

Формулы, приведенные в табл. 15, относящиеся к случаям сжатия удлиненных пластинок, в практических расчетах можно использовать и для пластинок с иным отношением сторон.

Зависимости $\sigma_{кр} \left(\frac{b}{h}\right)$ для сжатых в одном направлении пластинок из дуралюмина Д16Т при различных граничных условиях показана на рис. 26. Аналогичные графики для пластинок из стали Ст.3 даны на рис. 27; штриховыми линиями нанесены участки, лежащие выше предела текучести. В практических расчетах для этих участков можно принять $\sigma_{кр} = \sigma_T$.

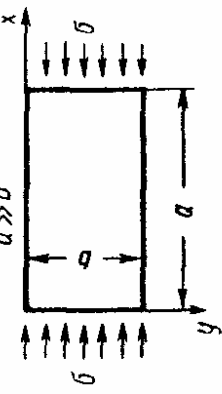
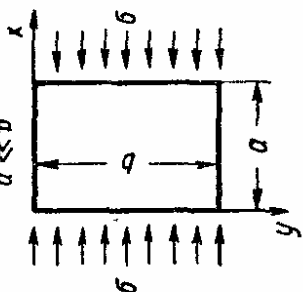
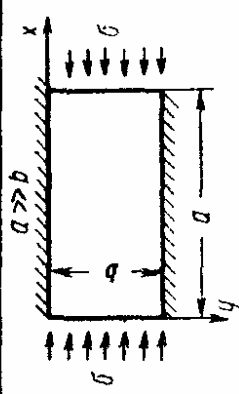
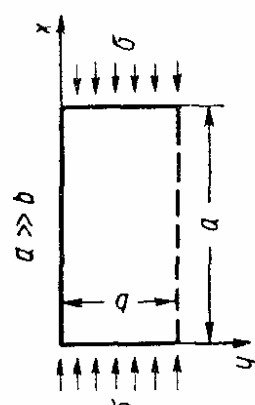
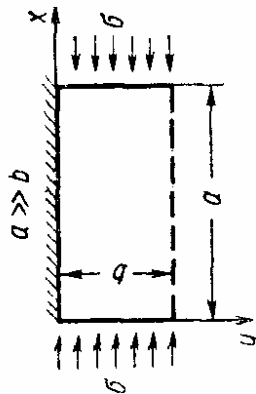
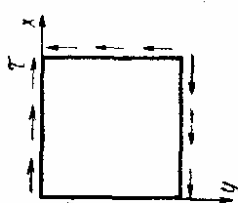
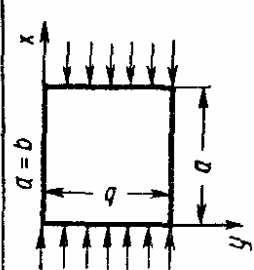
13. Расчетные параметры для дуралюмина Д16Т

$\varepsilon \cdot 10^3$	σ_B даН/см ²	$E_c \cdot 10^{-6}$ даН/см ²	$E_k \cdot 10^{-6}$ даН/см ²	$T \cdot 10^{-6}$ даН/см ²	φ_c	φ_k	t	r
2,67	2000	7,5	7,5	7,50	1	1	1	0
3,0	2200	7,33	5,96	6,65	0,98	0,79	0,88	0,01
3,5	2460	7,03	4,34	5,50	0,94	0,58	0,73	0,03
4,0	2640	6,55	3,72	4,97	0,87	0,50	0,66	0,067
4,5	2780	6,18	2,55	3,81	0,82	0,34	0,51	0,10
5,0	2900	5,80	2,05	3,22	0,77	0,27	0,43	0,13
6,0	3080	5,13	1,50	2,50	0,68	0,20	0,33	0,19
7,0	3200	4,57	1,17	2,03	0,61	0,16	0,27	0,24
8,0	3320	4,15	0,97	1,72	0,55	0,13	0,23	0,29
9,0	3400	3,78	0,82	1,48	0,49	0,11	0,20	0,33
10,0	3450	3,48	0,82	1,48	0,46	0,11	0,20	0,35
11,0	3560	3,24	0,82	1,48	0,43	0,11	0,20	0,38
12,0	3640	3,03	0,82	1,48	0,40	0,11	0,20	0,40

14. Расчетные параметры для стали Ст.3

$\varepsilon \cdot 10^3$	σ_B даН/см ²	$E_c \cdot 10^{-6}$ даН/см ²	$E_k \cdot 10^{-6}$ даН/см ²	$T \cdot 10^{-6}$ даН/см ²	φ_c	φ_k	t	r
0,95	2000	2,10	2,10	2,10	1	1	1	0
1,0	2100	2,08	1,42	1,72	0,99	0,68	0,82	0,005
1,1	2200	2,00	0,99	1,39	0,95	0,47	0,66	0,025
1,2	2280	1,90	0,67	1,05	0,90	0,32	0,50	0,052
1,3	2340	1,80	0,46	0,85	0,86	0,22	0,41	0,075
1,4	2380	1,70	0,26	0,54	0,81	0,12	0,26	0,11
1,5	2390	1,60	0,13	0,33	0,76	0,062	0,16	0,15
1,6	2400	1,50	0,06	0,19	0,71	0,029	0,094	0,19
1,8	2400	1,33	0	0	0,63	0	0	0,33
2,0	2400	1,20	0	0	0,57	0	0	0,43
2,5	2400	0,96	0	0	0,46	0	0	0,54
3,0	2400	0,80	0	0	0,38	0	0	0,62
3,5	2400	0,69	0	0	0,33	0	0	0,68
4,0	2400	0,60	0	0	0,25	0	0	0,71
4,5	2410	0,54	0,02	0,07	0,26	0,010	0,033	0,61
5,0	2420	0,48	0,04	0,13	0,23	0,019	0,062	0,60
6,0	2470	0,41	0,05	0,15	0,20	0,024	0,071	0,63
7,0	2520	0,36	0,05	0,15	0,17	0,024	0,071	0,65
8,0	2575	0,32	0,05	0,15	0,15	0,024	0,071	0,68
9,0	2630	0,29	0,05	0,15	0,14	0,024	0,071	0,70
10,0	2685	0,27	0,05	0,15	0,13	0,024	0,071	0,71
11,0	2740	0,25	0,05	0,15	0,12	0,024	0,071	0,73
12,0	2800	0,23	0,05	0,15	0,11	0,024	0,071	0,74

15. Значения коэффициентов η в формулах (57) и (58)

Схема	Формула	Примечание	Схема	Формула	Примечание
	$\eta = 0,5 (\varphi_c + \varphi_{np})$			$\eta = 0,25\varphi_c + 0,75\varphi_k$	—
	$\eta = 0,36\varphi_c + 0,64\varphi_{np}$			$\eta = \varphi_c$	Для ориентировочных расчетов при любых граничных условиях
	$\eta = 0,43\varphi_c + 0,57\varphi_{np}$			$\eta = 0,75\varphi_c + 0,25\varphi_k$	—
	$\eta = 0,81\varphi_c + 0,19\varphi_k$				
		$\varphi_{np} = 0,5\varphi_c \sqrt{1 + 3 \frac{\varphi_k}{\varphi_c}}$			

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Общие сведения

Расчет упругих систем на устойчивость при повышенных температурах важен прежде всего для авиационных конструкций. Аэродинамический нагрев обшивки летательных аппаратов, имеющих сверхзвуковую скорость полета, приводит к неравномерному распределению температур в конструкции; появляющиеся при этом термические сжимающие напряжения могут вызвать потерю устойчивости элементов обшивки.

Данные о закритической деформации пластинок при наличии температурных воздействий необходимы для определения влияния высоких температур на редуцированные коэффициенты, а также для учета влияния волнообразования обшивки на аэродинамические характеристики конструкции.

При высоких температурах проявляется ползучесть конструкционных материалов, и это приводит к потере устойчивости сжатых элементов конструкции при напряжениях, лежащих ниже критических.

Приведем некоторые данные, относящиеся к поведению пластинок при высоких температурах.

Пластинки в неравномерном температурном поле

Основные уравнения теории гибких пластинок приведены в гл. 17 т. I. Дополним эти соотношения в предположении, что температура изменяется как в срединной поверхности, так и по толщине пластины.

Деформация $\epsilon_x^{(z)}$ на расстоянии z от срединной поверхности будет

$$\epsilon_x^{(z)} = \frac{1}{E^{(z)}} (\sigma_x^{(z)} - \nu^{(z)} \sigma_y^{(z)}) + \alpha t^{(z)}, \quad (59)$$

где $\sigma_x^{(z)}$, $\sigma_y^{(z)}$ — напряжения в этом слое пластинки; $t^{(z)}$ — температура в °C в этом слое; α — коэффициент линейного расширения материала.

Значения модуля упругости $E^{(z)}$ и коэффициента Пуассона $\nu^{(z)}$ будем считать постоянными по толщине пластинки и равными значениям E и ν , соответствующим температуре срединного слоя. Учитывая соотношение

$$\epsilon_x^{(z)} = \epsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (60)$$

где ϵ_x — деформация в срединной поверхности, вместо равенства (59) можем написать

$$\epsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{E} (\sigma_x^{(z)} - \nu \sigma_y^{(z)}) + \alpha t^{(z)}. \quad (61)$$

Аналогично получаем зависимость

$$\varepsilon_y - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{E} (\sigma_y^{(z)} - \nu \sigma_x^{(z)}) + \alpha t^{(z)}. \quad (62)$$

Умножим все члены выражений (61) и (62) на z и проинтегрируем по толщине пластинки; из получившихся при этом соотношений найдем изгибающие моменты

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{Eh^2}{12(1-\nu)} \alpha \theta; \quad (63)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{Eh^2}{12(1-\nu)} \alpha \theta; \quad (64)$$

здесь θ — приведенная величина «температурного момента»,

$$\theta = -\frac{12}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t^{(z)} z dz. \quad (65)$$

Вместо дифференциального уравнения (14) [см. т. 1 гл. 18] получим

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = L(w, \Phi) + \frac{q}{h} - \frac{Eh\alpha}{12(1-\nu)} \nabla^2 \theta, \quad (66)$$

где $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, причем $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

В уравнение совместности деформаций [см. т. 1 гл. 18 уравнение (12)] подставим следующие выражения для деформаций в срединной поверхности, вытекающие из зависимостей (61) и (62):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha T; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha T, \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

где σ_x и σ_y — напряжения в срединной поверхности, а величина

$$T = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t^{(z)} dz. \quad (68)$$

Тогда придем к следующему уравнению [1]:

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \alpha \nabla^2 T. \quad (69)$$

С помощью уравнений (66) и (69) решают задачи о закритическом термическом выпучивании пластинок. Если считать $\omega \equiv 0$, то уравнение (69) принимает вид

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\alpha \nabla^2 T. \quad (70)$$

Приведем результаты решения задачи о выпучивании подкрепленной пластинки (рис. 28) при неравномерном нагреве [1]. Пластика шарнирно скреплена по краям с жесткими на изгиб ребрами, при этом

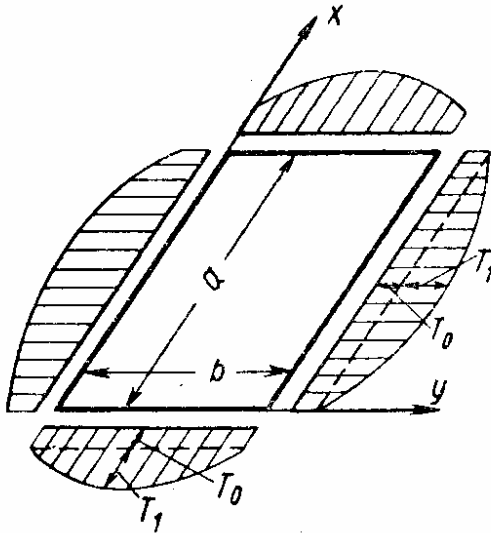


Рис. 28

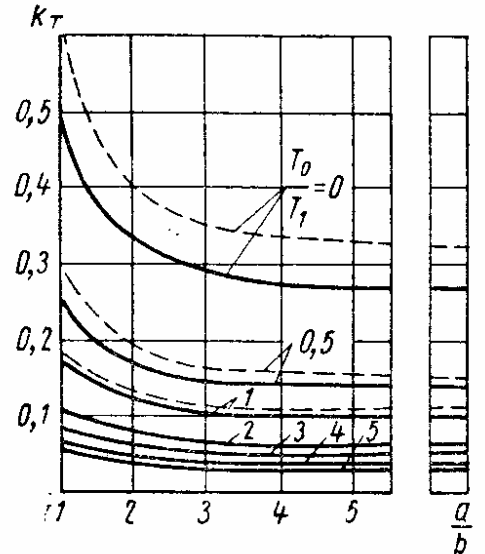


Рис. 29

края не смещаются ни в плоскости пластинки, ни в поперечном направлении. Температура вдоль осей x и y изменяется по закону

$$T = T_0 + T_1 \left[1 - \left(\frac{2x-a}{a} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{2y-b}{b} \right)^2 \right]$$

и по толщине пластинки является постоянной. Требуется определить критические значения величин T_0 и T_1 , при которых произойдет выпучивание пластинки.

Решение уравнения (70) принимают в виде

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_m A_m \cos \frac{2m\pi x}{a} + \sum_n B_n \cos \frac{2n\pi y}{b} + \\ & + \sum_m \sum_n C_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2}; \end{aligned} \quad (71)$$

здесь p_x и p_y — сжимающие напряжения вдоль x и y ; эти величины определяют из заданных граничных условий.

Для решения задачи используют метод Ритца, причем выражение для прогиба выбирают в виде

$$\omega = \sum_m \sum_n f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (72)$$

Далее минимизируют полную энергию системы по f_{mn} и получают систему линейных уравнений относительно f_{mn} . Для нахождения критических условий определитель этой системы приравнивают нулю. Результаты решения, полученного с учетом четырех членов ряда при $\nu=0,32$, показаны на рис. 29. По оси ординат отложены значения коэффициента k_T ; критический перепад температур $T_{1,кр}$ выражается через величину k_T формулой

$$T_{1,кр} = \frac{k_T}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{h}{b} \right)^2. \quad (73)$$

Штриховые линии соответствуют результатам приближенного решения, в котором температура принята равномерной и равной некоторому среднему значению между T_0 и T_1 . Графики показывают, что при $\frac{T_0}{T_1} < 2$ эффект неравномерного распределения температур

является существенным, в то время как при $\frac{T_0}{T_1} \geq 2$ результаты уточненного и приближенного решений совпадают.

Если деформация пластинки является менее стесненной (случай упругих подкрепляющих ребер), влияние неравномерности температурного поля будет еще более значительным.

Выпучивание пластинок при ползучести

Диаграмма прогиб — время, характерная для пластинки с начальной погибью при ползучести, показана на рис. 30.

Прогибы пластинки сначала увеличиваются ускоренно, затем скорость возрастания прогибов падает. Особенность выпучивания пластинок при ползучести, состоящая в последующем уменьшении скорости нарастания прогибов, связана с тем,

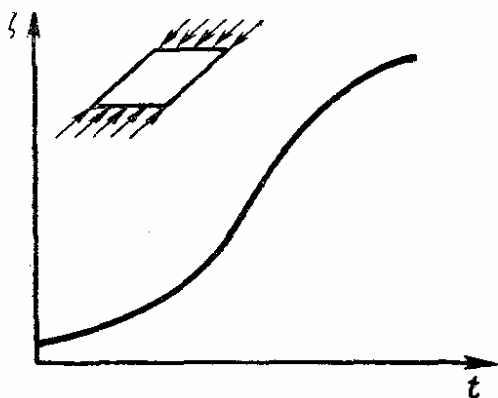


Рис. 30

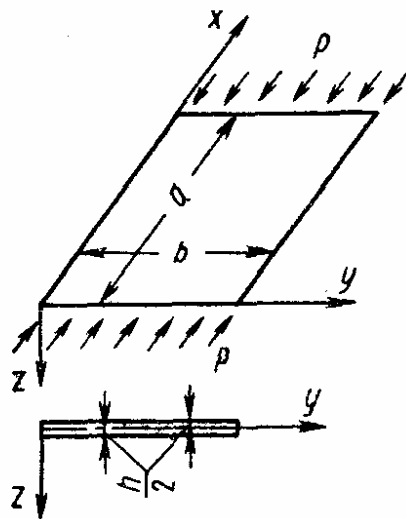


Рис. 31

что при прогибах, сравнимых с толщиной пластинки, сказывается эффект цепных напряжений.

Для идеальных пластинок и оболочек предложена в качестве критерия выпучивания при ползучести критическая деформация. Например,

в случае удлиненной пластинки ширины b при шарнирном опирании краев критическая деформация в упругой области будет

$$\varepsilon_{кр} \approx 3,62 \left(\frac{h}{b} \right)^2.$$

Считают, что наступит выпучивание при ползучести, когда сближение нагруженных кромок достигнет величины $\varepsilon_{кр}$. Ю. Н. Работновым и С. А. Шестериковым предложен динамический критерий устойчивости пластинок (подробно о критериях выпучивания при ползучести см. гл. VI в работе [1]).

Более достоверные данные о выпучивании пластинок и оболочек при ползучести получают при использовании критерия начальных несовершенств. Ниже приведены сведения по применению этого критерия.

Рассмотрим задачу о выпучивании при ползучести прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по краям и сжатой усилиями p (рис. 31). Будем исходить из условия свободного сближения ненагруженных краев пластинки. Принимают, что кромки пластинки остаются прямолинейными.

Обозначим через w и w_0 полный и начальный прогибы пластинки. Основные уравнения теории гибких пластинок для случая пластинки, имеющей начальные прогибы $w_0(x, y)$, принимают вид [1]

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 (w - w_0) &= L(w, \Phi); \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= \frac{1}{2} [L(w_0, w_0) - L(w, w)]; \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

оператор L в применении к функциям w, Φ имеет вид

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Примем для прогибов выражения

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (75)$$

и подставим выражения (75) в правую часть второго уравнения системы (74), определим функцию напряжений

$$\Phi = \frac{E}{32} (f^2 - f_0^2) \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - \frac{py^2}{2}. \quad (76)$$

Напряжения в срединной поверхности

$$\sigma_x^{(0)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^{(0)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau^{(0)} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (77)$$

Максимальные по толщине пластинки изгибные напряжения определяют по формулам [1]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x, u} &= \mp \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 (\omega - \omega_0)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 (\omega - \omega_0)}{\partial y^2} \right]; \\ \sigma_{y, u} &= \mp \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 (\omega - \omega_0)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 (\omega - \omega_0)}{\partial x^2} \right]; \\ \tau_u &= \mp \frac{Eh}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 (\omega - \omega_0)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Знак минус относится к точкам пластинки, лежащим у нижней поверхности $\left(z = \frac{h}{2}\right)$, знак плюс — к точкам у верхней поверхности $\left(z = -\frac{h}{2}\right)$ (см. рис. 31). Полные напряжения для центра пластинки $\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}\right)$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x, n} &= \frac{E\pi^2}{8a^2} (f^2 - f_0^2) \pm \frac{\pi^2 Eh}{2(1-\nu^2)} (f - f_0) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) - p; \\ \sigma_{y, n} &= \frac{E\pi^2}{8b^2} (f^2 - f_0^2) \pm \frac{\pi^2 Eh}{2(1-\nu^2)} (f - f_0) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right); \\ \tau_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Интенсивность напряжений в точках с координатами $z = \pm \frac{h}{2}$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{x, n}^2 + \sigma_{y, n}^2 - \sigma_{x, n} \sigma_{y, n}};$$

соответствующая этому напряжению интенсивность деформаций будет $\epsilon_i = \frac{\sigma_i}{E}$ (E — модуль упругости материала при соответствующей температуре; считается, что напряжения лежат в пределах пропорциональности материала в течение всего процесса деформации пластинки).

Введем безразмерные параметры

$$\epsilon_i^* = \sigma_i^* = \frac{\epsilon_i b^2}{h^2} = \frac{\sigma_i b^2}{E h^2}; \quad \sigma_x^* = \frac{\sigma_{x, n}}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2; \quad \sigma_y^* = \frac{\sigma_{y, n}}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^2; \quad (80)$$

$$\zeta = \frac{f}{h}; \quad \zeta_0 = \frac{f_0}{h}; \quad \lambda = \frac{a}{b}; \quad p^* = \frac{p}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2. \quad (81)$$

Считая сжимающие напряжения положительными, получим

$$\sigma_x^* = -\frac{\pi^2}{8\lambda^2} (\zeta^2 - \zeta_0^2) \mp \frac{\pi^2 (1 + \nu\lambda^2)}{2(1-\nu^2)\lambda^2} (\zeta - \zeta_0) + p^*; \quad (82)$$

$$\sigma_y^* = -\frac{\pi^2 \lambda^2}{8} (\zeta^2 - \zeta_0^2) \mp \frac{\pi^2 (\lambda^2 + \nu)}{2(1-\nu^2)} (\zeta - \zeta_0); \quad (83)$$

$$\sigma_i^* = \sqrt{(\sigma_x^*)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} \sigma_y^* \right)^2 - \frac{1}{\lambda^2} \sigma_x^* \sigma_y^*}. \quad (84)$$

Найдем зависимость между сжимающим усилием p^* и полным прогибом ζ . Подставляя выражения (75) и (76) в первое из уравнений системы (74) и пользуясь методом Бубнова—Галеркина, получим зависимость [1]

$$p^* = \left[p_{кр}^* + \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} (\zeta^2 + \zeta \zeta_0) \right] \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta}, \quad (85)$$

где параметр критического сжимающего напряжения

$$p_{кр}^* = \frac{\pi^2}{12(1 - \nu^2)} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2. \quad (86)$$

Если задано усилие p^* , то из выражения (85) можно определить стрелу полного прогиба ζ и далее интенсивность деформаций в любой точке пластинки. Ограничимся определением этой величины для точек $z = \pm \frac{h}{2}$ при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$.

Исследуя процесс ползучести при сложном напряженном состоянии, воспользуемся соотношениями теории упруго-пластических деформаций. Интенсивность деформаций ползучести определим в виде

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\bar{\epsilon}_x^2 + \bar{\epsilon}_y^2 - \bar{\epsilon}_x \bar{\epsilon}_y}. \quad (87)$$

Пользуясь теорией старения, примем следующую зависимость интенсивности деформаций $\bar{\epsilon}_i$ при установившейся ползучести от интенсивности напряжений σ_i и времени t

$$\bar{\epsilon}_i = A \sigma_i^m t, \quad (88)$$

где величины A и m зависят от свойств материала.

Воспользуемся следующими соотношениями для составляющих деформации ползучести:

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{\bar{\epsilon}_i \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} \right)}{\sigma_i}; \quad \bar{\epsilon}_y = \frac{\bar{\epsilon}_i \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{2} \right)}{\sigma_i} \quad (89)$$

и примем следующие обозначения:

$$\bar{\epsilon}_i^* = \frac{\bar{\epsilon}_i b^2}{h^2}, \quad \bar{\epsilon}_x^* = \frac{\bar{\epsilon}_x b^2}{h^2}, \quad \bar{\epsilon}_y^* = \frac{\bar{\epsilon}_y a^2}{h^2}, \quad A^* = A E^m \left(\frac{h}{b} \right)^{2m-2}. \quad (90)$$

Тогда зависимости (88) и (89) запишутся в виде

$$\bar{\epsilon}_i^* = A^* (\sigma_i^*)^m t; \quad (91)$$

$$\bar{\epsilon}_x^* = \frac{\bar{\epsilon}_i^* \left(\sigma_x^* - \frac{\sigma_y^*}{2\lambda^2} \right)}{\sigma_i^*}; \quad \bar{\epsilon}_y^* = \frac{\bar{\epsilon}_i^* \left(\sigma_y^* - \frac{\lambda^2 \sigma_x^*}{2} \right)}{\sigma_i^*}. \quad (92)$$

Рассмотрим промежуток времени Δt , считая от начала процесса ползучести. Определив интенсивность напряжений в точках $z = \pm \frac{h}{2}$

для центра пластинки, по формуле (91) находим интенсивность деформаций ползучести и далее из выражений (92) — составляющие этой деформации. Затем определим дополнительный прогиб $\Delta\bar{w}$, вызванный ползучестью. Для точки $z = \frac{h}{2}$ имеем

$$(\varepsilon_x, u)_{\frac{h}{2}} = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2}. \quad (93)$$

Примем

$$\Delta\bar{w} = \Delta f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \Delta\zeta = \frac{\Delta f}{h}. \quad (94)$$

Тогда для центра пластинки будет

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_x^*, u)_{\frac{h}{2}} &= \frac{\pi^2}{2} \Delta\zeta; \\ (\varepsilon_x^*, u)_{-\frac{h}{2}} &= -\frac{\pi^2}{2} \Delta\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Для величины $\Delta\zeta$ получаем выражение

$$\Delta\zeta = \frac{1}{\pi^2} \left[(\varepsilon_x^*, u)_{\frac{h}{2}} - (\varepsilon_x^*, u)_{-\frac{h}{2}} \right]. \quad (96)$$

Деформации в срединной поверхности будут при вычитании исключаться, поэтому в выражении (96) можно перейти к полным деформациям, тогда получим

$$\Delta\zeta = \frac{1}{\pi^2} \left[(\varepsilon_x^*, n)_{\frac{h}{2}} - (\varepsilon_x^*, n)_{-\frac{h}{2}} \right]. \quad (97)$$

Полная стрела прогиба равна сумме начальной стрелы прогиба и ее приращения:

$$\zeta'_0 = \zeta_0 + \Delta\zeta. \quad (98)$$

Величина ζ'_0 будет начальной стрелой прогиба для следующего промежутка Δt . Используя приведенную выше схему расчета для нескольких интервалов времени Δt , получим зависимость $\zeta(t)$.

Пример. Рассчитать дуралюминовую панель при следующих данных: $\lambda = 1$; $\frac{a}{h} = 60$; $\zeta_0 = 0,1$; $\rho^* = 0,8\rho_{\kappa\rho} = 2,88$. Величины, входящие в формулу (88), примем для данного материала при $t = 300^\circ$ равными $A = 9 \cdot 10^{-12}$; $m = 3$; σ_i в формуле (88) выражается в дан/см^2 ; t — в ч. Модуль упругости дуралюмина $E = 4 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2$.

По формуле (90) имеем

$$A^* = 0,0445.$$

Соотношение (85) получает вид

$$\rho^* = 3,6 \left(1 - \frac{1}{k} \right) + 1,23 (k^2 - 1) \zeta_0^2. \quad (99)$$

где $k = \zeta/\zeta_0$. В данном примере будет

$$\zeta_0^2 = \frac{5 - k}{1,7k(k^2 - 1)} \quad (100)$$

График по зависимости (100) показан на рис. 32. Пользуясь этим графиком, находим безразмерную стрелу прогиба $\zeta = 0,4$, соответствующую заданной начальной стреле прогиба $\zeta_0 = 0,1$.

По формулам (82) и (83) при $\nu = 0,3$ находим

$$\sigma_x^* = 4,81, \quad \sigma_y^* = 1,93 \text{ при } z = -\frac{h}{2};$$

$$\sigma_x^* = 0,57, \quad \sigma_y^* = -2,31 \text{ при } z = \frac{h}{2}$$

и далее по формуле (84)

$$\sigma_i^* = 4,17 \text{ при } z = -\frac{h}{2}; \quad \sigma_i^* = 2,64 \text{ при } z = \frac{h}{2}.$$

Примем интервал времени $t = 0,5$ ч. По зависимости (91) находим интенсивность деформаций ползучести

$$\bar{\epsilon}_i^* = 1,62 \text{ при } z = -\frac{h}{2}; \quad \bar{\epsilon}_i^* = 0,42 \text{ при } z = \frac{h}{2}.$$

Отсюда по формулам (92) определяем

$$\bar{\epsilon}_x^* = 1,5 \text{ при } z = -\frac{h}{2}; \quad \bar{\epsilon}_x^* = 0,27 \text{ при } z = \frac{h}{2}.$$

Приращение стрелы прогиба

$$\Delta\zeta = \frac{1,5 - 0,27}{\pi^2} = 0,13.$$

Для следующего интервала времени от 30 до 60 мин начальная стрела прогиба

$$\zeta_0' + \Delta\zeta = 0,23.$$

Пользуясь графиком рис. 32, находим $\zeta' = 0,69$ и далее повторяем вычисления по той же схеме.

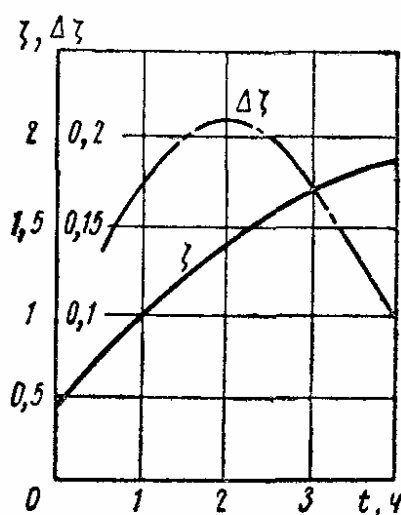


Рис. 33

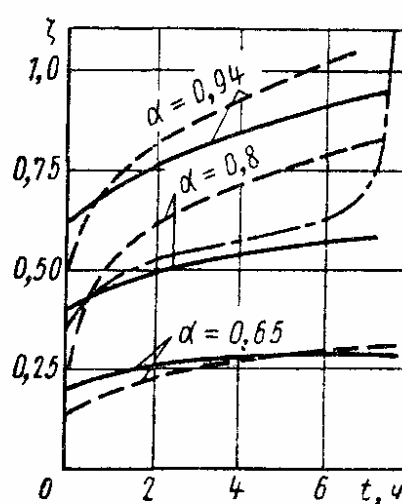


Рис. 34

Результаты вычислений приведены на графике рис. 33; здесь ζ — безразмерная стрела полного прогиба в начале каждого интервала времени; $\Delta\zeta$ — приращение стрелы прогиба, имеющее место в течение каждого интервала вследствие ползучести. Как видим, скорость нарастания прогибов, связанных

с ползучестью, сначала увеличивается, а затем процесс выпучивания пластинки «замедляется» и нарастание прогибов падает. Следовательно, для пластинки ползучесть не приводит к быстрому росту прогибов.

Результаты опытов по устойчивости плоских панелей в условиях ползучести показаны на рис. 34. Здесь штриховыми линиями нанесены результаты испытаний на устойчивость плоских панелей из дуралюмина Д16АТВ в условиях ползучести при температуре 250°C , через α обозначено отношение сжимающего усилия к критическому значению. Сплошными линиями показаны теоретические данные. Как видим, эксперименты подтверждают результаты приведенного выше решения, имеет место монотонное изменение прогибов с уменьшающейся скоростью. Штрих-пунктирная линия получена в результате опыта, проведенного с пластинкой, продольные края которой свободно перемещались (случай балки—полоски), эта кривая $\xi(t)$ аналогична диаграммам, относящимся к стержням, и позволяет найти критическое время $t_{кр}$ для балки-полоски.

ЛИТЕРАТУРА

1. В о л ь м и р А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2-е. М., «Наука», 1967.
2. В о л ь м и р А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
3. В о л ь м и р А. С., А г а м и р о в В. Л. Устойчивость пластинок и оболочек. Справочник проектировщика (расчетно-теоретический). Госстройиздат, 1960. Расчет пластинок. Справочник машиностроителя, т. 3. Машгиз, 1962.
4. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
5. Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
6. B l e i c h F. Buckling strength of metal structures, N. Y., 1952 (в переводе: Блейх Ф., Устойчивость металлических конструкций. М., Физматгиз, 1959).
7. K o l l b r u n n e r C. F., M e i s t e r M., Knicken, Springer—V., Berlin, 1955, Ausbeulen, 1958.
8. P f l ü g e r A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Springer—V., Berlin, 1950.
9. S h a n l e y F. R. Weight—strength analysis of aircraft structures, N. Y., 1952 (в переводе: Шенли, Анализ веса и прочности самолетных конструкций. М., Оборонгиз, 1957).

Глава 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ

ОСОБЕННОСТИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

Расчет оболочек на устойчивость отличается от расчета стержней и пластинок.

Характерные зависимости между нагрузкой P и параметром прогиба f для стержня, пластинки и оболочки показаны на рис. 1 и 2. Стержень, пластинка и оболочка рассматриваются при этом как системы с одной степенью свободы.

Участки OA на рис. 1 относятся к исходным безмоментным равновесным состояниям. Участки AD и AC соответствуют изогнутым, мо-

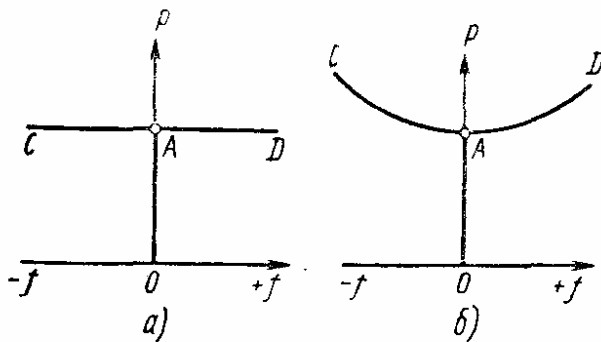


Рис. 1

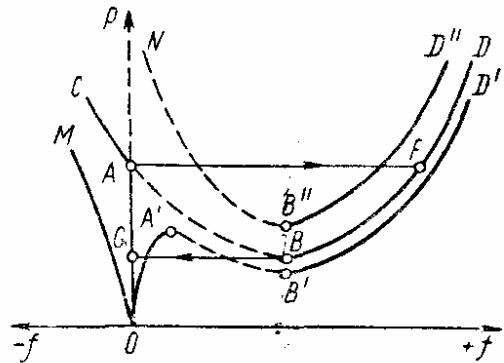


Рис. 2

ментным равновесным состояниям. В случае стержня (рис. 1, а) горизонтальная линия CD соответствует «безразличному» равновесию. Для пластинки (рис. 1, б) кривая закритических устойчивых состояний симметрична относительно оси ординат. Для идеально прямого стержня и идеально плоской пластинки оба направления прогиба $(+f)$ и $(-f)$ являются равноправными.

Диаграмма равновесных состояний в случае оболочки, показанной на рис. 2, является несимметричной (здесь прогиб к центру кривизны откладывается вправо, а от центра — влево). Ветвь ABF лежит ниже точки разветвления (бифуркации) A . Участок AB соответствует неустойчивым равновесным формам, участок BF — устойчивым. Точка A отвечает верхней критической нагрузке P_v , точка B — нижней критической нагрузке P_n . Верхней критической нагрузкой называют наибольшую нагрузку, до которой исходное состояние равновесия оболочки

является устойчивым по отношению к малым возмущениям (устойчивость в малом). Под нижней критической нагрузкой понимают нагрузку, до которой начальное состояние является единственным устойчивым равновесным состоянием (устойчивость в большом).

Если отсутствуют начальные прогибы, нагружение является статическим и в процессе нагружения имеет место строго безмоментное напряженное состояние оболочки (случай идеальной оболочки), то нагрузка P должна возрастать вдоль ветви OA и достигнуть верхнего критического значения, после чего произойдет скачок (хлопок) от состояния A в состояние F . Дальнейшее увеличение нагрузки будет происходить по ветви FD .

Резкий хлопок при потере устойчивости, как правило, влечет за собой образование трещин или появление значительных пластических деформаций и приводит к потере несущей способности оболочки. Обратный процесс (падение нагрузки) будет происходить по линии DB . Линия BG соответствует «выхлопу» оболочки. Затем снижение нагрузки будет происходить по линии GO . Следовательно, скачок при разгрузке оболочки происходит на уровне нижней критической нагрузки. Состояния оболочки, соответствующие участку AC , не реализуются, так как им соответствует более высокий уровень энергии.

При потере устойчивости оболочек появляются не только напряжения изгиба, но и дополнительные напряжения в срединной поверхности (цепные напряжения), в то время как для стержней и пластинок в момент потери устойчивости можно учитывать, как правило, только дополнительные напряжения изгиба.

Диаграмма $OA'B'D'$ отвечает модели реальной оболочки, имеющей начальные неправильности формы. Исходное состояние в этом случае не является безмоментным; ветвь равновесных состояний при нарастании нагрузки (участок OA') не совпадает с осью ординат. Устойчивым положениям соответствуют ветви OA' и $B'D'$, неустойчивым состояниям отвечает участок $A'B'$. Скачок от одного положения устойчивого равновесия в другое происходит на уровне A' . Нагрузки, соответствующие точкам A' и B' , называют верхней и нижней критическими нагрузками.

Оболочки весьма чувствительны к начальным неправильностям в форме срединной поверхности, которые сильно снижают верхнюю критическую нагрузку. Этим объясняется значительный разброс экспериментальных данных по определению критических нагрузок для оболочек.

В случае, если начальный прогиб направлен от центра кривизны, то начальная ветвь OM располагается слева от оси ординат. Участки NB'' и $B''D''$ отвечают другим возможным равновесным формам. Здесь возможен перескок от ветви OM к ветви $B''D''$, так как уровень энергии для точек ветви $B''D''$ может оказаться ниже, чем для точек начальной ветви.

Результаты последних исследований заставили пересмотреть общие принципы расчетов оболочек на устойчивость. Требование, чтобы эксплуатационная нагрузка не превышала нижней критической величины, соответствовало прежним теоретическим результатам: расчетные значения нижней критической нагрузки лежали вблизи нижней границы экспериментальных данных.

После уточненных вычислений с помощью ЭЦВМ получены новые значения нижней критической нагрузки в наиболее характерных задачах (например, при осевом сжатии цилиндрических оболочек), кото-

рые значительно ниже, чем в предыдущих решениях. Вновь найденные величины примерно в 10 раз меньше верхних критических значений. Правда, соответствующие равновесные состояния оболочки отвечают удаленным ветвям, переход к которым требует преодоления значительного энергетического барьера и является маловероятным. В то же время в отдельных случаях нижняя критическая нагрузка является даже отрицательной, т. е. имеет обратное направление по сравнению с основным состоянием. Следовательно, требование, чтобы эксплуатационная нагрузка была меньше нижней критической величины, трудно выполнить; кроме того, это требование является излишним. Наиболее обоснованный расчет следует проводить с учетом влияния начальных неправильностей формы и других возмущающих факторов с использованием экспериментальных результатов и данных статистической теории. Статистический подход является естественным, если речь идет о большом числе одинаковых элементов конструкций, изготавливаемых в идентичных условиях.

Рекомендации для практических расчетов в различных конкретных случаях, полученные, как правило, на основании статистической обработки значительного числа экспериментальных данных, приведены ниже.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Основные уравнения для круговых оболочек

Обозначения: h — толщина оболочки; L — длина оболочки; R — радиус кривизны срединной поверхности. Положение любой точки срединной поверхности определяется координатами x, y ; координату x откладывают по образующей, y — по дуге (рис. 3). Перемещения точек срединной поверхности вдоль координатных линий x, y и вдоль нормали обозначают соответственно через u, v, w (положительными считаются прогибы w , направленные к центру кривизны).

Рассмотрим вначале упрощенный вариант линейной теории, относящийся к случаям, когда выпучивание оболочек сопровождается появлением сравнительно мелких волн, размеры которых, хотя бы в одном направлении, малы, по сравнению с размерами оболочки.

При этом оболочку в пределах каждой выпучины можно рассматривать как пологую. При потере устойчивости с образованием осесимметричных выпучин длина их должна быть мала по сравнению с длиной оболочки. Если же вмятина занимает всю длину оболочки, то число n волн, образующихся вдоль окружности, должно удовлетворять условию $n \geq 4$. Практически это условие выполняется в различных случаях нагружения оболочек средней длины. Параметры оболочек средней длины должны удовлетворять условию

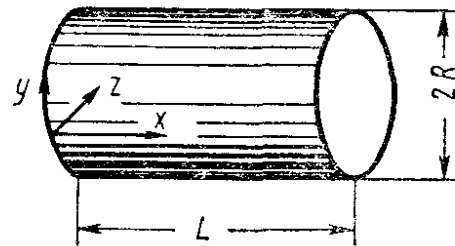


Рис. 3

$$\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{R}} < \frac{L}{R} < \sqrt{\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \cdot \frac{R}{h}}. \quad (1)$$

Выражения для деформаций удлинения в срединной поверхности ϵ_x , ϵ_y и деформации сдвига γ имеют вид

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

Изменения кривизн κ_x , κ_y и кручение χ определяют по формулам

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Уравнение совместности деформаций запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Тогда уравнения равновесия в проекциях на ось x , касательную к линии y и на нормаль запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{h \sigma_y}{R} + q = 0, \quad (6)$$

где q — интенсивность поперечной нагрузки.

Уравнения моментов получают форму

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (7)$$

Соотношения между деформациями и напряжениями в срединной поверхности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x); \\ \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Зависимости между моментами и изменениями кривизн имеют тот же вид, что и для плоской пластинки:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ H &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Из уравнений (7) определяют поперечные силы Q_x и Q_y :

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

здесь ∇^2 — оператор Лапласа,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (11)$$

Подстановка выражений (10) в уравнение равновесия (6) приводит к следующей зависимости:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{\sigma_y}{R} + \frac{q}{h}, \quad (12)$$

где ∇^4 — двойной оператор Лапласа,

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (13)$$

Исходя из соотношений (8), выразим деформации через напряжения

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x); \\ \gamma &= \frac{2\tau (1 + \nu)}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Подставляя выражения (14) в уравнение совместности деформаций (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \right] = \\ = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если ввести функцию напряжений в срединной поверхности Φ по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (16)$$

то зависимости (12) и (15) можно представить в виде

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h}; \quad (17)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (18)$$

При решении задач устойчивости в уравнение (17) нужно подставить вместо q фиктивную поперечную нагрузку q^0 , равную сумме дополнительных проекций основных усилий p_x , p_y , s на направление нормали (усилие p_x действует вдоль оси x , усилие p_y — вдоль касательной к линии y , усилия s — касательные):

$$q^0 = -h \left(p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (19)$$

Положительными считают усилия, способствующие увеличению параметров кривизны; в отношении p_x и p_y положительными считают усилия сжатия. Подставляя выражение (19) в формулу (17), получим

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - p_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (20)$$

Применим к уравнению (20) оператор ∇^4 , а к уравнению (18) — оператор $\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, тогда выражения (20) и (18) приводятся к одному разрешающему уравнению

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_x \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + p_y \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + 2s \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Приведем другой вариант уравнений линейной теории оболочек, относящийся к случаю слабо выраженного волнообразования по длине оболочки. В этом варианте срединную поверхность принимают нерастяжимой в дуговом направлении ($\epsilon_y = 0$); считают, что сдвиги в срединной поверхности отсутствуют ($\gamma = 0$). Поперечные силы и изгибающие моменты в осевом направлении, а также крутящие моменты полагают $Q_x = M_x = H = 0$; учитывают только усилия Q_y и M_y . При таких условиях справедливы следующие соотношения:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \kappa_y = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{w}{R}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Уравнение совместности деформаций получает вид

$$R \frac{\partial^4 \epsilon_x}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial x^2}. \quad (22)$$

Приходящуюся на единицу площади внешнюю нагрузку вдоль оси x , касательной к линии y и оси z , обозначим через q_x, q_y, q_z . Тогда уравнения равновесия запишутся

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{1}{h} q_x = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{1}{Rh} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{q_y}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{h}{R} \sigma_y + q_z = 0.$$

Объединяя их, получим

$$R \frac{\partial^4 M_y}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + h \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = P, \quad (23)$$

где

$$P = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - R \frac{\partial^2 q_z}{\partial y^2}. \quad (24)$$

Соотношения закона Гука имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x \approx E \varepsilon_x; \quad M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \kappa_y. \quad (25)$$

Вводя переменные $\alpha = \frac{x}{R}$, $\beta = \frac{y}{R}$ и пользуясь оператором

$$\Omega = \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad (26)$$

уравнения (22) и (23) приводим к виду

$$\Omega \sigma_x - \frac{12R}{h^3} \cdot \frac{\partial^2 M_y}{\partial \alpha^2} = 0; \quad Rh \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial \alpha^2} + \Omega M_y = R^2 P^*, \quad (27)$$

где

$$P^* = -\frac{\partial q_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_y}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 q_z}{\partial \beta^2}. \quad (28)$$

Исключая σ_x и используя выражение (25) для M_y , получаем, после исключения оператора $\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1\right)$, следующее дифференциальное уравнение для решения задач устойчивости:

$$D\Omega\Omega w + EhR^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} = -R^4 \frac{\partial^2 P^*}{\partial \beta^2}. \quad (29)$$

Уравнением (29) следует пользоваться при исследовании устойчивости оболочек средней и особенно большой длины в случае слабо выраженного волнообразования по длине оболочки.

Линейная теория дает возможность исследовать устойчивость оболочки в малом. Полное решение задачи, включающее исследование потери устойчивости оболочки в большом, может быть дано с позиций нелинейной теории. Приведем соотношения, относящиеся к оболочке большого прогиба. Будем исходить из того варианта теории, в котором оболочка считается полой, по крайней мере, в пределах отдельной вмятины.

Дополняя соотношения (2) нелинейными членами, получим следующие выражения для деформаций в срединной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Уравнение совместности деформаций принимает вид

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (31)$$

где $L(w, w)$ — оператор,

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (32)$$

Изменения кривизн и кручение срединной поверхности определяют по формулам (3).

Соотношения Гука (8) остаются прежними. Первые два уравнения равновесия отвечают соотношениям (5), третье уравнение равновесия принимает форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y h \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + 2\tau h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Для поперечных сил справедливы соотношения (10). Подставим эти выражения в уравнение (33), а соотношения (14) — в уравнение (31), тогда, вводя функцию напряжений по формулам (16), уравнения (33) и (31) приводим к следующему виду:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad (34)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (35)$$

Оператор L в применении к функциям w, Φ :

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (36)$$

Если оболочка до нагружения имеет начальные прогибы $w_0(x, y)$, то выражения для деформаций получают вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} (w - w_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

здесь w — полный прогиб. Повторяя вывод основных уравнений, вместо выражений (34) и (35) получим

$$\frac{D}{h} \nabla^4 (w - w_0) = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad (38)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w - w_0). \quad (39)$$

При интегрировании приведенных выше линейных или нелинейных уравнений необходимо удовлетворить граничным условиям. Для торцовых сечений замкнутой оболочки эти условия формулируются так: при шарнирном опирании оболочки по краям $x = 0, x = L$ (направление координатных осей соответствует рис. 3) для точек краев должно выполняться условие

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

при защемлении оболочки по краям

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Приведем условия, касающиеся перемещений u, v , а также усилий в срединной поверхности. Если точки краев свободно смещаются вдоль образующей и по дуге, то в этих точках должно быть

$$\sigma_x = 0; \quad \tau = 0.$$

В случае несмещающихся кромок следует положить $u = 0; v = 0$.

Замкнутые круговые оболочки

Сжатие замкнутой оболочки вдоль образующей. Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку длиной L , шарнирно опертую* по торцам, подвергающуюся сжатию вдоль образующей усилиями p , равномерно распределенными вдоль дуговых кромок (рис. 4).

Обозначения: R — радиус срединной поверхности оболочки; h — толщина оболочки. Исследуя устойчивость оболочки в малом, определяем верхнее критическое напряжение; при этом исходным

* Обозначения на схемах закрепления краев см. рис. 2, гл. 2.

является дифференциальное уравнение (21). Для рассматриваемого случая оно принимает вид

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (40)$$

Приведем первый вариант решения, в котором предполагаем, что поверхность оболочки после выпучивания является осесимметричной, т. е. что поперечные сечения остаются круговыми. В этом случае прогиб w будет зависеть только от x ; уравнение (40) переходит в следующее:

$$\frac{D}{h} \cdot \frac{d^8 w}{dx^8} + p \frac{d^6 w}{dx^6} + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = 0. \quad (41)$$

В соответствии с граничными условиями принимаем выражение для прогиба

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (41a)$$

где m — число полуволи изогнутой поверхности по образующей оболочки.

Подставляя выражение (41a) в уравнение (41), находим [1]

$$p = \frac{D}{h} \cdot \frac{\lambda^2}{R^2} + \frac{E}{\lambda^2}, \quad (42)$$

здесь $\lambda = \frac{m\pi R}{L} = \frac{\pi R}{l_x}$. Приравниваем нулю производную от p по λ ; при этом считаем $m \gg 1$. Получаем следующее выражение для λ :

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{12}{1-\nu^2}} \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (42a)$$

Подстановка выражения (42a) в формулу (42) приводит к следующему значению верхнего критического напряжения p_{θ} :

$$p_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{h}{R}. \quad (43)$$

При $\nu = 0,3$ имеем

$$p_{\theta} = 0,605 E \frac{h}{R}. \quad (44)$$

Из выражения (42a) получаем длину полуволи

$$l_x = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{R h}{12(1-\nu^2)}}. \quad (45)$$

В случае весьма короткой оболочки, если $\left(\frac{L^2}{R^2} \ll 1 \right)$, нужно в формуле (42) принять $m = 1$ и пренебречь вторым членом. Тогда

$$p_{кр} = \frac{\pi^2 D}{h L^2}. \quad (46)$$

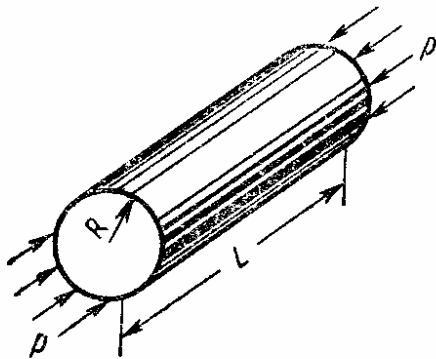


Рис. 4

Рассмотрим вариант решения задачи в допущении, что поверхность оболочки после выпучивания не является осесимметричной. Для прогиба w принимают следующее выражение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, \quad (47)$$

где m — число полувогн по образующей оболочки; n — число полных вогн вдоль окружности. Исходим из дифференциального уравнения (40); подставляя в это уравнение выражение (47), получим [1]

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \left(\frac{m^2\pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{m^4\pi^4}{L^4} - \\ - \rho \left(\frac{m^2\pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \frac{m^2\pi^2}{L^2} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Введем безразмерные параметры по формулам

$$\hat{\rho} = \frac{\rho R}{Eh}; \quad \vartheta = \frac{m\pi R}{nL}; \quad \eta = \frac{n^2 h}{R}. \quad (49)$$

Параметры ϑ и η выражаются через длины полувогн изогнутой поверхности вдоль дуги $\left(l_y = \frac{\pi R}{n}\right)$ и по образующей $\left(l_x = \frac{L}{m}\right)$ по формулам

$$\vartheta = \frac{l_y}{l_x}; \quad \eta = \frac{\pi^2 R h}{l_y^2}. \quad (50)$$

Параметр ϑ характеризует очертания вмятины; η — длину полувогн l_y . Тогда вместо формул (48) можно записать

$$\hat{\rho} = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{(1+\vartheta^2)^2}{\vartheta^2} \eta + \frac{\vartheta^2}{(1+\vartheta^2)^2} \eta. \quad (51)$$

Считая числа m и n достаточно большими, находим минимум $\hat{\rho}$ из условия

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} = 0,$$

где

$$\rho = \frac{(1+\vartheta^2)^2}{\vartheta^2} \eta.$$

Из этого условия находим значение ρ :

$$\rho = \sqrt{12(1-\nu^2)}$$

и верхнее критическое значение параметра $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho}_a = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \approx 0,605. \quad (52)$$

Приведенным решением не устанавливается однозначно форма волнообразования оболочки; вытекает лишь следующее условие, которому должны удовлетворять величины η и ϑ :

$$\eta \left(\vartheta + \frac{1}{\vartheta} \right)^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)} \approx 3,3. \quad (53)$$

В случае выпучивания оболочки с образованием квадратных волн ($\vartheta = 1$) получаем $\eta = 0,825$; тогда

$$n_3 \approx 0,91 \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (54)$$

Верхнее критическое напряжение p_a , определяемое в соответствии с формулой (52), в точности совпадает с формулой (43). Следовательно, потеря устойчивости оболочки в малом с образованием вмятин, расположенных в шахматном порядке, происходит при том же напряжении, что и в случае осесимметричного выпучивания.

Все приведенные выше формулы относятся к случаю $n \geq 4$. Практически это соответствует выпучиванию оболочки средней длины. Границы применимости теории оболочек средней длины в случае сжатия определяют, исходя из следующего условия, уточненного по сравнению с выражением (1):

$$1,38 \sqrt{\frac{h}{R}} < \frac{L}{R} < 0,57 \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad (55)$$

Выражением (55) определяется область значений $\frac{L}{R}$, для которых можно считать справедливой формулу (43).

Рассмотрим случай слабо выраженного волнообразования ($n = 2$, $n = 3$), когда оболочка выпучивается с образованием длинных волн. При получении расчетных формул для этого случая используют уравнение (29). В выражении (28) следует положить

$$q_x = 0; \quad q_y = -ph \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad q_z = -ph \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Принимая

$$w = f \sin \frac{m\pi R\alpha}{L} \sin n\beta,$$

где

$$\alpha = \frac{x}{R}; \quad \beta = \frac{y}{R};$$

из уравнения (29) получим [1]

$$p = \frac{E}{n^2 + 1} \left[\frac{\lambda^2}{n^2} + \frac{\epsilon n^2 (n^2 - 1)^2}{\lambda^2 (1 - \nu^2)} \right]; \quad (56)$$

здесь обозначено $\varepsilon = \frac{h^2}{12R^2}$ и введен прежний параметр $\lambda = \frac{m\pi R}{L}$.

Из условия минимизации p по λ находим $\lambda^2 = \varepsilon^{1/2} n^2 (n^2 - 1)/(1 - \nu^2)^{1/2}$ и величину

$$\hat{p}_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}. \quad (57)$$

При $\nu = 0,3$ будет

$$\hat{p}_\varepsilon \approx 0,605 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}. \quad (58)$$

В случае $n = 2$ находим $\hat{p}_\varepsilon = 0,363$, что составляет 0,6 от «классического» значения, определяемого по формуле (43). При $n = 3$ верхнее критическое напряжение составляет 0,8 от «классического» значения. При $n^2 \gg 1$ получаем значение $\hat{p}_\varepsilon \approx 0,605$, что совпадает с результатом по формуле (43).

Следовательно, для весьма длинных оболочек получаются пониженные, по сравнению с формулой (43), значения критического напряжения.

Характер выпучивания реальных оболочек средней длины не соответствует ни одному из этих вариантов. В действительности, вместо вмятин прямоугольного очертания, расположенных в шахматном порядке и обращенных к центру и от центра кривизны, образуются ромбовидные вмятины, глубина которых уже в первоначальный момент сравнима с толщиной оболочки. Эти вмятины появляются обычно в процессе резко выраженного хлопка оболочки. Отсюда вытекает необходимость решения задачи с позиций нелинейной теории.

В книге [1] изложено несколько вариантов решения нелинейной задачи. Решение по методу Ритца состоит в выборе аппроксимирующего выражения для прогиба w , содержащего несколько варьируемых параметров, и подстановке этого выражения в уравнение (39). В результате интегрирования этого уравнения определяют функцию напряжений в срединной поверхности Φ . Находят полную энергию системы

$$\mathcal{E} = U_c + U_u - W, \quad (59)$$

где U_c — потенциальная энергия деформации срединной поверхности; U_u — потенциальная энергия изгиба; W — работа внешних сил. Величины U_u и U_c определяют по формулам

$$U_c = \frac{h}{2E} \int_F \int [(\nabla^2 \Phi)^2 - (1 + \nu) L(\Phi, \Phi)] dx dy; \quad (60)$$

$$U_u = \frac{D}{2} \int_F \int [(\nabla^2 w)^2 - (1 - \nu) L(w, w)] dx dy, \quad (61)$$

где $F = 2\pi RL$ — площадь поверхности оболочки. Далее полную энергию системы варьируют по параметрам прогиба и находят диаграмму равновесных форм оболочки. В процессе выпучивания оболочки число и размеры вмятин являются переменными, поэтому диаграмма равновесных форм представляет собой огибающую серии кривых, отвечающих

тем или иным числам волн. Из сопоставления различных вариантов диаграммы находят наименьшую величину \hat{p} — нижнее критическое значение \hat{p}_H . Подобно тому, как реальные оболочки резко реагируют на малые возмущения, что приводит к большому разбросу экспериментальных значений критических напряжений (см. ниже), результаты решения по методу Ритца сильно меняются при незначительном изменении принимаемого выражения для прогиба. Данные различных решений по методу Ритца приводят к значениям параметра \hat{p}_H , лежащим в пределах 0,182—0,334; позднее получены более низкие значения, достигающие до 0,0427.

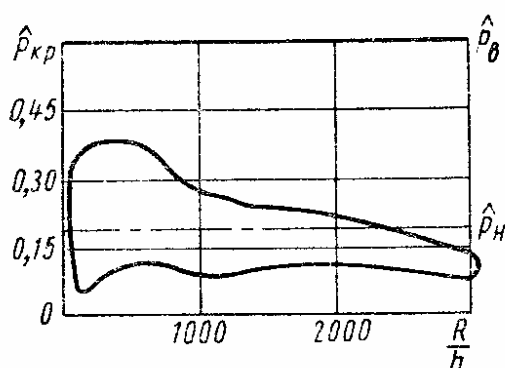


Рис. 5

Во всех решениях по методу Ритца нижнее критическое напряжение не зависит от отношения $\frac{R}{h}$. С. А. Алексеев, пользуясь методом последовательных приближений, пришел к выводу, что величина \hat{p}_H падает с возрастанием $\frac{R}{h}$.

Обратимся к экспериментальным данным [1]. Область экспериментальных значений $\hat{p}_{кр}$ показана на

рис. 5. Величина $\hat{p}_\theta = 0,605$ действительно является верхней границей для реальных критических напряжений. Большая часть опытов приводит к значениям $\hat{p}_{кр}$, лежащим выше 0,18. Некоторые экспериментальные значения лежат ниже этой величины; иногда снижение $\hat{p}_{кр}$ достигает 0,06—0,15. Рис. 5 показывает также явную тенденцию к падению $\hat{p}_{кр}$ с увеличением $\frac{R}{h}$, что вытекает и из решения С. А.

Алексеева. С увеличением $\frac{R}{h}$ вероятность появления начальных прогибов должна повышаться, а это приводит к снижению средней величины реальных критических напряжений. Это подтверждается также результатами статистической обработки экспериментальных данных. Если, например, определять нижнюю границу критических напряжений, исходя из условия, чтобы вероятность попадания экспериментальной точки в вышележащую область составляла 90 или 99%, получаются значения \hat{p} , приведенные в табл. 1. Из таблицы следует, что с увеличением $\frac{R}{h}$ значение \hat{p} резко падает.

1. Значения \hat{p} при осевом сжатии замкнутой цилиндрической оболочки

Вероятность попадания экспериментальной точки в вышележащую область в %	$\frac{R}{h}$						
	250	500	750	1000	1500	2000	2500
90	0,18	0,16	0,14	0,13	0,11	0,09	0,08
99	0,14	0,12	0,10	0,08	0,07	0,065	0,06

Сопоставление данных статистической теории устойчивости оболочек с результатами многочисленных экспериментов приводит к следующим значениям $\hat{p}_{расч}$ при осевом сжатии (в пределах упругости) *тщательно изготовленных* замкнутых цилиндрических оболочек:

$\frac{R}{h}$	До 250	500	750	1000	1500
$\hat{p}_{расч}$	0,18	0,14	0,12	0,10	0,09

В случае, когда оболочки изготовлены недостаточно *тщательно* и начальные прогибы достигают величины порядка толщины h , расчетные значения \hat{p} следует снижать примерно вдвое. Начальные прогибы, заметно превышающие толщину оболочки, вообще недопустимы, так как жесткость конструкции при этом резко снижается.

Замкнутая оболочка при внешнем давлении. Рассмотрим случай круговой оболочки, шарнирно опертой по торцам и подвергающейся действию равномерно распределенного по боковой поверхности внешнего давления интенсивностью q (рис. 6). Действие поперечного давления q эквивалентно действию радиальных сжимающих напряжений $p_y = \frac{qR}{h}$. Задача об устойчивости в линейной постановке сводится к интегрированию уравнения

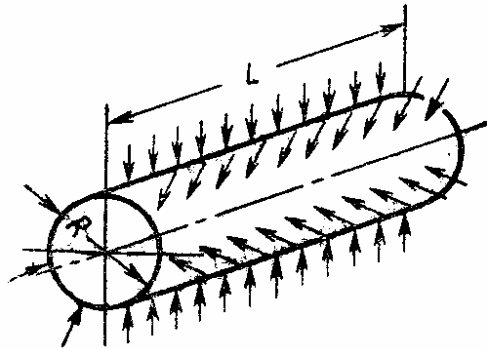


Рис. 6

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{qR}{h} \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (62)$$

Это уравнение получается из зависимости (21), если в ней учесть лишь усилия p_y . Представляя прогиб w в виде формулы (47), из уравнения (62) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - \\ - \frac{qR}{h} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \frac{n^2}{R^2} = 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Отсюда находим [1]

$$q = DR \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2 n} + \frac{n}{R^2} \right)^2 + \frac{Eh}{Rn^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2 L^2}{R^2 m^2 \pi^2} \right)^2}, \quad (64)$$

где m — число полуволн по образующей оболочки; n — число полных волн по окружности. Как видим, при определении критического давления надо принять $m = 1$; это подтверждается и экспериментами. В связи с этим влияние граничных условий в задачах об устойчивости

оболочки при внешнем давлении является более заметным, чем в случае сжатия. Будем пользоваться безразмерным параметром нагрузки

$$\hat{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2. \quad (65)$$

Выражение (64) приведем к виду

$$\begin{aligned} \hat{q} = & \frac{h}{R} \cdot \frac{n^2}{12(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2} \right)^2 + \\ & + \frac{\pi^4 R^5}{L^4 h n^6} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Если можно принять

$$\left(\frac{\pi R}{nL} \right)^2 \ll 1, \quad (67)$$

будет

$$\hat{q} = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{n^2 h}{R} + \frac{\pi^4 R^5}{L^4 h n^6}. \quad (68)$$

Из условия минимизации выражения (68) по n получим

$$n = \sqrt[4]{6\pi^2 \sqrt{1-\nu^2}} \sqrt{\frac{R}{L}} \sqrt[4]{\frac{R}{h}}, \quad (69)$$

или при $\nu = 0,3$

$$n \approx 2,7 \sqrt{\frac{R}{L}} \sqrt[4]{\frac{R}{h}}. \quad (70)$$

Подставив выражение (69) в формулу (68), находим верхнее критическое значение \hat{q}_s для случая, когда выполняется условие (67):

$$\hat{q}_s = \frac{\sqrt{6}}{9(1-\nu^2)^{0,75}} \cdot \frac{\pi R}{L} \left(\frac{h}{R} \right)^{0,5}, \quad (71)$$

или при $\nu = 0,3$

$$\hat{q}_s = 0,92 \frac{R}{L} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (72)$$

Если условие (67) не выполняется, то для определения \hat{q}_s надо, исходя из полного выражения (66), найти значение n , отвечающее минимуму \hat{q} . Значения \hat{q}_s , найденные для большого диапазона отношений $\frac{R}{h}$ и $\frac{L}{R}$, показаны на рис 7

Приведенные выше данные справедливы для оболочек средней длины при условии $\frac{1}{n^2} \ll 1$; будем считать, что это условие выполняется при $n \geq 4$. При решении задачи применительно к случаям $n = 2$, $n = 3$ нужно исходить из более общих уравнений линейной теории, приведен-

ных в книге [1]; там же дано соответствующее решение. Для верхней критической нагрузки получается выражение

$$q_0 = \frac{DR}{n^2 - 1} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^4} \left[1 - 2 \left(\nu \frac{\pi^2 R^2}{L^2} + n^2 \right) \right] \right\} + \\ + \frac{Eh}{R} \cdot \frac{\pi^4}{L^4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 (n^2 - 1)}. \quad (73)$$

Для весьма длинной оболочки, когда $L \gg R$, выражение (73) переходит в следующее:

$$q_0 = \frac{(n^2 - 1) D}{R^3}. \quad (74)$$

Минимальное значение q получается при $n = 2$:

$$q_0 = \frac{3D}{R^3}. \quad (75)$$

Выражение (74) можно получить также, исходя из уравнения (29) полубезмоментной теории. Для этого следует в выражении (28) принять $q_x = q_y = 0$; $q_z = -qR \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right)$. В уравнение (29) подставляют прогиб $w = f \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}$. Тогда выражение для q принимает вид

$$q = \frac{Dn^4 (n^2 - 1)^2 + EhR^2 r^4}{R^3 n^4 (n^2 - 1)}, \quad (76)$$

где $r = \frac{\pi R}{L}$.

Для весьма длинной оболочки при $r \rightarrow 0$ приходим к выражению

$$q = \frac{D (n^2 - 1)}{R^3}. \quad (77)$$

Полагая в формуле (76) $n^2 \gg 1$, приходим к выражению (68) для оболочек средней длины.

Испытания оболочек на устойчивость при внешнем давлении показывают, что в этом случае выпучивание оболочек происходит в виде резко выраженного хлопка с образованием глубоких вмятин, обращенных к центру кривизны; при этом каждая выпучина распространяется на всю длину оболочки. Поэтому и здесь надо обратиться к решению нелинейной задачи об устойчивости оболочки в большом. Решение нелинейной задачи по методу Ритца в первом и во втором приближениях рассмотрены в книге [1]. Окончательные значения критического давления \hat{q}_n для различных отношений $\frac{L}{R}$ и $\frac{R}{h}$ даны на рис. 8. Для фиксированного отношения $\frac{R}{h}$ соотношение между нижним и верхним

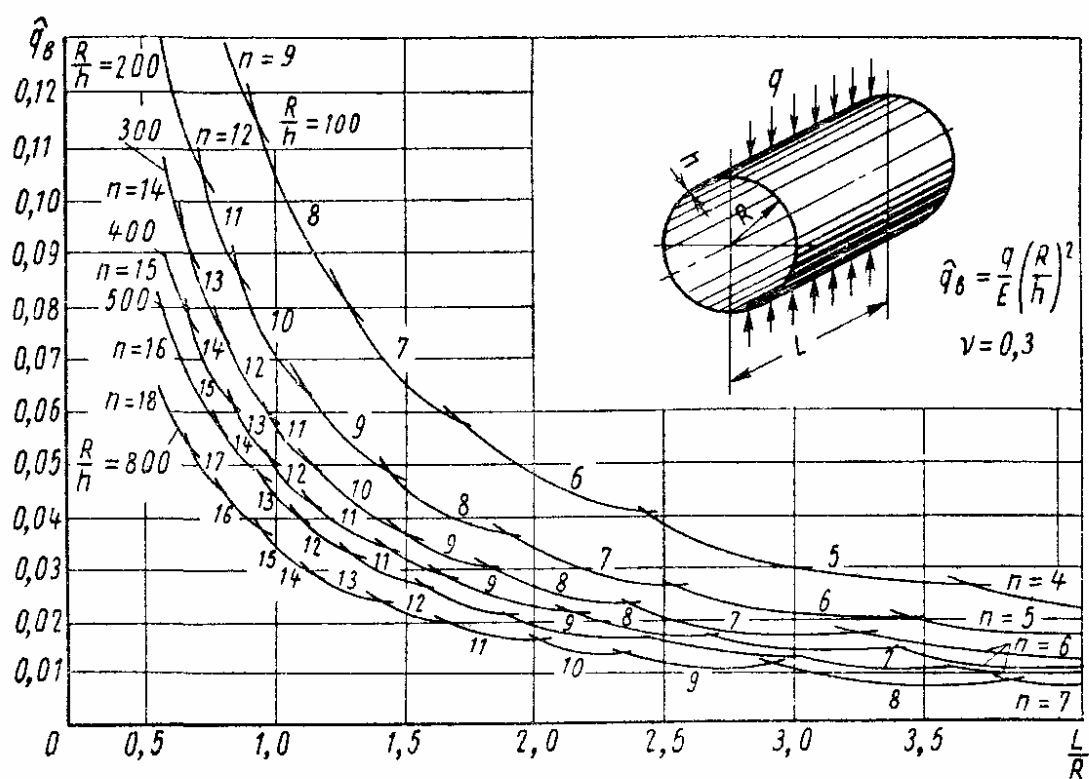


Рис. 7

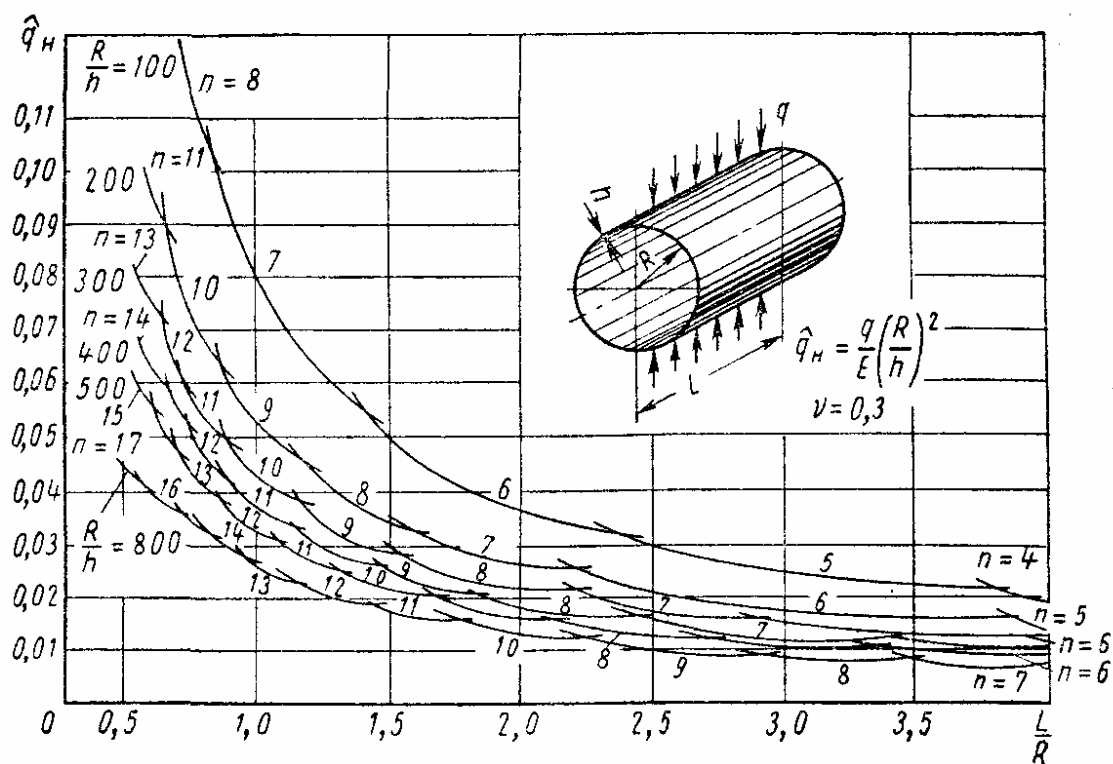


Рис. 8

критическими давлениями будет зависеть от $\frac{L}{R}$. Значения $\alpha = \frac{\hat{q}_H}{\hat{q}_B}$ в зависимости от нескольких фиксированных значений $\frac{R}{L}$ показаны на рис. 9. В случае весьма длинных оболочек $\left(\frac{L}{R} > 4\right)$, а также коротких $\left(\frac{L}{R} < 0,8\right)$ значения \hat{q}_B и \hat{q}_H близки между собой. При значениях $\frac{L}{R}$,

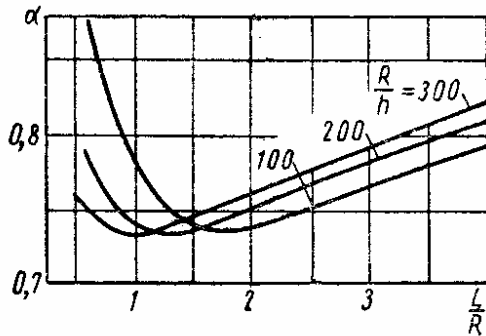


Рис. 9

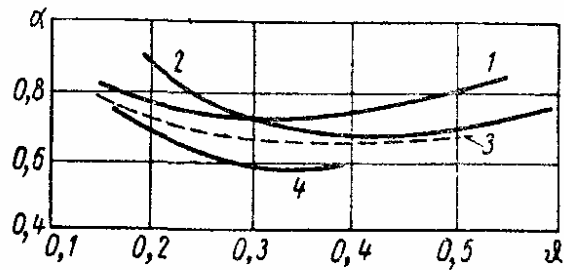


Рис. 10

заключенных в пределах 0,8—2, происходит резкое снижение отношения α . С увеличением $\frac{R}{h}$ минимум α сдвигается в сторону меньших значений $\frac{L}{R}$.

Зависимость коэффициента α от параметра

$$\vartheta = \frac{\pi R}{nL}, \quad (78)$$

характеризующего форму волнообразования, показана на рис. 10. Здесь нанесены зависимости по результатам различных решений. Кривую $\alpha(\vartheta)$ можно считать независимой от отношения $\frac{R}{h}$. Кривая 1 отвечает решению задачи во втором приближении; соответствующее значение $\alpha_{\min} = 0,73$ и относится к $\vartheta = 0,3$. Кривая 4 соответствует данным первого приближения. Другие решения показаны кривыми 2 и 3.

Следовательно, влияние нелинейности в случае внешнего давления значительно слабее, чем в случае осевого сжатия. Уровень \hat{q}_H составляет около 70—75% от \hat{q}_B , в то время как при сжатии нижняя критическая нагрузка составляет 30—35% от верхнего критического значения.

Из экспериментальных данных, полученных различными авторами при разнообразных условиях изготовления и испытания образцов, следует, что для оболочек, имеющих значительные начальные непрямолинейности, разброс экспериментальных точек оказывается большим, а уровень критического давления — гораздо ниже, чем в случае тщательно изготовленных оболочек (подробно о поведении оболочек, имеющих начальную погибь, см. в книге [1]). Для тонких оболочек $(1000 \leq \frac{R}{h} \leq 1500)$ критическое давление падает особенно сильно из-за

большого влияния начальных неправильностей. Подавляющее число экспериментальных точек лежит между верхним критическим значением и кривой 1 второго приближения для нижней критической нагрузки, показанной на рис. 10.

При проведении практических расчетов на устойчивость при внешнем давлении следует исходить из верхнего критического значения [график на рис. 7 и формула (71)], умноженного на коэффициент α . Значение α будем считать зависящим только от $\frac{R}{h}$. Ориентировочно можно рекомендовать следующие значения α :

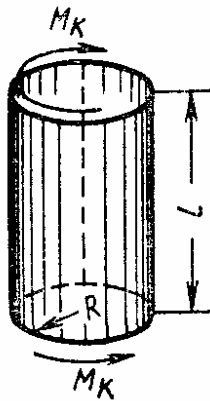


Рис. 11

$\frac{R}{h}$...	250	500	1000	1500
α	...	0,7	0,6	0,5	0,4

Кручение замкнутой оболочки. Рассмотрим устойчивость замкнутой оболочки, подвергающейся кручению парами M_K , приложенными по торцам (рис. 11). Основное состояние определяется касательными напряжениями

$$s = \frac{M_K}{2\pi R^2 h}. \quad (79)$$

Потеря устойчивости оболочки сопровождается образованием регулярно расположенных по окружности выпучин, идущих от одного торца к другому по винтовым линиям. Линейная задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2s \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (80)$$

Для оболочки средней длины, шарнирно опертой по торцам, получается следующее выражение для верхнего критического напряжения [1]:

$$s_s = 0,74 \frac{E}{(1 - \nu^2)^{\frac{5}{8}}} \cdot \frac{h}{R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}}, \quad (81)$$

или при $\nu = 0,3$

$$s_s \approx 0,78 E \frac{h}{R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}}. \quad (82)$$

Введем безразмерные величины

$$\hat{s} = \frac{s}{E} \cdot \frac{R}{h}; \quad \vartheta = \frac{\pi R}{nL}; \quad \delta = \frac{Rh}{L^2}, \quad (83)$$

где n — число полных волн по окружности. Тогда выражение (82) запишется в виде

$$\hat{s}_s = 0,78 \sqrt[4]{\delta}. \quad (84)$$

Параметр ϑ , характеризующий форму выпучин, и величину γ , равную тангенсу угла наклона гребней волн к образующей, определяют по следующим приближенным формулам:

$$\vartheta = \frac{\pi}{4,2 \sqrt[8]{1 - \nu^2}} \sqrt[4]{\delta} \approx 0,75 \sqrt[4]{\delta}; \quad \gamma \approx 1,73 \sqrt[4]{\delta}. \quad (85)$$

Обратимся к случаю выпучивания оболочек большой длины, когда число волн становится $n = 2$. Критическое напряжение для этого случая определяют, исходя из более общих уравнений линейной теории [1]; соответствующая формула получает вид

$$s_{\theta} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{E}{(1-\nu^2)^{0,75}} \left(\frac{h}{R} \right)^{1,5}; \quad (86)$$

принимая $\nu = 0,3$ и воспользовавшись безразмерным параметром \hat{s} по формуле (83), получим

$$\hat{s}_{\theta} = 0,254 \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (87)$$

Формулу (87) можно получить также, исходя из уравнения (29) полубезмоментной теории.

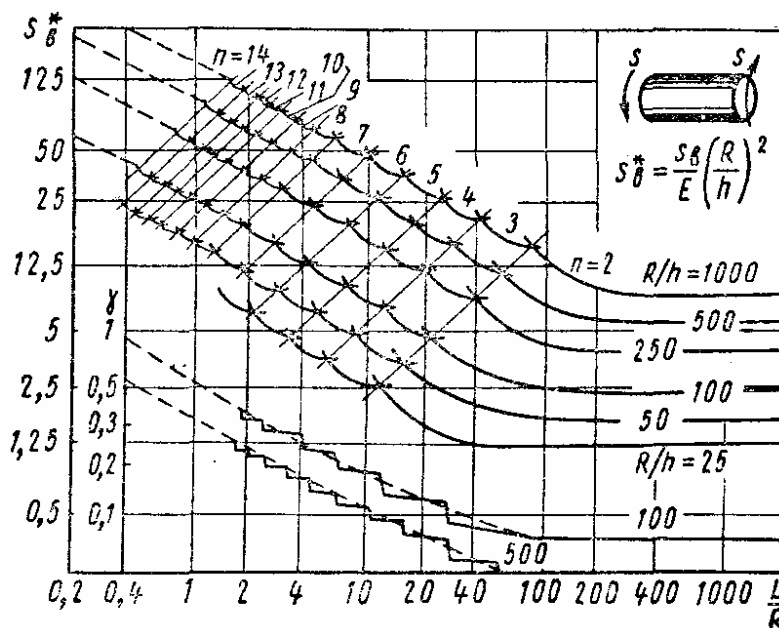


Рис. 12

На графике рис. 12 приведены расчетные линии для оболочек различной длины. Из графика можно найти наибольшее значение $\frac{L}{R}$,

при котором $n \geq 4$; эта величина приблизительно равна $\sqrt{\frac{R}{h}}$, что согласуется с неравенством (1), определяющим пределы применимости теории оболочек средней длины. Здесь дана также величина γ , равная тангенсу угла наклона гребней волн к образующей.

Опыты показывают, что выпучивание оболочек при кручении, как правило, сопровождается хлопком. Теоретическое исследование устойчивости в большом приводит к следующим значениям нижнего критического напряжения [1]. Отношение $\alpha = \hat{s}_n : \hat{s}_\theta$ зависит от параметра $\delta = Rh : L^2$. При $\delta = 1 : 20$; $1 : 200$; $1 : 2000$ получаются соответственно $\alpha = 0,94$; $0,80$; $0,87$. Следовательно, наименьшее значение нижнего критического напряжения составляет 80% от верхней критической величины.

При проведении практических расчетов принимают $s_{расч} = \nu s_0$, где s_0 берут по графику на рис. 12, для оболочек средней длины также — по формуле (82); коэффициент $\alpha = 0,8$ при $\frac{R}{h} \leq 250$. При больших значениях $\frac{R}{h}$ влияние начальной погиби в форме оболочки будет более сильным, поэтому α должно быть уменьшено (примерно в соответствии с данными стр. 146 для внешнего давления), причем нижний предел

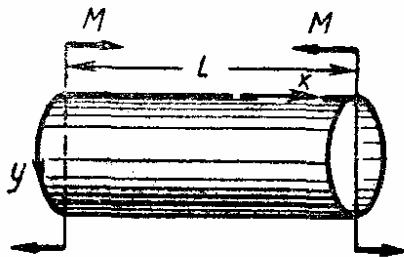


Рис. 13

$$\alpha \approx 0,5 \text{ при } \frac{R}{h} \approx 1500.$$

Устойчивость замкнутой оболочки при изгибе. Замкнутая оболочка, шарнирно опертая по торцам, под действием изгибающих пар, лежащих в диаметральной плоскости (рис. 13).

Координату y отсчитывают от точки пересечения плоскости пары со срединной плоскостью.

Закон распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях оболочки до выпучивания

$$p_x = p_1 \cos \frac{y}{R}, \quad (88)$$

где p_1 — максимальное значение нормального напряжения,

$$p_1 = \frac{M}{\pi R^2 h}. \quad (89)$$

Основное уравнение (21) линейной теории применительно к рассматриваемому случаю принимает вид

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_1 \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos \frac{y}{R} \right) = 0. \quad (90)$$

Решение задачи приводит к верхнему критическому значению $\hat{p}_{1, \sigma}$, определяемому, как и в случае центрально сжатой оболочки, по формуле (52):

$$\hat{p}_{1, \sigma} = \frac{p_{1, \sigma} R}{E h} = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \approx 0,605. \quad (91)$$

Выпучивание оболочек средней длины сопровождается хлопком, при этом образуются сравнительно мелкие вмятины в сжатой зоне. Возможны два варианта теоретического решения задачи об устойчивости оболочек средней длины в большом [1]; соответствующие этим решениям значения параметров нижнего критического напряжения будут $\hat{p}_{1, \kappa} = 0,26$ и $\hat{p}_{1, \kappa} = 0,24$.

В практических расчетах следует исходить из величины нижнего критического напряжения с учетом экспериментальных данных. Начальные неправильности в форме оболочки оказывают меньшее влияние на поведение оболочки, чем в случае центрального сжатия. Поэтому

расчетные напряжения принимают несколько более высокими. Например, при $\frac{R}{h} \leq 250$ принимают $\hat{p}_{1, расч} = 0,22$ вместо 0,18, рекомендуемого в случае центрального сжатия.

В общем случае внецентренного сжатия расчетное значение $p_{1, расч}$ определяют по формуле

$$\hat{p}_{1, расч} = \hat{p}_{расч} \left(1 + \frac{\alpha}{8} \right), \quad (92)$$

где $\hat{p}_{расч}$ определяют в зависимости от отношения $\frac{R}{h}$ по данным стр. 141 для случая центрального сжатия. Коэффициент α берут

$$\alpha = 1 - \frac{p_2}{p_1}, \quad (93)$$

где p_1 — максимальное напряжение сжатия; p_2 — напряжение на противоположном конце диаметра (с учетом знака). В случае чистого изгиба $\alpha = 2$ и при $\frac{R}{h} \leq 250$ получим $\hat{p}_{1, расч} = 1,25 \cdot 0,18 =$

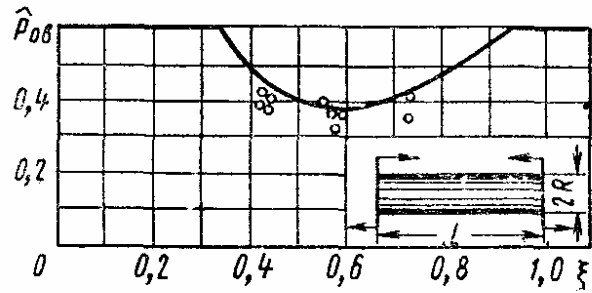


Рис. 14

$= 0,225$, что соответствует указанному выше значению $\hat{p}_{1, расч} = 0,22$.

Рассмотрим случай чистого изгиба оболочек со значительным отношением длины к радиусу, когда происходит выпучивание по длинным полуволнам. Задачу в линейной постановке можно решить, исходя из уравнений «полубезмоментной» теории оболочек. Результаты приближенного решения показаны на рис. 14 [1]. Значения параметра $\hat{p}_{1, в}$ даны в зависимости от величины $\xi = \frac{L}{mR} \sqrt{\frac{h}{R}}$, где m — число продольных полуволн. При расчетах с использованием графика на рис. 14 следует вычислить ξ при $m = 1; 2; 3$ и т. д. и выбрать наименьшее значение $\hat{p}_{1, в}$. Разброс экспериментальных значений $\hat{p}_{1, в}$ сравнительно невелик. В запас устойчивости для длинных оболочек можно принять $\hat{p}_{1, расч} = 0,22$; экспериментальные точки на рис. 14 лежат выше этого уровня.

Замкнутая оболочка, защемленная по одному торцу, при изгибе поперечной силой, сосредоточенной на свободном конце (рис. 15). Возможны два подхода к задаче. Один из них относится к сравнительно длинным оболочкам ($L > 4R$) и сводится к исследованию волнообразования в зоне наибольших нормальных напряжений сжатия, как при чистом изгибе. Реальные значения критических напряжений в этом случае на 8—10% выше, чем при чистом изгибе. При определении расчетного значения наибольшего нормального сжимающего напряжения p_1 можно пользоваться приведенными выше данными для случая чистого изгиба оболочек, предварительно завышенными на 8—10%.

Другой подход состоит в рассмотрении зоны наибольших касательных напряжений τ_{\max} у нейтрального слоя (волокно AB на рис. 15).

Расчет по τ_{\max} имеет значение для коротких оболочек при $L < 4R$. Наибольшим нормальным напряжениям p_1 соответствуют наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max} = \frac{p_1 R}{L}$. Расчет ведут, исходя из данных

о верхнем и нижнем критических напряжениях при кручении для оболочек тех же размеров. Например, исходя из формулы (82) для верхнего критического напряжения при кручении получим следующее выражение для верхней критической величины сосредоточенной нагрузки:

$$P_{\kappa} = 0,78\pi E h^2 \sqrt[4]{\frac{R h}{L^2}}. \quad (94)$$

Если нагрузка распределена по всей длине оболочки, то

$$P_{\kappa} = 1,12\pi E h^2 \sqrt[4]{\frac{R h}{L^2}}. \quad (95)$$

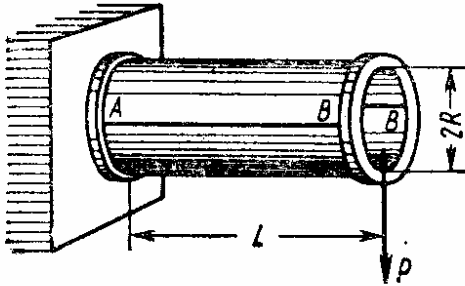


Рис. 15

Устойчивость оболочек при совместном действии нагрузок. Замкнутая

оболочка при совместном действии осевого сжатия и внешнего давления. Рассмотрим случай, когда оболочка, шарнирно опертая по торцам, подвергается совместному действию сжатия вдоль образующей усилиями p , равномерно распределенными вдоль дуговых кромок, и внешнего давления q , равномерно распределенного вдоль боковой поверхности. Комбинируя уравнения (40) и (72), получаем исходное уравнение для исследования устойчивости в малом оболочек средней длины

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{q R}{h} \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (96)$$

Решение линейной задачи приводит к следующему уравнению для определения верхних критических значений p_{κ} и q_{κ} [1]:

$$\frac{p}{p_{0, \kappa}} + \frac{q}{q_{0, \kappa}} = 1, \quad (97)$$

где $p_{0, \kappa}$, $q_{0, \kappa}$ — верхние критические нагрузки при раздельном действии осевого сжатия и внешнего давления.

Решение нелинейной задачи позволяет определить соотношение между нижними критическими нагрузками. При определении нижних критических напряжений можно пользоваться уравнением типа (97):

$$\frac{p}{p_{0, n}} + \frac{q}{q_{0, n}} = 1. \quad (98)$$

Замкнутая оболочка под действием внешнего давления и кручения. Для оболочки, торцовые сечения которой шарнирно оперты, испытывающей действие внешнего

давления q , равномерно распределенного по боковой поверхности, и кручения парами M_K , приложенными по торцам, расчетные формулы имеют вид

$$\frac{q_v}{q_{0,v}} + \left(\frac{s_v}{s_{0,v}} \right)^2 = 1; \quad \frac{q_n}{q_{0,n}} + \left(\frac{s_n}{s_{0,n}} \right)^2 = 1, \quad (99)$$

где $q_{0,v}$, $q_{0,n}$ — верхнее и нижнее критические давления в случае действия только внешнего давления; $s_{0,v}$ и $s_{0,n}$ — верхнее и нижнее критические напряжения при простом кручении.

Совместное действие осевого сжатия, внешнего давления и кручения. Комбинируя выражения (97) и (99), получим формулы для определения верхних и нижних критических напряжений

$$\frac{p}{p_{0,v}} + \frac{q}{q_{0,v}} + \left(\frac{s}{s_{0,v}} \right)^2 = 1; \quad \frac{p}{p_{0,n}} + \frac{q}{q_{0,n}} + \left(\frac{s}{s_{0,n}} \right)^2 = 1. \quad (100)$$

Замкнутая оболочка, подвергающаяся совместному действию внешнего давления, кручения и изгиба. При решении задачи об устойчивости оболочки при поперечном изгибе отмечалось, что при сравнительно большой длине ($L > 4R$) основное значение имеет потеря устойчивости типа сжатия с образованием мелких вмятин в сжатой зоне. Поэтому при расчете на комбинированную нагрузку можно исходить из формул типа (100), подставляя вместо p величину максимального напряжения p_1 при изгибе. В случае оболочки малой длины ($L < 4R$) должно произойти выпучивание типа кручения с концентрацией вмятин в центральной зоне, при этом необходимо использовать формулу (99), подставляя вместо s величину, равную сумме касательных усилий, вызванных кручением, и максимальных касательных усилий от изгиба.

Замкнутая оболочка при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления. Дополнительное внутреннее давление по линейной теории не влияет на величину критического напряжения; значение p_v и в этом случае определяют по формуле (43). Решение задачи с позиций нелинейной теории приводит к другому выводу. Потеря устойчивости в большом в случае простого сжатия оболочки сопровождается образованием глубоких вмятин, обращенных к центру кривизны. Но при наличии внутреннего давления образование таких вмятин будет затруднено, поэтому характер волнообразования должен измениться, что подтверждается экспериментами. При малом внутреннем давлении получаются вмятины, вытянутые вдоль дуги. По мере увеличения интенсивности давления эффект удлинения вмятин вдоль дуги усиливается; при значительном внутреннем давлении образуются сплошные кольцевые складки, что соответствует осесимметричной форме потери устойчивости. Но при этом эффект нелинейности не окажет существенного влияния и критическое напряжение можно определять по формуле (43). Этот вывод подтверждает и теоретическое исследование. Нижние критические нагрузки при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления определяют по графику на рис. 16, где по оси ординат отложено

отношение параметра $\hat{p}_n = p_n \frac{E}{Rh}$ нижнего критического напряжения сжатия при наличии внутреннего давления к параметру $p_{0,в}$ верхнего критического напряжения для простого сжатия, определяемого по формуле (52), по оси абсцисс — параметр внутреннего давления $\bar{q} = \left(\frac{q}{E}\right) \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}$. Значению $\bar{q} = 0$ соответствует $\hat{p}_n = 0,18$, что отвечает решению нелинейной задачи по методу Ритца во втором приближении для случая простого сжатия. На этом же графике дано значение величины $\hat{\nu}$, определяющей отношение длины вмятины l_y вдоль дуги к размеру вмятины l_x вдоль образующей.

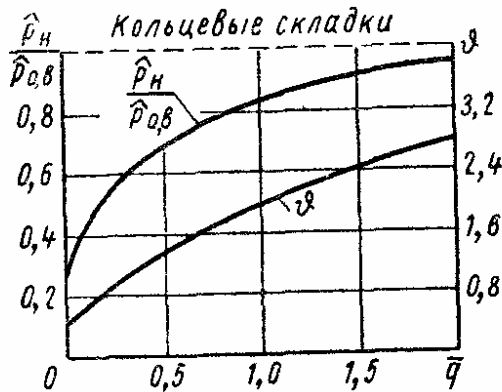


Рис. 16

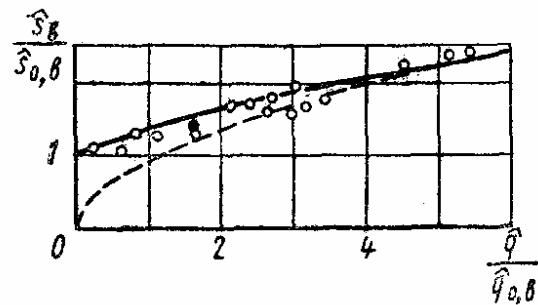


Рис. 17

Замкнутая оболочка при совместном действии внутреннего давления и кручения. Верхние критические нагрузки для оболочек средней длины определяют по графику на рис. 17. Указанные на графике величины вычисляют по формулам: $\hat{s}_0 — (83)$; $\hat{q} — (65)$; $\hat{s}_{0,в} — (82)$; $\hat{q}_{0,в} — (72)$.

Расчетной является сплошная линия, штриховая линия соответствует приближенной параболической зависимости

$$\left(\frac{\hat{s}_0}{\hat{s}_{0,в}}\right)^2 = 0,907 \frac{\hat{q}}{\hat{q}_{0,в}},$$

относящейся лишь к большим значениям \hat{q} . График показывает, что при увеличении внутреннего давления \hat{q} происходит некоторое возрастание верхнего критического напряжения кручения \hat{s}_0 . На графике нанесены экспериментальные точки (черный кружок относится к стальному образцу, остальные — к дуралюминовым). По графику можно вести практические расчеты, вводя поправочный коэффициент α , несколько более высокий, чем при простом кручении (см. стр. 148), например $\alpha = 0,85$ при $\frac{R}{h} \leq 250$.

Замкнутая оболочка при совместном действии внутреннего давления и изгиба. В этом случае предварительно определяют, какие напряжения (нормальные или касательные) являются решающими. Приведенный ранее расчет устойчивости замкнутой оболочки в условиях поперечного изгиба по

максимальным нормальным напряжениям относился к оболочкам сравнительно большой длины ($\frac{L}{R} > 4$); расчет по максимальным касательным напряжениям применяют при $L < 4R$. При комбинированном нагружении, относящемся к первому случаю, нижние критические значения максимального напряжения изгиба можно определять по графику на рис. 16, повышая p_n (при $\hat{q} < 0,5$) примерно на 25%. Во втором случае при расчете следует пользоваться графиком на рис. 17, исходя из рекомендаций для случая совместного действия кручения и внутреннего давления.

Устойчивость круговых замкнутых подкрепленных оболочек. При определении критических нагрузок и несущей способности подкрепленных оболочек и выборе оптимальных соотношений между размерами обшивки и подкрепляющих элементов возможны два подхода. Если ребра находятся на большом расстоянии одно от другого, то их рассматривают как дискретные элементы; в этом случае задача об устойчивости оболочки рассматривается в строгой постановке с учетом взаимодействия между оболочкой и подкреплениями. Если ребра расположены достаточно часто, то используют другую расчетную схему, когда путем «размазывания» жесткости ребер переходят к модели конструктивно анизотропной оболочки. При определении расчетной схемы часто исходят из соотношения между длиной волны, образующейся при выпучивании подкрепленной оболочки, и шагом ребер. Полагают, что в тех случаях, когда шаг ребер в несколько раз меньше длины волны, может быть принят второй путь, основанный на переходе к модели анизотропной оболочки. Но, по-видимому, такой критерий является недостаточным. Его необходимо дополнить требованием, чтобы критическая нагрузка, соответствующая местной потере устойчивости обшивки, была больше величины критической нагрузки при общем выпучивании подкрепленной оболочки. Если геометрические параметры оболочки и подкрепляющих ребер таковы, что местная потеря устойчивости предшествует общей, то даже в случае образования значительных по своим размерам вмятин, захватывающих несколько ребер, замена подкрепленной оболочки анизотропной моделью может привести к существенной погрешности.

В качестве примера использования первого подхода к задаче укажем на работу [4], в которой исследована в линейной постановке устойчивость оболочки, подкрепленной дискретными ребрами, при действии внешнего давления. Теоретическое и экспериментальное исследования нелинейной задачи об устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной редко расставленными ребрами, подвергающейся осевому сжатию, приведены в работе [6].

Рассмотрим устойчивость конструктивно анизотропных оболочек.

Примем, что главные направления жесткости ортотропной цилиндрической оболочки x , y совпадают с образующей и дугой поперечного сечения. Упругие свойства ортотропных оболочек характеризуются четырьмя независимыми величинами: модулями упругости E_1 и E_2 по направлениям x , y , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν_1 , отвечающим поперечной деформации вдоль дуги. Второй коэффициент ν_2 , соответствующий поперечной деформации по направлению x , связан с ν_1 соотношением

$$\nu_2 = \frac{E_2}{E_1} \nu_1.$$

Уравнения равновесия (5) и (6) в усилиях N_x , N_y , T и моментах M_x , M_y , H , приходящихся на единицу длины контура, будут:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad (101)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{N_y}{R} + q = 0. \quad (102)$$

Зависимости закона Гука для деформаций в срединной поверхности представим в виде

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_v & 0 \\ \delta_v & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_x \\ N_y \\ T \end{vmatrix}; \quad (103)$$

здесь приняты обозначения

$$\delta_1 = \frac{1}{E_1 h}; \quad \delta_2 = \frac{1}{E_2 h}; \quad \delta_v = -\frac{\nu_2}{E_2 h} = -\frac{\nu_1}{E_1 h}; \quad \delta_G = \frac{1}{G h}. \quad (104)$$

Например, для деформации ε_x матрица (103) разворачивается в виде

$$\varepsilon_x = \delta_1 N_x + \delta_v N_y + 0 \cdot T = \frac{N_x}{E_1 h} - \frac{\nu_2 N_y}{E_2 h}.$$

Используя форму матрицы (103), запишем моменты

$$\begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ H \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_1 & D_v & 0 \\ D_v & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2D_G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \chi \end{vmatrix}, \quad (105)$$

где

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad (106)$$

$$D_G = \frac{1}{12} G h^3; \quad D_v = D_1 \nu_2 = D_2 \nu_1. \quad (107)$$

Изменения кривизн κ_x , κ_y , χ определяют по формулам (3).

Введем функцию усилий в срединной поверхности φ по формулам

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad T = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (108)$$

Функция $\varphi = \Phi h$, где Φ — функция напряжений в формулах типа (16). Уравнение (102) можно записать в виде

$$D_1 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q; \quad (109)$$

здесь

$$D_3 = D_v + 2D_G. \quad (110)$$

Уравнение (109) переходит в уравнение (23) гл. 2 для ортотропных пластинок. Уравнение совместности деформаций (4) получает вид

$$\delta_2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (111)$$

Вводя операторы

$$\nabla_\delta^4 = \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$$\nabla_D^4 = D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

представим (109) и (111) в форме

$$\left. \begin{aligned} \nabla_D^4 w - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= q; \\ \nabla_\delta^4 \varphi + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

В случае изотропной оболочки

$$\nabla_D^4 = D \nabla^4; \quad \nabla_\delta^4 = \frac{1}{Eh} \nabla^4.$$

При решении задач об устойчивости в малом в первое из уравнений (112) следует подставлять интенсивность фиктивной поперечной нагрузки по формуле (19), тогда оно примет вид

$$\nabla_D^4 w - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + h \left(p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

Способом, описанным при получении уравнений (34) и (35), приходим к следующим уравнениям, относящимся к ортотропным оболочкам большого прогиба (при $q = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \nabla_D^4 w &= L(w, \varphi) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \nabla_\delta^4 \varphi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

где L — оператор по формулам (32) и (36).

Для ортотропной оболочки с начальными неправильностями будет

$$\left. \begin{aligned} \nabla_D^4 (w - w_0) &= L(w, \varphi) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \nabla_\delta^4 \varphi &= -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \\ &\quad - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

здесь w и w_0 — функции полного и начального прогибов, как и в уравнениях (38), (39).

Энергия деформации в срединной поверхности и энергия изгиба для ортотропной оболочки равны

$$U_c = \frac{1}{2} \iint_F (\delta_1 N_x^2 + 2\delta_v N_x N_y + \delta_2 N_y^2 + \delta_G T^2) dx dy; \quad (115)$$

$$U_u = \frac{1}{2} \iint_F \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (116)$$

где $F = 2\pi RL$ — площадь поверхности оболочки. Рассмотрим решения конкретных задач.

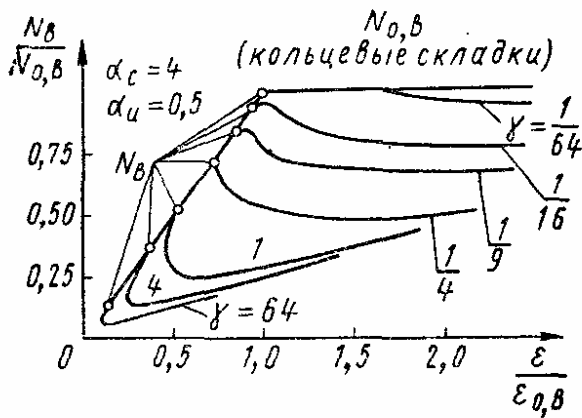


Рис. 18

Устойчивость ортотропной оболочки при осевом сжатии усилиями N , равномерно распределенными по торцам оболочки. Принимаем следующее аппроксимирующее выражение для прогиба:

$$w = f \left(\cos \frac{\pi x}{l_x} \cos \frac{\pi y}{l_y} + a \cos \frac{2\pi x}{l_x} + b \cos \frac{2\pi y}{l_y} + d \right), \quad (117)$$

где l_x, l_y — длины полуволн вдоль образующей и по дуге; a, b и d — постоянные величины. Рассмотрим нелинейную задачу (решение линейной задачи получается как предельный случай). Выражение (117) подставляют во второе из уравнений (113); в результате интегрирования его определяют функцию ϕ . Далее вычисляют полную энергию системы; минимизация энергии по пяти параметрам приводит к системе пяти нелинейных уравнений. Результаты вычислений с помощью электронных цифровых машин показаны на рис. 18 [1]. На графике (рис. 18) обозначено:

$$\alpha_c = \frac{\delta_v + \frac{1}{2} \delta_G}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}; \quad \alpha_u = \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}}; \quad (118)$$

$\epsilon_{0,с}$ — критическая деформация кольцевого выпучивания; γ — характеристика ортотропности оболочки,

$$\gamma = \frac{D_1 \delta_1}{D_2 \delta_2}, \quad (119)$$

при относительно сильных стрингерах величина γ значительна, при сильных шпангоутах — мала; $N_{0,с}$ — верхнее критическое усилие сжатия, отвечающее случаю осесимметричного кольцевого выпучивания; N — верхнее критическое усилие, соответствующее тому случаю

потери устойчивости, когда выпученная поверхность делится на прямоугольные клетки. Величина $N_{0, \theta}$ будет:

$$N_{0, \theta} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_1}{\delta_2}}. \quad (120)$$

Введем обозначение

$$\bar{N}_{0, \theta} = \frac{NR}{2} \sqrt{\frac{\delta_1}{D_2}}, \quad (121)$$

тогда величине $N_{0, \theta}$ будет соответствовать параметр $\bar{N}_{0, \theta} = \sqrt{\gamma}$.

Для ортотропных оболочек точки бифуркации «клеточного» типа N_{θ} и «кольцевого» типа $N_{0, \theta}$ не совпадают. Выпучивание в малом должно сопровождаться образованием клеток, причем с возрастанием γ отношение $\frac{N_{\theta}}{N_{0, \theta}}$ па-

дает. Закритические диаграммы относятся к выпучиванию «по ромбам»; характер их резко меняется в зависимости от γ . В случае усиленных стрингеров (при значительных γ) диаграмма имеет за точкой бифуркации обычный падающий участок. С уменьшением γ наклон этого участка изменяется; начиная с $\gamma < \frac{1}{9}$, получается не падающая, а восходящая характеристика, сменяющаяся участком снижения величины сжимающих усилий, и оказывается возможным определить нижнее критическое напряжение. По-видимому, при испытаниях реальных оболочек переход от одной ветви к другой будет осуществляться в процессе хлопков.

На рис. 19 показано изменение отношения нижнего критического усилия к верхнему в зависимости от γ при $\alpha_c = 4$ и $\alpha_u = 0,5$. Эффект нелинейности оказывается наибольшим для изотропных оболочек. Этот эффект несколько ослабевает в случае оболочки, усиленной в продольном направлении, и резко падает для оболочек, имеющих поперечные подкрепления.

На рис. 19 показано изменение отношения нижнего критического усилия к верхнему в зависимости от γ при $\alpha_c = 4$ и $\alpha_u = 0,5$. Эффект нелинейности оказывается наибольшим для изотропных оболочек. Этот эффект несколько ослабевает в случае оболочки, усиленной в продольном направлении, и резко падает для оболочек, имеющих поперечные подкрепления.

Подкрепленная оболочка подвергается одновременно действию осевого сжатия и внутреннего давления. Результаты решения этой задачи показаны на рис. 20. Интенсивность внутреннего давления обозначим через q ; параметры \bar{N} и \bar{q} будут:

$$\bar{N} = \frac{RN}{2} \sqrt{\frac{\delta_2}{D_2}};$$

$$\bar{q} = \frac{qR^2}{2} \sqrt{\frac{\delta_2}{D_2}}.$$

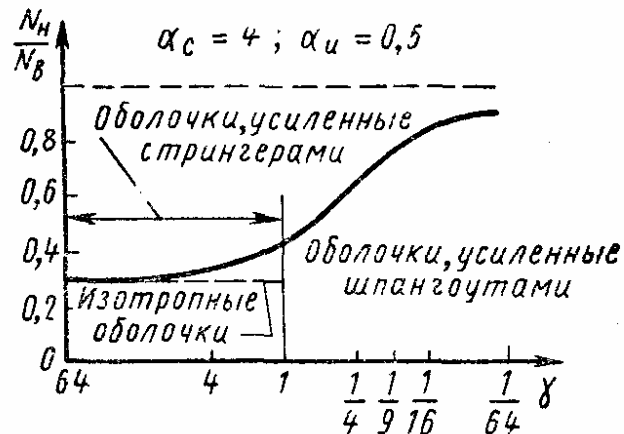


Рис. 19

На графике (рис. 20) изображена зависимость между сжимающим усилием \bar{N} и величиной приведенной деформации $\bar{\epsilon} + \delta_v \bar{q} / \sqrt{\delta_1 \delta_2}$. Диаграммы относятся к оболочке, усиленной в осевом направлении. Сверху график ограничен линией, соответствующей случаю осесимметричного выпучивания. С увеличением \bar{q} возрастает не только нижнее, но и верхнее критическое усилие; этим ортотропная оболочка отличается от изотропной. В зависимости от параметра \bar{q} меняется и вид начального участка закритической диаграммы. При малых значениях \bar{q} начальному участку диаграммы соответствует падающая характеристика. При значительном \bar{q} получаются восходящие участки, при $\bar{q} = 4$ начальный участок получает форму петли.

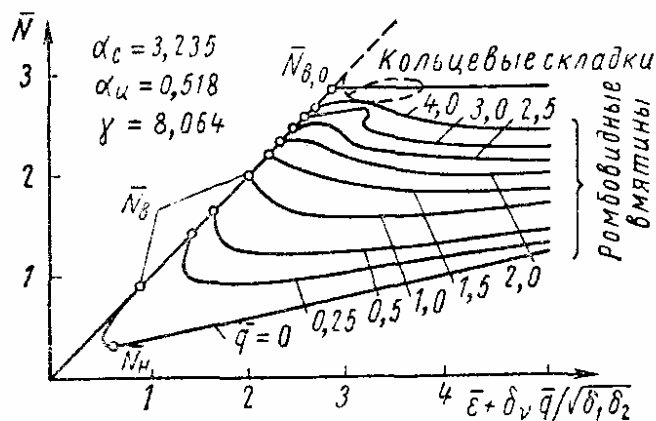


Рис. 20

Можно сделать вывод, что при наличии значительного внутреннего давления более эффективным оказывается усиление оболочки в продольном направлении: в этом случае величины N_v и N_h оказываются относительно выше, чем для оболочек, усиленных в дуговом направлении.

При проектировании подкрепленных оболочек необходимо выбирать рациональное значение параметров, характеризующих подкрепления. Требованию наименьшего веса отвечает оболочка вафельного типа с весьма часто расставленными продольными и кольцевыми ребрами. Конструкция должна быть рассчитана так, чтобы в пределах каждой вмятины было расположено несколько подкрепляющих ребер; лишь тогда критическое напряжение может значительно возрасти по сравнению со случаем неподкрепленной оболочки. Как показывают исследования, в вафельных оболочках, предназначенных для восприятия осевой сжимающей нагрузки, вес подкреплений целесообразно распределять примерно поровну между кольцевыми и продольными ребрами.

Круговые панели

Цилиндрическая панель при сжатии вдоль образующей. Рассмотрим задачу об устойчивости панели — незамкнутой цилиндрической оболочки — при действии сжимающих усилий p , равномерно распределенных вдоль криволинейных кромок (рис. 21). Через a и b обозначены размеры панели по образующей и вдоль дуги. Координату x отсчитывают вдоль образующей; y — по дуге; R — радиус срединной поверхности. Панель шарнирно оперта по всем кромкам. Решая линейную задачу, исходя из уравнения (21); для рассматриваемого случая оно принимает вид

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (122)$$

Выражение для прогиба в соответствии с принятыми граничными условиями представим в виде

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (123)$$

где m и n — числа полуволн вдоль образующей и по дуге. Подставляя это выражение в уравнение (122), находим

$$\rho = \frac{D}{hb^2} \pi^2 \varphi^2 + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{b^2}{\pi^2 \varphi^2}, \quad (124)$$

где

$$\varphi = \left(\frac{m^2 b}{a} + \frac{n^2}{b} \right) \frac{a}{m}. \quad (125)$$

Минимизируя ρ по φ , находим

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \frac{b}{\sqrt{Rh}}. \quad (126)$$

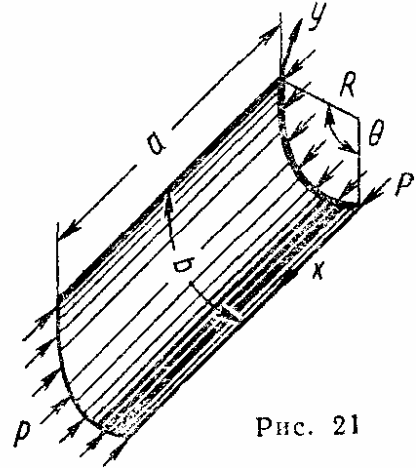


Рис. 21

Подставляя формулу (126) в равенство (124), определяем верхнее критическое напряжение

$$\rho_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{h}{R}; \quad (127)$$

при $\nu = 0,3$ будет

$$\rho_{\theta} = 0,605 E \frac{h}{R}. \quad (128)$$

Такая же формула (43) была получена для замкнутой оболочки, сжатой вдоль образующей. Формула (127) применима только к панели, охватывающей сравнительно большой центральный угол. Для весьма пологой панели следует в формуле (125) принять $n = 1$, $m = \frac{a}{b}$; при этом будет $\varphi = 2$. Формулы (127), (128) справедливы при условии

$$\frac{1}{\pi} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \frac{b}{\sqrt{Rh}} \geq 2, \quad (129)$$

т. е. если охватываемый панелью центральный угол отвечает неравенству

$$\theta \geq \frac{2\pi}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (130)$$

При меньших значениях угла θ , в случае, если отношение сторон панели $\frac{a}{b}$ является целым числом, критическое напряжение будет

$$\rho_{\theta} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2 h} + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{b}{R} \right)^2 E. \quad (131)$$

Введем безразмерные параметры нагрузки и кривизны

$$p^* = \frac{p}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2; \quad k = \frac{\theta b}{h} = \frac{b^2}{Rh}. \quad (132)$$

Тогда из формулы (127) получим

$$p_a^* = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} k \approx 0,605k. \quad (133)$$

Условие (130) применимости формулы (133) примет вид

$$k \geq \frac{2\pi^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (134)$$

или приближенно $k \geq 12$.

Для пологой панели (при $k < 12$) из формулы (131) получим

$$p_e^* = \frac{\pi^2}{3(1-\nu^2)} + \frac{k^2}{4\pi^2}, \quad (135)$$

или

$$p_e^* = 3,6 + \frac{k^2}{39,5}. \quad (136)$$

При исследовании больших прогибов панели используют уравнения (34) и (35). Приведем результаты решения нелинейной задачи для шарнирно опертой квадратной панели ($a = b$), полученные в предположении, что ненагруженные кромки сближаются свободно, оставаясь прямолинейными. В первом приближении принимаем выражение для прогиба w в виде формулы (123); считаем при этом, что в обоих направлениях образуется лишь по одной полуволне ($m = n = 1$). Подставляя w в уравнение (35) и интегрируя, определяем функцию напряжений Φ в срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \Phi = \frac{1}{32} f^2 \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \frac{1}{4R} f \frac{a^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a} \times \\ \times \sin \frac{\pi y}{a} - \frac{py^2}{2E}. \end{aligned} \quad (137)$$

Статические граничные условия на кромках: $\sigma_y = 0$, $\tau = 0$ при $y = 0$, $y = b$; $\sigma_x = -p$, $\tau = 0$ при $x = 0$ выполняются для каждой кромки лишь в среднем. Далее составляем уравнение Бубнова-Галеркина

$$\int_0^a \int_0^b \left[\frac{D}{h} \nabla^4 w - L(w, \Phi) - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} dx dy = 0. \quad (138)$$

Сюда подставляем выражения для w , Φ и выполняем интегрирование; затем находим параметр [1]

$$p^* = p_a^* + \frac{\pi^2}{8} \zeta^2 - \frac{10}{3\pi^2} k \zeta, \quad (139)$$

где p^* , k — по формулам (132); p_v^* — по выражению (135); $\zeta = \frac{f}{h}$ — безразмерный прогиб. Из условия минимизации p^* по ζ определяют нижнее критическое напряжение (при $\zeta = 0,14k$)

$$p_n^* = p_v^* - \frac{200}{9\pi^6} k^2. \quad (140)$$

Значение p_n^* по формуле (140) лежит несколько ниже критического напряжения для плоской панели, равного $\frac{\pi^2}{3(1-\nu^2)} \approx 3,6$. На рис. 22 приведена зависимость p^* (ζ) по формуле (139) (кривая 2) в сравнении с уточненным решением (кривая 1), полученным в конечных разностях с помощью электронной цифровой машины в предположении, что кромки панели остаются прямолинейными. Кривые относятся к случаю квадратной панели при $k = 12$. Судя по этим данным, общий характер изменения p^* описывается приближенным решением удовлетворительно, но величина p_n^* по формуле (140) лежит ниже уточненного значения.

В более общем решении задачи, для панели произвольной кривизны при $a \neq b$, прогиб был принят в виде

$$\begin{aligned} w = f_1 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \\ + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (141)$$

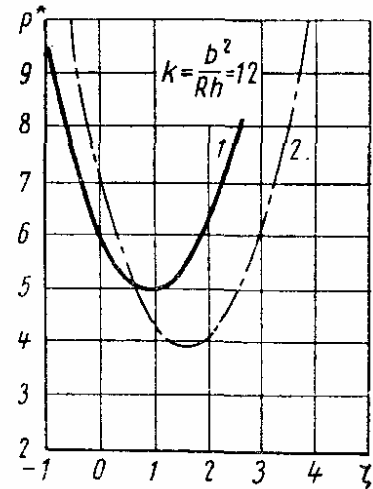


Рис. 22

Решение задачи подробно рассмотрено в работе [1]. Нижнее критическое напряжение при $k > 20$ оказалось равным $p_n^* = 0,26k$. По-видимому, при более точном решении теоретическое значение p_n должно упасть и приблизиться к значению $0,18k$, полученному для замкнутой цилиндрической оболочки. В то же время для пологой панели (при $k \leq 20$) величина p_n^* мало отличается от критического напряжения для плоской панели. Следовательно, при проведении практических расчетов верхнее критическое напряжение нужно определять по формулам (133) и (135), а для нижнего критического напряжения принимать (в случае тщательно изготовленных оболочек): $p_n^* = 3,6$ при $k \leq 20$; $p_n^* = 0,18k$ при $k > 20$. Для панелей, имеющих значительную начальную погиб, сравнимую с толщиной оболочки, следует принимать $p_n^* = 0,12k$ при $k > 20$.

Цилиндрическая панель при сдвиге. Панель с шарнирно опертыми краями подвергается действию касательных усилий s , равномерно распределенных по всему контуру (рис. 23). В линейной задаче используют уравнения (20) и (18):

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (142)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (143)$$

Выражение для прогиба представим в виде ряда

$$w = \sum_m \sum_n f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (144)$$

Подставляя выражение (144) в уравнение (143), определяем функцию напряжений в срединной поверхности

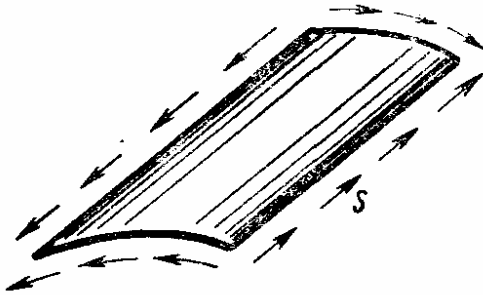


Рис. 23

$$\Phi = \frac{E}{\pi^2 a^2 R} \times \sum_m \sum_n f_{mn} \frac{m^2}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + sxy.$$

Составим уравнение Бубнова-Галеркина

$$\iint_F \left(\frac{D}{h} \nabla^4 w - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = 0$$

и подставим в него выражения для w и Φ ; после интегрирования получим

$$f_{mn} \frac{ab}{4} \left[\frac{m^4 E}{R^2 a^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} + \frac{\pi^4 D}{h} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \right] - \sum_i \sum_j f_{ij} 8s \frac{mni j}{(m^2 - i^2)(n^2 - j^2)} = 0;$$

здесь учитывают лишь те члены, для которых суммы $m + i$ и $n + j$ нечетны. Вводя обозначения

$$s^* = s \frac{ab}{Eh^2}; \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad (145)$$

получаем уравнения типа

$$A_{mn} f_{mn} - \rho \sum_i \sum_j f_{ij} \frac{ij}{(m^2 - i^2)(n^2 - j^2)} = 0, \quad (146)$$

где

$$A_{mn} = \frac{\pi^2}{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{(m^2 + n^2 \lambda^2)^2}{mn \lambda^2} + \frac{k^2}{\pi^2} \cdot \frac{4m^3 \lambda^2}{(m^2 + n^2 \lambda^2)^2 n};$$

$$\rho = \frac{128s^*}{\pi^2}; \quad (147)$$

здесь k — параметр кривизны по формуле (132).

Решая задачу в первом приближении, примем числа m, n, i, j равными 1 и 2. Тогда получим следующую систему уравнений типа (146):

$$\begin{aligned} A_{11}f_{11} - \frac{4}{9}\rho f_{22} &= 0; & A_{22}f_{22} - \frac{1}{9}\rho f_{11} &= 0; \\ A_{12}f_{12} + \frac{2}{9}\rho f_{21} &= 0; & A_{21}f_{21} + \frac{2}{9}\rho f_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Условие нетривиального решения этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_{11} & -\frac{4}{9}\rho & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9}\rho & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{12} & \frac{2}{9}\rho \\ 0 & 0 & \frac{2}{9}\rho & A_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & -\frac{4}{9}\rho \\ -\frac{1}{9}\rho & A_{22} \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} A_{12} & \frac{2}{9}\rho \\ \frac{2}{9}\rho & A_{21} \end{vmatrix} = 0;$$

первое из этих уравнений соответствует четной сумме индексов $m + n$, второе — нечетной. Отсюда определяют два корня для ρ :

$$\rho_1 = \frac{9}{2} \sqrt{A_{11}A_{22}}; \quad \rho_2 = \frac{9}{2} \sqrt{A_{12}A_{21}}$$

и значения верхнего касательного напряжения

$$s_1^* = \frac{9\pi^2}{256} \sqrt{A_{11}A_{22}}; \quad s_2^* = \frac{9\pi^2}{256} \sqrt{A_{12}A_{21}}. \quad (148)$$

Для квадратной панели ($\lambda = 1$) получим

$$s_1^* = \frac{3\pi^4}{32(1-\nu^2)} \sqrt{\left[1 + \frac{3(1-\nu^2)}{4\pi^4} k^2\right] \left[1 + \frac{3(1-\nu^2)}{64\pi^4} k^2\right]}. \quad (149)$$

Во втором приближении учитывают всевозможные комбинации индексов, равных 1, 2, 3. Для случая четных сумм индексов получаем следующее выражение [1]:

$$s_1^* = \frac{\pi^2}{128} \sqrt{\frac{A_{11}A_{22}A_{13}A_{31}A_{23}A_{32}}{L_1}}, \quad (150)$$

где

$$L_1 = A_{11}A_{13} \left(\frac{36}{625} A_{31} + \frac{4}{75} A_{33} \right) + A_{31}A_{33} \left(\frac{4}{75} A_{11} + \frac{4}{81} A_{13} \right).$$

Для нечетных сумм $m+n$

$$s_2^* = \frac{\pi^2}{128} \sqrt{\frac{A_{12}A_{21}A_{23}A_{32}}{L_2}}, \quad (151)$$

где

$$L_2 = \frac{36}{625} A_{12}A_{21} + \frac{4}{81} A_{23}A_{32} + \frac{4}{75} (A_{12}A_{23} + A_{21}A_{32}).$$

Верхнее критическое напряжение s_0^* , как правило, определяется величинами, относящимися к четным суммам индексов. Исключение составляют удлиненные панели ($\lambda \geq 3$) малой кривизны ($k < 7$).

$$s^* = s \frac{ab}{\xi h^2}$$

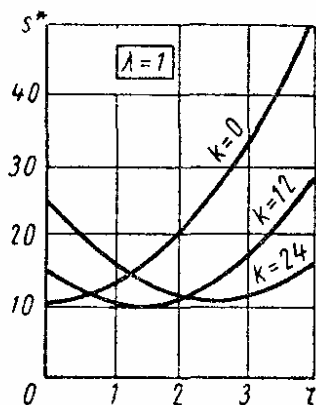


Рис. 24

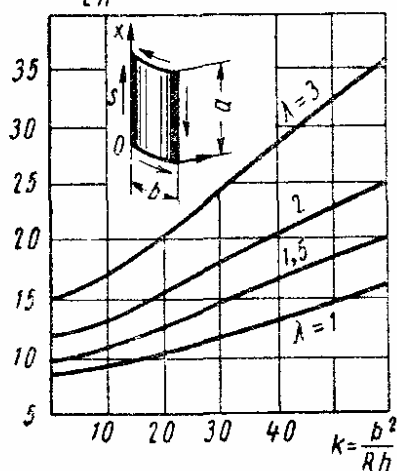


Рис. 25

Рассмотрим результаты решения нелинейной задачи. Используем уравнения (34) и (35). Выражение для прогиба принимаем в виде

$$w = f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}. \quad (152)$$

Решаем методом Бубнова-Галеркина. Зависимости $s^*(\zeta)$, полученные для плоской панели ($k=0$) и цилиндрических панелей с кривизной $k=12$ и $k=24$, показаны на рис. 24; во всех случаях принято $\lambda=1$. Нижнее критическое напряжение s_n^* снижается по сравнению с s_0^* примерно на 30% для $k=12$ и на 50% для $k=24$.

Для практических расчетов следует пользоваться графиком на рис. 25, составленным с учетом экспериментальных данных.

КОНИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Исходные зависимости линейной теории для круговых оболочек

Расположим оси координат так, как показано на рис. 26, а. Начало координат совпадает с вершиной конуса. Положение точки К срединной поверхности определяется радиусом-вектором r , проведенным

из вершины конуса O , и углом θ между осевой плоскостью, проходящей через рассматриваемую точку, и некоторой неподвижной осевой плоскостью.

Длину вектора r обозначим через s , угол наклона образующей к основанию — через α . Проекция r на оси координат

$$x = s \sin \alpha; \quad y = s \cos \alpha \cdot \cos \theta; \quad z = s \cos \alpha \cdot \sin \theta. \quad (153)$$

Вектор r можно разложить по ортам i, j, k :

$$r = s (i \sin \alpha + j \cos \alpha \cdot \cos \theta + \\ + k \cos \alpha \cdot \sin \theta). \quad (154)$$

Радиусы кривизны срединной поверхности (рис. 26, б)

$$R_1 = \infty; \quad R_2 = \frac{s}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (155)$$

Выпишем выражения для деформаций в срединной поверхности и параметров изменения кривизн. Обозначим через u, v, w смещения точек срединной поверхности соответственно в направлении образующей, вдоль параллельного круга (по окружности, получающейся при пересечении срединной поверхности с плоскостью, перпендикулярной к оси оболочки) и по внутренней нормали к поверхности. Удлинения и сдвиг в срединной поверхности будут [1]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{s} - \frac{w \operatorname{tg} \alpha}{s}; \\ \gamma &= \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s}, \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

где ε_1 и ε_2 — деформации удлинения соответственно вдоль образующей и вдоль дуги параллельного круга; γ — деформация сдвига.

Изменения кривизн и кручение определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial s}; \\ \chi &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{s^2} v + \frac{2}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{2}{s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

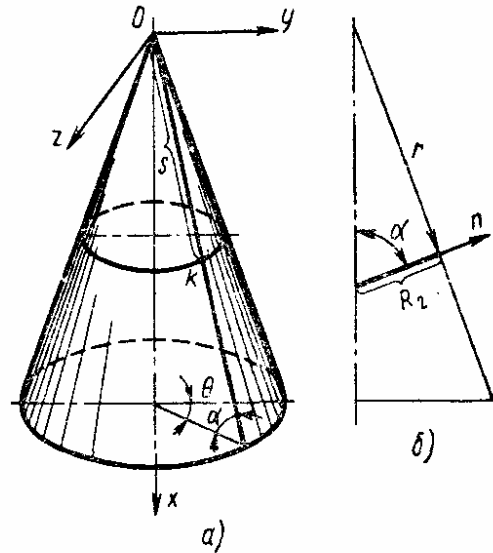


Рис. 26

В упрощенном варианте, пренебрегая в выражениях для κ_2 и χ членами, зависящими от перемещения w , получим приближенные выражения

$$\left. \begin{aligned} \kappa_2 &= -\frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial s}; \\ \chi &= -\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Усилия и моменты, действующие на элемент оболочки, показаны на рис. 27. Через N_1 , N_2 , T_{12} обозначены погонные нормальные и касательные усилия, M_1 , M_2 , H_{12} — изгибающие и крутящий моменты.

Уравнения равновесия элемента оболочки и уравнение совместности деформаций для безмоментного основного состояния (до потери устойчивости) сводятся к системе следующих упрощенных уравнений [1]:

$$\left. \begin{aligned} D \nabla^4 w - \nabla_\kappa^2 \varphi - q &= 0; \\ \nabla^4 \varphi + E h \nabla_\kappa^2 w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

Рис. 27

где $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$; h — толщина оболочки; q — фиктивная поперечная нагрузка,

$$q = N_1 \kappa_1 + N_2 \kappa_2 + T_{12} \chi; \quad (160)$$

φ — функция усилий. Подставим в формулу (160) выражения (157) и (158); при $T_{12} = 0$ получим

$$q = -N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - N_2 \left(\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (161)$$

Операторы ∇^2 и ∇_κ^2 имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{s \cos \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(s \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]; \\ \nabla_\kappa^2 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2}; \end{aligned}$$

отсюда находим

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}; \quad (162)$$

$$\nabla_\kappa^2 \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \quad (163)$$

и далее

$$\begin{aligned}\nabla^4 w &= \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \\ &= \frac{1}{s \cos \alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[s \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\nabla^4 w &= \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{2}{s} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + \\ &\quad + \frac{2}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{s^3 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + \\ &\quad + \frac{4}{s^4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s^4 \cos^4 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4}.\end{aligned}\quad (164)$$

Подставляя выражения (163) и (164) в уравнения (159), получаем следующие окончательные уравнения линейной теории:

$$\begin{aligned}-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{2}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{s^4 \cos^4 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \right. \\ \left. - \frac{2}{s^3 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + \frac{4}{s^4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{s} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \\ + N_2 \left(\frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0;\end{aligned}\quad (165)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial s^4} + \frac{2}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial s^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{s^4 \cos^4 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^4} - \\ - \frac{2}{s^3 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s \partial \theta^2} + \frac{4}{s^4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{s} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s^3} - \\ - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} + Eh \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0.\end{aligned}\quad (166)$$

Устойчивость при осевом сжатии

Рассмотрим решение линейной задачи для круговой конической оболочки, сжатой вдоль оси. Если предположить, что изогнутая поверхность оболочки после выпучивания остается осесимметричной, то $w = w(s)$; $\varphi = \varphi(s)$ и уравнения (165), (166) приведутся к виду

$$-D \left(\frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{2}{s} \cdot \frac{d^3 w}{ds^3} - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{s^3} \cdot \frac{dw}{ds} \right) + \\ + N_1 \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0; \quad (167)$$

$$\frac{d^4 \varphi}{ds^4} + \frac{2}{s} \cdot \frac{d^3 \varphi}{ds^3} - \frac{1}{s^2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{1}{s^3} \cdot \frac{d\varphi}{ds} + \\ + Eh \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{d^2 w}{ds^2} = 0, \quad (168)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; h — толщина оболочки; α — угол наклона образующей к основанию. Уравнения (167) и (168) можно записать в следующей форме:

$$-Ds^{-1} \frac{d}{ds} \left\{ s \frac{d}{ds} \left[s^{-1} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dw}{ds} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + N_1 \frac{d^2 w}{ds^2} = 0; \quad (169)$$

$$s^{-1} \frac{d}{ds} \left\{ s \frac{d}{ds} \left[s^{-1} \frac{d}{ds} \left(s \frac{d\varphi}{ds} \right) \right] \right\} + Eh \frac{\operatorname{tg} \alpha}{s} \cdot \frac{d^2 w}{ds^2} = 0. \quad (170)$$

Если считать, что при потере устойчивости образуется большое число волн и длина каждой волны будет невелика, величину s в пределах одной волны можно считать постоянной. Рассмотрим волну, прилегающую к большому основанию конуса. Положив $s = l_1$, где l_1 — расстояние по образующей от вершины до большого основания, и $N_1 = -N_1^0$, где N_1^0 — сжимающее усилие по окружности большого основания, из уравнений (169) и (170) получим

$$\left. \begin{aligned} -D \frac{d^4 w}{ds^4} - N_1^0 \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1} \cdot \frac{d^2 \varphi}{ds^2} &= 0; \\ \frac{d^4 \varphi}{ds^4} + Eh \frac{\operatorname{tg} \alpha}{l_1} \cdot \frac{d^2 w}{ds^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Решение этих уравнений ищем в форме

$$\left. \begin{aligned} w &= A \sin \frac{\pi}{\lambda} (s - l_1); \\ \varphi &= B \sin \frac{\pi}{\lambda} (s - l_1), \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

где λ — длина волны. Подставляя выражения (172) в уравнения (171) и приравнявая к нулю определитель получающейся при этом системы уравнений, находим

$$N_1^0 = D\beta^2 + \frac{Eh}{\beta^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{l_1^2}, \quad (173)$$

где $\beta = \frac{\pi}{\lambda}$. Минимизируя N_1^0 по β^2 , получим

$$\beta^2 = \sqrt{\frac{Eh}{D} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{l_1^2}}. \quad (174)$$

В результате подстановки выражения (174) в формулу (173) получаем значение верхнего критического усилия

$$N_{1,c} = \frac{Eh^2 \operatorname{tg} \alpha}{l_1 \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (175)$$

При $\nu = 0,3$

$$N_{1,c} = 0,605 \frac{Eh^2}{l_1} \operatorname{tg} \alpha = 0,605 \frac{Eh^2}{R_0}, \quad (176)$$

где $R_0 = \frac{l_1}{\operatorname{tg} \alpha}$ — радиус кривизны срединной поверхности у большего основания.

При исследовании случая, когда выпучивание оболочки неосесимметричное, в уравнения (165), (166) подставляют следующие функции прогиба и усилий:

$$\omega = \omega_1 \cos n\theta; \quad \varphi = \varphi_1 \cos n\theta, \quad (177)$$

где $\omega_1 = \omega_1(s)$; $\varphi_1 = \varphi_1(s)$; n — число волн по параллельному кругу. Верхнее критическое напряжение в этом варианте решения, как и при осесимметричном выпучивании, определяют по формуле (176) [1]. Как видим, выражение для верхнего критического усилия получается таким же, как в случае осевого сжатия цилиндрической оболочки радиуса R_0 . Формула (176) справедлива при условии, что число волн вдоль образующей достаточно велико. Можно считать, что это условие выполняется при $\alpha \geq 30^\circ$.

Реальные конические оболочки, сжатые вдоль оси, выпучиваются хлопком по ромбической форме с образованием двух или нескольких поясов выпучин у большего основания. Поэтому необходимо рассмотреть устойчивость оболочки в большом. Можно принять, что нижнее критическое усилие может быть определено, как и для цилиндрической оболочки, по формуле

$$N_{1,n} = 0,18E \frac{h^2}{R_0}. \quad (178)$$

Формулами (176), (178) можно пользоваться при проведении практических расчетов, принимая во внимание рекомендации, относящиеся к случаю осевого сжатия цилиндрической оболочки.

Значения полной осевой сжимающей силы определяют, исходя из формул (176) и (178):

$$\left. \begin{aligned} P_{\theta} &= 0,605E \frac{h^2}{R_0} \pi l_1 \sin 2\alpha; \\ P_{\kappa} &= 0,18E \frac{h^2}{R_0} \pi l_1 \sin 2\alpha = 0,18Eh^2\pi \operatorname{tg} \alpha \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

Действие внешнего давления

Коническая оболочка, замкнутая в вершине. Функции w и φ представим в виде

$$\left. \begin{aligned} w &= \psi(s) \operatorname{tg} \alpha \cos n\theta; \\ \varphi &= \chi_1(s) \varepsilon^2 E h l_1 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos n\theta, \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

где n — число волн, образующихся по параллельной окружности при потере устойчивости; ε — величина, определяемая по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{l_1}}; \quad (181)$$

l_1 — длина образующей от вершины до большего основания; α — угол наклона образующей к основанию; h — толщина оболочки.

Усилия докритического напряженного состояния при равномерном внешнем давлении q

$$N_1 = -\frac{q}{2 \operatorname{tg} \alpha} s; \quad N_2 = -\frac{q}{\operatorname{tg} \alpha} s. \quad (182)$$

Вводя безразмерные параметры

$$\mu = \frac{q l_1}{\varepsilon^3 E h} \operatorname{ctg}^3 \alpha; \quad p = \frac{\varepsilon n^2}{\cos^2 \alpha} \quad (183)$$

и безразмерную координату

$$x = \frac{s}{l_1}, \quad (184)$$

приводим формулы (182) к виду

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{x}{2} \mu \varepsilon^3 E h \operatorname{tg}^2 \alpha; \\ N_2 &= -x \mu \varepsilon^3 E h \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Уравнениям (165), (166), с учетом выражений (180), (183)—(185) и пренебрегая некоторыми членами [1], можно придать следующую упрощенную форму:

$$\frac{d^2 \chi_1}{dx^2} - \frac{p^2}{x^3} \psi + p \mu \psi = 0; \quad (186)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{p^2}{x^3} \chi_1 = 0. \quad (187)$$

Исключая из этих уравнений функцию χ , получим следующее разрешающее уравнение:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) + \left(\frac{p^4}{x^3} - p^2 \mu \right) \psi = 0. \quad (188)$$

Уравнение (188) используют в качестве исходного.

Для случая шарнирно опертой оболочки примем функцию ψ в виде

$$\psi = Ax^3 (1 + ax) \sin \pi x, \quad (189)$$

где

$$a = -\frac{6 + \nu}{8 + \nu}; \quad (190)$$

при $\nu = 0,3$ $a = -0,759$.

Уравнение Бубнова-Галеркина, соответствующее дифференциальному уравнению (188), имеет вид

$$\int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) \psi dx + p^4 \int_0^1 \frac{\psi^2}{x^3} dx - p^2 \mu \int_0^1 \psi^2 dx = 0. \quad (191)$$

Отсюда находим выражение для μ :

$$\mu = \frac{\frac{1}{p^3} \left[-x^3 \frac{d^2 \psi}{dx^2} \cdot \frac{d\psi}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 x^3 \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)^2 dx + p^4 \int_0^1 \frac{\psi^2}{x^3} dx \right]}{\int_0^1 \psi^2 dx}. \quad (192)$$

Для оболочки, жестко зашеченной по краю, будет $\left(\frac{d\psi}{dx} \right)_{x=1} = 0$, тогда

$$\mu = \frac{\frac{1}{p^3} \int_0^1 x^3 \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)^2 dx + p \int_0^1 \frac{\psi^2}{x^3} dx}{\int_0^1 \psi^2 dx}. \quad (193)$$

Выражение (189) подставляем в формулу (192). Из условия минимума μ по p находим $\mu_{\min} = 20,4$; используя формулы (181), (182), (185), получим значение верхнего критического давления для оболочки, замкнутой в вершине:

$$\begin{aligned} q_0 &= 3,15E \left(\frac{h}{l_1} \right)^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{h}{l_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{V(1-\nu^2)^3}} = \\ &= 3,15E \left(\frac{h}{l_1} \right)^{\frac{5}{2}} (\operatorname{tg} \alpha)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}}. \end{aligned} \quad (194)$$

Решение задачи методом конечных разностей приводит к следующей формуле для критического давления [1]:

$$q_{\text{с}} = 2,8E \left(\frac{h}{l_1} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{(\operatorname{tg} \alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \nu^2)^{\frac{3}{4}}}. \quad (195)$$

Усеченная коническая оболочка (рис. 28). Докритические усилия определяют по формулам

$$N_1 = \frac{q}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{l_0^2}{s} - s \right); \quad N_2 = -\frac{q}{\operatorname{tg} \alpha} s, \quad (196)$$

где l_0 — расстояние по образующей от вершины до меньшего основания. Вводя безразмерную координату $x = \frac{s}{l_1}$, приводим эти выражения к виду

$$N_1 = \frac{x}{2} \mu \varepsilon^3 E h \operatorname{tg}^2 \alpha \left(\frac{\frac{l_0^2}{x l_1^2}}{x} - x \right); \quad N_2 = -x \mu \varepsilon^3 E h \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (197)$$

Величины ε и μ определяют по формулам (181) и (183). Как и в случае оболочки, замкнутой в вершине, разрешающее уравнение после упрощений получается в виде уравнения (188). Но если в случае замкну-

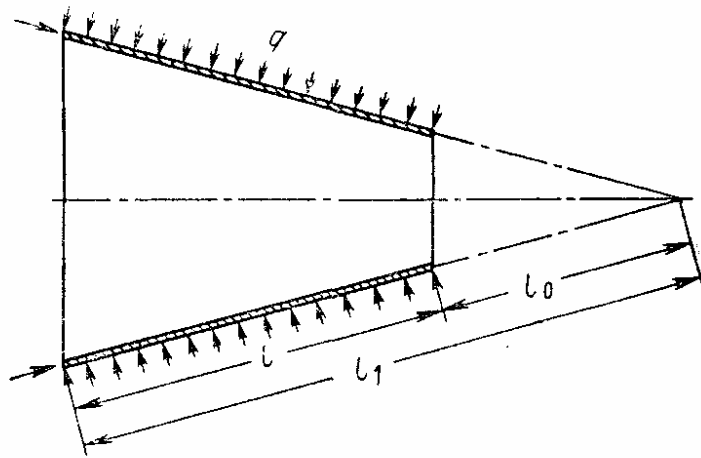


Рис. 28

той оболочки величина x изменялась в пределах $0 \leq x \leq 1$, то теперь она заключена в пределах $\frac{l_0}{l_1} \leq x \leq 1$.

В результате решения задачи по методу конечных разностей для случая, когда усеченная оболочка по меньшему основанию зашкреплена, а по большему — шарнирно оперта, получается следующая формула для верхнего критического давления [1]:

$$q_{\text{с}} = C_1 E \left(\frac{h}{l_1} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{(\operatorname{tg} \alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \nu^2)^{\frac{3}{4}}}. \quad (198)$$

Коэффициент C_1 берут по графику на рис. 29.

Формулы (194), (195), (198) применимы, если угол α не близок ни к нулю, ни к $\frac{\pi}{2}$ [в этом предположении получены исходные уравнения (186)—(188)]. Как показывают эксперименты, этими формулами можно пользоваться при значениях угла α , лежащих в пределах $20^\circ \leq \alpha \leq 80^\circ$; если $\alpha > 80^\circ$, то при вычислении q_v коническую оболочку можно заменить цилиндрической с радиусом, равным среднему радиусу конической оболочки.

Испытания тщательно изготовленных замкнутых и усеченных конических оболочек при внешнем давлении показывают, что потеря устойчивости сопровождается хлопком. Для тщательно изготовленных оболочек экспериментальное значение критического давления получается несколько выше теоретического, определенного по формуле (195) для замкнутых в вершине оболочек и по формуле (198) для усеченных оболочек, и ниже значения, получаемого по формуле (194). В среднем экспериментальная величина критического давления приблизительно на 5% выше значения, вычисленного по формуле (195) и примерно настолько же ниже величины, определенной по формуле (194).

В практических расчетах можно использовать формулы (195) и (198) для верхнего критического давления; при этом следует вводить поправочные коэффициенты, аналогично тому, как это рекомендовалось для цилиндрических оболочек при действии внешнего давления.

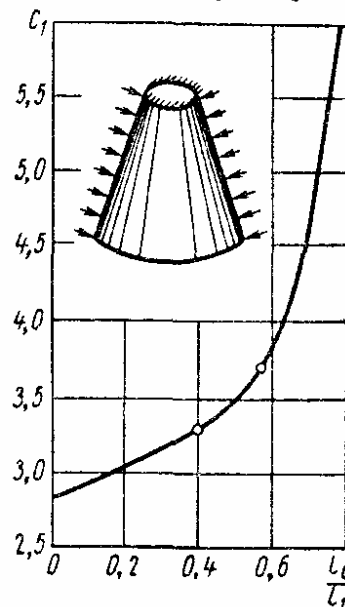


Рис. 29

Кручение

Приведем результаты решения задачи об устойчивости в малом усеченной, свободно опертой конической оболочки, нагруженной равномерно распределенными по торцовым сечениям сдвигающими усилиями. Координату s по-прежнему отсчитываем по образующей от вершины конуса; соответствующие расстояния от вершины до меньшего и большего оснований обозначим через l_0 и l_1 , длину оболочки по образующей — через l . Сдвигающее усилие на единицу длины контура в плоскости меньшего основания (при $s = l_0$) обозначим через T_{l_0} , а в плоскости большего основания — через T_{l_1} ; эти усилия выражаются через крутящий момент M_k по формулам

$$T_{l_0} = \frac{M_k}{2\pi (l_0 \cos \alpha)^2}; \quad T_{l_1} = \frac{M_k}{2\pi (l_1 \cos \alpha)^2}, \quad (199)$$

где α — угол наклона образующей к основанию.

Приближенная формула для критического сдвигающего усилия имеет вид [1]

$$T_{l_0} = \frac{Eh (\rho^2 - 1) \xi}{4 (\pi^2 + \xi^2)} e^{\frac{5}{2}} C_0 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad (200)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 1 + \frac{l}{l_0}; \quad \varepsilon^2 = \frac{\pi h}{\zeta^2 l_0 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \nu^2}} \left[\frac{\pi^2 + \zeta^2}{6(\rho^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ \zeta &= \ln \left(1 + \frac{l}{l_0} \right); \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 2,61 \left(\frac{\nu_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{6}} \left[1 + 0,33 \left(\frac{\varepsilon}{\nu_1} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + \nu_1) \right]; \\ \nu_1 &= \frac{1}{2(1 + \nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Условия применимости приведенных формул:

$$\varepsilon \leq 0,1; \quad 0,25 \leq \nu \leq 0,33.$$

Ниже приведены некоторые значения коэффициента C_0 при $\nu = 0,3$:

ε	0,12	0,10	0,07	0,05	0,03
C_0	3,75	3,87	3,95	4,08	4,31

Подкрепленные оболочки при действии внешнего давления

Конические оболочки, подкрепленные продольными и круговыми ребрами. Приведенное ниже решение задачи получено в предположении, что ребра расположены достаточно часто, так что жесткость ребра можно равномерно распределить по длине шага. Сечения продольных и дуговых подкрепляющих ребер, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки, показаны на рис. 30. Применительно к случаю симметричного расположения ребер введем следующие обозначения:

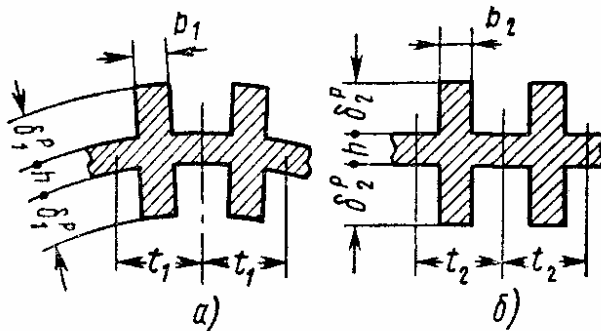


Рис. 30

$$\begin{aligned} i_1 &= 1 + \frac{24(1 - \nu^2)}{t_1 h^3} J_1^p; \\ i_2 &= 1 + \frac{24(1 - \nu^2)}{t_2 h^3} J_2^p; \end{aligned} \quad (203)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 + \frac{2b_1 \delta_1^p}{t_1 h} (1 - \nu^2); \\ \omega_2 &= 1 + \frac{2b_2 \delta_2^p}{t_2 h} (1 - \nu^2), \end{aligned} \quad (204)$$

где J_1^p и J_2^p — моменты инерции половины сечения ребра относительно осей, лежащих в срединной поверхности,

$$\begin{aligned} J_1^p &= \frac{b_1 (\delta_1^p)^3}{12} + \frac{1}{4} b_1 \delta_1^p (h + \delta_1^p)^2; \\ J_2^p &= \frac{b_2 (\delta_2^p)^3}{12} + \frac{1}{4} b_2 \delta_2^p (h + \delta_2^p)^2; \end{aligned}$$

h — толщина оболочки; b_1, b_2 — значения толщины продольных (рис. 30, а) и круговых (рис. 30, б) ребер соответственно; δ_1^p, δ_2^p — высота ребер; t_1, t_2 — шаг ребер.

Если оболочка подкреплена односторонними ребрами (сечение круговых ребер показано на рис. 31), то формулы (203) и (204) примут вид

$$i_1 = 1 + \frac{12(1-\nu^2)}{t_1 h^3} J_1^p;$$

$$i_2 = 1 + \frac{12(1-\nu^2)}{t_2 h^3} J_2^p; \quad (205)$$

$$\omega_1 = 1 + \frac{b_1 \delta_1^p}{t_1 h} (1-\nu^2);$$

$$\omega_2 = 1 + \frac{b_2 \delta_2^p}{t_2 h} (1-\nu^2), \quad (206)$$

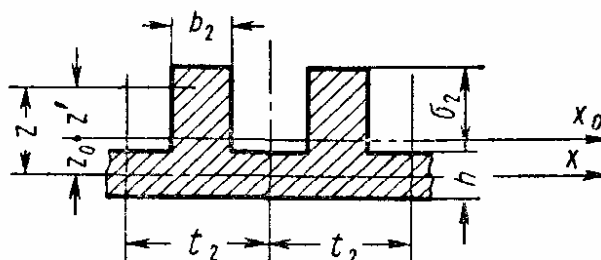


Рис. 31

здесь J_1^p — момент инерции сечения продольного ребра относительно центральной оси профиля кругового сечения оболочки; J_2^p — момент инерции сечения кругового ребра относительно центральной оси профиля осевого сечения оболочки.

Верхнее критическое значение внешнего давления для шарнирно опертой замкнутой круговой конической оболочки будет [1]

$$q_s = \frac{3,15}{\beta_2} \sqrt[4]{\beta_1^3} E \left(\frac{h}{l_1} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{(\operatorname{tg} \alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}}, \quad (207)$$

где

$$\beta_1 = \frac{(1-\nu^2) \omega_2}{\omega_1 \omega_2 - \nu^2} i_2; \quad (208)$$

$$\beta_2 = \frac{(1-\nu^2) \omega_2}{\omega_1 \omega_2 - \nu^2}. \quad (209)$$

Формула (207) получена в предположении, что угол α не близок ни к нулю, ни к $\frac{\pi}{2}$. В результате решения задачи с помощью метода конечных разностей получается формула (207) с коэффициентом 2,8 вместо 3,15.

Вычисления показывают, что круговые ребра значительно повышают критическое давление, продольные ребра менее эффективны.

Для усеченной оболочки верхнее критическое давление

$$q_s = \frac{C_1}{\beta_2} \sqrt[4]{\beta_1^3} E \left(\frac{h}{l_1} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{(\operatorname{tg} \alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}}. \quad (210)$$

Значения коэффициентов C_1 можно определять по графику на рис. 29 при тех же граничных условиях.

ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Сферические оболочки

Во многих областях техники применяют сферические оболочки в виде сегментов, закрепленных по краю. Следует различать сегменты с большим углом охвата, стрела подъема H которых сравнима с радиусом кривизны срединной поверхности R (рис. 32), и пологие панели, для которых $H \ll R$. Будем рассматривать устойчивость сегментов большого подъема. При потере устойчивости такого сегмента образуются сравнительно мелкие вмятины, и критические нагрузки для него будут теми же, что и для полной сферической оболочки. Поэтому будем определять критические нагрузки для полной сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерного давления q .

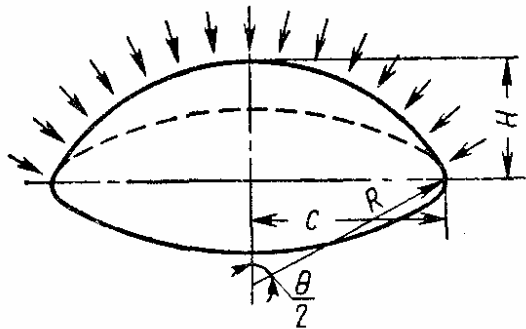


Рис. 32

Примем, что в пределах первичной вмятины оболочка является полой. Исходные уравнения линейной задачи имеют вид [1]

$$\left. \begin{aligned} D \nabla^4 w &= \frac{1}{R} \nabla^2 \varphi + q_z; \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi &= -\frac{1}{R} \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

где φ — функция усилий в срединной поверхности; R — радиус срединной поверхности; h — толщина оболочки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; ∇^2 и ∇^4 — операторы по формулам (11) и (13).

Исключая функцию φ , получим

$$D \nabla^6 w + \frac{Eh}{R^2} \nabla^2 w = \nabla^2 q_z, \quad (212)$$

где $\nabla^6 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2$.

Найдем величину q_z . Если внешнее давление q , то нормальные усилия во всех нормальных сечениях оболочки

$$N_1 = N_2 = -\frac{qR}{2}.$$

Сжимающие усилия N и напряжения σ считают положительными, тогда

$$N = \frac{qR}{2}; \quad \sigma = \frac{qR}{2h}. \quad (213)$$

Обозначим через w_0 радиальное перемещение всех точек срединной поверхности, соответствующее начальным напряжениям σ . Деформация укорочения вдоль дуги любого нормального сечения будет $\varepsilon = \frac{w_0}{R}$; с другой стороны, эта величина

$$\varepsilon = \frac{\sigma(1-\nu)}{E} = \frac{qR(1-\nu)}{2Eh};$$

отсюда находим

$$w_0 = \frac{qR^2}{2Eh} (1 - \nu). \quad (214)$$

В дальнейшем через w будем обозначать дополнительный прогиб, имеющий место при выпучивании оболочки. Величина q_z в уравнениях (211), (212): $q_z = -h\sigma\nabla^2 w$. Уравнение (212) принимает вид

$$\frac{D}{h} \nabla^6 w + \sigma \nabla^4 w + \frac{E}{R^2} \nabla^2 w = 0. \quad (215)$$

Примем, что решение уравнения (215) должно удовлетворять соотношению

$$\nabla^2 w = -\lambda^2 w, \quad (216)$$

где λ — неопределенный параметр.

Тогда из уравнения (215) получим

$$\sigma = \frac{D}{h} \lambda^2 + \frac{E}{R^2 \lambda^2}. \quad (217)$$

Минимизируя σ по λ^2 , находим

$$\lambda^2 = \frac{1}{Rh} \sqrt{12(1 - \nu^2)}. \quad (218)$$

Далее, по формуле (217) определяем величину верхнего критического напряжения

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} E \frac{h}{R} \approx 0,605 E \frac{h}{R}. \quad (219)$$

Напряжению по формуле (219) соответствует давление

$$q_\theta = \frac{2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} E \left(\frac{h}{R} \right)^2 = 1,21 E \left(\frac{h}{R} \right)^2. \quad (220)$$

Формула (219) для верхнего критического напряжения для сферической оболочки в точности совпадает с выражением (43) для верхнего критического напряжения, отвечающим случаю осевого сжатия цилиндрической оболочки.

Определяя верхнюю критическую нагрузку, мы не рассматривали форму выпучивания оболочки. Исследование формы изогнутой поверхности, проведенное в линейной постановке, показывает, что в случае, если выпучивание является осесимметричным, потеря устойчивости должна сопровождаться появлением одной сравнительно глубокой вмятины и ряда кольцевых складок, размельчающихся по мере удаления от центра основной вмятины [1].

Реальные сферические оболочки оказываются такими же чувствительными к начальным несовершенствам в форме срединной поверхности, как и сжатые вдоль оси цилиндрические оболочки. Выпучивание сферических оболочек, как правило, сопровождается хлопком, и истинные значения критических усилий лежат обычно гораздо ниже значений, найденных по линейной теории. Как показывают испытания сферических сегментов, особенность процесса выпучивания сферических

оболочек состоит в том, что в одних случаях он сопровождается появлением одной быстро развивающейся вмятины, в других — образованием группы волн, соединяющихся затем обычно в одну глубокую вмятину. Поэтому при исследовании устойчивости сферических оболочек в большом возможны два подхода к задаче. Первый подход состоит в рассмотрении процесса развития одиночной вмятины и сводится к решению осесимметричной задачи; при втором подходе исследуют несимметричное выпучивание оболочки. Приведем результаты, полученные при использовании первого из этих подходов.

Основные нелинейные уравнения теории пологих оболочек имеют вид [1]

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \nabla^2 \Phi + \frac{q}{h}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (221)$$

где Φ — функция напряжений в срединной поверхности; q — поперечная нагрузка; L — оператор по формулам (32) и (36).

Воспользуемся полярными координатами r, φ . Совместим начало радиуса-вектора с центром вмятины. Если функции w и Φ не зависят от φ , то получаем следующие выражения для операторов, входящих в уравнения (221) [1]:

$$\left. \begin{aligned} L(w, \Phi) &= \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \cdot \frac{d\Phi}{dr} + \frac{dw}{dr} \cdot \frac{d^2 \Phi}{dr^2} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \right); \\ L(w, w) &= \frac{2}{r} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} \cdot \frac{dw}{dr}; \\ \nabla^2 &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

Уравнения (221) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{h} \cdot \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \right] &= \\ = \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{d\Phi}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right) + \frac{qr}{h}; \\ \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) \right] &= \\ = -E \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + \frac{d^2 w}{dr^2} \cdot \frac{dw}{dr} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Интегрируя эти уравнения по r , получим после деления на r

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{h} \cdot \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) &= \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \cdot \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{h} \Psi; \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) &= -E \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

под Ψ понимают функцию нагрузки,

$$\Psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (225)$$

Напряжения в срединной поверхности в общем случае [1]

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right).$$

В осесимметричных задачах будет

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr}; \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2 \Phi}{dr^2} = \\ &= \frac{d}{dr} (r \sigma_r); \quad \tau = 0. \end{aligned} \quad (226)$$

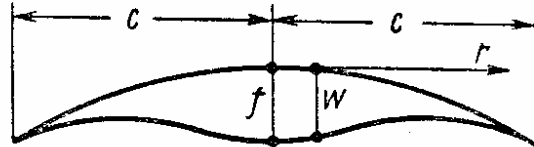


Рис. 33

Найдем выражение для радиального перемещения u точек срединной поверхности. При этом используем следующую формулу для деформации удлинения в кольцевом направлении:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \right).$$

С другой стороны, $\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$, отсюда находим

$$u = \frac{r}{E} \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \right). \quad (227)$$

Рассмотрим результаты различных решений нелинейной задачи, основанные на исследовании изменения стрелы прогиба одной вмятины, образующейся в полной сферической оболочке, в зависимости от давления. Трудность задачи состоит в установлении граничных условий на контуре вмятины, так как остальная часть оболочки также подвергается деформации. В одном из вариантов решения по методу Ритца в качестве первого приближения принималось, что на контуре вмятины (рис. 33) выполняется условие полного защемления:

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dr} = 0 \text{ при } r = c, \quad (228)$$

где c — радиус вмятины. Предполагалось, далее, что по краю вмятины отсутствуют радиальные перемещения:

$$u = 0 \text{ при } r = c. \quad (229)$$

С учетом выражения (227) это условие можно записать в виде

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d\Phi}{dr} = 0 \text{ при } r = c. \quad (230)$$

В полюсе при $r \rightarrow 0$ радиальные напряжения должны быть ограничены по величине; отсюда из формул (226) вытекает четвертое граничное условие

$$\frac{d\Phi}{dr} = 0 \text{ при } r = 0. \quad (231)$$

Выражение для прогиба аппроксимируется в виде

$$w = f \left(1 - \frac{r^2}{c^2} \right)^2. \quad (232)$$

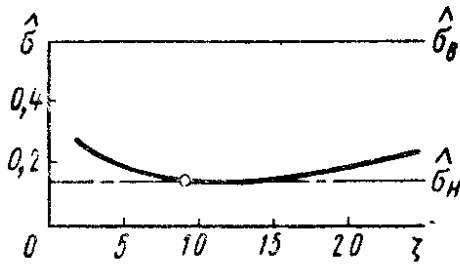


Рис. 34

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (228). Выражение (232) подставляют в правую часть второго из уравнений (224). Интегрирование результата подстановки ведут с учетом условий (230) и (231). Далее используют метод Ритца: определяют полную

энергию системы и полученное выражение для полной энергии варьируют по двум параметрам. В окончательном результате решения находят зависимость $\hat{\sigma}(\zeta)$, показанную на рис. 34 [1]. Под ζ и $\hat{\sigma}$ понимаются безразмерные величины:

$$\zeta = \frac{f}{h}; \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma R}{Eh} = \frac{qR^2}{2Eh^2}. \quad (233)$$

Минимальное значение напряжения

$$\hat{\sigma}_H = 0,155, \text{ или } \sigma_H = 0,155E \frac{h}{R} \quad (234)$$

при стреле прогиба $\zeta = 9,16$. Нижнему критическому напряжению по (234) соответствует давление

$$q_H = 0,31E \left(\frac{h}{R} \right)^2. \quad (235)$$

Полученное значение σ_H почти в 4 раза меньше верхнего критического напряжения σ_θ .

В результате другого, уточненного решения задачи по методу Ритца нижнее критическое напряжение оказалось

$$\hat{\sigma}_H = \frac{0,193}{\sqrt{1-\nu^2}} \approx 0,203.$$

Граничные условия, принятые при получении формулы (234), не вполне соответствуют истинному характеру сопряжения зоны вмятины с остальной частью оболочки: защемление по контуру вмятины надо считать не жестким, а упругим. Решение задачи в таком предположении по методу Бубнова-Галеркина в первом приближении приводит

к отрицательному значению нижнего критического напряжения $\hat{\sigma}_n = -0,13$. В результате уточненного решения получается положительное значение $\hat{\sigma}_n = \frac{0,1}{\sqrt{1-\nu^2}} \approx 0,11$.

Следовательно, величина $\hat{\sigma}_n$, найденная в различных вариантах решения, колеблется в очень широких пределах, что свидетельствует о резкой чувствительности результатов применения вариационных методов к выбору аппроксимирующих функций.

Обратимся к данным, полученным в результате интегрирования дифференциальных уравнений с помощью ЭЦВМ, приведенным на

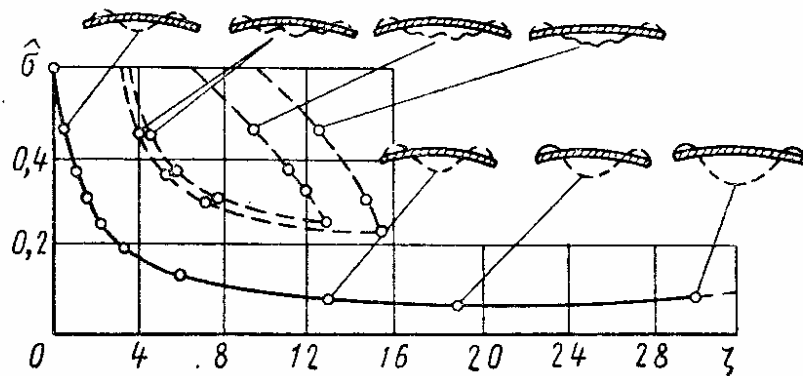


Рис. 35

рис. 35 [1]. По оси абсцисс отложен безразмерный прогиб в центре $\zeta = \frac{w}{h}$, по оси ординат — величина $\hat{\sigma}$. Здесь нанесены линии, соответствующие основным формам равновесия (эти формы показаны на рис. 35). Наинизшая точка кривой соответствует величине $\hat{\sigma}_n = 0,067$ при стреле прогиба $w \approx 22,5h$. Следовательно, величина нижнего критического напряжения, полученная в этом решении осесимметричной задачи, лежит значительно ниже, чем это вытекает из решений по методу Ритца, и вместе с тем выше значения $\hat{\sigma}_n = -0,13$, полученного в одном из решений по методу Бубнова-Галеркина. Надо полагать, что коэффициент 0,067 не является окончательным и возможны дальнейшие уточнения. Приведенное решение построено на основе теории пологих оболочек, и результаты могут быть иными, если использовать уточненные уравнения. Кроме того, задача считалась осесимметричной. Во многих случаях при потере устойчивости реальных оболочек развивается ряд вмятин, заполняющих некоторую область оболочки; выпучивание сопровождается взаимным влиянием (интерференцией) вмятин. Учет такого характера выпучивания оболочки требует рассмотрения несимметричной задачи.

Данные теоретического исследования влияния начальных неправильностей формы показывают, что при стреле начальной погиби вмятины, равной толщине оболочки, верхнее критическое напряжение σ_b снижается на 39% по сравнению с $\hat{\sigma}_b$ для оболочки идеальной формы.

Экспериментальные данные показывают [1], что имеющиеся теоретические исследования далеко не охватывают всего диапазона различных

форм потери устойчивости в большом. Экспериментальные значения критического напряжения характеризуются значительным разбросом и зависят от величины угла, охватываемого сегментом. Введем параметр, характеризующий кривизну сегмента, по формуле (см. рис. 32)

$$\lambda^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{c^2}{Rh}; \quad (236)$$

примем $\theta \leq 180^\circ$.

Для стальных оболочек с полным углом охвата $\theta = 9 \div 45^\circ$, параметром $\lambda^2 = 70 \div 350$ и $\frac{R}{h} = 800 \div 3900$, испытанных путем создания вакуума, было получено $\hat{\sigma}$ в пределах от $\frac{0,606}{4,11}$ до $\frac{0,606}{2,23}$; при испытании давлением масла величина $\hat{\sigma}$ составляла от $\frac{0,606}{3,8}$ до $\frac{0,606}{2,61}$. Испытания при постоянном объеме дают меньшее рассеяние экспериментальных точек, чем при постоянном давлении. В случае медных оболочек при $\theta = 106 \div 140^\circ$, $\lambda^2 = 1700 \div 2350$ и $\frac{R}{h} = 813 \div 860$ получались наименьшие значения $\hat{\sigma}$ в пределах от $\frac{0,606}{6,14}$ до $\frac{0,606}{4,19}$.

Можно считать, что реальные критические напряжения $\hat{\sigma}_{кр}$ подъемистых сферических сегментов лежат между верхним критическим значением $\hat{\sigma}_в = 0,605$ и нижним значением, которое условно будем считать $\hat{\sigma}_н = 0,155$. Вместе с тем, расчетные значения $\hat{\sigma}_{расч}$ должны зависеть от угла, охватываемого сегментом, параметра кривизны λ^2 и отношения $\frac{R}{h}$. Хотя теоретически нижнее критическое напряжение не связано с отношением $\frac{R}{h}$, при больших значениях $\frac{R}{h}$ надо ожидать значительных начальных неправильностей в форме оболочки, что ведет к снижению $\hat{\sigma}_{кр}$. Впредь до накопления новых теоретических и экспериментальных данных в практических расчетах следует исходить из различных значений $\hat{\sigma}_{расч}$ в зависимости от отношения $\frac{R}{h}$. Можно пользоваться приведенными в табл. 2 ориентировочными данными для $\hat{\sigma}_{расч}$ и критического давления $q_{расч}$, относящимися к тщательно изготовленным оболочкам.

2. Расчетные значения напряжений и нагрузок для сферических оболочек

$\frac{R}{h}$	≤ 250	500	750	1000	1500
$\hat{\sigma}_{расч}$	0,15	0,12	0,10	0,08	0,075
$q_{расч}$	$0,30 \frac{Eh^2}{R^2}$	$0,24 \frac{Eh^2}{R^2}$	$0,20 \frac{Eh^2}{R^2}$	$0,16 \frac{Eh^2}{R^2}$	$0,15 \frac{Eh^2}{R^2}$

При начальных прогибах, достигающих величины порядка толщины оболочки, эти значения следует снизить приблизительно в 1,5 раза.

Для оболочек с отношением $\frac{R}{h} = 400 \div 2000$ и углом $\theta = 40 \div 120^\circ$ рекомендуется экспериментальная формула

$$q_{расч} = 0,3kE \left(\frac{h}{R} \right)^2;$$

коэффициент k находят по формуле

$$k = \left(1 - 0,175 \frac{\theta^\circ - 40^\circ}{40^\circ} \right) \left(1 - 0,07 \frac{R}{400h} \right).$$

Эллипсоидальные оболочки

При расчете эллипсоидальных оболочек следует различать вытянутые оболочки ($a < b$, рис. 36) и сплюснутые (сжатые) оболочки ($a > b$, рис. 37).

Задача об устойчивости эллипсоидальной оболочки, подвергающейся действию внешнего равномерно распределенного давления q , родственна аналогичной задаче, относящейся к сферической оболочке: в обоих

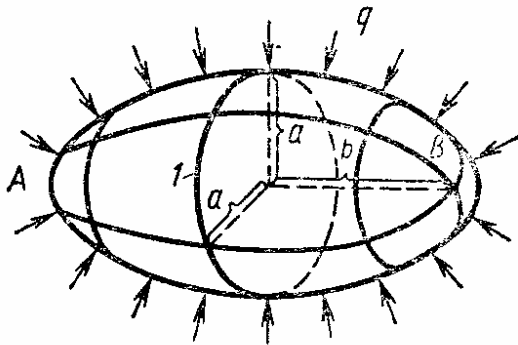


Рис. 36

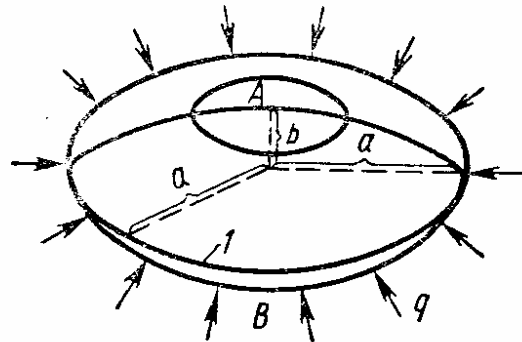


Рис. 37

случаях речь идет об образовании местных вмятин. Для вытянутой эллипсоидальной оболочки главные радиусы кривизны являются наибольшими в зоне экватора 1 (рис. 36), где и следует ожидать появления вмятин. Значение верхнего критического давления

$$q_{\theta} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h^2}{2b^2 - a^2} \approx 1,21E \frac{h^2}{2b^2 - a^2}. \quad (237)$$

В случае сплюснутой оболочки следует ожидать появления первых вмятин в зоне полюсов A, B. Главные кривизны в полюсах $R_1 = R_2 = \frac{a^2}{b}$; заменяя в формуле (220), относящейся к сферической оболочке, величину R отношением $\frac{a^2}{b}$, получим выражение для сплюснутой эллипсоидальной оболочки

$$q_{\theta} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h^2 b^2}{a^4} \approx 1,21E \frac{h^2 b^2}{a^4}. \quad (238)$$

Если сплюснутая оболочка подвергается действию *внутреннего* давления, при $a > b \sqrt{2}$ кольцевые напряжения в оболочке будут *сжимающими*. Максимальные сжимающие напряжения будут у экватора, где и образуются начальные вмятины. Критическое давление в этом случае

$$q_{\theta} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h^2}{a^2 - 2b^2} \approx 1,21E \frac{h^2}{a^2 - 2b^2}. \quad (239)$$

Практические расчеты эллипсоидальных оболочек надо вести по величине q_H , значение которой составляет приблизительно такую же долю от q_{θ} , как и для сферических оболочек.

ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Исходные зависимости

Оболочка считается пологой, если стрела подъема H не превышает $1/5$ от наименьшего размера в плане. Примеры пологих оболочек показаны на рис. 38. Поперечная нагрузка может быть направлена нормально к срединной поверхности (давление газа или жидкости) или

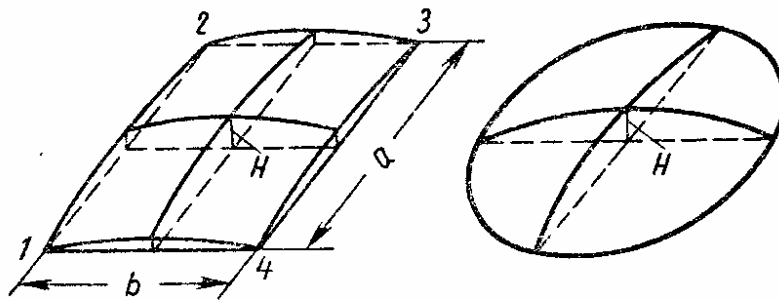


Рис. 38

перпендикулярно к основной плоскости (собственный вес оболочки, вес снега для покрытий и т. д.).

Для расчета на устойчивость пологой оболочки важно исследовать *большие прогибы* с позиций *нелинейной теории*. Различные варианты диаграммы нагрузка — стрела прогиба для оболочек различной кривизны показаны на рис. 39. Если оболочка весьма пологая (рис. 39, а), параметр нагрузки q монотонно возрастает с увеличением стрелы прогиба f ; диаграмма имеет точку перегиба C . На первом участке OC жесткость оболочки падает, на втором — возрастает. На рис. 39, б показана зависимость для оболочки, имеющей начальную стрелу подъема, сравнимую с толщиной; график имеет предельную точку A , соответствующую верхней критической нагрузке, и точку B , соответствующую нижней критической нагрузке. При известных условиях — в случае мертвой нагрузки — становится возможной потеря устойчивости прощелкиванием оболочки к новому устойчивому равновесному состоянию. Зависимость $q(f)$, изображенная на рис. 39, в, соответствует оболочкам большой кривизны; ветвь AB неустойчивых состояний лежит вблизи

начальной ветви OA . В рассматриваемом случае прощелкивание становится возможным при любом поведении нагрузки. На рис. 39, а показан пример, когда прогиб в центре оболочки на некотором этапе нагружения уменьшается и диаграмма $q(f)$ становится петлеобразной, что связано с изменением формы волнообразования.

При исследовании больших прогибов пологих оболочек можно использовать два подхода. Первый из них состоит в непосредственном использовании уравнений теории оболочек. Приведем основные соотношения того упрощенного варианта теории оболочек произвольного очертания, в котором оболочка считается полой, по крайней мере, в пределах отдельной вмятины [1]. Координатные оси x, y направим вдоль линий кривизны срединной поверхности. Перемещения u, v точек сре-

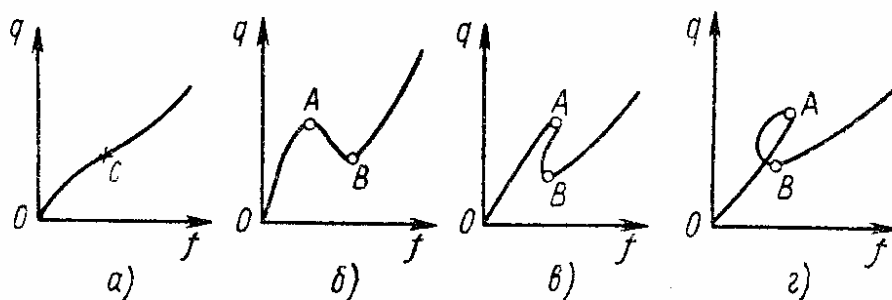


Рис. 39

динной поверхности отсчитывают вдоль линий кривизны x, y ; перемещения w — по нормали к срединной поверхности. Через $k_x = \frac{1}{R_x}$, $k_y = \frac{1}{R_y}$ обозначают главные кривизны оболочки — начальные кривизны линий x, y .

Деформации удлинения и сдвига в срединной поверхности

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (240)$$

Эти величины связаны уравнением совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w, \quad (241)$$

где под $L(w, w)$ понимается выражение (32), а под ∇_k^2 — оператор,

$$\nabla_k^2 = k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (242)$$

Изменения кривизн определяются формулами (3).

Соотношения Гука получаются в виде приведенных ранее уравнений (8) и (9). Первые два уравнения равновесия (5) также остаются прежними. Третье уравнение равновесия имеет следующую форму:

$$D\nabla^2\nabla^2w = \sigma_x h \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sigma_y h \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2\tau h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q, \quad (243)$$

где q — интенсивность поперечной нагрузки.

Вводя в уравнение совместности деформаций (241) напряжения по соотношениям упругости (14), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) \right] = \\ = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_\kappa^2 w. \end{aligned} \quad (244)$$

Выразим напряжения σ_x , σ_y , τ в равенствах (243), (244) через функцию напряжений Φ по формулам (16); тогда придем к уравнениям

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = L(w, \Phi) + \nabla_\kappa^2 \Phi + \frac{q}{h}; \quad (245)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_\kappa^2 w. \quad (246)$$

Оператор L в применении к функциям w , Φ определяется выражением (36).

Принимая в уравнениях (240)—(241), (245)—(246) $k_x = 0$, $k_y = \frac{1}{R}$, приходим (при $q = 0$) к приведенным ранее выражениям (30)—(31), (34)—(35), отвечающим случаю круговой цилиндрической оболочки.

Допустим теперь, что оболочка имеет начальные прогибы $w_0(x, y)$. Обозначим через w полный прогиб; выражения для деформаций (240) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x (w - w_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y (w - w_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (247)$$

Основные соотношения (245)—(246) принимают форму

$$\frac{D}{h} \nabla^4 (w - w_0) = L(w, \Phi) + \nabla_\kappa^2 \Phi + \frac{q}{h}; \quad (248)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \nabla_\kappa^2 (w - w_0). \quad (249)$$

Вводя в уравнения (248)—(249) вместо полного прогиба w дополнительный прогиб $w_1 = w - w_0$, перепишем их в развернутом виде:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) -$$

$$- 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h}; \quad (248a)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} -$$

$$- \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - k_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}. \quad (249a)$$

Другой подход состоит в рассмотрении оболочки как *пластинки с начальной погибью*. Пусть контур оболочки прямоугольный, в этом случае удобно ввести декартовы координаты x, y , откладываемые в основной плоскости 1—4 вдоль сторон контура (рис. 40). Начальное положение точек срединной поверхности определяется координатой z . Прогиб w_1 отсчитывают от исходной срединной поверхности параллельно оси z . Уравнения, отвечающие данной трактовке, получим, положив в зависимостях (248a), (249a) $k_x = k_y = 0$ и вводя z вместо w_0 ; тогда придем к следующим соотношениям:

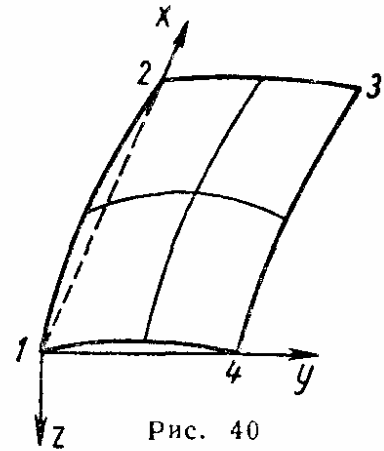


Рис. 40

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) -$$

$$- 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) + \frac{q}{h}; \quad (250)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} -$$

$$- \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (251)$$

При использовании этого подхода размеры оболочки целесообразно представлять как размеры в плоскости xy .

Если центральный угол 2φ , охватываемый наибольшим размером оболочки, настолько мал, что можно принять $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi = \varphi$, то системы уравнений (248a)—(249a) и (250)—(251) являются эквивалентными.

Панель, прямоугольная в плане

Рассмотрим случай панели, имеющей прямоугольное очертание в плане (см. рис. 38, а). Главные кривизны k_x, k_y принимаем постоянными. По краям оболочка шарнирно скреплена с ребрами, абсолютно жесткими на изгиб в направлении нормали и имеющими малую

жесткость на изгиб в плоскостях, касательных к срединной поверхности. Будем считать, что точки, принадлежащие концевым сечениям оболочки, свободно скользят вдоль ребер. Принятым допущениям соответствуют следующие граничные условия для краев $x = 0$, $x = a$:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \sigma_x = 0; \quad \tau = 0. \quad (252)$$

Аналогичные условия будут для краев $y = 0$, $y = b$. Оболочка испытывает действие поперечной нагрузки интенсивностью q , равномерно распределенной по всей поверхности.

При решении задачи используем уравнения (248a)–(249a); примем $w_0 = 0$ и запишем их в виде

$$X \equiv \frac{D}{h} \nabla^4 w_1 - L(\Phi, w_1) - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{q}{h} = 0; \quad (253)$$

$$Y \equiv \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{2} L(w_1, w_1) + k_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0. \quad (254)$$

Функции прогиба и напряжений аппроксимируем с помощью следующих выражений:

$$w_1 = f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \Phi = A_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (255)$$

Первые три граничных условия типа (252) удовлетворяются на всех краях; четвертое условие — лишь «в среднем»; так, для кромок $x = 0$, $x = a$ это условие выполняется в виде $\frac{1}{a} \int_a^b \tau dy = 0$. Уравнения Бубнова-Галеркина в применении к двум уравнениям системы (253)–(254) можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy &= 0; \\ \int_0^a \int_0^b Y \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (256)$$

Подставив в уравнение (256) выражения (253)–(255), после интегрирования приходим к системе двух уравнений, из которых получаем следующую зависимость между нагрузкой и прогибом:

$$\begin{aligned} q^* &= \frac{32\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2} \zeta^3 - k^* \frac{\pi^2}{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2} \zeta^2 + \\ &+ \left[\frac{\pi^2}{16} k^{*2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^2} + \frac{\pi^6 \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right)^2}{192(1 - \nu^2)} \right] \zeta; \end{aligned} \quad (257)$$

здесь введены безразмерные параметры

$$\left. \begin{aligned} k_x^* &= \frac{k_x a^2}{h}; & k_y^* &= \frac{k_y b^2}{h}; & k^* &= k_x^* + k_y^*; & \lambda &= \frac{a}{b}; \\ \zeta &= \frac{f_1}{h}; & q^* &= \frac{q}{E} \left(\frac{ab}{h^2} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (258)$$

Для квадратной панели ($a = b$) при $\nu = 0,3$ будет

$$q^* = 8,77\zeta^3 - 2,46k^*\zeta^2 + (0,154k^{*2} + 22)\zeta. \quad (259)$$

В случае круговой цилиндрической оболочки, если координату y отсчитывают вдоль дуги, надо принять $k_x = 0$, $k_y = \frac{1}{R}$; параметр k^* будет $k^* = \frac{b^2}{Rh}$. Для сферической оболочки $k_x = k_y = \frac{1}{R}$; при $a = b$ величина $k^* = \frac{2b^2}{Rh}$.

Графики $q^*(\zeta)$ по формуле (259) для различных k^* приведены на рис. 41 штриховыми линиями. При малых k^* величина q^* непрерывно

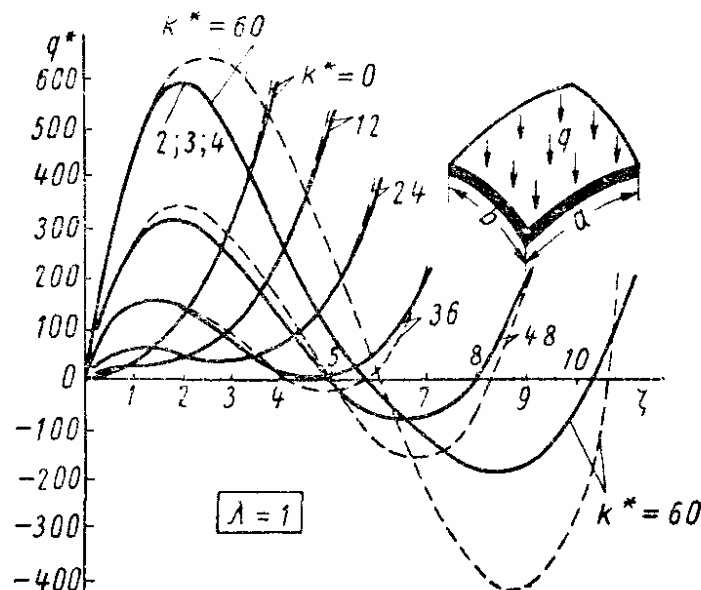


Рис. 41

возрастает, как и в случае плоской панели. При больших k^* диаграмма получает нисходящий участок. Для определения предельного значения k^* , при котором становится возможным прощелкивание, исследуют производную $\frac{dq^*}{d\zeta}$. Приравнявая ее нулю, находят значения ζ , отвечающие верхней и нижней критическим нагрузкам:

$$\zeta = \frac{3}{32} k^* \mp \frac{1}{32} \sqrt{3k^{*2} - \frac{\pi^4 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^4}{2(1-\nu^2)}}. \quad (260)$$

В точке, определяющей границу прощелкивания, диаграмма q^* (ζ) имеет точку перегиба с горизонтальной касательной. В этом случае подкоренное выражение в формуле (260) обращается в нуль. Предельное значение k^* будет

$$k = \frac{\pi^2 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2}{\sqrt{6(1-\nu^2)}} \quad \text{при} \quad \zeta = \frac{3}{32} k^*.$$

При достаточно малых значениях кривизн прощелкивание оболочек будет исключено (см. рис. 41), однако в этих случаях начальный участок

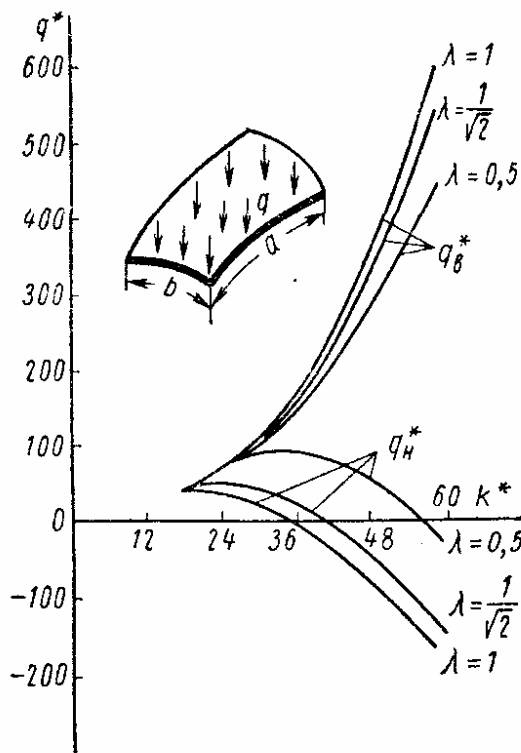


Рис. 42

диаграммы имеет малый угол с осью абсцисс, и жесткость оболочки оказывается незначительной. Поэтому важно возможно точнее определить q_a^* и q_n^* для оболочек относительно большой кривизны.

В уточненных решениях функции w и Φ выражаются в виде рядов

$$w = \sum_{i,j} f_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b};$$

$$\Phi = \sum_{i,j} A_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (261)$$

Решение будет тем точнее, чем большее число членов удерживается в рядах (261). Уточненные диаграммы, полученные по результатам решения, выполненного с помощью цифровой электронной машины, приведены на рис. 41 сплошными линиями. Отличие от данных первого приближения ока-

зывается существенным, начиная с $k^* \approx 36$. Уточненные решения дают несколько меньшие верхние критические нагрузки; при этом заметно возрастает нижняя критическая нагрузка.

На рис. 42 показана зависимость верхней и нижней критических нагрузок от параметра k^* для панелей с различным отношением сторон по данным четвертого приближения при $\nu = 0,3$. Прощелкивание будет при $k^* > 18$ для $\lambda = 1$, при $k^* > 20,4$ для $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и при $k^* > 30$ для $\lambda = 0,5$.

Если в решении исходить из аппроксимирующего выражения для Φ в виде $\Phi = U(x) V(y)$, где U и V — «балочные» функции, удовлетворяющие условию защемления балки по краям, то четвертое граничное условие (252) может быть выполнено во всех точках края. При этом для квадратной панели в уравнении (259) заметно изменяется только коэффициент при ζ^3 ; он оказывается равным 7,48 вместо 8,77.

Исследование задачи в предположении, что ребра, окаймляющие панели, остаются прямолинейными и вместе с тем свободно сближаются между собой, приводит для квадратной панели в первом приближении к следующему уравнению (при $\nu = 0,3$):

$$q^* = 7,5\zeta^3 - 2,06k^*\zeta^2 + (0,154k^{*2} + 22)\zeta. \quad (262)$$

В случае несмещающихся ребер зависимость имеет вид

$$q^* = 28,9\zeta^3 - 6,1k^*\zeta^2 + (0,5k^{*2} + 22)\zeta. \quad (263)$$

Для удлиненной цилиндрической панели ($a \gg b$) может быть получено точное решение задачи [2]. Окончательные результаты для верхнего и нижнего критических давлений для панелей различной кривизны и при разных условиях закрепления приведены в табл. 3. Под q_1^* и q_2^* понимают соответственно параметры верхнего и нижнего значений критических нагрузок:

$$q_1^* = \frac{q_1}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^4 (1 - \nu^2); \quad q_2^* = \frac{q_2}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^4 (1 - \nu^2).$$

3. Критические нагрузки для удлиненных цилиндрических панелей

Параметр кривизны k	Шарнирное закрепление по длинным кромкам		Защемление по длинным кромкам	
	q_1^*	q_2^*	q_1^*	q_2^*
5	4,29	3,94	—	—
10	19,4	—2,60	—	—
20	60,6	—26,5	95,0	47,4
30	95,5	—44,5	—	—
40	—	—	255	65,2

Коническая панель

Рассмотрим случай пологой конической панели, круговой в плане при $\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{5}$, подвергающейся действию поперечной нагрузки интенсивностью q (рис. 43, а). Примем, что панель защемлена по контуру

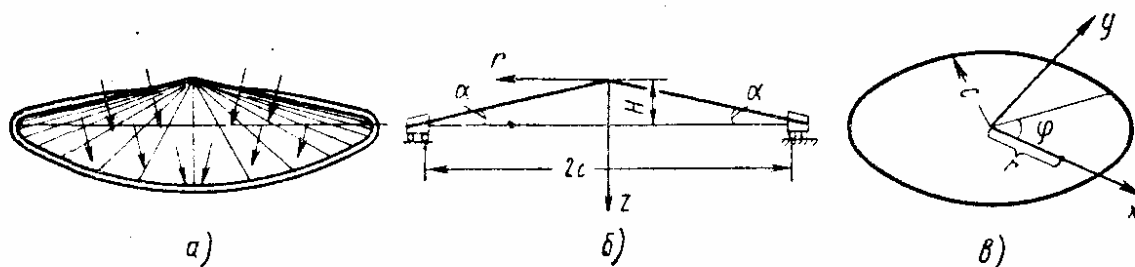


Рис. 43

и точки края свободно перемещаются в плане (скользящая заделка). Особенности задачи, связанные с наличием вершины конуса, учитывать не будем.

Представляя оболочку как искривленную пластинку, возьмем за основу уравнения (250)—(251). По рис. 43, б находим $z = \frac{Hr}{c} = \alpha r$, где $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{c}$. Выразим уравнения (250)—(251) в полярных координатах r, φ (рис. 43, в).

Производные от некоторой функции Z по x, y выражаются через производные от Z по r, φ в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial r}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \varphi}; \quad (264)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}; & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right); \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (265)$$

Оператор

$$\begin{aligned} \nabla^2 Z &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (266)$$

Используя зависимости (264) — (266) и вводя относительную координату $\rho = \frac{r}{c}$, приводим основные уравнения (250) — (251) к виду

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \\ &+ \frac{2}{\rho^3} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} \right) - \frac{2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} - \\ &- \frac{2}{\rho^4} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{c\alpha}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{q}{h} c^4; \end{aligned} \quad (267)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} \right)^2 - \frac{2}{\rho^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} + \\ &+ \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{c\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}; \end{aligned} \quad (268)$$

оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

В соответствии с принятыми граничными условиями, имеем

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0; \quad \sigma_r = 0; \quad \tau = 0 \quad \text{при } \rho = 1. \quad (269)$$

Аппроксимируем прогиб выражением

$$w = f_1 (1 - \rho^2)^2 + f_2 \rho^4 (1 - \rho^2)^2 \cos n\varphi. \quad (270)$$

Первый член в формуле (270) отвечает решению осесимметричной линейной задачи для защемленной пластинки, а второй — отображает изгиб по n волнам вдоль дуги с равными амплитудами к центру кривизны; эти два члена во взаимном сочетании характеризуют образование ряда вмятин, преимущественно направленных к центру кривизны.

В результате подстановки выражения (270) в правую часть уравнения (268) находим

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = R_0 + R_n \cos n\varphi + R_{2n} \cos 2n\varphi, \quad (271)$$

где R_0, R_n — функции ρ , содержащие параметры f_1, f_2 . Интегрирование равенства (271) проводим с учетом того, что в центре панели при $\rho = 0$ величина σ_r должна быть ограниченной; при этом приходим к следующей зависимости:

$$\frac{1}{E} \Phi = \Phi_0 + \Phi_n \cos n\varphi + \Phi_{2n} \cos 2n\varphi, \quad (272)$$

где $\Phi_0, \Phi_n, \Phi_{2n}$ — новые функции ρ, f_1, f_2 . Интегрируя, далее, уравнение (267) по методу Бубнова-Галеркина, получим

$$q^* = C_1 \zeta^3 + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta + C_4 \xi^2 + C_5 \zeta \xi; \quad (273)$$

$$B_1 \xi^3 + B_2 \xi + B_3 \zeta \xi + B_4 \zeta^3 + B_5 \zeta^2 + B_6 \zeta \xi^2 = 0; \quad (274)$$

здесь введены параметры

$$q^* = \frac{q}{E} \left(\frac{c}{h} \right)^4; \quad \zeta = \frac{f_1}{h}; \quad \xi = \frac{f_2}{h}. \quad (275)$$

Коэффициенты C_1, \dots, C_5 и B_1, \dots, B_6 зависят от числа волн n . Исключая ξ из системы (273)–(274), определяем зависимость параметра поперечной нагрузки q^* от безразмерной величины ζ , характеризующей прогиб центра панели. Случай $n = 0$ соответствует осесимметричной форме прогиба.

Зависимость $q^*(\zeta)$ для $\frac{c}{h} = 100$ при $\alpha = 0,1$ и $n = 0$ (сплошная линия) приведена на рис. 44. Кривые для $n \neq 0$ до $\zeta = 7,5$ располагаются выше кривой, отвечающей осесимметричной форме равновесия, а при $\zeta > 7,5$ — ниже этой кривой. На рис. 44 для примера приведена штриховая линия, соответствующая несимметричной форме выпучивания при $n = 10$. Следовательно, несимметричная форма должна иметь место при прогибе в центре, равном 7,5 толщинам оболочки. В приведенном примере (при $\frac{c}{h} = 100$) огибающая семейства кривых,

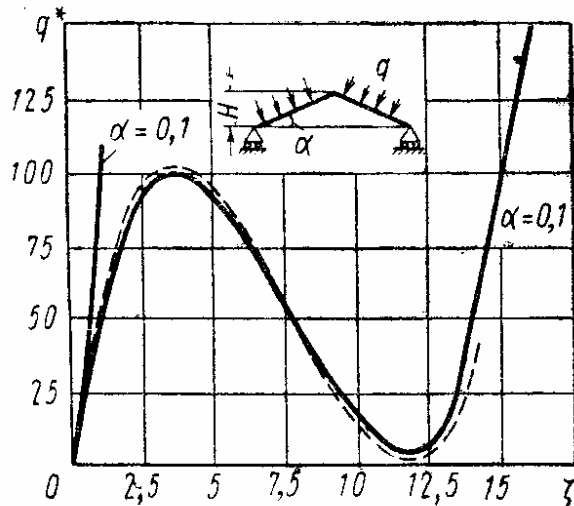


Рис. 44

соответствующих различным n , при $\zeta > 7,5$ мало отличается от кривой, соответствующей осесимметричной форме. Нижнее критическое давление оказывается близким к нулю.

При жесткой заделке панели, когда точки кромки не смещаются, нижнее критическое давление при $\frac{c}{h} = 100$ принимает отрицательное значение.

Исследование осесимметричного выпучивания конической панели со скользящей заделкой по контуру, испытывающей действие сосредоточенной в центре силы P , направленной вдоль оси, приводит к следующей зависимости между нагрузкой P и стрелой прогиба f :

$$P^* = 0,234\zeta^3 - 0,332 \frac{\alpha c}{h} \zeta^2 + \left[0,16 \left(\frac{\alpha c}{h} \right)^2 + 1,47 \right] \zeta, \quad (276)$$

где

$$P^* = \frac{Pc^2}{Eh^2}; \quad \zeta = \frac{f}{h}.$$

Сферическая панель

Рассмотрим устойчивость пологого сферического сегмента, нагруженного равномерно распределенным внешним давлением q (рис. 45). Величины H , R , c связаны соотношениями

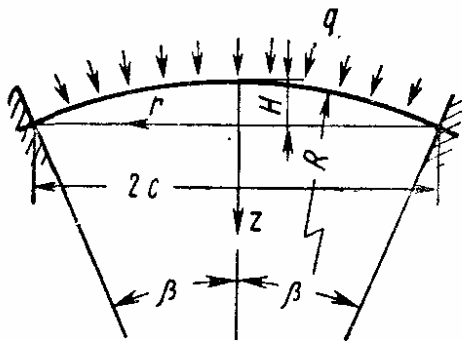


Рис. 45

$$c^2 \approx 2RH; \quad \beta \approx \frac{c}{R};$$

$$\frac{R\beta^2}{h} \approx 2 \frac{H}{h}. \quad (277)$$

Решим осесимметричную задачу о выпучивании пологой сферической оболочки. В уравнениях (248а)—(249а) примем $w_0=0$. Вводя полярные координаты, считая $w = w(r)$, $\Phi = \Phi(r)$, определяем первый интеграл этих уравнений. При $q = \text{const}$ из уравнений (224) получим

$$\frac{D}{h} r \frac{d}{dr} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} = \left(\frac{dw}{dr} + \frac{r}{R} \right) \frac{d\Phi}{dr} + \frac{qr^2}{2h}; \quad (278)$$

$$\frac{1}{E} r \frac{d}{dr} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} = - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{dw}{dr} + \frac{r}{R} \right) \frac{dw}{dr}. \quad (279)$$

Вводя безразмерные параметры

$$\theta = \frac{r}{c}; \quad \alpha = \frac{1}{R\beta^2} \cdot \frac{dw}{d\theta} + \theta; \quad \gamma = \frac{1}{Eh\beta \sqrt{m}} \cdot \frac{d\Phi}{dr}; \quad (280)$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\beta^2 R}{h}; \quad P = \frac{1}{2E \sqrt{m}} q \left(\frac{R}{h} \right)^2; \quad m = \frac{1}{12(1-\nu^2)}, \quad (281)$$

приводим уравнения (278)–(279) к виду

$$L'(\alpha) = \rho'(\alpha\gamma + P\theta^2); \quad (282)$$

$$L'(\gamma) = \frac{1}{2}\rho'(\theta^2 - \alpha^2), \quad (283)$$

где L' — линейный оператор,

$$L' = 0 \frac{d}{d\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \theta. \quad (284)$$

Введем параметр $k = \frac{R\beta^2}{h}$ и величину $\hat{\sigma}$ по формуле (233); величины ρ' и P связаны с этими параметрами соотношениями

$$\rho' = \frac{1}{V_m} k; \quad P = \frac{\hat{\sigma}}{V_m}. \quad (285)$$

Если панель защемлена по контуру и радиальные смещения точек контура отсутствуют, граничные условия получают вид

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0; \quad (286)$$

$$\alpha = 1, \quad \frac{d\gamma}{d\theta} - \nu\gamma = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 1. \quad (287)$$

Ниже приведены окончательные результаты решений, полученных с помощью электронных цифровых машин. Данные, относящиеся к определению верхней критической нагрузки q_0 , показаны на рис. 46. Кри-

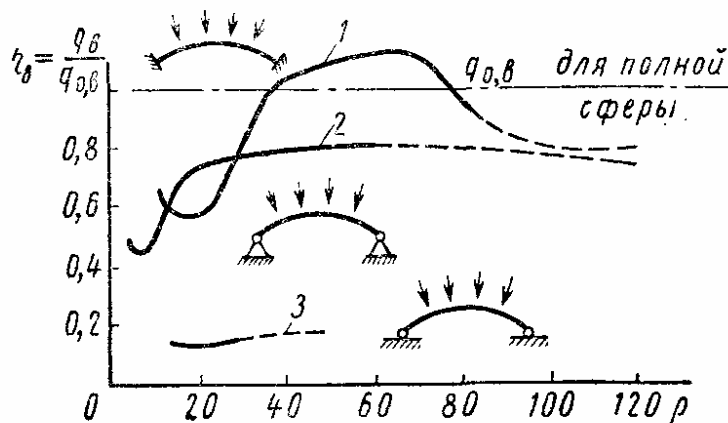


Рис. 46

вая 1 соответствует жесткому защемлению по контуру, кривая 2 — шарнирному закреплению с несмещающимися в плане точками контура, кривая 3 — случаю шарнирного опирания со свободно смещающимся в плане контуром. По оси абсцисс отложена величина

$$\rho = \sqrt{2}\rho' = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{R\beta^2}{h} = \sqrt{12(1-\nu^2)} k. \quad (288)$$

Используя условия (269), параметр ρ выразим в виде

$$\rho = 2 \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{H}{h}; \quad \text{при} \quad \nu = 0,3 \quad \text{будет} \quad \rho \approx 6,6 \frac{H}{h}. \quad (289)$$

По оси ординат отложена величина

$$\eta_{\theta} = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \cdot \frac{q_{\theta}}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2; \quad (290)$$

здесь q_{θ} — значение верхнего критического давления для полной сферы, определяемое по формуле (220); обозначим его через $q_{0,\theta}$. Тогда будет



Рис. 47

$\eta_{\theta} = \frac{q_{\theta}}{q_{0,\theta}}$. Процесс вычислений значений η , соответствующих участкам кривых, показанных на рис. 46 штриховой линией, сходилась настолько медленно, что относящиеся к указанным участкам значения

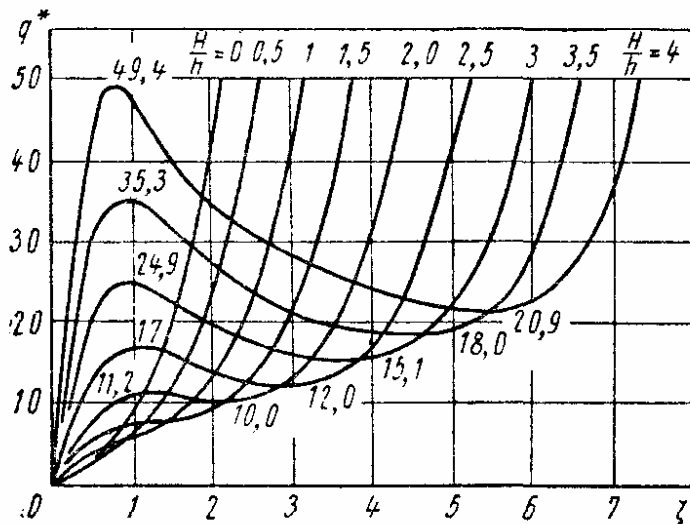


Рис. 48

нельзя считать окончательными.

Для защемленной панели (кривая 1):

$$\rho < 25 \quad \eta_{\theta} \ll 1;$$

$$35 < \rho < 75 \quad \eta_{\theta} > 1;$$

$$\rho > 75 \quad \eta_{\theta} < 1.$$

Такой вид кривой $\eta_{\theta}(\rho)$ объясняется различным характером волнообразования оболочки в зависимости от ρ . Формы волнообразования сферических панелей различной кривизны по данным экспе-

риментов, проведенных над оболочками, изготовленными из магниевого сплава и жестко защемленными по контуру, показаны на рис. 47. Прогиб, максимальный в центре и монотонно уменьшающийся по направлению к краю (рис. 47, а), имел место при малых ρ . При $\rho > 20$ максимальный прогиб не в центре (рис. 47, б); в случае развитой вмятины максимум прогиба будет уже на расстоянии половины радиуса от центра. При $\rho > 55$ появлялся новый пик в центре (рис. 47, в).

При $15 \leq \rho \leq 30$ величина q_{θ} при шарнирном закреплении (кривая 2 рис. 46) лежит выше, чем при защемлении панели по контуру. Это объясняется, возможно, различным влиянием изгибных напряжений, образующихся у края. В остальной области изменения ρ случаю шарнирно закрепленной оболочки соответствуют значения η_{θ} , меньшие, чем для защемленной. Сильно падает значение η_{θ} при свободно смещающемся в плане контуре (кривая 3, рис. 46).

Выпучивание реальных оболочек происходит при нагрузке, лежащей, как правило, значительно ниже q_{θ} . Поэтому данные для расчета можно

получить лишь после исследования других участков кривой $q(\xi)$ и определения нижнего критического давления. Окончательные результаты вычислений с помощью электронных цифровых машин даны на рис. 48. Здесь показаны зависимости между параметром нагрузки $q^* = qc^4/Eh^4$ и безразмерной стрелой прогиба в центре $\xi = \frac{w_{\max}}{h}$ для панелей различной начальной кривизны, жестко защемленных по контуру. На графике отмечены значения верхнего и нижнего критических давлений.

Максимальное значение $\frac{H}{h}$ на рис. 48 составляет 4, что соответствует $\rho \approx 26$. Кривые по результатам вычислений, относящихся к панелям несколько большего подъема ($36 < \rho < 81$), показаны на рис. 49. Для

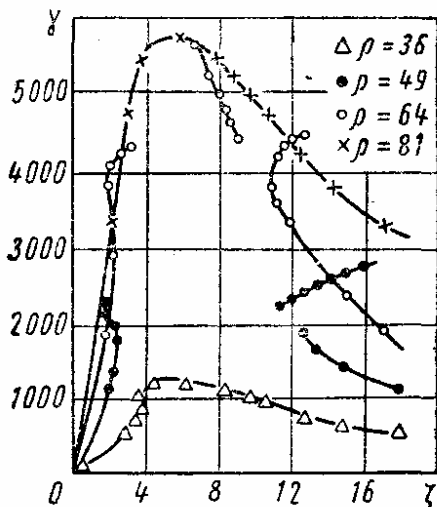


Рис. 49

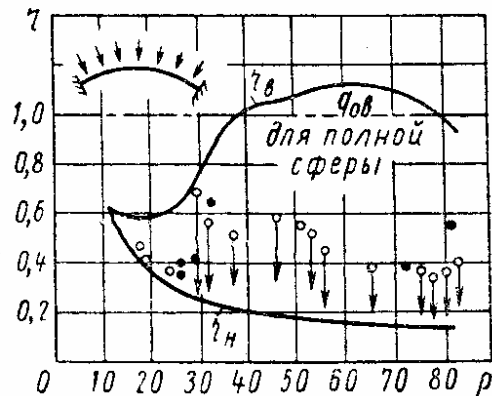


Рис. 50

$\rho = 49$ и $\rho = 64$ было получено несколько различных ветвей равновесных состояний оболочки, не связанных между собой. Одни из этих ветвей соответствуют, по-видимому, устойчивым, а другие — неустойчивым формам равновесия. На рис. 49 по оси ординат отложен параметр

$$\gamma = 6(1 - \nu^2) \sqrt{3(1 - \nu^2)} q^*, \text{ или при } \nu = 0,3 \gamma \approx 9q^*. \quad (291)$$

Окончательные данные для определения q_v и q_n при $0 < \rho < 80$ приведены на рис. 50. Значения η_v и η_n характеризуют отношения q_v и q_n к величине q_{0v} для полной сферы. Кривая для η_v почти совпадает с кривой 1 (рис. 46), полученной другими методами. На рис. 50 нанесены также данные экспериментов; ромбы соответствуют нагружению оболочки маслом, остальные — нагружению воздухом. Можно считать, что в первом случае выпучивание происходило при постоянном объеме, а во втором — при постоянном давлении. Наиболее резкий хлопок наблюдался во втором случае; падение нагрузки в опытах показано стрелками. Экспериментальные значения η лежат в вилке, образуемой η_v и η_n . В практических расчетах можно пользоваться графиком на рис. 50, для тщательно изготовленных оболочек значения η_n определяют непосредственно по графику, а при относительно большой начальной погиби необходимо уменьшать η_n приблизительно на 40%. Для случая шарнирного закрепления оболочки можно получить ориентировочные данные, сравнивая графики рис. 46 и 50.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Формулой (43) для верхнего критического напряжения p_v при осевом сжатии круговой цилиндрической оболочки можно пользоваться при условии, что величина p_v не превышает предела пропорциональности материала: $p_v \leq \sigma_{nc}$. Это условие можно записать в виде

$$\frac{R}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{E}{\sigma_{nc}}. \quad (292)$$

Для дуралюмина, при $\nu = 0,3$, $\sigma_{nc} = 2 \cdot 10^3$ дан/см², $E = 7 \times 10^5$ дан/см² должно быть $\frac{R}{h} \geq 210$. Формула для нижнего критического напряжения

$$p_n = 0,186E \frac{h}{R}$$

применима, если $\frac{R}{h} \geq 70$.

Между тем, во многих случаях выпучивание оболочек происходит в пластической области.

Ниже приведены результаты решений задач о выпучивании оболочек за пределами упругости, полученные при рассмотрении *устойчивости в малом*. В практических расчетах следует пользоваться этими решениями с учетом экспериментальных данных. Эксперименты показывают, что при слабо развитых пластических деформациях необходимо так же, как и в пределах упругости, отличать устойчивость оболочек в малом и в большом. Поэтому рекомендуется при проведении расчетов использовать верхние критические значения нагрузок, умноженные на поправочные коэффициенты, учитывающие возможность выпучивания в большом. Когда пластические деформации значительны, можно вести расчеты лишь на устойчивость в малом.

Рассмотрим конкретные случаи. Используемые ниже величины E_c , E_k , φ_c , φ_k определяют по формулам (54), (55) гл. 2; значения этих величин приведены в табл. 13 и 14 гл. 2.

Круговая замкнутая оболочка, шарнирно опертая по торцам, сжатая вдоль образующей усилиями p . Решение задачи по теории деформаций без учета эффекта разгрузки приводит к следующему выражению для безразмерного параметра сжимающей нагрузки $\hat{p} = \frac{pR}{Eh}$ [1]:

$$\hat{p} = \varphi_c \left\{ \frac{\eta}{9} \left(\frac{1+3\lambda}{4} \vartheta^2 + 2 + \frac{1}{\vartheta^2} \right) + \frac{\lambda}{\eta \left[\frac{1+3\lambda}{4} \vartheta^2 + (3\lambda - 1) + \frac{1}{\vartheta^2} \right]} \right\}, \quad (293)$$

где η , ϑ , λ — безразмерные параметры,

$$\eta = \frac{n^2 h}{R}; \quad \vartheta = \frac{m \pi R}{n L}; \quad \lambda = \frac{\varphi_k}{\varphi_c}$$

(m — число полуволн по образующей; n — число полных волн вдоль окружности). При осесимметричной форме потери устойчивости будет

$$\rho = E\varphi_c \left[\frac{h^2}{9} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{\varphi_k}{\varphi_c} \right) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{\varphi_c}{\varphi_k} \right) \left(\frac{m\pi R}{L} \right)^2} \right]. \quad (294)$$

Из условия минимизации полученного выражения по $\frac{m\pi}{L}$ определяем параметр верхнего критического напряжения

$$\rho_{\theta} = \frac{2}{3} \sqrt{\varphi_k \varphi_c}, \quad (295)$$

отсюда находим

$$\rho_{\theta} = \frac{2}{3} \sqrt{E_k E_c} \frac{h}{R}. \quad (295a)$$

При $\varphi_k = \varphi_c = 1$ будет

$$\rho_{\theta} = \frac{2}{3} E \frac{h}{R}, \quad (296)$$

что вытекает из формулы (43), полученной для упругой области, если принять $\nu = 0,5$.

По теории текущего модуля

$$\rho_{\theta} = \frac{2}{3} E_c \frac{h}{R}. \quad (297)$$

Сравнение выражений (295a) и (297) показывает, что по теории деформаций без учета эффекта разгрузки получается более низкое значение для ρ_{θ} .

Применение теории течения приводит к формуле

$$\hat{\rho}_{\theta} = \frac{2}{3} \sqrt{\varphi_k}; \quad \rho_{\theta} = \frac{2}{3} \sqrt{E_k E} \frac{h}{R}. \quad (298)$$

Обратимся к более общему случаю несимметричной формы потери устойчивости оболочки. Минимизируя функцию (293) по η , получим

$$\eta = \frac{3 \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{1+3\lambda}{4} \vartheta^2 + 2 + \frac{1}{\vartheta^2} \right) \left(\frac{1+3\lambda}{4} \vartheta^2 + 3\lambda - 1 + \frac{1}{\vartheta^2} \right)}}. \quad (299)$$

Подстановка формулы (299) в выражение (293) дает

$$\hat{\rho}_{\theta} = \frac{2}{3} d_1 \sqrt{\varphi_k \varphi_c}, \quad (300)$$

где

$$d_1 = \sqrt{1 + \frac{12(1-\lambda)\vartheta^2}{(1+3\lambda)\vartheta^4 + 4(3\lambda-1)\vartheta^2 + 4}}. \quad (301)$$

Выражение (293) получает минимум при

$$\vartheta^2 = \frac{2}{\sqrt{1+3\lambda}}. \quad (302)$$

Критическое напряжение при несимметричном выпучивании

$$p_{\vartheta} = \frac{2}{3} E \varphi_c \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{1+3\lambda}}{3\lambda - 1 + \sqrt{1+3\lambda}}} \cdot \frac{h}{R}. \quad (303)$$

Из сравнения выражений (295) и (300) видно, что при $\lambda \neq 1$ будет $d_1 > 1$, и выпучивание оболочек в малом при наличии пластических

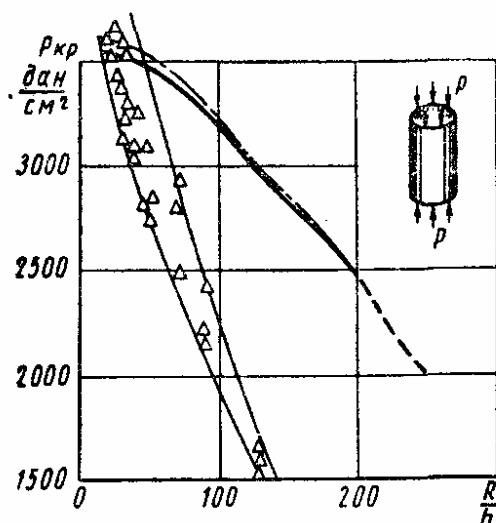


Рис. 51

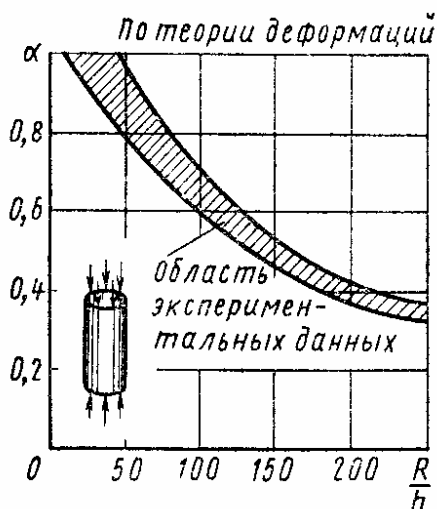


Рис. 52

деформаций должно происходить по осесимметричной форме, следовательно, при проведении практических расчетов следует пользоваться формулой (295а).

Обратимся к экспериментальным данным, относящимся к устойчивости дуралюминовых оболочек, характеризующихся отношением длины к радиусу $\frac{L}{R} = 2$. Значение $\frac{R}{h}$ изменялось в пределах 20—130. Потеря устойчивости при слабо развитых пластических деформациях сопровождалась хлопком; при этом вмятины имели ромбовидное очертание, как в упругой области. С уменьшением $\frac{R}{h}$ число волн по окружности падало. В случаях, когда пластическая деформация до потери устойчивости была значительной, эффект хлопка при выпучивании исчезал, причем оболочки теряли устойчивость по осесимметричной форме.

На рис. 51 сплошная линия отвечает теории деформаций, штрихпунктирная — теории течения. Теоретические кривые мало отличаются одна от другой. Штриховая линия соответствует решению в упругой области ($\nu = 0,5$). Область экспериментальных точек ограничена тонкими линиями.

Результаты экспериментов в виде зависимости коэффициента $\alpha = \frac{p_{кр}}{p_{\vartheta}}$ от величины $\frac{R}{h}$ показаны на рис. 52; p_{ϑ} вычислено по теории

деформаций. Из этого графика, а также из графика рис. 51 следует, что при сравнительно малых значениях $\frac{R}{h}$ (при $\frac{R}{h} < 25$ для дуралюминовых оболочек), когда пластические деформации значительны, можно вести практические расчеты лишь на устойчивость в малом. При слабо развитых пластических деформациях расчетные разрушающие напряжения должны составлять некоторую долю от p_v .

З а м к н у т а я к р у г о в а я о б о л о ч к а п р и в н е ш н е м д а в л е н и и. Решение задачи по деформационной теории без учета эффекта разгрузки приводит к следующему выражению для безразмерного параметра нагрузки \hat{q} :

$$\hat{q} = \frac{\eta}{9} \left[\vartheta^4 + 2\vartheta^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\varphi_{\kappa}}{\varphi_c} \right) \right] + \frac{\vartheta^4}{\eta \left[\frac{\varphi_c}{\varphi_{\kappa}} \vartheta^4 + \left(3 - \frac{\varphi_c}{\varphi_{\kappa}} \right) \vartheta^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\varphi_c}{\varphi_{\kappa}} \right) \right]}; \quad (304)$$

здесь

$$\hat{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2,$$

а величины ϑ и η определяются в виде

$$\vartheta = \frac{m\pi R}{nL}; \quad \eta = \frac{n^2 h}{R}.$$

Для оболочек средней длины примем, как и в задаче, относящейся к упругой области, $m = 1$, $\vartheta^2 \ll 1$; это приводит к выражению

$$\frac{\hat{q}}{\varphi_c} = \frac{\eta}{9} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\varphi_{\kappa}}{\varphi_c} \right) + \frac{\vartheta^4}{\eta \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\varphi_c}{\varphi_{\kappa}} \right)}$$

или

$$\frac{\hat{q}}{\varphi_c} = \frac{\varphi_c + 3\varphi_{\kappa}}{36\varphi_c} \cdot \frac{n^2 h}{R} + \frac{4\varphi_{\kappa}}{3\varphi_{\kappa} + \varphi_c} \cdot \frac{R}{n^2 h} \left(\frac{\pi R}{nL} \right)^4. \quad (305)$$

Минимизируя формулу (305) по n^2 , находим верхнее критическое давление

$$\frac{\hat{q}_v}{\varphi_c} = \frac{4}{3^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{\varphi_c + 3\varphi_{\kappa}}{4\varphi_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi_{\kappa}}{\varphi_c} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\pi R}{L} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (306)$$

Принимая $\varphi_{\kappa} = \varphi_c = 1$, находим

$$\hat{q}_v = \frac{4}{3^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{\pi R}{L} \left(\frac{h}{R} \right)^{\frac{1}{2}},$$

что соответствует формуле (71) при $\nu = 0,5$. В случае внешнего давления при слабо развитых пластических деформациях может происходить потеря устойчивости в большом. Поэтому в практических расчетах следует пользоваться формулой (306), уменьшая значение верхнего критического давления на поправочный коэффициент $\alpha = 0,7$.

Круговая замкнутая оболочка при кручении и т. Касательные напряжения s выражают через крутящий момент по формуле (79).

Решение задачи по теории деформаций без учета эффекта разгрузки для оболочки средней длины, шарнирно опертой по торцам, приводит к выражению (81) для верхнего критического напряжения. Принимая в этой формуле $\nu = 0,5$ и вводя E_c вместо E , получим для рассматриваемого случая

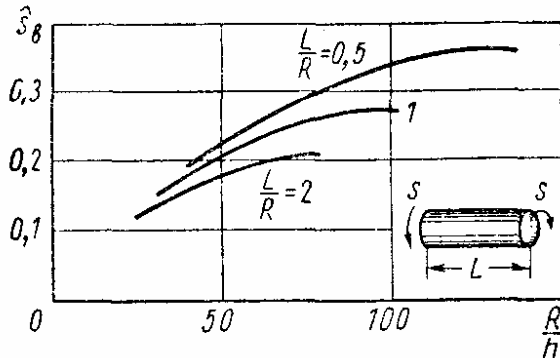


Рис. 53

$$s_\theta = 0,74 (0,75)^{-\frac{5}{8}} E_c \times \\ \times \left(\frac{R}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{4}}. \quad (307)$$

Зависимость $\hat{s}_\theta \left(\frac{R}{h}\right)$ для дуралюминовых оболочек показана на рис. 53, здесь $\hat{s}_\theta = \frac{s_\theta R}{Eh}$. В практических расчетах к величине s_θ следует вводить поправочный коэффициент $\psi \approx 0,75$.

Решение задачи для оболочек большой длины приводит к формуле, аналогичной (86):

$$s_\theta = 0,272 \cdot 0,75^{-\frac{3}{4}} E_c \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (308)$$

Круговая цилиндрическая панель со сторонами a, b , сжатая вдоль образующей равномерно распределенными усилиями p . В результате исследования устойчивости в малом с применением теории деформаций получаем следующее выражение для сжимающего усилия [1]:

$$p = E\varphi_c \left\{ \left(\frac{\pi h}{3}\right)^2 \left(\frac{1+3\lambda}{4l_x^2} + \frac{2}{l_y^2} + \frac{l_x^2}{l_y^4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{(\pi R)^2 \left[\frac{1+3\lambda}{4l_x^2} + (3\lambda-1) \frac{1}{l_y^2} + \frac{l_x^2}{l_y^4} \right]} \right\}, \quad (309)$$

где R — радиус срединной поверхности панели;

$$l_x = \frac{a}{m}; \quad l_y = \frac{b}{n}; \quad \lambda = \frac{\varphi_\kappa}{\varphi_c};$$

здесь m и n — числа полуволи вдоль образующей и по дуге.

Во втором члене выражения (309) заменим $3\lambda - 1 \approx 2$, в результате получим

$$p = E\varphi_c \left(\frac{\pi^2 h^2}{9} v_1 + \frac{\lambda}{\pi^2 R^2 v_1} \right); \quad (310)$$

где

$$v_1 = \frac{1 + 3\lambda}{4l_x^2} + \frac{2}{l_y^2} + \frac{l_x^2}{l_y^4}.$$

Будем считать, что для панели большой кривизны волнообразование осуществляется свободно; из условия минимизации p по v_1 находим для этого случая величину

$$v_1 = \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{Rh}}$$

и верхнее критическое напряжение

$$p_v = \frac{2}{3} \sqrt{E_\kappa E_c} \frac{h}{R}. \quad (311)$$

Выражение (311) совпадает с формулой (295а) для круговой замкнутой оболочки.

Для панели малой кривизны следует принять $n = 1$; заменяя в формуле (309) l_y на b , получим выражение для этого случая. Для квадратной панели условно будем считать $m = n = 1$, тогда получим

$$p_v = E\varphi_c \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left[\pi^2 \frac{13 + 3\lambda}{36} + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{b^2}{Rh} \right)^2 \frac{4\lambda}{1 + 15\lambda} \right]. \quad (312)$$

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Основные зависимости

Задачи об устойчивости оболочек при повышенных температурах представляют особый интерес для расчета тонкостенных конструкций: термическое выпучивание оболочки, часто сопровождающееся хлопками, ведет к появлению остаточных деформаций и снижению жесткости конструкции. Кроме того, температурные напряжения, даже незначительные по величине, могут служить тем возмущающим фактором, который в соединении с основными усилиями вызывает потерю устойчивости оболочки в большом.

Приведем основные соотношения теории гибких пологих оболочек с учетом изменения температуры.

Обозначения: $\epsilon_x^z, \epsilon_y^z$ — деформации вдоль линий кривизны x, y на расстоянии z от срединной поверхности; σ_x^z и σ_y^z — напряжения в этом же слое оболочки; $t^{\circ, z}$ — температура в $^{\circ}\text{C}$ в данном слое; E^z и ν^z — модуль упругости и коэффициент Пуассона, зависящие, вообще говоря, от температуры; α — коэффициент линейного расширения материала.

Тогда

$$\epsilon_x^z = \frac{1}{E^z} (\sigma_x^z - \nu^z \sigma_y^z) + \alpha t^{\circ, z}. \quad (313)$$

Будем считать $E^z = E$ и $\nu^z = \nu$ постоянными по толщине, равными температуре срединного слоя.

С другой стороны, имеем

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (314)$$

где ε_x — деформация в срединной поверхности.

Сравнивая выражения (313) и (314), находим

$$\varepsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{E} (\sigma_x^z - \nu \sigma_y^z) + \alpha t^{\circ, z}. \quad (315)$$

Аналогично получим

$$\varepsilon_y - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{E} (\sigma_y^z - \nu \sigma_x^z) + \alpha t^{\circ, z}. \quad (316)$$

По формулам (315) и (316) находим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha T; \quad (317)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha T, \quad (318)$$

где под T понимают величину

$$T = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t^{\circ, z} dz. \quad (319)$$

Умножим все члены выражений (315), (316) на z и проинтегрируем по толщине оболочки; исходя из полученных при этом выражений, найдем изгибающие моменты

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + E \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{1-\nu} \alpha \theta; \quad (320)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + E \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{1-\nu} \alpha \theta; \quad (321)$$

здесь θ — приведенная величина «температурного момента»,

$$\theta = -\frac{12}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t^{\circ, z} z dz. \quad (322)$$

Уравнения (245), (246) теории пологих оболочек, дополненные членами, учитывающими температурный эффект, получают вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w = L(w, \Phi) + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \\ + \frac{q}{h} - \frac{E h \alpha}{12(1-\nu)} \nabla^2 \theta; \end{aligned} \quad (323)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha \nabla^2 T. \quad (324)$$

Полагая в уравнениях (323), (324) $k_x = k_y = 0$, приходим к уравнениям (66), (69) гл. 2.

Из соотношений (323), (324) следует, что при T и θ , остающихся постоянными вдоль линий x, y или изменяющихся по линейному закону, основные дифференциальные уравнения будут такими же, как и для «холодной» конструкции. Однако влияние температурного воздействия в некоторых случаях может вызвать напряжения. Например, если обшивка подкрепленной конструкции нагревается быстрее, чем подкрепляющие ребра, температурная деформация обшивки будет стеснена и в обшивке могут возникнуть значительные сжимающие напряжения, приводящие к выпучиванию.

Если исследуют малые прогибы оболочки с учетом заданных усилий в срединной поверхности, основные уравнения (323), (324) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w = -p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - p_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{q}{h} + \\ + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E h \alpha}{12(1-\nu)} \nabla^2 \theta; \end{aligned} \quad (325)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha \nabla^2 T; \quad (326)$$

здесь p_x, p_y — нормальные усилия (положительные при сжатии); s — касательные усилия.

Соотношения (325), (326) приводятся к следующему уравнению относительно w (при постоянных k_x и k_y):

$$\begin{aligned} \frac{D}{E h} \nabla^8 w + k_x^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2k_x k_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ + \frac{1}{E} \nabla^4 \left(p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{2}{E} \nabla^4 \left(s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{E} \nabla^4 \left(p_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \\ - \frac{1}{E h} \nabla^4 q - \frac{h \alpha}{12(1-\nu)} \nabla^6 \theta - \\ - \alpha k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 T - \alpha k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 T = 0. \end{aligned} \quad (327)$$

При исследовании деформации тонких оболочек можно принять линейный закон изменения температуры t° вдоль толщины оболочки. Тогда будет

$$T = t_{\text{сред}}^\circ, \quad \theta = -\Delta t^\circ. \quad (328)$$

Величина Δt° характеризует перепад температур $t_{\text{внеш}}^\circ$ и $t_{\text{внутр}}^\circ$ между внешней $\left(z = -\frac{h}{2}\right)$ и внутренней $\left(z = \frac{h}{2}\right)$ поверхностями оболочки, а $t_{\text{сред}}^\circ$ — среднюю температуру:

$$\Delta t^\circ = \frac{t_{\text{внеш}}^\circ - t_{\text{внутр}}^\circ}{2}; \quad t_{\text{сред}}^\circ = \frac{t_{\text{внеш}}^\circ + t_{\text{внутр}}^\circ}{2}. \quad (329)$$

Устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки

Рассмотрим случай равномерно нагретой круговой цилиндрической оболочки, скрепленной на торцах с «холодными» шпангоутами (рис. 54). Предполагаем, что торцы свободно смещаются в осевом направлении

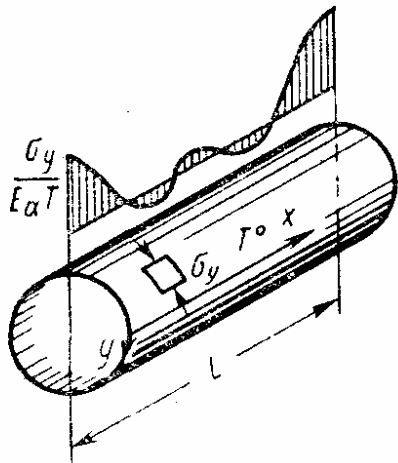


Рис. 54

один относительно другого. Пусть разность температур оболочки и шпангоутов равна T . «Холодный» шпангоут препятствует температурному удлинению оболочки в окружном направлении, вследствие чего в оболочке возникают кольцевые сжимающие напряжения. Величина этих напряжений падает по мере удаления рассматриваемой точки от шпангоута, следовательно, оболочка получает напряженное состояние типа краевого эффекта. В тот момент, когда сжимающие напряжения достигают критического значения, вблизи шпангоута возникают выпучины, и осевая симметрия оболочки нарушается. Найдем критическую температуру, при которой

происходит такое выпучивание оболочки в малом.

Примем, что в осевом направлении оболочка деформируется свободно и что по торцам имеет место защемление. Определяя напряжение в докритическом состоянии, исходим из уравнения (325). Для осесимметричной задачи при равномерном распределении температур будет

$$\frac{D}{h} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\sigma_y}{R} = \frac{E}{R} \varepsilon_y \quad (330)$$

или

$$\frac{D}{h} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{E}{R} \left(\alpha T - \frac{w}{R} \right) = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{Rh^2}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{w}{R} = \alpha T. \quad (331)$$

Граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = L.$$

Интегрируя выражение (331) с учетом этих условий, находим

$$w = \alpha RT \{ 1 - e^{-2\beta \bar{x}} (A_1 \cos 2\beta \bar{x} + A_2 \sin 2\beta \bar{x}) - \\ - e^{-2\beta (1-\bar{x})} [A_1 \cos 2\beta (1-\bar{x}) + A_2 \sin 2\beta (1-\bar{x})] \} \quad (332)$$

где

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{L^2}{Rh}}.$$

Через A_1 и A_2 обозначены некоторые функции величины β , характеризующей относительную длину оболочки. Используя равенство (330), находим по формуле (332) кольцевые напряжения σ_y . Зависимость величины $\frac{\sigma_y}{E\alpha T}$ от \bar{x} при различных значениях β показана на рис. 55. Штриховая линия соответствует зависимости

$$\frac{\sigma_y}{E\alpha T} = \cos^2 \pi \bar{x}, \quad (333)$$

отвечающей приблизительно параметру $\beta = 2$.

Для примера будем исходить из зависимости (333). Используем уравнение (327). В данном случае оно принимает вид

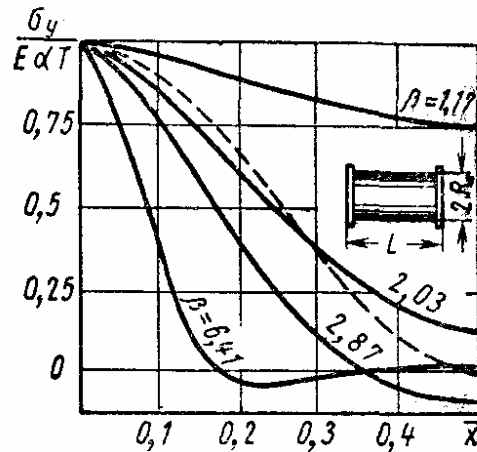


Рис. 55

$$\frac{D}{Eh} \nabla^8 w + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{E} \nabla^4 \left(\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0;$$

здесь w — дополнительный прогиб; принимая

$$w = f \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}$$

и пользуясь методом Бубнова-Галеркина, получим следующее выражение для критической температуры:

$$T_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{Ra} \left\{ \frac{\pi^2}{4\beta^2 \psi^2} \left[1 + \frac{(1+4\psi^2)^4}{2} \right] + \right. \\ \left. + 128 \frac{\psi^6 \beta^2}{\pi^2} \right\}, \quad (334)$$

где $\psi = \frac{\pi R}{nL}$. Число волн n , фигурирующее в формуле (334), определяют из условия минимума $T_{кр}$.

Приведем формулы, полученные другим путем для длинных оболочек при $\beta > 5$. При защемлении по торцу критическая температура будет

$$T_{кр} = \frac{6,41}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{\alpha R}. \quad (335)$$

Соответствующее кольцевое напряжение вблизи шпангоутов

$$\sigma_{кр} = \frac{3,88 E h}{R}.$$

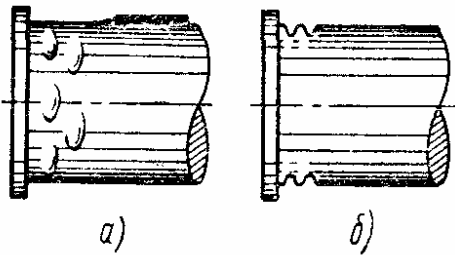


Рис. 56

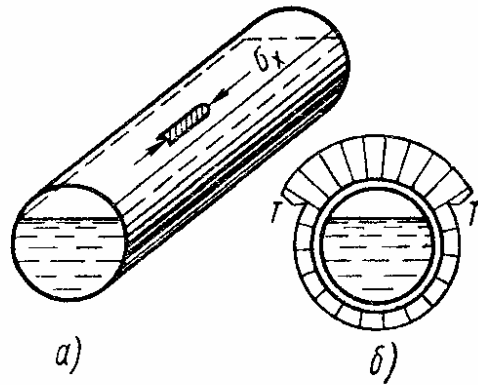


Рис. 57

При шарнирном опирании по торцу

$$T_{кр} = \frac{12,21}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{\alpha R}, \quad (336)$$

а соответствующее кольцевое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{7,4 E h}{R}.$$

Следовательно, величина $T_{кр}$ получается для шарнирно опертой оболочки выше, чем для защемленной, что объясняется большей податливостью шарнирно опертой оболочки при нагреве. Термическое выпучивание защемленных по торцам дуралюминовых оболочек при $\frac{R}{h} < 1500$ будет происходить уже за пределами упругости.

Если торцы оболочки не могут смещаться одна относительно другой, при возрастании температуры в оболочке возникнут осевые сжимающие напряжения. При этом следует ожидать выпучивания, показанного на рис. 56, а, в пределах упругости и на рис. 56, б — в упругопластической области.

Значительный интерес представляют задачи о выпучивании цилиндрических оболочек при температуре, изменяющейся вдоль окружности. На рис. 57, а показана оболочка, частично наполненная жидкостью. Предположим, что зона оболочки, соприкасающаяся с жидкостью, имеет температуру, более низкую, чем остальная часть оболочки; пусть разность температур равна T (рис. 57, б). В области повышенных температур возникнут участки со сжимающими напряжениями и здесь может произойти выпучивание. Как показывают эксперименты, вмятины имеют форму ромба и располагаются в средней части оболочки по длине; появление вмятин обычно сопровождается хлопками.

При решении подобной задачи сначала определяют эпюру распределения начальных напряжений, решающее значение имеют осевые напряжения σ_x . Вид эпюры зависит от соотношения между размерами нагретой и холодной зон. При исследовании задачи об устойчивости в малом используют уравнение (327) при $k_x = 0$, $k_y = \frac{1}{R}$. Практические расчеты можно производить, как в случае выпучивания оболочки при изгибе, по наибольшему напряжению сжатия, сравнивая его с величиной $\frac{0,605 E h}{R}$.

Выпучивание оболочек при ползучести

Особенность выпучивания пластинок и оболочек состоит в том, что при прогибах, сравнимых с толщиной, проявляется эффект цепных напряжений. В гл. 2 отмечалось, что для пластинок это влияние сводится к тому, что процесс выпучивания пластинки «тормозится» и нарастание прогибов затухает.

Выпучивание оболочек при ползучести происходит в процессе хлопка. Поэтому описание этого явления будет достаточно полным лишь в том случае, если оно проводится с позиций устойчивости в большом. Зависимость стрелы прогиба ζ от времени t , характерная для оболочки с начальной погибью при ползучести, показана на рис. 58; как видим, монотонное увеличение прогибов оболочки завершается хлопком.

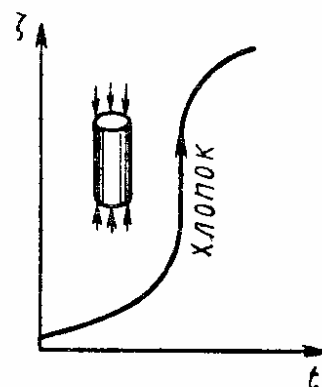


Рис. 58

Для приближенных расчетов на выпучивание оболочек при ползучести рекомендуется, как и в случае пластинок, пользоваться критической деформацией. При этом будет найден момент времени, соответствующий хлопку оболочки.

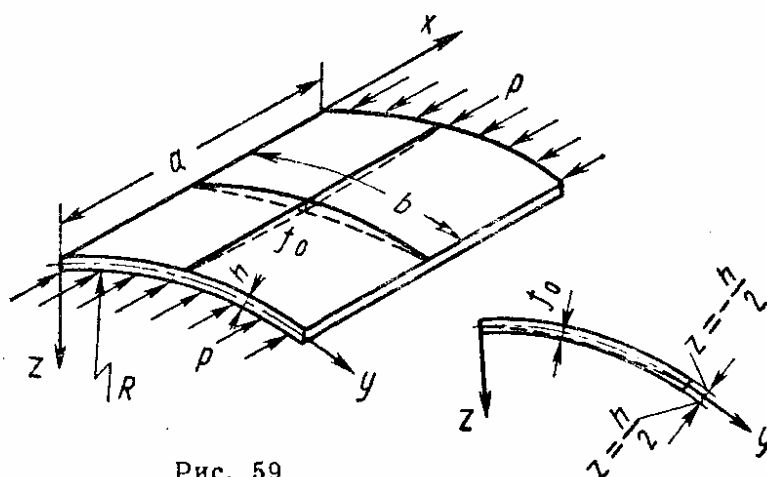


Рис. 59

В качестве исходной надо принимать деформацию, найденную на основе нижнего критического напряжения. Например, для сжатой круговой цилиндрической оболочки будет

$$\epsilon_{кр, н} = 0,18 \frac{h}{R}.$$

Остановимся на применении критерия начальных несовершенств. Исследуем случай шарнирно опертой пологой круговой цилиндрической панели, сжатой вдоль образующей усилиями p (рис. 59), предполагая, что ненагруженные кромки оболочки сближаются свободно и остаются прямолинейными. Будем считать, что начальные и дополнительные прогибы сравнимы с толщиной оболочки. Основные уравнения [см. формулы (38)—(39)]:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 (w - w_0) = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad (337)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = \frac{1}{2} [L(w_0, w_0) - L(w, w)] - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2}; \quad (338)$$

здесь w — полный прогиб.

Примем для прогибов аппроксимирующие выражения

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (339)$$

Подставляя выражения (339) в уравнение (338), найдем

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{32} E (f^2 - f_0^2) \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right] + \\ & + \frac{E}{\pi^2 R} \cdot \frac{a^2 b^4}{(a^2 + b^2)^2} (f - f_0) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{\rho y^2}{2}. \end{aligned} \quad (340)$$

Напряжения в срединной поверхности будут

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (341)$$

Напряжения изгиба, наибольшие по толщине оболочки, будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x, u} = \mp \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} \right]; \\ \sigma_{y, u} = \mp \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} \right]; \\ \tau_u = \mp \frac{Eh}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (342)$$

Знак минус относится к точкам, лежащим у нижней поверхности оболочки $\left(z = \frac{h}{2}\right)$, знак плюс — к точкам у верхней поверхности $\left(z = -\frac{h}{2}\right)$.

Обозначим полные напряжения через $\sigma_{x, n}$, $\sigma_{y, n}$. Интенсивность напряжений σ_i в каждой из точек с координатами $z = \pm \frac{h}{2}$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{x, n}^2 + \sigma_{y, n}^2 - \sigma_{x, n} \sigma_{y, n}}.$$

Этой величине соответствует интенсивность деформаций $\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E}$; под E понимают модуль упругости материала при соответствующей температуре. Примем безразмерные параметры

$$\varepsilon_i^* = \sigma_i^* = \frac{\varepsilon_i b^2}{h^2} = \frac{\sigma_i b^2}{E h^2};$$

$$\sigma_x^* = \frac{\sigma_{x,n}}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2; \quad \sigma_y^* = \frac{\sigma_{y,n}}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^2; \quad (343)$$

$$\xi = \frac{f}{h}; \quad \xi_0 = \frac{f_0}{h}; \quad \lambda = \frac{a}{b}; \quad p^* = \frac{p}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2. \quad (344)$$

Находим полные напряжения для центра панели (считая их положительными при сжатии):

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= -\frac{\pi^2}{8\lambda^2} (\xi^2 - \xi_0^2) + k \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} (\xi - \xi_0) \mp \\ &\mp \frac{\pi^2 (1 + \nu\lambda^2)}{2(1 - \nu^2)\lambda^2} (\xi - \xi_0) + p^*; \end{aligned} \quad (345)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^* &= -\frac{\pi^2 \lambda^2}{8} (\xi^2 - \xi_0^2) + k \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} (\xi - \xi_0) \mp \\ &\mp \frac{\pi^2}{2(1 - \nu^2)} (\lambda^2 + \nu) (\xi - \xi_0), \end{aligned} \quad (346)$$

где

$$k = \frac{b^2}{R h}.$$

Интегрируя уравнение (337) по методу Бубнова-Галеркина, получим

$$\begin{aligned} p^* &= \left(p_s^* + \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} (\xi^2 + \xi_0^2) - \right. \\ &\left. - \frac{2\lambda^2}{3\pi^2} k \left\{ \left[\frac{16}{(1 + \lambda^2)^2} + 1 \right] \xi + \xi_0 \right\} \right) \frac{\xi - \xi_0}{\xi}, \end{aligned} \quad (347)$$

где p_s^* — параметр верхнего критического напряжения, определяемый по формуле (136). Будем считать, что параметр кривизны панели k лежит в пределах $k < 24$.

Закон ползучести примем в виде

$$\bar{\varepsilon}_i = K e^{B\sigma t \gamma}, \quad (348)$$

где K, B, γ — постоянные для данного материала при определенной температуре. Для определения составляющих деформаций ползучести будем пользоваться соотношениями

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\bar{\varepsilon}_i \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} \right)}{\sigma_i}; \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\bar{\varepsilon}_i \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{2} \right)}{\sigma_i}. \quad (349)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} K^* &= K \left(\frac{b}{h} \right)^2; & B^* &= BE \left(\frac{h}{b} \right)^2; & \bar{\epsilon}_i^* &= \bar{\epsilon}_i \left(\frac{b}{h} \right)^2; \\ \bar{\epsilon}_x^* &= \bar{\epsilon}_x \left(\frac{b}{h} \right)^2; & \bar{\epsilon}_y^* &= \bar{\epsilon}_y \left(\frac{a}{h} \right)^2. \end{aligned} \quad (350)$$

Тогда зависимости (348) и (349) примут вид

$$\bar{\epsilon}_i^* = K^* e^{B^* \sigma_{it}^*}; \quad (351)$$

$$\bar{\epsilon}_x^* = \frac{\bar{\epsilon}_i^* \left(\sigma_x^* - \frac{\sigma_y^*}{2\lambda^2} \right)}{\sigma_i^*}; \quad \bar{\epsilon}_y^* = \frac{\bar{\epsilon}_i^* \left(\sigma_y^* - \frac{\lambda^2 \sigma_x^*}{2} \right)}{\sigma_i^*}. \quad (352)$$

Как и в случае пластинки (см. гл. 2), принимают следующий порядок расчета. Рассматривают некоторый промежуток времени Δt , считая от начала процесса ползучести. Вычисляют интенсивность напряжений в точках $z = \pm \frac{h}{2}$ для центра панели. По формуле (351) устанавливают интенсивность деформаций ползучести, а по формулам (352) — составляющие $\bar{\epsilon}_x^*$, $\bar{\epsilon}_y^*$. Далее определяют дополнительные прогибы Δw панели, вызванные ползучестью. При этом используют соотношения, относящиеся к точке $z = \frac{h}{2}$:

$$(\epsilon_{x,u})_{\frac{h}{2}} = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Delta \bar{w}}{\partial x^2}. \quad (353)$$

Принимая выражение

$$\Delta \bar{w} = \Delta f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \Delta \zeta = \frac{\Delta f}{h}, \quad (354)$$

для центра оболочки получим

$$(\epsilon_{x,u}^*)_{\frac{h}{2}} = \frac{\pi^2}{2} \Delta \zeta. \quad (355)$$

Для точки $z = -\frac{h}{2}$ будет

$$(\epsilon_{x,u}^*)_{-\frac{h}{2}} = -\frac{\pi^2}{2} \Delta \zeta. \quad (356)$$

Выражение для $\Delta \zeta$ получает вид

$$\Delta \zeta = \frac{1}{\pi^2} \left[(\epsilon_{x,u}^*)_{\frac{h}{2}} - (\epsilon_{x,u}^*)_{-\frac{h}{2}} \right]. \quad (357)$$

От деформаций изгиба можно перейти к полным деформациям, так как деформации в срединной поверхности будут при вычитании исключаться. Тогда будет

$$\Delta \zeta = \frac{1}{\pi^2} \left[(\varepsilon_{x,n}^*) \frac{h}{2} - (\varepsilon_{x,n}^*) - \frac{h}{2} \right]. \quad (358)$$

Величину

$$\zeta_0' = \zeta_0 + \Delta \zeta \quad (359)$$

рассматривают как начальную стрелу прогиба для следующего промежутка времени.

Пример. Рассчитаем дуралюминовую панель при $\lambda=1$, $a=b=200$ мм, $R=615$ мм, $h=1,9$ мм, $\zeta_0=0,3$. Величины, входящие в формулу (348), примем для материала Д16АТВ при температуре 250°C равными: $K=4,51 \cdot 10^{-5}$; $B=327 \cdot 10^{-5}$; $\gamma=0,63$; σ выражают в дан/см^2 ; t —в ч. Модуль упругости примем $E=5,38 \cdot 10^5$ дан/см^2 ; $\nu=0,42$.

По формулам (350) получим

$$K^*=0,503; B^*=0,159.$$

Пользуясь зависимостью (347), находим соотношения между полной и начальной стрелами прогиба. Графики ζ (ζ_0) для нескольких значений $\alpha = \frac{p^*}{p_0}$ показаны на рис. 60. При $\alpha > 0,2$

имеет место скачок от одного устойчивого равновесного состояния к другому.

Примем $\alpha = 0,35$, что соответствует среднему сжимающему напряжению $p = 570$ дан/см^2 . По формулам (345)—(346) находим:

$$\sigma_x^* = 15,36, \sigma_y^* = 3,61 \text{ при } z = -\frac{h}{2};$$

$$\sigma_x^* = 11,53, \sigma_y^* = -0,22 \text{ при } z = \frac{h}{2}$$

и далее

$$\sigma_l^* = 14,6 \text{ при } z = -\frac{h}{2}; \quad \sigma_l^* = 11,63 \text{ при } z = \frac{h}{2}.$$

Примем интервал времени $\Delta t = 0,2$ ч. По формуле (351) определяем интенсивность деформаций ползучести

$$\bar{\varepsilon}_l^* = 1,86 \text{ при } z = -\frac{h}{2}; \quad \bar{\varepsilon}_l^* = 1,16 \text{ при } z = \frac{h}{2}.$$

Отсюда

$$\bar{\varepsilon}_x^* = 1,72 \text{ при } z = -\frac{h}{2}; \quad \bar{\varepsilon}_x^* = 1,16 \text{ при } z = \frac{h}{2}.$$

Приращение прогиба

$$\Delta \zeta = \frac{1,72 - 1,16}{\pi^2} = 0,057.$$

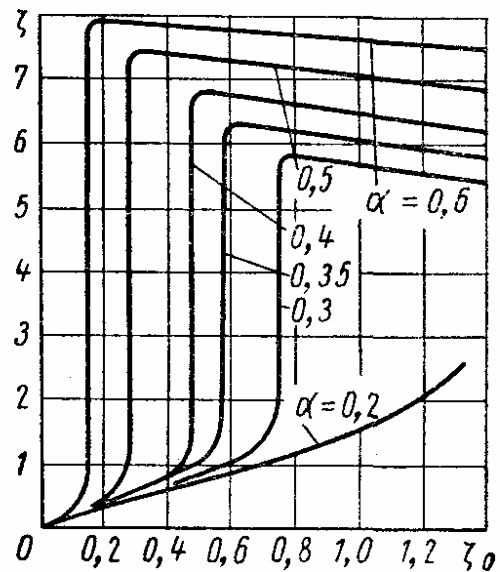


Рис. 60

Стрела прогиба

$$\xi_0' = \xi_0 + \Delta\xi = 0,357$$

принимается в качестве начальной для следующего интервала: от 0,2 до 0,4 ч. Пользуясь графиком рис. 60, находим $\xi = 0,634$. Повторяем вычисления для следующих интервалов времени.

Графики зависимостей $\xi(t)$, $\Delta\xi(t)$ изображены на рис. 61; они позволяют определить критическое время, равное периоду накопления прогибов, заканчивающемуся хлопком.

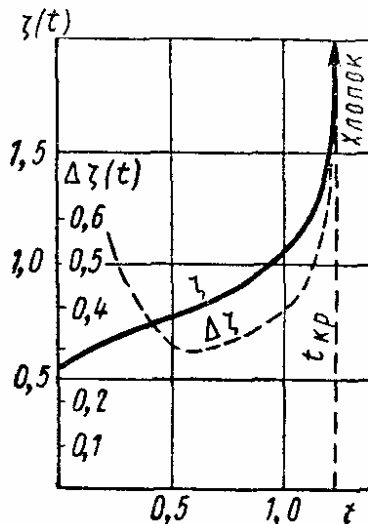


Рис. 61

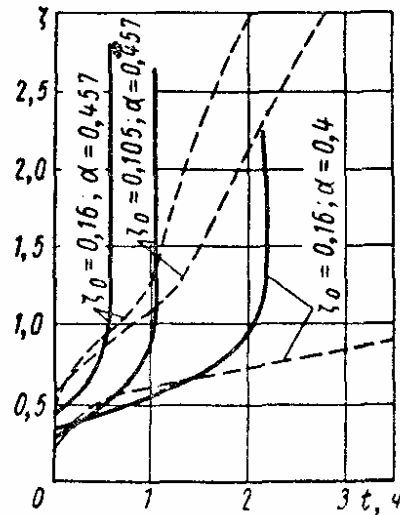


Рис. 62

Обратимся к данным экспериментов по устойчивости цилиндрических панелей в условиях ползучести. Образцы были изготовлены из дуралюмина Д16АТВ. Испытания были проведены при температуре 250° С. Результаты опытов приведены на рис. 62—63. Сплошные кривые

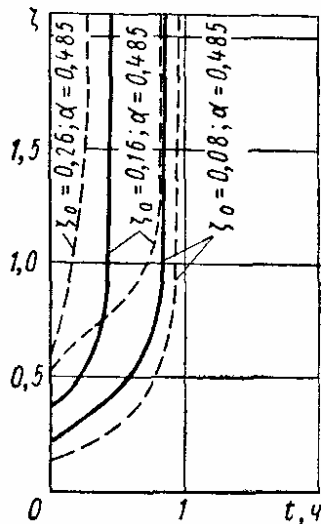


Рис. 63

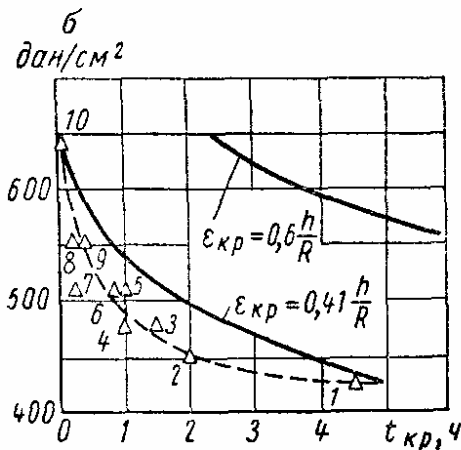


Рис. 64

показывают зависимость $\xi(t)$, полученную в опытах, штриховые кривые построены по данным теоретических решений. Через ξ_0 обозначен параметр начального прогиба, через α — отношение сжимающего напряжения к верхней критической величине. В случае, если среднее напряжение равнялось нижнему критическому значению ($\sigma = p_n$,

$\alpha = 0,3$), оболочка вела себя подобно плоской панели. При $p_n < \sigma < p_v$ выпучивание оболочки во всех случаях заканчивалось хлопком.

С помощью графиков рис. 62—63 определяли критическое время $t_{кр}$, по истечении которого происходило выпучивание в большом. Эти результаты приведены на рис. 64. Если условно принять величину начального прогиба для всех образцов примерно одинаковой, то можно по экспериментальным данным (треугольники 1—10) построить график зависимости критического времени $t_{кр}$ от среднего напряжения сжатия (штриховая кривая на рис. 64). Из графика следует, что критическое время резко падает с увеличением нагрузки.

Сплошными линиями на рис. 64 нанесены значения $t_{кр}$, полученные по критерию критической деформации $\varepsilon_{кр}$, если считать ее равной $0,605 \frac{h}{R}$ или $0,41 \frac{h}{R}$. Результаты расчета по этим формулам сильно отклоняются от экспериментальных данных. Рекомендуется в практических расчетах исходить из критической деформации $0,18 \frac{h}{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В о л ь м и р А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2-е. М., «Наука», 1967.
2. В о л ь м и р А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Техтеоретиздат, 1956.
3. Г а б р и л ь я н ц А. Г., Ф е о д о с ь е в В. И. Об осесимметричных формах равновесия упругой сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного давления. Прикладная математика и механика. Вып. 25, № 6, 1961.
4. Д а р е в с к и й В. М., К ш н я к и н Р. И. Устойчивость подкрепленной кольцами цилиндрической оболочки при действии внешнего давления. ДАН СССР, т. 134, № 3, 1960.
5. П о г о р е л о в А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М., «Наука», 1967.
6. Т е р е б у ш к о О. И. Устойчивость и закритическая деформация оболочек, подкрепленных редко расставленными ребрами. Расчет пространственных конструкций. Вып. 9, М., Госстройиздат, 1964.
7. Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
8. A l m r o t h B. O. Postbuckling behaviour of axially compressed, circular cylinders, AIAA Journ. 1, N 3, 1963.
9. H o f f N. I., R e h f i e l d L. W. Buckling of axially compressed circular cylindrical shells at stresses smaller than the classical value. J. Appl. mech., 32, N 3, 1965.
10. R u b i n S. P., M a s u r E. F. Some properties of energy load, AIAA Journ., 3, № 7, 1965.
11. W e i n g a r t e n V. I. Elastic stability of thin walled cylindrical and conical shells under axial compression, AIAA Journ., 3, № 3, 1965.

Глава 4

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Кинематика колебательных процессов

Законом колебаний какой-либо координаты (линейной или угловой) называют функцию $y = y(t)$, описывающую изменение этой координаты y во времени t . Соответственно можно говорить о колебаниях других кинематических величин (скорости, ускорения, деформации, скорости деформации и т. п.) или динамических величин (внешние силы, внутренние усилия, опорные реакции, напряжения).

Различные виды колебаний показаны на рис. 1. Простейшими являются гармонические колебания (рис. 1, а), описываемые уравнением

$$y = a \sin (\omega t + \varphi),$$

где a — амплитуда колебаний; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — круговая (угловая, циклическая) частота колебаний (здесь T — период колебаний, т. е. время одного цикла); φ — начальная фаза; t — текущее время.

Величину, обратную периоду колебаний, называют *частотой* колебаний

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Частота колебаний измеряется в герцах (1 *гц* соответствует одному циклу изменения величины за 1 *сек*).

При гармонических колебаниях скорость и ускорение меняются также по гармоническому закону

$$\dot{y} = a\omega \cos (\omega t + \varphi);$$

$$\ddot{y} = -a\omega^2 \sin (\omega t + \varphi).$$

Амплитуда скорости составляет $a\omega$, амплитуда ускорения $a\omega^2$.

Кроме гармонических колебаний на рис. 1 показаны следующие виды колебаний: затухающие (рис. 1, б) и возрастающие (рис. 1, в) колебания с постоянной частотой (монотонное изменение амплитуды), биения (периодические изменения амплитуды при постоянной частоте,

рис. 1, г), колебания с переменной частотой и постоянной амплитудой (рис. 1, д), колебания с переменными частотой и амплитудой (рис. 1, е).

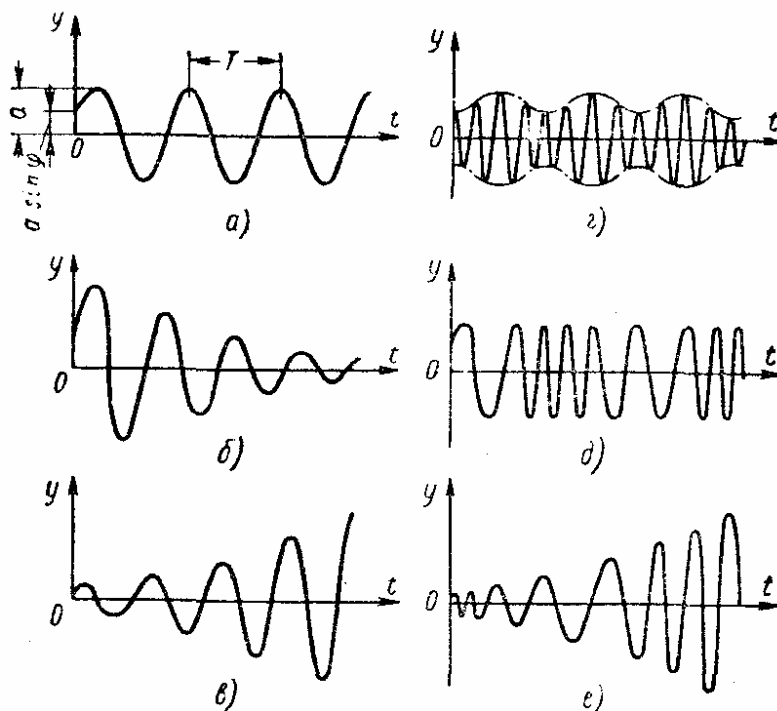


Рис. 1

Колебания могут происходить относительно смещенного отсчетного уровня (рис. 2, а) или переменного отсчетного уровня (рис. 2, б).

Часто встречаются периодические, но негармонические колебания (рис. 2, в). Их можно рассматривать как сумму (иногда бесконечную) простых гармонических колебаний; разложение периодических колебаний на гармонические составляющие (гармоники) называют гармоническим анализом и выполняют в соответствии с теорией рядов Фурье.

Действующие переменные силы при колебаниях

Действующие силы весьма разнообразны по своей природе и по той роли, которую они играют в колебательных процессах. Эти силы образуют следующие категории.

Возмущающие силы — внешние силы типа $P = P(t)$, являющиеся некоторыми заданными функциями (часто, периодическими) времени и вызывающие вынужденные колебания механических систем, на которые эти силы действуют.

Движение, принудительно задаваемое каким-либо точкам механической системы, является причиной *кинематического возбуждения*

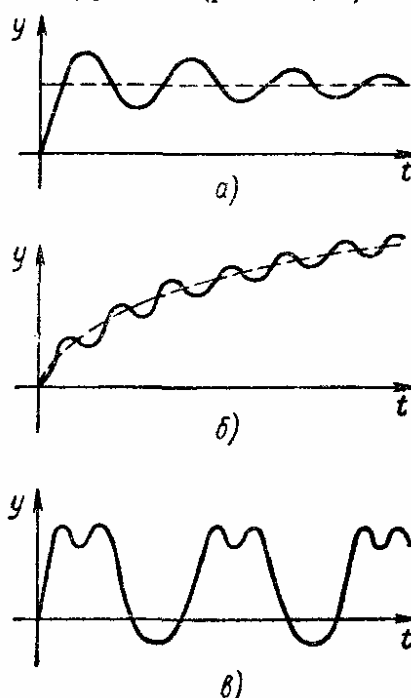


Рис. 2

колебаний (рис. 3); эти колебания происходят так же, как если бы к рассматриваемой механической системе была приложена некоторая эквивалентная возмущающая сила.

Позиционные силы — силы, зависящие от перемещения колебательной системы. Среди позиционных сил особое значение имеют восстанавливающие силы. К таким силам относят силы, возникающие при отклонениях системы от положения равновесия и стремящиеся вернуть ее в это положение. Восстанавливающие силы $F = F(y)$ зависят (линейно или нелинейно) от перемещений y системы и не только влияют на движение системы, но и сами управляются этим движением. Колебательные свойства механических систем обусловлены в основном наличием

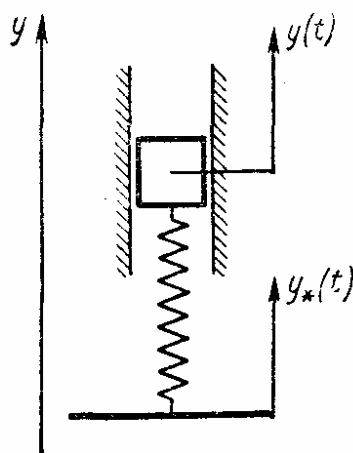


Рис. 3

восстанавливающих сил. При действии только восстанавливающих сил система совершает свободные колебания.

Силы трения (неупругого сопротивления) $R = R(\dot{y})$ зависят от скорости колебаний (по крайней мере, от ее знака) и всегда направлены противоположно направлению движения. Чаще всего силы трения способствуют гашению колебаний; соответствующие механические системы называют *диссипативными*. В некоторых случаях силы трения оказывают противоположное действие и служат причиной возбуждения и раскачки колебаний (в автоколебательных системах).

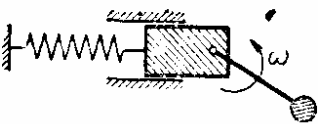
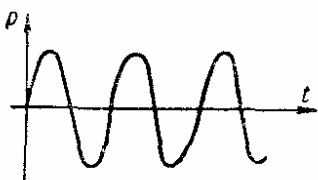
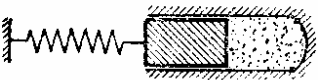
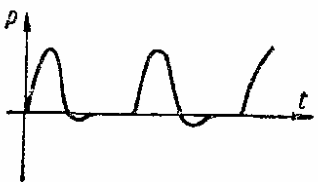

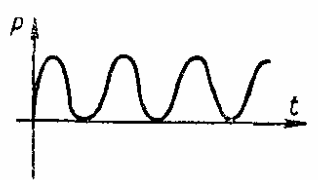


Силы смешанного характера. Таковы, например, силы $P_*(y, t)$, зависящие от перемещений системы и от времени, которые нельзя представить в виде суммы восстанавливающей силы $F(y)$ и возмущающей силы $P(t)$; такие силы характерны для *параметрических систем*, в которых при известных условиях возникают возрастающие колебания (параметрический резонанс, см. гл. 6). Смешанным характером обладают также силы $F_*(y, \dot{y})$ и непредставимые в виде суммы восстанавливающей силы $F(y)$ и силы трения $R(\dot{y})$; иногда при наличии таких сил механические системы способны совершать установившиеся незатухающие колебания при отсутствии внешних периодических источников возбуждения (автоколебательные системы).

Возмущающие силы

Источники возникновения возмущающих сил весьма разнообразны (инерционные эффекты, сгорание газовой смеси, переменное притяжение электромагнитов, переменное контактное давление при соударениях и т. п., табл. 1); в еще большей степени различны законы их изменения во времени. Общие сведения о характере возмущающих сил, передаваемых на фундаменты различными машинами, приведены в табл. 2.

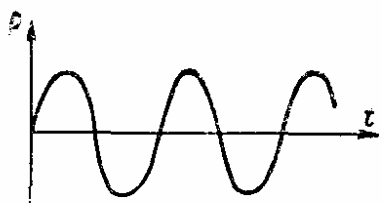
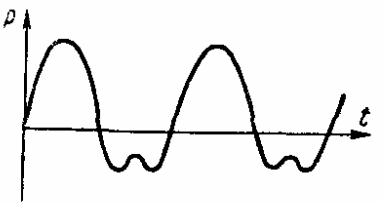
В некоторых случаях возмущающие силы не являются детерминированными функциями, а представляют собой *случайный процесс* (сейсмические нагрузки, действие неровной дороги на автомобиль, волнение, в условиях которого происходит качка корабля, и т. п.). Характеристики таких случайных процессов (математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция) получают путем обработки экспериментальных данных. О статистических задачах см. гл. 10.

1. Некоторые источники возмущающих сил

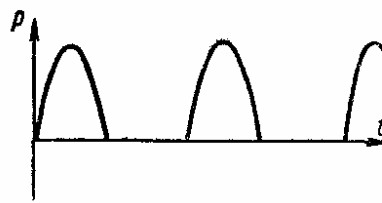

Источник	Закон изменения
<p>Переменные силы инерции</p> 	
<p>Переменное давление газа</p> 	
<p>Переменное притяжение электромагнита *</p> 	
<p>Кратковременный импульс (удар)</p> 	

* Здесь предполагается, что зазор значительно больше перемещений, развивающихся при упругих колебаниях, так что силу притяжения можно считать независимой от движения системы и принимать заданной функцией времени.

2. Возмущающие силы, передаваемые машинами на фундаменты

Вид главного движения и типы машин	Закон изменения возмущающей силы
<p>Равномерное вращение. электрические машины (электродвигатели, двигатель-генераторы и др.); турбоагрегаты (турбогенераторы, турбокомпрессоры, турбовоздуходувки, турбонасосы)</p>	
<p>Равномерное вращение и связанное с ним возвратно-поступательное движение, машины с кривошипно-шатунными механизмами (компрессоры и насосы, двигатели внутреннего сгорания, лесопильные рамы)</p>	

Продолжение табл. 2

Вид главного движения и типы машин	Закон изменения возмущающей силы
Возвратно-поступательное движение, завершающееся ударами, встряхивающие и вибрационно-ударные формовочные машины, применяемые в литейном производстве и промышленности сборного железобетона	
Неравномерное вращение или возвратно-поступательное движение, приводные двигатели прокатных станов, генераторы разрывных мощностей и т. п.	

Восстанавливающие силы

В механических системах с упругими связями восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих связей в процессе колебаний. В других случаях роль восстанавливающей силы может играть вес (маятник), сила поддержания жидкости (корабль) или сила упругости газа (пневмосистемы).

Восстанавливающие свойства упругой связи определяются *упругой характеристикой*

$$F = F(y), \quad (1)$$

где F — приложенная к связи статическая сила (момент); y — вызываемое этой силой перемещение*.

При восстанавливающих силах иной природы (вес и т. п.) соответствующую характеристику называют *квазиупругой характеристикой*, или *характеристикой восстанавливающей силы* (восстанавливающего момента).

В случаях, когда

$$F(y) = -F(-y), \quad (2)$$

характеристику называют *симметричной*. В линейных характеристиках

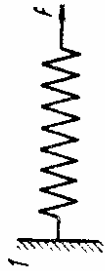
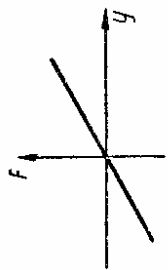
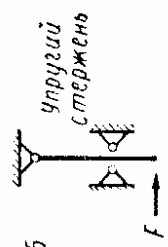
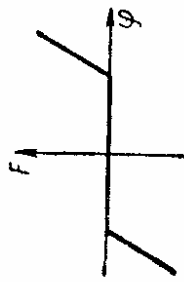
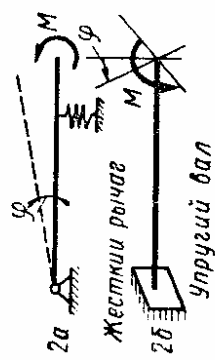
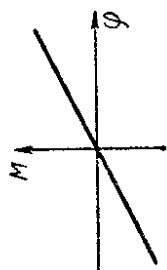
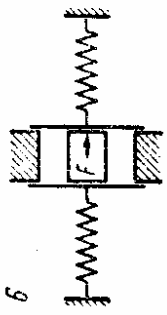
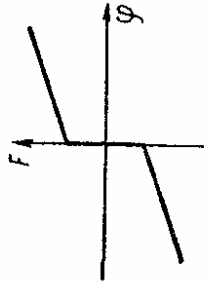
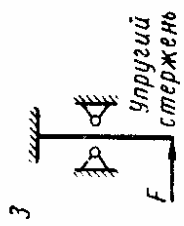
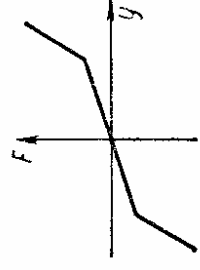
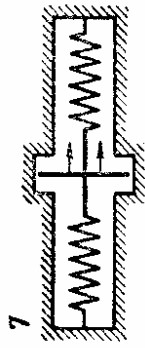
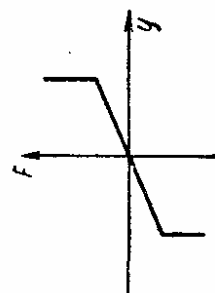
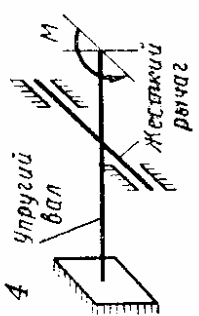
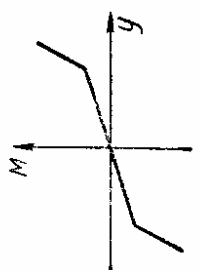
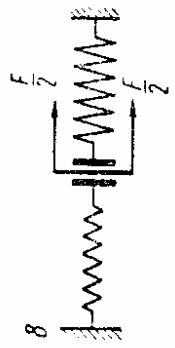
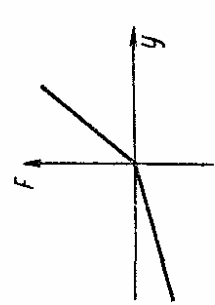
$$F = cy \quad (3)$$

коэффициент c называют *коэффициентом жесткости*; коэффициент жесткости представляет собой статическую силу, способную вызвать перемещение, равное единице.


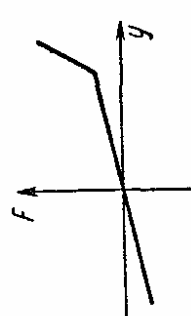
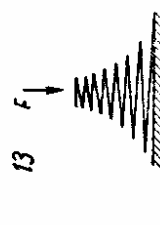
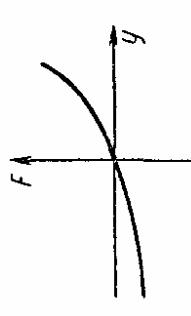

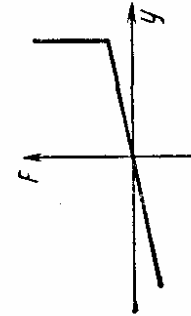
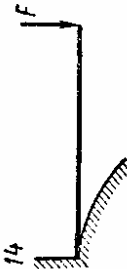
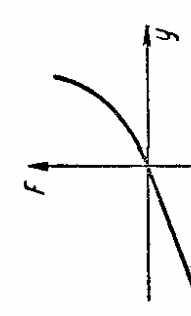
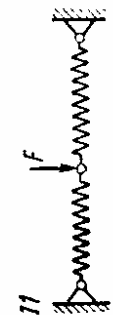
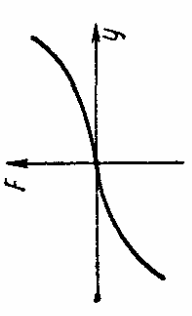
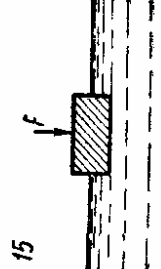
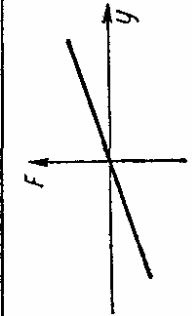

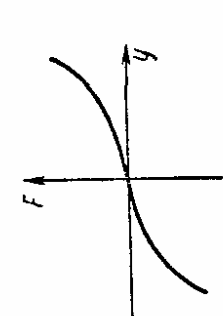
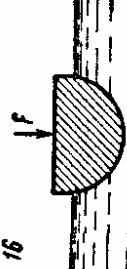
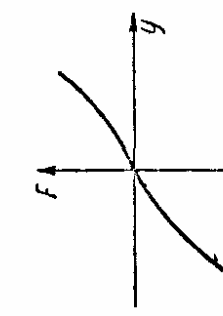
Некоторые типовые схемы упругих элементов и соответствующие им упругие характеристики приведены в табл. 3.

* Восстанавливающая сила, т. е. сила обратного действия упругой связи на остальную часть механической системы, направлена противоположно силе F .

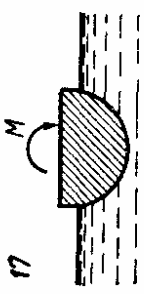
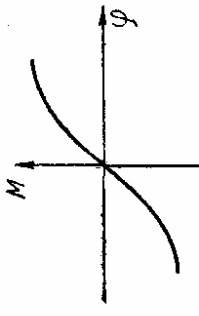
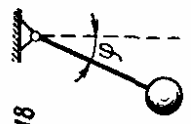
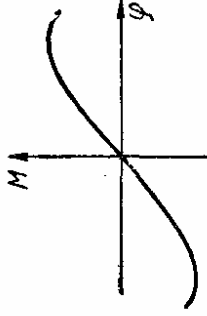
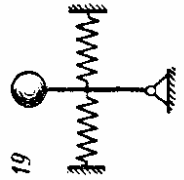
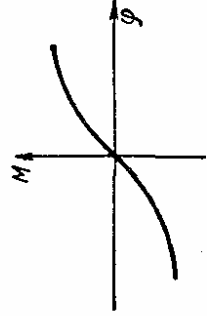
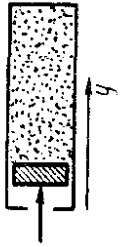
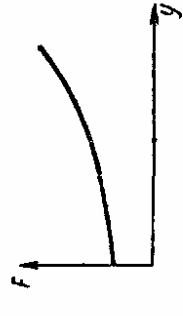
3. Типы упругих элементов и их характеристики

Схема упругого элемента	Общий вид характеристики	Схема упругого элемента	Общий вид характеристики
			
			
			
			

Продолжение табл. 3

Схема упругого элемента	Общий вид характеристики	Схема упругого элемента	Общий вид характеристики
9 		13 	
10 		14 	
11 		15 	
12 		16 	

Продолжение табл. 3

Схема упругого элемента	Общий вид характеристики
<p>17</p> 	
<p>18</p> 	
<p>19</p> 	
<p>20</p> <p>Пневмоцилиндр</p> 	

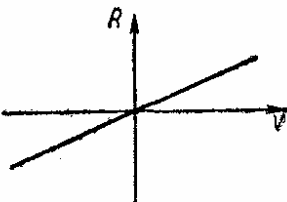

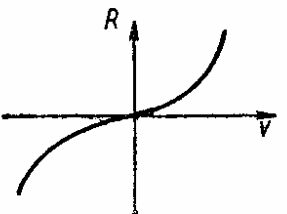

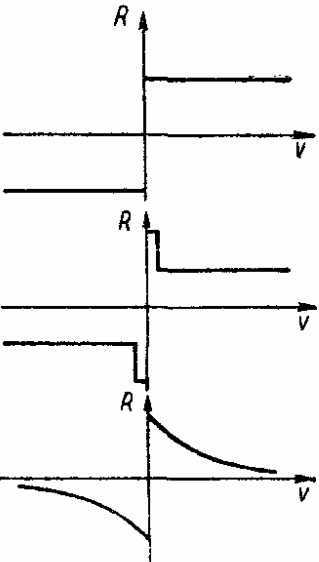

Силы трения

Различают *внутреннее трение* (в материале или в сочленениях системы) и *внешнее трение* (трение в опорах, сопротивление среды, в которой происходят колебания). Особенно значительное трение развивается в *демпферах* (поглотителях колебаний), специально вводимых в механическую систему для гашения колебаний.

Характер зависимости сил трения от скорости v определяется природой трения; такую зависимость называют *характеристикой трения*.

Типичные характеристики трения приведены в табл. 4.

4. Характеристики трения и их условные обозначения

Тип трения	Характеристика трения	Условное обозначение элемента трения
Линейно-вязкое		
Нелинейно-вязкое		
Сухое		

Число степеней свободы колебательных систем

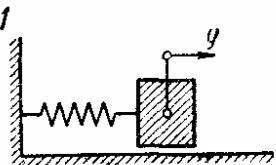
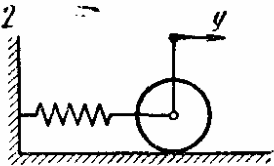

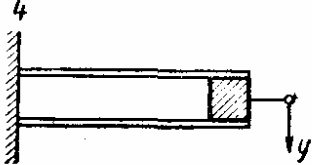
Числом степеней свободы механической колебательной системы называют число независимых величин (обобщенных координат), однозначно определяющих положение всех материальных точек системы в любой момент времени. Хотя для реальных механических систем это число всегда бесконечно велико, но в ряде случаев практически достаточен учет конечного числа существенных степеней свободы. При схематизации системы наиболее легкие элементы полагают вовсе лишенными массы, сравнительно жесткие части конструкции считают совершенно недеформируемыми, а отдельные малые тела системы представляют в виде материальных точек. Иногда число степеней свободы ограничивают путем некоторых заранее формулируемых предположений о конфигурации системы при колебаниях (см. схему 10 табл. 5).

Наиболее простой (хотя не всегда достаточно точной) является схематизация механической системы в виде системы с одной степенью свободы. Примеры упругих систем с одной степенью свободы приведены в табл. 5, а с несколькими степенями свободы — в табл. 6. Приведение конкретных конструкций к виду систем с несколькими степенями свободы дано в табл. 7.

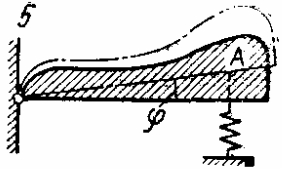
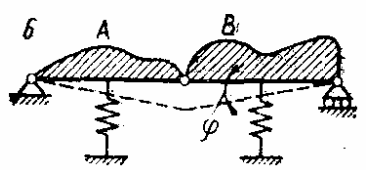
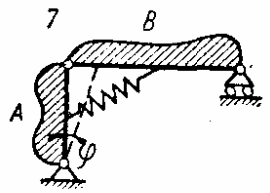
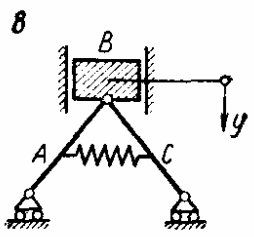
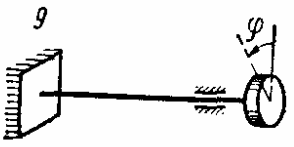
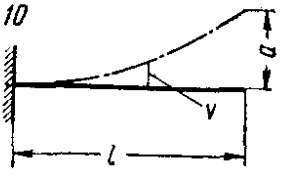
Введение элементов трения в механическую систему иногда приводит к изменению числа степеней свободы и к образованию систем с нецелым числом степеней свободы. Подобные случаи указаны в табл. 8, где возле каждой схемы в кружке указано число степеней свободы.

Непрерывно деформируемые системы с распределенной массой (системы с распределенными параметрами) обладают бесконечным числом степеней свободы, так как в каждый момент времени конфигурация любой системы определяется не конечным числом параметров, а функциями пространственных координат; примеры приведены в табл. 9.



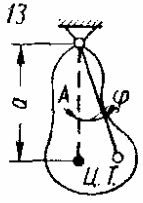
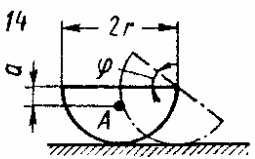
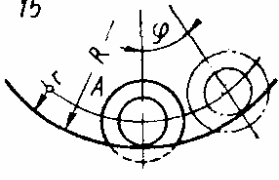
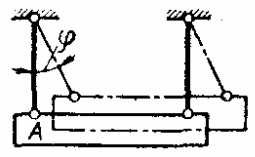
5. Упругие системы с одной степенью свободы

Схема	Обобщенная координата	Особенности системы
	Линейное перемещение $y(t)$	Упругая связь не обладает массой
		Упругая связь не обладает массой, качение катка происходит без скольжения
		Балка лишена массы, масса груза сосредоточена
		Упругие полосы не обладают массой и нерастяжимы

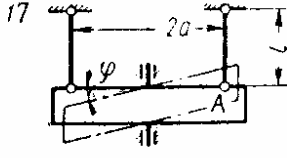
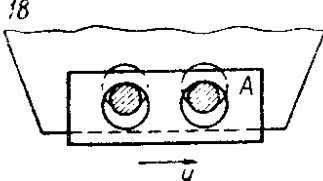
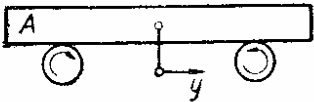
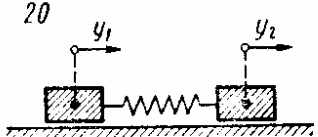
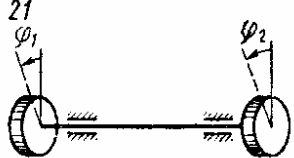
Продолжение табл. 5

Схема	Обобщенная координата	Особенности системы
	Угловое перемещение $\varphi(t)$	Опорные пружины не обладают массой. Тело A абсолютно жесткое
		Опорные пружины не обладают массой. Тела A и B абсолютно жесткие
		Упругая связь не обладает массой. Тела A и B абсолютно жесткие
	Линейное перемещение $y(t)$	Тела A, B и C абсолютно жесткие, упругая связь не обладает массой
	Угловое перемещение $\varphi(t)$	Упругий вал имеет конечную жесткость кручения, но не изгибается и не растягивается. Диск абсолютно жесткий
	Прогиб конца $a = a(t)$	<p>Форма изогнутой оси балки задана с точностью до множителя a и удовлетворяет условиям закрепления; например</p> $v = \frac{ax^2}{2l^2} \left(3 - \frac{x}{l} \right)$

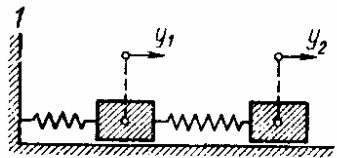
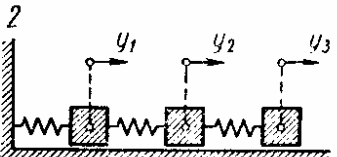
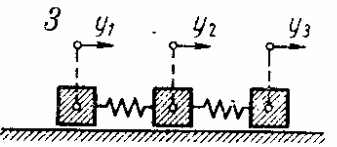
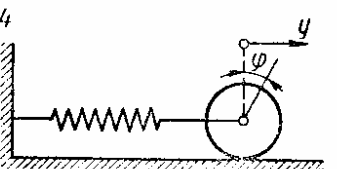
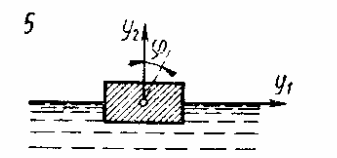
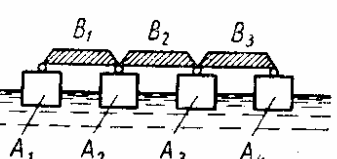
Продолжение табл. 5

Схема	Обобщенная координата	Особенности системы
<p>11</p>  <p>Вертикальные колебания поплавка</p>	<p>Линейное перемещение $y(t)$</p>	<p>Тело A абсолютно жесткое и может перемещаться только поступательно по вертикали. Инерция жидкости учитывается дополнительной (присоединенной) массой</p>
<p>12</p>  <p>Плоские колебания математического маятника</p>		<p>Стержень абсолютно жесткий и не обладает массой. Масса груза сосредоточенная</p>
<p>13</p>  <p>Плоские колебания физического маятника</p>		<p>Тело A абсолютно жесткое</p>
<p>14</p>  <p>Плоские колебания диска на горизонтальной плоскости</p>		<p>Тело A абсолютно жесткое. Качение не сопровождается скольжением</p>
<p>15</p>  <p>Плоские колебания диска на цилиндрической поверхности</p>		<p>Тело A абсолютно жесткое. Качение не сопровождается скольжением</p>
<p>16</p>  <p>Плоские колебания тела на двойном подвесе</p>		<p>Вертикальные стержни и тело A абсолютно жесткие</p>

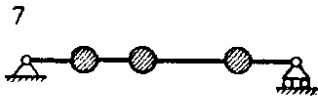
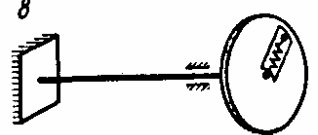
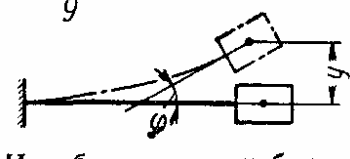
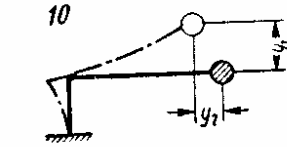
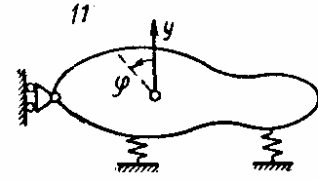
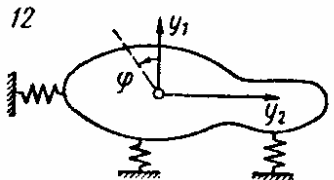
Продолжение табл. 5

Схема	Обобщенная координата	Особенности системы
<p>17</p>  <p>Крутильные колебания тела на двойном подвесе</p>	Угловое перемещение $\varphi(t)$	Вертикальные стержни и тело A абсолютно жесткие
<p>18</p>  <p>Плоские колебания тела на двух роликах, находящихся в цилиндрических отверстиях</p>	Линейное смещение $y(t)$	Тело A совершенно жесткое; качение роликов не сопровождается скольжением
<p>19</p>  <p>Плоские колебания тела на двух дисках, вращающихся в противоположных направлениях</p>		Тело A совершенно жесткое; силы трения следуют закону Кулона
<p>20</p> 	Относительное линейное перемещение $y_2(t) - y_1(t)$	См. особенности схемы 1
<p>21</p> 	Относительное угловое перемещение $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$	См. особенности схемы 9
<p>Примечания: 1. Восстанавливающей силой в схеме 11 служит архимедова сила; в схемах 12—18—вес; в схеме 19—сила кулонова трения между вращающимися дисками и положенной на них планкой. 2. В схемах 20 и 21 каждая из систем имеет по две степени свободы (обобщенные координаты y_1, y_2 и φ_1, φ_2), но упругие колебания этих систем определяются только изменением взаимного положения тел, образующих систему, т. е. разностями $y_2 - y_1$ и $\varphi_2 - \varphi_1$.</p>		

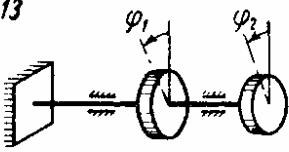
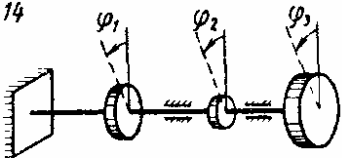
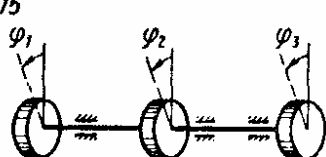
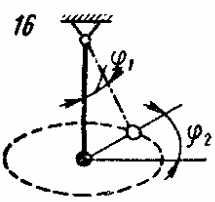
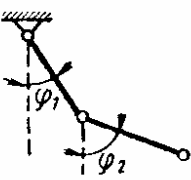
6. Системы с конечным числом степеней свободы

Схема	Число степеней свободы	Обобщенные координаты	Особенности системы
 <p>Горизонтальные колебания</p>	2	Линейные перемещения $y_1(t)$, $y_2(t)$	См. особенности схемы / табл. 5
 <p>Горизонтальные колебания</p>	3	Линейные перемещения $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$	
 <p>Горизонтальные колебания</p>	2	Относительные перемещения $y_2(t) - y_1(t)$, $y_3(t) - y_2(t)$	
 <p>Колебания диска</p>	2	Линейное перемещение $y(t)$, угловое перемещение $\varphi(t)$	В отличие от схемы 2 табл. 5 качение сопровождается скольжением
 <p>Плоские колебания поплавок</p>	3	Линейные перемещения $y_1(t)$, $y_2(t)$, угловое перемещение $\varphi(t)$	Плоские колебания; в отличие от схемы 1 табл. 5, кроме вертикальных перемещений, возможны малые повороты тела А вокруг центра тяжести
 <p>Плоские колебания тел B_1, B_2 и B_3 на поплавках A_1, A_2, A_3 и A_4</p>	4	Линейные перемещения $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$	Тела A_i перемещаются только поступательно по вертикали. Тела B_i — абсолютно жесткие (наплавной мост)

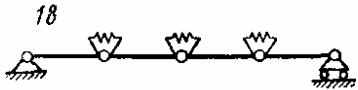
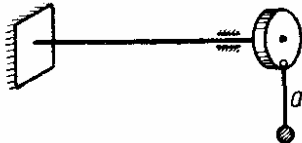
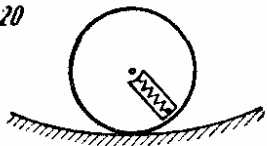
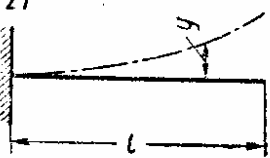
Продолжение табл. 6

Схема	Число степеней свободы	Обобщенные координаты	Особенности системы
<p>7</p>  <p>Изгибные колебания двухопорной балки</p>	3	<p>Линейные перемещения $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$</p>	См. особенности схемы 3 табл. 5
<p>8</p>  <p>Колебания диск—груз системы</p>	2	<p>Угловое перемещение диска $\varphi(t)$, относительное радиальное перемещение груза $y(t)$</p>	См. особенности схемы 9 табл. 5. Кроме того, пружина не обладает массой, масса груза сосредоточенная
<p>9</p>  <p>Изгибные колебания консоли</p>	2	<p>Линейное перемещение $y(t)$, угловое перемещение $\varphi(t)$</p>	См. особенности схемы 4 табл. 5
<p>10</p>  <p>Изгибные колебания ломаного стержня</p>	2	<p>Линейные перемещения $y_1(t)$ и $y_2(t)$</p>	См. особенности схемы 3 табл. 5
<p>11</p>  <p>Плоские колебания диска</p>	2	<p>Линейное перемещение $y(t)$, угловое перемещение $\varphi(t)$</p>	См. особенности схемы 5 табл. 5
<p>12</p>  <p>Плоские колебания диска</p>	3	<p>Линейные перемещения $y_1(t)$, $y_2(t)$, угловые перемещения $\varphi(t)$</p>	

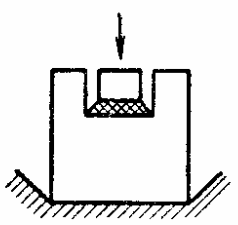

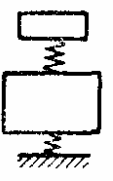
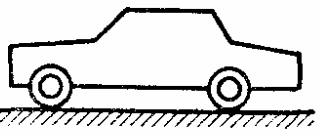
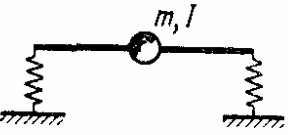

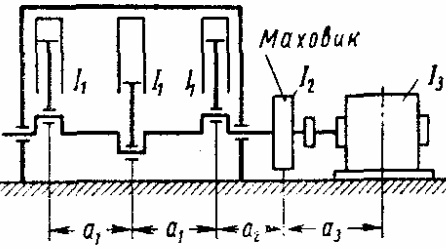
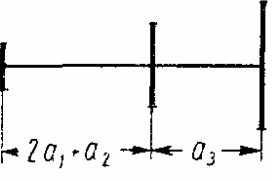
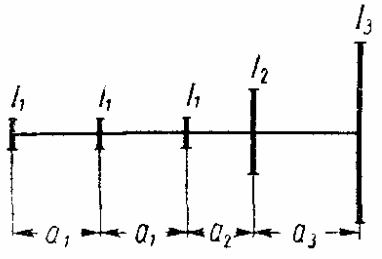
Продолжение табл. 6

Схема	Число степеней свободы	Обобщенные координаты	Особенности системы
<p>13</p>  <p>Крутильные колебания</p>	2	Угловые перемещения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$	См. особенности схемы 9 табл. 5
<p>14</p>  <p>Крутильные колебания</p>	3	Угловые перемещения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$	
<p>15</p>  <p>Крутильные колебания</p>	2	Относительные угловые перемещения $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$, $\varphi_3(t) - \varphi_2(t)$	
<p>16</p>  <p>Колебания сферического маятника</p>	2	Угловые перемещения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$	См. особенности схемы 12 табл. 5
<p>17</p>  <p>Плоские колебания двойного маятника</p>	2	Угловые перемещения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$	

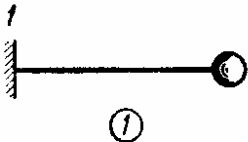
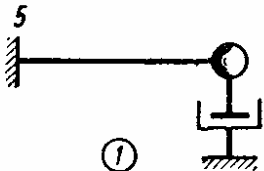
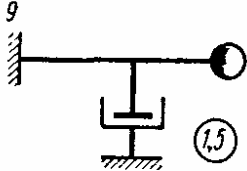
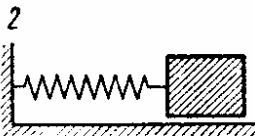
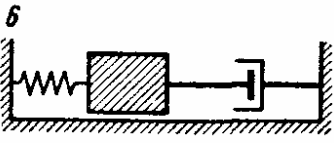
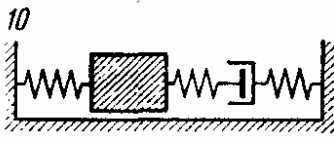
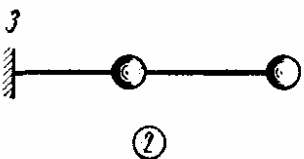
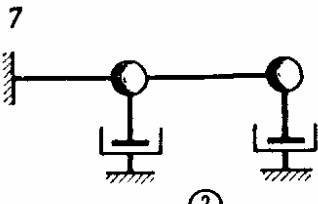
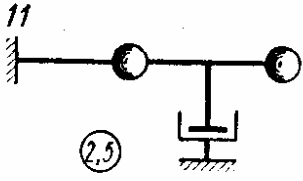
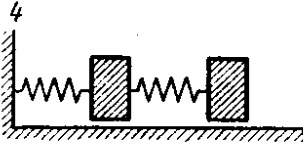
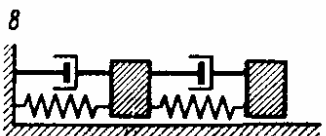

Продолжение табл. 6

Схема	Число степеней свободы	Обобщенные координаты	Особенности системы
<p>18</p>  <p>Плоские колебания</p>	3	Относительные углы поворота	Стержни абсолютно жесткие. Пружины массой не обладают
<p>19</p>  <p>Колебания системы диск—груз</p>	2	Угловые перемещения $\varphi_1(t)$ (диска) и $\varphi_2(t)$ (стержня a)	См. особенности схемы 9 табл. 5. Кроме того, стержень a абсолютно жесткий
<p>20</p>  <p>Колебания системы диск—груз</p>	2	Угол поворота φ , относительное смещение груза y вдоль радиуса	Качение не сопровождается скольжением
<p>21</p> 	—	Параметры a_1, a_2, \dots, a_n	<p>Форма изогнутой оси балки задана с точностью до нескольких параметров и удовлетворяет условиям закрепления; например,</p> $y = \sum_{i=1}^n a_i \left(1 - \cos \frac{i\pi x}{l} \right)$

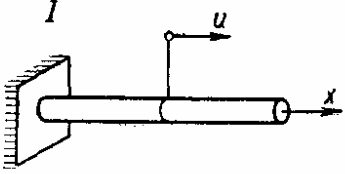
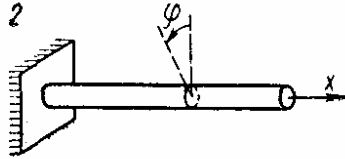
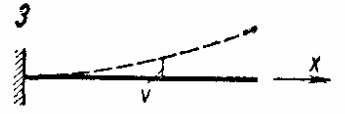
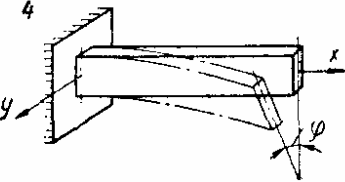
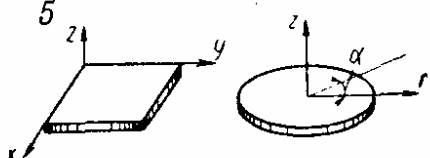
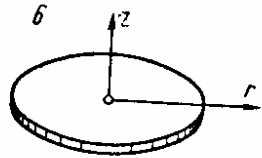
7. Динамические системы с несколькими степенями свободы

Заданная механическая система	Динамическая расчетная схема	Число степеней свободы
 Ковочный молот (продольные колебания)	 Простейшая	1
	 Уточненная	2
 Автомобиль (плоские колебания)	 Простейшая	2
	 Уточненная	4
 Двигатель-генератор	 Упрощенная	2
	 Уточненная	4

8 Число степеней свободы при наличии элементов трения

Исходная система	Элемент трения не изменяет число степеней свободы	Элемент трения изменяет число степеней свободы
 <p>1</p>	 <p>5</p>	 <p>9</p>
 <p>2</p>	 <p>6</p>	 <p>10</p>
 <p>3</p>	 <p>7</p>	 <p>11</p>
 <p>4</p>	 <p>8</p>	 <p>12</p>

9. Примеры непрерывно деформируемых систем с распределенной массой

Схема	Функции, определяющие конфигурацию системы
<p>1</p>  <p>Продольные колебания</p>	<p>Продольные перемещения $u(x, t)$</p>
<p>2</p>  <p>Крутильные колебания</p>	<p>Углы закручивания $\varphi(x, t)$</p>
<p>3</p>  <p>Изгибные колебания</p>	<p>Поперечные перемещения $v(x, t)$</p>
<p>4</p>  <p>Изгиб и кручение полосы</p>	<p>Прогибы $v(x, t)$. Углы закручивания $\varphi(x, t)$</p>
<p>5</p>  <p>Общий случай изгиба пластинки</p>	<p>Прогибы $w = w(r, \alpha, t)$. Прогибы $w = w(x, y, t)$</p>
<p>6</p>  <p>Осесимметричный изгиб пластинки</p>	<p>Прогибы $w = w(r, t)$</p>

КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Свободные колебания

Свободными называют колебания, происходящие после некоторого начального нарушения состояния равновесия механической системы, которая затем остается предоставленной самой себе и движется под действием восстанавливающих сил и, возможно, сил трения. В системах с одной степенью свободы это нарушение состояния равновесия характеризуется начальным смещением y_0 и начальной скоростью v_0 .

Системы без трения. Независимо от конструкции системы дифференциальное уравнение движения приводится к виду

$$m\ddot{y} + cy = 0 \text{ или } \ddot{y} + p^2 y = 0, \quad (4)$$

в котором $y = y(t)$ — обобщенная координата; m — инерционный коэффициент (обобщенная масса); c — коэффициент жесткости, представляющий собой статическую силу, способную вызвать перемещение, равное единице; $p^2 = \frac{c}{m}$.

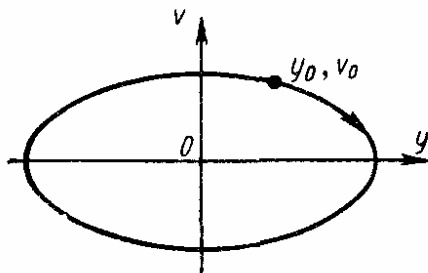


Рис. 4

Решение дифференциального уравнения (4):

$$y = a \sin(pt + \varphi) \quad (5)$$

описывает гармонические колебания с амплитудой a и круговой частотой p . Закон движения показан на рис. 1, a , а фазовая диаграмма — на рис. 4.

Амплитуду колебаний a и начальную фазу φ определяют по формулам

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{p^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{p^2 y_0}{v_0}.$$

Соответственно решение (5) может быть записано в виде

$$y = y_0 \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt.$$

Круговая частота колебаний определяется инерционными и массовыми свойствами системы

$$p = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (6)$$

и называется *собственной частотой колебаний*. Для одномассовых систем (подобных схемам 1, 3, 4 табл. 5) в формуле (6) m — масса груза; c — коэффициент жесткости упругой связи. Для систем типа 3, 4 табл. 5 вместо формулы (6) можно пользоваться формулой

$$p = \sqrt{\frac{g}{f_{cm}}}, \quad (7)$$

где f_{cm} — статическое смещение груза под действием силы тяжести.

Для систем, совершающих угловые колебания (подобных схемам 5 и 9 табл. 5), инерционным коэффициентом служит момент инерции I груза относительно оси вращения; в этом случае формулу (6) записывают в виде

$$\rho = \sqrt{\frac{c}{I}}, \quad (8)$$

причем коэффициент жесткости c вычисляют как момент статически приложенной пары, способной вызвать угол поворота, равный единице.

Собственные частоты колебаний систем с одной степенью свободы приведены в табл. 10.

Энергетический способ определения собственной частоты. Упругие механические системы без трения обладают свойством *консервативности*: полная энергия такой системы остается постоянной в течение всего процесса колебаний, т. е.

$$\frac{d}{dt} (П + T) = 0, \quad (9)$$

где $П$ — потенциальная энергия системы; T — кинетическая энергия системы. Из соотношения (9) следует, что максимальная кинетическая энергия равна максимальной потенциальной энергии

$$П_{\max} = T_{\max} \quad (10)$$

(потенциальную энергию в положении равновесия принимают равной нулю).

Равенство (10) позволяет найти собственную частоту механической системы без составления дифференциального уравнения движения. Для этого нужно:

- 1) выразить максимальную потенциальную энергию $П_{\max}$ через амплитуду a обобщенной координаты;
- 2) выразить максимальную кинетическую энергию T_{\max} через амплитуду \dot{a} обобщенной скорости;
- 3) подставить выражения $П_{\max}$ и T_{\max} в равенство (10) и найти собственную частоту.

Пример 1. Определить собственную частоту плоских малых колебаний цилиндра радиуса r (рис. 5), находящегося на цилиндрической поверхности радиуса R (движение без проскальзывания).

Пусть v — скорость центра тяжести цилиндра, тогда угловая скорость его вращения равна $\frac{v}{r}$ и кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{mr^2}{2} \left(\frac{v}{r} \right)^2 = \frac{3mv^2}{4};$$

здесь m — масса цилиндра; $\frac{mr^2}{2}$ — его момент инерции относительно оси. Обозначим через φ полярную координату центра тяжести цилиндра при качении, а через a — амплитуду этого угла; тогда $v = \dot{\varphi} (R - r)$; $v_{\max} = \dot{a} (R - r)$.

Следовательно, максимальная кинетическая энергия составляет

$$T_{\max} = \frac{3mv_{\max}^2}{4} = \frac{3}{4} ma^2 \dot{\varphi}^2 (R - r)^2. \quad (11)$$

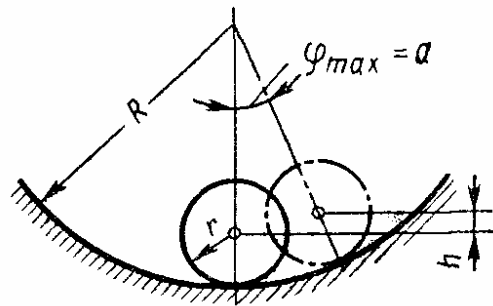


Рис. 5

10. Собственные частоты колебаний систем с одной степенью свободы

Номер схемы в табл. 5	Собственная частота p	Обозначения
1	$\sqrt{\frac{c}{m}}$	$c = \frac{Gd^4}{8nD^3};$ G — модуль сдвига; n — число витков пружины; d — диаметр сечения витка; D — средний диаметр пружины
2	$\sqrt{\frac{c}{m \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)}}$	ρ — радиус инерции катка; c — коэффициент жесткости (см. формулу к схеме 1)
3	$\frac{1}{ab} \sqrt{\frac{3EJl}{m}}$	EJ — изгибная жесткость поперечного сечения балок; a — абсцисса груза; l — расстояние между опорами $b = l - a$
3, но левый конец жестко закреплен	$\frac{2l}{ab} \sqrt{\frac{3EJl}{ma(3a + 4b)}}$	
3, но оба кон- ца жестко закреплены	$\frac{l}{ab} \sqrt{\frac{3EJl}{mab}}$	
4	$\frac{1}{l} \sqrt{\frac{6EJ}{ml}}$	EJ — изгибная жесткость сечения одной из полос; l — свободная длина
9	$\sqrt{\frac{GJ_p}{Il}}$	GJ_p — крутильная жесткость поперечного сечения вала; l — длина вала; I — момент инерции массы диска относительно оси системы
11	$\sqrt{\frac{\rho S}{m}}$	ρ — плотность жидкости; S — площадь сечения поплавка по горизонтали
12	$\sqrt{\frac{g}{l}}$ (при малых отклонениях)	l — длина стержня; g — ускорение силы тяжести

Продолжение табл. 10

Номер схемы в табл. 5	Собственная частота p	Обозначения
13	$\sqrt{\frac{ga}{\rho^2}}$ (при малых отклонениях)	a — расстояние от оси вращения до центра тяжести; ρ — радиус инерции относительно оси вращения
14	$\sqrt{\frac{cg}{\rho^2 + (r - c)^2}}$ (при малых отклонениях)	ρ — радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести
15	$\sqrt{\frac{Qr^2}{\left(1 + \frac{Qr^2}{g}\right)(R - r)}}$ (при малых отклонениях)	Q — вес; I — момент инерции массы относительно центра тяжести
16	$\sqrt{\frac{g}{l}}$ (при малых отклонениях)	l — длина стержня; g — ускорение силы тяжести
17	$\sqrt{\frac{3g}{l}}$ (при малых отклонениях)	l — длина стержня
18	$\sqrt{\frac{g}{d_1 - d_2}}$ (при малых отклонениях)	d_1 — диаметр отверстий; d_2 — диаметр сечения роликов
20	$\sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}}$	m_1, m_2 — массы грузов; c — жесткость упругой связи
21	$\sqrt{\frac{c(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$	I_1, I_2 — моменты инерции массы дисков; $c = \frac{GJ_p}{l}$ — жесткость вала на кручение

Потенциальная энергия определяется высотой h подъема центра тяжести цилиндра $h = (R - r)(1 - \cos \alpha)$; при малых углах можно положить $h \approx (R - r) \frac{\alpha^2}{2}$. Отсюда

$$P_{\max} = \frac{mga^2}{2} (R - r). \quad (12)$$

Приравнявая выражения (11) и (12), находим собственную частоту

$$p = \sqrt{\frac{2g}{3(R - r)}} \quad (13)$$

Соотношением (10) часто пользуются для приближенного определения низших собственных частот систем с распределенными параметрами в тех случаях, когда можно хотя бы приближенно предвидеть форму (конфигурацию) системы в процессе колебаний (способ Рэлея).

Согласно способу Рэлея задаются формой системы при ее колебаниях. Так, в случаях продольных, крутильных или изгибных колебаний (схемы 1—3 табл. 9) принимают «подходящие» амплитудные функции

11. Формулы для вычисления собственной частоты, полученные по способу Рэлея

Тип колебаний	Граничные условия, накладываемые на аппроксимирующие функции	Квадрат собственной частоты
Продольные (см. схему 1 табл. 9)	В закрепленных сечениях $u = 0$	$\frac{\int_0^l EF (u')^2 dx}{\int_0^l mu^2 dx + \sum m_i u_i^2}$
Крутильные (см. схему 2 табл. 9)	В закрепленных сечениях $\varphi = 0$	$\frac{\int_0^l GJ_p (\varphi')^2 dx}{\int_0^l I\varphi^2 dx + \sum I_i \varphi_i^2}$
Изгибные (см. схему 3 табл. 9)	В шарнирно опертых сечениях $v = 0$; $v'' = 0$ в закрепленных сечениях $v = 0$; $v' = 0$	$\frac{\int_0^l EJ (v'')^2 dx}{\int_0^l mv^2 dx + \sum m_i v_i^2}$
Обозначения: EF , EJ_p , EJ — жесткости при растяжении, кручении и изгибе; m , I — интенсивности массы и погонного момента инерции относительно оси системы; m_i , I_i — сосредоточенные массы и моменты инерции относительно оси системы.		

$u(x)$, $\varphi(x)$, $y(x)$, т. е. функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям конкретной задачи; в двухразмерных задачах (схемы 4—6 табл. 9) задаются подходящими функциями обеих пространственных координат. Масштаб принимаемых форм роли не играет и может быть любым, т. е. перемещения, соответствующие любой форме, могут быть увеличены или уменьшены в произвольное число раз; это не влияет на окончательное значение частоты. Полученные по способу Рэлея формулы для собственных частот приведены в табл. 11.

Получаемые по формулам табл. 11 значения собственных частот не ниже истинных значений; если функции $u(x)$, $\varphi(x)$, $v(x)$ соответствуют точным решениям, то и формулы дают точные результаты. В случае изгибных колебаний иногда в качестве функции $y(x)$ принимают кривую статического изгиба от действия заданной нагрузки, тогда формула для квадрата собственной частоты принимает вид

$$p^2 = g \frac{\int_0^l m v dx + \sum m_i v_i}{\int_0^l m v^2 dx + \sum m_i v_i^2} \quad (14)$$

и всегда дает завышенные значения p^2 .

Вариантом использования основного энергетического соотношения (10) является способ приведения масс. Согласно этому способу заданную распределенную массу $m(x)$, а также, возможно, имеющиеся сосредоточенные массы m_i приводят к одной точке системы и заменяют одной сосредоточенной (приведенной) массой, определяемой по формулам:

в случае продольных колебаний

$$m_0 = \frac{\int_0^l m u^2 dx + \sum m_i u_i^2}{u_0^2}; \quad (15)$$

в случае изгибных колебаний

$$m_0 = \frac{\int_0^l m v^2 dx + \sum m_i v_i^2}{v_0^2}. \quad (16)$$

В формулах (15)—(16) функции $u(x)$ и $v(x)$ — перемещения (соответственно продольное и поперечное), вызываемые сосредоточенной силой, статически действующей в точке приведения массы; u_0 и v_0 — перемещения этой точки. Соответственно, в случае крутильных колебаний приведенный момент инерции составляет

$$I_0 = \frac{\int_0^l I \varphi^2 dx + \sum I_i \varphi_i^2}{\varphi_0^2}. \quad (17)$$

После вычисления значения m_0 и I_0 собственная частота приведенной одномассовой системы определяется формулой (8) (результаты всегда получаются завышенными).

Пример 2. Определить собственную частоту изгибных колебаний консольной балки постоянного сечения (см. схему 10 табл. 5). Полагая

$$v = \frac{ax^2}{2l^2} \left(3 - \frac{x}{l} \right),$$

по табл. 11 находим

$$p = \sqrt{\frac{\int_0^l EJ (v'')^2 dx}{\int_0^l mv^2 dx}} = \frac{3,526}{l} \sqrt{\frac{EI}{ml}}.$$

Пример 3. Определить приведенную массу стержня постоянного сечения, совершающего продольные колебания (см. схему 1 табл. 9). Принимая

$$u = a \frac{x}{l}$$

и пользуясь табл. 11, находим

$$p = \sqrt{\frac{\int_0^l EF (u')^2 dx}{\int_0^l mu^2 dx}} = 1,732 \sqrt{\frac{EF}{ml}}.$$

Несколько большую точность дает формула Граммеля; для случая изгибных колебаний она имеет вид

$$p^2 = \frac{\int_0^l mv^2 dx}{\int_0^l \frac{\overline{M}_u^2}{EI} dx}, \quad (18)$$

здесь $\overline{M}_u = \overline{M}_u(x)$ — изгибающий момент, вызываемый нагрузкой mv .

Заниженные значения частоты дает приближенная формула Донкерлея

$$p^2 = \frac{1}{\int_0^l \frac{m(x) dx}{c(x)}}, \quad (19)$$

в которой $c(x)$ — изгибная жесткость, соответствующая приложению сосредоточенной силы в сечении с абсциссой x .

Системы с вязким сопротивлением. Дифференциальное уравнение движения приводится к виду

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + cy = 0 \text{ или } \ddot{y} + 2n\dot{y} + p^2y = 0, \quad (20)$$

где $n = \frac{k}{2m}$ — коэффициент, зависящий от вязких свойств системы. Обычно n значительно меньше p (кроме случаев, когда система содержит специальные демпферы).

Решение уравнения (20) при $n < p$

$$y = ae^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2}t + \varphi) \quad (21)$$

представляет собой *затухающие колебания* (закон движения показан на рис. 6, а; фазовая траектория — на рис. 6, б).

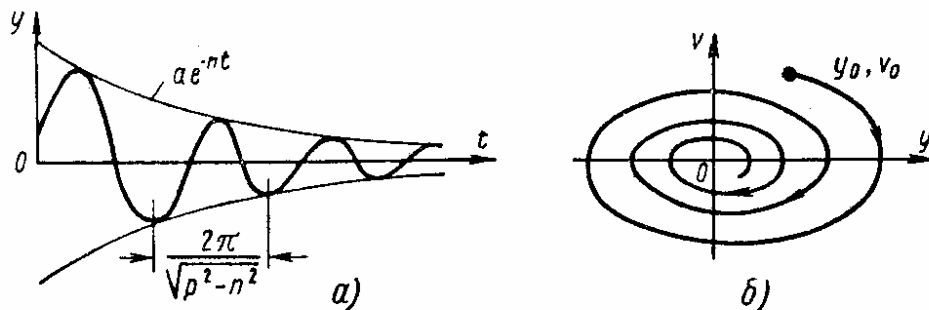


Рис. 6

Амплитуду колебаний a и начальную фазу φ определяют из начальных условий

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + ny_0)^2}{p^2 - n^2}}; \quad (22)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y_0 \sqrt{p^2 - n^2}}{v_0 + ny_0}. \quad (23)$$

Круговая частота колебаний составляет $\sqrt{p^2 - n^2}$ и в большинстве случаев весьма близка к собственной частоте p недемпфированной системы. Произведение ae^{-nt} представляет верхнюю *огibaющую* кривой затухающих колебаний. Отношение любых двух последовательных амплитуд остается неизменным в течение всего процесса:

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{ae^{-nt_i}}{ae^{-n(t_i + T)}} = e^{nT}, \quad (24)$$

где T — период колебаний*,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}} \approx \frac{2\pi}{p}. \quad (25)$$

* В данном случае термин применен в условном смысле, поскольку процесс вообще не является периодическим.

Величина

$$\delta = nT = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} \quad (26)$$

характеризует темп затухания и называется *логарифмическим декрементом колебаний* (или, просто, *логарифмическим декрементом*).

При не слишком быстром процессе затухания, когда уменьшение амплитуды Δa за цикл значительно меньше самой амплитуды a ,

$$\delta = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} = \ln \frac{a_i}{a_i - \Delta a_i} = \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta a_i}{a_i}} \right) \approx \frac{\Delta a_i}{a_i}, \quad (27)$$

т. е. логарифмический декремент равен отношению уменьшения амплитуды за один цикл к значению амплитуды этого цикла. В момент вре-

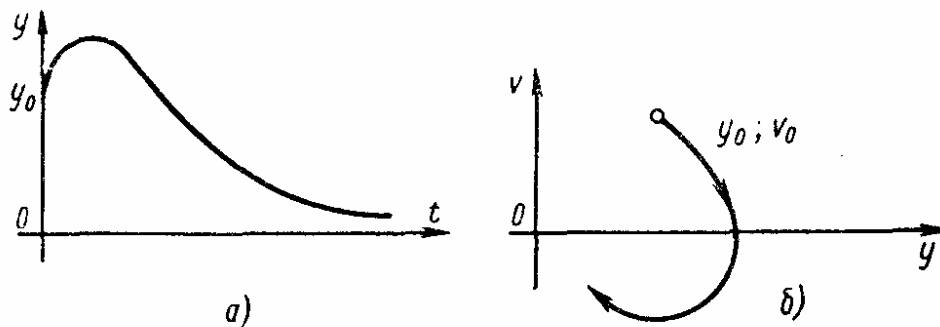


Рис. 7

мени, когда перемещение системы достигает максимума, ее полная энергия равна потенциальной энергии

$$P_{\max} = \frac{ca_i^2}{2}.$$

Потеря энергии за один цикл

$$\Delta P = \frac{ca_i}{2} - \frac{ca_{i+1}^2}{2} = \frac{c}{2} (a_i + a_{i+1}) (a_i - a_{i+1}) \approx ca_i \Delta a_i. \quad (28)$$

Относительное рассеяние энергии

$$\psi = \frac{\Delta P}{P_{\max}} = \frac{2 \Delta a_i}{a_i} \quad (29)$$

называют коэффициентом поглощения; сравнивая выражения (27) и (29), видим, что коэффициент поглощения вдвое больше логарифмического декремента колебаний.

При сильном демпфировании (когда $n > p$) решение уравнения (20) имеет вид

$$y = e^{-nt} \left(Ae^{\sqrt{n^2 - p^2}t} + Be^{-\sqrt{n^2 - p^2}t} \right), \quad (30)$$

и движение носит *апериодический характер*. Постоянные A и B определяются начальными условиями. Закон движения и фазовая траектория показаны соответственно на рис. 7, а и б.

При *критическом* демпфировании ($n = p$) решение дифференциального уравнения (20) имеет вид

$$y = (ny_0 + v_0 t) e^{-nt}. \quad (31)$$

Вынужденные колебания

Вынужденными называют колебания, происходящие под действием заданных внешних сил (*силовое возмущение*, рис. 8, а) или заданных движений отдельных точек системы (*кинематическое возмущение*, рис. 8, б).

Системы без трения. Дифференциальное уравнение движения при силовом возмущении приводится к виду

$$m\ddot{y} + cy = P(t) \text{ или } \ddot{y} + p^2 y = \frac{P(t)}{m}, \quad (32)$$

где m — инерционный коэффициент; c — коэффициент жесткости; $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — собственная частота; $P(t)$ — возмущающая сила.

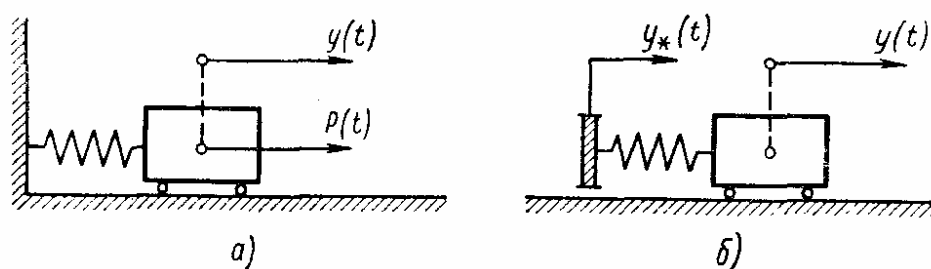


Рис. 8

При кинематическом возмущении, когда точка подвеса совершает заданное движение,

$$y_* = y_*(t), \quad (33)$$

дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{y} + cy = cy_*(t) \quad (34)$$

и после введения эквивалентной силы $P(t)$

$$cy_*(t) = P(t) \quad (35)$$

приводится к виду дифференциального уравнения (32).

При нулевых начальных условиях ($y_0 = 0$; $v_0 = 0$) общее решение дифференциального уравнения (32) имеет вид

$$y = \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau, \quad (36)$$

где τ — переменная интегрирования.

В частном случае гармонического возмущения, когда

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (37)$$

(P_0 — амплитуда возмущающей силы; $\omega \neq p$ ее частота *), движение системы описывается законом

$$y = \frac{y_{cm}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{p} \sin pt \right), \quad (38)$$

* Случай $\omega = p$ см. стр. 247.

где $y_{ст}$ — перемещение, вызываемое статически действующей силой P_0 ,

$$y_{ст} = \frac{P_0}{c}. \quad (39)$$

В случае, когда возмущающая сила задана законом

$$P = P_0 \cos \omega t, \quad (40)$$

движение описывается зависимостью

$$y = \frac{y_{ст}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} (\cos \omega t - \cos pt). \quad (41)$$

Выражения (38) и (41) относятся к случаю нулевых начальных условий. В действительности, из-за неучтенных при выводе неупругих сопротивлений вторые слагаемые в скобках в формулах (38) и (41)

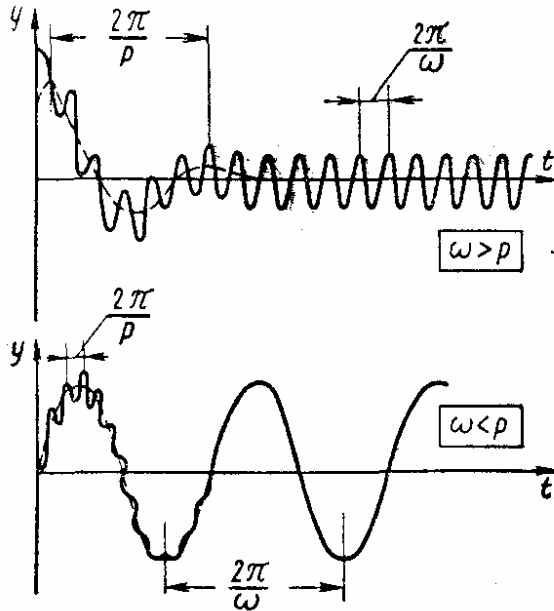


Рис. 9

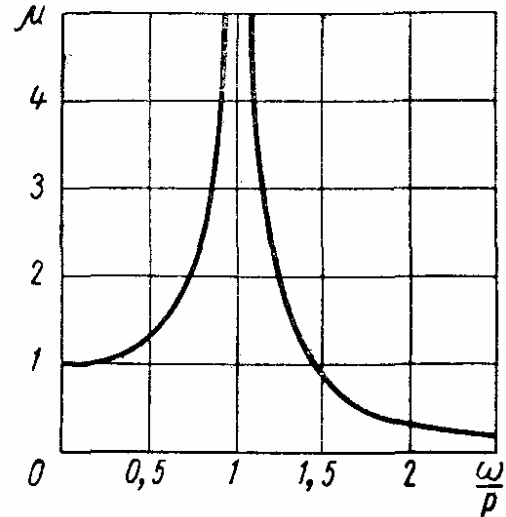


Рис. 10

с течением времени быстро исчезают (рис. 9). Поэтому амплитуда стационарной части решений (38) и (41) будет

$$a = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \right| y_{ст} = \mu y_{ст}, \quad (42)$$

причем

$$\mu = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \right| \quad (43)$$

называют коэффициентом динамичности (рис. 10).

Отношение амплитуды силы, передаваемой при колебаниях основанию через упругую связь, к амплитуде P_0 возмущающей силы называют коэффициентом передачи. В рассматриваемом случае он совпадает с коэффициентом динамичности (43).

При $\omega = p$ (резонанс) решение имеет вид

$$y = -\frac{y_{cm}}{2} \omega t \cos \omega t. \quad (44)$$

В этом случае происходит раскочка колебаний, причем амплитуда возрастает по линейному закону (рис. 11).

Если амплитуда возмущающей силы (37) пропорциональна квадрату ее частоты

$$P_0 = a\omega^2, \quad (45)$$

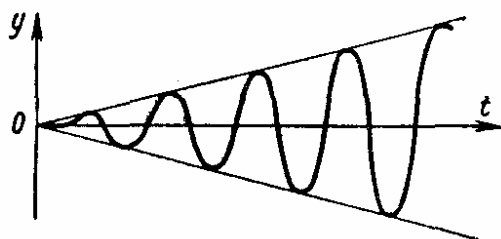


Рис. 11

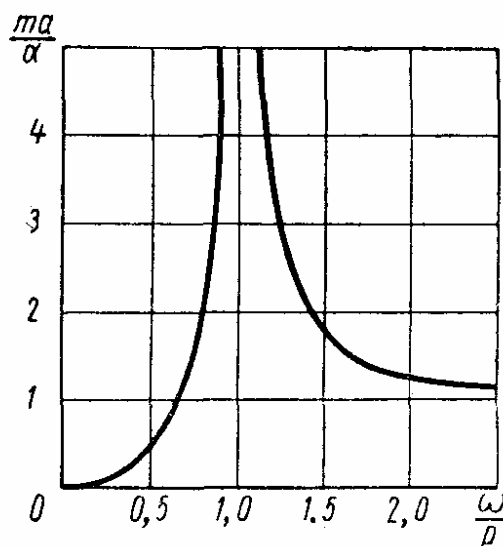


Рис. 12

то амплитуда колебаний (при $\omega \neq p$) составляет (рис. 12)

$$a = \frac{a}{m \left| \frac{p^2}{\omega^2} - 1 \right|}. \quad (46)$$

Если на систему в течение короткого времени t_* ($t_* < 0,5T$) действует постоянная сила P_0 — «прямоугольный импульс» (рис. 13), то

$$\left. \begin{aligned} P(t) &= 0 \text{ при } t \leq 0; \\ P(t) &= P_0 \text{ при } 0 < t < t_*; \\ P(t) &= 0 \text{ при } t \geq t_*; \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

наибольшее отклонение $\mu y_{cm} = \frac{\mu P_0}{c}$ достигается после исчезновения силы (при $t > t_*$), причем динамический коэффициент составляет

$$\mu = 2 \sin \frac{\pi t_*}{T}. \quad (48)$$

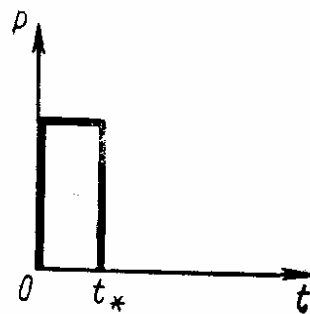


Рис. 13

Независимо от закона изменения возмущающей силы $P = P(t)$, если длительность t_* ее действия весьма мала по сравнению с периодом T свободных колебаний системы, то при $t > t_*$

$$y \approx \frac{S}{mp} \sin pt, \quad (49)$$

где S — импульс силы,

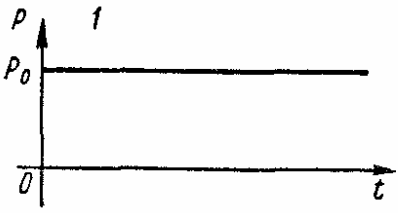
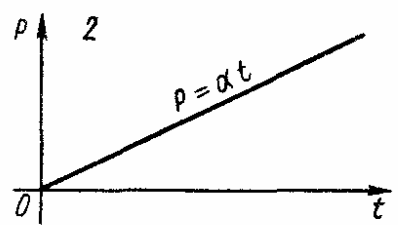
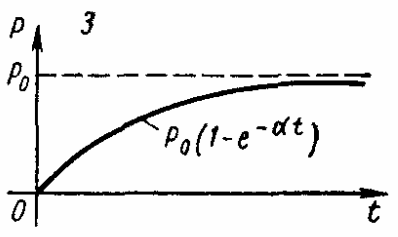
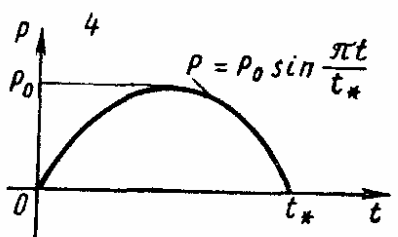
$$S = \int_0^{t_*} P(\tau) d\tau. \quad (50)$$

Амплитуда колебаний составляет

$$a = \frac{S}{mp}. \quad (51)$$

Другие случаи неперiodических вынужденных колебаний также могут быть исследованы с помощью выражения (36); некоторые результаты приведены в табл. 12.

12. Некоторые случаи неперiodических вынужденных колебаний

Возмущающая сила	Закон движения
 <p>Graph 1 shows a horizontal line at $p = p_0$ on a coordinate system with vertical axis p and horizontal axis t. The origin is marked O.</p>	$y = y_{cm} (1 - \cos pt);$ $y_{cm} = \frac{P_0}{c}$
 <p>Graph 2 shows a straight line starting from the origin O and increasing linearly with time t. The line is labeled $p = \alpha t$.</p>	$y = \frac{\alpha t}{c} + \frac{\alpha}{cp} \sin pt$
 <p>Graph 3 shows a curve starting from the origin O and asymptotically approaching a horizontal dashed line at $p = p_0$. The curve is labeled $p_0(1 - e^{-\alpha t})$.</p>	$y = y_{cm} \left[1 - \frac{e^{-\alpha t}}{1 + \beta^2} - \frac{\beta}{1 + \beta^2} \times \right.$ $\left. \times (\sin pt + \beta \cos pt) \right];$ $\beta = \frac{\alpha}{p}; \quad y_{cm} = \frac{P_0}{c}$
 <p>Graph 4 shows a half-sine wave starting at the origin O, reaching a maximum value p_0, and returning to zero at $t = t_*$. The curve is labeled $p = p_0 \sin \frac{\pi t}{t_*}$.</p>	$y = \frac{P_0}{c} \left[\frac{4t(t_* - t)}{t_*^2} + \right.$ $+ \frac{8}{p^2 t_*^2} (1 + \cos pt) -$ $\left. - \frac{4}{p^2 t_*^2} \sin pt \right] \text{ при } 0 < t < t_*$

Если действующая на систему сила представляет сумму двух гармонических составляющих

$$P = P_1 \sin (\omega_1 t + \alpha_1) + P_2 \sin (\omega_2 t + \alpha_2), \quad (52)$$

причем частота ω_2 незначительно отличается от частоты ω_1 , то движение представляет собой биения (см. рис. 2, в), происходящие с частотой

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (53)$$

Амплитуда колебаний меняется от минимального значения

$$a_{\min} = \left| \frac{P_1}{c \left| 1 - \frac{\omega_1^2}{p^2} \right|} - \frac{P_2}{c \left| 1 - \frac{\omega_2^2}{p^2} \right|} \right| \quad (54)$$

до максимального значения

$$a_{\max} = \frac{P_1}{c \left| 1 - \frac{\omega_1^2}{p^2} \right|} + \frac{P_2}{c \left| 1 - \frac{\omega_2^2}{p^2} \right|}. \quad (55)$$

Период биений, т. е. время, проходящее между моментами достижения последовательных максимумов амплитуды, будет

$$T_A = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}. \quad (56)$$

Действие произвольной периодической возмущающей силы (см. рис. 2, в)

$$P(t) = P(t + T) \quad (57)$$

(T — время изменения возмущающей силы) можно исследовать двумя способами.

Способ гармонического анализа. Функция (57) представляется рядом Фурье

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2k\pi t}{T}, \quad (58)$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье,

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Затем определяют стационарные режимы движения от каждого слагаемого суммы (58) и полученные результаты суммируют:

$$y(t) = \frac{1}{c} \left[a_0 + \frac{a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} + \frac{a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t}{1 - \left(\frac{2\omega}{p}\right)^2} + \dots \right]. \quad (60)$$

Резонанс наступает при $n\omega = p$, где n — любое целое число.

С п о с о б Д у ф ф и н г а. Вычисляют коэффициенты

$$c_0 = \int_0^T P(\tau) \cos p\tau d\tau; \quad s_0 = \int_0^T P(\tau) \sin p\tau d\tau, \quad (61)$$

с помощью которых решение записывают в виде

$$y(t) = \frac{1}{2mp} \left[\left(c_0 \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} + s_0 \right) \cos pt - \left(c_0 - s_0 \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \right) \sin pt + 2 \int_0^t P(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau \right]. \quad (62)$$

Решение (62) справедливо при $0 < t < T$ и повторяется во всех последующих периодах.

В табл. 13 приведены некоторые частные решения, полученные при помощи решения (62).

Системы с вязким трением. Дифференциальное уравнение движения при силовом возмущении можно привести к виду

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + cy = P(t) \quad \text{или} \quad \ddot{y} + 2n\dot{y} + p^2y = \frac{P(t)}{m}. \quad (63)$$

При кинематическом возмущении уравнение имеет тот же вид [см. соотношение (35)]. При нулевых начальных условиях ($y_0 = 0$; $v_0 = 0$) общее решение дифференциального уравнения (63) имеет вид

$$y = \frac{1}{mp_*} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin p_*(t-\tau) d\tau; \quad (64)$$

где

$$p_* = \sqrt{p^2 - n^2}. \quad (65)$$

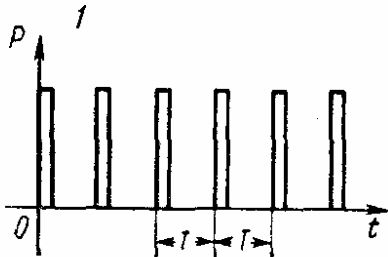
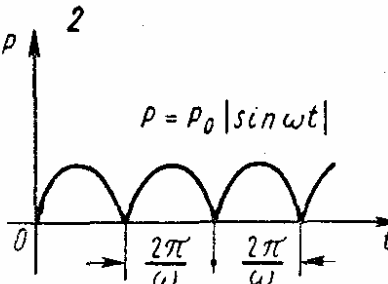
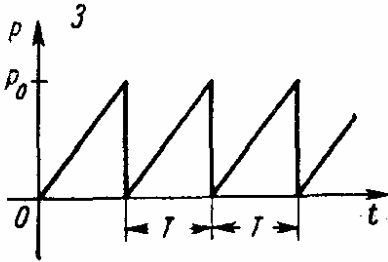
В частном случае гармонического возмущения (37) стационарная часть решения будет

$$y = a \sin(\omega t - \gamma), \quad (66)$$

где

$$a = \mu y_{ст},$$

13. Некоторые случаи действия периодической возмущающей силы

Закон изменения возмущающей силы	Закон колебаний системы
 <p>Мгновенные импульсы S</p>	$y = \frac{S}{2mp} \left(\sin pt + \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \cos pt \right)$
 <p>Выпрямленная синусоида</p>	$y = \frac{P_0}{c} \left[\frac{p\omega}{\omega^2 - p^2} \left(\sin pt + \operatorname{ctg} \frac{\pi p}{2\omega} \cos pt \right) - \frac{p^2 \sin \omega t}{\omega^2 - p^2} \right]$
 <p>Пилообразное изменение</p>	$y = \frac{P_0}{c} \left(\frac{2t}{T} + \cos pt - \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \sin pt \right)$

причем

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{p^4}}} \quad (67)$$

представляет собой коэффициент динамичности (рис. 14, а).

Сдвиг фаз

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2\omega n}{p^2 - \omega^2} \quad (68)$$

характеризует отставание фазы перемещения от фазы возмущающей силы.

При резонансе

$$\mu_{рез} = \frac{p}{2n}; \quad \gamma_{рез} = \frac{\pi}{2}. \quad (69)$$

Коэффициент передачи (отношение амплитуды силы, передаваемой основанию, к амплитуде возмущающей силы, рис. 14, б)

$$\mu_* = \mu \sqrt{1 + \frac{4\omega^2 n^2}{p^4}}. \quad (70)$$

Если $\frac{\omega}{p} > \sqrt{2}$, то коэффициент передачи возрастает с увеличением демпфирования.

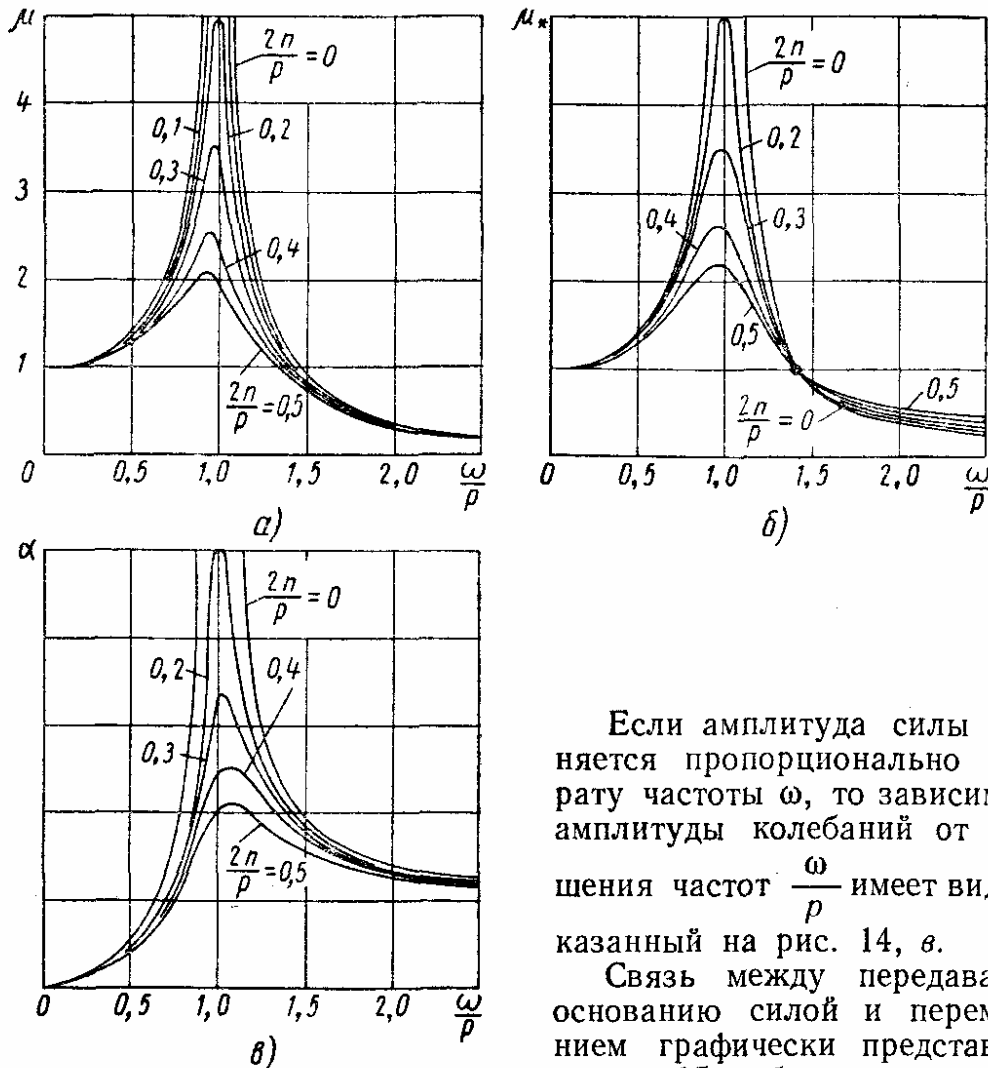


Рис. 14

Если амплитуда силы изменяется пропорционально квадрату частоты ω , то зависимость амплитуды колебаний от отношения частот $\frac{\omega}{p}$ имеет вид, показанный на рис. 14, в.

Связь между передаваемой основанию силой и перемещением графически представлена на рис. 15 и обнаруживает явление гистерезиса. Площадь петли

гистерезиса, равная работе, совершаемой возмущающей силой за один цикл колебаний, будет

$$\Psi = \pi k \omega a^2 = 2\pi m n \omega a^2. \quad (71)$$

Среди возмущающих сил непериодического характера также исследован случай силы, меняющейся по закону

$$P = P_0 \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad (72)$$

здесь P_0 — постоянная амплитуда силы; εt — мгновенное значение частоты; ε — скорость изменения частоты. Исследование этого случая приводит к следующим основным выводам:

1. Максимальная амплитуда колебаний будет не в момент совпадения частоты возмущающей силы с собственной частотой p механической системы, а несколько позже, т. е. максимум амплитуды смещается в область больших частот; при постепенном уменьшении частоты это смещение происходит в области меньших частот. На рис. 16 даны графики, определяющие отношение частоты $\bar{\omega}$, при которой достигается максимум амплитуды колебаний, к собственной частоте системы p . По оси абсцисс отложены значения безразмерного параметра $\frac{\varepsilon}{p^2} 10^3$, характеризующего темп возрастания изменения частоты возмущающей силы.

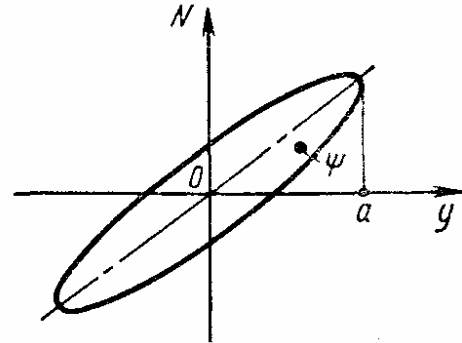


Рис. 15

Нижняя горизонтальная шкала определяет значения чисел циклов N возмущающей силы, после достижения которых частота возмущающей силы становится равной собственной частоте системы.

2. Максимальная амплитуда колебаний меньше, чем в случае установившихся колебаний при неизменной частоте возмущающей силы (т. е. в случае стационарного резонанса). Это различие тем больше, чем быстрее происходит увеличение частоты. Отсюда следует, что

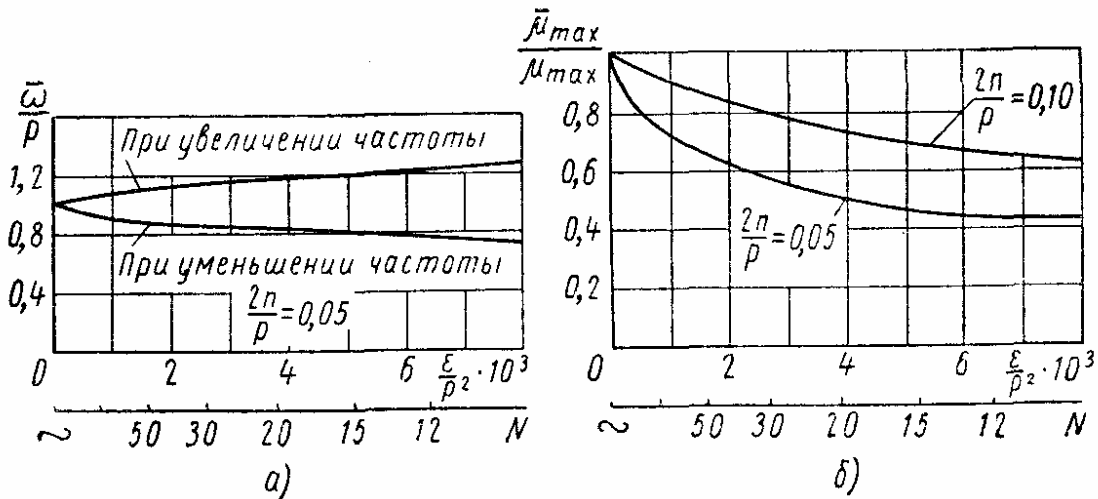


Рис. 16

путем быстрого разгона возбудителя колебаний резонансные амплитуды могут быть заметно уменьшены.

На рис. 16, б даны графики, определяющие отношение максимального динамического коэффициента μ_{\max} , который достигается при действии возмущающей силы (72), к максимальному динамическому коэффициенту μ_{\max} , соответствующему установившемуся резонансному режиму.

Действие произвольной периодической возмущающей силы (57) можно исследовать двумя способами.

Способ гармонического анализа. Функцию (57) представляют рядом Фурье (58), причем коэффициенты ряда определяют по формулам (59). После этого вместо формулы (60) получают

$$y(t) = \frac{1}{c} \left[a_0 + \frac{a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{p^4}}} + \right. \\ \left. + \frac{a^2 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t}{\sqrt{\left(1 - \frac{4\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{16\omega^2 n^2}{p^4}}} + \dots \right]. \quad (73)$$

Способ Дурффинга. Вычисляют коэффициенты

$$c_0 = \int_0^T P(\tau) e^{n\tau} \cos p_* \tau d\tau; \quad s_0 = \int_0^T P(\tau) e^{n\tau} \sin p_* \tau d\tau \quad (74)$$

и решение для $0 < t < T$ записывают в виде

$$y(t) = \frac{e^{-nt}}{mp_*} \left[e^{nT} \frac{c_0 \sin p_*(t+T) - s_0 \cos p_*(t+T)}{1 - 2e^{nT} \cos p_* T + e^{2nT}} + \right. \\ \left. + \frac{s_0 \cos p_* t - c_0 \sin p_* t}{1 - 2e^{nT} \cos p_* T + e^{2nT}} + \int_0^t P(\tau) e^{n\tau} \sin p_*(t-\tau) d\tau \right]. \quad (75)$$

При $n = 0$ это выражение приобретает вид выражения (62).

В частном случае действия периодических мгновенных импульсов (см. табл. 13, график 1) решение имеет вид

$$y = \frac{Se^{n(T-t)} [\sin p_*(T-t) + e^{nT} \cos p_* t]}{mp_*(1 - 2e^{nT} \cos p_* T + e^{2nT})}.$$

КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Нелинейность механической системы может быть обусловлена нелинейностями упругой характеристики или характеристики трения. В последнем случае различают *диссипативные* системы и *фрикционные автоколебательные* системы. В диссипативных системах трение является причиной рассеяния энергии, в автоколебательных системах благодаря трению происходит приток энергии в систему.

Системы с нелинейной упругой характеристикой

Примеры характеристик этих систем показаны в табл. 3 на схемах 3—11 и 17—20.

Свободные колебания. Дифференциальное уравнение свободных колебаний приводится к виду

$$m\ddot{y} + F(y) = 0, \quad (76)$$

где $F(y)$ — восстанавливающая сила. Движение системы носит периодический, но негармонический характер. Частоту свободных колебаний системы с симметричной упругой характеристикой определяют по формуле

$$p = \frac{\pi}{\left[V 2m \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{\int_y^a F(y) dy}} \right]}; \quad (77)$$

она, как правило, зависит от амплитуды колебаний (т. е. от начальных условий). Некоторые простые частные случаи приведены в табл. 14.

Вид связи частоты свободных колебаний с их амплитудой существенно зависит от вида характеристики восстанавливающей силы (см. табл. 15).

Вычисления по точной формуле (77) обычно весьма громоздки и поэтому можно пользоваться следующими приближенными формулами, относящимися к случаю *симметричной упругой характеристики*:

$$p^2 = \frac{5}{ma^5} \int_0^a F(y) y^3 dy \quad (78)$$

(по способу прямой линеаризации) или

$$p^2 = \frac{1}{\pi m a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (79)$$

(первое приближение по способу Бубнова-Галеркина и Крылова-Боголюбова).

Пример 4. Определить частоту свободных колебаний для системы со степенной упругой характеристикой (см. график 3 табл. 12). По формуле (78)

$$p^2 = \frac{5a}{ma^5} \int_0^a y^{n+3} dy = \frac{5a}{m(n+4)} a^{n-1},$$

т. е.

$$p = \sqrt{\frac{5}{n+4}} \sqrt{\frac{a}{m}} a^{\frac{n-1}{2}}. \quad (80)$$

По формуле (79)

$$p^2 = \frac{2aa^{n-1}}{\pi m} \int_0^\pi \sin^{n+1} \psi d\psi,$$

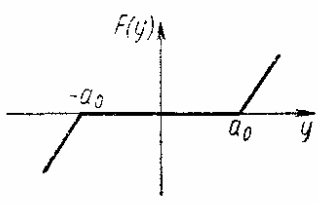
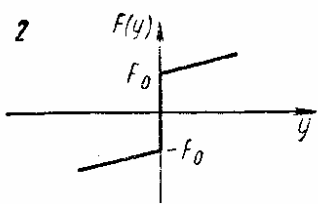
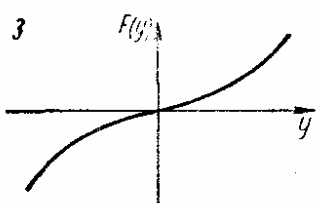
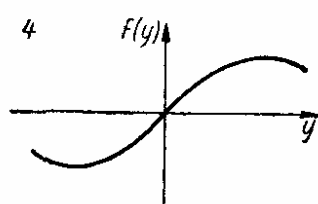
т. е.

$$p = \Phi_*(n) \sqrt{\frac{a}{m}} a^{\frac{n-1}{2}}, \quad (81)$$

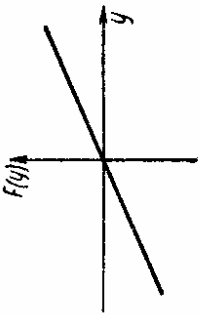
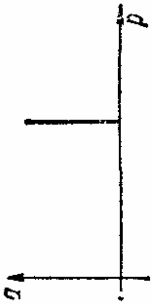
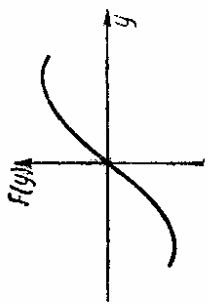
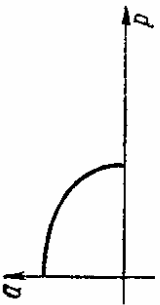
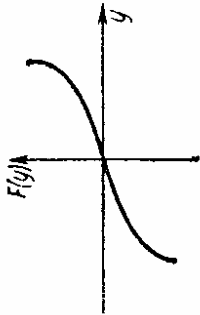

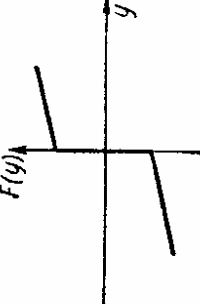
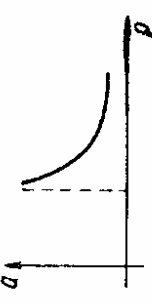
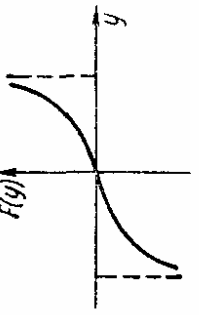

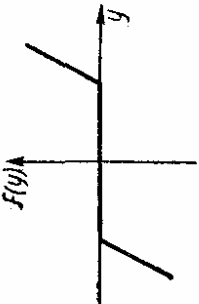

где

$$\Phi_*(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^{n+1} \psi d\psi}. \quad (82)$$

14. Некоторые системы с нелинейной упругой характеристикой

Характеристика восстанавливающей силы	Частота свободных колебаний
$F(y) = c(y + a_0)$ при $y < -a_0$ $F(y) = 0$ при $-a_0 \leq y \leq a_0$ $F(y) = c(y - a_0)$ при $y > a_0$ 1 	$p = \frac{\sqrt{\frac{c}{m}}}{1 + \frac{\pi(\alpha - 1)}{2}},$ где $\alpha = \frac{a}{a_0} > 1$
$F(y) = cy + F_0$ при $y > 0$ $F(y) = cy - F_0$ при $y < 0$ 2 	$p = \frac{\pi \sqrt{\frac{c}{m}}}{\pi - 2 \arcsin \alpha},$ где $\alpha = \frac{F_0}{ca + F_0} < 1$
$F(y) = \alpha y^n$ 3 	$p = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} a^{\frac{n-1}{2}} \psi(n);$ $\psi(n) = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{n+1}}}}$
$F(y) = \alpha \sin y$ 4 	$p = \frac{\pi}{2K\left(\frac{a}{2}\right)} \sqrt{\frac{\alpha}{m}},$ где $K\left(\frac{a}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \varphi}}$ (полный эллиптический интеграл первого рода)

15. Вид связи между частотой и амплитудой свободных колебаний в зависимости от характеристики восстанавливающей силы

Вид характеристики восстанавливающей силы	График связи амплитуды свободных колебаний с их частотой	Вид характеристики восстанавливающей силы	График связи амплитуды свободных колебаний с их частотой
Линейная 		Мягкая 	
Жесткая 		С натягом 	
Жесткая с ограничителями 		С зазором 	

Результаты вычислений коэффициентов при $\sqrt{\frac{a}{m}} a^{\frac{n-1}{2}}$ для различных значений n даны в табл. 16. Приведенные в табл. 16 точные значения $\psi(n)$ вычислены по формуле для случая 3 в табл. 14.

16. Результаты вычислений коэффициентов при $\sqrt{\frac{a}{m}} a^{\frac{n-1}{2}}$

n	$\psi(n)$	$\sqrt{\frac{5}{n+4}}$	$\Phi_*(n)$
1	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,9155	0,9129	0,9213
3	0,8472	0,8452	0,8660
4	0,7926	0,7906	0,8241
5	0,7467	0,7454	0,7906
6	0,7080	0,7071	0,7629
7	0,6747	0,6742	0,7395

В случае несимметричной упругой характеристики следует учитывать, что отклонения системы в обе стороны от положения равновесия будут различными. Модули указанных отклонений a_+ и a_- (рис. 17) связаны между собой соотношением

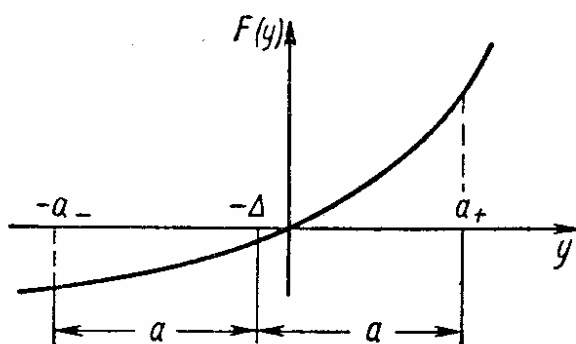


Рис. 17

$$\int_{-a_-}^{a_+} F(y) dy = 0, \quad (83)$$

из которого можно выразить одно из отклонений через другое. Среднее положение системы (центр колебаний) смещено влево от начала координат на отрезок

$$\Delta = \frac{1}{2} (a_- - a_+) \quad (84)$$

и полуразмах колебаний

$$a = \frac{1}{2} (a_- + a_+). \quad (85)$$

Частоту свободных колебаний определяют по приближенной формуле

$$p^2 = \frac{5}{2ma^5} \int_{-a}^a F(y - \Delta) y^3 dy \quad (86)$$

(по способу прямой линеаризации), или

$$p^2 = \frac{1}{\pi m a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi - \Delta) \sin \psi d\psi \quad (87)$$

(первое приближение по способу Бубнова-Галеркина или Крылова-Богомолова).

Вынужденные колебания систем без трения. Дифференциальное уравнение колебаний приводится к виду

$$m\ddot{y} + F(y) = P(t), \quad (88)$$

где $P(t)$ — возмущающая сила [или приведенное кинематическое возмущение — см. формулу (35)]. Точное решение этого уравнения затруднительно. В случае гармонического возмущения

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (89)$$

при симметричной упругой характеристике в первом приближении принимают закон движения

$$y = a \sin \omega t. \quad (90)$$

Для определения амплитуды a можно воспользоваться одним из трех способов.

1. Если потребовать, чтобы решение (90) удовлетворяло дифференциальному уравнению (88) только в положении равновесия и в крайних

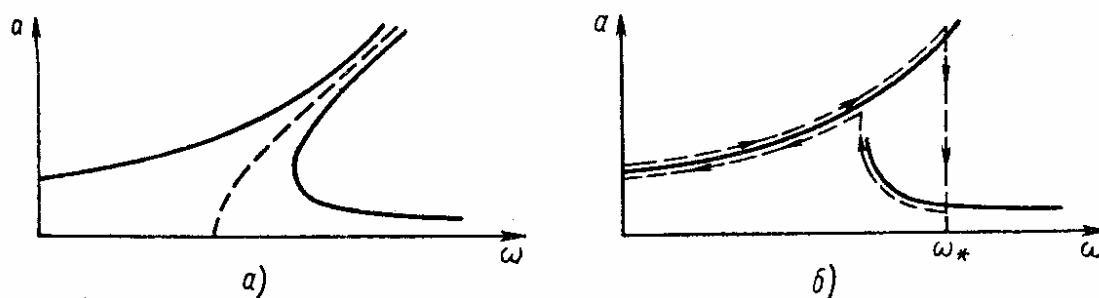


Рис. 18

отклоненных положениях системы, то для определения a получим нелинейное алгебраическое уравнение

$$F(a) - m a \omega^2 = P_0. \quad (91)$$

2. По способу прямой линеаризации амплитуду a определяют из нелинейного алгебраического уравнения

$$a = \frac{P_0}{m [p^2(a) - \omega^2]}, \quad (92)$$

где $p^2(a)$ — функция амплитуды по формуле (78).

3. По способу Бубнова-Галеркина (а также по способу Крылова-Боголюбова) амплитуду a находят из уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi - m a \omega^2 = P_0. \quad (93)$$

Типичная зависимость $a = a(\omega)$ (амплитудно-частотная характеристика) для случая жесткой упругой характеристики при некотором фиксированном значении амплитуды возмущающей силы показана на рис. 18, а. Здесь же штриховой линией изображена скелетная кривая —

зависимость $a(p)$ для задачи о свободных колебаниях (т. е. при $P_0 = 0$); с уменьшением амплитуды P_0 возмущающей силы обе ветви амплитудно-частотной характеристики приближаются к скелетной кривой.

При достаточно больших значениях частоты возмущения ω решение неоднозначно: данной частоте ω соответствует три значения амплитуды a колебаний. Устойчивыми являются колебания с наибольшей или наименьшей амплитудой, колебания с промежуточным значением амплитуды неустойчивы и в действительности не реализуются.

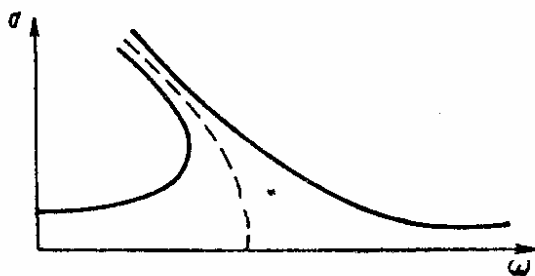


Рис. 19

На рис. 18, б сплошными линиями показаны только устойчивые ветви амплитудно-частотной характеристики. Штриховыми линиями показано изменение амплитуды колебаний при постепенном увеличении частоты возмущения от нуля до значения $\omega = \omega_*$ и последующем уменьшении частоты возмущения до нуля. Одним из отличительных

свойств вынужденных колебаний механических систем являются резкие изменения амплитуды («срывы») при малых изменениях частоты возмущения, как это видно из рис. 18, б.

Амплитудно-частотная характеристика, типичная для систем с мягкой нелинейностью, изображена на рис. 19.

Уравнениями (91)—(93) можно пользоваться и в случае, когда амплитуда возмущающей силы пропорциональна квадрату частоты:

$$P_0 = a\omega^2. \quad (94)$$

В этом случае амплитудно-частотная характеристика $a(\omega)$ имеет более сложный вид, чем показано на рис. 19 или 20.

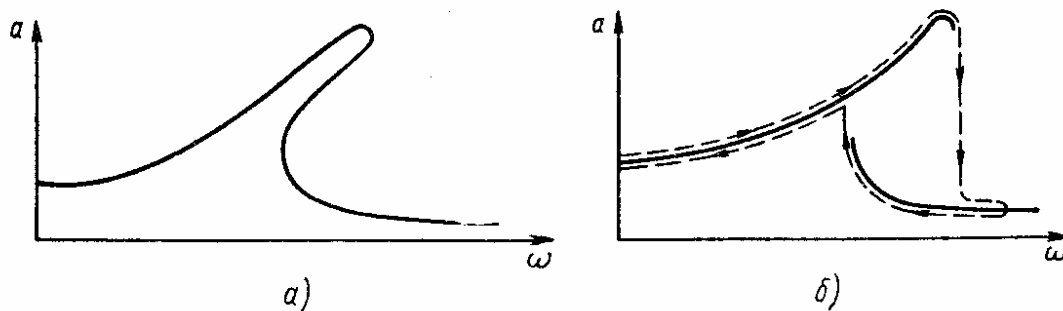


Рис. 20

При действии возмущающей силы (89) на нелинейную систему колебания с частотой возмущения ω сопровождаются *ультрагармоническими* колебаниями, имеющими более высокие частоты $2\omega, 3\omega, \dots$, а также *субгармоническими* колебаниями с частотами $\frac{1}{2}\omega, \frac{1}{3}\omega, \dots$.

Для определения амплитуд ультра- и субгармонических колебаний необходимо отказаться от описания колебаний законом (90) и строить высшие приближения. В частности, это можно сделать при помощи метода Бубнова-Галеркина, приняв выражение установившегося процесса вынужденных колебаний в виде суммы

$$y = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots + a_n y_n(t), \quad (95)$$

в которой $y_1(t)$, $y_2(t)$, — должным образом выбранные функции времени; a_1 , a_2 , ... — параметры, определяемые из системы уравнений

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [m\ddot{y} + F(y) - P_0 \sin \omega t] y_i(t) dt = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n). \quad (96)$$

При сохранении одного члена суммы (95) получается соотношение (93).

Амплитуды ультрагармонических колебаний в случаях слабой нелинейности малы по сравнению с амплитудой основной гармоники. Амплитуды субгармонических колебаний иногда могут быть весьма значительными, но эти колебания могут быть полностью подавлены демпфирующим действием достаточно больших сил трения.

В случае действия возмущающей силы, состоящей из двух гармоник

$$P = P_1 \sin \omega_1 t + P_2 \sin \omega_2 t,$$

на систему с нелинейной характеристикой

$$F(y) = cy + \gamma y^3$$

приближенное решение имеет вид

$$y = a_1 \sin n\omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t.$$

Амплитуды a_1 и a_2 определяют из нелинейной системы уравнений:

$$a_1 = \frac{P_1}{(p^2 - \omega_1^2) + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{c} (a_1^2 + 2a_2^2)};$$

$$a_2 = \frac{P_2}{(p^2 - \omega_2^2) + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{c} (a_2^2 + 2a_1^2)}.$$

Влияние вязкого сопротивления. Для решения дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы с нелинейной упругой характеристикой и вязким сопротивлением

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + F(y) = P_0 \sin \omega t \quad (97)$$

(случай действия гармонического возмущения) в первом приближении принимают, что движение описывается законом

$$y = a \sin (\omega t - \gamma). \quad (98)$$

Амплитуда колебаний может быть определена из уравнения

$$F(a) = \sqrt{P_0^2 - (ka\omega)^2} + ma\omega^2 \quad (99)$$

или из уравнения

$$a = \frac{P_0}{c \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{p^2(a)}\right]^2 + \frac{k^2 \omega^2}{m^2 p^4(a)}}}, \quad (100)$$

в котором p^2 (a) определяется формулой (78). На рис. 20, *а* схематически показана амплитудно-частотная характеристика, а на рис. 20, *б* — изменение амплитуды a при изменении частоты ω возмущения от нуля до значения ω_* и затем от значения ω_* до нуля. В системах с демпфированием срыв амплитуды неизбежен даже при монотонном увеличении частоты.

Для построения высших приближений используют метод Бубнова-Галеркина. Закон движения принимают в виде суммы (95) и вместо уравнений (96) получают систему уравнений

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [m\ddot{y} + k\dot{y} + F(y) - P_0 \sin \omega t] y_i(t) dt$$

$$(i = 1, 2, \dots, n) \quad (101)$$

с неизвестными параметрами a_i .

Нелинейные диссипативные системы

Рассмотрим случаи, когда характеристика восстанавливающей силы линейна, а нелинейность системы обусловлена действием нелинейных сил трения.

Свободные колебания. Система с квадратичным законом неупругого сопротивления. Дифференциальное уравнение движения может быть приведено к виду

$$\ddot{y} \pm \frac{\beta}{2} \dot{y}^2 + p^2 y = 0, \quad (102)$$

где β — коэффициент, зависящий от вязких свойств системы. Если $v_0 = 0$ и a_0 — начальное смещение системы, то следующее наибольшее по величине отклонение a_1 (достигаемое через полупериод колебаний) определяют из трансцендентного уравнения

$$\ln(1 + \beta a_1) - \beta a_1 = \ln(1 + \beta a_0) - \beta a_0. \quad (103)$$

Следующее наибольшее по величине отклонение a_2 (достигаемое по истечении еще одного полупериода) определяют из трансцендентного уравнения

$$\ln(1 - \beta a_2) + \beta a_2 = \ln(1 - \beta a_1) + \beta a_1 \quad (104)$$

и т. д.

Для графического последовательного решения уравнений типа (102) и (103) удобно воспользоваться стандартной кривой (рис. 21, *а*)

$$\eta = \ln(1 + \xi) - \xi. \quad (105)$$

Вычислив по данным задачи $\xi_0 = \beta a_0$, следует по стандартной кривой найти соответствующее значение η_0 (точка A_0 справа от оси ординат). Проведя через точку A_0 горизонтальную прямую, находим точку A_1 , определяющую значение ξ_1 , и вычисляем

$$a_1 = \frac{\xi_1}{\beta}. \quad (106)$$

Для определения a_2 нужно повторить то же построение, вновь отложив модуль ξ_1 справа от оси ординат и т. д. (см. рис. 21, б).

По этим данным можно построить огибающие кривых затухающих колебаний, если известен период колебаний; можно принять, что он не отличается от периода свободных колебаний недемпфированной системы (рис. 22).

Система со степенным законом неупругого сопротивления $R = k\dot{y}|\dot{y}|^{n-1}$.

Дифференциальное уравнение движения приводится к виду

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} \dot{y} |\dot{y}|^{n-1} + p^2 y = 0, \quad (107)$$

где n — показатель нелинейности; k — постоянный коэффициент.

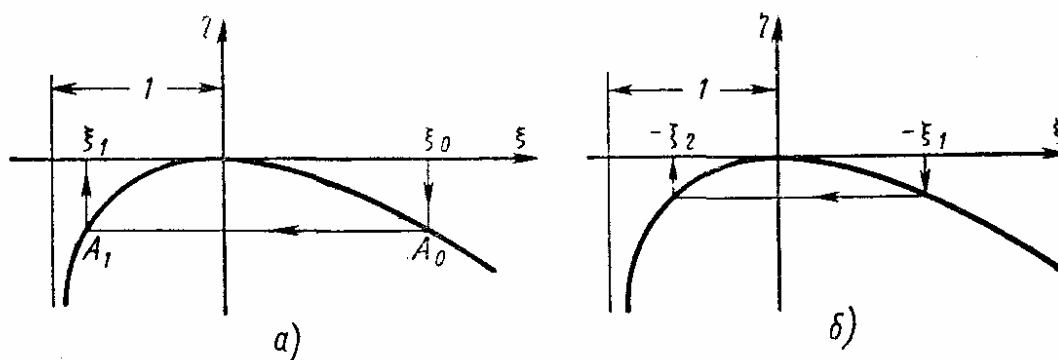


Рис. 21

Вместо точного решения этого сложного уравнения приближенно принимают

$$y = a \sin (pt + \varphi) \quad (108)$$

и находят переменную амплитуду колебаний $a = a(t)$ из дифференциального уравнения

$$\dot{a} + \frac{kp^{n-1}\Phi(n)}{\pi m} a^n = 0, \quad (109)$$

где

$$\Phi(n) = \int_0^\pi \sin^{n+1} \psi d\psi. \quad (110)$$

Функция $\Phi(n)$ имеет следующие значения:

n	0	0,5	1	1,5	2,0	2,5
$\Phi(n)$	2,000	1,750	1,571	1,437	1,333	1,249
n	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	
$\Phi(n)$	1,178	1,087	0,982	0,914	0,857	

Уравнение (109) следует из энергетического соотношения: работа силы трения R за один цикл равна уменьшению энергии системы за этот цикл. При $n \neq 1$ решение дифференциального уравнения имеет вид

$$a = \frac{a_0}{\sqrt[n-1]{1 + \frac{(n-1)k(pa_0)^{n-1}\Phi(n)}{\pi m} t}}. \quad (111)$$

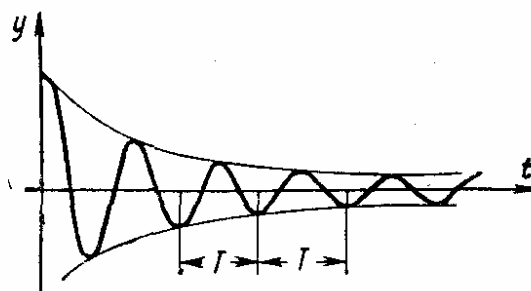


Рис. 22

В частности, при $n = 2$ затухание колебаний следует гиперболическому закону

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{4kpa_0}{3m\pi} t}. \quad (112)$$

Система с кулоновым трением. Дифференциальное уравнение движения приводится к виду

$$\ddot{y} + p^2 y \pm \frac{R}{m} = 0, \quad (113)$$

где R — сила кулонова трения.

График движения в этом случае состоит из отрезков синусоид, имеющих одинаковый период, но различные амплитуды (рис. 23, а, фазовая траектория показана на рис. 23, б).

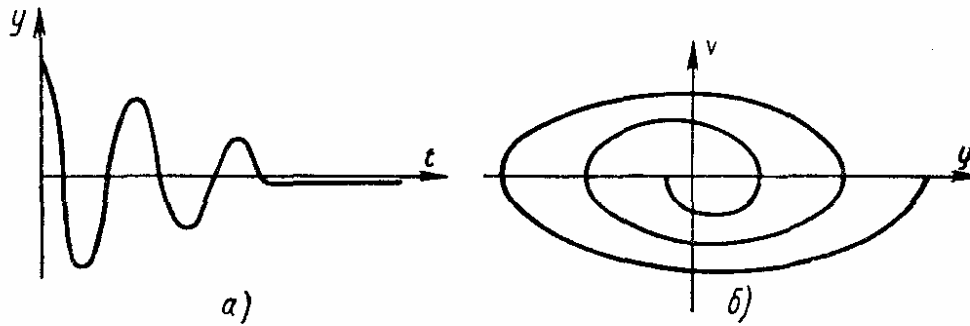


Рис. 23

Связь между двумя последовательными максимальными отклонениями a_i и $a_{i+\frac{1}{2}}$, разделенными интервалами времени, равными полупериоду $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{p}$, имеет вид

$$a_{i+\frac{1}{2}} = -a_i + 2\beta, \quad (114)$$

где величина

$$\beta = \frac{R}{mp^2} = \frac{R}{c} \quad (115)$$

формально представляет собой статическое смещение, вызываемое силой трения R . Этот же результат следует из формулы (111) при $n = 0$.

Последовательность амплитуд образует арифметическую прогрессию и огибающие графика движения имеют вид прямых

$$a = \pm \left(a_0 - \frac{4\beta t}{T} \right). \quad (116)$$

Как только отклонение a станет меньше, чем β , движение прекращается.

Система с нелинейным внутренним трением. Внутреннее трение характеризуется рассеянием энергии Ψ за один цикл, для многих материалов и целых конструкций можно принять, что величина Ψ не зависит от частоты процесса и определяется формулой

$$\Psi = \alpha a^{n+1}, \quad (117)$$

где α , n — постоянные системы; a — амплитуда цикла.

В частности, при $n = 0$ и $\alpha = 4R$ имеем $\Psi = 4Ra$; это соответствует задаче о колебаниях системы с кулоновым трением. В этом случае дифференциальное уравнение верхней огибающей графика движения подобно дифференциальному уравнению движения (109)

$$\dot{a} + \frac{\alpha}{cT} a^n = 0, \quad (118)$$

где c — коэффициент жесткости системы; T — период колебаний (приближенно равный периоду свободных колебаний недемпфированной системы). Решением дифференциального уравнения (118) при $n \neq 1$ будет

$$a = \frac{a_0}{\sqrt[n-1]{1 + \frac{(n-1)\alpha t}{cT} a_0^{n-1}}}. \quad (119)$$

В частности, при $n = 0$ и $\alpha = 4R$ (кулоново трение) огибающая имеет вид *прямой*

$$a = a_0 - \frac{4Rt}{cT} = a_0 - \frac{4\beta t}{T}. \quad (120)$$

При $n = 2$ (что приближенно соответствует закономерностям внутреннего трения для многих сталей) огибающая имеет вид кривой *гиперболического* типа

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{\alpha a_0 t}{cT}}. \quad (121)$$

В случае $n = 1$ дифференциальное уравнение (118) имеет решение

$$a = a_0 e^{-\frac{\alpha t}{cT}} \quad (122)$$

и колебания убывают по *экспоненциальному закону* (как и в случае вязкого трения).

Обработка опытных виброграмм на основе выражения (119) позволяет определить значения n и α , необходимые для расчета вынужденных колебаний.

В системах с умеренным нелинейным трением логарифмический декремент определяется соотношениями

$$\delta = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} \approx \frac{\Delta a_i}{a_i} = \frac{\Delta \Pi_i}{2\Pi_{i \max}}, \quad (123)$$

где a_i и a_{i+1} — две последовательные амплитуды процесса свободных

затухающих колебаний; Δa_i и ΔP_i — уменьшение амплитуды и потенциальной энергии за один i -й цикл; $P_{i \max}$ — максимальная потенциальная энергия системы в i -м цикле. В отличие от линейных систем логарифмический декремент колебаний не является постоянным для данной системы, а *зависит от амплитуды колебаний*.

Вынужденные колебания (случай гармонического возмущения). При умеренном нелинейном демпфировании пользуются *линеаризацией* сил трения и приходят к дифференциальному уравнению (20). Коэффициент k (или n) эквивалентного линейного трения определяют из условия равенства энергии, рассеиваемой за один цикл в нелинейном (заменяемом) и линейном (заменяющем) элементах трения, при этом коэффициент оказывается зависящим от частоты и амплитуды колебаний (табл. 17).

17. Коэффициенты k и n при замене нелинейного трения эквивалентным линейным

Закон нелинейного трения	Эквивалентные коэффициенты вязкого трения
Квадратичное трение $R = \pm \beta \dot{y}^2$	$k_* = \frac{8\beta a\omega}{3\pi}; n_* = \frac{4\beta a\omega}{3\pi m}$
Нелинейно-вязкое трение $R = k\dot{y} \dot{y} ^{n-1}$	$k_* = \frac{2k\Phi(n)(a\omega)^{n-1}}{\pi};$ $n_* = \frac{k\Phi(n)(a\omega)^{n-1}}{\pi m}$
Кулоново трение $\pm R$	$k_* = \frac{4R}{\pi a\omega}; n_* = \frac{2R}{\pi m a\omega}$
Внутреннее нелинейное трение $\Psi = \alpha a^{n+1}$	$k_* = \frac{\alpha a^{n-1}}{\pi\omega}; n_* = \frac{\alpha a^{n-1}}{2\pi\omega m}$

Выражения для n_* следует подставить в формулу (67):

$$a = \frac{y_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n_*^2(a, \omega)}{p^4}}}. \quad (124)$$

Это соотношение следует рассматривать как уравнение относительно неизвестной амплитуды вынужденных колебаний. В табл. 18 приведены найденные таким способом резонансные амплитуды при $\omega = p$.

18. Резонансные амплитуды при нелинейном трении

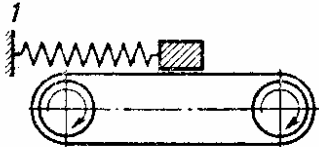
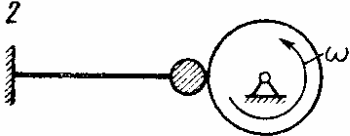
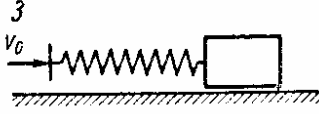
Закон нелинейного трения *	Резонансная амплитуда
Квадратичное трение	$\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{3\pi P_0}{8\beta}}$
Нелинейно-вязкое трение	$\frac{1}{\rho} \sqrt[n]{\frac{\pi P_0}{2k\Phi(n)}}$
Кулоново трение	При малом трении ∞
Внутреннее нелинейное трение	$\sqrt[n]{\frac{\pi P_0}{a}}$
* См. табл. 17.	

Фрикционные автоколебательные системы

Автоколебаниями (или самовозбуждающимися колебаниями) называют незатухающие колебания, поддерживаемые за счет источников энергии, не обладающих колебательными свойствами. При автоколебаниях переменная сила, поддерживающая движение, управляется самим движением и при прекращении движения исчезает.

В частности, автоколебания могут возникать в системах с нелинейным сухим трением (фрикционные автоколебания, табл. 19); при этих автоколебаниях скорость скольжения колеблется около среднего значения v_0 .

19. Фрикционные автоколебания

Схема	Возможные автоколебания
	Горизонтальные автоколебания упруго закрепленного груза, находящегося на движущейся бесконечной ленте
	Вертикальные автоколебания упруго закрепленного тела, прижатого к вращающемуся диску
	Горизонтальные автоколебания тела около режима равномерного движения

Существенным условием появления фрикционных автоколебаний служит наличие падающего участка характеристики трения, где $\frac{dR}{dv} < 0$ (см. табл. 4, сухое трение, нижний график). Отличительной чертой автоколебаний является независимость их амплитуды и частоты от начальных условий. На рис. 24 показаны огибающие кривые $y = y(t)$ при различных начальных условиях.

Дифференциальное уравнение возмущенного движения имеет вид

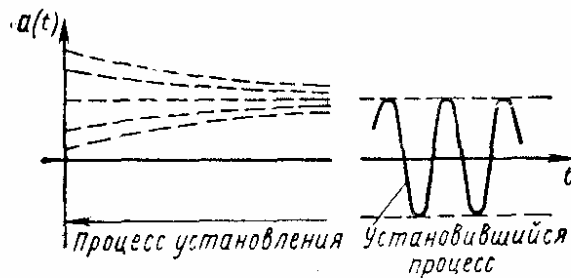


Рис. 24

$$m\ddot{y} + \Delta R(v_0, \dot{y}) + cy = 0; \quad (125)$$

здесь перемещение y отсчитывают от невозмущенного уровня, т. е. от положения равновесия схем 1 и 2 табл. 19 или от движущегося со скоростью v_0 начала координат для схемы 3 табл. 19.

В уравнении (125) разность $\Delta R(v_0, \dot{y}) = R(v_0) - R(v_0 - \dot{y})$ представляет собой приращение силы трения, возникающее из-за изменения скорости скольжения; на падающем участке характеристики эта разность отрицательна («отрицательное» демпфирование, способствующее раскачке колебаний).

Точное решение уравнения (119), как правило, затруднительно.

Для упрощения решения в зависимости от параметров системы пользуются одним из двух приближенных способов.

1. При весьма крутом падении характеристики трения и значительной жесткости упругой связи в уравнении (119) можно пренебречь инерционным слагаемым, т. е. рассматривать вырожденную безмассовую систему и решать дифференциальное уравнение первого порядка

$$R(v_0) - R(v_0 - \dot{y}) + cy = 0. \quad (126)$$



Рис. 25

Закон автоколебания такой системы существенно отличается от гармонического, и возможны интервалы полного сцепления (отсутствия скольжения, рис. 25); такие автоколебания называют разрывными (из-за разрывов скорости), или *релаксационными*.

2. При умеренно крутом падении характеристики и упругой связи небольшой жесткости принимают, что автоколебания носят гармонический характер и происходят с частотой p свободных колебаний той же системы (но без трения)

$$y = a \cos pt. \quad (127)$$

В этом случае систему называют *квазилинейной*. Для определения амплитуды установившихся автоколебаний используют уравнение энергетического баланса

$$\int_0^{\frac{2\pi}{p}} \Delta R \dot{y} dt = 0, \quad (128)$$

выражающее равенство нулю работы силы трения за один цикл колебаний.

В уравнение (128) вместо скорости \dot{y} следует подставить ее выражение, вытекающее из соотношения (127):

$$\dot{y} = -ap \sin pt. \quad (129)$$

Пример 5. Определить амплитуду автоколебаний в случае, когда при $v > 0$ характеристика трения имеет вид, показанный на рис. 26:

$$R = 3R_* \left(1 - \frac{v}{v_*} + \frac{v^3}{3v_*^3} \right). \quad (130)$$

причем R_* и v_* — сила трения и скорость, соответствующие точке минимума характеристики. В этом случае

$$\begin{aligned} R(v_0) &= 3R_* \times \\ &\times \left(1 - \frac{v_0}{v_*} + \frac{v_0^3}{3v_*^3} \right); \\ R(v_0 - \dot{y}) &= 3R_* \times \\ &\times \left[1 - \frac{v_0 - \dot{y}}{v_*} + \frac{(v_0 - \dot{y})^3}{3v_*^3} \right] \end{aligned}$$

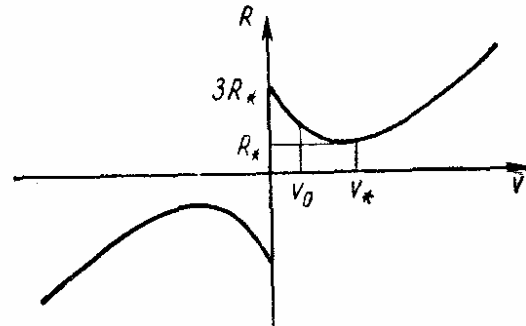


Рис. 26

и, следовательно,

$$\Delta R = \frac{3R_*}{v_*} \left[\dot{y} \left(1 - \frac{v_0^2}{v_*^2} \right) + \frac{v_0 \dot{y}^2}{v_*^2} - \frac{\dot{y}^3}{3v_*^2} \right].$$

Подставляя это выражение в уравнение (128), имеем

$$\int_0^{2\pi} \left[\dot{y} \left(1 - \frac{v_0^2}{v_*^2} \right) + \frac{v_0 \dot{y}^2}{v_*^2} - \frac{\dot{y}^3}{3v_*^2} \right] \dot{y} dt = 0$$

или после подстановки выражения (129)

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(1 - \frac{v_0^2}{v_*^2} \right) \sin^2 \psi - ap \sin^3 \psi - a^2 p^2 \sin^4 \psi \right] d\psi = 0.$$

Отсюда амплитуда автоколебаний

$$a = \frac{2v_*}{p} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_*^2}}. \quad (131)$$

При этом наибольшая скорость автоколебаний

$$\dot{y}_{\max} = ap = 2v_* \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_*^2}}$$

не должна превосходить номинальную скорость скольжения v_0 [при $\dot{y}_{\max} = v_0$ произойдет остановка и процесс уже недопустимо описывать зависимостью (130)]; поэтому условия существования квазилинейных автоколебаний имеют вид двух неравенств

$$v_* \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_*^2}} < v_0 < v_*,$$

отсюда

$$0,895 v_* < v_0 < v_*. \quad (132)$$

При нарушении правого неравенства автоколебания невозможны, при нарушении левого неравенства они будут носить релаксационный характер.

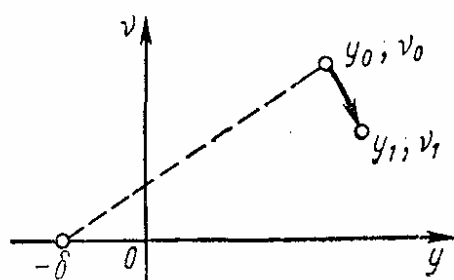


Рис. 27

Свойства автоколебательных систем общего вида могут быть исследованы по *фазовому портрету* системы путем изучения характера фазовых траекторий на плоскости y, \dot{y} .

Для автономной нелинейной системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + p^2 y = f(y, \dot{y}), \quad (133)$$

фазовые траектории являются интегральными кривыми дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = \frac{f(y, \dot{y}) - p^2 y}{\dot{y}}. \quad (134)$$

Для графо-аналитического построения фазовых траекторий удобен *дельта-метод*, согласно которому траектории строят на фазовой плоскости y, v , причем

$$v = \frac{\dot{y}}{p}. \quad (135)$$

Далее вводят функцию

$$\delta(y, v) = -\frac{f(y, pv)}{p^2}, \quad (136)$$

которую в малых интервалах времени можно считать постоянной, при этом дифференциальное уравнение (134) может быть проинтегрировано

$$v^2 + (y + \delta)^2 = \text{const}. \quad (137)$$

Это уравнение описывает окружность, центр которой расположен в точке $y = -\delta; v = 0$. Построение фазовой траектории начинают с точки с координатами $y_0 = y(0), v_0 = \frac{v(0)}{p}$, определяемыми начальными условиями. В соответствии с выражением (136) по этим значениям вычисляют $\delta_0 = \delta(y_0, v_0)$; найденное значение определяет центр окружности, описываемой уравнением (137). Далее по ходу часовой стрелки проводят малую дугу окружности, начинающуюся в точке y_0, v_0 (рис. 27). С чертежа снимают новые значения y_1, v_1 , вновь под-

ставляют в выражение (136) и после вычисления δ_1 определяют положение нового центра. С помощью этого центра строят второй элемент фазовой траектории и т. п.

Пример 6. Построить фазовый портрет фрикционной автоколебательной системы с характеристикой трения по формуле (129). Численные данные: $m=0,102$ дан·сек/см; $c=1000$ дан/см;

$$R_* = 10 \text{ дан}; v_0 =$$

$$= 9,5 \text{ см/сек}; v_* = 10 \text{ см/сек}.$$

Находим

$$P = \sqrt{\frac{c}{m}} = 100 \text{ сек}^{-1};$$

$$f(y, \dot{y}) = 2,87\dot{y} + 2,80\dot{y}^2 - 0,10\dot{y}^3;$$

$$\delta(y, v) = -0,029v - 2,80v^2 + 10v^3.$$

При наугад взятых начальных условиях $y_0 = 0$, $v_0 = 0,09$ находим $\delta_0 = -0,018$ и строим первый участок фазовой траектории до точки C_1 , которой соответствует $v_1 = 0,08$ (рис. 28, а). Далее вычисляем $\delta_1 = -0,015$; из нового центра проведена вторая дуга до точки C_2 , в которой $v = 0,07$ и т. д. Фазовая траектория в целом показана на рис. 29, б и обозначена цифрой II; она представляет собой свертывающуюся спираль. Другая фазовая траектория, начинающаяся в точке О, 0,045 является развертывающейся спиралью и обозначена цифрой I. Фазовые траектории типа I и II неограниченно приближаются к замкнутой траектории А, являющейся *предельным циклом*. По кривой А находим максимальное и минимальное отклонения системы 0,06 см; -0,05 см. Полуразмах колебаний составляет 0,055 см [по формуле (131) в этом случае получается $a = 0,064$ см].

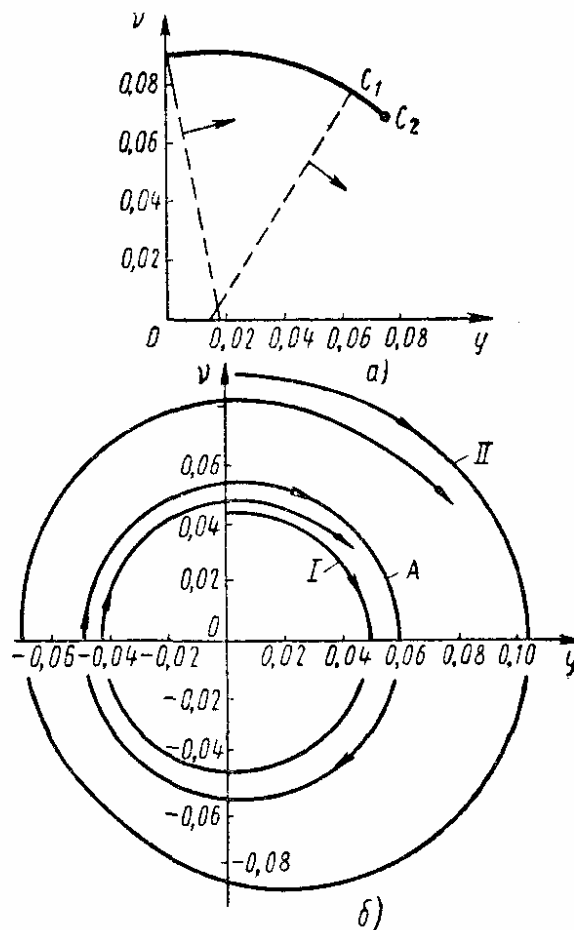


Рис. 28

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Свободные колебания

Формы дифференциальных уравнений движения. Наиболее общей формой дифференциальных уравнений движения являются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (138)$$

в которых t — время; q_k — обобщенные координаты; n — число степеней свободы; T — кинетическая энергия системы; Q_k — обобщенные силы.

Кинетическая энергия является квадратичной функцией обобщенных скоростей \dot{q}_k :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (139)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{q}_1 &= -c_{11} q_1 - c_{12} q_2 - \dots - c_{1n} q_n; \\ a_2 \ddot{q}_2 &= -c_{21} q_1 - c_{22} q_2 - \dots - c_{2n} q_n; \\ &\vdots \\ a_n \ddot{q}_n &= -c_{n1} q_1 - c_{n2} q_2 - \dots - c_{nn} q_n. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Это *прямая форма* дифференциальных уравнений колебаний. Если в сумме квадратов приведена *потенциальная энергия*, т. е.

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k q_k^2, \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

то система (142) переходит в систему уравнений, разрешенных относительно обобщенных координат:

[illegible]

и представляет собой обратную форму дифференциальных уравнений колебаний.

К прямой форме дифференциальных уравнений движения можно прийти, непосредственно пользуясь вторым законом Ньютона для выделенных из системы материальных точек; выражая силы упругости через перемещения, можно записать

$$m_i \ddot{y}_i + \sum_{k=1}^n r_{ik} y_k = 0, \quad (148)$$

где m_i — i -я сосредоточенная масса; y_i — ее перемещение; r_{ik} — *единичная реакция* (понятие, используемое в *методе перемещений*). Если кроме сосредоточенных масс механическая система включает в себя также твердые тела, то углы поворота этих тел также можно обозначить через y_i , в этих случаях под m_i понимают моменты инерции относительно осей, вокруг которых происходят повороты y_i . Суммы, находящиеся в каждом из уравнений (148), представляют собой взятые с обратным знаком силы, действующие на каждую массу m_i , во многих задачах эти силы легко определяют непосредственно, без вычислений r_{ik} , как это можно проследить на примере 7.

Обратную форму дифференциальных уравнений можно также получить непосредственно из линейных соотношений строительной механики

$$y_i = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} F_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (149)$$

записываемых для безмассового упругого каркаса системы. Здесь δ_{ik} — единичное перемещение (понятие, используемое в *методе сил*); F_k — сила, действующая по k -му направлению.

В задачах о свободных колебаниях $F_k = -m_k \ddot{y}_k$ и из соотношения (149) получаем следующую систему дифференциальных уравнений движения:

$$y_i + \sum_{k=1}^n \delta_{ik} m_k \ddot{y}_k = 0. \quad (150)$$

Пример 7. Рассчитать систему, показанную на рис. 29, тремя способами; здесь m_1 и m_2 — массы грузов; c_1 и c_2 — коэффициенты жесткости упругих связей; y_1 и y_2 — перемещения грузов от положения равновесия.

Способ 1 (использование формы уравнений Лагранжа). Кинетическая и потенциальная энергия

$$T = \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}_2^2}{2}; \quad \Pi = \frac{c_1 y_1^2}{2} + \frac{c_2 (y_2 - y_1)^2}{2}.$$

Производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} &= m_1 \dot{y}_1; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} \right) &= m_1 \ddot{y}_1; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} &= m_2 \dot{y}_2; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} \right) &= m_2 \ddot{y}_2; \\ \frac{\partial T}{\partial y_1} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial y_2} &= 0; & \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} &= c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1); \\ & & \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} &= c_2 (y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения (138);

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1) &= 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (y_2 - y_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Способ 2 (прямая форма). Единичные реакции

$$r_{11} = c_1 + c_2; \quad r_{12} = r_{21} = -c_2; \quad r_{22} = c_2.$$

Дифференциальные уравнения (148);

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (c_1 + c_2) y_1 - c_2 y_2 &= 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 - c_2 y_1 + c_2 y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

В данном случае (так же, как и вообще для всех систем цепного вида) эти дифференциальные уравнения движения удобно составлять путем непосредственного определения упругих сил, действующих на каждую из масс:

$$N_1 = -c_1 y_1 + c_2 (y_2 - y_1);$$

$$N_2 = -c_2 (y_2 - y_1),$$

без предварительного нахождения коэффициентов r_{ik} . Определив силы N_1 , N_2 , можно сразу записать дифференциальные уравнения движения:

$$m_1 \ddot{y}_1 = N_1;$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = N_2.$$

совпадающие с дифференциальными уравнениями (152).

Способ 3 (обратная форма). Единичные перемещения

$$\delta_{11} = \frac{1}{c_1}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{c_1}; \quad \delta_{22} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

Дифференциальные уравнения (150):

$$\left. \begin{aligned} y_1 + m_1 \ddot{y}_1 \frac{1}{c_1} + m_2 \ddot{y}_2 \frac{1}{c_1} &= 0; \\ y_2 + m_2 \ddot{y}_1 \frac{1}{c_1} + m_2 \ddot{y}_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Системы дифференциальных уравнений (151) и (153) эквивалентны.

В принципе всегда можно найти такие обобщенные координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, связанные с координатами q_1, q_2, \dots, q_n линейными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \sum_{k=1}^n b_{1k} \xi_k; \\ q_2 &= \sum_{k=1}^n b_{2k} \xi_k; \\ &\dots \dots \dots \\ q_n &= \sum_{k=1}^n b_{nk} \xi_k, \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

чтобы выражения кинетической и потенциальной энергии были приведены к суммам квадратов

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{\xi}_k^2; \\ \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

При этом дифференциальные уравнения движения приобретают особенно простую форму

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \lambda_1 \xi_1 &= 0; \\ \ddot{\xi}_2 + \lambda_2 \xi_2 &= 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \ddot{\xi}_n + \lambda_n \xi_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

Координаты ξ_k называют *нормальными координатами*.

Составление частотного уравнения. Эквивалентные одна другой системы дифференциальных уравнений (142), (145) или (147) имеют частные решения:

$$\left. \begin{aligned} q_1^* &= A_{1k} \sin(p_k t + \varphi_k); \\ q_2^* &= A_{2k} \sin(p_k t + \varphi_k); \\ &\dots \dots \dots \\ q_n^* &= A_{nk} \sin(p_k t + \varphi_k), \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

описывающие гармонические колебания с частотой p_k . Для определения p_k служит уравнение частот, форма которого зависит от способа,

избранного для составления дифференциальных уравнений движения:

при использовании уравнений Лагранжа

$$\begin{vmatrix} a_{11}p^2 - c_{11}; & a_{12}p^2 - c_{12}, \dots; & a_{1n}p^2 - c_{1n} \\ a_{21}p^2 - c_{21}; & a_{22}p^2 - c_{22}, \dots; & a_{2n}p^2 - c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}p^2 - c_{n1}; & a_{n2}p^2 - c_{n2}, \dots; & a_{nn}p^2 - c_{nn} \end{vmatrix} = 0; \quad (158)$$

при использовании прямой формы

$$\begin{vmatrix} m_1p^2 - r_{11}; & -r_{12}; \dots; & -r_{1n} \\ -r_{21}; & m_2p^2 - r_{22}; \dots; & -r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ -r_{n1}; & -r_{n2}; \dots; & m_np^2 - r_{nn} \end{vmatrix} = 0; \quad (159)$$

при использовании обратной формы

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1\delta_{11}p^2; & -m_2\delta_{12}p^2; \dots; & -m_n\delta_{1n}p^2 \\ -m_1\delta_{21}p^2; & 1 - m_2\delta_{22}p^2; \dots; & -m_n\delta_{2n}p^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ -m_1\delta_{n1}p^2; & -m_2\delta_{n2}p^2; \dots; & 1 - m_n\delta_{nn}p^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (160)$$

Все корни $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$ частотного уравнения вещественны и неотрицательны.

Собственные формы. Каждому значению p_k^2 соответствует система соотношений между амплитудами

$$\frac{A_{2k}}{A_{1k}}; \frac{A_{3k}}{A_{1k}}; \dots; \frac{A_{nk}}{A_{1k}}, \quad (161)$$

определяющая *собственную форму колебаний*. Эти соотношения получают из дифференциальных уравнений движения, если в них подставить частные решения (157). Так, при прямом способе составления уравнений задачи из выражений (148) и (157) получаем

$$-m_i A_{is} p_s^2 + \sum_{k=1}^n r_{ik} A_{ks} = 0 \quad (s, i = 1, 2, \dots, n). \quad (162)$$

Среди n уравнений (162) независимыми являются только $n - 1$ уравнений: последние и определяют систему соотношений (161).

Собственная форма характеризует лишь конфигурацию механической системы при ее моногармонических колебаниях и масштаб для перемещений может быть выбран произвольно. Иногда бывает удобным придать полную определенность каждой из собственных форм колеба-

ний. Для этого пользуются тем или иным *условием нормирования*; в частности, применяют какое-либо из следующих условий:

$$A_{1k} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (163)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ik}^2 = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (164)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ik}^2 = \sum_{i=1}^n m_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (165)$$

Значения A_{ik} , удовлетворяющие условиям нормирования, ниже обозначены a_{ik} .

Любые две различные собственные формы колебаний *ортогональны* одна к другой:

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = 0 \quad (j \neq k). \quad (166)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений движения представляет собой сумму частных решений (157):

$$q_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} \sin(p_k t + \varphi_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (167)$$

которая может быть также представлена в виде

$$q_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_{ik} \sin(p_k t + \varphi_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (168)$$

где a_{ik} — амплитуды нормированной собственной формы; α_k и φ_k — постоянные, определяемые начальными условиями;

$$\left. \begin{aligned} q_1(0) &= q_{10}; & \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_{10}; \\ q_2(0) &= q_{20}; & \dot{q}_2(0) &= \dot{q}_{20}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_n(0) &= q_{n0}; & \dot{q}_n(0) &= \dot{q}_{n0}. \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

При произвольно заданных начальных условиях осуществляется *полигармонический колебательный процесс* (167) или (168). При специальном выборе начальных условий могут быть реализованы в чистом виде *моногармонические колебания* (157) с общей частотой p_k . Такие колебания называют *главными*.

Пример 8. Определить собственные частоты и собственные формы колебаний системы, показанной на рис. 29.

Частное уравнение в форме (159) будет

$$\begin{vmatrix} m_1 p^2 - (c_1 + c_2) & c_2 \\ c_2 & m_2 p^2 - c_2 \end{vmatrix} = 0;$$

отсюда

$$p^4 - \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) p^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0;$$

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

Если, например, $c_1 = c_2$ и $m_1 = m_2$, то

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) \frac{c}{m}$$

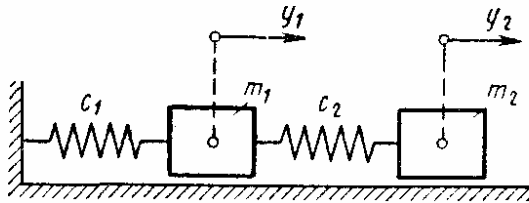


Рис. 29

и окончательно

$$p_1 = 0,618 \sqrt{\frac{c}{m}};$$

$$p_2 = 1,62 \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

В этом случае уравнения (153) имеют вид:
при $i = 1$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } i = 2 \quad & -m A_{1s} p_s^2 + [(c_1 + c_2) A_{1s} - c_2 A_{2s}] = 0; \\ & -m A_{2s} p_s^2 + [-c_2 A_{1s} + c_2 A_{2s}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Первое из этих уравнений дает

$$\frac{A_{2s}}{A_{1s}} = 2 - \frac{m p_s^2}{c},$$

т. е. собственные формы колебаний определяются отношениями

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 1,62; \quad \frac{A_{22}}{A_{12}} = -0,618.$$

Те же результаты можно найти и из второго уравнения (170).
Для нормирования первой собственной формы по условию (164) имеем

$$m_1 A_{11}^2 + m_2 A_{21}^2 = 1,$$

подставляя сюда $\frac{A_{21}}{A_{11}} = 1,62$ и $m_1 = m_2$, находим

$$a_{11} = \frac{0,618}{\sqrt{m}}; \quad a_{21} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Для нормирования второй собственной формы по условию (164) имеем

$$m_1 A_{12}^2 + m_2 A_{22}^2 = 1,$$

и так как $\frac{A_{22}}{A_{12}} = -0,618$, то

$$a_{12} = \frac{1,27}{\sqrt{m}}; \quad a_{22} = -\frac{0,785}{\sqrt{m}}.$$

Влияние инерции вращения твердых тел на собственные частоты одно- и многомассовых систем. Если входящие в упругую систему массы обладают значительной инерцией вращения, то остаются справедливыми дифференциальные уравнения свободных колебаний (148) и (150),

однако под y_i следует подразумевать не только линейные перемещения, но и углы поворота, а под m_i как массы тел, так и соответствующие моменты инерции. Учет последних приводит к увеличению числа степеней свободы системы, при этом низшая собственная частота уменьшается и обнаруживаются дополнительные (более высокие) собственные частоты.

Пример 9. Определить собственные частоты и собственные формы колебаний консольного стержня с грузом на конце (схема 9 табл. 6).

Обозначения: l — длина стержня; EJ — изгибная жесткость; m — масса груза; ρ — радиус инерции груза относительно его центра тяжести; y_1 — линейное смещение центра тяжести груза; y_2 — его угол поворота (рис. 30, а).

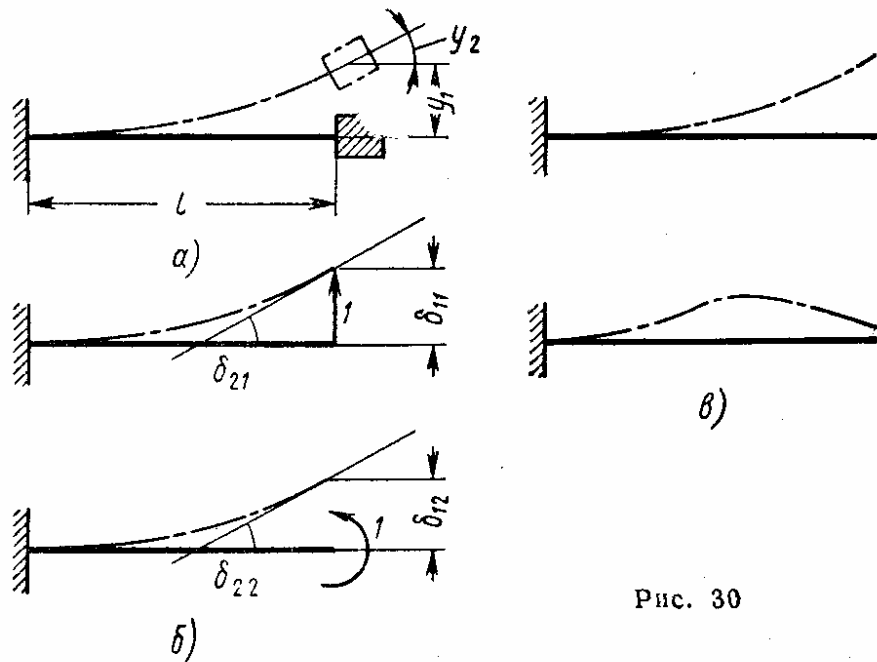


Рис. 30

Дифференциальные уравнения (150) имеют вид

$$y_1 + m\ddot{y}_1\delta_{11} + m\rho^2\ddot{y}_2\delta_{12} = 0;$$

$$y_2 + m\ddot{y}_1\delta_{21} + m\rho^2\ddot{y}_2\delta_{22} = 0.$$

Единичные перемещения δ_{ik} в данном случае будут (рис. 30, б)

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{2EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^2}{2EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{l}{EJ}.$$

Частное решение (157):

$$y_{1k} = a_{1k} \sin(p_k t + \varphi_k); \quad y_{2k} = a_{2k} \sin(p_k t + \varphi_k).$$

После подстановки этого решения в дифференциальные уравнения движения получаем

$$\left. \begin{aligned} a_{1k} - ma_{1k}\delta_{11}p_k^2 - m\rho^2a_{2k}\delta_{12}p_k^2 &= 0; \\ a_{2k} - ma_{1k}\delta_{21}p_k^2 - m\rho^2a_{2k}\delta_{22}p_k^2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

отсюда следует частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - m\delta_{11}p_k^2 & -m\rho^2\delta_{12}p_k^2 \\ -m\rho^2\delta_{21}p_k^2 & 1 - m\rho^2\delta_{22}p_k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

соответствующее равенству (160).

Подставляя в частотное уравнение указанные выше выражения единичных перемещений, находим

$$p_{1,2}^2 = \frac{6EJ}{ml^3} \left(1 + \frac{l^2}{3\rho^2} \pm \sqrt{\frac{l^4}{9\rho^4} + \frac{l^2}{3\rho^2} + 1} \right).$$

Отсюда следуют приближенные (для $l \gg \rho$) выражения для собственных частот колебаний

$$p_1^2 = \frac{3EJ}{ml^3} \left(1 - \frac{3\rho^2}{l^2} \right); \quad p_2^2 = \frac{3EJ}{ml^3} \left(3 + \frac{4l^2}{3\rho^2} \right).$$

Для определения собственных форм можно воспользоваться любым из уравнений (171). Так, из первого уравнения находим

$$\frac{A_{2k}}{A_{1k}} = \frac{1 - m\delta_{11}p_k^2}{m\rho^2\delta_{12}p_k^2};$$

после подстановки найденных собственных частот получаем

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} \approx \frac{l}{l^2 - 3\rho^2}; \quad \frac{a_{22}}{a_{12}} \approx -\frac{2l}{3\rho^2};$$

эти формы показаны на рис. 30, в.

Влияние вязкого сопротивления на свободные колебания. Если механическая система содержит s элементов вязкого трения, направления действия которых $j = 1, 2, \dots, s$, то дифференциальные уравнения движения системы в обратной форме имеют вид

$$q_i + \sum_{k=1}^n m_k \ddot{q}_k \delta_{ik} + \sum_{j=1}^s k_j \dot{q}_j \delta_{ij} = 0, \quad (172)$$

где k_j — коэффициент сопротивления i -го элемента трения.

Если каждое из направлений j совпадает с каким-либо из направлений k (т. е. если все элементы трения присоединены к массам системы), то число уравнений (172) равно n . Если же имеются такие элементы трения, которые создают силу сопротивления, не приложенную непосредственно ни к одной из масс системы, то уравнение (172) следует составлять также для направлений действия этих сил, при этом каждый из таких элементов трения увеличивает число степеней свободы системы на $1/2$ (см. табл. 7).

Решение системы дифференциальных уравнений движения (172) обнаруживает затухающий характер колебательного процесса системы, но при умеренном демпфировании частоты колебаний незначительно отличаются от собственных частот недемпфированной системы.

Как правило, дифференциальные уравнения движения не допускают разделения на независимые уравнения для каждой из собственных форм. Такое разделение становится возможным лишь в некоторых особенных

случаях (например, если каждый упругий элемент системы является одновременно носителем вязких свойств, причем отношение коэффициентов жесткости и коэффициентов вязкости одинаково для всех таких элементов системы).

Вынужденные колебания

Формы дифференциальных уравнений движения. В общем случае, когда заданы возмущающие силы

$$P_1 = P_1(t); P_2 = P_2(t); \dots; P_n = P_n(t), \quad (173)$$

действующие по направлениям $i = 1, 2, \dots, n$, дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$m_i \ddot{y}_i + \sum_{k=1}^n r_{ik} y_k = P_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (174)$$

(прямая форма) или

$$y_i + \sum_{k=1}^n \delta_{ik} m_k \ddot{y}_k = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_k(t) \quad (175)$$

(обратная форма).

Решение дифференциальных уравнений движения. Решение системы (174) [или системы (175)] можно представить в виде разложения по собственным формам

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{k=1}^n a_{1k} q_k(t); \\ y_2 &= \sum_{k=1}^n a_{2k} q_k(t); \\ . &. \\ y_n &= \sum_{k=1}^n a_{nk} q_k(t), \end{aligned} \right\} \quad (176)$$

где a_{ik} — амплитуды нормированных собственных форм колебаний [при условии нормирования (164)], а функции $q_k(t)$ определяют из системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + p_1^2 q_1 &= \sum_{k=1}^n a_{k1} P_k(t); \\ \ddot{q}_2 + p_2^2 q_2 &= \sum_{k=1}^n a_{k2} P_k(t); \\ . &. \\ . &. \\ \ddot{q}_n + p_n^2 q_n &= \sum_{k=1}^n a_{kn} P_k(t), \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

где p_1, p_2, \dots, p_n — собственные частоты. Способы решения уравнений (177) при любом виде правых частей см. стр. 245—250.

Если силы $P_i(t)$ изменяются по синфазным гармоническим законам с общей частотой ω , т. е. заданы в виде

$$P_1 = P_{01} \sin \omega t; P_2 = P_{02} \sin \omega t, \dots, P_n = P_{0n} \sin \omega t, \quad (178)$$

то решением любого из уравнений (177) служит сумма

$$q_i = \frac{\sum_{k=1}^n P_{0k} a_{ki}}{p_i^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (179)$$

и вместо выражения (179) получаем

$$y_i = \frac{\sum_{s=1}^n a_{is} \sum_{k=1}^n a_{ki} P_{0k}}{p_i^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (180)$$

В этом случае амплитуды колебаний могут быть также найдены непосредственно, если положить в системах (174) или (175)

$$y_i = A_i \sin \omega t. \quad (181)$$

Амплитуды A_i определяют из системы алгебраических уравнений

$$-m_i A_i \omega^2 + \sum_{k=1}^n r_{ik} A_k = P_{i0} \quad (182)$$

(прямая форма) или

$$A_i - \omega^2 \sum_{k=1}^n \delta_{ik} m_k A_k = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_{k0} \quad (183)$$

(обратная форма).

Пример 10. Определить амплитуду колебаний системы, показанной на рис. 29, если к первой массе приложена возмущающая сила $p_1 = P_0 \sin \omega t$. В данном случае можно пользоваться системой уравнений (182):

$$A_1 \cdot \frac{p_0}{c}$$

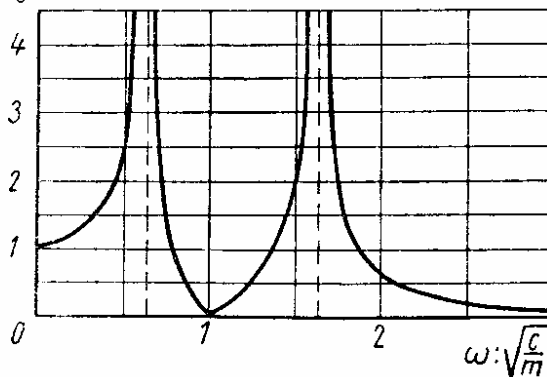


Рис. 31

$$-m_1 A_1 \omega^2 + (c_1 + c_2) A_1 -$$

$$-c_2 A_2 = P_0;$$

$$m_2 A_2 \omega^2 - c_2 A_1 + c_2 A_2 = 0,$$

или системой уравнений (183):

$$A_1 - \omega^2 \left[\frac{m_1}{c_1} A_1 + \frac{m_2}{c_1} A_2 \right] = \frac{P_0}{c_1};$$

$$A_2 - \omega^2 \left[\frac{m_1}{c_1} A_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) m_2 A_2 \right] = \frac{P_0}{c_1}.$$

После решения любой из этих систем получаем

$$A_1 = \frac{P_0 (c_2 - m\omega^2)}{(c_1 + c_2 - m_1\omega^2)(c_2 - m_2\omega^2) - c_2^2}; \quad A_2 = \frac{c_2}{c_2 - m\omega^2} A_1. \quad (184)$$

Если $\omega = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$, то амплитуда колебаний первой массы равна нулю (антирезонанс первой массы). При этом амплитуда A_2 колебаний второй массы составляет $A_2 = \frac{P_0}{c_2}$.

Зависимость амплитуды колебаний первой массы от частоты возмущающей силы для случая $c_1 = c_2 = c$, $m_1 = m_2 = m$, $P_0 = 1$ показана на рис. 31.

При $\omega = 0,618 \sqrt{\frac{c}{m}}$ и $\omega = 1,62 \sqrt{\frac{c}{m}}$ возникает резонанс, а при $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — антирезонанс.

Действие сил вязкого сопротивления. При гармонических возмущающих силах (178) влияние сил вязкого сопротивления выражается в двух основных эффектах:

фазы колебаний различных точек системы не совпадают между собой и отличаются от фазы возмущающих сил;

амплитуды колебаний точек системы меньше соответствующих амплитуд системы без трения и всегда конечны (включая резонансные условия).

Амплитуды вынужденных колебаний определяют путем подстановки решения

$$y_i = A_i \sin(\omega t - \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (185)$$

в дифференциальные уравнения движения.

Вместо выражения (185) можно также принять

$$y_i = a_i \sin \omega t + b_i \cos \omega t \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (186)$$

Пример 11. Определить амплитуду колебаний системы, показанной на рис. 29 после введения гасителя (рис. 32), если на первую массу действует возмущающая сила $p_1 = P_0 \sin \omega t$.

Дифференциальные уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{m}_1 y_1 + c_1 y_1 + c_2 (y_1 - y_2) + \\ + k (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = P_0 \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (y_2 - y_1) + \\ + k (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

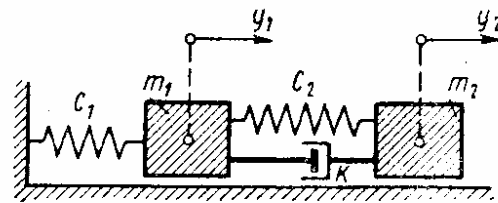


Рис. 32

Решение системы (187) разыскивают в виде

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t; \\ y_2 &= a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

После подстановки решения (188) в уравнения (187) получаем

$$\begin{aligned} &[-m_1 a_1 \omega^2 + (c_1 + c_2) a_1 - c_2 a_2 - k b_1 \omega - k b_2 \omega - P_0] \sin \omega t + \\ &+ [-m_1 b_1 \omega^2 + (c_1 + c_2) b_1 - c_2 b_2 + k a_1 \omega - k a_2 \omega] \cos \omega t = 0; \\ &[-m_2 a_2 \omega^2 + c_2 a_2 - c_2 a_1 - k b_2 \omega + k b_1 \omega] \sin \omega t + \\ &+ [-m_2 b_2 \omega^2 + c_2 b_2 - c_2 b_1 + k a_2 \omega - k a_1 \omega] \cos \omega t = 0. \end{aligned}$$

Каждое из выражений, стоящих в квадратных скобках, должно быть равно нулю (для тождественного удовлетворения обоих уравнений); это дает четыре алгебраических уравнения для определения a_1, a_2, b_1, b_2 . Амплитуда колебаний первой массы оказывается равной

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \frac{P_0 \sqrt{(c_2 - m_2 \omega^2)^2 + k^2 \omega^2}}{\sqrt{[(-m_1 \omega^2 + c_1)(c_2 - m_2 \omega^2) - m_2 c_2 \omega^2]^2 + k^2 \omega^2 (-m_1 \omega^2 + c_1 - m_2 \omega^2)^2}} \quad (189)$$

Аналогично может быть найдена амплитуда колебаний второй массы по формуле

$$A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1956.
 2. Бабак И. И. Теория колебаний. М., ГИТТЛ, 1958.
 3. Ден-Гартог Дж. Механические колебания. М., Физматгиз, 1960.
 4. Иорис Ю. И. Виброметрия. М., Машгиз, 1960.
 5. Канингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М., Госэнергоиздат, 1962.
 6. Каудерер Г. Нелинейная механика. М., ИЛ, 1952.
 7. Кин Н. Тонг. Теория механических колебаний. М., Машгиз, 1963.
 8. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Изд. 5-е, т. 2, Гостехиздат, 1955.
 9. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при упругих колебаниях. М., Физматгиз, 1960.
 10. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М., «Машиностроение», 1967.
 11. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3, разд. 2, М., Машгиз, 1959.
 12. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., ИЛ, 1952.
 13. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1967.
 14. Филиппов А. П. Колебания механических систем. Киев, изд-во «Наукова думка», 1965.
 15. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамики машин. Л., «Машиностроение», 1968.
 16. Диментберг Ф. М., Шаталов К. Т., Гусаров А. А. Колебания машин. М., «Машиностроение», 1964.
 17. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. М., «Наука», 1966.
 18. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964.
 19. Shock and vibration handbook, N. Y. 1961, v. 1.
- См. также литературу к гл. 5.

Глава 5

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ (ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ)

Общие сведения

Ниже рассмотрены задачи о колебаниях стержней, представляющих собой систему с непрерывно распределенной массой. Такая *система с распределенными параметрами* имеет бесконечное число степеней свободы и, соответственно, обладает бесконечно большим числом собственных частот и собственных форм колебаний.

Собственная форма колебаний $X_k(x)$ представляет собой функцию координаты x сечения стержня, описывающую конфигурацию системы при ее моногармонических колебаниях с собственной частотой p_k . Такие колебания называют *главными*, они происходят по закону

$$q_k(x, t) = X_k(x) T_k(t), \quad (1)$$

где

$$T_k(t) = A_k \sin(p_k t + \varphi_k) \quad (2)$$

есть функция времени, содержащая постоянные A_k и φ_k , связанные с начальными условиями. При этом $q_k(x, t)$ имеет смысл характерного перемещения сечения: *продольного* перемещения $u_k(x, t)$ в задачах о продольных колебаниях, *углового* перемещения $\varphi_k(x, t)$ в задачах о крутильных колебаниях или *поперечного* перемещения $v_k(x, t)$ в задачах об изгибных колебаниях. Колебания типа (1) возникают при специальном задании начальных условий (см. ниже); при произвольно заданных начальных условиях колебательный процесс представляет собой сумму главных колебаний

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \quad (3)$$

Собственные частоты образуют бесконечный спектр p_1, p_2, \dots , цифры, стоящие в индексах, располагают так, чтобы выполнялись неравенства

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots \quad (4)$$

В задачах о *продольных* или *поперечных* колебаниях собственные формы удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_0^l m(x) X_i(x) X_k(x) dx = 0 \text{ при } i \neq k; \quad (5)$$

здесь $m(x)$ — интенсивность распределенной массы стержня. Если кроме распределенной массы со стержнем связаны сосредоточенные массы m_s , расположенные в сечениях с абсциссами x_s , то условия ортогональности имеют вид

$$\int_0^l m(x) X_i(x) X_k(x) dx + \sum_s m_s X_i(x_s) X_k(x_s) = 0. \quad (6)$$

В задачах о *крутильных* колебаниях условия ортогональности принимают форму

$$\int_0^l I(x) X_i(x) X_k(x) dx = 0, \quad (7)$$

где $I(x)$ — полярный момент инерции единицы длины стержня относительно его оси.

При наличии сосредоточенных по длине стержня дисков с полярными моментами инерции I_s , расположенными в сечениях с абсциссами x_s , условия ортогональности имеют вид

$$\int_0^l I(x) X_i(x) X_k(x) dx + \sum_s I_s X_i(x_s) X_k(x_s) = 0. \quad (8)$$

Масштаб собственных форм колебаний может быть принят произвольно. Удобно выбрать этот масштаб так, чтобы выполнялись условия нормирования

$$\int_0^l m(x) X_i^2(x) dx + \sum_s m_s X_i^2(x_s) = 1 \quad (9)$$

(в задачах о продольных или поперечных колебаниях);

$$\int_0^l I(x) X_i^2(x) dx + \sum_s I_s X_i^2(x_s) = 1 \quad (10)$$

(в задачах о крутильных колебаниях).

Узлами k -й собственной формы называют неподвижные сечения* стержня, совершающего k -е главное колебание с частотой p_k . Число узлов k -й собственной формы равно $k - 1$; узлы двух смежных собственных форм перемежаются.

* Кроме сечений, неподвижность которых обеспечивается наложенными связями.

Продольные и крутильные колебания стержней; поперечные колебания струн

Основные соотношения при продольных и крутильных колебаниях стержней, а также для поперечных колебаний струн приведены в табл. 1 (сечение постоянное, масса распределена равномерно).

Обозначения: F, J_p — площадь и полярный момент инерции поперечного сечения; ρ, E, G — плотность и модули упругости материала стержня; $u = u(x, t)$; $v = v(x, t)$, $\varphi = \varphi(x, t)$ — продольное и поперечное перемещения и угол поворота текущего поперечного сечения x в текущий момент времени t ; m_*, J_* — масса и момент инерции груза, соединенного с концом стержня; c — жесткость упругой связи, находящейся на конце стержня.

Для определения спектра собственных частот нужно записать граничные условия в развернутой форме; при этом образуется однородная система двух уравнений относительно постоянных C_k и D_k . Далее формулируют условие существования ненулевых решений для C_k и D_k . Таким образом, получается уравнение частот; корни этого трансцендентного уравнения и являются искомыми частотами. После этого образуются собственные формы колебаний.

Пример 1. Определить собственные частоты и формы продольных колебаний консольного стержня (левый конец $x = 0$ закреплен, правый конец $x = l$ — свободный).

Граничное условие на левом конце:

$$X(0) = D_k = 0.$$

Граничное условие на правом конце

$$X'(l) = C_k \frac{\rho_k}{a} \cos \frac{\rho_k l}{a} = 0.$$

Частотное уравнение

$$\cos \frac{\rho_k l}{a} = 0.$$

Его корни

$$\rho_k = \frac{\pi(2k-1)a}{2l}.$$

Собственная форма колебаний

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Результаты для различных комбинаций граничных условий даны в табл. 2 (данные относятся как к продольным, так и к крутильным колебаниям).

В задачах о колебаниях стержней со ступенчатым изменением поперечного сечения, а также в случаях, когда со стержнем связаны сосредоточенные массы или сосредоточенные упругие связи, удобно пользоваться методом начальных параметров и нормировать не собственную форму колебаний X_k , а функцию времени T_k :

$$T_k = \sin(\rho_k t + \varphi_k). \quad (11)$$

При этом собственная форма приобретает смысл кривой амплитуд колебаний, постоянные C_k и D_k выражают через начальные параметры и собственную форму записывают в виде

$$\bar{u}(x) = \frac{\bar{N}_0 a}{\rho E F} \sin \frac{\rho x}{a} + \bar{u}_0 \cos \frac{\rho x}{a} \quad (12)$$

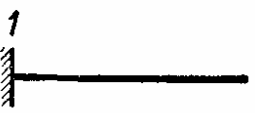



(продольные колебания);

1. Основные соотношения при продольных, крутильных колебаниях стержней и поперечных колебаниях струн

Соотношения	Колебания стержня		Поперечные колебания струны
	продольные	крутильные	
Дифференциальное уравнение задачи о свободных колебаниях	$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$	$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$
	$a^2 = \frac{E}{\rho}$	$a^2 = \frac{G}{\rho}$	$a^2 = \frac{N}{\rho}$
Частное решение	$u_k = X_k(x) T_k(t)$	$\varphi_k = X_k(x) T_k(t)$	$v_k = X_k(x) T_k(x)$
Общее решение	$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$	$\varphi_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$	$v_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$
Собственная форма колебаний	$X_k(x) = C_k \sin \frac{p_k x}{a} + D_k \cos \frac{p_k x}{a}$		

Функция времени	$T_k(t) = A_k (\sin p_k t + \varphi_k)$	
	Свободное сечение	$X' = 0$
Закрепленное сечение	$X = 0$	
Дополнительный груз на левом конце	$EFX' = -m_* p^2 X$	$GJ_p X' = -J_* p^2 X$
То же на правом конце	$EFX' = m_* p^2 X$	$GJ_p X' = J_* p^2 X$
Упругая связь на левом конце	$EFX' = cX$	$GJ_p X' = cX$
То же на правом конце	$EFX' = -cX$	$GJ_p X' = -cX$
Примечание. Начальное натяжение струны N считается настолько значительным, что по сравнению с ним можно пренебречь его малыми изменениями при колебаниях.		

2. Собственные частоты и формы продольных и крутильных колебаний для некоторых граничных условий

Схема стержня	Собственные частоты	Собственные формы колебаний
	$p_k = \frac{\pi (2k - 1)}{2l}$	$X_k(x) = C_k \sin \frac{\pi (2k - 1) x}{2l}$
	<p>Частотное уравнение *</p> $\frac{pl}{a} \operatorname{tg} \frac{pl}{a} = \frac{pFl}{m_*}$	$X_k(x) = C_k \sin \frac{p_k x}{a}$
	$p_k = \frac{k\pi a}{l}$	$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi x}{l}$
	<p>Частотное уравнение</p> $\operatorname{tg} \frac{pl}{a} : \frac{pl}{a} = - \frac{EF}{cl}$	$X_k(x) = C_k \sin \frac{p_k x}{a}$
<p>* Значения низшего корня частотного уравнения даны в табл. 3.</p>		

3. Значения низшего корня частотного уравнения для схемы 2 табл. 2

$\frac{\rho Fl}{m_*}$	$\frac{p_1 l}{a}$	$\frac{\rho Fl}{m_*}$	$\frac{p_1 l}{a}$	$\frac{\rho Fl}{m_*}$	$\frac{p_1 l}{a}$
∞	1,57	3	1,20	0,50	0,65
100	1,56	2	1,08	0,30	0,52
20	1,52	1,5	0,98	0,20	0,42
10	1,42	1,00	0,86	0,10	0,32
5	1,32	0,90	0,82	0,05	0,21
4	1,27	0,70	0,75	0,01	0,10

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{\bar{M}_0 a}{\rho G J_p} \sin \frac{\rho x}{a} + \bar{\varphi}_0 \cos \frac{\rho x}{a} \quad (13)$$

(крутильные колебания).

В выражениях (12) и (13) \bar{u}_0 и $\bar{\varphi}_0$ — начальные смещения (линейное и угловое); \bar{N}_0 и \bar{M}_0 — начальные усилия (продольное усилие и крутящий момент); все эти величины относятся к сечению $x = 0$ в момент времени, когда $T(t) = 1$. Выражениям (12) и (13) соответствуют выражения для внутренних усилий в текущем сечении

$$\bar{N}(x) = \bar{N}_0 \cos \frac{\rho x}{a} - \frac{\bar{u}_0 E F \rho}{a} \sin \frac{\rho x}{a} \quad (14)$$

(продольные колебания) и

$$\bar{M}(x) = \bar{M}_0 \cos \frac{\rho x}{a} - \frac{\bar{\varphi}_0 G J_p \rho}{a} \sin \frac{\rho x}{a} \quad (15)$$

(крутильные колебания).

Поясним дальнейшие выкладки на примере продольных колебаний.

С помощью выражений (12) и (13) образуются последовательные соотношения для конца первого участка длиной l_1

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{\bar{N}_0 a}{\rho E F_1} \sin \frac{\rho l_1}{a} + \bar{u}_0 \cos \frac{\rho l_1}{a}; \\ \bar{N}_1 &= \bar{N}_0 \cos \frac{\rho l_1}{a} - \frac{\bar{u}_0 E F \rho}{a} \sin \frac{\rho l_1}{a}; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

здесь F_1 — площадь сечения на первом участке; затем для конца второго участка

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_2 &= \frac{\bar{N}_1 a}{\rho E F_2} \sin \frac{\rho l_2}{a} + \bar{u}_1 \cos \frac{\rho l_2}{a}; \\ \bar{N}_2 &= \bar{N}_1 \cos \frac{\rho l_2}{a} - \frac{\bar{u}_1 E F_2 \rho}{a} \sin \frac{\rho l_2}{a} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и т. д. до конца стержня.

Таким способом величины \bar{u}_n и \bar{N}_n для концевой сечения выражают через начальные параметры. В этих соотношениях будут содержаться величины \bar{u}_0 , \bar{u}_n , \bar{N}_0 и \bar{N}_n , из которых какие-либо две равны нулю (в закреплённом сечении $\bar{u} = 0$, в свободном сечении $\bar{N} = 0$); уравнение частот получают из условия, что остальные две из указанных величин не равны нулю.

Пример 2. Определить собственные частоты колебаний стержня, показанного на рис. 1.

Соотношения (16) дают

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{N}_0 a}{pEF_1} \sin \frac{pl_1}{a}; \quad \bar{N}_1 = \bar{N}_0 \cos \frac{pl_1}{a}.$$

Здесь учтено, что $\bar{u}_0 = 0$; второе выражение (16) должно быть равно нулю (так как $\bar{N}_2 = 0$), т. е.

$$\bar{N}_0 \cos \frac{pl_1}{a} \cos \frac{pl_2}{a} - \bar{N}_0 \times \\ \times \frac{F_2}{F_1} \sin \frac{pl_1}{a} \sin \frac{pl_2}{a} = 0.$$

Частотное уравнение имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{pl_1}{a} \operatorname{tg} \frac{pl_2}{a} = \frac{F_1}{F_2}.$$

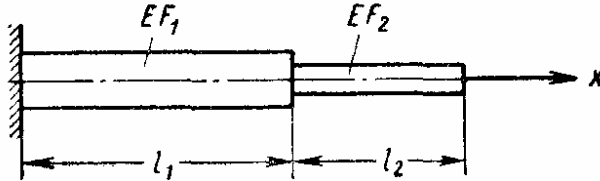


Рис. 1

Если на общей границе двух соседних участков расположена сосредоточенная масса m_s , то при переходе через этот участок продольная сила \bar{N} претерпевает разрыв, равный силе инерции, развиваемой массой m_s :

$$\bar{N}_+ = \bar{N}_- + m_s p^2 \bar{u}; \quad (18)$$

здесь индексы минус и плюс соответствуют сечениям, расположенным непосредственно левее и правее границы.

Пример 3. Определить собственные частоты стержня, показанного на рис. 2. Согласно соотношениям (16) в конце первого участка

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{N}_0 a}{pEF_1} \sin \frac{pl_1}{a}; \\ \bar{N}_{1-} = \bar{N}_0 \cos \frac{pl_1}{a},$$

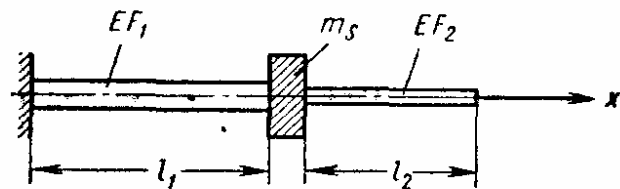


Рис. 2

в соответствии с формулой (18) в начале второго участка

$$\bar{N}_{1+} = \bar{N}_0 \cos \frac{pl_1}{a} + m_s p^2 \frac{\bar{N}_0 a}{pEF_1} \sin \frac{pl_1}{a}.$$

В конце второго участка $\bar{N}_2 = 0$, т. е. по выражению (17):

$$\left[\bar{N}_0 \cos \frac{pl_1}{a} + m_s p^2 \frac{\bar{N}_0 a}{pEF_1} \sin \frac{pl_1}{a} \right] \cos \frac{pl_2}{a} - \\ - \frac{\bar{N}_0 F_2}{F_1} \sin \frac{pl_1}{a} \sin \frac{pl_2}{a} = 0;$$

отсюда следует частотное уравнение

$$1 + \frac{m_s p a}{EF_1} \operatorname{tg} \frac{pl_1}{a} - \frac{F_2}{F_1} \operatorname{tg} \frac{pl_1}{a} \operatorname{tg} \frac{pl_2}{a} = 0.$$

В задачах о крутильных колебаниях аналогично соотношениям (16) и (17) получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= \frac{\bar{M}_0 a}{\rho G J_p} \sin \frac{\rho l_1}{a} + \bar{\varphi}_0 \cos \frac{\rho l_1}{a}; \\ \bar{M}_1 &= \bar{M}_0 \cos \frac{\rho l_1}{a} - \bar{\varphi}_0 \frac{\rho E F_1}{a} \sin \frac{\rho l_1}{a} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_2 &= \frac{\bar{M}_1 a}{\rho E F_2} \sin \frac{\rho l_2}{a} + \bar{\varphi}_1 \cos \frac{\rho l_2}{a}; \\ \bar{M}_2 &= \bar{M}_1 \cos \frac{\rho l_2}{a} - \bar{\varphi}_1 \frac{\rho E F_2}{a} \sin \frac{\rho l_2}{a} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

и т. д.

В сечениях, где имеется сосредоточенный диск, обладающий полярным моментом инерции J_s , следует учесть разрыв в значениях крутящего момента \bar{M} :

$$M_+ = M_- + J_s \rho^2 \bar{\varphi}_s \quad (21)$$

[см. пояснение к выражению (18)].

Пример 4. Составить уравнения частот для вала, показанного на рис. 3. На левом конце вала $\bar{M}_0 = 0$; поэтому по выражениям (19)

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= \bar{\varphi}_0 \cos \frac{\rho l}{a}; \\ \bar{M}_{-1} &= -\bar{\varphi}_0 \frac{\rho G J_p}{a} \sin \frac{\rho l}{a}. \end{aligned}$$

На правом конце $\bar{M}_{1+} = 0$; согласно выражению (21)

$$-\bar{\varphi}_0 \frac{\rho G J_p}{a} \sin \frac{\rho l}{a} + J_s \rho^2 \bar{\varphi}_0 \cos \frac{\rho l}{a} = 0.$$

Условие $\bar{\varphi}_0 \neq 0$ приводит к частотному уравнению

$$\operatorname{tg} \frac{\rho l}{a} = \kappa \frac{\rho l}{a},$$

где

$$\kappa = \frac{J_s}{l \rho J_p}.$$

Значения наименьшего отличного от нуля корня этого уравнения следующие:

κ	0	0,5	1,0	10	∞
$\frac{\rho_1 l}{a}$	3,14	4,26	4,50	4,69	4,71

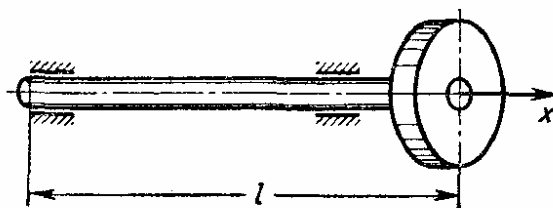


Рис. 3

Изгибные колебания стержней

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний стержня постоянного сечения имеет вид

$$\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (22)$$

в котором $v = v(x, t)$ — прогиб текущей точки оси стержня; EJ — изгибная жесткость сечения балки; m — интенсивность массы балки (масса единицы длины).

Частное решение дифференциального уравнения (22):

$$v_k(x, t) = X_k(x) T_k(t), \quad (23)$$

причем функция времени

$$T_k(t) = A_k \sin(p_k t + \varphi_k) \quad (24)$$

описывает течение колебательного процесса во времени (p_k — собственная частота колебаний), а функция координаты x

$$X_k(x) = C_1 S(ax) + C_2 T(ax) + C_3 U(ax) + C_4 V(ax) \quad (25)$$

представляет собой *собственную форму колебаний*. В выражение (25) входят следующие функции Крылова:

$$\left. \begin{aligned} S(ax) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} ax + \cos ax); \\ T(ax) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} ax + \sin ax); \\ U(ax) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} ax - \cos ax); \\ V(ax) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} ax - \sin ax), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

причем

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{mp^2}{EJ}}. \quad (27)$$

Значения функций Крылова приведены в табл. 4.

Последовательные производные функции $X(x)$ по переменной x имеют вид

$$\left. \begin{aligned} X'(x) &= \alpha [C_1 V(ax) + C_2 S(ax) + C_3 T(ax) + C_4 U(ax)]; \\ X''(x) &= \alpha^2 [C_1 U(ax) + C_2 V(ax) + C_3 S(ax) + C_4 T(ax)]; \\ X'''(x) &= \alpha^3 [C_1 T(ax) + C_2 U(ax) + C_3 V(ax) + C_4 S(ax)]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

4. Значения функций Крылова

αx	$S(\alpha x)$	$T(\alpha x)$	$U(\alpha x)$	$V(\alpha x)$
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	1,00000	0,01000	0,00005	0,00000
0,02	1,00000	0,02000	0,00020	0,00000
0,03	1,00000	0,03000	0,00045	0,00000
0,04	1,00000	0,04000	0,00080	0,00001
0,05	1,00000	0,05000	0,00125	0,00002
0,06	1,00000	0,06000	0,00180	0,00004
0,07	1,00000	0,07000	0,00245	0,00006
0,08	1,00000	0,08000	0,00320	0,00009
0,09	1,00000	0,09000	0,00405	0,00012
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,20	1,00007	0,20000	0,02000	0,00133
0,30	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,40	1,00106	0,40008	0,07999	0,01062
0,50	1,00261	0,50026	0,12502	0,02084
0,60	1,00539	0,60064	0,18006	0,03606
0,70	1,01001	0,70190	0,24516	0,05718
0,80	1,01702	0,80273	0,32036	0,08537
0,90	1,02735	0,90492	0,40574	0,12159
1,0	1,04169	1,00833	0,50139	0,16686
1,1	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,2	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,3	1,11920	1,33097	0,85170	0,36691
1,4	1,16043	1,44487	0,99046	0,45942
1,5	1,21157	1,56338	1,14083	0,56589
1/2 π	1,25409	1,65015	1,25409	0,65015
1,6	1,27413	1,68757	1,30333	0,63800
1,7	1,39974	1,81864	1,47832	0,82698
1,8	1,44013	1,95801	1,66823	0,98416
1,9	1,54722	2,10723	1,87551	1,16093
2,0	1,67277	2,26808	2,08917	1,35828
2,1	1,82973	2,44253	2,32458	1,57937
2,2	1,98970	2,63280	2,57820	1,82430
2,3	2,18547	2,84133	2,85175	2,09562
2,4	2,40978	3,07085	3,14717	2,39537
2,5	2,66557	3,32433	3,46671	2,72586
2,6	2,95606	3,60511	3,81295	3,08961
2,7	3,08470	3,91682	4,18872	3,48944
2,8	3,65520	4,26346	4,59747	3,92846
2,9	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
3,0	4,53883	5,07949	5,52882	4,93837
3,1	5,06118	5,55901	6,06032	5,51743
π	5,29597	5,77437	6,29597	5,77437

Продолжение табл. 4

αx	$S (\alpha x)$	$T (\alpha x)$	$U (\alpha x)$	$V (\alpha x)$
3,2	5,64418	6,09375	6,64247	6,15212
3,3	6,29364	6,69006	7,28112	6,84781
3,4	7,01592	7,35491	7,98277	7,61045
3,5	7,81818	8,09592	8,75464	8,44760
3,6	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,7	9,69345	9,84072	10,54205	10,37056
3,8	10,78540	10,86377	11,57637	11,47563
3,9	11,99271	12,00167	12,71864	12,68943
4,0	13,32739	13,26656	13,98093	14,02336
4,1	14,80180	14,67179	15,37662	15,49007
4,2	16,43020	16,23204	16,92046	17,10362
4,3	18,27794	17,96347	18,62874	18,87964
4,4	20,21212	19,88385	20,51945	20,83545
4,5	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,6	24,81751	24,37172	24,92966	25,36541
4,7	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
$\frac{3\pi}{2}$	27,83169	27,32720	27,83169	28,32720
4,8	30,42341	29,87746	30,33591	30,87362
4,9	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181
5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,58106
5,1	41,19599	40,54105	40,81801	41,46686
5,2	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,3	50,36263	49,66682	49,80826	50,49909
5,4	55,67008	54,96409	55,03539	55,73685
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,6	67,99531	67,29004	66,21974	67,92131
5,7	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
5,8	83,01840	82,34183	82,13288	82,80633
5,9	91,72379	91,07172	90,79631	91,44562
6,0	101,33790	100,71687	100,37773	100,99629
6,1	111,95664	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
2π	134,37338	133,87245	133,37338	133,87245
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,6	184,24925	183,92922	183,29902	183,61768

Продолжение табл. 4

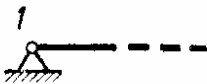
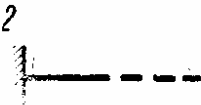

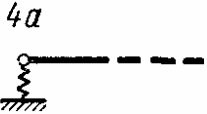



αx	$S(\alpha x)$	$T(\alpha x)$	$U(\alpha x)$	$V(\alpha x)$
6,7	203,55895	203,30357	202,64457	202,89872
6,8	224,89590	224,70860	224,02740	224,21449
6,9	248,47679	248,35764	247,66106	247,77920
7,0	274,53547	274,48655	273,78157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	335,16205	335,25434	334,55370	334,46067
7,3	370,33819	370,50003	369,81211	369,64954
7,4	409,21553	409,44531	408,77698	408,54660
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,6	499,67473	500,03281	499,42347	499,06489
7,7	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
7,8	610,17757	610,64966	610,12361	609,65112
5/2 π	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
7,9	674,29767	674,81986	674,34367	673,82102
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473
8,1	823,49532	823,95189	823,73886	823,28200
8,2	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714
8,3	1005,75247	1006,41912	1006,18385	1005,51695
8,4	1111,50710	1112,19393	1112,02639	1111,33933
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,99326	1228,29291
8,6	1357,57558	1358,28205	1358,25430	1357,54765
8,7	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,39658
8,8	1658,15549	1658,85342	1658,96658	1658,26850
8,9	1832,56070	1833,42607	1833,42614	1832,74284
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56489
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66360
9,2	2473,79487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56071	2735,00094	2734,44255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,59505	3022,08297
3 π	3097,41192	3097,91193	3098,41197	3097,91193
9,5	3339,43314	3339,89411	3340,43031	3339,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,7	4078,92063	4079,26590	4079,88299	4079,53766
9,8	4508,47103	4508,25298	4508,90146	4508,61946
9,9	4982,14802	4982,35202	4983,03721	4982,32136
10,0	5596,19606	5506,34442	5507,03599	5506,88844

Постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 выражаются через начальные значения функции $X(x)$ и ее производные

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= X(0); & C_2 &= \frac{1}{\alpha} X'(0); \\ C_3 &= \frac{1}{\alpha^2} X''(0); & C_4 &= \frac{1}{\alpha^3} X'''(0). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

На каждом конце стержня имеется по два граничных условия, приведенных в табл. 5.

5. Граничные условия на конце стержня

Способ закрепления конца		Граничные условия
Шарнирно-опертый		$X = 0; \quad X'' = 0$
Закрепленный		$X = 0; \quad X' = 0$
Свободный		$X'' = 0; \quad X''' = 0$
Упруго-опертый (жесткость опоры c)		$X'' = 0; \quad EJX''' = cX$
		$X'' = 0; \quad EJX''' = -cX$
Свободный конец с присоединенной точечной массой m_*		$X'' = 0; \quad m_* p^2 X = -EJX'''$
		$X'' = 0; \quad m_* p^2 X = EJX'''$

Для составления уравнения частот нужно с помощью соотношений (25) и (28) выразить граничные условия задачи через функции Крылова, а затем записать условие существования ненулевых решений для постоянных C_i .

Пример 5. Составить уравнения частот для стержня, показанного на рис. 4. Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= 0; & X'(0) &= 0; \\ X(l) &= 0; & X''(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Подставляя сюда выражения (25) и (28), получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0; & C_2 &= 0; \\ C_3 U(\alpha l) + C_4 V(\alpha l) &= 0; \\ C_3 S(\alpha l) + C_4 T(\alpha l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Условие ненулевых решений для постоянных C_3 и C_4 :

$$\begin{vmatrix} U(\alpha l) & V(\alpha l) \\ S(\alpha l) & T(\alpha l) \end{vmatrix} = 0. \quad (32)$$

Подставляя сюда выражения (26), получаем трансцендентное уравнение частот

$$\operatorname{tg} \alpha l = \operatorname{th} \alpha l, \quad (33)$$

корни которого

$$(\alpha l)_1 = 3,927; \quad (\alpha l)_2 = 7,069; \quad \dots;$$

$$(\alpha l)_n = \frac{4n+1}{4} \pi.$$

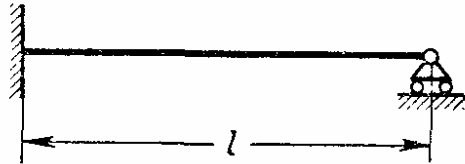


Рис. 4

Уравнения частот и их корни для различных комбинаций закрепления концов стержня приведены в табл. 6, а выражения для собственных форм колебаний — в табл. 7.

Для облегчения последующего решения задач о вынужденных колебаниях иногда полезно умножить собственную функцию на некоторый нормирующий множитель, определяемый из условия нормирования (9).







Уравнения частот для балок со ступенчатым изменением сечения, с промежуточными опорами (в частности, упругими) и с дополнительными массами составляют на основе соотношений (25)–(29) с учетом условий сопряжения участков (табл. 8).

В табл. 9 приведены коэффициенты αl , с помощью которых по формуле (27) определяют низшие собственные частоты изгибных колебаний стержней с упругими опорами и собственные частоты изгибных колебаний стержней с дополнительными сосредоточенными массами.

Колебания неразрезных балок. Уравнения частот удобно составлять в форме уравнения трех моментов:

$$\begin{aligned} M_{n-1} \frac{1}{(\alpha EJ)_n} \cdot \frac{V_n}{R_n^2 - V_n^2} + M_n \left[\frac{1}{(\alpha EJ)_n} \cdot \frac{T_n U_n - S_n V_n}{T_n^2 - V_n^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\alpha EJ)_{n+1}} \cdot \frac{T_{n+1} U_{n+1} - S_{n+1} V_{n+1}}{T_{n+1}^2 - V_{n+1}^2} \right] + \\ + M_{n+1} \frac{1}{(\alpha EJ)_{n+1}} \cdot \frac{V_{n+1}}{T_{n+1}^2 - V_{n+1}^2} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

6. Уравнения частот и их корни

Схема балки	Уравнение частот	Корни уравнения частот	
	$\sin \alpha l = 0$	1 2 3 4 k	3,142 6,283 9,425 12,566 kπ
	$\cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = 1$	1 2 3 4 k	4,730 7,859 10,996 14,137 $\frac{\pi}{2} (2k + 1)$
	$\operatorname{tg} \alpha l = \operatorname{th} \alpha l$	1 2 3 4 k	3,927 7,069 10,210 13,352 $\frac{\pi}{4} (4k + 1)$
	$\cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = -1$	1 2 3 4 k	1,875 4,694 7,855 10,996 $\frac{\pi}{2} (2k - 1)$
	$\cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = 1$	1 2 3 4 5 k	0 4,730 7,853 10,996 14,137 $\frac{\pi}{2} (2k - 1)$
	$\operatorname{tg} \alpha l = \operatorname{th} \alpha l$	1 2 3 4 5 k	0 3,927 7,069 10,210 13,352 $\frac{4k - 3}{4} \pi$

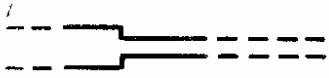

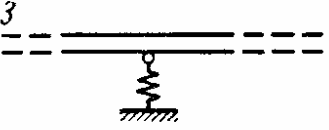
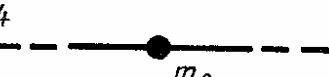

7. Выражения для собственных форм колебаний

Схема в табл. 6	Собственная форма колебаний
1	$X(\alpha x) = \sin \alpha x$
2	$X(\alpha x) = (\sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)(\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x) -$ $-(\operatorname{ch} \alpha l - \cos \alpha l)(\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x)$


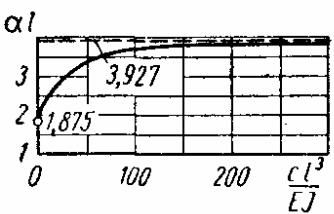

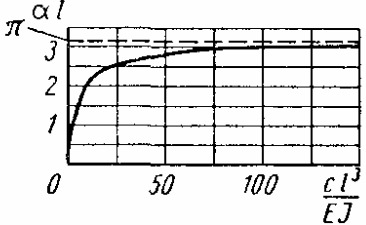
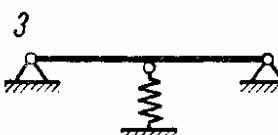
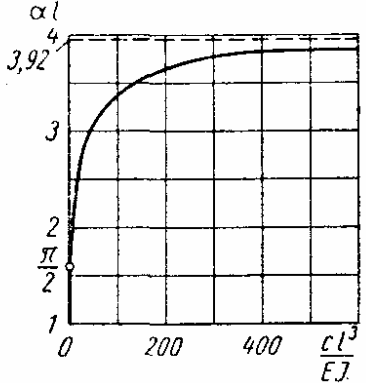
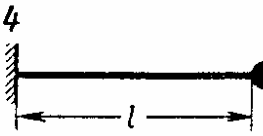
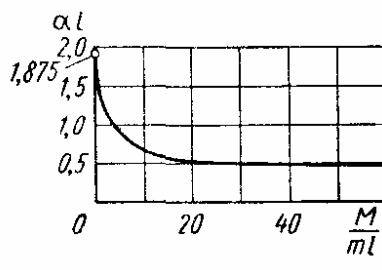
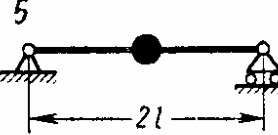
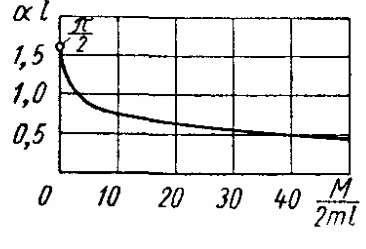
Продолжение табл. 7

Схема в табл. 6	Собственная форма колебаний
3	$X(ax) = (\sin al + \operatorname{sh} al)(\operatorname{ch} ax - \cos ax) -$ $-(\operatorname{ch} al + \cos al)(\operatorname{sh} ax - \sin ax)$
4	$X(x) = (\operatorname{sh} al + \sin al)(\operatorname{ch} ax - \cos ax) -$ $-(\operatorname{ch} al + \cos al)(\operatorname{sh} ax - \sin ax)$
5	$X(x) = (\operatorname{ch} al - \cos al)(\operatorname{sh} ax + \sin ax) -$ $-(\operatorname{sh} al - \sin al)(\operatorname{ch} ax + \cos ax)$
6	$X(x) = (\operatorname{ch} al + \cos al)(\operatorname{sh} ax + \sin ax) -$ $-(\operatorname{sh} al + \sin al)(\operatorname{ch} ax + \cos ax)$

8. Условия сопряжения участков для балок со ступенчатым изменением сечений и сосредоточенными массами

Условия на общей границе смежных участков	Аналитические условия сопряжения
 Ступенчатое изменение по- перечного сечения	$X_- = X_+; \quad X'_- = X'_+;$ $(EJX'')_- = (EJX'')_+;$ $(EJX''')_- = (EJX''')_+$
 Промежуточная опора	$X_- = X_+ = 0; \quad X'_- = X'_+;$ $(EJX'')_- = (EJX'')_+;$ $(EJX''')_- = (EJX''')_+ - R$
 Промежуточная упругая опора	$X_- = X_+; \quad X'_- = X'_+;$ $(EJX'')_- = (EJX'')_+;$ $(EJX''')_- = (EJX''')_+ + cX_{\pm}$
 Сосредоточенная масса	$X_- = X_+; \quad X'_- = X'_+;$ $(EJX'')_- = (EJX'')_+;$ $(EJX''')_- = (EJX''')_+ - m_s p^2 X$
 Сосредоточенная масса с конечным моментом инер- ции	$X_- = X_+; \quad X'_- = X'_+;$ $(EJX'')_- = (EJX'')_+ + J_s p^2 X'_+;$ $(EJX''')_- = (EJX''')_+ - m_s p^2 X_{\pm}$

9. Значения коэффициентов αl

Схема стержня	График
<p>1</p> 	
<p>2</p> 	
<p>3</p>  <p>Длина балки $2l$; основной тон симметричных колебаний</p>	
<p>4</p> 	
<p>5</p>  <p>Основной тон симметричных колебаний</p>	

где n — номер пролета, совпадающий с номером правой опоры данного пролета. Если жесткость и интенсивность распределенной массы одинаковы во всех пролетах, то в уравнении (34) сокращаются все множители $\frac{1}{\alpha EJ}$. Если, кроме того, все пролеты имеют равные длины, то уравнение (34) приобретает вид

$$M_{n-1}V_n + 2M_n(T_nU_n - S_nV_n) + M_{n+1}V_{n+1} = 0. \quad (35)$$

Пример 6. Составить уравнения частот двухпролетной балки с постоянными жесткостью и интенсивностью распределенной массы, но с разными длинами пролетов l_1 и l_2 . В данном случае $M_0 = M_2 = 0$ и по уравнению (35) получаем

$$M_1 \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha l_1 \sin \alpha l_1 - \operatorname{sh} \alpha l_1 \cos \alpha l_1}{2 \operatorname{sh} \alpha l_1 \sin \alpha l_1} + \frac{\operatorname{ch} \alpha l_2 \sin \alpha l_2 - \operatorname{sh} \alpha l_2 \cos \alpha l_2}{2 \operatorname{sh} \alpha l_2 \sin \alpha l_2} \right] = 0.$$

Так как $M_1 \neq 0$, то нулю должно равняться выражение, стоящее в скобках; это дает

$$\operatorname{ctg} \alpha l_1 + \operatorname{ctg} \alpha l_2 = \operatorname{ctg} \alpha l_1 + \operatorname{ctg} \alpha l_2.$$

Например, при $l_1 = l_2$ наименьший корень $\alpha l = 1,78$.

Влияние заданной продольной силы. Если стержень испытывает действие продольной силы N , то дифференциальное уравнение его свободных поперечных колебаний имеет вид

$$\frac{EJ}{m} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{N}{m} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (36)$$

причем положительной считается сжимающая сила N .

Собственная форма колебаний определяется выражением

$$X(x) = C_1 \operatorname{sh} \beta x + C_2 \operatorname{ch} \beta x + C_3 \sin \gamma x + C_4 \cos \gamma x, \quad (37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{N}{EJ} \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\alpha^4 (EJ)^2}{N^2}}}; \\ \gamma &= \frac{N}{EJ} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\alpha^4 (EJ)^2}{N^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Величину α определяют по формуле (27). Собственные частоты p^* шарнирно опертого стержня вычисляют по формуле

$$p_k^* = p_k \sqrt{1 + \frac{Nl^2}{k^2 \pi^2 EJ}}, \quad (39)$$

в которой p_k — k -я собственная частота при $N = 0$.

Низшая собственная частота колебаний консольного стержня, нагруженного на свободном конце сжимающей силой N ,

$$p_1^* = p_1 \sqrt{1 + \frac{5Nl^2}{14EJ}}. \quad (40)$$

Если консольный стержень нагружен равномерно распределенной продольной нагрузкой, то низшая собственная частота колебаний

$$p_1^* = p_1 \sqrt{1 + \frac{ql^3}{8EJ}}. \quad (41)$$

В формулах (40) и (41) p_1 — низшая собственная частота колебаний консольного стержня без продольной нагрузки.

В некоторых случаях продольная сила возникает вследствие изгиба стержня и носит характер реакции. Это явление нелинейно по своему существу, и собственная частота зависит от амплитуды колебаний. Для стержня с шарнирно неподвижными опорами на концах k -ю собственную частоту колебаний находят по формуле

$$p_k^* = p_k \kappa, \quad (42)$$

где κ — поправочный коэффициент, зависящий от отношения амплитуды колебаний a к радиусу инерции поперечного сечения ρ ; значения κ даны в табл. 10.

10. Значения коэффициента κ в формуле (42)

$\frac{a}{\rho}$	κ	$\frac{a}{\rho}$	κ	$\frac{a}{\rho}$	κ
0	1	0,8	1,058	3	1,626
0,1	1,0008	1	1,089	4	1,976
0,2	1,0038	1,5	1,190	5	2,35
0,4	1,015	2	1,316	10	4,75
0,6	1,038				

При $\rho \rightarrow 0$ формула (42) дает неопределенное значение для p^* , так как $p = 0$ и $\kappa = \infty$. После раскрытия неопределенности получается выражение для собственной частоты колебаний струны, начальное натяжение которой равно нулю:

$$p^* = 4,17 \frac{a}{l^2} \sqrt{\frac{EF}{m}}. \quad (43)$$

(если начальное натяжение велико по сравнению с его изменениями при колебаниях, следует пользоваться схемой 3 табл. 2).

Влияние сдвигов и инерции вращения. Это влияние особенно заметно при колебаниях стержней небольшой длины. Для шарнирно опертого стержня собственные частоты определяются формулой

$$p_k^* = p_1 \frac{k\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \beta^2 + \frac{\beta^2 \lambda^2}{\pi^2 k^2} \right] \pm \sqrt{\left(1 + \beta^2 + \frac{\beta^2 \lambda^2}{\pi^2 k^2} \right)^2 - 4\beta^2}}, \quad (44)$$

где $p_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ — низшая собственная частота, вычисленная без учета сдвигов и инерции вращения; $\lambda = \frac{l}{\rho}$ — гибкость стержня; β — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (для прямоугольной формы сечения $\beta = 1,2$),

$$\beta^2 = \frac{G}{bE};$$

k — число полуволн, которые образует ось стержня при колебаниях.

Формула (44) определяет два значения собственной частоты, отвечающих данному числу k полуволн. Низшее значение соответствует такой форме колебаний, при которой поперечные сечения поворачиваются в ту же сторону, что и касательные к изогнутой оси; второе значение соответствует противоположным направлениям поворота сечений и касательных к изогнутой оси.

Собственные частоты, полученные по формуле (44), приведены в табл. 11.

11. Собственные частоты для шарнирно опертого стержня (при $\frac{E}{G} = 2,6$ и $\beta = 1,2$)

k	$\frac{p_{\text{низш}}^*}{p_1}$	$\frac{p_{\text{вышш}}^*}{p_1}$
1	0,98	70,0
2	3,74	73,6
3	7,92	78,2
4	13,08	84,0
5	18,77	91,6

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ (ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ ИССЛЕДОВАНИЯ)

Приближенные способы применяют при анализе колебаний стержней с переменной жесткостью и массой.

Способ замены распределенных параметров сосредоточенными

Этот способ допускает два варианта. Согласно первому варианту распределенную массу (рис. 5, а) заменяют несколькими сосредоточенными (рис. 5, б). Второй вариант предполагает замену стержня упругой шарнирной цепью (рис. 5, в), каждое звено которой совершенно недеформируемо, а приписываемые шарнирам коэффициенты упругости выбирают из условий достаточной близости общих жесткостей заменяемой и заменяющей систем.

В обоих вариантах задача сводится к рассмотрению системы с конечным числом степеней свободы и, следовательно, позволяет найти лишь несколько (например, s) низших частот. Для этого необходимо заменить заданное распределение масс (жесткостей) достаточно большим (во всяком случае, не меньшим, чем s) числом сосредоточенных масс (упругих шарниров). Однако и в этом случае результат может сильно зависеть от выбора мест сосредоточения параметров.

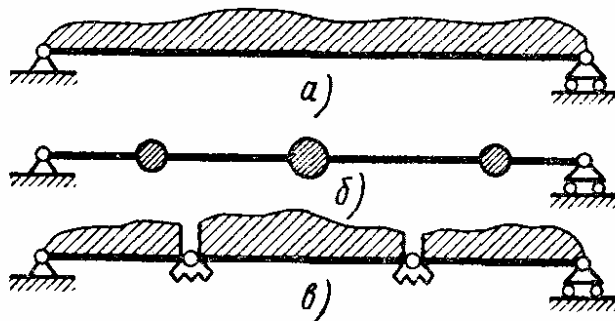


Рис. 5

Формула Рэлея

Формула Рэлея основана на энергетическом соотношении (9), гл. 4 и в зависимости от типа колебаний приобретает одну из форм, указанных в табл. 11, гл. 4; при этом выбирают (с точностью до постоянного множителя) функцию, описывающую форму перемещений стержня. Наряду с этим существуют иные варианты записи, приведенные в табл. 12.

12. Выражения квадрата собственной частоты

Ва- риант	Продольные колебания	Крутильные колебания	Поперечные колебания
1	$\frac{\int_0^l EF (X')^2 dx}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$	$\frac{\int_0^l GJ_p (X')^2 dx}{\int_0^l IX^2 dx + \sum I_i X_i^2}$	$\frac{\int_0^l EJ (X'')^2 dx}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$
2	$\frac{\int_0^l N^2 dx}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$	$\frac{\int_0^l M_\kappa^2 dx}{\int_0^l IX^2 dx + \sum I_i X_i^2}$	$\frac{\int_0^l M^2 dx}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$
3	$\frac{\int_0^l q(x) X dx}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$	$\frac{\int_0^l \mu(x) X dx}{\int_0^l IX^2 dx + \sum I_i X_i^2}$	$\frac{\int_0^l q(x) X dx}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$
4	$\frac{\int_0^l q(x) X dx + \sum P_i X_i}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$	$\frac{\int_0^l \mu(x) X dx + \sum \mu_i X_i}{\int_0^l IX^2 dx + \sum I_i X_i^2}$	$\frac{\int_0^l q(x) X dx + \sum P_i X_i}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$
5	$g \frac{\int_0^l mX dx + \sum m_i X_i}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$	—	$g \frac{\int_0^l mX dx + \sum m_i X_i}{\int_0^l mX^2 dx + \sum m_i X_i^2}$
Обозначения: $m(x)$ — интенсивность распределенной массы; m_i — сосредоточенные массы; $I(x)$ — момент инерции единицы длины стержня относительно его оси; I_i — моменты инерции дисков.			

Вариант 1 предполагает определенный предварительный выбор функции $X(x)$, описывающей перемещения стержня при колебаниях.

Вариант 2 не отличается от варианта 1, если задаваться функциями $X(x)$, а внутренние усилия определять по формулам

$$N = EF X'; \quad M_K = GJ_p X'; \quad M = EJ X''. \quad (45)$$

Однако можно задаваться распределением внутренних усилий $N(x)$, $M_K(x)$ или $M(x)$ и путем интегрирования соотношений (45) определять соответствующие функции $X(x)$.

В варианте 3 сначала задаются некоторой нагрузкой $q(x)$ [или моментной нагрузкой $\mu(x)$ в случае крутильных колебаний] и затем определяют вызываемые этой нагрузкой перемещения $X(x)$.

Вариант 4 близок к варианту 3, но относится к случаю, когда задаваемая нагрузка содержит также сосредоточенные силы P_i или сосредоточенные крутящие моменты μ_i . Наибольшей определенностью обладает вариант 5; здесь в качестве нагрузки $q(x)$ [или $\mu(x)$] принимают фактические веса единицы длины $gm(x)$.

Применение вариантов 1—4 может привести к точным результатам (в вариантах 1 и 2 — если принимаемые функции точно совпадают с истинной собственной формой колебаний, в вариантах 3 и 4 — если принимаемые нагрузки пропорциональны истинным силам инерции, развивающимся при главных колебаниях). В остальных случаях, а также при пользовании вариантом 5 результаты вычисления собственной частоты получаются завышенными.

Пример 7. Определить основную частоту изгибных колебаний консоли (рис. 6).



Рис. 6

Сначала воспользуемся вариантом 1 и примем

$$X(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2. \quad (46)$$

Теперь находим

$$X''(x) = \frac{2}{l^2}; \quad \int_0^l EJ (X'')^2 dx = \frac{4EJ}{l^3};$$

$$\int_0^l mX^2 dx = m \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 dx = \frac{ml}{5}$$

и согласно варианту 1 табл. 12 определяем

$$p^2 = \frac{4EJ}{l^3} : \frac{ml}{5} = \frac{20EJ}{ml^4},$$

т. е.

$$p = \frac{4,47}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (47)$$

что заметно отличается от точного результата

$$p = \frac{3,51}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (48)$$

Причину столь большого расхождения следует видеть в недостаточно удачном выборе функции $X(x)$.

По варианту 2 зададимся не формой изгиба, а выражением изгибающего момента. Примем

$$M = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

и интегрируя 2 раза соотношение

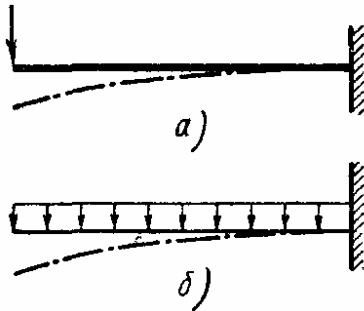


Рис. 7

находим

$$EJX'' = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2,$$

$$EJX' = -\frac{l}{3} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3 + C;$$

$$EJX = \frac{l^2}{12} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 + Cx + D.$$

Из условий на правом конце

$$X(l) = 0; \quad X'(l) = 0$$

получаем

$$C = 0; \quad D = 0,$$

так что

$$X = \frac{l^2}{12EJ} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4.$$

Теперь по варианту 2 табл. 12 находим

$$p^2 = \frac{\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 dx}{EJ \int_0^l m \left[\frac{l^2}{12EJ} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 \right]^2 dx} = \frac{108EJ}{5ml^4}.$$

т. е.

$$p = \frac{4,65}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (49)$$

Гораздо лучшие результаты получаются по варианту 4, если принять в качестве функции $X(x)$ кривую изгиба, вызываемого сосредоточенной силой P на конце стержня (рис. 7, а).

При этом

$$X(x) = \frac{Pl^3}{6EJ} \left(\frac{x^3}{l^3} - \frac{3x}{l} + 2 \right)$$

и, соответственно,

$$p^2 = \frac{P \frac{Pl^3}{3EJ}}{\int_0^l m \left(\frac{Pl^3}{6EJ} \right)^2 \left(\frac{x^3}{l^3} - \frac{3x}{l} + 2 \right)^2 dx} = \frac{140EJ}{11ml^4}.$$

Следующее отсюда значение собственной частоты

$$p = \frac{3,53}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (50)$$

весьма мало отличается от точного значения (48).

Согласно варианту 5 необходимо принять за функцию $X(x)$ кривую статического изгиба, вызываемого равномерно распределенной нагрузкой (рис. 7, б)

$$X(x) = \frac{mgl^4}{8EJ} \left(1 - \frac{4x}{3l} + \frac{x^4}{3l^4} \right). \quad (51)$$

При этом

$$\int_0^l mX \, dx = \frac{m^2 gl^5}{20EJ}; \quad \int_0^l mX^2 \, dx = \frac{13m^3 g^2 l^9}{3240 (EJ)^2}.$$

По формуле табл. 12

$$p^2 = g \frac{\int_0^l mX \, dx}{\int_0^l mX^2 \, dx} = \frac{162EJ}{13ml^4},$$

т. е.

$$p = \frac{3,52}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (52)$$

что очень близко к точному значению (48).

Формула Граммеля

Формула Граммеля также дает всегда завышенные результаты и в зависимости от вида колебаний принимает форму, указанную в табл. 13.

13. Формулы Граммеля для определения квадрата собственной частоты

Вид колебаний	Формула
Продольные	$\frac{\int_0^l mX^2 \, dx + \sum m_i X_i^2}{\int_0^l \frac{N^2 \, dx}{EJ}}$
Крутильные	$\frac{\int_0^l I X^2 \, dx + \sum I_i X_i^2}{\int_0^l \frac{M_\kappa^2 \, dx}{GJ_\rho}}$
Изгибные	$\frac{\int_0^l mX^2 \, dx + \sum m_i X_i^2}{\int_0^l \frac{M^2 \, dx}{EJ}}$

Перед вычислением собственной частоты, например изгибных колебаний, нужно задаться формой колебаний $X(x)$ и, приняв за нагрузку q произведение

$$q(x) = m(x) X(x),$$

определить изгибающий момент $M(x)$ из дифференциального уравнения

$$M'' = q(x).$$

После этого найденное выражение подставляют в формулу Граммеля, которая дает более точные результаты, чем формула Рэлея [при том же выборе функции $X(x)$].

Пример 8. Определить собственную частоту колебаний консоли (рис. 6) по формуле Граммеля. Полагая

$$X(x) = \left(1 - \frac{4x}{3l} + \frac{x^4}{3l^4}\right)$$

[что соответствует выражению (51) в решении по формуле Рэлея], принимаем за нагрузку выражение

$$q = m \left(1 - \frac{4x}{3l} + \frac{x^4}{3l^4}\right).$$

Двукратным интегрированием находим изгибающий момент

$$M = m \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{9l} + \frac{x^6}{90l^4}\right)$$

и далее определяем

$$\int_0^l m X^2 dx = 0,2568ml; \quad \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} = 0,02077 \frac{m^2 l^5}{EJ}.$$

Теперь по формуле для изгибных колебаний в табл. 13 находим

$$p^2 = \frac{12,36EJ}{ml^4},$$

т. е.

$$p = \frac{3,51}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (53)$$

Вариантом записи формулы Граммеля является формула Гогенемзер-Прагера (табл. 14).

14. Формулы Гогенемзер-Прагера для определения квадрата собственной частоты

Вид колебаний	Формула
Продольные	$\int_0^l \frac{(N')^2 dx}{m} : \int_0^l \frac{N^2 dx}{EF}$
Крутильные	$\int_0^l \frac{(M'_\kappa)^2 dx}{I} : \int_0^l \frac{M_\kappa^2 dx}{GJ_p}$
Поперечные	$\int_0^l \frac{(M'')^2 dx}{m} : \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ}$

Формула Донкерли

В отличие от ранее приведенных формул, формула Донкерли дает всегда *заниженные значения* основной собственной частоты колебаний. Согласно этой формуле при продольных и изгибных колебаниях

$$p^2 = 1 : \left[\int_0^l m(x) \delta(x, x) dx + \sum m_i \delta(x_i, x_i) \right], \quad (54)$$

где $\delta(x, x)$ — функция влияния, т. е. перемещение сечения с абсциссой x под действием единичной статической силы, приложенной в том же сечении. При крутильных колебаниях

$$p^2 = 1 : \left[\int_0^l I(x) \delta(x, x) dx + \sum I_i \delta(x_i, x_i) \right], \quad (55)$$

причем $\delta(x, x)$ — угол поворота сечения с абсциссой, определяемой от статического действия единичного крутящего момента, приложенного в том же сечении.

Способ последовательных приближений для определения первой собственной частоты колебаний

Согласно этому способу первую собственную частоту изгибных колебаний определяют в следующем порядке:

а) задаются формой колебаний $X^{(0)}(x)$, верхний индекс обозначает номер приближения. Функция $X^{(0)}$ должна удовлетворять условиям закрепления концов стержня;

б) определяют силы инерции по формуле

$$q^{(0)}(x) = m(x) X^{(0)} [p^{(0)}]^2. \quad (56)$$

Значение $p^{(0)}$ принимают произвольно, но чем ближе принятое значение $p^{(0)}$ к истинному, тем быстрее будут завершены указанные далее операции;

в) способами теории сопротивления материалов (чаще всего путем численного интегрирования или графо-аналитически) находят перемещения $X^{(1)}(x)$, вызываемые нагрузками (56); функция $X^{(1)}(x)$ является улучшенным приближением к истинной форме колебаний;

г) вычисляют первое приближение для квадрата собственной частоты по формуле

$$[p^{(1)}]^2 = \frac{\int_0^l q^{(0)}(x) X^{(1)} dx}{\int_0^l m(x) [X^{(1)}(x)]^2 dx}; \quad (57)$$

д) найденную форму колебаний $X^{(1)}(x)$ принимают за исходную и повторяют выкладки, указанные в пп. а—г; таким способом получают собственные форму и частоту во втором приближении.

Вычисления продолжают до тех пор, пока два последовательных значения собственной частоты колебаний не окажутся достаточно близкими одно к другому.

Независимо от исходного предположения о форме $X^{(0)}(x)$, процесс сходится к *нижней* собственной частоте.

Способ последовательных приближений для определения второй собственной частоты

Для определения второй собственной частоты колебаний предварительно необходимо найти (с возможно большей точностью) первую собственную форму $X_1(x)$, после этого:

- а) задаются подходящей второй собственной формой $X_*^{(0)}$;
- б) определяют параметр

$$a = - \int_0^l m(x) X_*^{(0)} X_1 dx : \int_0^l m(x) X_1^2 dx; \quad (58)$$

- в) образуют функцию

$$X^{(0)} = X_*^{(0)} + a X_1, \quad (59)$$

которая оказывается ортогональной первой собственной форме.

Дальнейшие выкладки не отличаются от приведенных выше и в результате получается функция первого приближения $X_*^{(1)}$; из-за неточностей вычислений эта функция может оказаться не вполне ортогональной к первой собственной форме $X_1(x)$; поэтому, прежде чем переходить к построению второго приближения, вновь добиваются ортогональности, положив подобно выражению (59)

$$X^{(1)} = X_*^{(1)} + a_1 X_1, \quad (60)$$

где аналогично формуле (59)

$$a_1 = - \int_0^l m(x) X_*^{(1)} x_1 dx : \int_0^l m(x) X_1^2 dx \quad (61)$$

и т. д. В более общем виде метод последовательных приближений используют при применении интегральных уравнений [3] (см. также [1] в литературе к гл. 1).

Метод Ритца

Этот метод позволяет приближенно найти одновременно несколько низших частот (см. [2] в литературе к гл. 4).

Для этого задаются системой функций $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x)$, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, и вычисляют величины (для случая изгибных колебаний)

$$\left. \begin{aligned} T_{ik} &= \int_0^l m X_i X_k dx; \\ U_{ik} &= \int_0^l E J X_i'' X_k'' dx. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Собственные частоты определяют из уравнения частот

$$\begin{vmatrix} T_{11}p^2 - U_{11}, & T_{12}p^2 - U_{12}, & \dots, & T_{1n}p^2 - U_{1n} \\ T_{21}p^2 - U_{21}, & T_{22}p^2 - U_{22}, & \dots, & T_{2n}p^2 - U_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1}p^2 - U_{n1}, & T_{n2}p^2 - U_{n2}, & \dots, & T_{nn}p^2 - U_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (63)$$

Некоторыми преимуществами обладает другая форма уравнения частот

$$\begin{vmatrix} T_{11} - p^2 V_{11}, & T_{12} - p^2 V_{12}, & \dots, & T_{1n} - p^2 V_{1n} \\ T_{21} - p^2 V_{21}, & T_{22} - p^2 V_{22}, & \dots, & T_{2n} - p^2 V_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} - p^2 V_{n1}, & T_{n2} - p^2 V_{n2}, & \dots, & T_{nn} - p^2 V_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (64)$$

где

$$V_{ik} = \int_0^l \int_0^l \delta(x, s) m(x) m(s) X_i(x) X_k(s) dx ds. \quad (65)$$

В случаях изгибных и продольных колебаний величины V_{ik} можно определить также соответственно по формулам

$$V_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k dx}{EJ}; \quad V_{ik} = \int_0^l \frac{N_i N_k dx}{EF}, \quad (66)$$

причем изгибающие моменты M_i и M_k и продольные силы N_i и N_k определяют от нагрузок mX_i и mX_k .

Метод Галеркина

Как и по методу Ритца, по методу Галеркина можно получить несколько низших частот. Согласно этому методу образуют последовательность функций $X_1(x)$, $X_2(x)$, ..., $X_n(x)$, удовлетворяющих как кинематическим, так и динамическим граничным условиям, затем определяют значения T_{ik} по первой из формул (62), а также величины

$$W_{ik} = \int_0^l (EJX_i'')'' X_k dx \quad (67)$$

(для случая изгибных колебаний).

После этого получается уравнение частот в виде

$$\begin{vmatrix} T_{11}p^2 - W_{11}, & T_{12}p^2 - W_{12}, & \dots, & T_{1n}p^2 - W_{1n} \\ T_{21}p^2 - W_{21}, & T_{22}p^2 - W_{22}, & \dots, & T_{2n}p^2 - W_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1}p^2 - W_{n1}, & T_{n2}p^2 - W_{n2}, & \dots, & T_{nn}p^2 - W_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (68)$$

В случае продольных колебаний

$$W_{ik} = - \int_0^l (EF X'_i)' X_k dx, \quad (69)$$

а в случае крутильных колебаний

$$W_{ik} = - \int_0^l (GJ_p X'_x)' X_k dx. \quad (70)$$

Оценки С. А. Бернштейна

Для определения границ, между которыми располагается первая собственная частота, можно использовать формулу С. А. Бернштейна

$$\frac{1}{\sqrt{B_2}} < p_1^2 < \frac{2}{B_1 + \sqrt{2B_2 - B_1^2}}, \quad (71)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \int_0^l m(x) \delta(x, x) dx + \sum_i m_i \delta(x_i, x_i); \\ B_2 &= \int_0^l \int_0^l m(x) m(s) \delta(x, s) dx ds + \sum_i \sum_k m_i m_k \delta(x_i, x_k). \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Вторая формула С. А. Бернштейна

$$p_2^2 > \frac{2}{B_1 - \sqrt{2B_2 - B_1^2}} \quad (73)$$

дает оценку для нижней границы второй собственной частоты.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармоническое возмущение. Замкнутая форма решения

При действии гармонического возмущения (силового или кинематического) стационарный процесс представляет собой гармонические колебания с частотой возмущения ω .

Продольные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных продольных колебаний стержня постоянного сечения имеет вид

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{P(x)}{EF} \sin \omega t, \quad (74)$$

где $P(x) \sin \omega t$ — интенсивность возмущающей силы.

Решением дифференциального уравнения в частных производных (74) служит выражение

$$u = U(x) \sin \omega t, \quad (75)$$

где форму колебаний определяют из обыкновенного дифференциального уравнения

$$U'' + \frac{\omega^2}{a^2} U = - \frac{P(x)}{EF} \quad (76)$$

в виде

$$U = A \sin \frac{\omega x}{a} + B \cos \frac{\omega x}{a} + \frac{a}{\omega EF} \int_0^x P(\xi) \sin \frac{\omega(x-\xi)}{a} d\xi. \quad (77)$$

Постоянные A и B определяют из граничных условий на концах стержня.

В тех случаях, когда возмущающая сила не распределена непрерывным образом, а приложена в нескольких сечениях, уравнения (74) и (76) становятся однородными (для каждого из участков, свободных от нагрузки), а возмущающая сила входит в граничные условия.

Пример 9. Определить динамический коэффициент для консольного стержня, свободный конец которого испытывает действие продольной силы

$$P = P_0 \sin \omega t. \quad (78)$$

Поскольку распределенная возмущающая нагрузка отсутствует, по формуле (77) находим

$$U = A \sin \frac{\omega}{a} x + B \cos \frac{\omega}{a} x.$$

Из граничных условий

$$U(0) = 0; \quad U'(l) = \frac{P_0}{EF}$$

получаем

$$A = \frac{P_0 a}{\omega EF \cos \frac{\omega l}{a}}; \quad B = 0,$$

т. е.

$$U = \frac{P_0 a}{\omega EF \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a}.$$

Амплитуда колебаний конца стержня

$$U(l) = \frac{P_0 a}{\omega EF} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{a}. \quad (79)$$

Следовательно, динамический коэффициент будет

$$\mu = U(l) : \frac{P_0 l}{EF} = \frac{a}{\omega l} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{a}.$$

При $\frac{\omega l}{a} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$ наступает резонанс, а при $\frac{\omega l}{a} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ — антирезонанс (точка приложения внешней силы остается неподвижной).

Крутильные колебания. Закономерности крутильных колебаний описывают теми же соотношениями (74)–(77), если заменить линейное смещение $u(x, t)$ на угол поворота $\varphi(x, t)$, распределенную продольную нагрузку $P(x, t)$ — на распределенный крутящий момент $m(x, t)$, а также если под $U(x)$ понимать функцию, определяющую амплитуды колебаний углов поворота сечений.

Пример 10. Определить амплитуды крутильных колебаний свободного вала, левый конец которого совершает заданное колебание

$$\varphi_0 = A_0 \sin \omega t \quad (80)$$

(случай гармонического кинематического возбуждения). В данном случае распределенная возмущающая нагрузка отсутствует и поэтому по формуле (77) имеем

$$U = A \sin \frac{\omega x}{a} + B \cos \frac{\omega x}{a}.$$

Граничные условия
 $U(0) = A_0; \quad U'(l) = 0$
 позволяют найти

$$A = A_0 \operatorname{tg} \frac{\omega l}{a}; \quad B = A_0.$$

Следовательно,

$$U = A_0 \left[\operatorname{tg} \frac{\omega l}{a} \sin \frac{\omega x}{a} + \cos \frac{\omega x}{a} \right].$$

В частности, амплитуда колебаний свободного конца

$$U(l) = \frac{A_0}{\cos \frac{\omega l}{a}} \quad (81)$$

всегда больше амплитуды заданных колебаний левого конца вала. Резонанс наступает при $\frac{\omega l}{a} = \pi, 2\pi, \dots$

Изгибные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных изгибных колебаний стержня постоянного сечения

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{m}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{q(x) \sin \omega t}{EJ}, \quad (82)$$

где $q(x) \sin \omega t$ — интенсивность распределенной возмущающей нагрузки.

После замены

$$v(x, t) = y(x) \sin \omega t \quad (83)$$

уравнение (82) принимает вид

$$y^{IV} - \frac{m\omega^2}{EJ} y = \frac{q(x)}{EJ}. \quad (84)$$

При сосредоточенных возмущениях дифференциальное уравнение (84) на каждом из участков становится однородным, а возмущающие силы входят в граничные условия (или условия сопряжения участков). В этом случае

$$y = C_1 S(\alpha x) + C_2 T(\alpha x) + C_3 U(\alpha x) + C_4 V(\alpha x), \quad (85)$$

где $C_1 - C_4$ — постоянные, определяемые граничными условиями; S, T, U, V — функции А. Н. Крылова (см. табл. 4).

Пример 11. Определить прогиб свободного конца консольной балки при действии на него возмущающей силы $P_0 \sin \omega t$.

Граничные условия (начало координат на левом свободном конце)

$$y''(0) = 0; \quad y'''(0) = -\frac{P_0}{EJ};$$

$$y(l) = 0; \quad y'(l) = 0.$$

Условия на конце $x = 0$ дают

$$C_3 \alpha^2 = 0; \quad C_4 \alpha^3 = -\frac{P_0}{EJ},$$

т. е.

$$C_3 = 0; \quad C_4 = -\frac{P_0}{\alpha^3 EJ}.$$

С учетом этого, условия на конце $x = l$ приводят к соотношениям

$$C_1 S(\alpha l) + C_2 T(\alpha l) - \frac{P_0}{\alpha^3 EJ} V(\alpha l) = 0;$$

$$\alpha C_1 V(\alpha l) + \alpha C_2 S(\alpha l) - \frac{P_0}{\alpha^2 EJ} U(\alpha l) = 0.$$

Отсюда находим

$$C_1 = \frac{P_0}{\alpha^3 EJ} \cdot \frac{U(\alpha l) T(\alpha l) - V(\alpha l) S(\alpha l)}{T(\alpha l) V(\alpha l) - S^2(\alpha l)};$$

$$C_2 = \frac{P_0}{\alpha^3 EJ} \cdot \frac{V^2(\alpha l) - U(\alpha l) S(\alpha l)}{T(\alpha l) V(\alpha l) - S^2(\alpha l)}.$$

Следовательно,

$$y(0) = \frac{P_0}{\alpha^3 EJ} \cdot \frac{U(\alpha l) T(\alpha l) - V(\alpha l) S(\alpha l)}{T(\alpha l) V(\alpha l) - S^2(\alpha l)}. \quad (86)$$

Для двухопорной балки, нагруженной посередине силой, аналогично можно найти

$$\left. \begin{aligned} y\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{P_0}{4\alpha^3 EJ} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} - \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} \right); \\ M\left(\frac{l}{2}\right) &= -\frac{P_0}{4\alpha} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} + \operatorname{th} \frac{\alpha l}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Приложение метода начальных параметров см. в книге [2].

Общий случай действия возмущающих сил. Разложение решения по собственным формам

При действии распределенной периодической возмущающей нагрузки вида $P(x, t)$ можно разложить ее в ряд Фурье и строить решение по способу, указанному на стр. 314—316, суммируя затем действия всех отдельных гармоник. Другой способ излагается ниже; он состоит в разложении возмущающей нагрузки в ряд по собственным формам колебаний.

При вынужденных продольных колебаниях стационарная часть решения имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t) X_k(x), \quad (88)$$

где $X_k(x)$ — k -я собственная форма колебаний, а функции времени $S_k(t)$ определяют из уравнений типа

$$\ddot{S}_k + p_k^2 S_k = P_k(t). \quad (89)$$

Правые части этих уравнений определяются выражениями

$$P_k(t) = \int_0^l P(x, t) X_k(x) dx : \int_0^l m(x) X_k^2(x) dx \quad (90)$$

Знаменатель равен единице при нормировании собственных форм по выражению (9).

Те же соотношения остаются справедливыми и для других типов колебаний — крутильных (с заменой u на φ) и поперечных (с заменой u на v).

Пример 12. Определить вынужденное движение двухопорной балки постоянного сечения под действием внезапно приложенной сосредоточенной силы P посередине пролета.

Собственные формы колебаний определяются выражением

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Для вычислений по формуле (90) необходимо найти:

$$\int_0^l P(x, t) X_k(x) dx = P \sin \frac{k\pi}{2}; \quad \int_0^l m(x) X_k^2 dx = \frac{ml}{2}.$$

Следовательно,

$$P_k = \frac{2P}{l} \sin \frac{k\pi}{2}$$

и уравнения (89) принимают вид

$$\ddot{S}_k + p_k^2 S_k = \frac{2P}{l} \sin \frac{k\pi}{2},$$

где

$$p_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Решение этих уравнений при нулевых начальных условиях:

$$S_k = \frac{2P \sin \frac{k\pi}{2}}{ml} \cdot \frac{1 - \cos p_k t}{p_k^2}$$

и динамическое перемещение определяется выражением типа (88)

$$v(x, t) = \frac{2P}{ml} \sum \sin \frac{k\pi}{2} \cdot \frac{1 - \cos p_k t}{p_k^2} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Так, для середины пролета

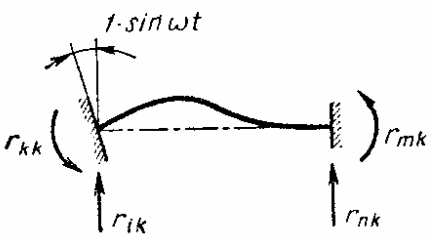
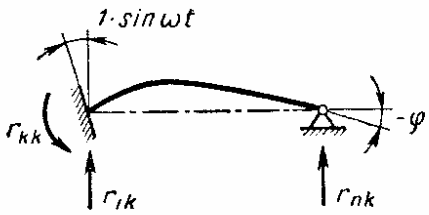
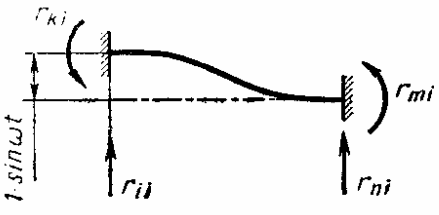
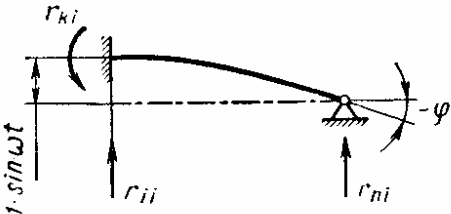
$$v\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{2P}{l} \sum_{k=1, 3, 5} \frac{1 - \cos p_k t}{p_k^2}.$$

Полученный ряд сходится очень быстро, так как знаменатели отдельных слагаемых возрастают пропорционально k^4 .

Общие сведения

Свободные члены $R_{1\rho}$ в зависимости от схемы стержня для случаев, когда возмущение задано в виде сосредоточенной посередине пролета силы $P \sin \omega t$, определяют по формулам табл. 16.

15. Формулы для определения коэффициентов

Тип смещения	Схема стержня	Расчетные формулы
Единичный поворот		$r_{kk} = \frac{\alpha EJ (SV - TU)}{U^2 - TV};$ $r_{ik} = \frac{\alpha^2 EJ (SU - V^2)}{U^2 - TV};$ $r_{mk} = \frac{\alpha EJ V}{U^2 - TV};$ $r_{nk} = \frac{-\alpha^2 EJ U}{U^2 - TV}$
		$r_{kk} = \frac{\alpha EJ (T^2 - V^2)}{SV - TU};$ $r_{ik} = \frac{\alpha^2 EJ (UV - ST)}{SV - TU};$ $r_{nk} = \frac{\alpha^2 EJ T}{SV - TU};$ $\varphi = -\frac{V}{SV - TU}$
Единичное смещение		$r_{ii} = \frac{\alpha^3 EJ (ST - UV)}{U^2 - TV};$ $r_{ki} = \frac{\alpha^2 EJ (V^2 - SU)}{U^2 - TV};$ $r_{mi} = \frac{\alpha^2 EJ U}{U^2 - TV};$ $r_{ni} = \frac{-\alpha^3 EJ T}{U^2 - TV}$
		$r_{ii} = \frac{\alpha^3 EJ (U^2 - S^2)}{SV - TU};$ $r_{ki} = \frac{\alpha^2 EJ (ST - UV)}{SV - TU};$ $r_{ni} = \frac{\alpha^3 EJS}{SV - TU};$ $\varphi = \frac{\alpha U}{SV - TU}$

16. Формулы для определения свободных членов R_{1p}

Схема стержня	Расчетные формулы
	$R_{kp} = \frac{P}{2\alpha} \cdot \frac{U_a}{S_a T_a - U_a V_a};$ $R_{ip} = \frac{P}{2} \cdot \frac{T_a}{S_a T_a - U_a V_a}$
	$R_{kp} = P \frac{U_{2a} T_a - S_{2a} V_a}{U_{2a} T_{2a} - S_{2a} V_{2a}};$ $R_{ip} = \frac{P}{\alpha} \cdot \frac{T_{2a} V_a - V_{2a} T_a}{U_{2a} T_{2a} - S_{2a} V_{2a}}$

Свободные колебания

При решении задач о свободных колебаниях рам $R_{ip} = 0$, т. е. система уравнений (91) становится однородной:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \cdots + r_{1n}Z_n &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \cdots + r_{2n}Z_n &= 0; \\ \vdots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \cdots + r_{nn}Z_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Порядок определения собственных частот рамной системы состоит в следующем:

а) образуют основную систему введением дополнительных связей $1, 2, \dots, n$;

б) с помощью табл. 15 определяют единичные реакции r_{ik} , возникающие в дополнительных связях системы под действием поочередно прикладываемых смещений $Z_k = 1$;

в) составляют уравнения (92);

г) составляют частотный определитель

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (93)$$

и приравнивают его нулю (это выражает условие ненулевых решений для Z_i);

д) после развертывания частотного определителя получают частотное уравнение, для решения которого обычно используют численные способы.

Пример 13. Определить собственные частоты колебаний для рамы, изображенной на рис. 8, а. Жесткости и массы обоих стержней одинаковы.

Принимаем основную систему по рис. 8, б; она содержит одну дополнительную связь (против поворота узла рамы).

Задавая угол поворота $Z_1 = 1$ (рис. 8, в), находим из табл. 15

$$r_{11}^e = \frac{\alpha EJ (SV - TU)}{U^2 - TU} = \alpha EJ \frac{\operatorname{sh} \alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l \operatorname{ch} \alpha l}{1 - \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l}$$

для горизонтального стержня) и

$$r_{11}^g = \frac{\alpha EJ (T^2 - V^2)}{SV - TU} = \alpha EJ \frac{\sin \alpha l \operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{sh} \alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l \operatorname{ch} \alpha l}$$

(для вертикального стержня). Следовательно,

$$\begin{aligned} r_{11} &= r_{11}^e + r_{11}^g = \\ &= \frac{\alpha EJ (\operatorname{sh} \alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l \operatorname{ch} \alpha l)^2 - (1 - \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l) \operatorname{sh} \alpha l \sin \alpha l}{(1 - \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l) (\operatorname{sh} \alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l \operatorname{ch} \alpha l)}, \end{aligned}$$

здесь S , T , U и V — функции Крылова, определяем по формулам (26).

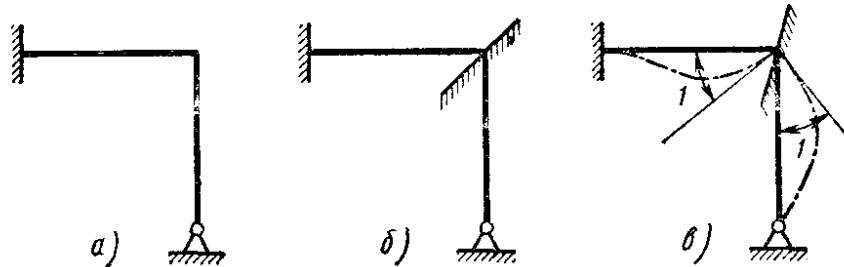


Рис. 8

Система уравнений (92) вырождается в данном случае в одно уравнение

$$r_{11} Z_1 = 0.$$

Условие $Z_1 \neq 0$ приводит к частотному уравнению: $r_{11} = 0$, т. е.
 $\sin^2 \alpha l \operatorname{ch}^2 \alpha l + \operatorname{sh}^2 \alpha l \cos^2 \alpha l - 4 \sin \alpha l \operatorname{sh} \alpha l \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l + 2 \sin \alpha l \operatorname{sh} \alpha l = 0.$

Решая это трансцендентное уравнение, находим первые два корня

$$(\alpha l)_1 = 3,393, \quad (\alpha l)_2 = 6,543.$$

Теперь по формуле (27) определяем две низшие собственные частоты колебаний

$$\rho_1 = \frac{11,228}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad \rho_2 = \frac{42,81}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Вынужденные колебания

Для решения задач о вынужденных колебаниях рам используют систему уравнений (91) в следующем порядке:

а) образуют основную систему введением дополнительных связей 1, 2, ..., n ;

б) с помощью табл. 15 определяют единичные реакции r_{ik} , возникающие в дополнительных связях системы под действием поочередно накладываемых смещений Z_k . При этом величину α определяют по формуле (27), но вместо величины ρ в формулу нужно подставить круговую частоту возмущения ω ;

в) с помощью табл. 16 определяют свободные члены уравнений R_{1p} как реакции в дополнительных связях, вызываемые заданной внешней нагрузкой;

г) образуют систему уравнений (91), представляющую собой систему алгебраических уравнений относительно неизвестных перемещений Z_i ;

е) каждый из стержней рассматривают под действием заданной внешней нагрузки и найденных выше смещений Z_i на концах. При этом определяют внутренние усилия в сечениях (см. указания в гл. 3, т. 1).

Пример 14. Определить амплитуды опорных реакций и моментов для рамы, показанной на рис. 9, а. Жесткости и массы обеих стержней одинаковые.

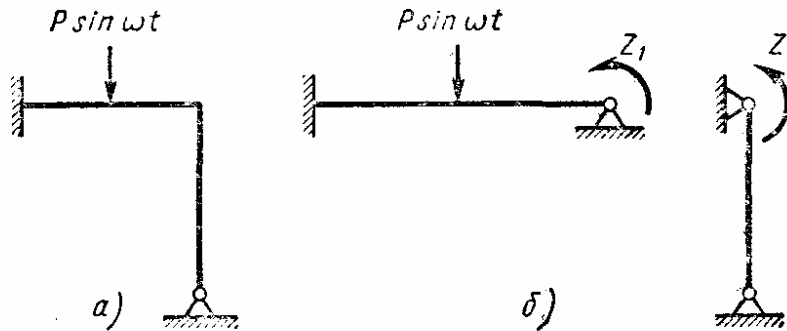


Рис. 9

Основная система показана на рис. 8, б.

Единичная реакция, найденная в предыдущем примере,

$$r_{11} = \frac{\alpha EJ [(SV - TU)^2 + (T^2 - V^2)(U^2 - TU)]}{(U^2 - TU)(SV - TU)}.$$

Величина R_{1p} согласно табл. 16

$$R_{1p} = \frac{P}{2\alpha} \cdot \frac{U_a}{S_a T_a - U_a V_a}.$$

Уравнение для определения амплитуды неизвестного угла поворота Z_1

$$\frac{\alpha EJ [(SV - TU)^2 + (T^2 - V^2)(U^2 - TU)]}{(U^2 - TU)(SV - TU)} Z_1 + \frac{P}{2\alpha} \times \\ \times \frac{U_a}{S_a T_a - U_a V_a} = 0.$$

Решая уравнение, находим

$$Z_1 = - \frac{P}{4\alpha^2 EJ} \cdot \frac{\alpha EJ [(SV - TU)^2 + (T^2 - V^2)(U^2 - TU)]}{(U^2 - TU)(SV - TU)}.$$

Рассматривая каждый из стержней по схеме, показанной на рис. 9, б, строят эпюру моментов.

Во всех приведенных выше выражениях функции Крылова S , T , U , V вычисляют при значении аргумента $\alpha l = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJ}} l$, а функции Крылова S_a , T_a , U_a , V_a — при значении аргумента $\frac{\alpha l}{2} = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJ}} \cdot \frac{l}{2}$, где ω — заданная частота возмущающей силы.

*

КРИТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ОБОРОТОВ ВАЛОВ

Вал с одним диском

При вращении вала, несущего несбалансированный диск, ось вала под действием центробежной силы прогибается и совершает *прецессионное движение*, описывая некоторую поверхность вращения. С увеличением угловой скорости прогибы оси возрастают и становятся особенно значительными с приближением угловой скорости к некоторому определенному (критическому) значению; соответствующее число оборотов также называют *критическим*. При дальнейшем увеличении угловой скорости сверх критического значения прогибы оси вала вновь

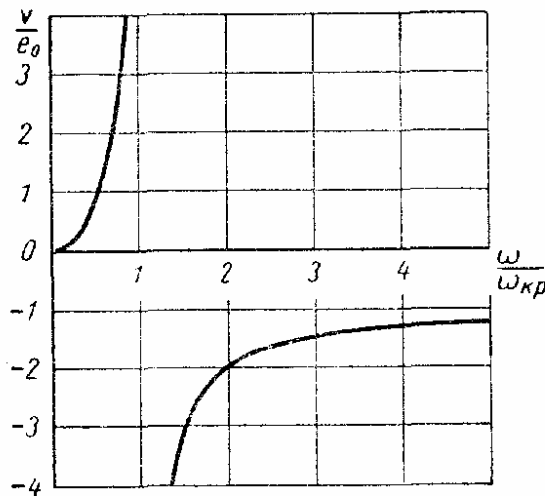


Рис. 10

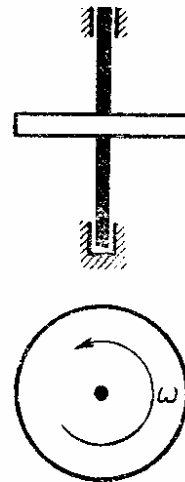


Рис. 11

уменьшаются и центр тяжести диска все больше приближается к оси вращения; последнее явление называют *самоцентрированием* диска.

Изменение прогибов оси вала в сечении, с которым связан диск, в зависимости от угловой скорости вращения показано на рис. 10.

Прогиб вала определяют по формуле

$$v = \frac{e_0}{\frac{\omega_{кр}^2}{\omega} - 1}, \quad (94)$$

где e_0 — начальный эксцентриситет; ω — угловая скорость вала; $\omega_{кр}$ — критическая угловая скорость.

Гибкими называют валы, рабочее число оборотов которых превосходит критическое число. Если срединная плоскость диска не меняет свою ориентацию при вращении вала (рис. 11), то критическая угловая скорость $\omega_{кр}$ точно равна круговой частоте p свободных поперечных колебаний системы и для двухопорного вала с диском посередине определяется формулой

$$\omega_{кр} = \frac{k}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}, \quad (95)$$

в которой EJ — изгибная жесткость сечения вала; l — его длина; m — масса диска. Коэффициент k зависит от защемляющих свойств

подшипников. Если подшипники не препятствуют повороту касательной к оси вала, то $k = 6,93$; в случаях, когда подшипники создают полное защемление концов оси вала, $k = 13,85$.

Критическую угловую скорость вращения можно приближенно считать равной собственной частоте поперечных колебаний вала и в тех случаях, когда плоскость диска поворачивается при прецессии вала (рис. 12), но при условии, что радиус инерции диска не слишком велик ($\frac{\rho}{l} < 0,2$). Если это условие выполнено, то можно пользоваться формулой (95), полагая в ней $\omega_{кр} = p$ и принимая выражения собственной частоты по табл. 10, гл. 4 в зависимости от схемы вала. Если радиус инерции диска велик, то следует пользоваться способом расчета, указанным на стр. 326—327.

Критическое состояние наступает не только при главной (основной) критической угловой скорости $\omega_{кр}$, но также и при угловой скорости $\omega = \frac{1}{2} \omega_{кр}$; послед-

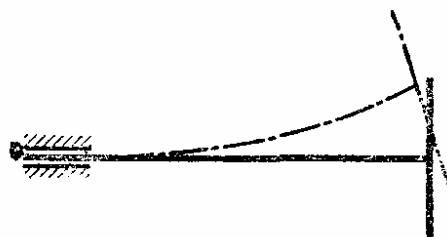


Рис. 12

нюю называют *критической скоростью второго порядка*. Заметное возрастание прогибов вала при критической скорости второго порядка происходит вследствие двух причин: 1) неодинаковости изгибных жесткостей вала в двух главных плоскостях; 2) действия веса вала (при горизонтальном расположении его оси). Если жесткости вала c_1 и c_2 в двух главных плоскостях существенно различаются, то критические состояния имеют место во всем интервале угловых скоростей

$$\text{от } \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} \text{ до } \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}.$$

Гирскопический эффект

В несимметричных схемах, когда срединная плоскость диска меняет свою ориентацию при вращении вала (см., например, рис. 12), возникает *гирскопический эффект* и критическая угловая скорость изменяется.

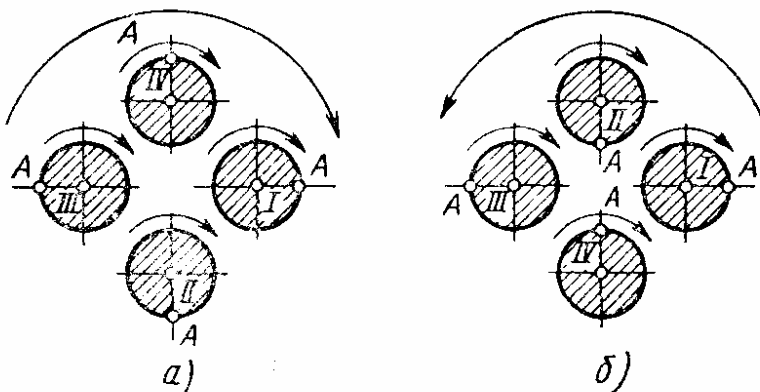


Рис. 13

Это изменение различно в зависимости от того, какой тип прецессии имеет место при вращении вала: *прямая прецессия* (рис. 13, а) или *обратная прецессия* (рис. 13, б). При прямой прецессии изогнутая ось вала вращается в одну сторону с диском (см. I—IV на рис. 13, а). При обратной прецессии эти направления противоположны. Основным следует

считать случай прямой синхронной прецессии, когда угловая скорость изогнутой оси вала вокруг прямой, проходящей через центры подшипников, совпадает с угловой скоростью диска; ниже имеется в виду только этот случай.

Если диск имеет относительно небольшую толщину, то критическую угловую скорость определяют из уравнения

$$\omega_{кр}^4 + \frac{m\delta_P - J_*\varphi_M}{mJ_*(\delta_P\varphi_M - \delta_M^2)} \omega_{кр}^2 - \frac{1}{mJ_*(\delta_P\varphi_M - \delta_M^2)} = 0, \quad (96)$$

где J_* — момент инерции диска относительно одного из его диаметров; m — масса диска; δ_P, φ_P — прогиб и угол поворота сечения, в котором расположен диск, под действием силы $P=1$; $\delta_M = \varphi_P, \varphi_M$ — те же перемещения, но определяемые от действия изгибающего момента $M=1$.

Для консольного вала (рис. 12)

$$\begin{aligned} \delta_P &= \frac{l^3}{3EJ}; & \delta_M &= \frac{l^2}{2EJ}; \\ \varphi_P &= \frac{l^2}{2EJ}; & \varphi_M &= \frac{l}{EJ} \end{aligned} \quad (97)$$

и из уравнения (96) вновь получаем формулу (95), в которой

$$\begin{aligned} k &= 6 - \frac{2}{D} + \\ &+ \sqrt{\left(6 - \frac{2}{D}\right)^2 + \frac{12}{D}}, \end{aligned} \quad (98)$$

причем

$$D = \frac{J_*}{ml^2}. \quad (99)$$

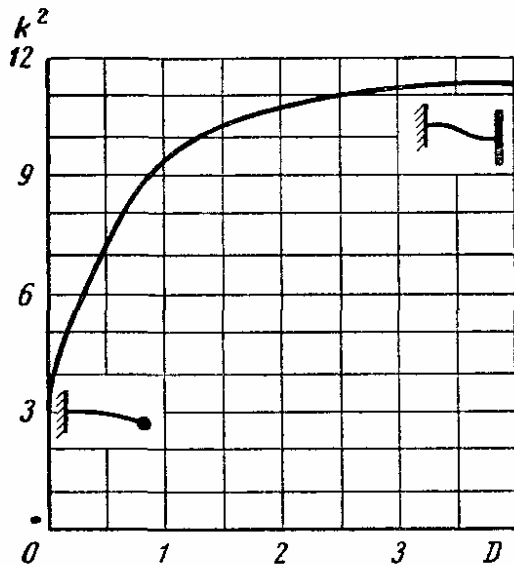


Рис. 14

Зависимость параметра k от величины D показана на рис. 14. При $D=0$ гироскопический эффект полностью отсутствует; при $D=\infty$ диск имеет бесконечно большую инерцию поворота, его плоскость не поворачивается и вал изгибается так, как если бы на его правом конце была жесткая заделка, не препятствующая вертикальным смещениям.

Если диск нельзя считать весьма тонким, то в приведенные выше выражения вместо момента инерции J_* следует подставлять

$$J_* = J_1 - J_2, \quad (100)$$

где J_1 — момент инерции диска относительно центральной оси, перпендикулярной к срединной плоскости диска; J_2 — момент инерции диска относительно центральной оси, лежащей в его срединной плоскости.

Так, в случае, когда диск представляет собой однородный круглый цилиндр высотой b и диаметром d ,

$$J_1 = \frac{md^2}{8}; \quad J_2 = \frac{md^2}{16} + \frac{mb^2}{12}; \quad J_* = \frac{md^2}{16} - \frac{mb^2}{24}. \quad (101)$$

Пример 15. Определить критическую угловую скорость вала, несущего на конце консоли тонкий однородный диск диаметром 0,6а (рис. 15, а). С помощью схем, показанных на рис. 15, б и в, находим единичные перемещения

$$\delta_P = 0,125 \frac{a^3}{EJ}; \quad \delta_M = \varphi_P = 0,292 \frac{a^2}{EJ}; \quad \varphi_M = 0,833 \frac{a}{EJ}.$$

По формуле (401)

$$J_* = \frac{m (0,6a)^2}{16} = 0,0225ma^2.$$

Уравнение (96) принимает вид

$$\omega_{кр}^4 + 250 \frac{EJ}{ma^3} \omega_{кр}^2 - 2350 \left(\frac{EJ}{ma^3} \right)^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega_{кр}^2 = 9,1 \frac{EJ}{ma^3};$$

$$\omega_{кр} = \frac{3,02}{a} \sqrt{\frac{EJ}{a}}.$$

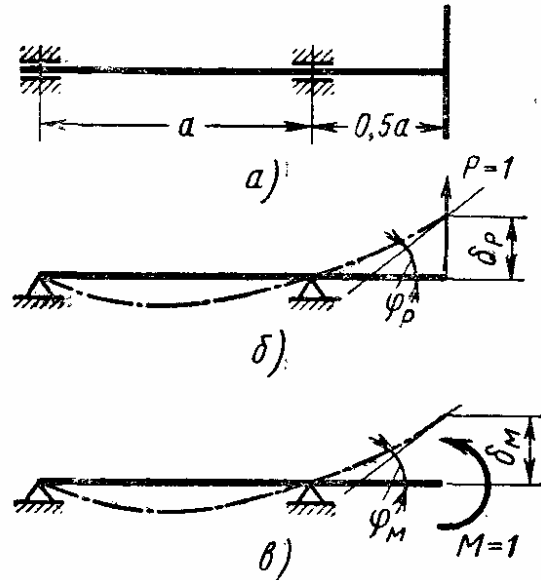


Рис. 15

Если не учитывать гироскопическое влияние, то по формуле (94) получаем

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_P}} = \frac{2,83}{a} \sqrt{\frac{EJ}{a}}.$$

Вал с несколькими дисками

Если гироскопические влияния невелики, то уравнения, определяющие критические скорости вращения, точно совпадают с уравнениями, которые определяют собственные частоты колебаний того же вала (при отсутствии его вращения). Соответственно этому, число критических угловых скоростей равно числу дисков, связанных с валом. Для определения критических угловых скоростей удобно пользоваться уравнением (161), гл. 4, заменив там обозначение собственной частоты p обозначением критической скорости $\omega_{кр}$.

Вал с распределенной массой

Во многих случаях приходится учитывать непрерывное распределение массы ротора (вала). Соответственно сказанному выше, для определения критических скоростей можно использовать все формулы, которыми определяются собственные частоты поперечных колебаний той же системы (при отсутствии ее вращения). В частности, для определения нижней критической скорости может быть использована формула Рэлея.

Пример 16. Определить низшую критическую скорость вала компрессора. Вал схематизируется в виде двухопорной балки с шарнирами на концах общей длиной 430 см. Данные, относящиеся к распределению жесткостей сечений и массы, приведены в табл. 17.

17. Жесткостные и массовые характеристики вала

Номер сечения	Абсцисса сечения x_i в см	Жесткость сечения $EJ \cdot 10^{-12}$ в $\text{дан}/\text{см}^2$	Интенсивность массы m в $\text{дан} \cdot \text{сек}^2/\text{см}^2$	Номер сечения	Абсцисса сечения x_i в см	Жесткость сечения $EJ \cdot 10^{-12}$ в $\text{дан}/\text{см}^2$	Интенсивность массы m в $\text{дан} \cdot \text{сек}^2/\text{см}^2$
1	0	0,045	0,0040	9	285	0,306	0,0239
2	30	0,251	0,0098	10	310	0,297	0,0252
3	80	0,283	0,0293	11	335	0,278	0,0224
4	110	0,313	0,0279	12	360	0,264	0,0224
5	150	0,293	0,0260	13	380	0,204	0,0088
6	180	0,293	0,0241	14	394	0,147	0,0074
7	215	0,305	0,0248	15	406	0,116	0,0066
8	255	0,313	0,0239	16	430	0,045	0,0040

В качестве формы изгиба примем кривую, соответствующую уравнению

$$v = \frac{4x(l-x)}{l^2}.$$

При этом вторая производная постоянна и составляет

$$v'' = -\frac{8}{l^2}.$$

Для дальнейших вычислений представим формулу Рэлея в виде

$$\omega_{кр}^2 = \frac{\int_0^l EJ (v'')^2 dx}{\int_0^l mv^2 dx} = \frac{64}{l^4} \cdot \frac{\sum EJ \Delta x}{\sum mv^2 \Delta x};$$

здесь Δx — длина участка между двумя соседними сечениями.

Результаты предварительных расчетов и длины участков между сечениями приведены в табл. 18.

Подставляя в формулу Рэлея найденные значения, получим критическую угловую скорость

$$\omega_{кр}^2 = \frac{64}{l^4} \cdot \frac{111,9 \cdot 10^{12}}{5,541};$$

$$\omega_{кр} = \frac{8 \cdot 10^6}{430^2} \sqrt{\frac{111,9}{5,541}} = 194 \text{ сек}^{-1}.$$

18. Результаты расчета

Номер сечения	Прогиб v в см	Квадрат прогиба v^2 в см ²	Длина участка Δx в см	Произведение $EJ \cdot \Delta x \cdot 10^{-12}$	Произведение $mv^2 \cdot \Delta x$
1	0	0	30	4,44	0,007
2	0,260	0,067	50	13,35	0,212
3	0,606	0,367	30	8,95	0,405
4	0,762	0,579	40	12,12	0,767
5	0,912	0,831	30	8,79	0,666
6	0,977	0,952	35	10,45	0,836
7	1,000	1,000	40	12,36	0,940
8	0,968	0,931	30	9,30	0,621
9	0,896	0,800	25	7,55	0,441
10	0,807	0,650	25	7,20	0,335
11	0,690	0,475	25	6,78	0,216
12	0,545	0,296	20	4,68	0,072
13	0,412	0,170	14	2,45	0,015
14	0,307	0,094	12	1,57	0,006
15	0,211	0,044	24	1,92	0,002
16	0	0	—	$\Sigma = 111,9$	$\Sigma = 5,541$
—	—	—	—		

Жесткий ротор в упругих подшипниках

Обозначения: c_1, c_2 — жесткости соответственно левого и правого подшипников; m — масса ротора; a, b — расстояния от центра тяжести ротора соответственно до левого и правого концов вала $l = a + b$ (рис. 16); I_x, I_y — моменты инерции ротора относительно главных осей инерции x и y .

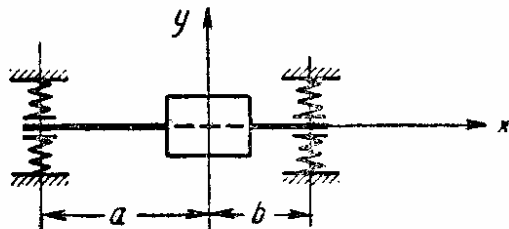


Рис. 16

Критическую угловую скорость определяют из биквадратного уравнения

$$\omega_{кр}^4 + \omega_{кр}^2 \left(\frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{I_x - I_y} - \frac{c_1 + c_2}{m} \right) - \frac{c_1 c_2 l^2}{m(I_x - I_y)} = 0. \quad (102)$$

Влияние трения на критические состояния

Внешнее вязкое трение. Этот вид трения практически не влияет на значение критической угловой скорости, но ограничивает прогибы вала в критическом состоянии.

Действие масляной пленки в подшипниках. При вращении шейки вала в подшипнике в движение вовлекается масляная пленка, которая образует замкнутый поток в кольцеобразной полости между шейкой и подшипником. При всяком боковом смещении шейки вала возникает

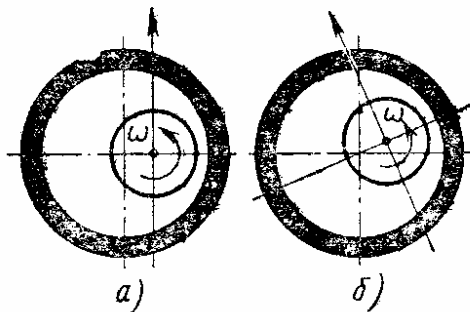


Рис. 17

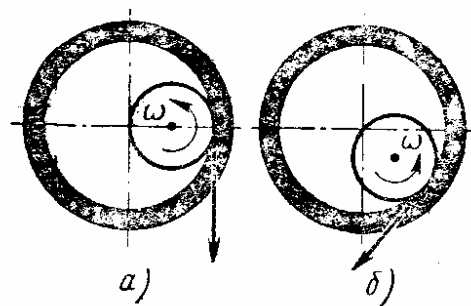


Рис. 18

дополнительная сила трения, действующая на шейку перпендикулярно направлению смещения (рис. 17, а), эта сила увлекает шейку в такое движение, при котором центр шейки вращается вокруг невозмущенного положения, причем направление этого вращения *совпадает с направлением основного вращения* (рис. 17, б). При этом образуется большой эксцентриситет масс, связанных с валом, и развиваются опасные колебания. Описанные явления особенно вероятны при малых угловых скоростях.

Действие сухого трения в подшипниках. При недостаточной смазке подшипников возможно появление сил сухого трения. При боковом смещении шейки и прикосновении его поверхности к внутренней поверхности подшипника возникает сила сухого трения, направленная перпендикулярно смещению (рис. 18, а), и шейка вала начинает обкатывать внутреннюю поверхность подшипника, но в направлении, *противоположном основному вращению* (рис. 18, б).

Действие внутреннего гистерезиса. Внутренний гистерезис вала способствует развитию автоколебаний в закритической области (т. е. при $\omega > \omega_{кр}$). При пренебрежении силами внешнего трения формально получается, что движение вала в закритической области вообще неустойчиво. В действительности, устойчивость может быть восстановлена благодаря внешнему трению.

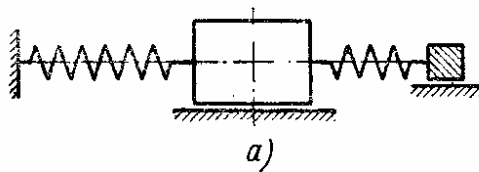
ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КАК ГАСИТЕЛИ КОЛЕБАНИЙ

Общие сведения

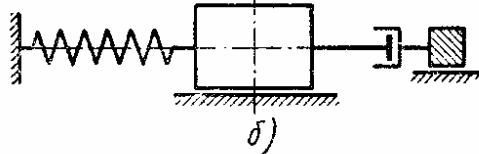
Для гашения колебаний механических систем часто используют дополнительные динамические устройства, не входящие в основную конструктивную цепь. Такие устройства могут быть полезны при колебаниях любых видов: продольных, крутильных и поперечных, а также при прецессионном движении вращающихся валов.

Существует три типа подобных устройств.

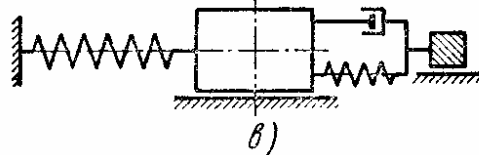
Динамические гасители колебаний, представляющие собой массу, присоединенную к основной механической системе при помощи упругого элемента (рис. 19, а) или по схеме маятника (см. ниже рис. 24).



а)

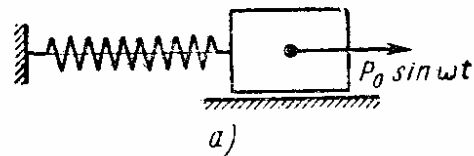


б)

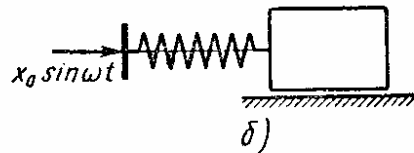


в)

Рис. 19



а)



б)

Рис. 20

Поглотители колебаний, представляющие собой массу, присоединенную к основной механической системе при помощи элемента трения (рис. 19, б).

Динамические гасители колебаний с трением (рис. 19, в); в этих устройствах дополнительная масса присоединяется к основной механической системе при помощи упругого и вязкого элементов. При этом может быть достигнуто уменьшение (или даже исключение) колебаний основной механической системы как при действии на нее возмущающей силы (силовое возмущение, рис. 20, а), так и при заданных колебаниях ее опор (кинематическое возмущение, рис. 20, б).

Динамический гаситель колебаний

Собственные частоты колебаний p системы с динамическим гасителем (см. рис. 17, а) определяют по формуле

$$\bar{p}^2 = \frac{p^2 + (1 + \alpha) p_*^2}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{p_*^2 (1 + \alpha) - p^2}{2} \right]^2 + \alpha p^2 p_*^2}; \quad (103)$$

здесь p — собственная частота колебаний основной механической системы (при отсутствии гасителя); p_* — собственная частота колебаний динамического гасителя (при неподвижности массы основной механической системы); α — отношение массы динамического гасителя к массе основной механической системы.

График для определения \bar{p} в зависимости от безразмерного параметра α показан на рис. 21 (график построен для случая $p = p_*$).

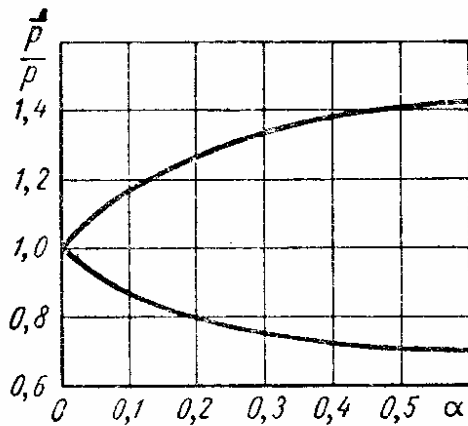


Рис. 21

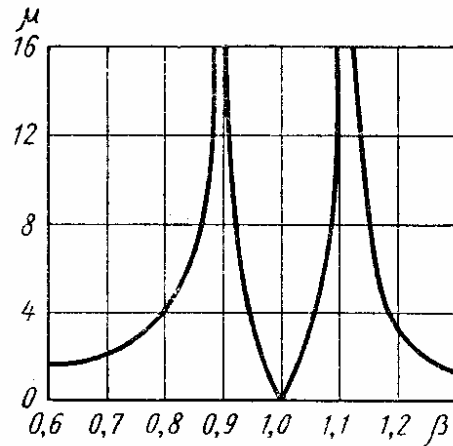


Рис. 22

При действии на основную массу возмущающей силы $P_0 \sin \omega t$ (см. рис. 20, а) или при соответствующем кинематическом возбуждении (см. рис. 20, б) динамический коэффициент для основной массы

$$\mu = \frac{1 - \beta_*^2}{(1 - \beta_*^2)(1 - \beta^2) - \alpha\beta^2}; \quad (104)$$

здесь μ — отношение максимального динамического перемещения основной массы к ее статическому перемещению, вызываемому силой P_0 ; β , β_* — отношение угловой скорости к собственной частоте ($\beta = \frac{\omega}{p}$; $\beta_* = \frac{\omega}{p_*}$).

Типичный график зависимости (104) показан на рис. 22 (кривая построена для $\alpha = 0,05$; $\beta = \beta_*$).

Для полного погашения колебаний основной массы собственная частота колебаний гасителя должна быть равна круговой частоте возмущения

$$p_* = \omega \quad (105)$$

(условие антирезонанса).

Если условие (105) не выполняется (например, из-за некоторого отклонения круговой частоты возмущения ω от номинального значения, на которое настроен гаситель), то динамический гаситель может оказаться *вредным*. Поэтому рассматриваемый тип устройств применяют только в тех случаях, когда частота возмущения *строго фиксирована* в условиях эксплуатации (например, для гашения колебаний опор генераторов переменного тока и т. п.). При возможном непостоянстве частоты возмущения необходимо вводить демпфирование в систему гасителя (см. стр. 338—340).

Если основная механическая система совершает *крутильные колебания*, то динамический гаситель включается в систему по схеме, показанной на рис. 23; формулы (103)—(105) остаются в силе и в этом случае, но величина α становится отношением моментов инерции динамического гасителя и основной системы.

Маятниковый гаситель крутильных колебаний вращающихся валов

Любая гармоника возмущающих сил и моментов, действующих на вращающиеся валы, имеет частоту $n\omega$, где ω — угловая скорость вала; n — номер гармоники ($n = 1/2, 1, 3/2, \dots$). Поэтому для гашения действия определенной гармоники гаситель крутильных колебаний должен обладать *следящей настройкой*, меняя собственную частоту p_* также пропорционально угловой скорости вала. Конечно, динамический гаситель с упругой подвеской (рис. 23) этим свойством не обладает, так как его собственная частота p_* зависит лишь от присоединяемой массы и жесткости упругой связи и никак не связана с угловой скоростью вала.

Для гашения определенных гармоник отказываются от упругой подвески дополнительной массы и переходят к схеме маятникового гасителя (рис. 24). Если R — расстояние от оси вращения основной механической системы до точки подвеса маятника; l — длина маятника,

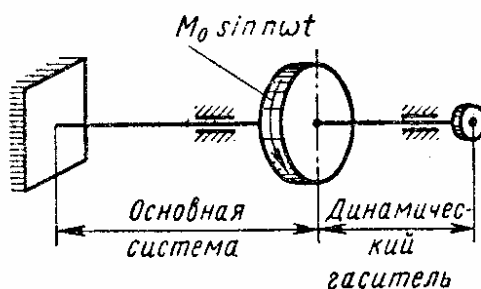


Рис. 23

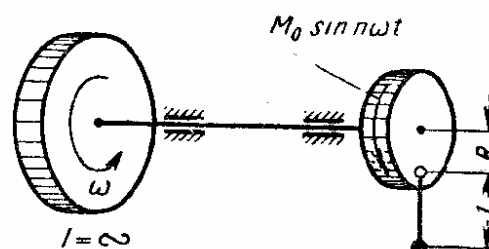


Рис. 24

то собственная частота колебаний пропорциональна угловой скорости вала

$$p_* = \omega \sqrt{\frac{R}{l}}. \quad (106)$$

Согласно условию (105) для глушения действия n -й гармоники возмущения необходимо выполнение равенства

$$\frac{n\omega}{p_*} = 1,$$

т. е. отношение $\frac{R}{l}$ должно быть

$$\frac{R}{l} = n^2. \quad (107)$$

Из-за конструктивных ограничений для возможных размеров необходимая длина l маятника оказывается весьма малой и подвеска по схеме рис. 24 становится практически неосуществимой.

Два типа специальной подвески маятникового гасителя на противовесе коленчатого вала показаны на рис. 25; в обоих случаях обеспечивается весьма малое значение расчетной длины маятника.

Для схемы на рис. 25, а

$$l = \frac{d_1 - d_2}{2}, \quad (108)$$

где d_1 и d_2 — соответственно диаметры отверстия и ролика;
для схемы на рис. 25, б

$$R = H_1 + H_2; \quad l = \frac{d_1 + d_1^*}{2} - d_2, \quad (109)$$

где H_1 — расстояние от оси вращения до центра отверстия в диске;
 H_2 — расстояние от центра отверстия в маятниковом грузе до его центра тяжести; d_1 и d_1^* — соответственно диаметры отверстий в диске и маятнике; d_2 — диаметр ролика.

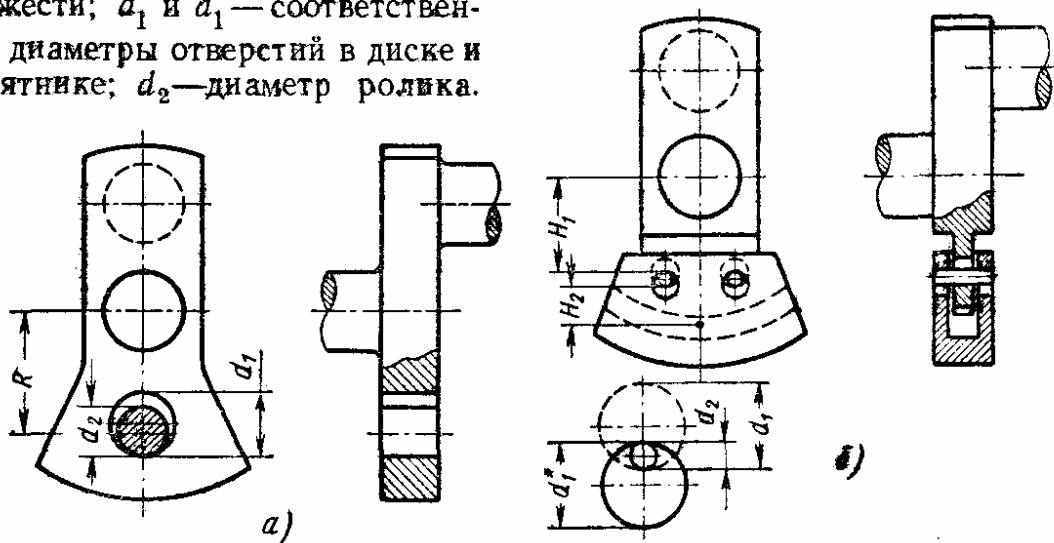


Рис. 25

Маятниковый гаситель прецессии вращающихся валов (автоматический балансировщик)

Автоматические балансировщики обеспечивают полное автоматическое уравнивание центробежных сил, возникающих при вращении роторов, и особенно полезны, когда несбалансированность ротора может существенно меняться в эксплуатационных условиях (как например, в некоторых типах стиральных машин). Автоматическая балансировка обеспечивает сохранение прямолинейной формы вала и этим отличается от самоцентрирования ротора при высоких угловых скоростях вращения (см. стр. 324).

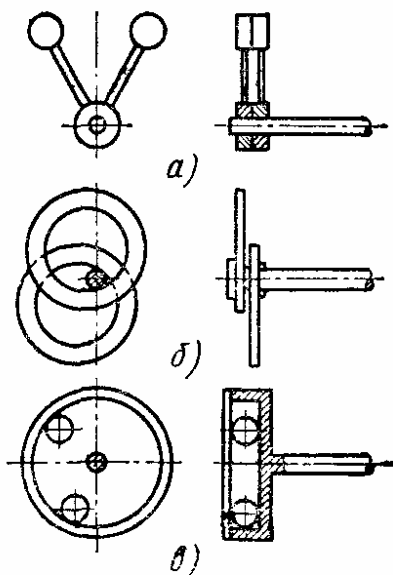


Рис. 26

Три принципиально совпадающие схемы автоматических балансировщиков показаны на рис. 26. В каждой из них имеются однотипные уравнивающие устройства: маятники (рис. 26, а), кольца (рис. 26, б), шары (рис. 26, в), связанные с вращающимся валом (число маятников, колец или шаров может быть и больше двух). Все эти устройства эффективны только в закритической области, когда угловая скорость превосходит крити-

ческое значение $\omega_{кр}$. При этом маятники (шары, кольца) автоматически занимают такое положение, что равнодействующая развиваемых ими

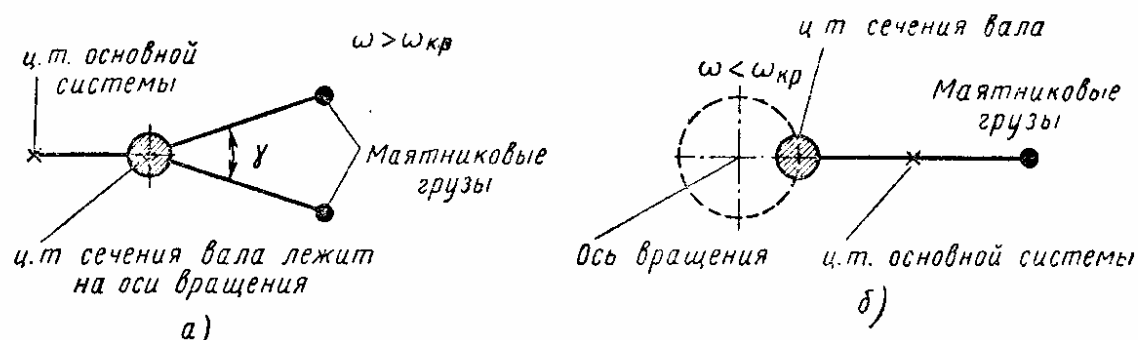


Рис. 27

центробежных сил уравнивает центробежную силу, возникающую вследствие неуравновешенности ротора (рис. 27, а), и ось вала точно совпадает с прямой, проходящей через центры подшипников. При увеличении неуравновешенности, т. е. при удалении от оси вращения, угол γ автоматически уменьшается, массы балансирующих грузов сходятся ближе и вновь наступает уравнивание центробежных сил. Каждой конструкции соответствует определенное значение максимального дебаланса, который способен уравновесить данный балансирующий (примеры см. в табл. 19).

В докритической области при $\omega < \omega_{кр}$ массы располагаются так, как это показано на рис. 27, б, т. е. балансирующий увеличивает неуравновешенность и приносит вред. Поэтому для исключения балансирующих в докритической области необходимы специальные конструктивные меры. Таков, например, кольцевой балансирующий, применяемый в конструкциях стиральных машин (рис. 28). Здесь уравнивание создается двумя кольцами,

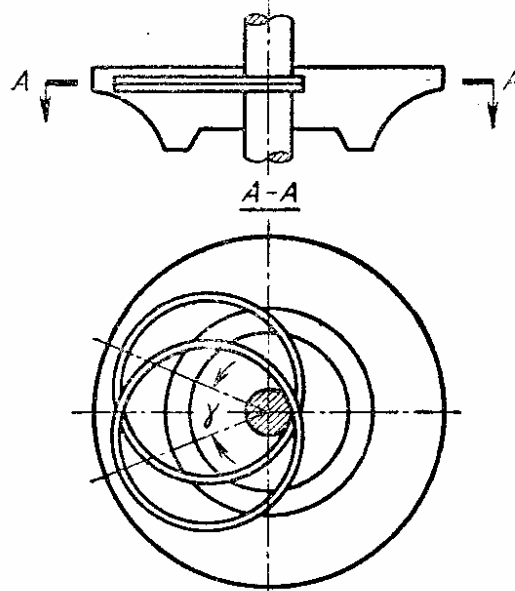


Рис. 28

19. Характеристика балансирующих

Тип балансирующего	Наружный диаметр в см	Балансирующие грузы	Нейтрализуемый дебаланс в дан. см
Шаровой	61	Семь стальных шаров диаметром 5 см	114
Кольцевой	50	Три стальных кольца; наружный диаметр 50 см, внутренний диаметр 26,5 см, толщина 1,6 см	290

которые находятся в заполненном маслом кожухе. Кожуху придана специальная фигурная форма и при малой угловой скорости вала кольца находятся на дне кожуха, т. е. балансировщик «не включен»; при $\omega = \omega_{кр}$ кольца всплывают под действием значительных центробежных сил — балансировщик «включается».

Кольцевые балансировщики рациональнее шаровых, как это можно видеть из табл. 19.

Вязкий поглотитель колебаний

Схему поглотителя см. на рис. 19, б. Динамический коэффициент для основной массы определяют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\beta^2 + 4\kappa^2}{\beta^2(1 - \beta^2)^2 + 4\kappa^2[1 - \beta^2(1 + \alpha)]^2}}; \quad (110)$$

обозначения α и β см. стр. 332; κ — безразмерный коэффициент, определяемый по формуле

$$\kappa = \frac{k}{2m_*p}, \quad (111)$$

где k — коэффициент вязкости поглотителя (коэффициент пропорциональности между силой вязкости и относительной скоростью массы поглотителя по отношению к основной массе); m_* — масса поглотителя.

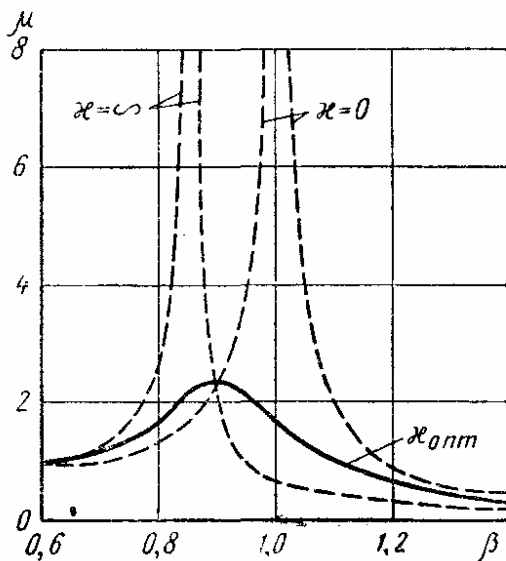


Рис. 29

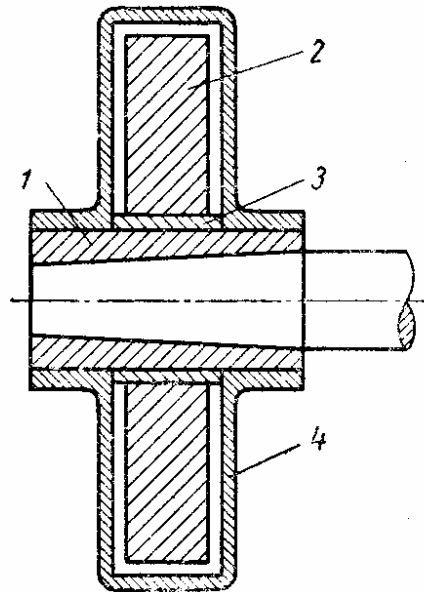


Рис. 30

Оптимальное значение параметра κ

$$\kappa_{опт} = \sqrt{\frac{1}{2(2 + \alpha)(1 + \alpha)}}. \quad (112)$$

При этом наибольшее значение динамического коэффициента будет

$$\mu_{\max} = 1 + \frac{2}{\alpha}. \quad (113)$$

На рис. 29 сплошной линией показано изменение динамического коэффициента μ в зависимости от отношения $\beta = \frac{\omega}{p}$ при оптимальном значении коэффициента κ ; штриховыми линиями показаны кривые изменения динамического коэффициента μ в двух предельных случаях — при отсутствии вязкой связи ($\kappa = 0$) и при жесткой связи ($\kappa = \infty$).

Выполненный по схеме на рис. 19, б вязкий поглотитель колебаний системы Гауда показан на рис. 30. Здесь 1 — втулка, предназначенная для посадки поглотителя на вал; 2 — масса поглотителя, представляющая собой маховик, могущий свободно вращаться на втулке 3; 4 — кожух, приваренный к втулке 1. Малый зазор между маховиком и кожухом заполнен вязкой жидкостью. При вращении маховика относительно втулки и кожуха возникает крутящий момент — $k\dot{\varphi}$, пропорциональный относительной угловой скорости $\dot{\varphi}$. Оптимальное значение коэффициента вязкого сопротивления определяют по формуле

$$k_{onm} = I\omega, \quad (114)$$

в которой I — момент инерции маховика относительно оси вращения; ω — угловая скорость. При оптимальном сопротивлении рассеиваемая за один цикл энергия составляет

$$\Psi_{onm} = \frac{\pi}{2} I \omega^2 \varphi_0^2, \quad (115)$$

где φ_0 — амплитуда угловых колебаний сечений вала, с которым связан поглотитель. При $k \neq k_{onm}$ рассеиваемая за один цикл энергия меняется так, как это показано на рис. 31. Поглотитель Гауда меняет собственные частоты основной механической системы, и при вычислении частот поглотитель можно рассматривать как диск с эффективным моментом инерции

$$I_{эфф} = \frac{I}{\left[1 + \left(\frac{I\omega}{k}\right)^2\right]}. \quad (116)$$

При оптимальном коэффициенте вязкого сопротивления [формула (114)] $I_{эфф} = 0,5I$.

Поглотитель должен быть помещен возможно ближе к тому сечению вала, в котором амплитуда крутильных колебаний наибольшая; поглотитель становится *бесполезным*, если его поместить в узле колебаний.

Поглотитель колебаний с сухим трением

Поглотитель крутильных колебаний системы Ланчестера изображен на рис. 32. Здесь 1 — втулка, предназначенная для посадки поглотителя на вал; 2 — два связанных диска, служащих маховиком и свободно вращающихся на втулке 3, заклиненной на валу 4. Со втулкой связана

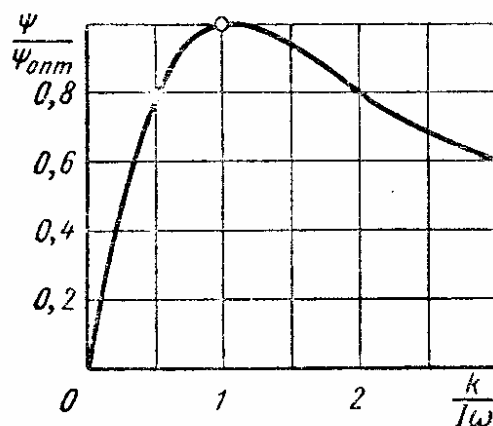


Рис. 31

тормозящая прокладка 5, к которой диски можно прижимать, затягивая болты 6. При слабо затянутых болтах силы трения незначительны и поглощение энергии невелико. С другой стороны, при сильно затянутых болтах проскальзывание может полностью исчезнуть; при этом рассеяния энергии вообще не будет. Оптимальное значение момента трения

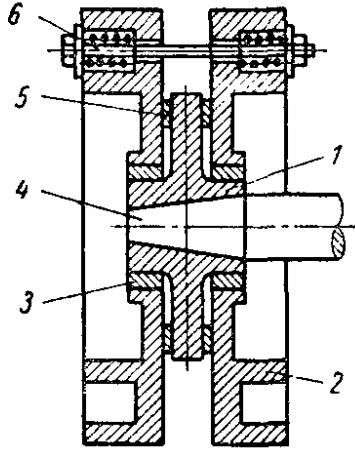


Рис. 32

$$M_{тр. опт} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} I \omega^2 \varphi_0. \quad (117)$$

При оптимальном трении рассеиваемая за цикл энергия

$$\Psi_{опт} = \frac{4}{\pi} I \omega^2 \varphi_0^2. \quad (118)$$

В формулах (117) и (118) φ_0 — амплитуда колебаний угла поворота того сечения вала, с которым связан поглотитель; I — момент инерции маховика относительно оси вращения.

Если на вал действует возмущающий момент с амплитудой M , то амплитуда колебаний сечения, с которым связан поглотитель, составляет

$$\varphi_0 = \frac{\pi^2 M}{4 I \omega^2} \kappa, \quad (119)$$

где κ — отношение амплитуды колебаний сечения, в котором действует возмущающий момент, к амплитуде колебаний сечения, с которым связан поглотитель (в условиях отсутствия поглотителя); это отношение можно взять из графика, определяющего форму колебаний. Если поглотитель установлен весьма близко к месту приложения возмущающего момента (к чему нужно стремиться), то $\kappa = 1$.

Динамический гаситель колебаний с вязким трением

Схема гасителя показана на рис. 19, в. Динамический коэффициент для основной массы

$$\mu = \sqrt{\frac{(1 - \beta_*^2)^2 + (2\xi\beta_*)^2}{[(1 - \beta_*^2)(1 - \beta^2) - \alpha\beta^2]^2 + (2\xi\beta_*)^2 [1 - \beta^2(1 + \alpha)]^2}}, \quad (120)$$

где

$$\xi = \frac{k_*}{2m_*\rho_*}; \quad (121)$$

здесь k_* — коэффициент вязкости [см. пояснения к формуле (111)], остальные обозначения см. стр. 331—332. Типичный график изменения μ с ростом частоты возмущения показан на рис. 33 (график построен для $\alpha = 0,05$; $\beta = \beta_*$; $\xi = 0,10$). С увеличением коэффициента вязкости первый максимум будет убывать, а второй — увеличиваться.

Рациональное решение состоит в назначении таких параметров системы, при которых уровни обоих максимумов становятся одинаковыми. При этом наибольший динамический коэффициент будет

$$\mu_{\max} = \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}. \quad (122)$$

Для этого необходимо, чтобы частоты гасителя и основной системы находились в отношении

$$\frac{p_*}{p} = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (123)$$

и безразмерный коэффициент вязкости ξ определялся по графику на рис. 34. При этом амплитуду колебаний массы гасителя по отношению к основной массе определяют по графику на рис. 35 умножением

ординат графика $\bar{\mu}_{\max}$ на статическую деформацию основной системы под действием силы P_0 (здесь μ_{\max} — коэффициент динамичности для относительных колебаний).

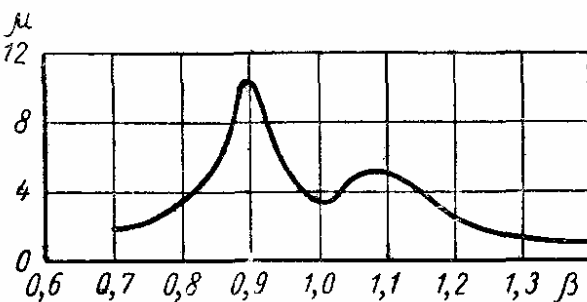


Рис. 33

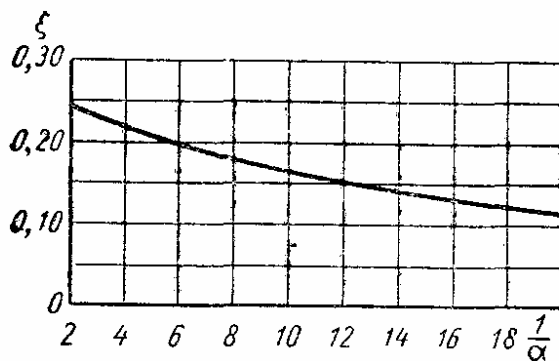


Рис. 34

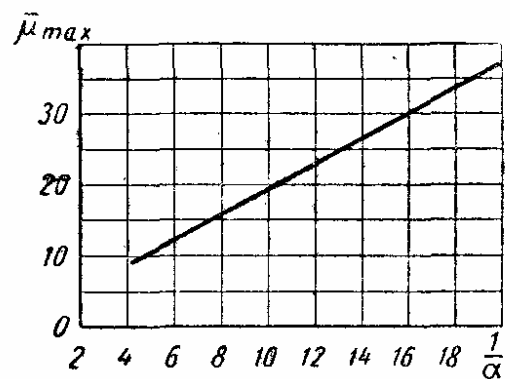


Рис. 35

Пример 17. Груз весом 10 дан упруго подвешен на пружине с жесткостью 50 дан/см. На груз действует возмущающая сила, амплитуда которой $P_0 = 1$ дан. Приняв $\alpha = 0,1$, определить параметры гасителя колебаний. Собственная частота основной системы

$$p = \sqrt{\frac{50}{10} \cdot 981} = 70 \text{ сек}^{-1}.$$

По формуле (123) находим собственную частоту колебаний гасителя

$$p_* = \frac{1}{1 + 0,1} \cdot 70 = 63,6 \text{ сек}^{-1}.$$

Отсюда определяем коэффициент жесткости пружины гасителя

$$c_* = m_* p_*^2 = \alpha m p^2 = 0,1 \cdot \frac{10}{981} \cdot 63,6^2 = 4,13 \text{ дан/см}.$$

По графику на рис. 34 при $\alpha = 0,1$ определяем

$$\xi = 0,16.$$

Следовательно, оптимальный коэффициент вязкости по формуле (121)

$$k_* = 0,32 m_* p = 0,32 \cdot 0,1 \cdot \frac{10}{981} \cdot 63,6 = 0,0207 \text{ дан} \cdot \text{сек} \cdot \text{см}^{-1}.$$

Наибольший динамический коэффициент для основной массы определяем по формуле (122):

$$\mu_{\max} = \sqrt{1 + \frac{2}{0,1}} = 4,60.$$

Статическое перемещение основной массы, вызванное силой P_0 ,

$$y_{ст} = P_0 : c = 1 : 50 = 0,02 \text{ см.}$$

Наибольшее динамическое перемещение основной массы составляет

$$y_{\max} = \mu_{\max} y_{ст} = 4,6 \cdot 0,02 = 0,092 \text{ см.}$$

Далее по графику на рис. 35 находим

$$\bar{\mu}_{\max} = 19.$$

Следовательно, амплитуда колебаний массы гасителя относительно основной массы системы

$$y_r = 19 \cdot 0,02 = 0,38 \text{ см.}$$

Отсюда определяем наибольшую силу в пружине гасителя

$$N = c_* y_r = 4,13 \cdot 0,38 = 1,57 \text{ дан.}$$

Сопоставление свойств динамических гасителей и поглотителей колебаний

Оценка эффективности различных типов гасителей и поглотителей зависит от того, насколько твердо фиксированной можно считать частоту возмущающей силы. В тех (довольно редких) случаях, когда частота возмущающей силы остается неизменной в течение всего срока эксплуатации установки, наиболее эффективным можно при-

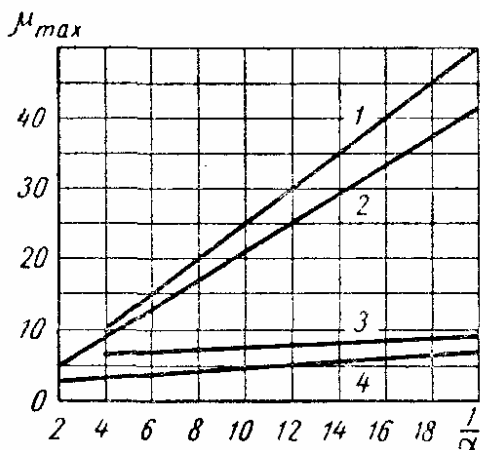


Рис. 36

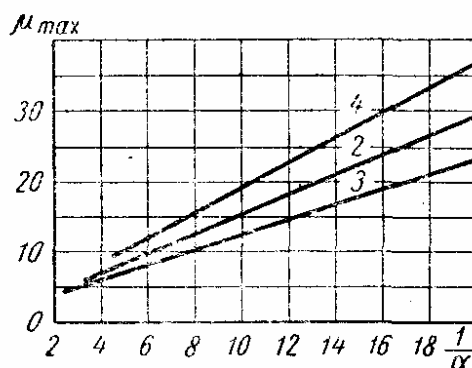


Рис. 37

знать динамический гаситель без демпфирования, как устройство, способное полностью исключить колебания основной массы системы.

Однако в большинстве случаев частота возмущающей силы может изменяться в более или менее широких пределах; при этом об эффективности гасителя или поглотителя колебаний следует судить по наибольшему возможному значению динамического коэффициента μ_{\max} , которое может быть достигнуто в процессе эксплуатации на широком диапазоне изменения частоты возмущающей силы. Значения динамического коэффициента для четырех случаев показаны на графике рис. 36. Здесь по оси абсцисс отложены отношения основной массы системы

к массе гасителя (поглотителя), а по оси ординат — наибольшее возможное значение динамического коэффициента. Кривая 1 относится к случаю поглотителя с сухим трением (при оптимальном значении последнего). Кривая 2 соответствует формуле (104) и построена для поглотителя с вязким трением при оптимальном значении коэффициента вязкости по формуле (111). Кривая 3 относится к динамическому гасителю колебаний с оптимальным вязким трением, причем $p = p_*$. Кривая 4 характеризует свойства оптимально настроенного динамического гасителя колебаний того же типа; соотношение частот $p : p_*$ соответствует формуле (122), вязкое трение — оптимальное. Ординаты этой кривой соответствуют формуле (121).

Отношение взаимного смещения дополнительной и основной масс к статическому смещению основной массы $P_0 : c$ дано на рис. 37 (обозначения кривых те же, что и на рис. 36).

КОНСТРУКЦИОННОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ

Общие сведения

Конструкционным демпфированием называют влияние энергетических потерь, возникающих вследствие действия сил сухого трения на контактных поверхностях в пресовых, болтовых, заклепочных, шлицевых и других соединениях при колебаниях механических систем. Как правило, конструкционное демпфирование значительно превосходит демпфирование, создаваемое действием внутреннего трения в материале деталей. Средние логарифмические декременты колебаний для различных типов станков имеют следующие значения:

Радиально-сверлильный	0,13
Токарный	0,23
Фрезерный	0,27
Шлифовальный	0,30

(логарифмический декремент колебаний цельных стальных частей при отсутствии каких-либо энергетических потерь, кроме сил внутреннего трения, составляет 0,01—0,02).

Диаграмма изменения логарифмического декремента колебаний для различных комбинаций узлов токарного станка показана на рис. 38; вследствие трения на поверхностях сопряжения узлов происходит значительное увеличение логарифмического декремента колебаний при увеличении числа этих поверхностей.

Конструкционное демпфирование может быть искусственно увеличено применением специальных конструкций рессорных пакетов или упругих демпфирующих муфт с пружинными пакетами (рис. 39).

Надежные оценки интенсивности конструкционного демпфирования в сложных механических системах можно получить только экспериментальным путем.

В простых соединениях с четкой схемой интенсивность конструкционного демпфирования может быть определена предварительным расчетом. За меру этой интенсивности принимают площадь петли гистерезиса, развивающегося при циклическом деформировании соединения. Для расчетного определения уравнений отдельных ветвей петли обычно принимают закон Кулона, причем одновременно с анализом развития зон трения учитывают деформации в сопрягаемых элементах системы.

Петля гистерезиса, развивающегося при поочередных нагрузках и разгрузках простейшей системы (рис. 40, а), показана на рис. 40, б. Система представляет собой упругую полосу, прижатую к совершенно жесткому основанию давлением, равномерно распределенным по всей

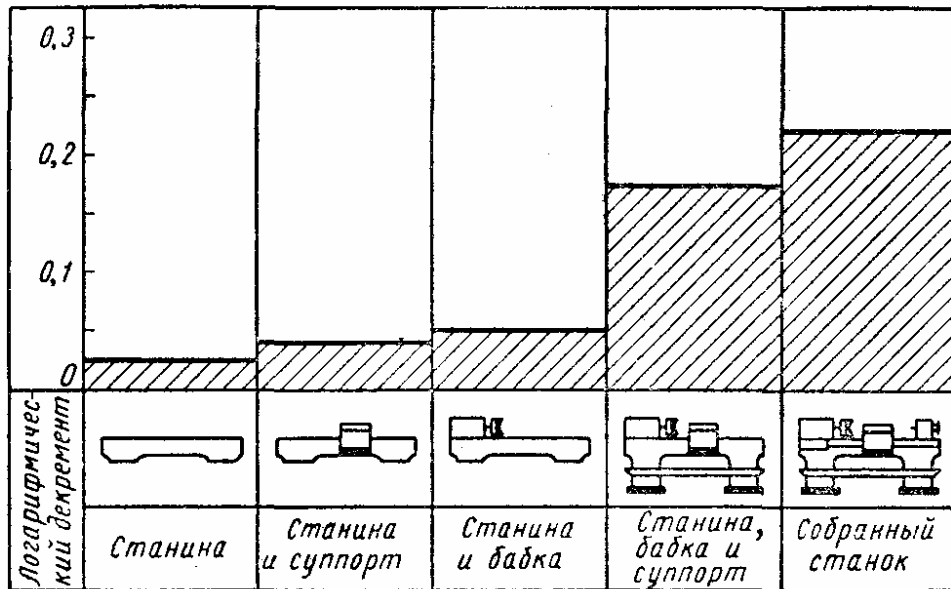


Рис. 38

длине полосы; к концу полосы приложена сила αP , причем P — максимальное значение силы; α — безразмерный параметр нагрузки (на первом этапе нагружения $0 < \alpha < 1$ — ветвь 1, на этапе разгрузки $r < \alpha < 1$ — ветвь 2, на этапе повторной нагрузки $r < \alpha < 1$ — ветвь 3).

Уравнения ветвей петли гистерезиса:
для ветви 1

$$u = \frac{\alpha^2 P^2}{2qEF}; \quad (124)$$

для ветви 2

$$u = \frac{(1+2\alpha-\alpha^2) P^2}{4qEF}; \quad (125)$$

для ветви 3

$$u = \frac{(1-2\alpha r+2r+\alpha^2) P^2}{4qEF}. \quad (126)$$

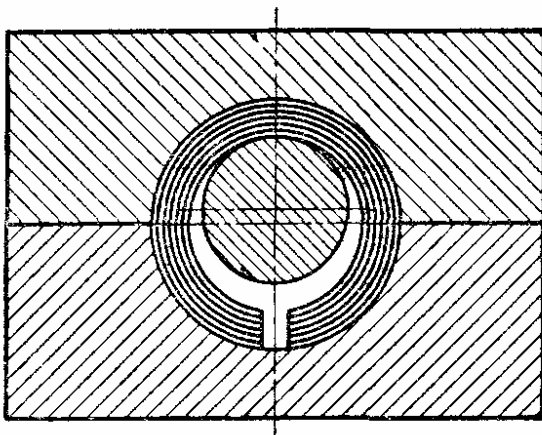


Рис. 39

В этих уравнениях u — перемещение конца полосы; q — предельная сила трения, отнесенная к единице длины полосы; EF — жесткость сечения полосы при растяжении (сжатии); r — коэффициент асимметрии цикла (отношение минимального значения продольной силы к максимальному ее значению).

При повторениях нагружения и разгружения (в тех же пределах изменения параметра α от значения r до значения 1) процесс будет описываться теми же ветвями 2 и 3.

Площадь петли гистерезиса

$$\Psi = \frac{(1-r)^3}{12qEF} P^3 = \frac{2P_v^3}{3qEF},$$

где $P_v = \alpha_v P$ — амплитуда силы.

Эта формула верна при условии, что максимальная сила P недостаточна для того, чтобы вызвать проскальзывание по всей длине полосы. Если сила P способна вызвать проскальзывание по всей длине, но левый конец полосы закреплен, то зависимость $\Psi(p)$ площади петли гистерезиса от интенсивности предельных сил трения $q = fr$ становится более

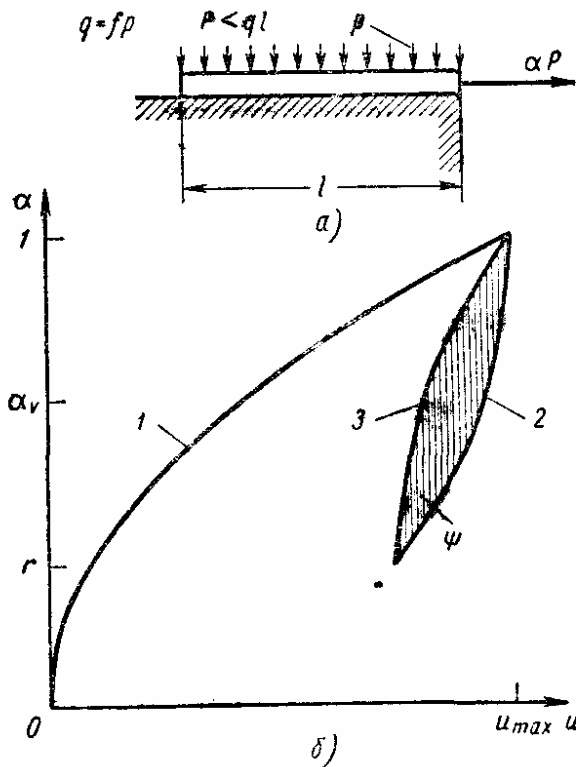


Рис. 40

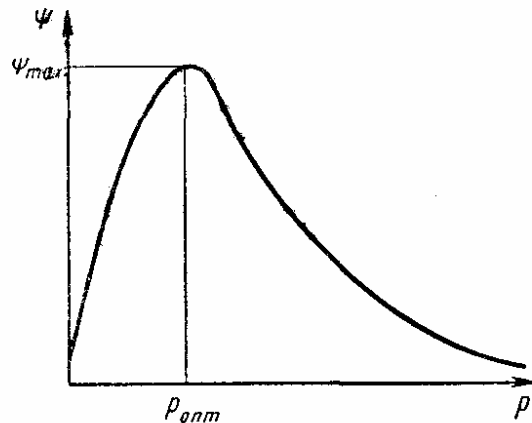


Рис. 41

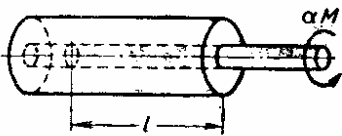
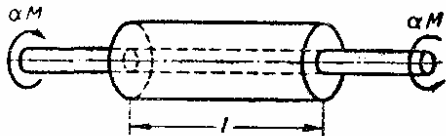
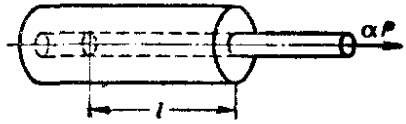
сложной и имеет вид, схематически показанный на рис. 41. Здесь ясно видно существование оптимального значения, которому соответствует максимум рассеяния энергии.

Конструктивное демпфирование в простых соединениях

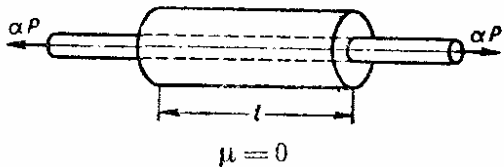
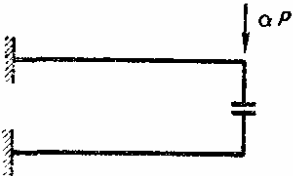
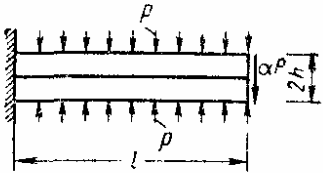
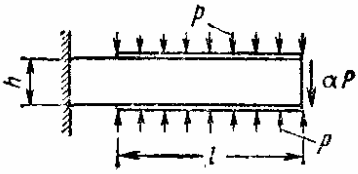
Примеры такого демпфирования приведены в табл. 20.

Обозначения: q — интенсивность предельных сил трения; m — интенсивность крутящих моментов, создаваемых предельными силами трения; EF и (GJ_p) — жесткость сечения вала при растяжении и при кручении; $(EF)_*$ и $(GJ_p)_*$ — жесткость сечения втулки при растяжении и при кручении; P и M — максимальные значения переменной продольной силы и переменного крутящего момента; P_m и M_m — средние значения переменной продольной силы и переменного крутящего момента; P_v и M_v — амплитудные значения переменной продольной силы и переменного крутящего момента; ν — коэффициент Пуассона; Ψ — площадь петли гистерезиса; c — погонная жесткость упругих связей, препятствующих сдвигу (в упруго-фрикционных связях).

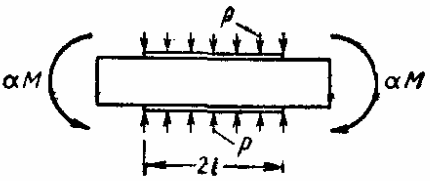
20. Площади петель конструкционного гистерезиса [12]

Вид соединения	Площадь петли гистерезиса
 <p style="text-align: center;">$M < ml$</p>	$\Psi = \frac{2M_v^3}{3mGJ_p} \cdot \frac{1-3k+3k^2}{1-k};$ $k = \frac{GJ_p}{GJ_p + (GJ_p)_*}$
 <p style="text-align: center;">$\alpha_v = \frac{1-r}{2}; \quad \alpha_0 = \frac{ml}{2M_v}$</p>	<p>При $M_v \leq 0,5ml$</p> $\Psi = \frac{4M_v^3 (1-k)^2}{3mGJ_p}.$ <p>При $M_v > 0,5ml$</p> $\Psi = \frac{4M_v^3}{3mGJ_p} \left[3\alpha_v \alpha_0^2 - 3\alpha_0^3 + \alpha_0^3 (1-k)^2 \right]$
 <p style="text-align: center;">$P < ql$</p>	<p>При $v=0$</p> $\Psi = \frac{2P_v^3}{3qEF} \cdot \frac{1-3k+3k^2}{1-k};$ $k = \frac{EF}{EF + (EF)_*}$ <p>При $v \neq 0, (EF)_* \gg EF$</p> $\Psi = \frac{4NP_v}{3q_0EF} \left[P_m - P_0 + \sqrt{(N-P)(N-rP)} \right];$ $N = \frac{p_0 F}{v(1-v)};$ <p>p_0 — начальное давление на контактной поверхности;</p> $q_0 = \pi D f p_0$

Продолжение табл. 20

Вид соединения	Площадь петли гистерезиса
 <p>$\mu = 0$</p> <p>$\alpha_v = \frac{1-r}{2}; \alpha_0 = \frac{ml}{2P_v}$</p>	<p>При $P \leq 0,5ql$</p> $\Psi = \frac{4P_v^3}{3qEF} (1-k)^2.$ <p>При $P_v > 0,5ql$</p> $\Psi = \frac{4P^3}{3qEF} [3\alpha_v\alpha_0 - 3\alpha_0^3 + \alpha_0^3(1-k)^2]$
	$\Psi = \frac{l}{EJ \left(\frac{1}{f^2 h^2} - \frac{1}{l^2} \right)} [P_v P_m - 2(P_m - P_v)],$ <p>h, l — высота и длина системы</p>
	$\Psi = \frac{2qhl(3P - 4qh)}{9EJ}.$ <p>При упруго-фрикционных связях между слоями</p> $\Psi = \frac{8ql^3}{Ebh^2} (3P - 4qh) \times$ $\times \left[\frac{1}{(\lambda l)^2} - \frac{\text{th } \lambda l}{(\lambda l)^3} \right];$ $\lambda = \sqrt{\frac{8c}{Ebh}}.$
 <p>h — высота балки; b — ширина балки; F — площадь сечения накладок; J_0 — момент инерции сечения балки (без накладок)</p>	$\Psi = \frac{2P_v^3 \beta^2 l^3 qh}{3EJ_0 (\beta P_v + qh)^2}.$ <p>При упруго-фрикционных связях между слоями</p> $\Psi = \frac{4EJ_0 qh}{cJ_0^2 \gamma} (\gamma l - \text{Arsh } \gamma l);$ $J = \frac{Fh^2}{2} + J_0; \beta = \frac{Fh^2}{2J};$ $\gamma = \frac{\beta P_v}{qh + \beta P_v}$

Продолжение табл. 20

Вид соединения	Площадь петли гистерезиса
 <p>h — высота балки; b — ширина балки; F — площадь сечения накладки; J_0 — момент инерции сечения балки (без накладок)</p>	<p>При $M < \frac{qlh}{\beta}$</p> $\Psi = \frac{4\beta^2 M_v^3}{3qhEJ_0}$ <p>При $M_v > \frac{qlh}{\beta}$</p> $\Psi = \frac{4\beta^2 \alpha_0^2 M^3}{3qhEJ_0} (3\alpha_v - 2\alpha_0)$ <p>При упруго-фрикционных связях между слоями, если $M \leq \frac{2qJ \operatorname{sh} \lambda l}{\lambda h F}$:</p> $\Psi = \frac{M_v^3 h^3 F^2}{EJ^2 J_0 q} \left(\gamma^2 - \gamma^3 \operatorname{Arsh} \frac{1}{\gamma} \right);$ $J = \frac{Fh^2}{2} + J_0; \quad \beta = \frac{Fh^2}{2J};$ $\gamma = \frac{qh}{M_v} \sqrt{\frac{FEJ}{cJ_0}}; \quad \lambda^2 = \frac{cJ}{FEJ_0}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев И. В., Тимофеев П. Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. М., «Машиностроение», 1965.
2. Безухов Н. И., Лужин О. В. Устойчивость и динамика сооружений. М., Госстройиздат, 1963.
3. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956.
4. Бицено К., Граммель Р. Техническая динамика. Т. 1, М., Гостехиздат, 1951.
5. Диментберг Ф. М. Поперечные колебания вращающихся валов. Изд-во АН СССР, 1958.
6. Крылов А. Н. Вибрация судов. М., ОНТИ, 1936.
7. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. II. М., ГИИ, 1954 (и более поздние издания).
8. Рабинович И. М. Курс строительной механики. Т. II. М., Госстройиздат, 1958.
9. Стретт Дж. (Рэлей). Теория звука. ТТ. I и II. М., Гостехиздат, 1954.
10. Филиппов А. П. Колебания упругих тел. Изд-во АН УССР, 1956.
11. Чудновский В. Г. Методы расчета устойчивости и колебаний стержневых систем. Изд-во АН УССР, 1954.
12. Пановко Я. Г. Проблемы теории конструкционного демпфирования. Труды Третьего совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Сборник статей «Динамика машин». М., Машгиз, 1963.
13. Гольденблат И. И., Сизов А. М. Справочник по расчету строительных конструкций на устойчивость и колебания. М., Стройиздат, 1952.

См. также литературу к гл. 6.

Глава 6

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Понятие о параметрических колебаниях. Колебания называют *параметрическими*, если они описываются дифференциальными уравнениями с переменными (обычно периодическими) коэффициентами. В отличие от вынужденных колебаний параметрические колебания поддерживаются внешними силами косвенно — через изменение параметров системы. Простейшим примером параметрических колебаний в механике

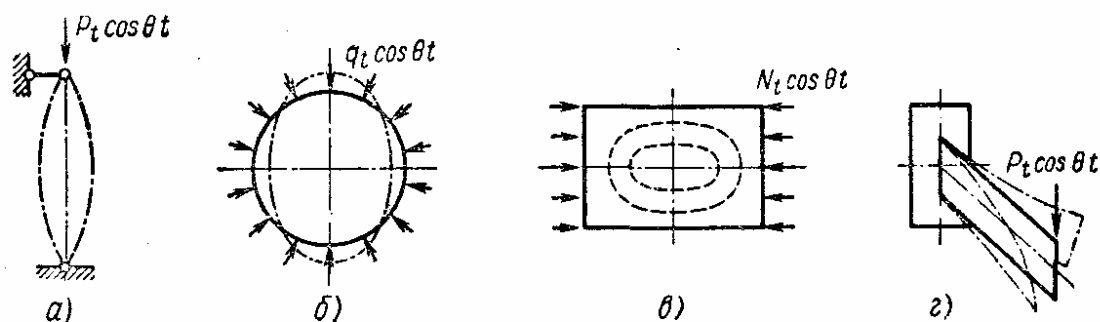


Рис. 1

являются колебания маятника, возбуждаемые периодическим перемещением точки подвеса в направлении силы тяжести.

Параметрические колебания упругих систем, связанные с задачами упругой устойчивости. Задачей этого типа является, например, задача о колебаниях прямолинейного стержня, на который действует периодическая продольная сила (рис. 1, а). Если амплитуда этой силы достаточно мала, то следует ожидать, что стержень будет испытывать только продольные колебания. Однако оказывается, что при определенных соотношениях между частотой свободных изгибных колебаний ω и частотой вынужденных колебаний θ прямолинейная форма равновесия оказывается неустойчивой. Возникают изгибные колебания, амплитуда которых может быстро возрасти до больших значений. Соотношение частот, при котором наступает этот *параметрический резонанс*, отличается от соотношения частот при резонансе вынужденных колебаний. Если амплитуда продольной силы достаточно мала, то это соотношение имеет вид $\theta \approx 2\omega$.

Можно привести много примеров этого типа. Так, круговое кольцо, нагруженное равномерно распределенной радиальной нагрузкой, периодически меняющейся во времени (рис. 1, б), при определенном соотношении частот может испытывать интенсивные изгибные колебания. Периодические силы, действующие в срединной плоскости пластинки (рис. 1, в), при определенных условиях могут вызвать интенсивные поперечные колебания. Периодические силы, действующие на балку узкого поперечного сечения в плоскости ее наибольшей жесткости (рис. 1, г), при определенных условиях могут вызвать изгибно-крутильные колебания из этой плоскости.

Перечисленные задачи рассматриваются в теории динамической устойчивости упругих систем [7, 24]. Для всех этих задач общим

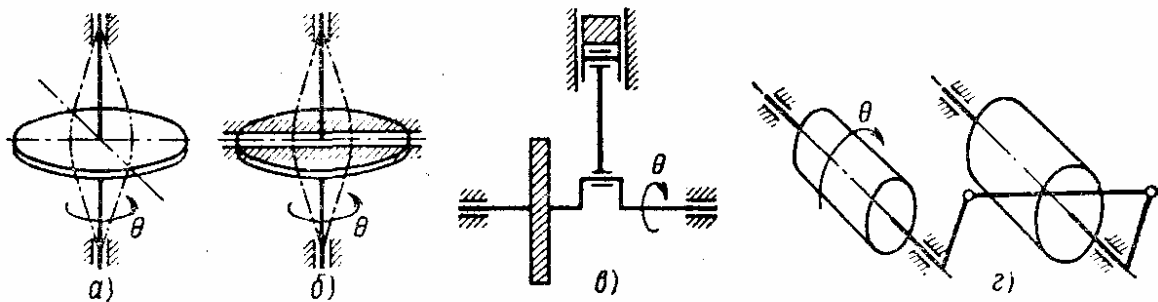


Рис. 2

является то, что причиной колебаний является периодическое изменение внешних сил такого вида, что, будучи приложены статически, они могут вызвать статическую потерю устойчивости равновесия упругой системы. Такие силы будем называть *параметрическими*. Периодическое изменение параметрических сил вызывает периодическое изменение жесткости системы по отношению к другим силам.

Некоторые другие классы параметрических колебаний упругих систем. Параметрические колебания встречаются также при изучении динамики валов, роторов и более сложных механизмов [7]. Так, вал, сечение которого имеет неодинаковые главные жесткости, может испытывать интенсивные поперечные колебания даже в том случае, если он полностью уравновешен и если его ось параллельна ускорению сил тяжести (рис. 2, а). Непосредственной причиной возбуждения колебаний в этом случае является периодическое изменение жесткости во времени. Эти колебания можно трактовать и как параметрически возбуждаемые колебания, и как автоколебания. В неподвижной системе координат поведение вала описывается, как в других параметрических задачах, дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Если использовать систему координат, вращающуюся вместе с валом, то получим дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Более четким в классификационном отношении примером может служить вал, совершающий поперечные колебания лишь в одной плоскости (рис. 2, б). Примером системы, в которой периодически меняется некоторая приведенная масса, может служить шатунно-кривошипный механизм (рис. 2, в). Жесткость периодически меняется в механизме спарниковой передачи в локомотивах (рис. 2, г). Подробнее см. работы [1, 7, 8, 22].

В этой главе мы ограничимся рассмотрением колебаний упругих систем, возбуждаемых параметрическими силами, которые меняются во времени по периодическому закону. Однако, используя математическую аналогию, можно многие результаты распространить и на другие задачи параметрических колебаний.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ (ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ)

Дифференциальное уравнение параметрических колебаний упругого стержня, опертого по концам и сжатого силой $P(t)$ (рис. 3). Пренебрегая продольными колебаниями, найдем, что в линейном приближении изгибные колебания описываются уравнением

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

здесь EJ — изгибная жесткость; m — масса стержня, приходящаяся на единицу длины. Граничные условия будут удовлетворены, если положить

$$v(x, t) = f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где $f_k(t)$ — искомые функции времени. Подстановка в уравнение (1) приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $f_k(t)$:

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left[1 - \frac{P(t)}{P_k} \right] f_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

В уравнениях (3) введены обозначения для собственных частот незагруженного стержня ω_k и для соответствующих критических (эйлеровых) сил P_k :

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

$$P_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}. \quad (4)$$

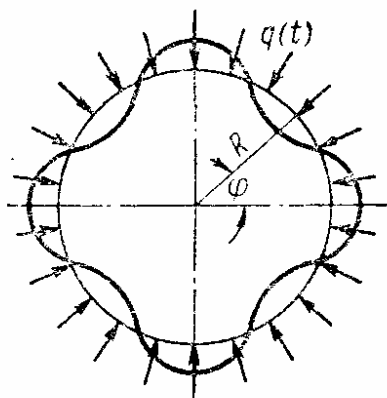


Рис. 4

Эта задача была впервые рассмотрена Н. М. Беляевым [2].

Дифференциальное уравнение задачи о параметрических колебаниях кругового кольца. Допустим, что кольцо находится под действием радиальной нагрузки интенсивностью $q(t)$, векторы которой остаются нормальными

к деформированной оси кольца. Рассмотрим колебания кольца в его плоскости (рис. 4). Если пренебречь осевыми деформациями кольца, то получим следующее уравнение относительно тангенциального перемещения $v(\varphi, t)$:

$$\frac{EJ}{R^4} \left(\frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{q(t)}{R} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - v \right) = 0.$$

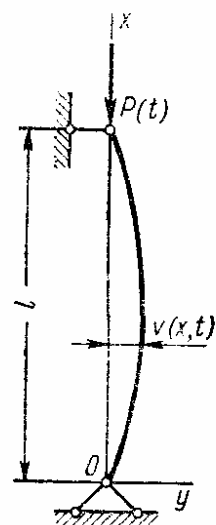


Рис. 3

Подставляя сюда выражение

$$v(\varphi, t) = f_k(t) \sin k(\varphi - \varphi_0) \quad (k = 2, 3 \dots),$$

удовлетворяющее условию периодичности по φ , получим дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left[1 - \frac{q(t)}{q_k} \right] f_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (5)$$

относительно функций $f_k(t)$. Здесь ω_k и q_k — соответствующие собственные частоты и критические силы:

$$\omega_k = \frac{k(k^2 - 1)}{R^2} \sqrt{\frac{EJ}{m(k^2 + 1)}}; \quad q_k = \frac{EJ}{R^3} (k^2 - 1).$$

Эта задача была впервые рассмотрена Г. Ю. Джанелидзе и М. А. Радцигом [12].

Понятие об «особом случае». Для некоторого класса задач исследование параметрических колебаний может быть приведено к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left[1 - \frac{\alpha(t)}{\alpha_k} \right] f_k = 0 \quad (k = 1, 2 \dots), \quad (6)$$

где ω_k — собственные частоты незагруженной системы; α_k — собственные значения задачи статической устойчивости для системы, нагруженной внешними силами и параметром α . Задачи, которые приводят к дифференциальным уравнениям вида (6), относят к *особому случаю* [7]. Можно показать, что особый случай имеет место лишь для тех упругих систем и приложенных к ним нагрузок, для которых формы свободных колебаний и формы статической потери устойчивости совпадают [5, 7, 13].

Если внешняя нагрузка меняется по гармоническому закону, то можно положить

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_t \cos \theta t.$$

Уравнение (6) будем записывать для этого случая в следующей стандартной форме:

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \theta t) f_k = 0; \quad (7)$$

здесь ω_k — частоты свободных колебаний системы, нагруженной статическими силами с параметром α_0 ;

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_k}}. \quad (8)$$

Через μ_k обозначены параметры, называемые *коэффициентами возбуждения*:

$$\mu_k = \frac{\alpha_t}{2(\alpha_k - \alpha_0)}. \quad (9)$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Приведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим общее уравнение параметрических колебаний упругой системы, движение которой описывается скаляром или вектором — функцией $u(x_1, x_2, x_3, t)$ координат x_1, x_2, x_3 и времени t :

$$L[u] + \Phi(t) M[u] + N\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = 0; \quad (10)$$

здесь L, M и N — некоторые линейные операторы; $\Phi(t)$ — некоторая функция времени. Решение уравнения (10) ищем в форме

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x_1, x_2, x_3), \quad (11)$$

где $\varphi_k(x_1, x_2, x_3)$ — формы свободных колебаний незагруженной системы, удовлетворяющие уравнению

$$L[\varphi_k] - \omega_k^2 N[\varphi_k] = 0$$

и условию нормировки

$$(N[\varphi_k], \varphi_k) = 1;$$

здесь (φ, ψ) — знак скалярного произведения в пространстве допустимых функций. Например, в случае стержня длиной l

$$(\varphi, \psi) = \int_0^l \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Подставляя ряд (11) в уравнение (10) и применяя вариационный метод Галеркина, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 f_j}{dt^2} + \omega_j^2 \left[f_j - \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} f_k \right] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Коэффициенты a_{jk} определяют при этом по формуле

$$a_{jk} = - \frac{1}{\omega_j^2} (M[\varphi_k], \varphi_j). \quad (13)$$

Система уравнений (12) была впервые получена В. Н. Челомеем [18]. Некоторые другие способы вывода уравнений типа (12) рассмотрены в статье [5] и книге [7].

Матричная форма записи уравнений. Пусть число членов ряда (11) ограничено и равно ν . Вводя матрицу-столбец f и матрицы C и A

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_\nu \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\omega_\nu^2} \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

запишем систему (12) в матричной форме

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - \Phi(t) A] f = 0, \quad (14)$$

где E — единичная матрица.

В несколько более общем случае, когда на систему действует постоянная параметрическая нагрузка с параметром α и переменная параметрическая нагрузка с параметром β , исходное уравнение записывается в виде

$$L[u] + \alpha M_0[u] + \beta \Phi(t) M_t[u] + N \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = 0.$$

Выпишем эквивалентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 f_j}{dt^2} + \omega_j^2 \left[f_j - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} f_k - \beta \Phi(t) \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} f_k \right] = 0; \quad (15)$$

здесь обозначено

$$a_{jk} = -\frac{1}{\omega_j^2} (M_0[\varphi_k], \varphi_j); \quad b_{jk} = -\frac{1}{\omega_j^2} (M_t[\varphi_k], \varphi_j).$$

Запишем уравнение (15) в матричной форме:

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = 0; \quad (16)$$

здесь B — квадратная матрица с элементами b_{jk} .

Приближенные уравнения параметрических колебаний упругих систем. Если диагональные элементы матриц A и B достаточно велики по сравнению с недиагональными элементами, то в первом приближении систему (15) можно заменить последовательностью независимых уравнений

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 [1 - \alpha a_{kk} - \beta \Phi(t) b_{kk}] f_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Элементы a_{kk} и b_{kk} легко выражаются через приближенные (в смысле энергетического метода) значения критических параметров α_k и β_k . А именно:

$$a_{kk} = -\frac{1}{\omega_j^2} (M_0 [\Phi_k], \Phi_k) \approx \frac{1}{\alpha_k}; \quad b_{kk} = -\frac{1}{\omega_j^2} (M_t [\Phi_k], \Phi_k) \approx \frac{1}{\beta_k}.$$

Учитывая эти соотношения, приведем уравнения (17) к виду [7, 18]

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha_k} - \frac{\beta}{\beta_k} \Phi(t) \right] f_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Эти уравнения по существу совпадают с уравнениями особого случая (6). Если недиагональные элементы матриц A и B не малы по сравнению с главными, то приближенными уравнениями (18) следует пользоваться с осторожностью.

ПРИМЕРЫ ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнение параметрических колебаний круглой пластинки, защемленной по контуру и сжимаемой в срединной плоскости периодическими силами. Уравнение изгибных колебаний для этой задачи (рис. 5) имеет вид

$$D \Delta \Delta w + q(t) \Delta w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (19)$$

здесь $w(r, \varphi, t)$ — прогиб пластинки; D — цилиндрическая жесткость; m — масса, отнесенная к единице площади срединной поверхности; $q(t)$ — интенсивность нагрузки. Решение уравнения (19) должно удовлетворять граничным условиям

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R.$$

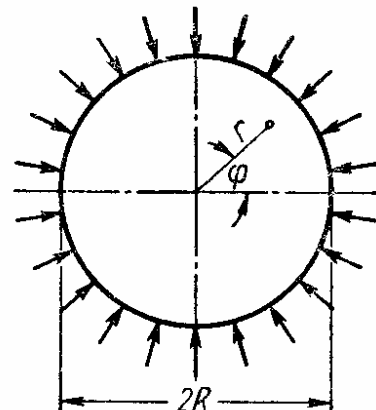


Рис. 5

Следуя общей методике, ищем приближенное решение в виде форм колебаний $\psi_{mn}(r, \varphi)$, умноженных на некоторые функции времени $f_k(t)$. Формы колебаний даются выражениями

$$\psi_{mn}(r, \varphi) = [I_n(\kappa_{mn}R) J_n(\kappa_{mn}r) - J_n(\kappa_{mn}R) I(\kappa_{mn}r)] \cos n\varphi \\ (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где κ_{mn} — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} J_n(\kappa R) & I_n(\kappa R) \\ J'_n(\kappa R) & I'_n(\kappa R) \end{vmatrix} = 0.$$

Частоты собственных колебаний незагруженной пластины находятся по формуле

$$\omega_{mn} = \kappa_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Применяя вариационный метод Галеркина, сведем приближенно уравнение (19) к последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений типа (18):

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \left[1 - \frac{q(t)}{q_{mn}} \right] f_{mn} = 0 \quad \left(\begin{matrix} m = 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right);$$

здесь q_{mn} — приближенные значения критических параметров, определяемые по формуле

$$q_{mn} = - \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \psi_{mn}^2(r, \varphi) r dr d\varphi}{\int_0^R \int_0^{2\pi} \Delta \psi_{mn}(r, \varphi) \psi_{mn}(r, \varphi) r dr d\varphi} m \omega_{mn}^2.$$

Эта задача была рассмотрена в статье [3].

Уравнения параметрических колебаний изгибаемой полосы. Приведем пример задачи, которую даже в первом приближении нельзя свести

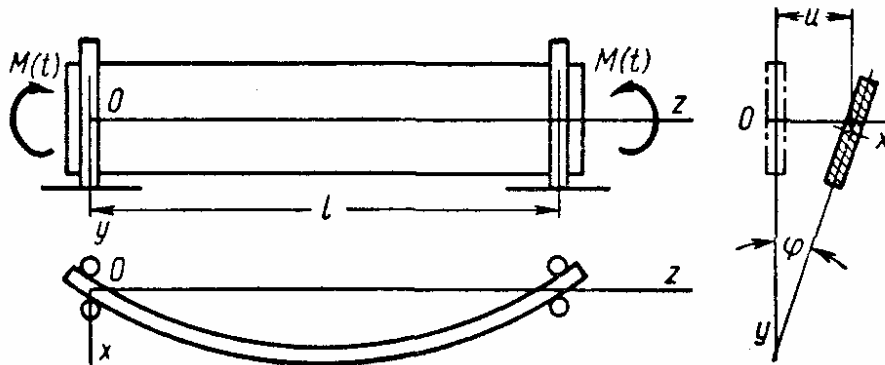


Рис 6

к уравнениям типа (18). Пусть полоса узкого прямоугольного сечения шарнирно опята по концам и нагружена моментами $M(t)$, действующими в плоскости наибольшей жесткости (рис. 6). Рассмотрим изгибно-крутильные колебания, происходящие из плоскости наибольшей жесткости. Поперечный прогиб $u(z, t)$ и угол поворота $\varphi(z, t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + M(t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ M(t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - GJ_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m\rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где EJ_y — жесткость при изгибе из плоскости наибольшей жесткости; GJ_k — жесткость при кручении; m — масса, отнесенная к единице длины; ρ — полярный радиус инерции сечения. Решение уравнений (20) должно удовлетворять граничным условиям

$$u = \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l.$$

Будем искать решение в виде

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= U_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l}; \\ \varphi(z, t) &= \Phi_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $U_n(t)$ и $\Phi_n(t)$ — искомые функции времени.

Подставляя выражение (21) в уравнение (20), получим для каждого n систему двух дифференциальных уравнений относительно $U_n(t)$ и $\Phi_n(t)$. Запишем эту систему в матричной форме, аналогичной выражению (16):

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E - M(t) A] f = 0. \quad (22)$$

При этом использованы обозначения

$$f = \begin{bmatrix} U_n \\ \Phi_n \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_{ny}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_{n\varphi}^2} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{l^2}{n^2 \pi^2 EJ_y} \\ \frac{1}{GJ_k} & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где ω_{ny} и $\omega_{n\varphi}$ — парциальные частоты изгибных и крутильных собственных колебаний соответственно. Эта задача была рассмотрена в книге [7].

Заметим, что диагональные элементы матрицы A равны нулю. Здесь мы имеем случай, в некотором смысле противоположный особому случаю, который был рассмотрен в § 2. В особом случае формы свободных колебаний и формы статической потери устойчивости совпадают; в данной задаче эти формы ортогональны между собой.

ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ-ХИЛЛА

Уравнение Матье-Хилла. Рассмотрим одно из дифференциальных уравнений (18), опуская при этом индекс k . Введя обозначения

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha_*}}; \quad \mu = \frac{\beta}{2(\alpha - \alpha_*)}, \quad (24)$$

где α_* — критическое значение параметра α , перепишем уравнение в виде

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2 [1 - 2\mu \Phi(t)] f = 0. \quad (25)$$

Если функция $\Phi(t)$ является периодической, т. е. если

$$\Phi\left(t + \frac{2\pi}{\theta}\right) = \Phi(t),$$

то дифференциальное уравнение (25) называют *уравнением Хилла*. Частный случай уравнения Хилла при $\Phi = \cos \theta t$ называют *уравнением Матье* [15, 17].

Области неустойчивости уравнения Матье. Рассмотрим подробнее уравнение Матье

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f = 0. \quad (26)$$

В зависимости от соотношения между параметрами Ω , θ и μ его решения могут быть либо ограниченными во времени (периодическими или квазипериодическими), либо неограниченно возрастающими во времени. Области в пространстве параметров, при которых уравнение Матье имеет неограниченно возрастающее решение, называют *областями неустойчивости*. На рис. 7 представлено распределение областей неустойчивости для уравнения Матье, записанного в виде

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x) f = 0. \quad (27)$$

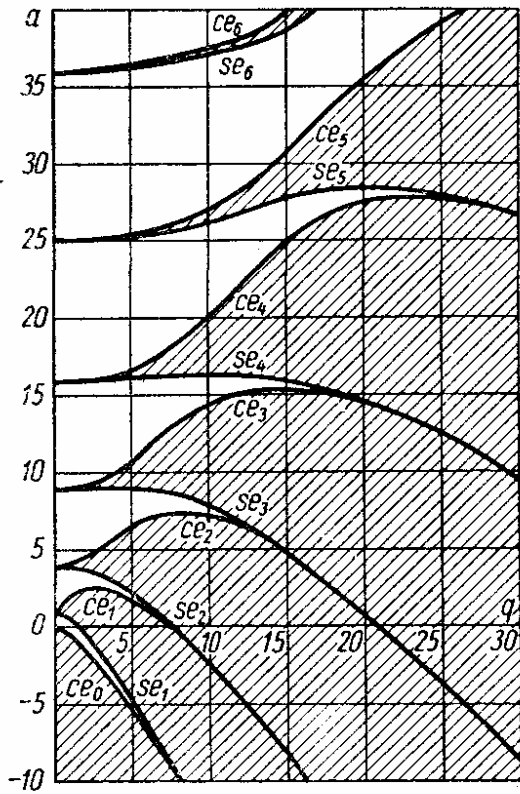


Рис. 7

В такой записи коэффициенты уравнения зависят от параметров a и q , которые и отложены вдоль осей координат. Области неустойчивости заштрихованы. Периодические решения на границе областей равны $ce_n(x)$ и $se_n(x)$ (функциям Матье порядка n). Эту диаграмму называют *диаграммой Стретта* [17].

Возвращаясь к обозначениям, использованным в уравнении (26), видим, что при малых μ области неустойчивости располагаются вблизи линий, на которых

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Область, которой в формуле (28) соответствует $n = 1$, называют *главной*, остальные — *побочные*.

Определение границ областей неустойчивости при малых μ . С точки зрения задач о параметрических колебаниях упругих систем наибольший интерес представляет полоса на плоскости параметров, которая соответствует малым значениям параметра μ . Границы областей неустойчивости для этой полосы могут быть вычислены по формулам, вывод которых дается в книге [7]. Для границ главной области неустойчивости

$$\theta_* \approx 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu}. \quad (29)$$

Более точные значения для частот θ , соответствующих границам главной области, могут быть вычислены из уравнений, получаемых усечением бесконечного определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (30)$$

Из уравнения (30) могут быть найдены также границы побочных областей при $n = 3, 5, \dots$. Границы побочных областей, которым в формуле (28) соответствует $n = 2, 4, \dots$, могут быть найдены из уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{16\theta^2}{\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 & \dots \\ -2\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & \dots \\ 0 & -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & \dots \\ 0 & 0 & -\mu & 1 - \frac{16\theta^2}{\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Подробнее см. в книге [7].

Формулы, основанные на методе малого параметра. Если параметр μ в уравнении (26) достаточно мал по сравнению с единицей, то для определения границ областей неустойчивости может быть применен метод малого параметра [1, 12, 15, 18]. Этот метод приводит к формулам для определения границ областей неустойчивости [15], которые собраны в таблице. В этой таблице $se_n(x)$ и $se_n(x)$ — функции Матье целого порядка n , где n — номер области неустойчивости. Чтобы перейти к уравнению в форме (26), надо положить

$$a = \frac{4\Omega^2}{\theta^2}; \quad q = \frac{4\Omega^2}{\theta^2} \mu. \quad (31)$$

Границы областей неустойчивости уравнения Матъе

Порядок области неустойчи- вости n	$\frac{d^2 f}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x) f = 0$		$\frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f = 0$	
	Периоди- ческое реше- ние на гра- нице области	Связь между параметрами a и q на границе области неустойчивости	Связь между параметрами Ω , θ и μ на границе области неустойчивости	
1	$se_1(x)$	$a_* = 1 \mp q - \frac{1}{8} q^2 \pm \frac{1}{64} q^3 - \frac{1}{1536} q^4 + O(q^5)$	$\theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu + \frac{1}{8} \mu^2 + O(\mu^3)}$	
	$ce_1(x)$			
2	$se_2(x)$	$a_* = 4 - \frac{1}{12} q^2 + \frac{5}{13824} q^4 + O(q^6)$	$\theta_* = \Omega \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu^2 + O(\mu^4)}$	
	$ce_2(x)$		$\theta_* = \Omega \sqrt{1 - \frac{5}{3} \mu^2 + O(\mu^4)}$	
3	$se_3(x)$	$a_* = 9 + \frac{1}{16} q^2 \mp \frac{1}{64} q^3 + \frac{13}{20480} q^4 + O(q^5)$	$\theta_* = \frac{2\Omega}{3} \sqrt{1 - \frac{9}{16} \mu^2 \pm \frac{81}{64} \mu^3 + O(\mu^4)}$	
	$ce_3(x)$		$\theta_* = \frac{\Omega}{2} \sqrt{1 - \frac{16}{30} \mu^2 + \frac{4112}{3375} \mu^4 + O(\mu^6)}$	
4	$se_4(x)$	$a_* = 16 + \frac{1}{30} q^2 - \frac{317}{864000} q^4 + O(q^6)$	$\theta_* = \frac{\Omega}{2} \sqrt{1 - \frac{16}{30} \mu^2 - \frac{7888}{3375} \mu^4 + O(\mu^6)}$	
	$ce_4(x)$		$\theta_* = \frac{\Omega}{2} \sqrt{1 - \frac{16}{30} \mu^2 - \frac{7888}{3375} \mu^4 + O(\mu^6)}$	
5	$se_5(x)$	$a_* = 25 + \frac{1}{48} q^2 + \frac{11}{774144} q^4 \mp \frac{1}{147456} q^5 + O(q^6)$	$\theta_* = \frac{2\Omega}{5} \times$	
	$ce_5(x)$		$\times \sqrt{1 - \frac{25}{48} \mu^2 - \frac{381875}{774144} \mu^4 \pm \frac{390625}{147456} \mu^5 + O(\mu^6)}$	

Из таблицы видно, что n -я область неустойчивости, где $n \geq 1$, имеет относительную ширину порядка q^n .

Диаграмма Стретта и соответствующие формулы из таблицы удобны для определения критических величин отношения частот $\frac{\theta}{\Omega}$, по-

скольку это отношение входит в оба параметра a и q . В последней графе таблицы даны приближенные формулы для областей неустойчивости, решенные относительно частоты θ . Три области неустойчивости показаны на рис. 8.

Области неустойчивости уравнения Хилла. Рассмотрим уравнение Хилла (25), предполагая, что функция $\Phi(t)$ представлена в виде

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cos k\theta t.$$

Границы первой, третьей и т. д. областей неустойчивости определяют из уравнения [7]

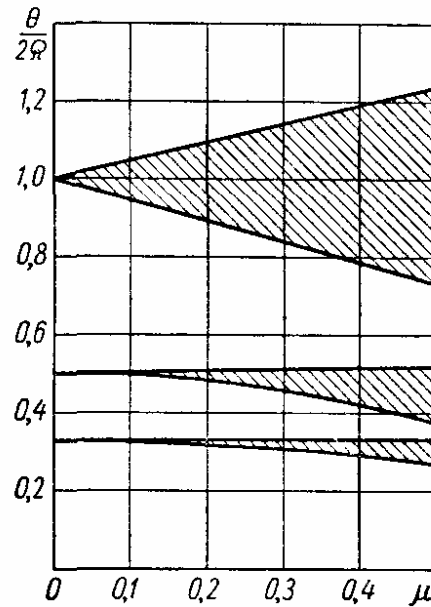


Рис. 8

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \mu_1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -(\mu_1 \pm \mu_2) & -(\mu_2 \pm \mu_3) & \dots \\ -(\mu_1 \pm \mu_2) & 1 \pm \mu_3 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -(\mu_3 \pm \mu_4) & \dots \\ -(\mu_2 \pm \mu_3) & -(\mu_3 \pm \mu_4) & 1 \pm \mu_5 - \frac{25\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Для определения границ второй, четвертой и т. д. областей неустойчивости получаем аналогичное уравнение, которое здесь не выписываем. В первом приближении получаем следующую формулу:

$$\theta_* \approx \frac{2\Omega}{k} \sqrt{1 \pm \mu_k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (32)$$

Из этой формулы видно, что ширина k -й области в первую очередь зависит от соответствующего коэффициента Фурье в разложении для $\Phi(t)$.

Границы областей неустойчивости для уравнения Хилла могут быть найдены также из уравнения [7, 17]

$$\left| f_1\left(\frac{2\pi}{\theta}\right) + f_2'\left(\frac{2\pi}{\theta}\right) \right| = 2, \quad (33)$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — решения уравнения, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$f_1(0) = 1; f_1'(0) = 0; f_2(0) = 0; f_2'(0) = 1.$$

Уравнение (33) полезно, например, в случае, если функция меняется по кусочно-постоянному закону (этот частный случай уравнения Хилла называют иногда *уравнением Мейсснера*). Пусть

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t \leq \frac{\pi}{\theta}; \\ -1, & \text{если } \frac{\pi}{\theta} < t \leq \frac{2\pi}{\theta}. \end{cases}$$

Уравнение (33) принимает вид

$$\left| \cos \frac{\pi p_1}{\theta} \cos \frac{\pi p_2}{\theta} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} \sin \frac{\pi p_1}{\theta} \sin \frac{\pi p_2}{\theta} \right| = 0, \quad (34)$$

где обозначено

$$p_{1,2} = \Omega \sqrt{1 \pm 2\mu} \quad (35)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Классификация областей неустойчивости. Рассмотрим общее уравнение (16) в матричной форме, положив для определенности, что $\Phi(t) = \cos \theta t$:

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + (E - \alpha A - \beta \cos \theta t B) f = 0. \quad (36)$$

Можно показать, что областям неустойчивости принадлежат те точки в пространстве параметров, для которых среди корней h уравнения [5, 7]

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (h^2 - 4\theta^2)C + & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & 0 & 4h\theta C \\ +E - \alpha A & & & & \\ -\frac{1}{2}\beta B & (h^2 - \theta^2)C + & -\frac{1}{2}\beta B & 2h\theta C & 0 \\ +E - \alpha A & & & & \\ 0 & -\beta B & h^2 C + E - \alpha A & 0 & 0 \\ 0 & -2h\theta C & -\frac{1}{2}\beta B & (h^2 - \theta^2)C + & -\frac{1}{2}\beta B \\ & & +E - \alpha A & & \\ -4h\theta C & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\beta B & (h^2 - 4\theta^2)C + \\ & & & & +E - \alpha A \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

найдется хотя бы один корень, обладающий положительной действительной частью. Исследование уравнения (37) показывает, что области неустойчивости матричного уравнения (36) располагаются вблизи частот

$$\theta = \frac{2\Omega_j}{n} \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (38)$$

здесь Ω_j — частоты собственных колебаний системы, нагруженной статической нагрузкой с параметром α . Эти частоты определяют из уравнения

$$|E - \alpha A - \Omega^2 C| = 0. \quad (39)$$

Кроме того, уравнение (37) позволяет выделить две группы «подозрительных» частот. Первую группу частот определяют по формуле

$$\theta = \frac{\Omega_j + \Omega_k}{n} \quad (n = 1, 2, \dots; j \neq k), \quad (40)$$

вторую группу частот

$$\theta = \frac{\Omega_j - \Omega_k}{n} \quad (n = 1, 2, \dots; j \neq k). \quad (41)$$

Из более строгого анализа выражений [14, 20, 21] следует, что в случае гамильтоновых систем* области неустойчивости образуются лишь вблизи частот, определяемых по формуле (40). Если система является негамильтоновой, то возможны области неустойчивости, располагающиеся вблизи второй группы частот.

Области неустойчивости, лежащие вблизи частот, соответствующих формуле (38), называют *основными областями* [5]; остальные области — *комбинационные*. Последнее название подчеркивает тот факт, что колебания внутри этих областей осуществляются главным образом за счет взаимодействия какой-либо пары форм колебаний. Это непосредственно следует из формул (40) и (41), в которые в симметричной форме входят две собственные частоты Ω_j и Ω_k . Аналогично можно говорить об *основных и комбинационных параметрических резонансах*.

Метод построения границ основных областей неустойчивости [7]. Границы областей, которым в формуле (38) отвечают значения $n = 1, 3, \dots$, определяют из уравнения

$$\begin{vmatrix} E - \alpha A \pm \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 & \vdots \\ -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - \frac{9}{4} \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E - \alpha A - \frac{25}{4} \theta^2 C & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

* Механическую систему с конечным числом степеней свободы называют гамильтоновой, если уравнения ее движения могут быть представлены в канонической форме Гамильтона. К негамильтоновым системам приходим, например, рассматривая колебания стержня, нагруженного следующими силами [8]

Определитель, стоящий в левой части, следует понимать в том смысле, что на месте каждого его элемента стоит матрица порядка n , где n — число членов ряда (11). Например, удерживая в определителе (42) одни лишь выписанные члены, получим определитель порядка $3n$. Границы главной области неустойчивости ($n = 1$) в первом приближении могут быть найдены из уравнения [7]

$$\left| E - \alpha A \pm \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0. \quad (43)$$

Границы областей, которым в формуле (38) отвечают значения $n = 2, 4, \dots$, находят из уравнений, аналогичных выражению (42). Эти уравнения неудобны для аналитических вычислений, поскольку их решение требует разворачивания определителей высокого порядка и отыскания корней алгебраических уравнений высоких степеней. Эти операции, однако, не представляют затруднений для электронных цифровых машин.

Применение метода малого параметра. Для аналитических вычислений более удобны формулы, основанные на методе малого параметра [21, 23]. Преобразуем уравнение (36) к главным осям матрицы $C^{-1}(E - \alpha A)$:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + C_0^{-1} f_1 + \beta H f_1 \cos \theta t = 0; \quad (44)$$

здесь f_1 — преобразованный вектор f ; матрица C_0^{-1} имеет вид

$$C_0^{-1} = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \Omega_2^2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \Omega_3^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

а матрицу H вычисляют применением преобразования подобия к матрице $C^{-1}B$. Иначе,

$$H = U^{-1} C^{-1} B U, \quad (45)$$

где U — матрица, составленная по столбцам из собственных векторов матрицы $C^{-1}(E - \alpha A)$.

Ограничимся случаем $n = 1$. Если параметр β достаточно мал, то границы главных областей неустойчивости могут быть найдены по формуле [28]

$$\theta_* = 2\Omega_j \pm \frac{\beta}{2} \cdot \frac{h_{jj}}{\Omega_j}, \quad (46)$$

где h_{jk} — элементы матрицы H . Границы комбинационных областей определяют по формуле

$$\theta_* = \Omega_j + \Omega_k \pm \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{h_{jk} h_{kj}}{\Omega_j \Omega_k}}. \quad (47)$$

Если диагональные элементы матрицы H велики по сравнению с побочными элементами, то ширина комбинационных областей неустойчивости будет мала по сравнению с шириной главных областей.

Примером, где это условие не выполнено, может служить задача об устойчивости плоской формы изгиба (см. 354—355). Пусть в уравнениях (20) и (22) $M(t) = \beta \cos \theta t$. Тогда уравнение (22) имеет вид (44), где $C_0 = C$,

$$H = C^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{l^2 \omega_{nx}^2}{n^2 \pi^2 EJ_y} \\ \frac{\omega_{n\varphi}^2}{GJ_k} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ширина главных областей имеет в этом случае порядок β^2 . Границы комбинационной области согласно формуле (47) определяют как

$$\theta_* = (\omega_{nx} + \omega_{n\varphi}) \left(1 \pm \frac{\beta}{2\beta_*} \cdot \frac{\sqrt{\omega_{nx}\omega_{n\varphi}}}{\omega_{nx} + \omega_{n\varphi}} \right),$$

где β_* — критическое значение параметра для соответствующей статической задачи:

$$\beta_* = \frac{n\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_k}.$$

ВЛИЯНИЕ ДЕМПФИРОВАНИЯ НА ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Уравнения для границ областей неустойчивости. Ограничимся простейшим случаем уравнения Матье (26) с диссипативным членом

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df}{dt} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) = 0; \quad (48)$$

здесь ε — коэффициент демпфирования. Области неустойчивости по-прежнему располагаются вблизи частот, определяемых по формуле (27). При $n = 1, 3, \dots$ границы областей неустойчивости находят из уравнения [7]

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \cdot \frac{3\theta}{2\Omega} & \dots \\ -\mu & 1 + \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\frac{\Delta}{\pi} \cdot \frac{\theta}{2\Omega} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\Delta}{\pi} \cdot \frac{\theta}{2\Omega} & 1 - \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} & -\mu & \dots \\ \frac{\Delta}{\pi} \cdot \frac{3\theta}{2\Omega} & 0 & -\mu & 1 - \frac{9\theta^2}{4\Omega^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (49)$$

При $n = 2, 4, \dots$ следует пользоваться уравнением

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} & -\mu & 0 & 0 & -\frac{\Delta}{\pi} \cdot \frac{2\theta}{\Omega} \\ -\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & 0 & -\frac{\Delta\theta}{\pi\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mu & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\Omega} & -2\mu & 1 - \frac{\theta^2}{\Omega^2} & -\mu \\ \frac{\Delta}{\pi} \cdot \frac{2\theta}{\Omega} & 0 & 0 & -\mu & 1 - \frac{4\theta^2}{\Omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (50)$$

Критические значения коэффициента возбуждения. Наиболее существенный факт состоит в том, что уравнение (48) имеет возрастающее решение лишь при достаточно больших значениях параметра μ . Так, для главной области неустойчивости из уравнения (49) получаем формулу

$$\theta_* \approx 2\Omega \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}}, \quad (51)$$

где Δ — декремент затухания собственных колебаний,

$$\Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}.$$

Из формулы (51) видно, что вблизи $\theta = \Omega$ неустойчивость возможна лишь при $\mu > \mu_*$, где μ_* — критическое значение коэффициента возбуждения,

$$\mu_* = \frac{\Delta}{\pi}.$$

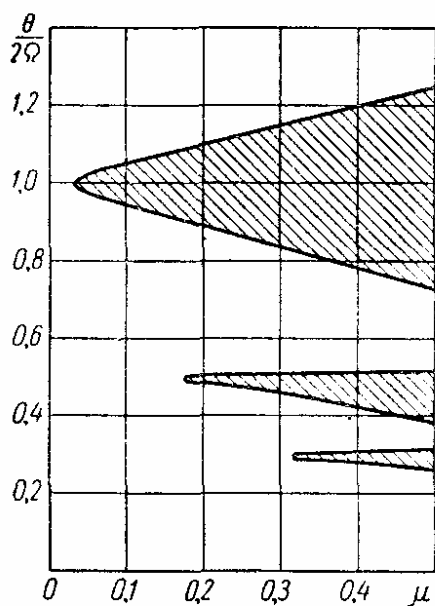


Рис. 9

Вообще можно показать [7], что для n -й области параметрического возбуждения критическое значение μ_* по порядку величины равно

$$\mu_n^* \sim \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, демпфирование подавляет побочные параметрические резонансы тем сильнее, чем больше число n . Это показано на рис. 9, где построены области неустойчивости для случая, когда $\Delta = 0,1$.

Влияние демпфирования в общем случае. Если параметрические колебания описываются системой дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, то расчет областей неустойчивости при наличии демпфирования усложняется. Некоторые приближенные методы указаны в книге [7]. Метод малого параметра дает для определения границ комбинационных областей следующую приближенную формулу [28]:

$$\theta = \Omega_j + \Omega_k \pm \frac{g_{jj} + g_{kk}}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 h_{jk} h_{kj}}{4\Omega_j \Omega_k g_{jj} g_{kk}}} - 1; \quad (52)$$

здесь g_{jk} — элементы матрицы демпфирования $U^{-1}GU$ после приведения уравнения

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} - G \frac{df}{dt} + (E - \alpha A - \beta \cos \theta t B) f = 0$$

к главным осям матрицы $C^{-1}(E - \alpha A)$. Из формулы (52) видно, что при определенных условиях введение малого демпфирования может приводить к расширению комбинационных областей неустойчивости. Аналогичное явление было обнаружено в задачах устойчивости упругих систем, находящихся под действием непотенциальных сил [8].

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В НЕВОЗМУЩЕННОМ СОСТОЯНИИ

Постановка задачи. Рассмотренные выше задачи параметрических колебаний можно трактовать как задачи об устойчивости некоторых режимов установившихся вынужденных колебаний. Поясним это на примере задач, показанных на рис. 1. В случае, показанном на рис. 1, *а*, роль невозмущенного движения играют продольные колебания стержня, в случае рис. 1, *б* — радиальные колебания кольца, в случае 1, *в* — колебания пластинки в своей плоскости и т. д. Однако весь предыдущий анализ базировался на предположении, что перемещения в невозмущенном состоянии пренебрежимо малы. Рассмотрим уточненную постановку задачи для случая упругого стержня, сжимаемого периодической продольной силой (рис. 3).

Пусть $u(x, t)$ — продольное перемещение точек; $v(x, t)$ — поперечное перемещение точек, принадлежащих оси стержня; EF — жесткость сечения при растяжении-сжатии. С учетом наиболее существенных нелинейных членов уравнения совместных продольных и поперечных колебаний имеют вид [6, 7, 13]

$$\begin{aligned} -EF \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EF \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Через ε_x обозначена продольная деформация оси стержня, т. е.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2.$$

Решение уравнений (53) должно удовлетворять граничным условиям

$$v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = u = 0 \text{ при } x = 0; \quad (54)$$

$$v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad -EF\varepsilon_x = P_0 + P_t \cos \theta t \text{ при } x = l.$$

Исследование устойчивости. Уравнения (53) и граничные условия (54) будут удовлетворены, если положить

$$-u_0(x, t) = \frac{P_0 x}{EF} + \frac{P_t \sin vx}{vEF \cos vl} \cos \theta t; \quad v_0(x, t) \equiv 0; \quad (55)$$

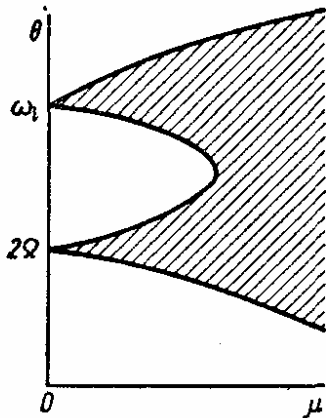


Рис. 10

здесь

$$v = \theta \sqrt{\frac{m}{EF}}.$$

Решение (55) описывает установившиеся продольные колебания; это решение будем называть невозмущенным. Исследуем устойчивость этого решения. Полагая в уравнениях (53) $u = u_0 + \bar{u}$, $v = v_0 + \bar{v}$, где \bar{u} и \bar{v} — малые возмущения, и линеаризуя уравнение (53) относительно этих возмущений, придем к следующим уравнениям в вариациях:

$$-EF \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0;$$

$$EJ \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial x^4} - EF \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = 0. \quad (56)$$

Уравнения (56) подробно исследованы в книге [7]. Важнейший результат, относящийся к главной области параметрического резонанса, состоит в следующем: помимо резонанса вблизи соотношения $\theta = 2\Omega$, возможно возбуждение поперечных колебаний $\theta = \omega_l$ (ω_l — частота продольных колебаний).

Физическое истолкование результата. Вблизи $\theta = \omega_l$ имеет место резонанс продольных колебаний, вследствие чего резко возрастает динамическая продольная сила в стержне. Поэтому жесткость стержня по отношению к поперечным колебаниям вблизи $\theta = \omega_l$ является периодической функцией времени с большой амплитудой изменения. Главные области параметрического возбуждения при отсутствии демпфирования показаны на рис. 10. При больших значениях коэффициента возбуждения μ области сливаются.

Дальнейшие подробности можно найти в книге [7]. Там же рассмотрен в уточненной постановке ряд других задач (параметрические колебания криволинейных стержней, балок, рам, пластин и т. д.).

УЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Общие замечания. Рассмотрение параметрических колебаний в линейной постановке позволяет найти границы областей неустойчивости и описать поведение упругих систем в течение начального периода возбуждения параметрических колебаний. Согласно линейной теории амплитуды параметрических колебаний возрастают со временем по экспоненциальному закону. Для того чтобы найти амплитуды установившихся колебаний, необходимо рассмотреть задачу в нелинейной постановке, удерживая в уравнениях члены, которые обычно (например, при изучении вынужденных колебаний) игнорируются.

Простейшая нелинейная задача. Нелинейные параметрические колебания упругих систем рассматривались впервые в работах [4, 10] и позднее в статьях [6, 16, 25, 28, 29]. Приведем некоторые сведения, относящиеся к простейшей задаче о колебаниях опертого стержня, сжатого периодической продольной силой. Пусть на подвижной опоре стержня (рис. 11) имеется линейная упругая связь, препятствующая продольным перемещениям, продольный линейный демпфер и сосредоточенная масса. Полагая, что

$$v(x, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{l},$$

получим, что колебания системы приближенно описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{df}{dt} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f + \\ + \psi \left(f, \frac{df}{dt}, \frac{d^2 f}{dt^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

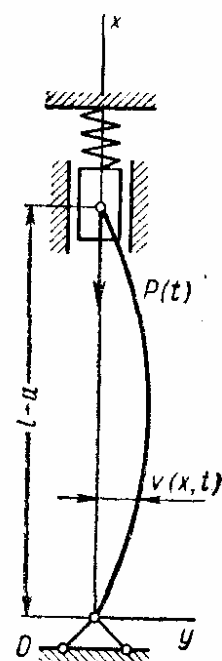


Рис. 11

В уравнении (57) использованы те же обозначения, что и в уравнении (48); кроме того, в это уравнение входит нелинейная функция

$$\psi = \gamma f^3 + 2\varepsilon_0 f^2 \frac{df}{dt} + 2\kappa f \left[f \frac{d^2 f}{dt^2} + \left(\frac{df}{dt} \right)^2 \right]; \quad (58)$$

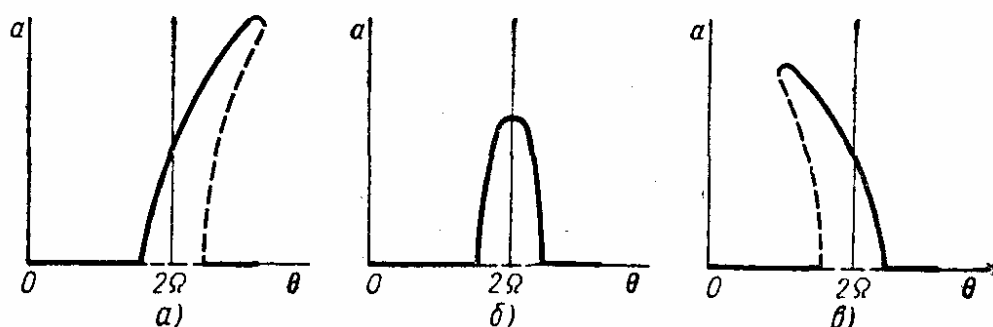


Рис. 12

здесь γ , ε_0 и κ — некоторые постоянные коэффициенты. Первый член в формуле (58) учитывает влияние продольной упругой связи, второй — влияние продольного демпфера, третий — влияние сосредоточенной массы, закрепленной на подвижном конце.

Графики зависимости амплитуды a_0 от частоты возбуждения θ схематически показаны на рис. 12, a — $в$ в окрестности главного параметрического резонанса.

Рассмотрены три случая:

а) $\gamma > 0$, $\varepsilon_0 = \kappa = 0$;

б) $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma = \kappa = 0$,

в) $\kappa > 0$, $\gamma = \varepsilon_0 = 0$.

Штриховыми линиями обозначены неустойчивые решения (подробнее см. работы [7, 10]). Там же дано решение различных нелинейных задач о параметрических колебаниях стержней, стержневых систем, пластинок. Параметрические колебания упругих систем в нелинейной постановке рассмотрены также в работах [16, 25, 27].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейлин Е. А., Джанелидзе Г. Ю. Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем. Прикладная математика и механика. Т. 6. Вып. 5. 1952.
2. Беляев Н. М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Сб. «Инженерные сооружения и строительная механика». Изд-во «Путь», 1924.
3. Боднер В. А. Устойчивость пластин под действием продольных периодических сил. Прикладная математика и механика. Т. 2, № 1, 1938.
4. Болотин В. В. О поперечных колебаниях стержней, вызываемых периодическими продольными силами. Сб. «Поперечные колебания и критические скорости». Вып. I. Изд-во АН СССР, 1951.
5. Болотин В. В. О параметрическом возбуждении поперечных колебаний. Сб. «Поперечные колебания и критические скорости». Вып. 2. Изд-во АН СССР, 1953.
6. Болотин В. В. О взаимодействии вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний. «Изв. АН СССР». ОТН. № 4, 1954.
7. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956.
8. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, 1961.
9. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, 1963.
10. Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. Стройиздат, 1948.
11. Гольденблат И. И., Сизов А. М. Справочник по расчету строительных конструкций на устойчивость и колебания. Стройиздат, 1952.
12. Джанелидзе Г. Ю., Радциг М. А. Динамическая устойчивость кольца под действием нормальных периодических сил. Прикладная математика и механика. Т. 4. Вып. 5—6. 1940.
13. Джанелидзе Г. Ю. Устойчивость упругих систем при динамических нагрузках. Сб. «Проблемы устойчивости в строительной механике». Стройиздат, 1965.
14. Крейн М. Г. Основные положения теории λ — зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сб. памяти А. А. Андропова. Изд-во АН СССР, 1955.
15. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. Изд-во ИЛ, 1953.
16. Мищенко Г. В. О динамической устойчивости пологих упругих оболочек. «Инженерный журнал». 1961. Т. I. Вып. 2.
17. Стретт М. Д. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ДНТВУ, 1935.
18. Челомей В. Н. Динамическая устойчивость авиационных конструкций. Изд-во «Аэрофлот», 1939.
19. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. Доклады АН СССР. Т. 110, № 3, 1956.

-
20. Я к у б о в и ч В. А. Замечание к некоторым работам по системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Прикладная математика и механика. Т. 21. Вып. 5, 1957.
21. Я к у б о в и ч В. А. Метод малого параметра для канонических систем с периодическими коэффициентами. Прикладная математика и механика. Т. 23. Вып. I, 1959.
22. E v a n - I v a n o w s k i R. M. On the parametric response of structures. Appl. Mech. Rev., vol. 18, n. 9, 1965.
23. M e t t l e r E. Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ingenieur—Archiv, Bd. 17, n. 6, 1949.
24. M e t t l e r E. Dynamic buckling. Handbook of Engineering Mechanics (ed. by W. Flügge), Mc Graw-Hill, New-York, 1962.
25. P i s z c z e k K. Parametric combination resonance (of the second kind) in nonlinear systems. Pozprawy Inzh., t. 8, 1960.
26. S c h m i d t G. Über die Biegeschwingungen des gelenkig gelagerten axial pulsierend belasteten Stäbes. Matem. Nachrichten, Bd. 23, n. 2, 1961.
27. S c h m i d t G. Über die Querschwingungen schwach vorgekrümmter Stäbe bei exzentrisch angreifender pulsierender Längsbelastung. Matem. Nachrichten., Bd. 23, n. 4—5, 1961.
28. S c h m i d t G., W e i d e n h a m m e r F. Instabilitäten gedämpfter rheoliner Schwingungen. Mathem. Nachrichten, Bd. 23, N 4—5, 1961.
29. W e i d e n h a m m e r F. Nichtlineare Biegeschwingungen des axial—pulsierend belasteten Stäbes. Ingenieur—Archiv, Bd. 20, N 5, 1952.
-

Глава 7

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНОК

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНОК

Уравнение изгиба пластинки в ортогональной системе координат для динамического случая. Пусть срединная поверхность изотропной пластинки постоянной толщины h отнесена к ортогональной криволинейной системе координат $x_1 x_2$ (рис. 1). Дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний в рамках гипотез Кирхгофа-Лява будет

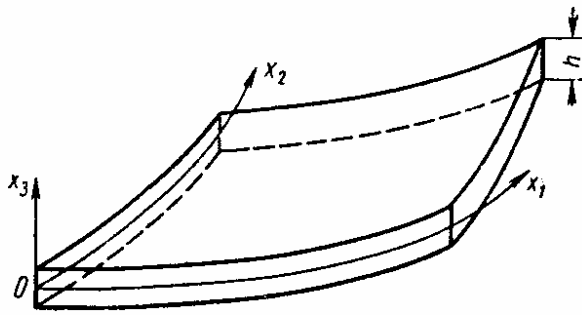


Рис. 1

$$D \Delta \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q; \quad (1)$$

здесь w — прогиб пластинки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; ρ — плотность материала; $q(x_1, x_2, t)$ — интенсивность поперечной нагрузки; E —

модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона;

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] -$$

обобщенный оператор Лапласа; H_1, H_2 — параметры Ламе.

Моменты M_{11}, M_{22}, M_{12} и перерезывающие силы Q_1, Q_2 выражаются через прогиб пластины w следующими формулами:

$$\begin{aligned} M_{11} = & D \left\{ \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} + \right. \\ & \left. + \nu \left[\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \right\}; \\ M_{22} = & D \left\{ \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + \right. \\ & \left. + \nu \left[\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$M_{12} = \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right]; \quad (2)$$

$$Q_1 = D \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta w; \quad Q_2 = D \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta w. \quad (3)$$

Если толщина h является дважды дифференцируемой функцией координат x_1, x_2 , то дифференциальное уравнение колебаний примет вид

$$\begin{aligned} \Delta (D \Delta w) - \frac{1-\nu}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial D}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial D}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \quad (4) \end{aligned}$$

Связь моментов с прогибом выражают формулами (2). Связь перерезывающих сил с прогибом принимает вид

$$\begin{aligned} Q_1 = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} (D \Delta w) - (1-\nu) \left\{ \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_1} \left[\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_2} \left[\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \right\}; \\ Q_2 = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} (D \Delta w) - (1-\nu) \left\{ \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_2} \left[\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_1} \left[\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Граничные условия. На каждом краю пластинки может быть задан один из четырех видов однородных граничных условий. Эти виды для края $x_1 = \text{const}$ определяются всеми возможными комбинациями следующих двух условий:

$$w = 0 \text{ или } Q_1^* \equiv Q_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \text{ или } M_{11} = 0$$

Наиболее распространенными являются следующие условия: заземленный край

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0; \quad (6)$$

свободный край

$$M_{11} = Q_1^* = 0; \quad (7)$$

опертый край (условия Навье)

$$w = M_{11} = 0. \quad (8)$$

Другие виды краевых условий (упругая заделка и др.) отличаются от перечисленных тем, что для них краевые усилия (и моменты) могут совершать работу на перемещениях пластинки.

В качестве примера более сложных граничных условий можно привести условия упругой заделки

$$w + \alpha Q_1^* = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} + \beta M_{11} = 0, \quad (9)$$

где α, β — постоянные.

Уравнение колебаний изгиба пластинки, в срединной плоскости которой действуют начальные усилия. Пусть в плоскости пластинки действуют усилия N_{11} , N_{22} и N_{12} . Тогда дифференциальное уравнение изгибных колебаний пластинки будет иметь вид

$$D \Delta \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_*; \quad (10)$$

здесь q_* — приведенная нагрузка, определяемая по формуле

$$q_* = q + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{22} \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] \quad (11)$$

или по формуле

$$\begin{aligned}
 q_* = q + N_{11} & \left[\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] + \\
 & + N_{12} \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] + \\
 & + N_{22} \left[\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1^2 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right], \quad (12)
 \end{aligned}$$

если усилия $N_{\alpha\beta}$ удовлетворяют однородным уравнениям равновесия

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (N_{11} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (N_{12} H_1)}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - N_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} &= 0; \\
 \frac{\partial (N_{12} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (N_{22} H_1)}{\partial x_2} - N_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} &= 0.
 \end{aligned}$$

Граничные условия (6), (8) сохраняют свой вид. В граничные условия (7) вместо Q_1 следует подставить выражение

$$Q_1^0 = Q - N_{11} \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - N_{12} \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2}. \quad (13)$$

Учет внешнего и внутреннего трения при колебаниях пластинки. Простейшая модель, учитывающая влияние внешнего трения, основана на гипотезе, что интенсивность силы внешнего трения q_* пропорциональна скорости прогиба в данной точке $\left(q_* = -2k \frac{\partial w}{\partial t} \right)$. Соответствующее дифференциальное уравнение колебаний пластинки постоянной толщины имеет вид

$$D \Delta \Delta w + 2k \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \quad (14)$$

Из большого количества моделей, отражающих влияние внутреннего трения, простейшей и, по-видимому, наиболее распространенной является модель, основанная на гипотезе Кельвина, что силы внутреннего трения имеют вязкий характер.

Дифференциальное уравнение колебаний пластинки из такого материала имеет вид

$$D \Delta \Delta \left(w + \kappa \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \quad (15)$$

Коэффициент вязкости κ войдет также в выражения для моментов и перерезывающих сил.

Нелинейные колебания пластинок. Нелинейные колебания могут возникнуть в силу целого ряда различных причин (нелинейная упругость, нелинейное трение и т. п.). Здесь будет рассмотрена лишь нелинейность, связанная с большими прогибами, когда различием

деформированной и недеформированной форм пластинки нельзя пренебречь при составлении дифференциальных уравнений движения, которые будут иметь вид

$$D \Delta \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q + L(w, F); \quad (16)$$

$$\Delta \Delta F = -\frac{1}{2} EhL(w, w);$$

здесь Δ — оператор Лапласа; оператор L выражается в ортогональных криволинейных координатах следующей формулой:

$$\begin{aligned} L(w, F) = & \left[\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_2 H_1^2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Связь усилий с функцией напряжений F определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_2 H_1^2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}; \\ N_{22} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2}; \\ N_{12} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

КОЛЕБАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК, ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ

Дифференциальное уравнение колебаний пластины в декартовой системе координат. Пусть срединная плоскость недеформированной прямоугольной пластинки отнесена к декартовой системе координат x_1, x_2 (рис. 2). Тогда коэффициенты Ламе будут

$$H_1 = H_2 = 1.$$

Уравнение колебаний (1) примет вид

$$D \Delta \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (19)$$

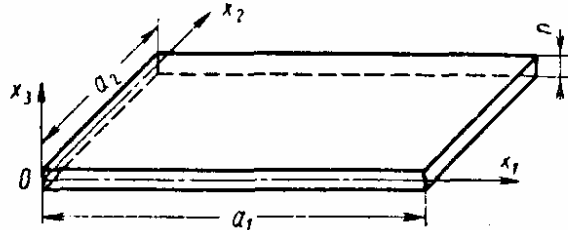


Рис. 2

Пластины, опертые по контуру. Собственные формы колебаний опертой прямоугольной пластинки со сторонами a_1, a_2 удобно искать в виде

$$w = w_0 \sin \frac{\pi m_1}{a_1} x_1 \sin \frac{\pi m_2}{a_2} x_2 \quad (m_1, m_2 = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

Выражение (20) удовлетворяет кинематическим и статическим граничным условиям, которые для края $x_1 = 0, a_1$ имеют вид

$$w = M_{11} = 0,$$

или

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0.$$

Подставляя выражение (20) в уравнение (19) при $q = 0$, нетрудно убедиться, что формула для собственных частот опертой пластинки имеет вид

$$\omega = \pi^2 \left(\frac{m_1^2}{a_1^2} + \frac{m_2^2}{a_2^2} \right) \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

Пластины, опертые по двум противоположным сторонам. Пусть две противоположные стороны ($x_2 = 0$ и $x_2 = a_2$) прямоугольной пластинки оперты, а на двух других заданы однородные краевые условия типа

$$Lw = 0,$$

где L — оператор, в который входят только четные (или нечетные) производные по x_2 . Тогда собственные формы колебаний пластинки постоянной толщины можно представить в виде

$$w = (C_1 \operatorname{sh} \alpha x_1 + C_2 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_3 \sin \beta x_1 + C_4 \cos \beta x_1) \sin \frac{\pi m_2}{a_2} x_2; \quad (22)$$

здесь $m_2 = 1, 2, \dots$ — число полуволи в направлении оси x_2 ; C_{1-4} — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий при $x_1 = 0, x_1 = a_1$; постоянные α, β зависят от частоты колебаний

$$\alpha = (k^2 + \omega_*^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\beta = (\omega_*^2 - k^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\omega_* = \omega \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad k = \frac{\pi m_2}{a_2}.$$

Будем обозначать C — защемленный, S — опертый, F — свободный края. Уравнения частот для различных комбинаций условий на краях $x_1 = 0$ и $x_1 = a_1$ будут

$$\begin{aligned} S-S: \quad \sin \beta a_1 &= 0; \\ S-C: \quad \operatorname{th} \alpha a_1 - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \beta a_1 &= 0; \\ S-F: \quad a \operatorname{th} \alpha a_1 - b \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \beta a_1 &= 0; \\ C-C: \quad \left(\operatorname{th} \frac{\alpha a_1}{2} - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \frac{\beta a_1}{2} \right) \times \\ &\times \left(\operatorname{cth} \frac{\alpha a_1}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ctg} \frac{\beta a_1}{2} \right) = 0; \\ C-F: \quad 2(1 + ab) + (a + b) \operatorname{ch} \alpha a_1 \cos \beta a_1 + \\ &+ \left(a \frac{\beta}{\alpha} - b \frac{\alpha}{\beta} \right) \operatorname{sh} \alpha a_1 \sin \beta a_1 = 0; \\ F-F: \quad \left(a \operatorname{th} \frac{\alpha a_1}{2} - b \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \frac{\beta a_1}{2} \right) \left(a \operatorname{cth} \frac{\alpha a_1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + b \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ctg} \frac{\beta a_1}{2} \right) = 0, \\ &\left(a = \frac{\alpha^2 - \nu k^2}{\alpha^2 - (2 - \nu) k^2}; \quad b = \frac{\beta^2 + \nu k^2}{\beta^2 + (2 - \nu) k^2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Значения безразмерного параметра частоты ρ при различных граничных условиях приведены в табл. 1 [19, 28].

$$1. \text{ Частоты } p = \frac{\omega^2 a_1^6 \rho h}{\pi^4 D a_2^4} \text{ прямоугольной пластинки,}$$

опертой по сторонам $x_1=0$; a_1 (S—S) при различных условиях
на сторонах $x_2=0$, a_2

S — C		S — F		C — C		C — F	
a_2/a_1	p	a_2/a_1	p	a_2/a_1	p	a_2/a_1	p
0,5	6,85	0,5	4,40	0,4	9,44	0,8	2,7
0,6	5,92	0,8	2,15	0,5	7,69	1,0	1,7
0,7	5,51	1,2	1,14	0,6	7,05	1,3	1,41
0,8	5,41	2,0	0,698	0,7	7,00	1,6	1,33
0,9	5,50	3,0	0,564	0,8	7,29	1,9	1,36
1,0	5,74	5,0	0,506	0,9	7,83	2,2	1,45

Пластика, защемленная по контуру. Задача об определении частот и форм свободных колебаний защемленной по контуру прямоугольной пластинки не поддается решению в аналитической форме и может быть решена лишь приближенными методами. Удобно искать формы собственных колебаний в виде произведения балочных функций $F_m(x)$, соответствующих балке с защемленными концами

$$\omega_{mn} = c_{mn} F_m(x_1) F_n(x_2).$$

Применение формулы Рэлея-Ритца дает приближенное значение для частоты собственных колебаний

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \cdot \frac{\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \right\} dx_1 dx_2}{\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} w^2 dx_1 dx_2}$$

или после интегрирования

$$\omega = \pi^2 \left[\frac{D}{\rho h} \left(\frac{A_m^4}{a_1^4} + \frac{A_n^4}{a_2^4} + 2 \frac{B_m B_n}{a_1^2 a_2^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}};$$

здесь

$$A_m = \begin{cases} 1,506 & (m=1) \\ m+0,5 & (m \geq 2) \end{cases}; \quad B_m = \begin{cases} 1,248 & (m=1) \\ A_m \left(A_m - \frac{2}{\pi} \right) & (m \geq 2) \end{cases}.$$

Результаты вычислений безразмерной частоты

$$\omega_* = \omega a_1^2 \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}},$$

полученные методом Эдмана [35], приведены в табл. 2.

2. Частоты $\omega_* = \omega a_1^2 (\rho h/D)^{1/2}$ собственных колебаний защемленной по контуру прямоугольной пластинки при различных отношениях сторон $\frac{a_1}{a_2}$ (m_1, m_2 — числа полуволн соответствующих форм колебаний)

m_2	$\frac{a_1}{a_2}$	m_1					
		1	2	3	4	5	6
1	1	35,999	73,405	131,902	210,526	309,038	428
	1,5	27,012	65,5	126	206	303	422
	2	24,58	64,1	124	204	302	421
2	1	73,405	108,237	165,023	242,66	340,59	458,27
	1,5	41,715	79,81	138,64	218	316,11	436
	2	31,833	71,08	130,35	210	308,12	427
3	1	131,902	165,023	220,06	296,35	393,36	509,9
	1,5	66,533	103	161,234	241	339	457
	2	44,779	83,2	142,38	221	320,12	439
4	1	210,526	242,66	296,35	371,38	467,29	593,8
	1,5	100,81	136,096	193,24	271,17	369,34	488
	2	63,34	100,80	159,49	238,35	337,08	456
5	1	309,038	340,59	393,36	467,29	562,18	676
	1,5	144,21	178	234,65	312	409	529
	2	87,26	124,2	181,79	261	358,0	478
6	1	428	458,27	509,9	583,83	676	792,5
	1,5	195	230,04	285,4	361,90	456	576,6
	2	117	151,91	209,6	287,54	382	504,3

Сопоставление результатов вычисления различными методами частот квадратной ($a_1 = a_2 = a$) пластинки, защемленной по контуру, дано в табл. 3.

3. Безразмерные частоты $\omega_* = \omega a^2 \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/2}$ свободных колебаний

защемленной по контуру квадратной пластинки

Метод	$\frac{m}{n}$		
	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$
Рэля-Ритца (первое приближение)	37,46	74,84	108,13
Рэля-Ритца	35,99	73,41	108,27
Эдмана	35,999	73,405	108,237
Вайнштейна	35,99	70	105
Саусвелла	32,816	67,87	97,86
Игути	35,99	73,41	108,22
Метод рядов	35,7	75,0	107,8

Игути [30] при определении частот и форм собственных колебаний защемленной пластинки искал формы колебаний в виде, удовлетворяющем условиям защемления

$$\omega = \sum_{m_1, m_2} A_{m_1 m_2} \left[\frac{x_1 (x_1 - a_1)^2}{a_1^3} + (-1)^{m_1} \frac{x_1^2 (x_1 - a_1)}{a_1^3} - \frac{1}{\pi m_1} \sin \frac{\pi m_1 x_1}{a_1} \right] \left[\frac{x_2 (x_2 - a_2)^2}{a_2^3} + (-1)^{m_2} \frac{x_2^2 (x_2 - a_2)}{a_2^3} - \frac{1}{\pi m_2} \sin \frac{\pi m_2 x_2}{a_2} \right].$$

Это выражение подставлялось в дифференциальное уравнение

$$D \Delta \Delta w - \rho h \omega^2 w = 0.$$

Левая часть раскладывалась в двойной ряд Фурье

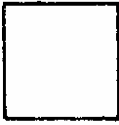
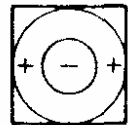
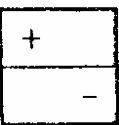
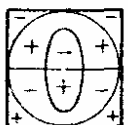
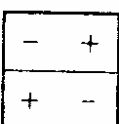
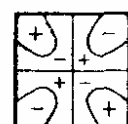
$$\sum_{m_1, m_2} a_{m_1 m_2} \sin \frac{\pi m_1}{a_1} x_1 \sin \frac{\pi m_2}{a_1} x_2 = 0.$$

Частоты и коэффициенты $A_{m_1 m_2}$ определялись из уравнений вида

$$a_{m_1 m_2} = 0.$$

Результаты вычислений Игути для параметра частоты $\alpha = \omega a_1^2 (\rho h / D \pi^4)^{1/2}$ для квадратной пластинки ($a_1 = a_2$) приведены в табл. 4 (см. также табл. 17).

4. Частоты $\alpha = \frac{\omega a_1^2}{\pi^2} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/2}$ и формы колебаний
защемленной по контуру квадратной пластины

Узловые линии	"	Узловые линии	α
	3,646		13,393
	7,437		16,717
	10,965		24,631

Пластины, свободные по контуру. В этом случае граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0 \quad (x_1 = 0, a_1);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0 \quad (x_2 = 0, a_2).$$

Для решения можно применить метод Рэлея-Ритца, используя при приближенном определении форм свободных колебаний балочные функции, соответствующие балкам со свободными концами:

$$w_{m_1 m_2} = c_{m_1 m_2} F_{m_1}(x_1) F_{m_2}(x_2).$$

Применяя формулу Рэлея-Ритца, получим в первом приближении

$$\omega = \pi^2 \left(\frac{D}{\rho h} \left\{ \frac{A_{m_1}^4}{a_1^4} + \frac{A_{m_2}^4}{a_2^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{a_1^2 a_2^2} [\nu B_{m_1} B_{m_2} + (1 - \nu) C_{m_1} C_{m_2}] \right\} \right)^{1/2};$$

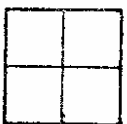

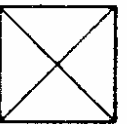

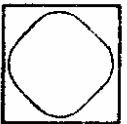
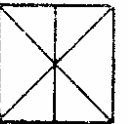
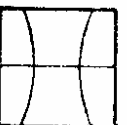
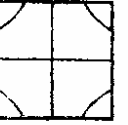
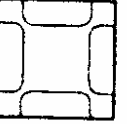
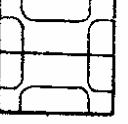
здесь для сокращения приняты следующие обозначения:

$$A_m = \begin{cases} 0 & (m=0), \\ 1,506 & (m=1), \\ m+0,5 & (m \geq 2); \end{cases} \quad B_m = \begin{cases} 0 & (m=0), \\ 1,248 & (m=1), \\ A_m \left(A_m - \frac{2}{\pi} \right) & (m \geq 2); \end{cases}$$

$$C_m = \begin{cases} \frac{12}{\pi^2} & (m=0), \\ 5,017 & (m=1), \\ A_m \left(A_m + \frac{6}{\pi} \right) & (m \geq 2). \end{cases}$$

Результаты вычислений Игути [31] безразмерных частот ω_* и форм колебаний методом, рассмотренным на стр. 379, приведены в табл. 5.

5. Частоты $\omega_{0*} = \frac{\omega a_1^2}{\pi^2} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/2}$ и формы колебаний
свободной квадратной пластины ($\nu=0,3$)

Узловые линии	ω_{0*}	Узловые линии	ω_{0*}
	1,36508		6,19004
	1,98550		6,62316
	2,45909		7,04202
	3,52609		7,86148
	6,45284		10,68568

Другие случаи опорного закрепления. В общем случае произвольных граничных условий проще всего использовать первое приближение по методу Рэлея-Ритца, выбирая в качестве аппроксимирующих функций произведение балочных функций, соответствующих балкам с аналогичными граничными условиями:

$$\omega_{m_1 m_2} = C_{m_1 m_2} F_{m_1}^{(1)}(x_1) F_{m_2}^{(2)}(x_2),$$

где m_i — число узлов функции $F_{m_i}^{(i)}(x_i)$.

Формула Рэлея-Ритца дает приближенное значение соответствующей частоты собственных колебаний

$$\omega = \pi^2 \left(\frac{D}{\rho h} \left\{ \frac{A^{(1)4}}{a_1^4} + \frac{A^{(2)4}}{a_2^4} + \frac{2}{a_1^2 a_2^2} [\nu B^{(1)} B^{(2)} + (1 - \nu) C^{(1)} C^{(2)}] \right\} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Постоянные $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$ зависят только от граничных условий при $x_1 = 0, a_1$. Соответственно, постоянные $A^{(2)}$, $B^{(2)}$ и $C^{(2)}$ полностью определяются граничными условиями при $x_2 = 0, a_2$. В табл. 6 даны значения постоянных A, B, C при различных сочетаниях краевых условий на противоположных сторонах пластинки (C — защемленный, S — опертый, F — свободный край).

Более высокие приближения безразмерных частот, вычисленные по методу Рэлея-Ритца, приведены в табл. 7.

Свободные колебания пластинки, опертой по контуру и в отдельных точках внутри области. Пусть прямоугольная плита опирается по контуру и, кроме того, в точке с координатами $x_1 = y_1, x_2 = y_2$. Если θ — частота свободных колебаний такой пластинки, то в точке опирания возникнет сила реакции $P e^{i\theta t}$. Решение этой задачи известно:

$$\omega(x_1; x_2; t) = \frac{4 P e^{i\theta t}}{a_1 a_2 \rho h} \times \\ \times \sum_{m_1 m_2} \frac{\sin \frac{\pi m_1 y_1}{a_1} \sin \frac{\pi m_2 y_2}{a_2} \sin \frac{\pi m_1 x_1}{a_1} \sin \frac{\pi m_2 x_2}{a_2}}{\omega_{m_1 m_2}^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_{m_1 m_2}^2} \right)}, \quad (24)$$

где $\omega_{m_1 m_2}$ — частоты свободных колебаний прямоугольной пластинки, опертой по контуру. Равенство нулю прогиба в точке опирания дает уравнение частот

$$\sum_{m_1 m_2} \frac{\left(\sin \frac{\pi m_1 y_1}{a_1} \right)^2 \left(\sin \frac{\pi m_2 y_2}{a_2} \right)^2}{\omega_{m_1 m_2}^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_{m_1 m_2}^2} \right)} = 0.$$

6. Значения постоянных A , B , C при различных числах m узлов балочной функции и различных сочетаниях условий на противоположных сторонах прямоугольной пластинки

$$\omega_m = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left\{ \frac{A_m^2}{a_1^4} + \frac{A_n^2}{a_2^4} + \frac{2}{a_1^2 a_2^2} [\nu B_m B_n + (1-\nu) C_m C_n] \right\}}$$

Граничные условия	$m = 1$			$m = 2$			$m \geq 3$		
	A_m	B_m	C_m	A_m	B_m	C_m	A_m	B_m	C_m
$S-S$	0	0	0	1	1	1	$m-1$	A^2	A^2
$S-C$	0	0	0	1,25	$A \left(A - \frac{1}{\pi} \right)$	B	$m-0,75$	$A \left(A - \frac{1}{\pi} \right)$	B
$S-F$	0	0	$\frac{3}{\pi^2}$	1,25	$A \left(A - \frac{1}{\pi} \right)$	$A \left(A + \frac{3}{\pi} \right)$	$m-0,75$	$A \left(A - \frac{1}{\pi} \right)$	$A \left(A + \frac{3}{\pi} \right)$
$C-C$	0	0	0	1,506	1,248	1,248	$m-0,5$	$A \left(A - \frac{2}{\pi} \right)$	B
$C-F$	0,597	0,0870	0,471	1,494	1,347	3,284	$m-0,5$	$A \left(A - \frac{2}{\pi} \right)$	$A \left(A + \frac{2}{\pi} \right)$
$F-F$	0	0	$\frac{12}{\pi^2}$	1,506	1,248	5,017	$m-0,5$	$A \left(A - \frac{2}{\pi} \right)$	$A \left(A + \frac{6}{\pi} \right)$

7. Частоты $\omega_* = \omega a_1^2 \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}$ и формы свободных колебаний

прямоугольных пластин

Узловые линии	ω_* при $\frac{a_2}{a_1} = 1$	Узловые линии	ω_* при $\frac{a_2}{a_1}$			
			0,5	1	2	5
	6,958		3,508	3,494	3,472	3,450
	24,08		5,372	8,547	14,93	34,73
	26,80		21,96	21,44	21,61	21,52
	48,05		10,26	27,46	94,49	563,9
	63,14		24,85	31,17	48,71	105,9
Пр и м е ч а н и е. Обозначение закрепления краев пластинки см. рис. 2 гл. 2.						

Например, для квадратной пластины ($a_1 = a_2 = a$), опертой по контуру и в центре, низшая частота будет

$$\theta = 5,33 \frac{\pi^2}{a^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Форма колебаний определяется выражением (24).

В случае N точек опирания условия равенства нулю прогиба в этих точках дают N однородных уравнений относительно N сил реакции. Из равенства нулю определителя этой системы вытекает уравнение частот. Формы колебаний можно получить, определив взаимосвязь сил реакции в точках опирания.

Свободные колебания прямоугольных пластинок с сосредоточенными массами. Пусть θ — собственная частота колебаний опертой прямоугольной пластинки с сосредоточенной массой m в точке $x_1 = y_1$,

$x_2 = y_2$. Тогда в точке приложения массы действует сила $Pe^{i\theta t}$. Решение такой задачи дано формулой (24). Решение дифференциального уравнения движения массы

$$m \frac{\partial^2 \omega(y_1, y_2; t)}{\partial t^2} = Pe^{i\theta t}$$

приводит к уравнению частот

$$\frac{a_1 a_2 \rho h}{4m} \sum_{n_1 n_2} \frac{\left(\sin \frac{\pi n_1 y_1}{a_1} \right)^2 \left(\sin \frac{\pi n_2 y_2}{a_2} \right)^2}{\frac{\omega_{n_1 n_2}^2}{\theta^2} - 1} = 0.$$

Если величина сосредоточенной массы m мала по сравнению с массой пластины $a_1 a_2 \rho h = m_*$

$$\frac{m}{m_*} \ll 1, \quad (25)$$

то приближенно можно записать

$$\frac{m_*}{4m} \frac{\left(\sin \frac{\pi n_1 y_1}{a_1} \right)^2 \left(\sin \frac{\pi n_2 y_2}{a_2} \right)^2}{\frac{\omega_{n_1 n_2}^2}{\theta^2} - 1} \approx 0 \quad (n_1, n_2 = 1, 2, \dots);$$

отсюда приближенно

$$\theta_{n_1 n_2} = \omega_{n_1 n_2} \left[1 - \frac{m}{m_*} \alpha_{n_1} \left(\frac{y_1}{a_1} \right) \alpha_{n_2} \left(\frac{y_2}{a_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

где

$$\alpha_n(\xi) = 2 (\sin \pi n \xi)^2.$$

В случае N сосредоточенных масс формула (26) усложняется:

$$\theta_{n_1 n_2} = \omega_{n_1 n_2} \left[1 - \sum_{s=1}^N \frac{m_s}{m_*} \alpha_{n_1} \left(\frac{y_1}{a_1} \right) \alpha_{n_2} \left(\frac{y_2}{a_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (26a)$$

При других граничных условиях и применении метода Рэлея-Ритца в первом приближении может быть использована формула (26a). Значения функций $\alpha_n(\xi)$ при различных граничных условиях даны в табл. 8 [18].

Колебания прямоугольной пластинки переменной толщины. Дифференциальное уравнение для определения свободных форм колебаний пластинки переменной толщины вытекает из уравнения (4):

$$L\omega - \rho h \omega^2 \omega = 0.$$

8. Значения функции $\alpha_n(\xi)$ для различных условий

α	$S - S$		$S - C$		$C - C$		$C - F$	
	α_n при n							
	1	2	1	2	1	2	1	2
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,19	0,69	0,31	0,84	0,04	0,21	0,00	0,03
0,2	0,69	1,81	1,07	1,94	0,37	1,46	0,02	0,36
0,3	1,31	1,81	1,86	1,44	1,20	2,27	0,08	1,11
0,4	1,81	0,69	2,27	0,18	2,12	1,07	0,21	1,87
0,5	2,00	0,00	2,09	0,33	2,52	0,00	0,46	2,04
0,6	1,81	0,69	1,46	1,74	2,12	1,07	0,85	1,39
0,7	1,31	1,81	0,72	2,23	1,20	2,27	1,38	0,40
0,8	0,69	1,81	0,21	1,15	0,37	1,46	2,10	0,02
0,9	0,19	0,69	0,02	0,15	0,04	0,21	2,97	1,10
1,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,00	4,00

В декартовой системе координат ($H_1 = H_2 = 1$) оператор имеет вид

$$L = \Delta(D\Delta) - (1 - \nu) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial D}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial D}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial D}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial D}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right].$$

При определении частот и форм колебаний пластинок переменной толщины проще использовать приближенные методы. Для защемленной по контуру прямоугольной ($-a_1 \leq x_1 \leq a_1$, $-a_2 \leq x_2 \leq a_2$) плиты можно применить метод Галеркина, задаваясь выражением для прогиба

$$\omega = \sum_{m, n=1}^N A_{mn} \omega_{mn}(x_1, x_2) = \\ = \sum_{m, n=1}^N A_{mn} (x_1^2 - a_1^2)^{m+1} (x_2^2 - a_2^2)^{n+1}$$

или в другой нумерации

$$\omega = \sum_{k=1}^{N^2} A_k \omega_k(x_1, x_2).$$

Применение ортогонализации согласно методу Галеркина дает

$$\sum_{k=1}^{N^2} A_k (\alpha_{kl} - \omega^2 \beta_{kl}) = 0 \quad (l = 1, \dots, N^2);$$

здесь приняты обозначения

$$\alpha_{kl} = \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} L \omega_k \omega_l dx_1 dx_2;$$

$$\beta_{kl} = \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} \rho h \omega_k \omega_l dx_1 dx_2.$$

Из равенства нулю определителя полученной системы однородных уравнений вытекает уравнение частот. Первое приближение дает

$$\omega^2 = \frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}.$$

Если $\rho = \text{const}$, а толщина меняется по закону

$$h = h_0 [1 + c (x_1^2 + x_2^2)]^{\frac{1}{3}} \left(c > -\frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \right),$$

то

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= D_0 a_1^5 a_2^5 \{ 20,80 (a_1^4 + 0,57 a_1^2 a_2^2 + a_2^4) + \\ &+ 14,86 c [(1 - 0,26 \nu) a_1^2 a_2^2 (a_1^2 + a_2^2) + 0,13 (a_1^6 + a_2^6)] \}; \\ \beta_{11} &= 0,66 a_1^9 a_2^9 [1 + 0,03 c (a_1^2 + a_2^2) - \\ &- 0,002 c^2 (a_1^4 + 0,79 a_1^2 a_2^2 + a_2^4)] \rho h_0. \end{aligned}$$

При вычислении β_{11} предполагалось, что

$$|c| < \frac{1}{a_1^2 + a_2^2}.$$

При $c = 0$; $a_1 = a_2$; $\nu = 0,16$ отсюда получаем

$$\omega = \frac{9}{a_1^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}},$$

что отличается от точного значения на 0,04%. Эта задача решена И. Я. Белоцерковским в 1962 г. [3].

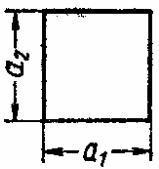
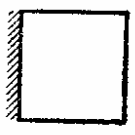
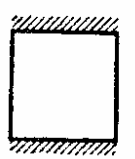
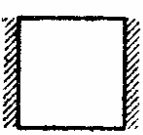
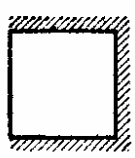
Метод сеток для исследования колебаний пластинок переменной толщины применил В. С. Гуменюк [11]. В табл. 9 приведены выражения для безразмерного параметра частоты

$$u = \frac{a_2^4 \rho h \omega^2}{(9,5)^2 D},$$

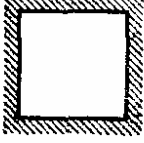
соответствующие первой форме колебаний пластинки с линейно меняющейся толщиной при различных краевых условиях.

9. Частоты $\omega_{*1} = \frac{9,5}{a_1^2} \sqrt{\frac{1}{2} [k_0 + k_3 - \sqrt{(k_0 - k_3)^2 + 4k_1 k_2}]}$

колебаний прямоугольной пластинки с линейно изменяющейся
($h|_{x_1=0} = h_0$; $h|_{x_1=a_1} = h_1$) толщиной

Граничные условия	Постоянные
	$k_0 = \lambda_0^2 \left[(r^2 + 2)^2 + 1 - s_0 - \frac{2}{3} s_0^2 (2 + \nu r^2) \right] = \bar{k}_0;$ $k_1 = \lambda_0^2 \left[(r^2 + 2) (2r - s_0) - \frac{2}{3} s_0^2 \right] = \bar{k}_1;$ $k_2 = \lambda_1^2 \left[(r^2 + 2) (2r + s_1) + \frac{2}{3} s_1^2 \right] = \bar{k}_2;$ $k_3 = \lambda_1^2 \left[(r^2 + 2)^2 + 1 + s_1 - \frac{2}{3} s_1^2 (2 + 3\nu r^2) \right] = \bar{k}_3$
	$k_0 = \bar{k}_0 + 4(1 + s_0) \lambda_0^2; \quad k_1 = \bar{k}_1 + \frac{1}{2} (1 + s_0) \lambda_0^2;$ $k_2 = \bar{k}_2; \quad k_3 = \bar{k}_3$
	$k_0 = \bar{k}_0 + 4(1 + s_0) \lambda_0^2; \quad k_1 = \bar{k}_1 + \frac{1}{2} (1 + s_0) \lambda_0^2;$ $k_2 = \bar{k}_2 + \frac{1}{2} (1 - s_1) \lambda_1^2; \quad k_3 = \bar{k}_3 + 4(1 - s_1) \lambda_1^2$
	$k_0 = \bar{k}_0 + \frac{7}{2} r^4 \lambda_0^2; \quad k_1 = \bar{k}_1; \quad k_2 = \bar{k}_2;$ $k_3 = \bar{k}_3 + \frac{7}{2} r^4 \lambda_1^2$
	$k_0 = \bar{k}_0 + \frac{7}{2} r^4 \lambda_0^2; \quad k_1 = \bar{k}_1;$ $k_2 = \bar{k}_2 + \frac{1}{2} (1 - s_1) \lambda_1^2;$ $k_3 = \bar{k}_3 + \left[\frac{7}{2} r^4 + 4(1 + s_1) \right] \lambda_1^2$

Продолжение табл. 9

Граничные условия	Постоянные
	$k_0 = \bar{k}_0 + \left[\frac{7}{2} r^4 + 4 (1 + s_0) \right] \lambda_0^2;$ $k_1 = \bar{k}_1 + \frac{1}{2} (1 + s_0) \lambda_0^2; \quad k_2 = \bar{k}_2 + \frac{1}{2} (1 - s_1) \lambda_1^2;$ $k_3 = \bar{k}_3 + \left[\frac{7}{2} r^4 + 4 (1 - s_1) \right] \lambda_1^2$
<p>Обозначения: $\lambda = \frac{h_0 - h_1}{h_1}$; $\frac{a_1}{a_2} = r$; $\lambda_0 = 1 + \frac{2}{3} \lambda$; $\lambda_1 = 1 + \frac{1}{3} \lambda$; $s_0 = \frac{\lambda}{\lambda_0}$; $s_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1}$</p>	

Вынужденные гармонические колебания прямоугольной пластинки. Пусть на пластинку действует нагрузка, изменяющаяся по закону

$$p(x_1, x_2; t) = q(x_1, x_2) e^{i\theta t}.$$

Подстановка в дифференциальное уравнение движения (19) выражения для прогиба в виде

$$w(x_1, x_2; t) = W(x_1, x_2) e^{i\theta t}$$

дает

$$D\Delta\Delta W - \rho h \theta^2 W = q. \quad (27)$$

Нагрузку q и прогиб W можно представить в виде рядов по свободным формам колебаний, соответствующим заданным граничным условиям

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m f_m(x_1, x_2), \quad W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m f_m(x_1, x_2). \quad (28)$$

Подставляя выражения (28) в уравнение (27) и учитывая, что свободная форма колебаний f_m , соответствующая частоте ω_m , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D\Delta\Delta f_m - \rho h \omega_m^2 f_m = 0,$$

нетрудно найти связь между коэффициентами ряда

$$W_m = \frac{q_m}{\rho h (\omega_m^2 - \theta^2)}.$$

Пусть формы колебаний ортонормированы, т. е. выполняются равенства

$$\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} f_m f_n dx_1 dx_2 = \delta_{mn},$$

где δ_{mn} — символ Кронеккера. Тогда

$$q_m = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} q f_m dx_1 dx_2.$$

Выражение для прогиба запишется так:

$$W = \frac{1}{\rho h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m(x_1, x_2)}{\omega_m^2 - \theta^2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} q f_m dy_1 dy_2.$$

В случае опертой пластинки нормированные собственные формы колебаний будут

$$f_{m_1 m_2} = \frac{2}{(a_1 a_2)^2} \sin \frac{\pi m_1 x_1}{a_1} \sin \frac{\pi m_2 x_2}{a_2}.$$

Для сосредоточенной силы P в точке с координатами $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ выражение для прогиба принимает вид

$$w = \frac{4Pe^{i\theta t}}{a_1 a_2 \rho h} \sum_{m, n} \frac{\sin \frac{m\pi y_1}{a_1} \sin \frac{n\pi y_2}{a_2} \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2}}{\omega_{mn}^2 - \theta^2}.$$

Если амплитуда нагрузки q постоянна, то прогиб определяется формулой

$$w = \frac{16qe^{i\theta t}}{\pi^2 \rho h} \sum_{m, n=1, 3, \dots} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2}}{mn (\omega_{mn}^2 - \theta^2)}. \quad (29)$$

Если частота θ возбуждающей нагрузки приближается к одной из собственных частот ω_m , то амплитуда соответствующей формы колебаний неограниченно возрастает (явление резонанса). Исключением является случай $q_m = 0$ (нагрузка ортогональна некоторой форме колебаний, работа внешней нагрузки на этой форме колебаний равна нулю). В этом случае нужна осторожность, так как малое видоизменение внешней нагрузки нарушает ортогональность. Для отыскания ограниченного решения в резонансной области следует учесть диссипацию энергии вследствие внешнего и (или) внутреннего трения. При малом трении может оказаться необходимым применить нелинейную теорию.

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНОК ДРУГИХ ФОРМ

Пластины, имеющие в плане форму параллелограмма. Дифференциальное уравнение колебаний пластинки в косоугольных координатах $\xi_1 = x_1 - x_2 \operatorname{tg} \alpha$; $\xi_2 = x_2 \sec \alpha$ имеет вид

$$D \Delta \Delta w - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Выражение для оператора Лапласа Δ будет

$$\Delta = \sec^2 \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - 2 \sin \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right).$$

При малых углах ($\alpha \leq 15 \div 30^\circ$) в первом приближении для формы колебаний можно положить

$$\omega_{mn} = f_{mn} F_m^{(1)}(\xi_1) F_n^{(2)}(\xi_2),$$

где $F_m^{(i)}$ — балочные функции для соответствующих краевых условий.

Формула Рэлея-Ритца дает приближенное выражение для частоты

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sec \alpha \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{A_m^{(1)4}}{a_1^4} + \frac{A_n^{(2)4}}{a_2^4} + \right. \\ \left. + \frac{2}{a_1^2 a_2^2} \left[\nu B_m^{(1)} B_n^{(2)} + (1 - \nu) C_m^{(1)} C_n^{(2)} + 2 \sin^2 \alpha C_m^{(1)} C_n^{(2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sin \alpha (D_m^{(1)} E_n^{(2)} + D_n^{(2)} E_m^{(1)}) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Значения A_m , B_m и C_m см. в табл. 6. Значения постоянных D_m и E_m для различных краевых условий приведены в табл. 10.

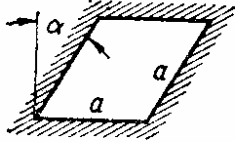
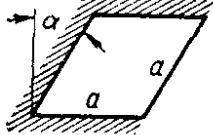
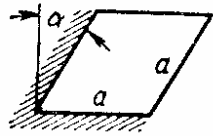

10. Значения постоянных D_m и E_m

Граничные условия	Постоянная	m			
		1	2	3	4
$S-C$	$\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}$	$\begin{matrix} -8,1390 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -25,696 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -52,130 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -89,174 \\ 0 \end{matrix}$
$S-F$	$\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,1274 \\ 0,9991 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0706 \\ 0,9998 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0490 \\ 1,0000 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0374 \\ 1,0004 \end{matrix}$
$C-C$	$\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0,79800 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 30,909 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 58,783 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 161,97 \\ 0 \end{matrix}$
$C-F$	$\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6,8020 \\ 8,7112 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -44,062 \\ 1,9281 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 121,16 \\ 2,0032 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6647,0 \\ 1,9998 \end{matrix}$

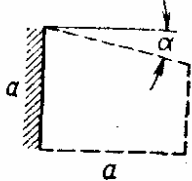
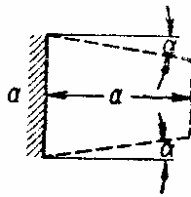
Более высокие приближения по методу Рэлея-Ритца для параметра частоты

$$\omega_* = a_1^2 \omega \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}$$

11. Низшие частоты $\omega_{1*} = \omega a^2 \cos^2 \alpha \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}$
ромбовидной пластинки при различных граничных условиях

Граничные условия	α°			
	0	15	30	45
	36,11 73,74 108,85	36,67 74,76 111,43	38,15 77,48 118,19	40,08 81,06 126,84
	31,95 63,66 71,43	32,54 64,76 72,40	34,09 67,68 75,04	36,11 71,47 78,46
	27,19 60,69 93,13	27,84 61,73 95,74	29,52 64,48 102,59	31,68 68,06 111,15
	3,494 8,547	3,360 8,278	2,971 7,643	2,412 6,88

12. Низшая частота $\omega_* = \omega a^2 \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}$ трапецидальной консольной пластины

			
α°	ω_*	α°	ω_*
0	3,533	0	3,533
9	3,706	6	3,718
18	3,910	12	4,153
27	4,243	18	4,750
36	4,822	24	5,995

для ромбовидной пластины получены Колом и Кадамбом [32]. Результаты вычислений ω_* при $\nu = 0,3$ и при различных углах α , а также результаты вычислений Бартона [22] для консольной пластины ($\nu = 0,3$) приведены в табл. 11.

Пластины, имеющие в плане форму трапеции. Частоты и формы свободных колебаний могут быть найдены методом Рэлея-Ритца. Резуль-

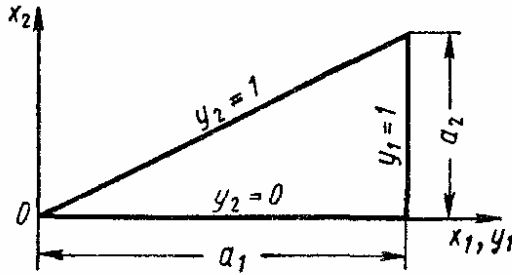


Рис. 3

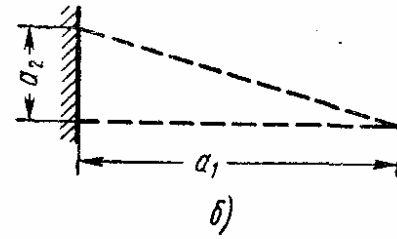
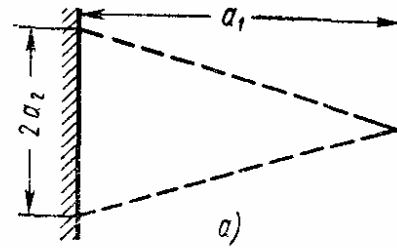


Рис. 4

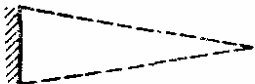
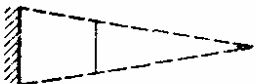
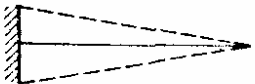
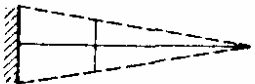
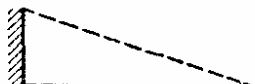

таты вычислений Кадамбом и др. [26] безразмерной частоты ω_* для консольной трапециевидальной пластинки даны в табл. 12.

Колебания треугольных пластин. В этом случае удобен метод Ритца. В системе координат y_1, y_2 (рис. 3) соответствующая система уравнений будет

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial c_n} \iint \left\{ y_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \right)^2 - 4y_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2} + \right. \\ & + \frac{2}{y_1} \left[(2y_2^2 + \alpha^2 (1 - \nu)) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2} \right)^2 + (y_2^2 + \nu y_1^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} + \right. \\ & + 2y_2 \frac{\partial w}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \left. \right] - \frac{4}{y_1^2} \left[(2y_1^2 + \alpha^2 (1 - \nu)) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial y_1} + \right. \\ & + (y_2^3 + \alpha^2 y_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} \left. \right] + \frac{1}{y_1^3} \left[2(2y_2^2 + \alpha^2 (1 - \nu)) \left(\frac{\partial w}{\partial y_2} \right)^2 + \right. \\ & + 4(y_2^3 + \alpha^2 y_2) \frac{\partial w}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} + (y_2^2 + \alpha^2)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} \right)^2 \left. \right] - \\ & \left. - \omega^*{}^2 y_1 w^2 \right\} dy_1 dy_2 = 0 \\ & \left[\omega^* = \omega a_1^2 \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}; \alpha = \frac{a_1}{a_2}; w = \sum_m c_m f_m(y_1, y_2) \right]. \end{aligned}$$

Результаты вычислений Андерсеном [21] безразмерной частоты ω^* свободных колебаний консольной пластинки, имеющей в плане форму равнобедренного (рис. 4, а) или форму прямоугольного (рис. 4, б) треугольника, приведены в табл. 13.

13. Частоты $\omega_* = \omega a_1^2 \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}$ и формы свободных колебаний консольной треугольной пластинки при различных отношениях $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$

Форма колебаний	α			
	2	4	8	14
	7,149	7,122	7,080	7,068
	30,803	30,718	30,654	30,638
	61,131	90,105	157,70	265,98
	148,8	259,4	493,4	853,6
Форма колебаний	α			
	2	4	7	
	5,887	6,617	6,897	
	25,40	28,80	30,28	

К более точным результатам приводит использованное Кристенсеном [27] приближенное представление пластинки как системы ортогонально расположенных балок. Результаты вычислений безразмерной частоты

$$\omega^* = \omega a^2 \left(\frac{\rho h}{2D} \right)^{\frac{1}{2}}$$

для консольной пластинки, являющейся в плане прямоугольным треугольником, приведены в табл. 14. Для сравнения приведены результаты эксперимента и вычисления по методу Ритца (использовано первое приближение).

14. Приведенные частоты $\omega^* = \omega a^2 \left(\frac{\rho h}{2D} \right)^{\frac{1}{2}}$ колебаний
пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника ($a_1 = a_2 = a$)

Метод определения	Номер формы					
	1	2	3	4	5	6
Эксперимент	4,17	16,4	23,0	39,3	53,3	69,9
Разбиение на систему ба- лок	4,35	16,8	23,0	38,9	53,6	60,3
Метод Рэлея-Ритца	4,42	16,9	23,7	43,5	—	—

Клейном [33] рассмотрены колебания треугольной пластинки, опертой по контуру.

Эллиптическая пластинка. Эллиптические координаты определяются как два корня квадратного уравнения относительно s :

$$\frac{x_1^2}{s - e_1} + \frac{x_2^2}{s - e_2} = 1$$

Вид параметров Ламе упрощается, если ввести новые переменные y_1, y_2 по формулам

$$y_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arch} \frac{2s_1 - (e_1 + e_2)}{e_1 - e_2};$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} \arccos \frac{2s_2 - (e_1 + e_2)}{e_1 - e_2}.$$

Параметры Ламе будут равны один другому:

$$H_1^2 = H_2^2 = H^2 = \frac{e_1 - e_2}{2} (\operatorname{ch} 2y_1 - \cos 2y_2).$$

Линии $y_1 = \operatorname{const}$ представляют собой эллипсы, а линии $y_2 = \operatorname{const}$ — две ветви гиперболы. Дифференциальное уравнение колебаний пластинки постоянной толщины в эллиптических координатах будет

$$D\Delta \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q; \quad (30)$$

$$\Delta = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right).$$

Моменты M_{11}, M_{22}, M_{12} и перерезывающие силы:

$$M_{11} = \frac{D}{H^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} - \right. \\ \left. - \frac{(1 - \nu)(e_1 - e_2)}{2H^2} \left(\operatorname{sh} 2y_1 \frac{\partial w}{\partial y_1} - \sin 2y_2 \frac{\partial w}{\partial y_2} \right) \right];$$

$$M_{22} = \frac{D}{H^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)(e_1-e_2)}{2H^2} \left(\operatorname{sh} 2y_1 \frac{\partial w}{\partial y_1} - \sin 2y_2 \frac{\partial w}{\partial y_2} \right) \right]; \\ M_{12} = \frac{(1-\nu)D}{H^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{e_1-e_2}{2H^2} \left(\operatorname{sh} 2y_1 \frac{\partial w}{\partial y_2} + \sin 2y_2 \frac{\partial w}{\partial y_1} \right) \right]; \\ Q_1 = \frac{D}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} (\Delta w); \quad Q_2 = \frac{Q}{D} \cdot \frac{\partial}{\partial y_2} (\Delta w).$$

Общее решение уравнения (30) имеет вид

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} [A_{1m} \operatorname{Ce}_m(y_1, \xi) \operatorname{ce}_m(y_2, \xi) + A_{2m} \operatorname{Ce}_m(y_1, -\xi) \times \\ \times \operatorname{ce}_m(y_2, -\xi)] + \sum_{m=1}^{\infty} [A_{3m} \operatorname{Se}_m(y_1, \xi) \operatorname{se}_m(y_2, \xi) + A_{4m} \times \\ \times \operatorname{Se}_m(y_1, -\xi) \operatorname{se}_m(y_2, -\xi)] + \sum_{m=0}^{\infty} [B_{1m} \operatorname{Fey}_m(y_1, \xi) \operatorname{ce}_m(y_2, \xi) + \\ + B_{2m} \operatorname{Fek}_m(y_1, -\xi) \operatorname{ce}_m(y_2, -\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} [B_{3m} \operatorname{Gey}_m(y_1, \xi) \times \\ \times \operatorname{se}_m(y_2, \xi) + B_{4m} \operatorname{Gek}_m(y_1, -\xi) \operatorname{se}_m(y_2, -\xi)]; \quad (31)$$

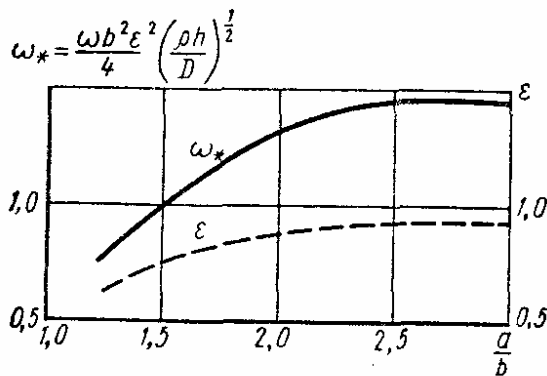


Рис. 5

здесь $\operatorname{Ce}_m, \operatorname{ce}_m, \operatorname{Se}_m, \operatorname{se}_m, \operatorname{Fey}_m, \operatorname{Fek}_m, \operatorname{Gey}_m, \operatorname{Gek}_m$ — обычные и модифицированные функции Маттье порядка m ;

$$\xi = \frac{1}{32} (e_1 - e_2)^2 \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}.$$

Для пластинок без центрального отверстия постоянные B_{km} следует положить равными нулю.

Уравнение частот для эллиптической пластинки, защемленной по контуру, имеет вид

$$[\operatorname{Ce}_m(y_{10}, \xi) \operatorname{Ce}'_m(y_{10}, -\xi) - \operatorname{Ce}'_m(y_{10}, \xi) \operatorname{Ce}_m(y_{10}, -\xi)] \times \\ \times [\operatorname{Se}_m(y_{10}, \xi) \operatorname{Se}'_m(y_{10}, -\xi) - \operatorname{Se}'_m(y_{10}, \xi) \operatorname{Se}_m(y_{10}, -\xi)] = 0. \quad (32)$$

Первый корень уравнения (32) для эллиптических пластинок с полуосями a и b и различным эксцентриситетом ε дан на графике рис. 5 (ре-

зультаты Шибаяока [36]). Коллатц [13] методом Ритца в первом приближении для основной частоты колебаний получил выражение

$$\omega = \left[\frac{10Eh}{3\rho(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{2}{3a_1^2 a_2^2} + \frac{1}{a_2^4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ, НАЧАЛЬНЫХ УСИЛИЙ В СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Свободные колебания с большими амплитудами прямоугольной пластины. В декартовой системе координат дифференциальные уравнения нелинейных колебаний пластинки (16) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} D\Delta\Delta w - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q; \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta F + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Первое уравнение системы (33) является дифференциальным уравнением движения, второе — уравнением совместности деформаций.

Граничные условия для прогибов, перерезывающих сил и моментов совпадают с рассмотренными на стр. 373. Кроме того, должны быть поставлены по два условия на каждом краю для функции напряжений F . Простейшими являются условия для свободного края $x_1 = a_1$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (x_1 = a_1),$$

а также для края с заданными усилиями

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = N_{11}^*; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -N_{12}^* \quad (x_1 = a_1).$$

Если на контуре заданы перемещения, то удобнее вместо уравнений (33) использовать дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = 0; \\ D\Delta\Delta w - N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \\ + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q; \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

совместно с соотношениями упругости

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \quad N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11});$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{1+\nu} \varepsilon_{12},$$

где

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2;$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right).$$

При исследовании свободных колебаний ($q=0$) прямоугольной (a_1, a_2) пластинки с опертым неподвижным контуром удобно искать решение в виде разложения по степеням малого параметра δ :

$$u_i = u_i^{(2)} \delta^2 + u_i^{(4)} \delta^4 + \dots;$$

$$w = w^{(1)} \delta + w^{(3)} \delta^3 + \dots.$$

Для определения $u_i^{(k)}, w^{(l)}$ можно применить метод Б. Г. Галеркина в форме П. Ф. Папковича. Пусть в первом приближении

$$w^{(1)} = \beta z(\zeta) \sin \frac{\pi x_1}{a_1} \sin \frac{\pi x_2}{a_2},$$

где $\beta = \frac{A}{h}$ — безразмерная амплитуда колебаний; $\zeta = \left(\frac{D}{\rho h a_1^4} \right)^{\frac{1}{2}} t$ —

безразмерное время.

Тогда интегрирование первых двух уравнений системы (34) дает

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(2)} &= \frac{\beta^2 z^2 \pi}{16} \left(\cos \frac{2\pi x_2}{a_2} - 1 + \nu r^2 \right) \sin \frac{2\pi x_1}{a_1}; \\ u_2^{(2)} &= \frac{\beta^2 z^2 \pi}{16} \left(\cos \frac{2\pi x_1}{a_1} - 1 + \frac{\nu}{r^2} \right) \sin \frac{2\pi x_2}{a_2} \quad \left(r = \frac{a_1}{a_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Далее следует подставить выражения (35) в левую часть последнего уравнения системы (34), умножить результат на $\sin \frac{\pi x_1}{a_1} \sin \frac{\pi x_2}{a_2}$ и проинтегрировать по площади пластины.

В результате получается уравнение для определения функции z (ζ):

$$\frac{d^2 z}{d\zeta^2} + \pi^4 (1 + r^2)^2 z + 3\beta^2 \pi^4 z^3 \left[\frac{3 - \nu^2}{4} (1 + r^4) + \nu r^2 \right] = 0. \quad (35a)$$

Результаты вычисления периода колебаний τ в зависимости от безразмерной амплитуды колебаний β показаны на рис. 6, а отношение η максимального полного напряжения к максимальному напряжению изгиба в зависимости от относительной амплитуды колебаний — на рис. 7.

Эта задача рассмотрена Ху Нан-Чу и Германом [29].

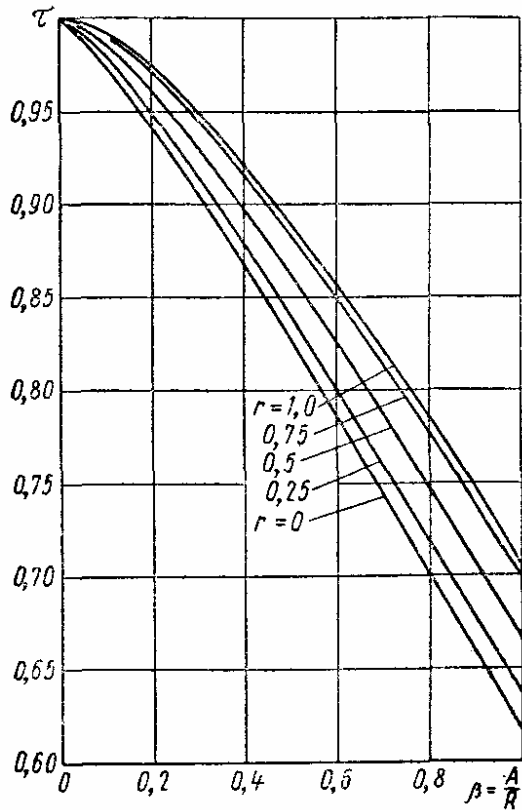


Рис. 6

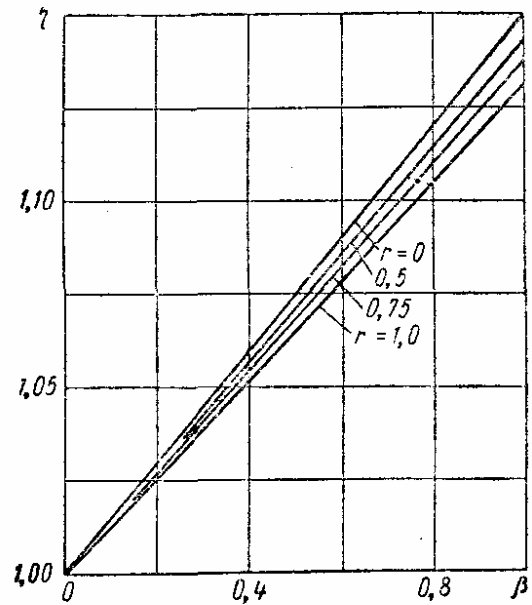


Рис. 7

Влияние начальных усилий в срединной плоскости пластинки. Пусть в плоскости пластинки действуют усилия N_{11} , N_{12} , N_{22} . Тогда следует воспользоваться дифференциальными уравнениями (10) совместно с выражениями (11), (12). В декартовой системе координат уравнение колебаний будет

$$D\Delta \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right).$$

Если усилия N_{11} , N_{22} и N_{12} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = 0,$$

то дифференциальное уравнение колебаний запишется так:

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \quad (36)$$

Пусть в прямоугольной пластинке, опертой по контуру (см. рис. 2), усилия N_{11} и N_{22} постоянны, а усилие N_{12} равно нулю. Тогда свободные формы колебаний будут иметь вид

$$w_{mn} = f_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2}.$$

Частота колебаний ω в этом случае

$$\omega = \pi^2 \left\{ \frac{D}{\rho h} \left[\left(\frac{m^2}{a_1^2} + \frac{n^2}{a_2^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{q_1 m^2}{a_1^4} + \frac{q_2 n^2}{a_2^4} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

$$\left(q_i = \frac{N_{ii} a_i^2}{2\pi^2 D} \right).$$

Из формулы (37) вытекает, что растягивающие усилия повышают частоту собственных колебаний, сжимающие — снижают.

Если хотя бы одно из усилий N_{11} , N_{22} отрицательно и достаточно велико по абсолютной величине, то часть частот, определяемых по формуле (37), может быть равна нулю или мнимой величине. Амплитуды соответствующих колебаний будут возрастать неограниченно. Это связано с достижением или превышением критического значения по Эйлеру (пластинка теряет устойчивость).

Пусть две противоположные стороны ($x_1 = 0$, $x_1 = a_1$) прямоугольной пластинки оперты, а на двух других заданы произвольные краевые условия.

Решение дифференциального уравнения (36) при $N_{12} = 0$; $N_{11} = \text{const}$; $N_{22} = \text{const}$ удобно искать в виде

$$w = f(x_2) \sin \frac{\pi m x_1}{a_1}.$$

Функция f должна удовлетворять уравнению

$$f^{IV} - \frac{2\pi^2}{a_1^2} (m^2 + r^2 q_2) f'' + \frac{\pi^4}{a_1^4} \left(m^4 + 2m^2 q_1 - \frac{\omega^2}{\pi^4} \right) f = 0, \quad (38)$$

Сопоставляя уравнение (38) с соответствующим уравнением при $q_1 = q_2 = 0$

$$f^{IV} - \frac{2\pi^2}{a_1^2} m^2 f'' + \frac{\pi^4}{a_1^4} \left(m^4 - \frac{\omega_{**}^2}{\pi^4} \right) f = 0, \quad (39)$$

можно убедиться, что уравнение (38) совпадает с дифференциальным уравнением (39), если положить

$$m_*^2 = m^2 + r^2 q_2;$$

$$\omega_{**}^2 = \omega_*^2 + \pi^4 [r^4 q_2^2 + 2m^2 (r^2 q_2 - q_1)] \quad \left(r = \frac{a_1}{a_2}\right).$$

Следовательно, если известна безразмерная частота ω_{**} свободных колебаний незагруженной прямоугольной пластинки с размерами a_{1*} , a_2 , причем соответствующая форма колебаний имеет m полуволн в направлении оси x_1 , то частота колебаний загруженной пластинки ω^* может быть определена по формуле

$$\omega_*^2 = \frac{a_{1*}^2}{a_1^2} \omega_{**}^2 + [2m^2 \times \\ \times (q_1 - r^2 q_2) - r^4 q_2^2] \pi^4,$$

где

$$\frac{a_{1*}^2}{a_1^2} = \frac{m^2}{m^2 + r^2 q_2}.$$

Зависимость параметра частоты

$$\mu = \frac{a_1^2 \omega}{\pi^2} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}$$

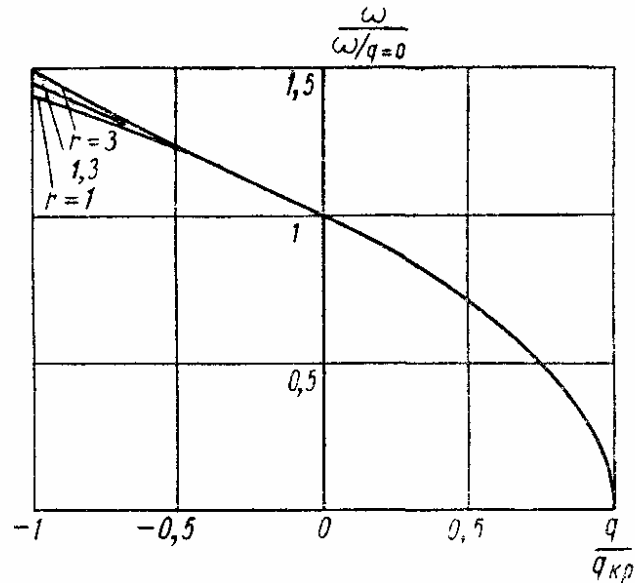


Рис. 8

свободных колебаний прямоугольной пластинки, защемленной по краю $x_1 = 0$ и опертой по всем другим сторонам, приведена на рис. 8 ($q_1 = q_2 = q$, $m = n = 1$). При произвольных граничных условиях применение метода Рэлея-Ритца в первом приближении (формы колебаний ищутся в виде произведений балочных функций) приводит к формуле

$$\omega = \pi^2 \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{A_{1m}^4}{a_1^4} + \frac{A_{2n}^4}{a_2^4} + \frac{2}{a_1^2 a_2^2} [\nu B_{1m} B_{2n} + (1 - \nu) C_{1m} C_{2n}] + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{q_1 C_{1m}}{a_1^4} + \frac{q_2 C_{2n}}{a_2^4} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Входящие в формулу (40) постоянные A , B , C для различных граничных условий см. в табл. 6.

Влияние деформации сдвига и инерции вращения. Выше были использованы уравнения и граничные условия классической теории изгиба плит, основанной на гипотезе Кирхгофа-Лява. Предпосылки этой теории оказываются несправедливыми для высокочастотных колебаний, когда длина полуволн соответствующих форм колебаний сопоставима с толщиной пластины. Дифференциальные уравнения изгибных

колебаний пластинки, полученные на основе отказа от гипотезы Кирхгофа-Лява различными авторами, могут быть записаны в следующей общей форме в декартовой системе координат $x_1 x_2 z$ [15]:

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi + w) &= -\frac{2(1+\nu)}{\beta E h} \left(q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right); \\ \Delta\varphi &= -\frac{\nu(1+\nu)}{E h} \frac{\alpha}{\beta} \left(q - \frac{1}{6} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \\ &+ \frac{6\beta(1-\nu)}{h^2} (\varphi + w) + \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \\ \Delta\theta &= \frac{12\beta}{h^2} \theta + \frac{2(1+\nu)}{E} \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2};\end{aligned}$$

здесь w — прогиб; φ и θ — функции, определяемые формулами

$$\begin{aligned}t_1 &= -\frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_1 z \, dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}; \\ t_2 &= -\frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_2 z \, dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \theta}{\partial x_1}.\end{aligned}$$

Выражения для компонентов смещения u_1 и u_2 в направлении x_1 и x_2 соответственно имеют вид

$$\left. \begin{aligned}u_1 &= -t_1 z - f_1(z) \left(t_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right); \\ u_2 &= -t_2 z - f_1(z) \left(t_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right).\end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Формулы (41) можно рассматривать как разложение компонентов смещения u_1 , u_2 по ортогональным функциям по координате z . Удержано два члена — первый, учитывающий осредненный поворот, и второй, учитывающий искривление нормального элемента.

Напряжения в колеблющейся пластинке определяют по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{12}{h^3} \left\{ M_{11} z + f_1(z) \left[M_{11} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha \nu h^3}{12\beta(1-\nu)} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\}; \\ \sigma_{22} &= -\frac{12}{h^3} \left\{ M_{22} z + f_1(z) \left[M_{22} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha \nu h^3}{12\beta(1-\nu)} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= -\frac{12}{h^3} \left\{ M_{12}z + f_1(z) \left[M_{12} - D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\}; \\ \tau_{13} &= -\frac{\beta Gh}{2F\left(\frac{h}{2}\right)} f(z) \left(t_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right); \\ \tau_{23} &= -\frac{\beta Gh}{2F\left(\frac{h}{2}\right)} f(z) \left(t_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right).\end{aligned}$$

Изгибающие и крутящий моменты, а также перерезывающие силы находят по формулам

$$\begin{aligned}M_{11} &= D \left(\frac{\partial t_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial t_2}{\partial x_2} \right) - \\ &- \frac{\alpha \nu h^2}{12\beta(1-\nu^2)} \left[q - (1-\beta) \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]; \\ M_{22} &= D \left(\frac{\partial t_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial t_1}{\partial x_1} \right) - \\ &- \frac{\alpha \nu h^2}{12\beta(1-\nu^2)} \left[q - (1-\beta) \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]; \\ M_{12} &= D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial t_1}{\partial x_2} + \frac{\partial t_2}{\partial x_1} \right); \\ Q_1 &= \frac{\beta Eh}{2(1+\nu)} \left(t_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right); \\ Q_2 &= \frac{\beta Eh}{2(1+\nu)} \left(t_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right).\end{aligned}$$

Функции $F(z)$, $f(z)$ и $f_1(z)$ связаны между собой формулами

$$\begin{aligned}F(z) &= \int_0^z f(z) dz; \\ f_1(z) &= \frac{h^3 F\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2} - z} - z. \\ &\quad 12 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Fz dz\end{aligned}$$

Иногда полагают $f_1(z) \equiv 0$.

Параметр α равен либо нулю (это соответствует пренебрежению поперечным нормальным напряжением σ_{33}), либо единице. Наиболее употребительным для β является значение $\frac{5}{6}$, допускающее

энергетическое обоснование при изменении касательных напряжений τ_{13}, τ_{23} по толщине по закону квадратной параболы $\left(f = 1 - 4 \frac{z^2}{h^2}\right)$.

В качестве функции $f(z)$ обычно выбирают параболическую

$$f(z) = 1 - \frac{4z^2}{h^2}$$

или близкую к ней функцию.

Граничные условия на каждом краю могут быть заданы одним из восьми видов. Они определяются всеми возможными комбинациями следующих трех условий:

$$\begin{aligned} w = 0 & \quad \text{или} \quad Q_n = 0; \\ t_n = 0 & \quad \text{или} \quad M_n = 0; \\ t_s = 0 & \quad \text{или} \quad M_{ns} = 0. \end{aligned}$$

Наиболее распространенные условия:

для зашпеленного края

$$w = 0; t_n = 0; t_s = 0$$

(равенство нулю прогиба и осредненных поворотов);

для свободного края

$$M_n = 0, M_{ns} = 0, Q_n = 0$$

(равенство нулю изгибающего и крутящего моментов и перерезывающей силы);

для опертого края — условия Навье

$$w = 0, M_n = 0, t_s = 0$$

(равенство нулю прогиба, поворота вокруг нормали к контуру и изгибающего момента).

Свободные формы колебаний опертой прямоугольной пластинки целесообразно искать в виде

$$w = w_0 \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2;$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2;$$

$$\psi = \psi_0 \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2;$$

$$\left(k_1 = \frac{\pi m_1}{a_1}; k_2 = \frac{\pi m_2}{a_2}; m_1, m_2 = 1, 2, \dots\right).$$

При учете деформации сдвига и инерции вращения при фиксированных значениях m_1 и m_2 уточненные уравнения дают три значения частоты, из которых теории, основанной на гипотезе Кирхгофа-Лява, соответствует частота, определяемая по формуле

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\nu^2)\rho\omega^2}{E} = & \left[\left(\frac{6\beta(1-\nu) - \alpha\nu}{12} + 1 \right) (k_1^2 + k_2^2) + \right. \\ & \left. + \frac{6\beta(1-\nu)}{h^2} \right] - \left\{ \left[\left(\frac{6\beta(1-\nu) - \alpha\nu}{12} + 1 \right) (k_1^2 + k_2^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{6\beta(1-\nu)}{h^2} \right]^2 - 2\beta(1-\nu)(k_1^2 + k_2^2)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

При пренебрежении инерцией вращения нормальных элементов эта же частота определяется формулой

$$\rho\omega^2 = G \frac{\beta (k_1^2 + k_2^2)^2}{\left[\frac{6\beta (1-\nu) - \alpha\nu}{12} + 1 \right] (k_1^2 + k_2^2) + \frac{6\beta (1-\nu)}{h^2}}.$$

Из решения трехмерной задачи теории упругости вытекает, что при фиксированных значениях m_1, m_2 существует бесчисленное множество частот. Результату теории, основанной на гипотезе Кирхгофа-Лява, соответствует первый отличный от нуля корень уравнения частот

$$4r_2r_3 (k_1^2 + k_2^2) \operatorname{th} \frac{r_2h}{2} = (k_1^2 + k_2^2 + r_2^2)^2 \operatorname{th} \frac{r_3h}{2}$$

$$\left(r_2^2 = k_1^2 + k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}; \quad r_3^2 = k_1^2 + k_2^2 - \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} \right).$$

Результаты вычислений параметра частоты

$$\kappa = \frac{\pi\omega}{a} \left[\frac{\rho(1-\nu)}{G} \right]^{\frac{1}{2}}$$

по классической теории, уточненным теориям и трехмерной теории упругости для квадратной ($a_1 = a_2 = a = 40h, \nu = 0,3$) пластинки даны в табл. 15.

15. Частоты $\kappa = \frac{a\omega}{\pi} \left[\frac{2\rho(1-\nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}}$ опертой квадратной пластины ($a_1 = a_2 = a = 40h; \nu = 0,3$) при различных числах m_1, m_2 полуволн

Метод вычисления	$\begin{matrix} 1. \\ \parallel \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1. \\ \parallel \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1. \\ \parallel \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2. \\ \parallel \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2. \\ \parallel \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3. \\ \parallel \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7. \\ \parallel \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 10. \\ \parallel \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix}$
Гипотеза Кирхгофа-Лява	0,0642	0,160	0,321	0,257	0,417	0,577	3,14	6,40
Уточненные уравнения:								
$\alpha = 0, \beta = \frac{2}{3}$	0,0639	0,159	0,316	0,254	0,409	0,564	2,80	5,21
$\alpha = 0, \beta = \frac{5}{6}$	0,0640	0,159	0,317	0,254	0,411	0,566	2,84	5,36
$\alpha = 1, \beta = \frac{5}{6}$	0,0640	0,159	0,317	0,254	0,411	0,566	2,86	5,38
Трехмерные уравнения	0,0640	0,159	0,317	0,254	0,411	0,566	2,86	5,39

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА К РАСЧЕТУ ПЛАСТИНОК НА КОЛЕБАНИЯ

Идея метода. Здесь приведены общие сведения об асимптотическом методе, позволяющем исследовать частоты и формы свободных колебаний упругих тел при достаточно высоких волновых числах (подробнее см. работы [4—7]).

Согласно этому методу асимптотическое решение для форм свободных колебаний выражается в виде суммы *внутреннего решения* и поправочных решений, которые называют *динамическими краевыми эффектами*. Для каждой границы тела строят решения, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям и условиям на соответствующей границе. Число таких выражений равно числу границ. Затем полученные решения склеивают. Эта процедура аналогична склеиванию моментных и безмоментных решений в теории оболочек или склеиванию вязких и невязких решений в гидродинамике. Вообще говоря, это склеивание может быть выполнено только приближенно. Чем быстрее затухают краевые эффекты, тем меньше ошибка асимптотического решения. Процедура склеивания позволяет получить систему трансцендентных уравнений для параметров, определяющих как внутреннее решение, так и краевые эффекты. Затем может быть получено асимптотическое выражение для собственных частот. Что касается асимптотического выражения для свободных форм, то оно может быть построено для всей области, исключая окрестности углов и ребер. Это типично и для других методов, использующих идею краевого эффекта.

Динамический краевой эффект в пластинках. Применим асимптотический метод к однопролетным и многопролетным прямоугольным в плане пластинкам. При этом получим асимптотическое решение задач, точное решение которых неизвестно, а также задач, точное решение которых слишком громоздко.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний пластинки постоянной толщины можно представить в виде

$$\Delta \Delta w - \frac{\rho h \omega^2}{D} w = 0. \quad (42)$$

Следуя асимптотическому методу, порождающее (внутреннее) решение нужно искать в виде

$$w(x_1, x_2) = \sin k_1(x_1 - \xi_1) \sin k_2(x_2 - \xi_2), \quad (43)$$

где k_1 и k_2 — неизвестные волновые числа; ξ_1 и ξ_2 — фазы порождающего решения. Это выражение удовлетворяет уравнению (42) и соответствует частоте

$$\omega = (k_1^2 + k_2^2) \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (44)$$

Но выражение (43), вообще говоря, не удовлетворяет краевым условиям. Исключением являются краевые условия Навье (см. стр. 375).

Для этих условий $k_1 = \frac{m_1 \pi}{a_1}$, $k_2 = \frac{m_2 \pi}{a_2}$, где m_1 и m_2 — положительные целые числа. Для подчинения краевым условиям мы располагаем лишь четырьмя постоянными k_1 , k_2 , ξ_1 , ξ_2 . При определенном выборе

этих констант выражение (43) можно рассматривать как асимптотическое решение краевой задачи для определенных условий на контуре, справедливое в области, достаточно удаленной от контура пластинки. Внутренняя область и область краевых эффектов в колеблющейся пластинке показаны на рис. 9.

Решение вблизи границы $x_1 = 0$ удобно искать в виде

$$w(x_1, x_2) = W(x_1) \sin k_2(x_2 - \xi_2). \quad (45)$$

Подставив выражение (45) в уравнение (42), после использования выражения (44) для собственной частоты можно получить дифференциальное уравнение

$$W^{IV} - 2k_2^2 W'' - (2k_1^2 k_2^2 + k_1^4) W = 0. \quad (46)$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых и два действительных корня:

$$r_{1,2} = \pm i k_1; \\ r_{3,4} = \pm (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

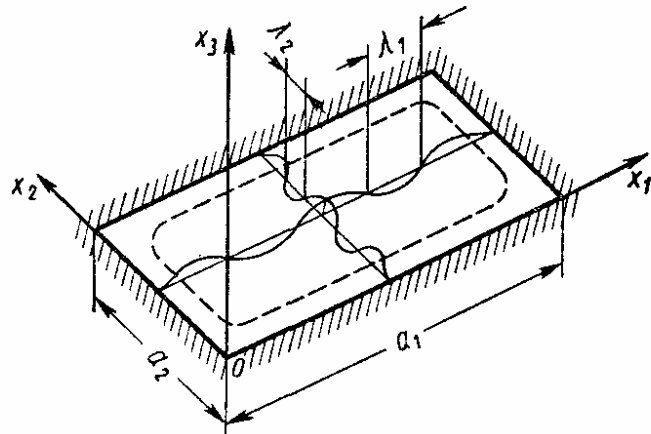


Рис. 9

Мнимые корни соответствуют порождающему решению (43), действительные корни — корректирующим решениям. Следовательно, в пластинках всегда имеет место невырожденный неосциллирующий динамический краевой эффект [4, 6].

Общее решение уравнения (46) имеет вид

$$W = C_1 \sin k_1 x_1 + C_2 \cos k_1 x_1 + \\ + C_3 \exp \left[-x_1 (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}} \right] + C_4 \exp \left[x_1 (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Если рассматривается граница $x_1 = 0$, то последний член должен быть отброшен, так как он неограниченно возрастает с увеличением x_1 . Среди оставшихся членов первые два полностью соответствуют порождающему решению (43), а первые три члена, взятые вместе

$$W(x_1) = \sin k_1(x_1 - \xi_1) + C \exp \left[-x_1 (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (47)$$

описывают динамический краевой эффект в пограничной зоне.

Пользуясь выражением (47), можно оценить ширину области динамического краевого эффекта. Так как постоянная C по порядку

величины не превышает единицы, то можно считать, что влияние последнего члена в формуле (47) оценивается множителем $\exp \left[-x_1 (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}} \right]$. Пусть $x_1 = \lambda_1$, где $\lambda_1 = \frac{\pi}{k_1}$ — длина полу-волны порождающего решения. Тогда при $k_1 = k_2$ имеем $e^{-\pi \sqrt{3}} = 0,0042$. Даже в самом неблагоприятном случае ($k_2 = 0$) получаем $e^{-\pi} = 0,0432$. Следовательно, ширина области динамического краевого эффекта не превышает длины полуволны.

Условия склеивания. Для каждой стороны пластинки можно построить решения типа (47). Удовлетворяя соответствующим граничным условиям, можно выразить постоянные C и фазы ξ через волновые числа k_1 и k_2 . Требование, чтобы с точностью до динамических краевых эффектов все четыре решения совпадали, сводится к условию, чтобы фазовые постоянные, найденные для двух противоположных сторон, отличались на число, кратное π . Это дает условия склеивания

$$\left. \begin{aligned} k_1 a_1 &= \arctg u_{11}(k_1, k_2) + \arctg u_{12}(k_1, k_2) + m_1 \pi; \\ k_2 a_2 &= \arctg u_{21}(k_1, k_2) + \arctg u_{22}(k_1, k_2) + m_2 \pi, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где m_1, m_2 — целые числа или нуль. Функции $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$ равны тангенсам фазовых постоянных ξ_α , найденных из граничных условий $x_\alpha = 0$ и $x_\alpha = a_\alpha$ соответственно, и, следовательно, зависят только от граничных условий. Если на контуре пластинки $\omega = 0$, а функции $\arctg \varphi$ понимают в смысле главных значений, то числа m_1 и m_2 пробегает все положительные целые значения, упорядочивая так спектр собственных частот. Значения $m_1 = m_2 = 1$ соответствуют при этом основной форме колебаний. В случае, если одна или несколько сторон пластинки свободны или упруго оперты, то для определения чисел m_1 и m_2 , соответствующих основной частоте, требуется дополнительное исследование. Следует иметь в виду, что асимптотический метод пригоден, вообще говоря, лишь для достаточно высоких форм колебаний.

В качестве примера вычислим функцию $u_{11} = F_1(k_1, k_2)$ для заделанного края, взяв для определенности сторону $x_1 = 0$. Условия для функции $W(x_1)$ имеют вид $W(0) = W'(0) = 0$. Подставляя сюда выражение (47), можно найти систему двух уравнений

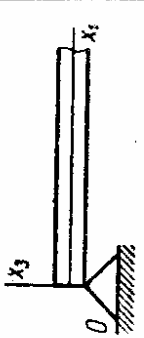
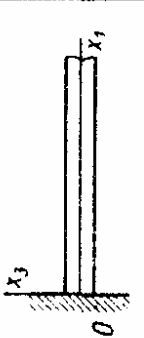

$$\sin k_1 \xi_1 - C = 0;$$

$$k_1 \cos k_1 \xi_1 - (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}} C = 0;$$


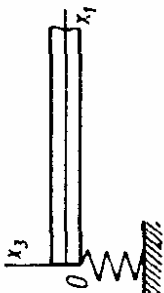
отсюда

$$\operatorname{tg} k_1 \xi_1 = \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad C = \frac{k_1}{2^{\frac{1}{2}} (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

16. Функции $F_1(k_1, k_2)$ и постоянные C при различных граничных условиях на краю $x_1 = 0$

Тип закрепления	Граничные условия	$F_1(k_1, k_2)$	C
	$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0$	0	0
	$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$	$\frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{k_1}{\frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}}$
	$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \frac{c}{D} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1}$	$\frac{k_1}{\frac{2D}{c}(k_1^2 + k_2^2) + (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{k_1}{\left\{ k_1^2 + \left[\frac{2D}{c}(k_1^2 + k_2^2) + (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$

Продолжение табл. 16

Тип закрепления	Граничные условия	$F_1(k_1, k_2)$	C
	$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0;$ $\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0$	$\frac{k_1 [k_1^2 + (2-\nu) k_2^2]^2}{(k_1^2 + \nu k_2^2)^2 (k_1^2 + 2k_2^2)^2}$	$\frac{k_1^2 + \nu k_2^2}{k_1^2 + (2-\nu) k_2^2} \cdot \frac{F_1(k_1, k_2)}{[1 + F_1^2(k_1, k_2)]^{\frac{1}{2}}}$
	$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0;$ $\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \times$ $\times \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{c}{D} w$	$\frac{k_1 [k_1^2 + (2-\nu) k_2^2]^2}{\frac{2c}{D} (k_1^2 + k_2^2) + \rightarrow}$ $\rightarrow + (k_1^2 + \nu k_2^2)^2 (k_1^2 + 2k_2^2)^2$	$\frac{k_1^2 + \nu k_2^2}{k_1^2 + (2-\nu) k_2^2} \cdot \frac{F_1(k_1, k_2)}{[1 + F_1^2(k_1, k_2)]^{\frac{1}{2}}}$

Итак,

$$F_1(k_1, k_2) = \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (49)$$

Формулы для функции $F_1(k_1, k_2)$ и постоянной C при различных типах закрепления стороны $x_1=0$ приведены в табл. 16.

Пластика, защемленная по контуру. Используя табл. 16 и условия склеивания (48), можно найти собственные частоты и формы колебаний для большого класса прямоугольных в плане пластинок. Пусть прямоугольная пластинка со сторонами a_1 и a_2 защемлена по всему контуру [5]. Точного решения этой задачи не получено. Имеются приближенные результаты для основной частоты, полученные вариационными методами. Для квадратной пластинки наиболее надежные результаты получены Игути [30], который искал решение дифференциального уравнения (42) в виде разложения по функциям, удовлетворяющим всем условиям на контуре (см. стр. 379—380). Для вычислений Игути брал шесть членов ряда; поэтому его результаты, особенно в области низших частот, обладают большой точностью. Используем решение Игути в качестве эталона для оценки эффективности асимптотического метода.

Условия склеивания (48) с учетом формул (49) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} k_1 a_1 &= 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} + m_1 \pi; \\ k_2 a_2 &= 2 \operatorname{arctg} \frac{k_2}{(k_2^2 + 2k_1^2)^{\frac{1}{2}}} + m_2 \pi. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Семейства кривых (50) для случая $a_1 = a_2$ представлены на рис. 10. Жирные линии соответствуют пластинке, защемленной по контуру, тонкие линии — опертой пластинке. Арктангенсы в уравнениях (50) понимают в смысле главных значений. При этом волновые числа k_1 и k_2 , соответствующие значениям $m_1 = m_2 = 1$, будут несколько больше, чем $\frac{\pi}{a_1}$ и $\frac{\pi}{a_2}$. Естественно ожидать, что уравнения (50) при $m_1 = m_2 = 1$ дают приближенное значение основной частоты. Это подтверждается анализом форм колебаний. Следовательно, корни уравнений (50) при $m_1 \leq 0$, $m_2 \leq 0$ являются лишними и должны быть отброшены.

Невязка склеивания характеризуется значениями корректирующих решений в центре пластинки. Кривые, соответствующие невязкам ($\varepsilon = 5\%$, 1% , $0,1\%$ и $0,01\%$), на рис. 10 нанесены штриховыми линиями. Из чертежа видно, что невязка склеивания при определении основной формы колебаний не превышает 5% и что лишь первые три формы колебаний склеиваются с невязкой порядка 1% .

Для некоторых частных случаев система уравнений (50) допускает решение в конечном виде. Например, при колебаниях стержня длиной a или при цилиндрическом изгибе пластинки ($k_2 \rightarrow 0$) первое уравнение дает

$$ka = \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi.$$

Подставляя в формулу (44), получим

$$\omega = \frac{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

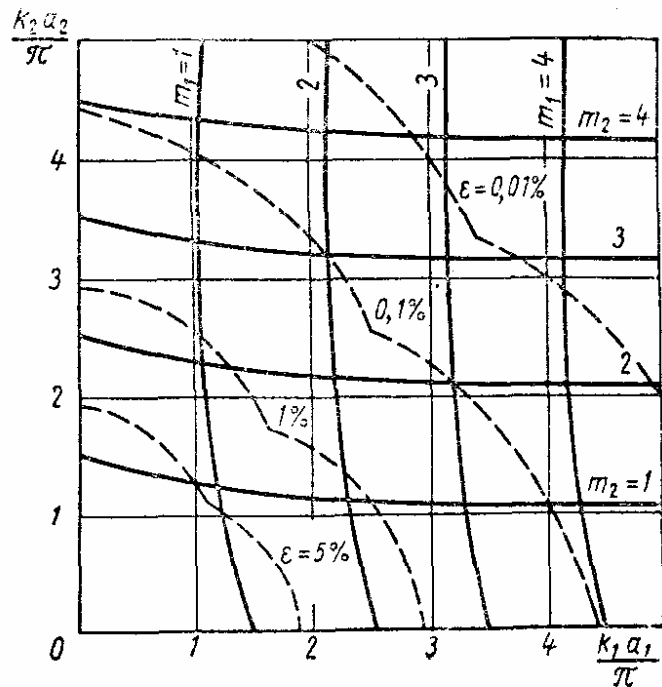


Рис. 10

Эта формула, дающая даже для основной частоты погрешность менее 1%, была получена еще Рэлеем из анализа точного решения задачи о колебаниях защемленного стержня.

Для тех форм колебаний квадратной пластины ($a_1 = a_2 = a$), которым соответствует $m_1 = m_2 = m$, точное решение уравнений (50) имеет вид

$$ka = \left(m + \frac{1}{3}\right) \pi;$$

отсюда по формуле (44) найдем

$$\omega = \frac{2 \left(m + \frac{1}{3}\right)^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

При значениях $m_1 \neq m_2$ решения уравнений (50) могут быть найдены по методу последовательных приближений [5, 6]. Численные результаты представлены в табл. 17. Величина невязки склеивания в табл. 17

17. Коэффициент частоты $\bar{\omega}$ для квадратной пластинки, защемленной по контуру. Сравнение с результатами Игути

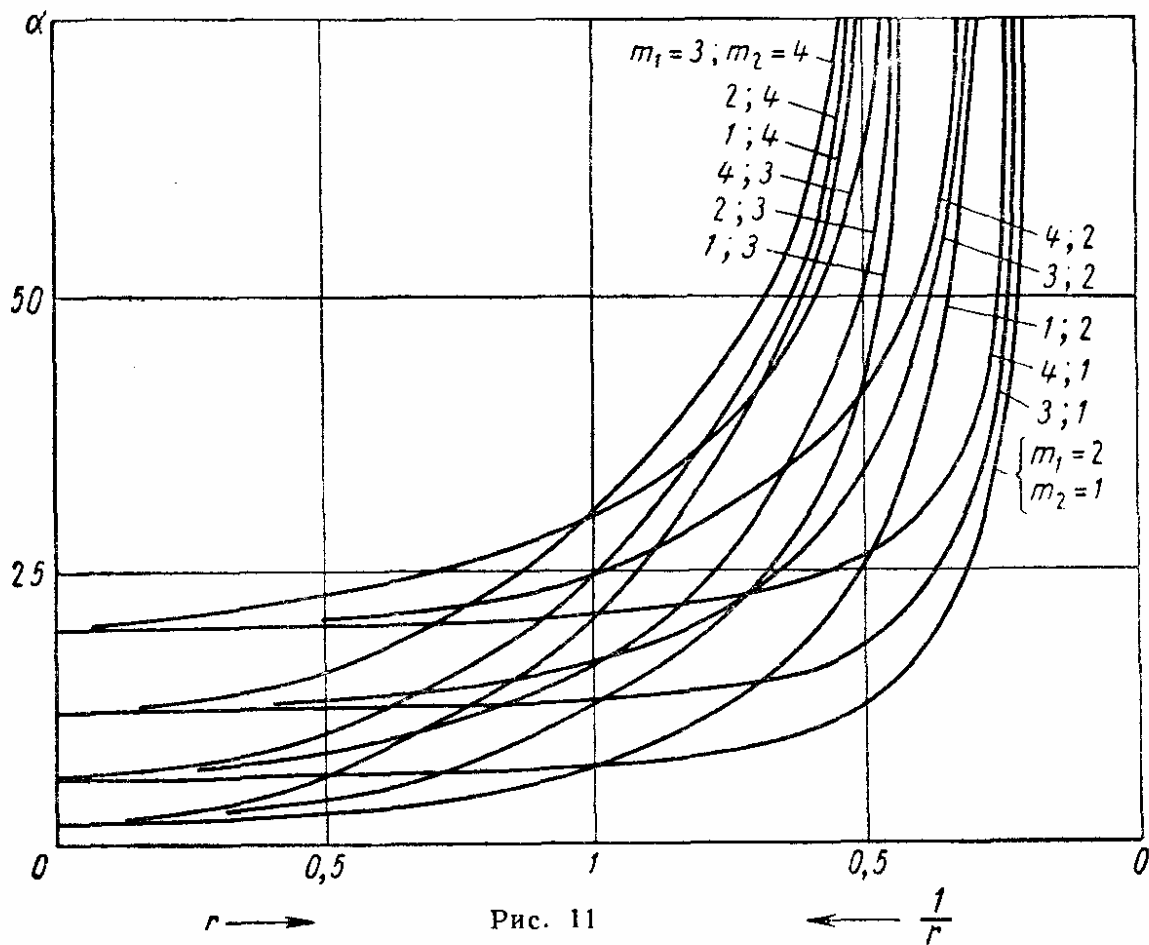
$$\omega = \frac{\pi^2 \bar{\omega}}{a^2} \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{\frac{1}{2}}$$

m_1	m_2	$\frac{k_1 a_1}{\pi}$	$\frac{k_2 a_2}{\pi}$	$\bar{\omega}$		Расхождение в %	Невязка склеивания в %
				Асимптотический метод	По данным Игути		
1	1	4/3	4/3	3,556	3,646	2,53	2,66
1	2	1,2027	2,4372	7,386	7,437	0,69	0,93
2	2	7/3	7/3	10,889	10,965	0,70	0,18
1	3	1,1420	3,4688	13,337	13,393	0,42	0,24
2	3	2,2556	3,4012	16,656	16,717	0,37	0,07
3	3	10/3	10/3	22,222	—	—	0,01
1	4	1,1084	4,4816	21,313	—	—	0,05
2	4	2,2038	4,4366	24,540	24,631	0,36	0,02
3	4	3,2784	4,3832	29,960	—	—	0,00
4	4	13/3	13/3	37,556	—	—	0,00

вычислена с учетом формулы (47). При сопоставлении результатов необходимо иметь в виду, что значения, полученные Игути, завышены, а погрешность примененного им метода возрастает с ростом волновых чисел. Заметим, что ряд высших частот был квалифицирован Игути ошибочно (они были приписаны не тем формам колебаний, которым они в действительности соответствуют); в табл. 17 это исправлено. Результаты вычисления [5] первых 16 частот и форм колебаний для прямоугольной пластинки при $a_2 = 2a_1$ и $a_2 = 4a_1$ приведены в табл. 18.

Коэффициенты частоты α для других отношений $r = \frac{a_1}{a_2}$ могут быть взяты по графику на рис. 11. Частоту свободных колебаний ω определяют затем по формуле

$$\omega = \frac{\alpha^2}{a_1^2} \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{\frac{1}{2}}.$$



18. Коэффициент частоты α для первых 16 форм колебаний заземленной пластинки

$$\omega = \frac{a^2}{a_1^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

m_1	m_2	$\frac{a_2}{a_1} = 4$			$\frac{a_2}{a_1} = 2$		
		$\frac{k_1 a_1}{\pi}$	$\frac{k_2 a_2}{\pi}$	α	$\frac{k_1 a_1}{\pi}$	$\frac{k_2 a_2}{\pi}$	α
1	1	1,51	1,08	2,350	1,45	1,17	2,441
1	2	1,46	2,29	2,426	1,36	2,30	3,181
1	3	1,42	3,23	2,667	1,28	3,38	4,494
1	4	1,38	4,30	3,041	1,22	4,42	6,383
2	1	2,49	1,05	6,299	2,49	1,10	6,477
2	2	2,49	2,09	6,454	2,44	2,19	7,184
2	3	2,47	3,13	6,711	2,40	3,26	8,400
2	4	2,44	4,29	7,089	2,33	4,35	10,150
3	1	3,57	1,03	12,320	3,50	1,06	12,470
3	2	3,50	2,07	12,460	3,47	2,13	13,185
3	3	3,49	3,10	12,740	3,44	3,19	14,400
3	4	3,47	4,13	13,152	3,42	4,24	15,854
4	1	4,50	1,03	20,298	4,49	1,05	20,469
4	2	4,49	2,05	20,467	4,49	2,12	21,194
4	3	4,49	3,08	20,742	4,47	3,14	23,407
4	4	4,49	4,11	21,159	4,46	4,20	24,115

Другие случаи опорного закрепления. Пусть пластинка по краям $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ закреплена, а по краям $x_1 = a_1$ и $x_2 = a_2$ шарнирно опёрта (рис. 12, в). Тогда аналогично предыдущему

$$k_1 a_1 = \operatorname{arctg} \frac{k_1}{\frac{1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}}} + m_1 \pi;$$

$$k_2 a_2 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{\frac{1}{(k_2^2 + 2k_1^2)^{\frac{1}{2}}}} + m_2 \pi.$$

Основной частоте соответствует $m_1 = m_2 = 1$ (если берут главное значение арктангенса). При $a_1 = a_2 = a$, $m_1 = m_2$ решение будет

$$ka = \left(m + \frac{1}{6}\right) \pi.$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi^2 \left(m + \frac{1}{6}\right)^2}{a^2} \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Разница между частотой, найденной по этой формуле, и частотой, определенной вариационным методом Ритца, при $m = 1$ составляет 0,86%.

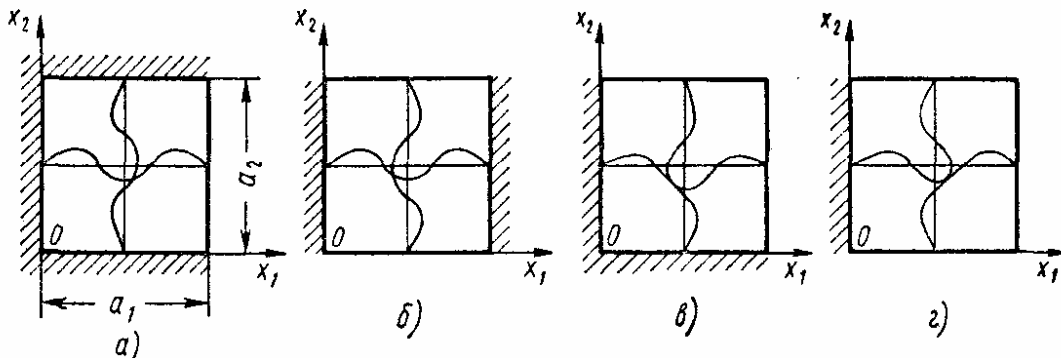


Рис. 12

Значения основных частот колебаний для четырех случаев опорного закрепления (рис. 12), вычисленных асимптотическим методом и методом Ритца, приведены в табл. 19. Параметры первых шести частот

19. Основные частоты колебаний квадратной пластинки

$$\omega = \frac{\pi^2 \bar{\omega}}{a^2} \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Вид закрепления показан на рис. 12	$\pi^2 \bar{\omega}$		Расхождение в %
	Асимптотический метод	Метод Ритца	
a	31,37	31,96	1,88
б	28,92	28,99	0,24
в	26,87	27,10	0,86
г	23,64	23,70	0,25

и форм колебаний даны в табл. 20. В случаях, показанных на рис. 12, б и г, точное решение легко строится в классе элементарных функций, но оно весьма громоздко по сравнению с асимптотическим решением.

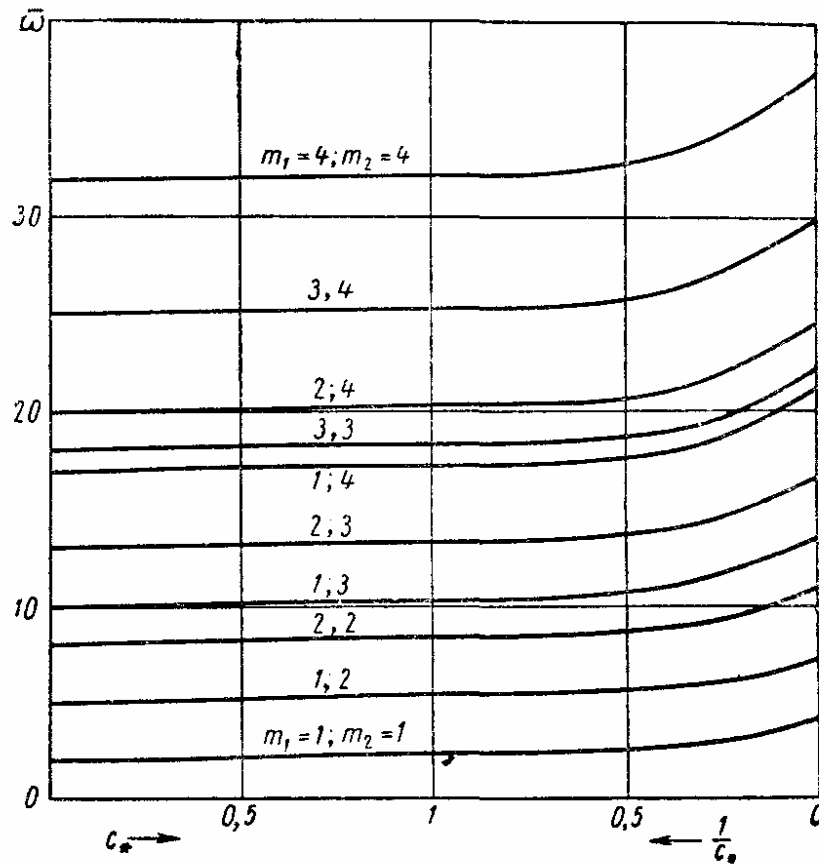


Рис. 13

Частоты и формы свободных колебаний прямоугольной пластинки, свободной по контуру, были изучены при помощи асимптотического метода Е. П. Кудрявцевым [14]. Он же рассмотрел колебания пластинки, окаймленной упругими ребрами. Пластика, упруго закрепленная по контуру, была рассмотрена в статье [5]. Для случая, когда коэф-

20. Коэффициент частоты для четырех случаев опирания квадратной пластинки

$$\omega = \frac{\alpha^2}{a^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

m_1	m_2	Рис. 12, а			Рис. 12, б			Рис. 12, в			Рис. 12, г		
		$\frac{\pi}{k_1 a}$	$\frac{\pi}{k_2 a}$	α	$\frac{\pi}{k_1 a}$	$\frac{\pi}{k_2 a}$	α	$\frac{\pi}{k_1 a}$	$\frac{\pi}{k_2 a}$	α	$\frac{\pi}{k_1 a}$	$\frac{\pi}{k_2 a}$	α
1	1	0,869	0,734	3,178	0,720	1,000	2,929	0,857	0,857	2,722	0,847	1,000	2,395
1	2	0,924	0,408	7,174	0,805	0,500	5,542	0,907	0,451	6,133	0,900	0,500	5,234
2	2	0,463	0,426	10,166	0,423	0,500	9,580	0,462	0,462	9,389	0,460	0,500	8,726
1	3	0,935	0,288	13,191	0,859	0,333	10,355	0,927	0,309	11,600	0,932	0,333	10,151
2	3	0,471	0,293	16,114	0,439	0,333	14,200	0,470	0,313	14,778	0,469	0,333	13,549
3	3	0,316	0,299	21,160	0,198	0,333	20,230	0,316	0,316	20,055	0,315	0,333	19,056

коэффициенты упругости защемления c для всех четырех сторон одинаковы, условия склеивания (48) принимают вид

$$k_1 a_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1}{\frac{2D}{c} (k_1^2 + k_2^2) + (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}} + m_1 \pi;$$

$$k_2 a_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_2}{\frac{2D}{c} (k_1^2 + k_2^2) + (k_2^2 + 2k_1^2)^{\frac{1}{2}}} + m_2 \pi.$$

Результаты вычислений десяти частот для квадратной пластинки со сторонами $a_1 = a_2 = a$ показаны на рис. 13. Через c_* обозначен безразмерный коэффициент защемления:

$$c_* = \frac{ca}{2D}.$$

При $c_* \rightarrow 0$ получаем шарнирно опертую пластинку; при $c_* \rightarrow \infty$ получаем жестко защемленную пластинку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. «Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», № 1, 1960.
2. Ананьев И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. М., Гостехиздат, 1946.
3. Белоцерковский И. Я. Колебания пластин переменной жесткости. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Киев, Изд-во АН УССР, 1962.
4. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ППМ, т. 24, № 5, 1960.
5. Болотин В. В. и др. Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Сб. «Расчеты на прочность». Вып. 6. М., Машгиз, 1960.
6. Болотин В. В. Динамический краевой эффект при колебаниях упругих пластинок. Инженерный сборник, т. 31, 1961.
7. Болотин В. В. Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей. Сб. «Проблемы механики сплошной среды». Изд-во АН СССР, 1961.
8. Болотин В. В. Асимптотический метод в теории колебаний упругих пластин и оболочек. Труды Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Казань, КФАН СССР, 1961.
9. Болотин В. В. Обобщение асимптотического метода решения задач о собственных значениях для прямоугольных областей. Инженерный журнал, 1961, № 2.
10. Гонтикевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев, «Наукова Думка», 1964.
11. Гуменюк В. С. Определение частот свободных колебаний пластинок переменной толщины. Доклады АН УССР, № 1, 1956.
12. Дубинкин М. В. Колебания плит с учетом инерции вращения и сдвига. «Изв. АН СССР, ОТН», 1958, № 12.
13. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1953.
14. Кудрявцев Е. П. Применение асимптотического метода для исследования собственных колебаний упругих прямоугольных пластин. Сб. «Расчеты на прочность». Вып. 10. М., «Машиностроение», 1964.

15. Москаленко В. Н. К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях. «Инженерный журнал», т. 1, 1961, № 3.
 16. Москаленко В. Н. Собственные колебания трехслойных пластин, прямоугольных в плане. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд-во АН Армянской ССР, 1964.
 17. Москаленко В. Н., Чен-дэ-Лин. О собственных колебаниях многопролетных неразрезных пластинок. Прикладная механика, т. 1, № 3, 1965.
 18. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций. М., Стройиздат, 1956.
 19. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
 20. Филиппов А. П. Колебания механических систем. Киев, «Наукова Думка», 1965.
 21. Andersen B. W. Vibration of triangular cantilever plates by the Ritz method. Journ. Appl. Mech., vol. 21, n. 4, 1954.
 22. Barton M. V. Vibration of rectangular and skew cantilever plates. Journ. Appl. Mech., vol. 18, n. 1, 1951.
 23. Bolotin V. V. Vibration of layered elastic plates. Proc. vibr. probl., vol. 4, n. 4, 1963.
 24. Bolotin V. V. The density of eigenvalues in vibration problems of elastic plates and shells. Proc. vibr. probl., vol. 6, n. 4, 1965.
 25. Buchwald V. T. Low frequency of flexural vibrations in elastic plates. Quart. J. Mech. Appl. Math., vol. 12, n. 4, 1959.
 26. Cadambe V., Kumaraswami M., Kaul P. K., Transverse vibrations of thin cantilever plates of trapezoidal and triangular plan form. Journ. Inst. Engrs of India, n. 5, 1956.
 27. Christensen R. M. Vibration of a 45° right triangular cantilever plate by a gridwork method. AIAA Journ., vol. 1, n. 8, 1963.
 28. Eschler H. Zur Ermittlung der Eigenschwingungen der in ihrer Mittelebene belasteten Rechteckplatte. Ing.—Archiv, Bd 18, H. 5, 1950.
 29. Hu Nan-Chu, Herrmann G. Free flexural vibrations of rectangular elastic plates. Journ. Appl. Mech., vol. 23, n. 4, 1956.
 30. Iguchi S. Biegeschwingungen und Klangfiguren der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte. Ing.—Archiv, Bd 8, H. 1, 1937.
 31. Iguchi S. Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platte. Ing.—Archiv, Bd 21, H. 5—6, 1953.
 32. Kaul P. K., Cadambe V. The natural frequencies of thin skew plates. Aeron. Quart., vol. 74, n. 3, 1956.
 33. Klein B. Fundamental frequencies of arbitrarily shaped simply supported triangular plates of arbitrary plan form. Journ. Roy. Aeron. Soc., vol. 60, n. 544, 1956.
 34. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. Journ. Appl. Mech., vol. 18, n. 1, 1951.
 35. Odman S. T. A. Studies of boundary value problems, part II, Characteristic functions of rectangular plates, Sv. Forsk. Inst. for cem. arch. bet., Stockholm, 1955.
 36. Shibakoka G. On the transverse vibration of an elliptic plate with clamped edge. Journ. Phys. Soc. Japan, vol. 11, n. 7, 1956.
-

Глава 8

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Общие уравнения теории тонких упругих оболочек для динамического случая. Пусть оболочка отнесена к ортогональной системе координат x_1, x_2, x_3 с коэффициентами Ламе $H_1, H_2, H_3 = 1$ (рис. 1), причем координатные линии на срединной поверхности (x_1 - и x_2 -линии) совпадают с линиями главных кривизн с радиусами кривизны R_1 и R_2 . Тогда в рамках гипотез Кирхгофа-Лява дифференциальные уравнения колебаний оболочки будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (N_{11} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (N_{21} H_1)}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - N_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - \\
 & \quad - \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (N_{12} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (N_{22} H_1)}{\partial x_2} - N_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + N_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - \\
 & \quad - \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (Q_1 H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (Q_2 H_1)}{\partial x_2} \right] + \\
 & \quad + \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} - q_3 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (M_{11} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (M_{21} H_1)}{\partial x_2} + \right. \\
 & \quad \left. + M_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - M_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - Q_1 = 0; \\
 & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (M_{12} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (M_{22} H_1)}{\partial x_2} - M_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \right. \\
 & \quad \left. + M_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] - Q_2 = 0; \\
 & N_{12} - N_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где H_1 и H_2 — параметры Ламе.

Связь усилий в срединной поверхности N_{11} , N_{22} , N_{12} , N_{21} и моментов M_{11} , M_{12} , $M_{12} = M_{21}$ с деформациями срединной поверхности ε_{11} ,

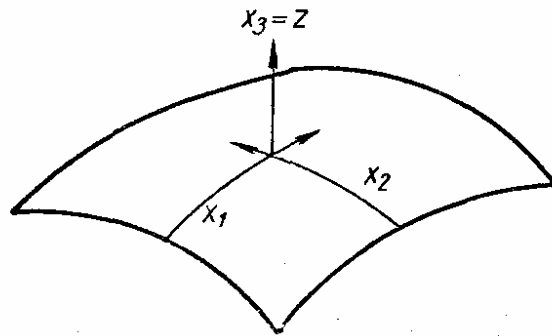


Рис. 1

ε_{22} , $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ и изменениями кривизн κ_{11} , κ_{22} , $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ определяется в случае изотропной оболочки следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \\ N_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}); \\ N_{12} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(\varepsilon_{12} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\kappa_{12}}{R_2} \right); \\ N_{21} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(\varepsilon_{12} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\kappa_{12}}{R_1} \right); \\ M_{11} &= D (\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}); \\ M_{22} &= D (\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}); \\ M_{12} &= D (1-\nu) \kappa_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти выражения удовлетворяют шестому уравнению системы (1) и дополнительным условиям, связанным с обоснованием энергетических принципов.

Компоненты деформации и изменений кривизн срединной поверхности можно выразить через компоненты смещения u_1 , u_2 , $u_3 = w$:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} u_2 + \frac{w}{R_1}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{w}{R_2}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{11} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) + \\
 &+ \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right); \\
 \kappa_{22} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) + \\
 &+ \frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right); \\
 \kappa_{12} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) - \right. \\
 &\left. - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) - \frac{H_1}{R_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{H_2}{R_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right].
 \end{aligned} \quad (4)$$

Углы поворота определяют по формулам

$$\theta_1 = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{u_1}{R_1}; \quad \theta_2 = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{u_2}{R_2}. \quad (5)$$

Потенциальная энергия деформации оболочки

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2)] + \right. \\
 &\left. + D [(\kappa_{11} + \kappa_{22})^2 - 2(1-\nu)(\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2)] \right\} H_1 H_2 dx_1 dx_2. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho h \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] H_1 H_2 dx_1 dx_2. \quad (7)$$

Классификация граничных условий. На каждом краю оболочки может быть задан один из 16 видов однородных граничных условий. Эти виды для края $x_1 = \text{const}$ определяются всеми возможными комбинациями следующих четырех условий (табл. 1):

$$w = 0 \quad \text{или} \quad Q_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad (8)$$

$$\theta_1 = 0 \quad \text{или} \quad M_{11} = 0; \quad (9)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{или} \quad N_{11} = 0; \quad (10)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{или} \quad N_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0. \quad (11)$$

Наиболее распространенными являются условия Навье

$$w = M_{11} = N_{11} = u_2 = 0;$$

условия заделки

$$w = \theta_1 = u_1 = u_2 = 0;$$

1. Граничные условия для края $x_1 = \text{const}$ оболочки

Обозначение	Название	Краевые условия
S	Опертый край, свободный в направлении x_1 (условия Навье)	$w = 0; M_{11} = 0;$ $N_{11} = 0; u_2 = 0$
S_*	Опертый неподвижный край	$w = 0; M_{11} = 0;$ $u_1 = 0; u_2 = 0$
S_0	Опертый край, свободный в тангенциальных направлениях	$w = 0; M_{11} = 0;$ $N_{11} = 0; N_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$
C	Полностью защемленный край	$w = 0; \theta_1 = 0;$ $u_1 = 0; u_2 = 0$
C_*	Защемленный край, свободный в направлении x_1	$w = 0; \theta_1 = 0;$ $N_{11} = 0; u_2 = 0$
C_0	Защемленный край, свободный в тангенциальных направлениях	$w = 0; \theta_1 = 0;$ $N_{11} = 0; N_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$
C_1	Защемленный край, свободный в направлении x_2	$w = 0; \theta_1 = 0;$ $u_1 = 0; N_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$
F	Свободный край	$Q_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0; M_{11} = 0;$ $N_{11} = 0; N_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0$

условия свободного края

$$Q_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = M_{11} = N_{11} = N_{12} - \frac{1}{R_2} M_{12} = 0.$$

Другие виды граничных условий (условия упругой заделки и т. п.) отличаются от указанных тем, что в них краевые усилия могут совершать работу на перемещениях оболочки.

Уравнения безмоментной теории для динамического случая. Пусть для некоторых форм колебаний напряжения изгиба пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями, связанными с усилиями в срединной поверхности. Тогда можно использовать дифференциальные уравнения безмоментной теории оболочек, получающиеся из уравнений (1)

путем пренебрежения изгибающими моментами $M_{\alpha\beta}$ и перерезывающими силами Q_α :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (N_{11} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (N_{21} H_1)}{\partial x_2} + \right. \\ & \left. + N_{12} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - N_{22} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] + q_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (N_{12} H_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (N_{22} H_1)}{\partial x_2} - N_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \right. \\ & \left. + N_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right] + q_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ & \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} - q_3 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Соотношения упругости могут быть получены из формул (2) путем пренебрежения членами, содержащими компоненты изменения кривизн $\kappa_{\alpha\beta}$.

Количество граничных условий для безмоментной теории оболочек должно быть понижено вдвое. Так, из граничных условий (см. стр. 420) следует сохранить только комбинации условий (10) и (11).

Уравнения теории пологих оболочек для динамического случая. Пусть колебания носят преимущественно изгибный характер. Тогда в выражениях (4) для компонентов изменения кривизны можно пренебречь вкладом тангенциальных компонентов вектора смещения

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2}; \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1^2 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1}; \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Кроме того, можно пренебречь в первых двух уравнениях систем (1) тангенциальными силами инерции и перерезывающими силами Q_1, Q_2 . Тогда в предположении, что тангенциальные компоненты внешних сил q_1, q_2 равны нулю, можно ввести функцию напряжений χ по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{H_1^2 H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}; \\ N_{22} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial \chi}{\partial x_2}; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$N_{12} = N_{21} = - \left. \begin{aligned} & \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если исключить из уравнений (1) усилия по формулам (14) и моменты по формулам (2) и (13) и добавить уравнение совместности деформаций, то система дифференциальных уравнений будет

$$\left. \begin{aligned} D \Delta \Delta w + \Delta_k \chi + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p; \\ \frac{1}{Eh} \Delta \Delta \chi - \Delta_k w &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

здесь $p = q_3$ — нормальная компонента внешней нагрузки. Оператор Лапласа Δ и оператор Δ_k определяют по формулам

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right];$$

$$\Delta_k = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1 R_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2 R_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right].$$

Дифференциальные уравнения (15) в литературе называют уравнениями пологих оболочек, уравнениями теории краевого эффекта, а также уравнениями для состояний с большим показателем изменчивости.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Дифференциальные уравнения колебаний в перемещениях. Пусть в качестве координат на срединной поверхности цилиндрической оболочки выбрана координата $x_1 = x$ вдоль образующей и длина дуги $x_2 = s$ в окружном направлении (рис. 2). Тогда коэффициенты Ламе H_1, H_2 будут равны единице. Радиус кривизны R_1 обращается в бесконечность, радиус кривизны $R_2 = R = \text{const.}$

Уравнения колебаний круговой цилиндрической оболочки в перемещениях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

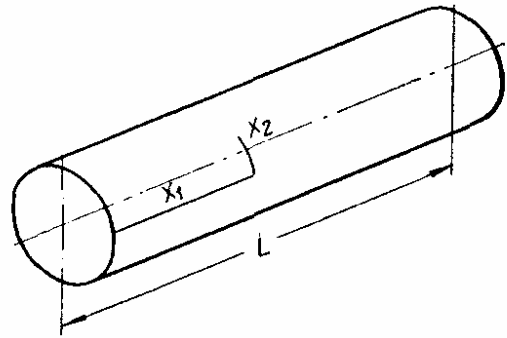


Рис. 2

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \right. \\
& + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial s} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \Big) + \frac{D}{R^2} \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \right. \\
& + \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} - (2-\nu) R \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s} - R \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \Big] = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\
& \frac{1}{R} \cdot \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{w}{R} \right) + \\
& + D \left\{ \Delta \Delta w - \frac{1}{R} \left[(2-\nu) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial s} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3} \right] \right\} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Уравнения безмоментной теории оболочек получаются, если в уравнениях (16) опустить все члены с множителем D . Уравнения пологой оболочки получаются при пренебрежении членами в квадратных скобках.

О применении упрощенных дифференциальных уравнений теории оболочек. Пусть решения уравнений колебаний цилиндрической оболочки (16) могут быть представлены в форме

$$\left. \begin{aligned}
u_1 &= U_1 e^{\lambda \xi} \cos m \varphi e^{i \omega t}; \\
u_2 &= U_2 e^{\lambda \xi} \sin m \varphi e^{i \omega t}; \\
w &= W e^{\lambda \xi} \cos m \varphi e^{i \omega t}; \\
\left(\xi &= \frac{x}{R}; \quad \varphi = \frac{s}{R} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Подставляя выражение (17) в уравнения (16), можно найти связь между комплексными постоянными U_1 , U_2 , W :

$$\psi_1 U_1 = -\lambda \psi_2 W, \quad \psi_1 U_2 = -m \psi_3 W \quad (18)$$

и характеристическое уравнение

$$\omega_*^6 - b \omega_*^4 + c \omega_*^2 - d = 0. \quad (19)$$

Здесь для сокращения приняты обозначения

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \psi_{10} + \delta^2 \left\{ 2(1-\nu) \left[\lambda^4 - \frac{2-2\nu+\nu^2}{2(1-\nu)} m^2 \lambda^2 + \frac{m^4}{4} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \omega_*^2 [2(1-\nu) \lambda^2 - m^2] \right\}; \\
\psi_{10} &= [\omega_*^2 + \lambda^2 - m^2] \left[\omega_*^2 + \frac{1-\nu}{2} (\lambda^2 - m^2) \right]; \\
\psi_2 &= \psi_{20} - \delta^2 \left\{ \frac{1+\nu}{2} m^2 [(2-\nu) \lambda^2 - m^2] - \nu [2(1-\nu) \lambda^2 - m^2] \right\}; \\
\psi_{20} &= \nu \omega_*^2 + \frac{1-\nu}{2} (\nu \lambda^2 + m^2);
\end{aligned}$$

$$\psi_3 = \psi_{30} + \delta^2 \left\{ \omega_*^2 [(2 - \nu) \lambda^2 - m^2] + (2 - \nu) \lambda^4 - \right. \\ \left. - (2 - 1,5\nu + 0,5\nu^2) m^2 \lambda^2 + \frac{1 - \nu}{2} m^4 \right\};$$

$$\psi_{30} = -\omega_*^2 + \frac{1 - \nu}{2} [m^2 - (2 + \nu)^2];$$

$$b = b_0 + \delta^2 [(\lambda^2 + m^2)^2 - 2(1 - \nu) \lambda^2 + m^2];$$

$$b_0 = 1 - \frac{3 - \nu}{2} (\lambda^2 - m^2);$$

$$c = c_0 - \delta^2 \left[\frac{3 - \nu}{2} (\lambda^2 - m^2)^3 - 2(1 - \nu) \lambda^4 - \right. \\ \left. - (2 - \nu^2) m^2 \lambda^2 + \frac{3 + \nu}{2} m^4 \right];$$

$$c_0 = \frac{1 - \nu}{2} [-(3 + 2\nu) \lambda^2 + m^2 + (\lambda^2 - m^2)^2];$$

$$d = d_0 - \frac{1 - \nu}{2} \delta^2 [-8m^4 \lambda^2 + (8 - 2\nu^2) m^2 \lambda^4 + 4m^2 \lambda^2];$$

$$d_0 = d_0^* + \frac{1 - \nu}{2} \delta^2 (-2m^6 + m^4);$$

$$d_0^* = \frac{1 - \nu}{2} [(1 - \nu^2) \lambda^4 + \delta^2 (\lambda^2 - m^2)^4];$$

$$\delta^2 = \frac{h^2}{12R^2}; \quad \omega_* = \omega R \left[\frac{\rho(1 - \nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Во многих случаях корни λ_k ($k = 1, \dots, 8$) характеристического уравнения (19) можно разбить на большие $\bar{\lambda}$ и малые λ .

В общем случае произвольных краевых условий задача об определении частот и форм собственных колебаний приводит к сложной краевой задаче. Если допустить асимптотическую погрешность $\varepsilon = \delta^{\frac{1}{2}}$ и использовать методы асимптотического интегрирования, то основное уравнение можно упростить. Эта задача рассмотрена У. К. Нигулом [25].

Наименьшую собственную частоту можно найти приближенно по формуле

$$\omega_* = \left(\frac{D}{d_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

совместно с формулой

$$m \approx \delta^{-\frac{1}{4}} (|\min \lambda|)^{\frac{1}{2}},$$

Граничные условия Навье. Задача определения собственных частот и форм колебаний цилиндрической оболочки существенно упрощается, если оболочка занимает прямоугольную область ($x_1 \leq x \leq x_2$, $s_1 \leq s \leq s_2$), а граничные условия являются условиями Навье. Для замкнутой цилиндрической оболочки длины l ($0 \leq x \leq l$) граничным условиям Навье удовлетворяют смещения, задаваемые формулами

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_{10} \cos \frac{\pi m_1 x}{l} \sin \frac{m_2 s}{R} e^{i\omega t}; \\ u_2 &= u_{20} \sin \frac{\pi m_1 x}{l} \cos \frac{m_2 s}{R} e^{i\omega t}; \\ \omega &= \omega_0 \sin \frac{\pi m_1 x}{l} \sin \frac{m_2 s}{R} e^{i\omega t} \\ (m_1, m_2 &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подставляя выражения (20) в уравнения колебаний (16) и требуя, чтобы постоянные u_{10} , u_{20} , ω_0 не обращались одновременно в нуль, можно найти уравнение частот

$$\omega_*^6 - k_2 \omega_*^4 + k_1 \omega_*^2 - k_0 = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{2} (1 - \nu)^2 (1 + \nu) \lambda^4 + \frac{1}{2} (1 - \nu) \delta^2 [(\lambda^2 + m_2^2)^4 - \\ &\quad - 2(4 - \nu^2) \lambda^4 m_2^2 - 8\lambda^2 m_2^4 - 2m_2^6 + 4(1 - \nu^2) \lambda^4 + \\ &\quad + 4\lambda^2 m_2^2 + m_2^4]; \\ k_1 &= \frac{1}{2} (1 - \nu) (\lambda^2 + m_2^2)^2 + \frac{1}{2} (3 - \nu - 2\nu^2) \lambda^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 - \nu) m_2^2 + \delta^2 \left[\frac{1}{2} (3 - \nu) (\lambda^2 + m_2^2)^3 + 2(1 - \nu) \lambda^4 - \right. \\ &\quad \left. - (2 - \nu^2) \lambda^2 m_2^2 - \frac{1}{2} (3 + \nu) m_2^4 + 2(1 - \nu) \lambda^2 + m_2^2 \right]; \\ k_2 &= 1 + \frac{1}{2} (3 - \nu) (\lambda^2 + m_2^2) + \delta^2 [(\lambda^2 + m_2^2)^2 + \\ &\quad + 2(1 - \nu) \lambda^2 + m_2^2]; \\ \lambda &= \frac{\pi m_1 R}{l}; \quad \delta^2 = \frac{h^2}{12R^2}; \quad \omega_* = R\omega \left[\frac{\rho(1 - \nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Это уравнение дает три значения частоты, соответствующих одним и тем же значениям волновых чисел m_1 и m_2 . Соответствующие формы колебаний обычно можно разбить на одну преимущественно изгибную и две преимущественно тангенциальные. Если k_0 достаточно мало, то наименьший корень уравнения (21) может быть определен по формуле

$$\omega_*^2 \approx \frac{k_0}{k_1}$$

или по уточненной формуле

$$\omega_*^2 = \frac{k_0}{k_1} + \left(\frac{k_0}{k_1} \right)^2 \frac{k_2}{k_1}.$$

Решение этой задачи дано Арнольдом и Уорбертоном [33]. Результаты вычислений приведенных частот

$$\omega_* = \omega R \left[\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}}$$

показаны на рис. 3—5.

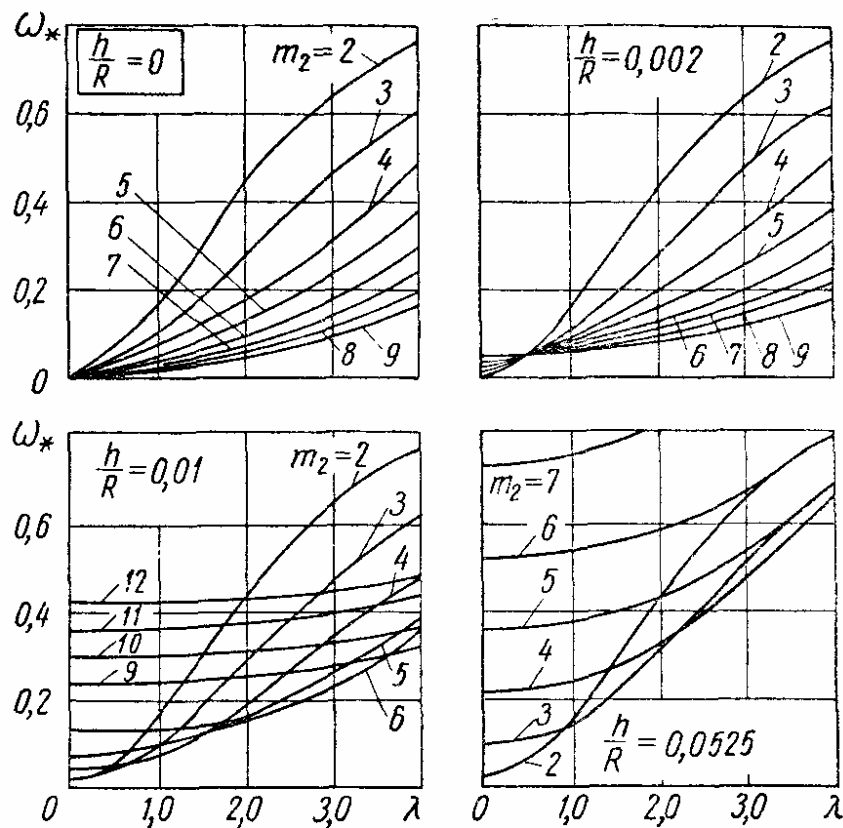


Рис. 3

В табл. 2 даны результаты вычислений Бароном и Блейхом [34] безразмерных частот

$$\omega_{0*} = \omega R \left(\frac{\rho}{G} \right)^{\frac{1}{2}}$$

и соответствующих форм колебаний.

Пусть колебания с достаточной степенью точности описываются уравнениями теории пологих оболочек, и тангенциальными силами инерции можно пренебречь. Тогда уравнение частот примет вид

$$\omega_* = \frac{\delta}{\lambda^2 + m^2} \left[(\lambda^2 + m^2)^2 (\lambda^2 + m^2 - 1)^2 + \lambda^4 \frac{4(1 - \nu^2)}{\delta^2} \right]. \quad (22)$$

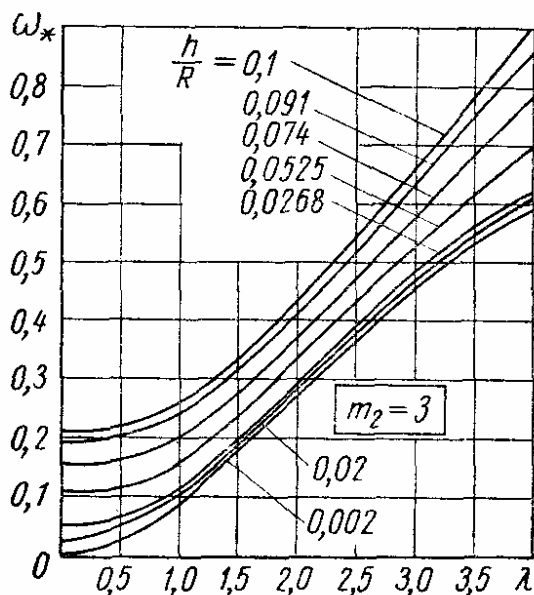
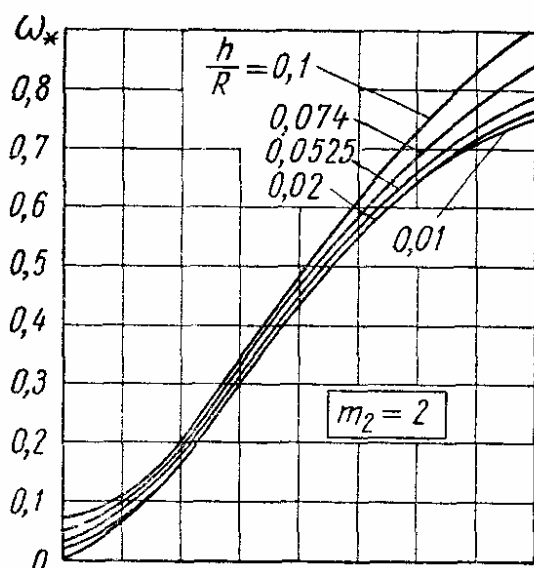


Рис. 4

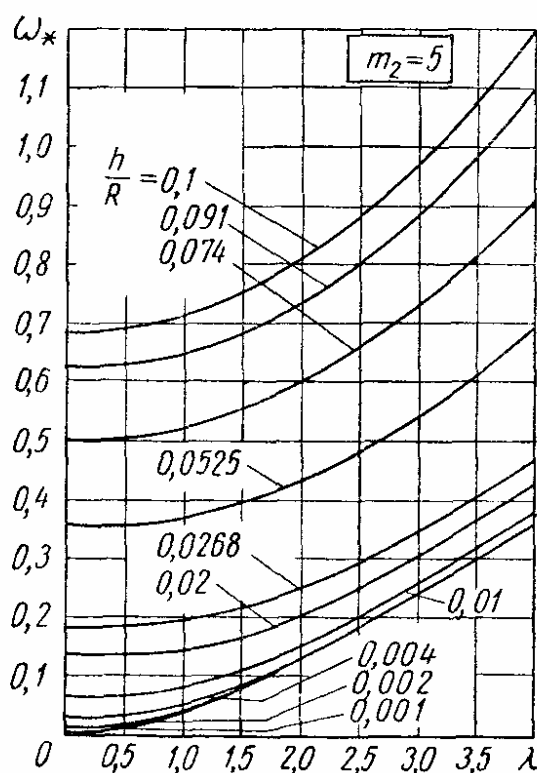
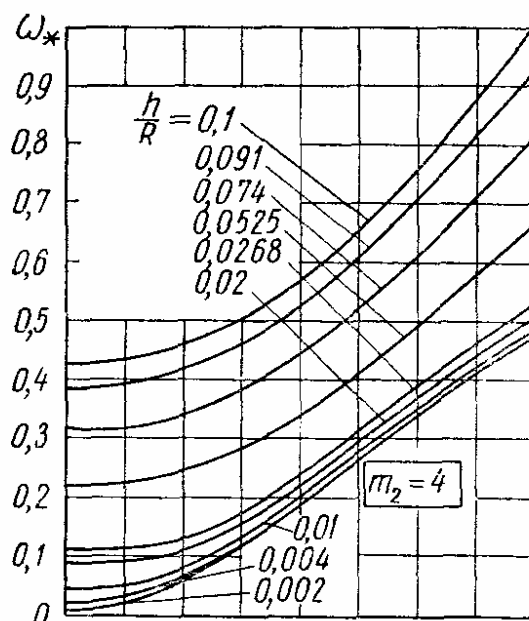


Рис. 5

Эта задача рассмотрена Яманом [48].

Другие типы краевых условий. Точные решения. Пусть краевые условия на торцах замкнутой круговой цилиндрической оболочки отличаются от условий Навье. Удобно исходить из уравнений пологих оболочек, сохраняя все инерционные члены [для этого в уравнениях (16)

2. Частоты $\omega_{0*} = \omega R \left(\frac{\rho}{G} \right)^{\frac{1}{2}}$ и формы колебаний замкнутой опертой круговой цилиндрической оболочки длины l ($\nu = 0,3$)

А. $m_2 = 0$									
$\frac{l}{R}$		Тип колебаний				Осесимметричные			
		Крутильные		Серия частот		Серия частот		Серия частот	
		1		2		3		3	
		ω_{0*}	$u_1 = u_3$	ω_{0*}	$\frac{u_3}{u_1}$	ω_{0*}	$\frac{u_3}{u_1}$	ω_{0*}	$\frac{u_3}{u_1}$
1,0	3,142	0	1,604	-9,510	0	5,338	0,1052	0	0
1,25	2,513	0	1,599	-7,186	0	4,284	0,1392	0	0
1,5	2,094	0	1,592	-5,567	0	3,586	0,1797	0	0
1,75	1,795	0	1,582	-4,354	0	3,093	0,2297	0	0
2,0	1,571	0	1,569	-3,406	0	2,729	0,2936	0	0
2,25	1,396	0	1,551	-2,643	0	2,455	0,3783	0	0
2,5	1,257	0	1,525	-2,028	0	2,246	0,4931	0	0
2,75	1,142	0	1,490	-1,539	0	2,090	0,6497	0	0
3,0	1,047	0	1,445	-1,165	0	1,976	0,8580	0	0
3,5	0,8976	0	1,324	-0,7025	0	1,844	1,422	0	0
4,0	0,7854	0	1,201	-0,4760	0	1,783	2,101	0	0
5,0	0,6283	0	0,9869	-0,2862	0	1,736	3,495	0	0
6,0	0,5236	0	0,8309	-0,2073	0	1,718	4,825	0	0
7,0	0,4488	0	0,7158	-0,1642	0	1,709	6,093	0	0
8,0	0,3927	0	0,6282	-0,1368	0	1,704	7,308	0	0
9,0	0,3491	0	0,5595	-0,1177	0	1,700	8,490	0	0
10,0	0,3142	0	0,5042	-0,1035	0	1,699	9,661	0	0
∞	0	0	0	0	0	1,691	$u_1 = u_2 = 0$	0	0

Продолжение табл. 2

Б. $m_2 = 1$									
$\frac{l}{R}$		Крутильные			Тип колебаний			Осесимметричные	
					Серия частот				
		1			2			3	
		ω_{0*}	$\frac{u_2}{u_1}$	$\frac{u_3}{u_1}$	ω_{0*}	$\frac{u_2}{u_1}$	$\frac{u_3}{u_1}$	ω_{0*}	$\frac{u_2}{u_1}$
									$\frac{u_3}{u_1}$
1,0	1,428	—5,106	—21,14	3,357	2,784	—0,6252	5,611	—0,3306	0,0144
1,25	1,322	—14,77	—40,01	2,813	2,048	—0,7310	4,628	—0,4236	0,0271
1,5	1,203	39,13	78,00	2,483	1,533	—0,7820	4,003	—0,5245	0,2503
1,75	1,082	10,51	16,88	2,266	1,161	—0,7819	3,584	—0,6350	0,3359
2,0	0,9682	6,756	9,352	2,109	0,8885	—0,7488	3,294	—0,7555	0,4889
2,25	0,8660	5,300	6,616	1,987	0,6870	—0,7014	3,088	—0,8556	0,5582
2,5	0,7761	4,537	5,271	1,886	0,5367	—0,6517	2,941	—1,024	0,6914
2,75	0,6979	4,078	4,503	1,799	0,4234	—0,6056	2,833	—1,167	0,8352
3,0	0,6300	3,778	4,023	1,724	0,3368	—0,5649	2,753	—1,315	0,9864
3,5	0,5193	3,430	3,490	1,599	0,2168	—0,4996	2,645	—1,615	1,301
4,0	0,4342	3,259	3,236	1,501	0,1406	—0,4505	2,579	—1,917	1,621
5,0	0,3150	3,159	3,077	1,363	0,0552	—0,3816	2,506	—2,515	2,257
6,0	0,2377	3,126	3,121	1,273	0,0128	—0,3336	2,469	—3,104	2,878
7,0	0,1852	3,352	3,256	1,212	—0,0096	—0,2972	2,447	—3,684	3,485
8,0	0,1478	3,535	3,443	1,169	—0,0219	—0,2679	2,434	—4,258	4,081
9,0	0,1205	3,747	3,661	1,138	—0,0287	—0,2438	2,424	—4,828	4,669
10,0	0,09990	3,980	3,899	1,114	—0,0322	—0,2236	2,418	—5,395	5,250
∞	0	$u_3 = u_3, u_1 = 0$		1,000	$3,72 u_2 = u_3 = 0$		$u_2 = -u_3, u_1 = 0$		

Продолжение табл. 2

В. $m_2 = 2$; $\omega_{0*} = \omega' \left(1 + z \frac{h^2}{R^2}\right) - \frac{1}{2}$										
Серия частот										
$\frac{l}{R}$	1			2			3			
	ω'	z	$\frac{u_2}{u_1}$	$\frac{u_3}{u_1}$	ω_{0*}	$\frac{u_2}{u_1}$	$\frac{u_3}{u_1}$	ω_{0*}	$\frac{u_2}{u_1}$	$\frac{u_3}{u_1}$
1,0	1,102	30,85	11,57	38,63	3,840	1,394	-0,4434	6,357	-0,6686	0,1726
1,25	0,9276	21,59	5,953	15,95	3,362	1,047	-0,4532	5,523	-0,8459	0,2530
1,5	0,7773	18,34	4,496	10,60	3,063	0,8176	-0,4409	5,523	-1,037	0,3453
1,75	0,6535	17,65	3,873	8,472	2,858	0,6590	-0,4193	4,704	-1,234	0,4459
2,0	0,5530	18,44	3,560	7,445	2,709	0,5453	-0,3950	4,491	-1,434	0,5515
2,25	0,4717	...	3,399	6,918	2,595	0,4613	-0,3712	4,342	-1,637	0,6598
2,5	0,4056	23,19	3,324	6,654	2,506	0,3975	-0,3489	4,235	-1,840	0,7692
2,75	0,3515	...	3,303	6,547	2,435	0,3480	-0,3283	4,156	-2,044	0,8788
3,0	0,3070	31,96	3,319	6,539	2,378	0,3087	-0,3096	4,095	-2,248	0,9883
3,5	0,2389	...	3,421	6,706	2,292	0,2508	-0,2771	4,011	-2,656	1,206
4,0	0,1904	64,77	3,582	7,018	2,231	0,2107	-0,2500	3,956	-3,053	1,420
5,0	0,1283	127,0	4,006	7,869	2,155	0,1594	-0,2082	3,893	-3,868	1,842
6,0	0,09178	233,1	4,504	8,876	2,110	0,1282	-0,1777	3,858	-3,671	2,257
7,0	0,06871	400,8	5,042	9,965	2,083	0,1074	-0,1547	3,837	-5,470	2,667
8,0	0,05326	651,3	5,605	11,10	2,064	0,0925	-0,1368	3,824	-6,268	3,074
9,0	0,04245	1009	6,184	12,27	2,051	0,0813	-0,1225	3,815	-7,063	3,478
10,0	0,03461	1501	6,775	13,46	2,041	0,0725	-0,1408	3,808	-7,858	3,881
∞	0	...	$u_3 = 2u_2, u_1 = 0$		2,000	$u_2 = u_3 = 0, u_1 = -1,53u_2$		3,780	$u_2 = -2u_3, u_1 = 0$	

опустим члены в квадратных скобках]. Решение уравнений может быть записано в форме

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U_1(\alpha) \cos n\varphi e^{i\omega t}; \quad u_2 = U_2(\alpha) \sin n\varphi e^{i\omega t}; \\ \omega &= W(\alpha) \cos n\varphi e^{i\omega t}; \\ U_1 &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} k_{jn}^{(1)} e^{\lambda_{jn}\alpha}; \quad U_2 = \sum_{j=1}^8 C_{jn} k_{jn}^{(2)} e^{\lambda_{jn}\alpha}; \\ W &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} e^{\lambda_{jn}\alpha}; \quad \left(\alpha = \frac{x}{R}; \quad \varphi = \frac{s}{R} \right), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где n — число волн в окружном направлении; $k_{jn}^{(i)}$ — постоянные; λ_{jn} — корни характеристического уравнения

$$b_0 \lambda^8 + b_1 \lambda^6 + b_2 \lambda^4 + b_3 \lambda^2 + b_4 = 0, \quad (24)$$

коэффициенты которого зависят от параметров оболочки и от безразмерного параметра частоты

$$\omega_* = R\omega \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}$$

следующим образом:

$$b_0 = \frac{1-\nu}{2} \delta^2; \quad b_1 = \delta^2 (a_{12}^2 - a_{22}) + \frac{1-\nu}{2} (\delta^2 a_{11} - d);$$

$$b_2 = \frac{1-\nu}{2} (a_{33} - a_{11}d - \nu^2) + d(a_{22} - a_{12}^2) - \delta^2 a_{11}a_{22};$$

$$b_3 = a_{33} \left(\frac{1-\nu}{2} a_{11} + a_{12}^2 - a_{22} \right) + a_{22} (a_{11}d + \nu^2) +$$

$$+ a_{23} (a_{23} - 2\nu a_{12});$$

$$b_4 = a_{11} (a_{23}^2 - a_{22}a_{33}),$$

где

$$a_{11} = \omega_*^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2; \quad a_{12} = \frac{1+\nu}{2} n; \quad a_{22} = n^2 - \omega_*^2;$$

$$a_{23} = n; \quad a_{33} = 1 + n^4 \delta^2 - \omega_*^2; \quad d = 2n^2 \delta^2; \quad \delta^2 = \frac{h^2}{12R^2}.$$

Каждому корню λ_{jn} характеристического уравнения (24) будут соответствовать следующие значения коэффициентов:

$$k_{jn}^{(1)} = \frac{\Delta_{jn}^{(1)}}{\Delta_{jn}}; \quad k_{jn}^{(2)} = \frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}},$$

здесь

$$\Delta = -\frac{1-\nu}{2} \lambda^4 + \left(a_{22} - \frac{1-\nu}{2} a_{11} - a_{12}^2 \right) \lambda^2 + a_{11} a_{22};$$

$$\Delta^{(1)} = \lambda \left(\frac{1-\nu}{2} \nu \lambda^2 + a_{12} a_{23} - \nu a_{22} \right);$$

$$\Delta^{(2)} = \lambda^2 (\nu a_{12} - a_{23}) - a_{11} a_{23}.$$

Удовлетворение граничным условиям (по четыре условия на каждом из краев $\alpha = 0$ и $\alpha = \gamma = \frac{l}{R}$) приводит к системе восьми однородных уравнений относительно постоянных интегрирования C_{jn} . Приравнявая нулю определитель этой системы, можно получить уравнение частот. Эта задача рассмотрена Ю. Ю. Швейко, Ю. В. Гавриловым и А. Д. Брусиловским [31], а также Форсбергом [36].

Зависимость частот первого тона колебаний для различных видов граничных условий показана на рис. 6—10. На рис. 7 штрих-пунктирной линией показаны приближенные результаты Арнольда и Уорбертона [33].

Обозначения граничных условий см. в табл. 1.

Сопоставление форм собственных колебаний цилиндрической оболочки при различных условиях на торцах показано на рис. 11.

Минимальные частоты колебаний замкнутой цилиндрической оболочки, защемленной по краям, приведены в табл. 3. Для сопоставления даны минимальные частоты для опертой оболочки. В скобках указано соответствующее число волн в окружном направлении.

Сопоставление с большим количеством данных вычислений показало, что для приближенного (с погрешностью до 5%) определения значений минимальных частот колебаний оболочек с защемленными торцами в диапазоне безразмерных параметров $1 \leq \frac{l}{R} \leq 10$, $100 \leq \frac{R}{h} \leq 800$ можно использовать следующую полуэмпирическую формулу [31]:

$$\omega_*^2 = \delta^2 (n^2 + \psi^2)^2 + (1 - \nu^2) \frac{\psi^4}{(n^2 + \psi^2)^2},$$

где

$$\psi = \frac{\pi}{\gamma} (1 + q); \quad \gamma = \frac{l}{R}.$$

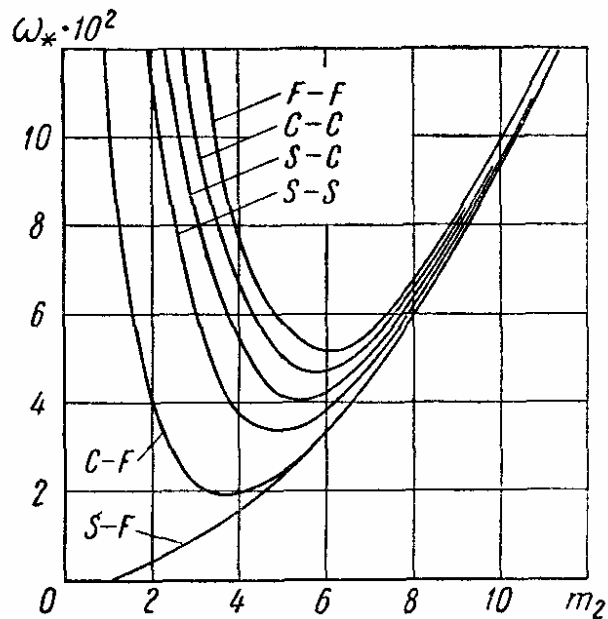


Рис. 6

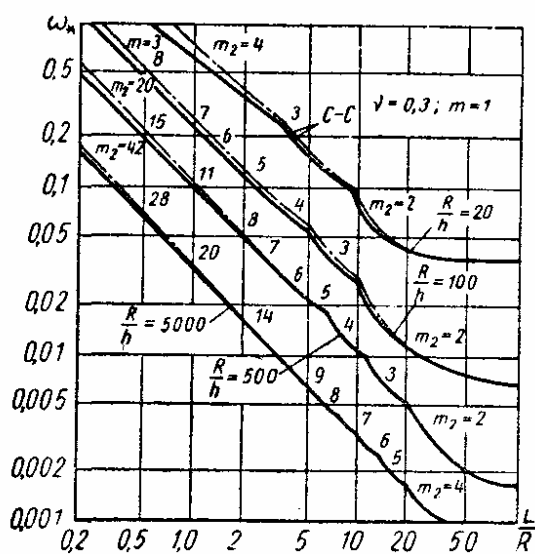


Рис. 7

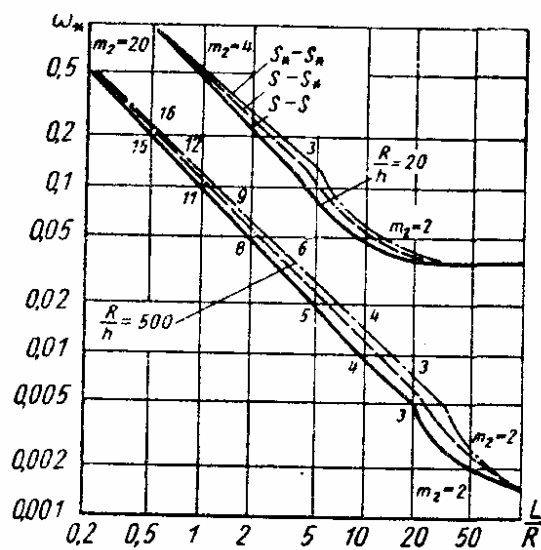


Рис. 8

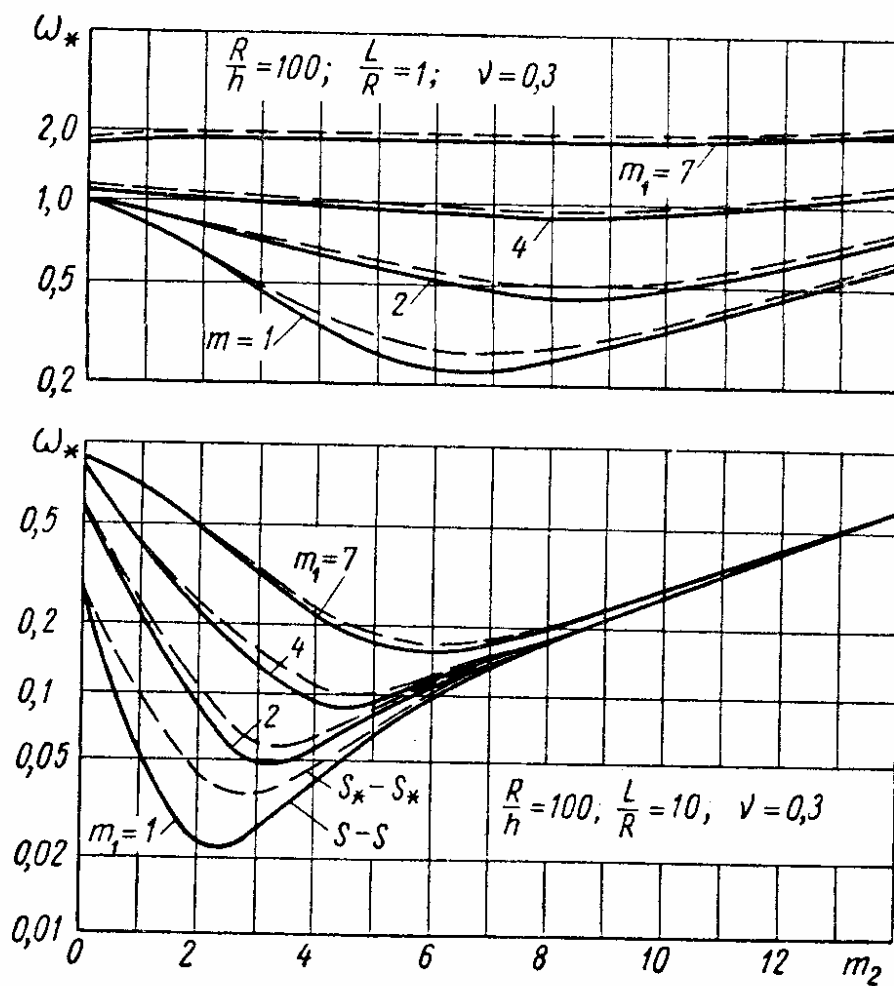


Рис. 9

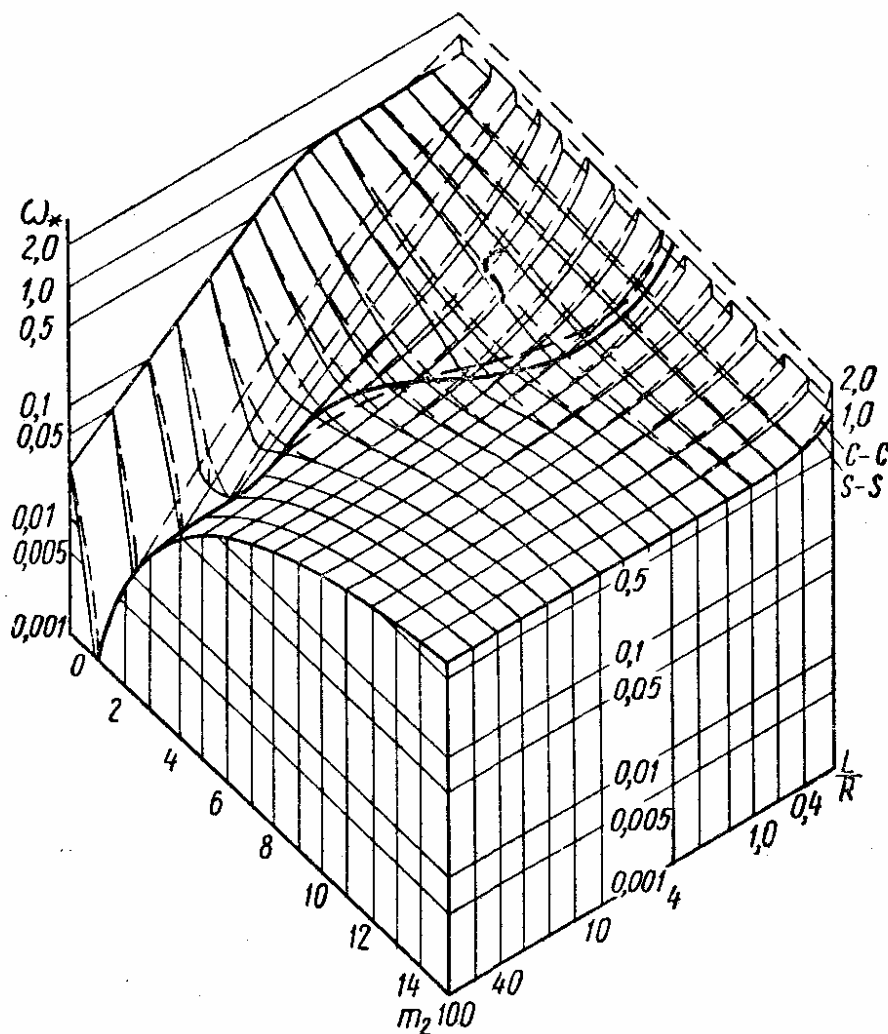


Рис. 10

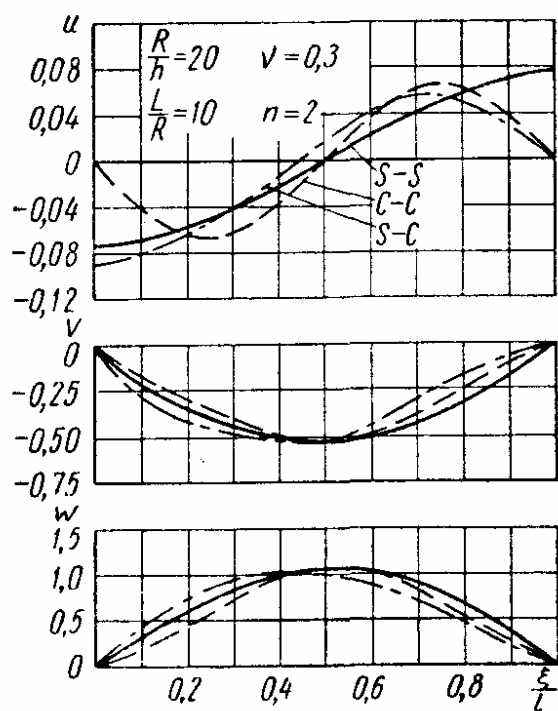


Рис. 11

Коэффициент q принимает значения

$$q = \begin{cases} 0,3 & \text{при } 1 \leq \gamma \leq 2, 100 \leq \frac{R}{h} \leq 200; \\ 0,38 & \text{при } 1 \leq \gamma \leq 2, 200 \leq \frac{R}{h} \leq 500; \\ 0,42 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Другие типы граничных условий. Применение вариационных методов. В общем случае произвольных граничных условий для определения собственных частот и форм колебаний могут быть использованы вариационные методы. Ниже дано применение метода Ритца в случае замкнутой цилиндрической оболочки.

Потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi R} \{ N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + 2N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \kappa_{11} + \\ + M_{22} \kappa_{22} + 2M_{12} \kappa_{12} \} dx ds.$$

Максимум кинетической энергии будет

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi R} \rho h \omega^2 (u_1^2 + u_2^2 + w^2) dx ds.$$

Приближенные решения удобно искать в классе произведений балочных функций переменной x и синусоидальных функций переменной s :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= C_{1m} \frac{l}{\lambda_m} F'_m \left(\frac{\lambda_m x}{l} \right) \cos \frac{ns}{R}; \\ u_2 &= C_{2m} F_m \left(\frac{\lambda_m x}{l} \right) \sin \frac{ns}{R}; \\ w &= C_{3m} F_m \left(\frac{\lambda_m x}{l} \right) \cos \frac{ns}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

При этом балочные функции должны удовлетворять граничным условиям, соответствующим рассматриваемым граничным условиям для оболочки.

Условия минимума дроби Рэлея дают

$$\frac{\partial}{\partial C_{jm}} (U - \omega^2 T) = 0 \quad (j = 1, 2, 3);$$

отсюда можно найти уравнение частот в виде

$$\omega_*^6 - k_2 \omega_*^4 + k_1 \omega_*^2 - k_0 = 0.$$

Если k_0 достаточно мало, то приближенное значение для наименьшего корня можно найти по формуле

$$\omega_*^2 = \frac{k_0}{k_1} + \left(\frac{k_0}{k_1} \right)^2 \frac{k_2}{k_1},$$

здесь

$$\omega_* = R \omega \left[\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\begin{aligned} \beta k_0 = & \alpha \lambda^4 (1 - \nu^2 \gamma^2) + \delta^2 \{ [\alpha n^2 + \lambda^2 (1 - \nu^2 \gamma^2)] (n^2 + 4\alpha \lambda^2) + \\ & + [(\alpha n^2 + \lambda^2) (n^2 + \alpha \lambda^2) - n^2 \lambda^2 (\alpha - \nu \gamma)^2] \times \\ & \times (\lambda^4 - 2\nu n^2 \gamma \lambda^2 + 4\alpha n^2 \lambda^2 + n^4) - \\ & - n^2 [2(\lambda^2 + \alpha n^2) + 2(\alpha - \nu \gamma) \nu \gamma \lambda^2] [n^2 + (4\alpha - \nu \gamma) \lambda^2] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta k_1 = & (\lambda^2 + \alpha n^2) (\alpha \lambda^2 + n^2 + 1) + \alpha \beta \lambda^2 - \\ & - \nu^2 \gamma^2 \lambda^2 - n^2 \lambda^2 (\alpha - \nu \gamma)^2 + \delta^2 \{ [\lambda^2 + (\alpha + \beta) n^2 + \alpha \beta \lambda^2] \times \\ & \times [\lambda^4 - 2\nu \gamma n^2 \lambda^2 + n^4 + 4\alpha n^2 \lambda^2] + (\lambda^2 + \alpha n^2 + \beta) (n^2 + 4\alpha \lambda^2) - \\ & - 2\beta n^2 (n^2 + 4\alpha \lambda^2 - \nu \gamma \lambda^2) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta k_2 = & \lambda^2 + (\alpha + \beta) n^2 + \alpha \beta \lambda^2 + \beta + \\ & + \beta \delta^2 (n^4 + \lambda^4 + 4\alpha n^2 \lambda^2 - 2\nu \gamma n^2 \lambda^2 + n^2 + 4\alpha \lambda^2); \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1 - \nu}{2} \beta; \quad \beta = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^l (F')^2 dx; \quad \gamma = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^l F F'' dx.$$

Применение метода Ритца в задаче о собственных колебаниях круговой цилиндрической оболочки дано в работе [17].

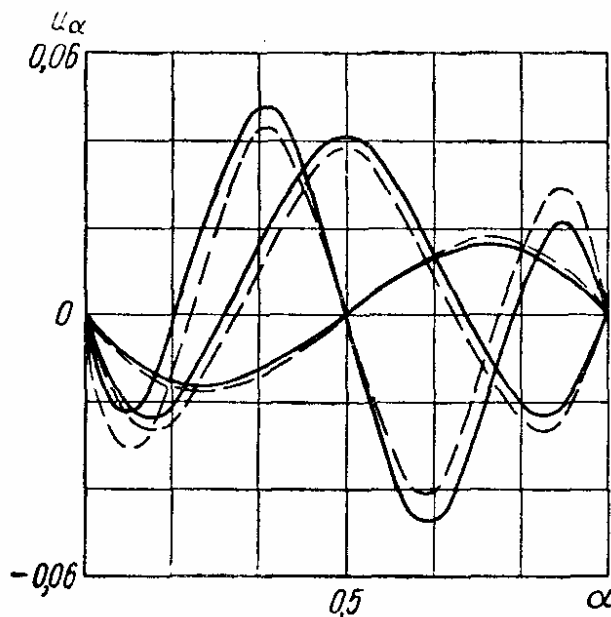


Рис. 12

Погрешность, вносимая методом Ритца в определение собственных форм колебаний, показана на примере защемленной оболочки (рис. 12, табл. 4). Сплошными линиями на рис. 12 показано точное решение, штриховыми — по методу Рэлея-Ритца.

Влияние толстого фланца или днища на значение частоты учитывают эмпирической формулой

$$\begin{aligned} \lambda = & \left[m_1 + \right. \\ & \left. + 0,3 \exp \left(-\frac{2h}{d} \right) \right] \frac{\pi R}{l}, \end{aligned}$$

4. Частоты колебаний (в гц) для защемленной по торцам (C—C) круговой цилиндрической оболочки ($l = 0,305$ м; $R = 0,076$ м; $h = 0,25 \cdot 10^{-3}$ м; $E = 19,6 \cdot 10^{10}$ н/м²; $\rho = 7,7 \cdot 10^3$ кг/м³)

f	Метод вычисления	m_2								
		3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_1	Точное значение	1140	755	574	533	593	717	881	1075	1295
	По Рэлею-Ритцу	1284	794	595	545	599	720	883	1077	1296
	По работе [33]	1220	796	594	541	595	718	883	1079	1301
	По работе [47]	1431	872	629	565	617	739	905	1101	1323
	Эксперимент [47]	—	700	(545) (559)	525	(587) (598)	720	885	(1090) (1100)	1310
	Свободное опирание	646	416	365	422	538	689	866	1067	1289
f_2	Точное значение	2505	1731	1272	1011	898	903	996	1151	1348
	По Рэлею-Ритцу	2747	1871	1353	1059	926	919	1006	1157	1352
	По работе [33]	—	2086	1453	1106	952	938	1024	1178	1376
	По работе [47]	—	2084	1460	1118	964	949	1034	1186	1384
	Эксперимент [47]	—	1620	1210	980	(838) (875)	900	995	(1135) (1145)	1365
	Свободное опирание	2144	1375	970	779	737	801	935	1113	1324
f_3	Точное значение	4004	2884	2165	1700	1415	1273	1251	1325	1471
	По Рэлею-Ритцу	4284	3091	2304	1791	1476	1312	1276	1341	1481
	По работе [33]	—	3130	2332	1812	1490	1322	1284	1348	1489
	По работе [47]	—	3434	2503	1911	1551	1366	1319	1380	1520
	Эксперимент [47]	—	—	—	1650	1395	1350	(1260) (1295)	1325	(1460) (1470)
	Свободное опирание	3831	2638	1901	1454	1206	1111	1135	1245	1417
Примечание. В скобках указаны результаты различных экспериментов										

где d — толщина днища или приведенная толщина фланца, вычисляемая по формуле [33]

$$d = \left(\frac{\eta^2 - 1}{\xi \eta^2 + 1} \right)^{\frac{1}{3}} d_1;$$

здесь

$$\xi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu}; \quad \eta = \frac{R_2}{R_1}.$$

Соответствующие частоты вычисляют по формулам (21) или (22), полученным для опертой оболочки.

Влияние граничных условий на частоты и формы собственных колебаний. Влияние граничных условий на спектр собственных частот колебаний, вообще говоря, тем больше, чем проще соответствующая форма колебаний, т. е. чем меньше узловых линий в окружном и радиальном направлениях. При этом на собственную форму колебаний граничные условия существенно влияют лишь в пределах полуволны вблизи края (см. стр. 437—439). Кроме того, преимущественно изгибные формы колебаний особенно чувствительны к условиям моментного типа [условия (8) и (9)], а безмоментные формы колебаний обычно чувствительны к тангенциальным граничным условиям (10) и (11).

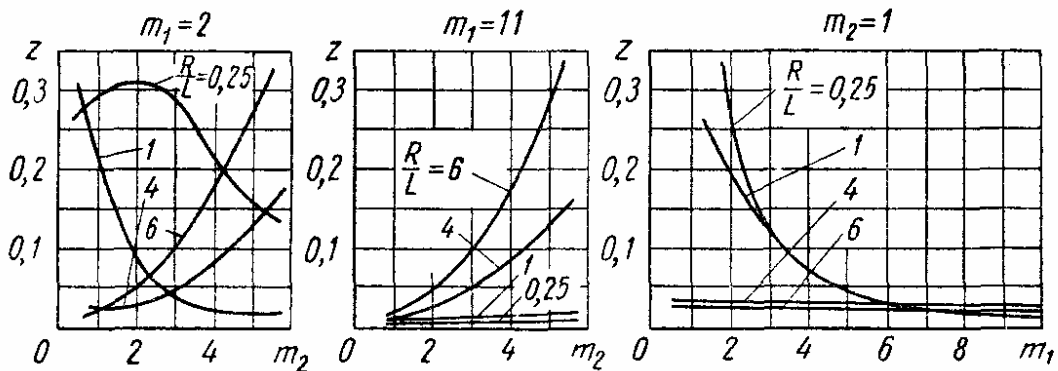


Рис. 13

Сопоставление собственных частот и форм колебаний, соответствующих различным граничным условиям, приведено в работах [31, 36], см. также рис. 6—11.

Влияние тангенциальных сил инерции. Влияние тангенциальных сил инерции на величину частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки можно оценить по формуле [21]

$$\omega^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{1 + z},$$

где ω — значение частоты, вычисленное при учете тангенциальных сил инерции; $\bar{\omega}$ — значение частоты, полученное при пренебрежении тангенциальными силами инерции:

$$z = \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \delta^2 (\lambda^2 + m_2^2) + \frac{(3 + 2\nu) \lambda^2 + m_2^2}{(\lambda^2 + m_2^2)^2};$$

$$\lambda = \frac{\pi m_1 R}{l}.$$

Зависимость z от m_1 или m_2 показана на рис. 13.

Влияние начальных усилий в срединной поверхности. Дифференциальные уравнения собственных колебаний цилиндрической оболочки

в перемещениях в упрощенной форме с учетом параметрических членов имеют вид ($N_{12} = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) u_1 + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial s} + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial s} + \left(\frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) u_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \right] = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{w}{R^2} + \delta^2 R^2 \Delta \Delta w \right) - \\ - N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

В случае свободного опирания краев решение можно искать в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \cos \frac{\pi m x}{l} \cos \frac{\pi n s}{R}; \\ u_2 &= A_2 \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n s}{R}; \\ w &= A_3 \sin \frac{\pi m x}{l} \cos \frac{\pi n s}{R}. \end{aligned}$$

Если пренебречь по сравнению с единицей величинами порядка $\frac{\delta^2 N_{ij}}{Eh}$, а также $\frac{\delta^2 R^2 \rho \omega^2}{E}$ и $\frac{R^2 \rho \omega^2 N_{ij}}{E^2 h}$, то приближенное значение частоты можно определить по формуле

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{E}{\rho R^2} \{ \lambda^4 + \delta^2 (\lambda^2 + n^2)^4 (1 - \nu^2)^{-1} + \\ &+ (\lambda^2 + n^2)^2 [\lambda^2 \Phi_{11} + (n^2 - 1) \Phi_{22}] \} [(\lambda^2 + n^2)^2 + n^2]^{-1} \\ &\left(\lambda = \frac{\pi m R}{l}; \Phi_{ij} = \frac{N_{ij}}{Eh} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Формулу (26) можно представить также в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + g_1 \Phi_{11} + g_2 \Phi_{22}).$$

Если в срединной поверхности оболочки действует сдвигающее усилие N_{12} , то формулу для частоты после дополнительных упрощений можно записать

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + g_1 \varphi_{11} + g_2 \varphi_{22} - 2g |\varphi_{12}|);$$

здесь

$$g = \frac{\lambda n (\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^4 + \delta^2 (1 - \nu^2)^{-1} (\lambda^2 + n^2)^4}.$$

Минимальное значение частоты при заданных φ_{11} , φ_{22} , φ_{12} , R , h , l и m достигается при значении $n = n_0$. При $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$, $m = 1$ величину n_0 определяют по формуле

$$n_0 = 4,2 (1 - \nu^2)^{\frac{1}{8}} \times \\ \times \left(\frac{R}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{h}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Это значение получено в предположении, что

$$\lambda^2 \ll n_0^2.$$

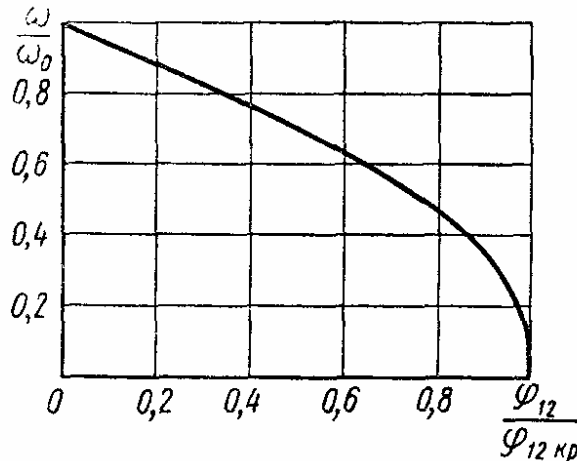


Рис. 14

Зависимость ω/ω_0 от отношения $\varphi_{12}/\varphi_{12кр}$ при $n=n_0$ изображена на рис. 14 (эта кривая практически не зависит от геометрических размеров оболочки); здесь

$$\varphi_{12кр} = 0,74 (1 - \nu^2)^{-\frac{5}{8}} \frac{h}{R} \left(\frac{hR}{l^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

При других значениях n кривые более вытянуты по горизонтали.

Подробному исследованию влияния начальных усилий в срединной поверхности на собственные частоты колебаний посвящены работы [27, 37].

Влияние поперечных сдвигов и инерции вращения. Учет деформации сдвига и инерции вращения приводит к некоторому уточнению частот, найденных в рамках гипотез Кирхгофа-Лява. Это уточнение тем существенней, чем меньше длина полуволны форм колебаний. Кроме того, появляются новые формы собственных колебаний, соответствующие более высоким частотам. Для получения уточненных дифференциальных уравнений вводим триортогональную систему координат: x — вдоль образующей; s — в окружном направлении по средней поверхности; z — перпендикулярно средней поверхности. Предполагаем, что перемещения представлены в виде

$$u_1(z) = u_1(x, s; t) + z\beta_1(x, s; t);$$

$$u_2(z) = u_2(x, s; t) + z\beta_2(x, s; t);$$

$$u_3(z) = w(x, s; t).$$

Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}w + L_{14}\beta_1 + L_{15}\beta_2 &= 0; \\ L_{21}u_1 + L_{22}u_2 + L_{23}w + L_{24}\beta_1 + L_{25}\beta_2 &= 0; \\ L_{31}u_1 + L_{32}u_2 + L_{33}w + L_{34}\beta_1 + L_{35}\beta_2 &= 0; \\ L_{41}u_1 + L_{42}u_2 + L_{43}w + L_{44}\beta_1 + L_{45}\beta_2 &= 0; \\ L_{51}u_1 + L_{52}u_2 + L_{53}w + L_{54}\beta_1 + L_{55}\beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Результаты вычислений [38] приведенной частоты

$$\tilde{\omega}_* = \omega \left(\frac{R + \frac{h}{2}}{\lambda} \right) \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

свободных осесимметричных колебаний опертой цилиндрической оболочки по трехмерной теории даны на рис. 15 сплошными линиями,

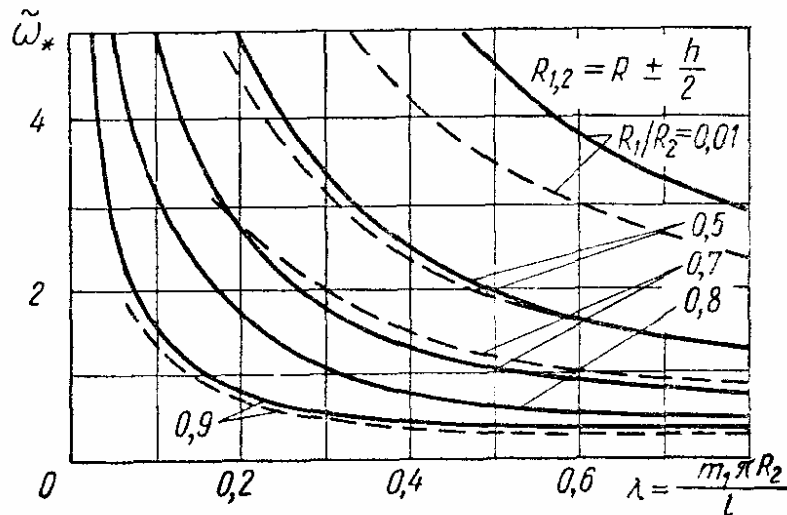


Рис. 15

для сопоставления штриховыми линиями нанесены результаты вычислений по теории оболочек, основанной на гипотезе Кирхгофа-Лява.

КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Основные соотношения. Уравнения колебаний. Пусть срединная поверхность (рис. 16) сферической оболочки отнесена к географической системе координат $x_1 = \theta$, $x_2 = \varphi$ (θ — угол широты; φ — угол долготы). Параметры Ламе выразятся формулами

$$H_1 = R; \quad H_2 = R \sin \theta,$$

где R — радиус кривизны оболочки.

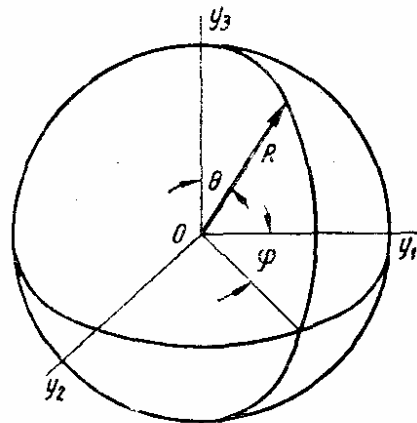


Рис. 16

Дифференциальные уравнения колебаний будут

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial N_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial \varphi} + (N_{11} - N_{22}) \operatorname{ctg} \theta - Q_1 &= \\
 &= \rho h R \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - R q_1; \\
 \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial N_{22}}{\partial \varphi} + 2N_{12} \operatorname{ctg} \theta - Q_2 &= \\
 &= \rho h R \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - R q_2; \\
 \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + Q_1 \operatorname{ctg} \theta + (N_{11} + N_{22}) &= \\
 &= -\rho h R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + R q_3; \\
 \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + (M_{11} - M_{22}) \operatorname{ctg} \theta - Q_1 R &= 0; \\
 \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + 2M_{12} \operatorname{ctg} \theta - Q_2 R &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Условия и моменты определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned}
 N_{11} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \quad N_{22} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}); \\
 N_{12} = N_{21} &= \frac{Eh}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{12} - \frac{h^2}{12R} \kappa_{12} \right); \\
 M_{11} &= D (\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}); \quad M_{22} = D (\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}); \\
 M_{12} = M_{21} &= D (1 - \nu) \kappa_{12}.
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Компоненты деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и изменения кривизны:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + w \right); \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + u_1 \operatorname{ctg} \theta + w \right); \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \operatorname{ctg} \theta \right); \\
 \kappa_{11} &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right); \\
 \kappa_{22} &= \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u_1 \right) \right]; \\
 \kappa_{12} &= \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - u_2 \right) - \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Упрощенные дифференциальные уравнения. При определении частот и форм свободных колебаний, для которых напряжениями изгиба можно пренебречь по сравнению с напряжениями растяжения срединной поверхности, можно использовать упрощенные уравнения — дифференциальные уравнения безмоментной теории оболочек:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial \varphi} + (N_{12} - N_{22}) \operatorname{ctg} \theta &= \rho h R \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial N_{22}}{\partial \varphi} + 2N_{12} \operatorname{ctg} \theta &= \rho h R \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ N_{11} + N_{22} &= -\rho h R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Соотношения упругости также упрощаются:

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); & N_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}); \\ N_{12} = N_{21} &= \frac{Eh}{1+\nu} \varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

Для отыскания преимущественно изгибных форм колебаний могут быть использованы другие упрощенные дифференциальные уравнения. Уравнения упрощают введением двух предположений: 1) влиянием тангенциальных сил инерции можно пренебречь; 2) вкладом тангенциальных смещений в изменение кривизны можно пренебречь. Последовательное проведение этих гипотез и введение функции усилий χ приводит к дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} D \Delta \Delta w + \frac{1}{R} \Delta \chi + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0; \\ \Delta \Delta \chi - \frac{Eh}{R} \Delta w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Связь усилий в срединной поверхности с функцией χ и выражение оператора Лапласа Δ даются формулами

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right); & N_{22} &= \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}; \\ N_{12} &= -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right); \\ \Delta &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Иногда удобно исключить из системы (31) функцию усилий

$$D \Delta \Delta \Delta w + \frac{Eh}{R^2} \Delta w + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w = 0. \quad (33)$$

Собственные частоты колебаний сферических сегментов. Решение дифференциального уравнения (33), соответствующее свободным колебаниям пологого сферического сегмента с частотой ω , можно искать в виде

$$w = w(r, \varphi) e^{i\omega t}, \quad (34)$$

где r, φ — координаты точки в полярной системе координат. Подставляя выражение (34) в уравнение (33), убеждаемся, что свободная форма колебаний должна удовлетворять уравнению

$$\Delta \Delta \Delta w - b^4 \Delta w = 0, \quad (35)$$

где

$$b^4 = \frac{1}{D} \left(\rho h \omega^2 - \frac{Eh}{R^2} \right).$$

Но решение уравнения (35) является суммой решений дифференциальных уравнений в частных производных

$$\Delta w = 0; \quad \Delta w - b^2 w = 0; \quad \Delta w + b^2 w = 0. \quad (36)$$

При этом решения первого уравнения отражают статический изгиб сферического сегмента краевыми усилиями и моментами, решения второго уравнения затухают с удалением от края оболочки и характеризуют динамический краевой эффект, решения третьего уравнения совпадают с формами свободных колебаний всюду за исключением области, прилегающей к краю.

Свободные формы колебаний удобно искать в виде

$$w(r, \varphi) = f(r) \cos n\varphi.$$

Тогда решения уравнений (36) будут иметь, соответственно, следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} f &= A_1 r^n + A_2 r^{-n}; \\ f &= B_1 I_n(br) + B_2 K_n(br); \quad f = C_1 J_n(br) + C_2 Y_n(br). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Так как в вершине сегмента смещения должны быть ограничены, то $A_2 = B_2 = C_2 = 0$. Окончательно, функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = Ar^n + BI_n(br) + CJ_n(br). \quad (38)$$

Аналогичные выкладки для функции напряжений (усилий)

$$\chi = \psi(r) \cos n\varphi e^{i\omega t}$$

приводят к формуле

$$\psi(r) = Fr^n + \frac{AR\rho h\omega^2}{4(n+1)} r^{n+2} + \frac{Eh}{R^2 b^2} [BI_n(br) - CJ_n(br)].$$

Для иллюстрации удобно рассмотреть осесимметричные свободные колебания сферического сегмента с зашлепленным контуром. Граничные условия при $r = r_0$

$$u_1 = u_2 = w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (39)$$

Соответствующее характеристическое уравнение (уравнение частот) в случае осесимметричных колебаний имеет вид

$$J_0(br_0)I_1(br_0) + J_1(br_0)I_0(br_0) + \frac{4(1+\nu)\lambda J_1(br_0)I_1(br_0)}{Rbr_0\left(\frac{1-\nu}{ER} - \frac{2\lambda}{R}\right)} = 0. \quad (40)$$

Для скользящей заделки (осесимметричные колебания)

$$N_{11} = w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (41)$$

уравнение частот будет

$$J_0(br_0)I_1(br_0) + J_1(br_0)I_0(br_0) - \frac{4\lambda Eh}{Rbr_0}J_1(br_0)I_1(br_0) = 0. \quad (42)$$

Эта задача рассмотрена Г. А. Ван-Фо-Фы и В. Н. Буйволом [12]. Если в выражении (38) постоянную A положить равной нулю и сохранить из краевых условий (39) или (41) лишь условия

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0,$$

то получится приведенное в работе [28] неточное уравнение частот

$$J_n(br_0)I'_n(br_0) - J'_n(br_0)I_n(br_0) = 0. \quad (43)$$

Однако это уравнение при определении частот приводит лишь к незначительной погрешности [12]. Сопоставление частот осесимметричных колебаний защемленного и опертого сегментов проведено в табл. 5.

5. Частоты колебаний $\omega \cdot 10^{-3}$ в рад/сек сферического сегмента
радиуса r_0 , высоты s ($\nu = \frac{1}{3}$; $\frac{r_0}{h} = 60$; $\frac{E}{\rho} = 0,984 \cdot 10^7$ м²/сек²)

Номер частоты	Защемленный край				Неподвижно опертый			
	$\frac{s}{r_0}$							
	0	$\frac{5}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{16}{60}$	0	$\frac{5}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{16}{60}$
1	4,4	9	16	22	2,1	9	16	21
2	17,16	19	22	29	12,76	15	20	29
3	38,39	39	40	43	31,85	32	32	38

Радиальные колебания замкнутой оболочки; сопоставление с точным решением. Для получения точного решения необходимо исходить из уравнений теории упругости. В этом случае компонент смещения в радиальном направлении удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{du_r}{dr} - \frac{2}{r^2} u_r + a^2 u_r = 0$$

$$\left(a^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \right).$$

Радиальное нормальное напряжение будет

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{du_r}{dr} + 2\lambda \frac{u_r}{r}.$$

Решение дифференциального уравнения может быть записано в общем виде

$$u_r = \frac{d}{dr} \left(\frac{C_1 \sin ar + C_2 \cos ar}{r} \right).$$

Если r_1 — внутренний радиус; r_2 — внешний радиус полого шара, то уравнение частот примет вид

$$\frac{\zeta ar_1 + (a^2 r_1^2 - \zeta) \operatorname{tg} ar_1}{(a^2 r_1^2 - \zeta) - \zeta ar_1 \operatorname{tg} ar_1} = \frac{\zeta ar_2 + (a^2 r_2^2 - \zeta) \operatorname{tg} ar_2}{(a^2 r_2^2 - \zeta) - \zeta ar_2 \operatorname{tg} ar_2}$$

$$\left(\zeta = 2 \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right).$$

В случае очень тонкого шара ($r_1 \approx r_2 \approx R$) приближенное значение частоты может быть найдено в явном виде

$$\omega = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu) \zeta (3 - \zeta)}{\rho R^2}},$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{2E}{\rho R^2 (1 - \nu)}}.$$

Этот же результат получается при использовании уравнений теории оболочек.

Влияние деформации сдвига и инерции вращения на колебания сферических оболочек. Учет деформации поперечного сдвига и инерции вращения приводит к уточнению частот и форм колебаний, найденных на основе гипотез Кирхгофа-Лява. Это уточнение тем существенней, чем меньше длина полуволн форм колебаний. Кроме того, появляются новые формы колебаний, соответствующие более высоким частотам. Пусть сферическая оболочка постоянной толщины h и радиусом средней поверхности R отнесена к полярной системе координат (r, θ, φ) . Решение ищем в форме

$$u_\theta = u_1 + z\beta_1; \quad u_\varphi = u_2 + z\beta_1; \quad u_r = w.$$

Уточненные дифференциальные уравнения движения будут

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial \varphi} + (N_{11} - N_{22}) \operatorname{ctg} \theta - Q_1 = \rho h R k \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - R q_1;$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial N_{22}}{\partial \varphi} + 2N_{12} \operatorname{ctg} \theta - Q_2 = \rho h R k \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - R q_2;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + Q_1 \operatorname{ctg} \theta + (N_{11} + N_{22}) = -\rho h R k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + R q_3;$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + (M_{11} - M_{22}) \operatorname{ctg} \theta - R Q_1 = \rho h R^3 \delta^2 k_1 \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + 2M_{12} \operatorname{ctg} \theta - R Q_2 = \rho h R^3 \delta^2 k_1 \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2},$$

где

$$k = 1 + \delta^2; \quad k_1 = 1 + 1,8\delta^2; \quad \delta^2 = \frac{h^2}{12R^2}.$$

В частном случае свободных колебаний замкнутой сферической оболочки уравнение частот при $k_2 = 1, 2$, $\nu = \frac{1}{3}$ имеет вид (k_2 — осредненный коэффициент сдвига)

$$\left\{ \delta^2 [-3,6M^3 + (6,8 + 8,2N) M^2 + (9,2 - 6,33N - 5,6N^2) M + (4,27 - 7,2N + 0,53N^2 + N^3)] + \right. \\ \left. + M^2 - M(2 + N) + \frac{8}{9} N - \frac{16}{9} \right\} (3kM + 2 - N) \times \\ \times \left(3M + 2 - \frac{5}{6\delta^2} - N \right) = 0;$$

здесь

$$M = \frac{\rho \omega^2 (1 - \nu^2) R^2}{E}; \quad N = n(n + 1);$$

n — номер присоединенной функции Лежандра.

Приведенная задача рассмотрена Прасадом [45].

Нелинейные колебания пологих сферических оболочек. Для изучения осесимметричных нелинейных колебаний пологих сферических оболочек может быть использован метод Бубнова-Галеркина. Пусть сферический сегмент отнесен к системе координат, которая в плане является полярной. Тогда уравнение срединной поверхности будет

$$z = f(r) \quad (r \leq r_1).$$

Компоненты деформации выразятся формулами

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r} u.$$

Условие совместности деформаций имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{11}) - \varepsilon_{22} = - \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2.$$

Удобно ввести следующие обозначения:

$$w^* = \frac{w}{H}; \quad f^* = \frac{f}{H}; \quad \xi = \frac{r}{r_1}; \quad a^2 = \frac{\rho h r_1^4}{DH};$$

$$q^* = \frac{q r_1^4}{DH}; \quad Q^* = \frac{Q r^2}{DH};$$

Q — осевая сила, приложенная в полюсе оболочки; ψ — силовая функция,

$$\psi = - \frac{N_{11} r_1^2 \xi}{D} = - \frac{N_{22} r_1^2}{D}.$$

Тогда, после применения к уравнению движения и уравнению совместности деформаций процедуры Бубнова-Галеркина, задача сводится к интегрированию системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial^3 w^*}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial \xi} + \psi \frac{\partial}{\partial \xi} (f^* + w^*) + \\ + \int_0^\xi \left(a^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - q^* \right) \xi d\xi = \frac{Q^*}{2\pi}; \\ \xi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \psi - \frac{1 - \nu^2}{\delta^2} \times \\ \times \left[\frac{df^*}{d\xi} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Удобно исходить из следующих граничных условий при $\xi = 1$ ($r = r_1$):

$$w^* = 0; \quad \frac{\partial w^*}{\partial \xi} = -\alpha \frac{r_1}{DH} M_{11}; \quad u_1^* = -\mu \frac{r_1}{Eh} N_{11}$$

Придавая коэффициентам α и μ различные значения, можно получить различные варианты граничных условий:

$\alpha = 0, \mu = 0$ — жестко защемленный край;

$\alpha = 0, \mu = \infty$ — свободно защемленный край;

$\alpha = \infty, \mu = 0$ — жестко опертый край;

$\alpha = \infty, \mu = \infty$ — свободно опертый край.

Для нагруженной сосредоточенной силой и равномерно распределенной нагрузкой сферической оболочки уравнение вынужденных колебаний имеет вид (при решении по методу Бубнова-Галеркина)

$$c_0 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \tau^2} + c_1 w_0^{*3} - c_2 w_0^{*2} + c_3 w_0^* = c_4 q + c_5 Q^*. \quad (44)$$

Здесь для сокращения принято

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{8 - 25k + 20k^2}{120(2k - 1)}; \quad c_1 = \frac{2}{3(2k - 1)^3} \times \\ &\times \left(-\frac{1}{14} + \frac{k}{2} - \frac{3}{2}k^2 + 2k^3 - k^4 + \frac{3 - 8k + 6k^2}{24} \rho_1 \right); \\ c_2 &= \frac{1}{3(2k - 1)^2} \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{2}k + \frac{19}{4}k^2 - 3k^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3k - 2}{12} \rho_1 - \frac{3 - 8k + 6k^2}{6} \rho_2 \right); \\ c_3 &= \frac{1}{3(2k - 1)} \left(-\frac{1}{5} + k - k^2 - \frac{3k - 2}{6} \rho_2 \right) + \\ &\quad + \frac{8}{3} \cdot \frac{3k - 2}{2k - 1} \cdot \frac{1 - \nu^2}{\delta^2}; \\ c_4 &= \frac{3k - 2}{24}; \quad c_5 = \frac{2k - 1}{8\pi}; \\ \rho_1 &= \frac{7 - 20k + 18k^2 + (\mu - \nu)(1 - 4k + 6k^2)}{1 + \mu - \nu}; \\ \rho_2 &= \frac{5 - 9k + (\mu - \nu)(1 - 3k)}{1 + \mu - \nu}; \\ k &= \frac{n + 1}{2n}; \quad n = \frac{(1 + \nu)\alpha - 1}{(5 + \nu)\alpha - 1}; \quad \tau = t \frac{H}{c_1^2} \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \end{aligned}$$

Особые точки уравнения (44) будут

$$w_0^{*(1)} = 0; \quad w_0^{*(2,3)} = \frac{1}{2c_1} \left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_1c_3} \right).$$

Период колебания τ_1^* связан с амплитудами прогиба w_0^* и нагрузок q_* , Q_* зависимостью

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= 4\pi\delta^{-2} 3^{\frac{1}{2}} (1 - \nu^2)^{\frac{3}{2}} c_0^{-1} \left[\frac{3}{4} c_1 w_0^{*2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{3\pi} c_2 w_0^* + c_3 - \frac{c_4 q_* + c_5 Q_*}{w_0^*} \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Связь τ_1^* с ω_0^* при $q_* = Q_* = 0$ и $\nu = 0,3$ представлена графически при различных значениях $m = \delta^2 (1 - \nu^2)^{-1}$ на рис. 17 [19].

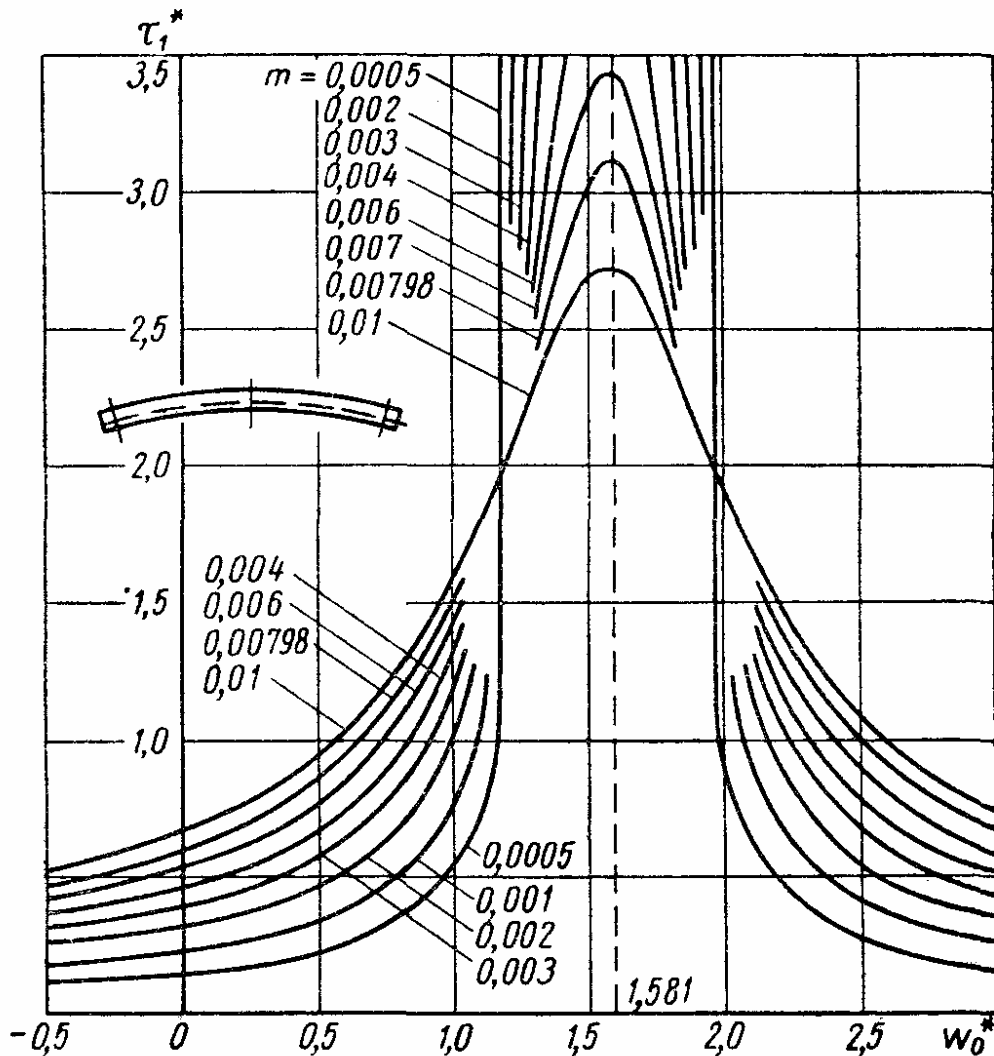


Рис. 17

Вынужденные колебания пологих сферических оболочек. Уравнения вынужденных колебаний полой сферической оболочки под действием периодической возмущающей силы имеют вид

$$D \Delta \Delta \omega + \frac{1}{R} \Delta \chi + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\rho t^2} = P_0 \delta(r - r_0) e^{i\omega_0 t};$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta \Delta \chi = \frac{1}{R} \Delta \omega.$$

Исключая из уравнений время $\chi = \bar{\chi} e^{i\omega_0 t}$, $\omega = \bar{\omega} e^{i\omega_0 t}$ и введя новые вспомогательные функции F и ψ по формулам

$$\bar{\chi} = F - \frac{Eh}{R} \psi; \quad \bar{\omega} = \Delta (\psi - \lambda F),$$

где

$$\lambda = (\rho h \omega_0^2 R)^{-1},$$

можно убедиться, что функции F и ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta \Delta F = 0; \quad \Delta (\Delta \Delta - b^4) \psi = \frac{1}{D} P_0 (\bar{r} - \bar{r}_0);$$

$$b^4 = \frac{1}{D} \left[\frac{1}{R\lambda} - \frac{Eh}{R^2} \right].$$

Частное решение последнего уравнения имеет вид

$$\psi_P = -\frac{P_0}{4\pi D b^4} \left\{ \ln |\bar{r} - \bar{r}_0|^2 + \right. \\ \left. + \frac{\pi i}{2} [H_0(ib|\bar{r} - \bar{r}_0|) + H_0(b|\bar{r} - \bar{r}_0|)] \right\};$$

здесь H_0 — функция Ганкеля нулевого порядка.

Общее решение соответствующего однородного уравнения будет (в полярной системе координат)

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} [\psi_{1n}(r) \cos n\varphi + \psi_{2n}(r) \sin n\varphi],$$

где

$$\psi_{1n} = A_n r^n + A_n^{(1)} r^{-n} + B_n J_n(br) + B_n^{(1)} Y_n(br) + \\ + C_n I_n(br) + C_n^{(1)} K_n(br).$$

Решение этой задачи дано Г. А. Ван-Фо-Фы и В. Н. Буйволом [12].

КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Дифференциальные уравнения тонких упругих конических оболочек для динамического случая. Пусть срединная поверхность конической оболочки отнесена к ортогональной системе координат x, φ (рис. 18).

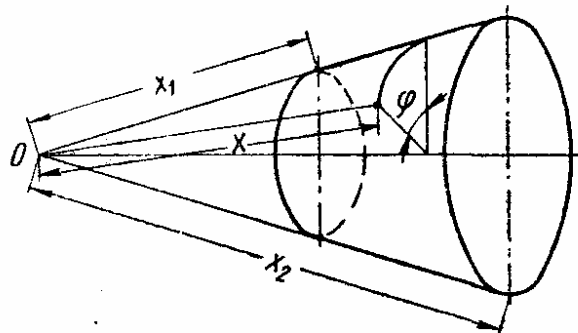


Рис. 18

Тогда коэффициенты Ламе будут

$$H_1 = 1; \quad H_2 = x \sin \alpha,$$

где α — угол полураствора конуса.

Уравнения колебаний конической оболочки имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial (N_{11}x)}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial \varphi} - \frac{1}{x} N_{22} + q_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial (N_{21}x)}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial N_{22}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{x} N_{21} - \frac{Q_2}{x \operatorname{tg} \alpha} + q_2 &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial (Q_1x)}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + \frac{N_{22}}{x \operatorname{tg} \alpha} - q_3 &= \\ = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial (M_{11}x)}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} - \frac{1}{x} M_{22} - Q_1 &= 0; \\ \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial (M_{12}x)}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + \frac{1}{x} M_{12} - Q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Усилия и моменты выражаются формулами (2), в которых следует учесть, что $\frac{1}{R_1} = 0$, $R_2 = x \operatorname{tg} \alpha$. Компоненты деформации и изменения кривизн будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{u_1}{x} + \frac{w}{x \operatorname{tg} \alpha}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_2}{x} \right) \right]; \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_{22} = \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_2 \cos \alpha \right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{x \sin \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Приближенные уравнения краевого эффекта (уравнения с большим показателем изменяемости) при пренебрежении тангенциальными силами инерции для конической оболочки примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} D \Delta \Delta w + \frac{1}{x \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho h \omega^2 w &= 0; \\ \frac{1}{Eh} \Delta \Delta \chi &= \frac{1}{x \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) & \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Тангенциальные усилия в срединной поверхности связаны с функцией напряжений формулами

$$N_{11} = \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad N_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2};$$

$$N_{12} = - \frac{1}{x \sin \alpha} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right).$$

Свободные колебания конических оболочек. Полубезмоментная теория. Дифференциальные уравнения малых колебаний конической оболочки, если пренебречь силами инерции в направлении образующих и использовать предпосылки полубезмоментной теории, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (N_{11}x)}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial N_{22}}{\partial \varphi} + \sin \alpha \left[\frac{\partial (N_{12}x)}{\partial x} + N_{12} \right] - \frac{1}{x \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} &= \\ &= x \sin \alpha \cdot \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{x \operatorname{tg} \alpha} N_{22} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \varphi^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0; \\ \sin \alpha \frac{\partial (x \kappa_{22})}{\partial x} - \frac{\partial \kappa_{12}}{\partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial \kappa_{11}}{\partial \varphi} - \sin \alpha \left[\frac{\partial (x \kappa_{12})}{\partial x} + \kappa_{12} \right] - \frac{1}{x \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \varphi} &= 0; \\ \kappa_{11} \cos \alpha + \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \varphi^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Первые три уравнения системы (47) являются уравнениями движения, последние три — уравнениями неразрывности деформаций.

Удобно ввести вспомогательные функции θ , ψ по формулам

$$\kappa_{22} = \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}; \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$T_{11} = \frac{1}{x \sin \alpha} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}; \quad T_{12} = - \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Решение можно искать в виде

$$\{u_2, \theta, \psi\} = \{\bar{u}_2, \bar{\theta}, \bar{\psi}\} \sin n \varphi e^{i \omega t};$$

$$\{w, \varepsilon_{22}\} = \{\bar{w}, \bar{\varepsilon}_{22}\} \cos n \varphi e^{i \omega t};$$

использование упрощенных соотношений упругости

$$M_{22} = -D\kappa_{22}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{Eh} T_{22}$$

приводит к соотношениям

$$\bar{w} = \frac{x \sin \alpha}{n^2 - \cos^2 \alpha} (\bar{\varepsilon}_{22} \cos \alpha - n\bar{\psi});$$

$$\bar{u}_2 = \frac{x \sin \alpha}{n^2 - \cos^2 \alpha} (n\bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\psi} \cos \alpha);$$

$$\bar{w} n x \operatorname{tg} \alpha + \bar{u}_2 x \sin \alpha \approx \frac{n^2 + \cos^2 \alpha}{n^2 - \cos^2 \alpha} x^2 \bar{\psi} \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\bar{\psi} = -\frac{E h x \sin^3 \alpha \cos \alpha}{n^2 (n^2 - \cos^2 \alpha)} (x^2 \bar{\psi}')';$$

$$\begin{aligned} & \frac{E h \cos \alpha \sin^5 \alpha}{n^2 (n^2 - \cos^2 \alpha)} \{x^2 [x (x^2 \bar{\psi}')']'\}' + \\ & + \frac{D n^2 (n^2 - \cos^2 \alpha)}{x \sin \alpha \cos \alpha} \bar{\psi} - x^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha \cdot \rho h \omega^2 \frac{n^2 + \cos^2 \alpha}{n^2 - \cos^2 \alpha} \bar{\psi} = 0. \end{aligned}$$

Если оболочка шарнирно оперта (условия Навье), то краевые условия будут

$$\varepsilon_{22} = T_{11} = 0 \quad \text{или} \quad \bar{\psi} = (x^2 \bar{\psi}')' = 0.$$

Для защемленного края

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}' = 0.$$

Решение полученного уравнения методом Галеркина дает

$$\begin{aligned} \omega^2 = \min & \frac{A_1 \int_0^1 (\varepsilon + \zeta) \{[(\varepsilon + \zeta)^2 \bar{\psi}']'\}^2 d\zeta + A_2 \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon + \zeta} \bar{\psi}^2 d\zeta}{\int_0^1 (\varepsilon + \zeta)^3 \bar{\psi}^2 d\zeta} \times \\ & \times \frac{E}{\rho h}; \end{aligned} \quad (48)$$

$$x = (\varepsilon + \zeta) l; \quad R_0 = (1 + \varepsilon) l \sin \alpha;$$

$$A_1 = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{n^2 (n^2 + \cos^2 \alpha)};$$

$$A_2 = \frac{(1 + \varepsilon)^2}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{R_0} \right)^2 \frac{n^2 (n^2 - \cos^2 \alpha)^2}{\sin^2 \alpha (n^2 + \cos^2 \alpha)};$$

α — угол полураствора конуса; l — длина образующей оболочки; εl — расстояние вдоль образующей от вершины конуса до меньшего среза оболочки. Решение данной задачи получено Л. Ю. Поверусом и Р. К. Ряметом [29].

Результаты вычисления по формуле (48) безразмерной частоты

$$\omega_* = \omega l \left[\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}}$$

для опертой по краям усеченной оболочки при $\nu = 0,3$, $\varepsilon = 0,5$, $m = 1$ приведены в табл. 6.

6. Частоты $\omega^* = \omega l \left[\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}}$ опертой усеченной конической оболочки $\left(e = \frac{l_0}{l_1 - l_0} = 0,5, \nu = 0,3 \right)$ при различном числе n волн в окружном направлении ($R_0 = l_1 \sin \alpha$)

n	$\frac{h}{R_0} = 0,03$					$\frac{h}{R_0} = 0,003$				
	α°									
	15	30	45	60	75	15	30	45	60	75
2	0,616	1,052	1,245	1,110	0,657	0,594	1,048	1,243	1,108	0,654
3	0,528	0,545	0,528	0,524	0,325	0,283	0,488	0,571	0,501	0,292
4	0,738	0,530	0,463	0,396	0,299	0,182	0,283	0,326	0,285	0,166
5	0,957	0,676	0,534	0,457	0,373	0,173	0,134	0,216	0,187	0,113
6	1,274	0,800	0,656	0,550	0,436	0,207	0,165	0,164	0,141	0,0928
7	1,705	0,928	0,758	0,631	0,526	0,242	0,172	0,157	0,132	0,0938
8	2,225	1,201	0,905	0,751	0,637	0,273	0,196	0,158	0,132	0,1057
9	2,822	1,488	1,085	0,894	0,783	0,319	0,222	0,178	0,148	0,1195
10	3,170	1,825	1,311	1,076	0,956	0,371	0,252	0,198	0,165	0,1307

Свободные колебания конических оболочек. Применение уравнений краевого эффекта. Неосесимметричные формы колебаний оболочек нулевой кривизны, соответствующие минимальной частоте, имеют в окружном направлении большой показатель изменчивости. Поэтому для определения этих форм колебаний можно использовать приближенные уравнения (46).

Для замкнутой усеченной конической оболочки ($x_1 \leq x \leq x_2 = l + x_1$), опертой по краям, решение уравнений (46) проще всего искать, используя метод Галеркина. Аппроксимировать функции можно, например, при помощи рядов

$$w = \cos m\varphi \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{a_n (x - x_1)}{l};$$

$$\chi = \cos m\varphi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{a_n (x - x_1)}{l}$$

$$\left(a_n = \frac{\pi n}{1 - \xi}, \quad \xi = \frac{x_1}{l} \right).$$

Выбранные функции удовлетворяют лишь кинематическим условиям. Динамические условия будут выполняться тем точнее, чем меньше будет угол α .

Использование процедуры Галеркина приводит в одночленном приближении к следующему выражению для собственной частоты колебаний:

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 = & \frac{D}{\rho l^4 h} \left\{ \left[a_n^4 \frac{1 - \xi^5}{10} + \right. \right. \\ & + a_n \left(1 + \frac{2m^2}{\sin^2 \alpha} \right) \left(a_n \frac{1 - \xi^3}{6} - \frac{1 - \xi}{2a_n} \right) + \\ & + \left(\frac{m^4}{\sin^4 \alpha} - \frac{4m^2}{\sin^2 \alpha} \right) \frac{1 - \xi}{2} \left. \right]^2 + \\ & + 12(1 - \nu^2) \frac{l^2}{h^2} \frac{a_n^4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\frac{1 - \xi^4}{8} - \frac{3(1 - \xi^2)}{8a_n^2} \right]^2 \left. \right\} \times \\ & \times \left\{ \left[a_n^4 \frac{1 - \xi^5}{10} + a_n \left(1 + \frac{2m^2}{\sin^2 \alpha} \right) \left(a_n \frac{1 - \xi^3}{6} - \frac{1 - \xi}{2a_n} \right) + \right. \right. \\ & + \left(\frac{m^4}{\sin^4 \alpha} - \frac{4m^2}{\sin^2 \alpha} \right) \frac{1 - \xi}{2} \left. \right] \times \\ & \times \left[\frac{1 - \xi^5}{10} - \frac{1 - \xi^3}{2a_n^2} + \frac{3(1 - \xi)}{8a_n^4} \right] \left. \right\}^{-1}. \quad (49) \end{aligned}$$

Экспериментальная проверка показала, что формула (49) дает погрешность 10—15%. Эта задача рассмотрена В. Г. Годзевичем [16].

Влияние тангенциальных сил инерции. Учет тангенциальных сил инерции приводит к некоторому снижению частот преимущественно изгибных форм колебаний и к появлению двух серий частот, которые соответствуют преимущественно тангенциальным формам колебаний. При этом снижение основной частоты может достигать до 15—20%. Это снижение тем существенней, чем меньшим числом волн в окружном направлении будет характеризоваться соответствующая форма колебаний. При этом тангенциальные силы в осевом и в окружном направлениях неравноправны. На минимальную частоту собственных колебаний наиболее существенное влияние оказывает учет инерции в окружном направлении. Оценка влияния тангенциальных сил инерции рассмотрена Л. Г. Агеносовым [1] и В. Е. Бреславским. Безразмерные параметры частоты

$$p = \frac{(1 - \nu^2) \rho R_0^2}{E} \omega^2,$$

вычисленные при учете всех сил инерции (p) и при пренебрежении тангенциальными силами инерции p^* ($\alpha = 15^\circ$, $\nu = 0,3$, $\frac{h}{R_0} = 0,003$), приведены в табл. 7.

7. Приведенные частоты $p = \omega^2 R_0^2 \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}$ заземленной по контуру конической оболочки при учете (p) и пренебрежении (p^*) тангенциальными силами инерции $\left(\alpha = 15^\circ, \nu = 0,3, \frac{h}{R_0} = 0,03, R_0 = l \sin \alpha\right)$

n	p	p^*	n	p	p^*
2	0,0852	0,1214	7	0,9771	1,0058
3	0,0996	0,1012	8	1,6479	1,6888
4	0,1506	0,1543	9	2,6248	2,6828
5	0,2861	0,2955	10	3,9925	4,0718
6	0,5430	0,5621			

Применение метода Ритца. Выражение для потенциальной энергии деформации конической оболочки имеет вид

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{Eh}{1-\nu^2} [(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2)] + D [(\kappa_{11} + \kappa_{22})^2 - 2(1-\nu)(\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2)] \right\} x \sin \alpha dx. \quad (50)$$

Выражение для кинетической энергии будет

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] x \sin \alpha dx. \quad (51)$$

Пусть оболочка оперта

$$w = u_2 = T_{11} = M_{11} = 0; \quad (52)$$

тогда для перемещений удобно выбрать следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A_1 (x \sin \alpha)^2 \cos \frac{m\pi (x - x_1)}{l} \sin n\varphi; \\ u_2 &= A_2 (x \sin \alpha)^2 \sin \frac{m\pi (x - x_1)}{l} \cos n\varphi; \\ w &= A_3 (x \sin \alpha)^2 \sin \frac{m\pi (x - x_1)}{l} \sin n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Формулы (53) удовлетворяют, вообще говоря, лишь кинематическим граничным условиям (52), а в случае цилиндрической оболочки удовлетворяют также динамическим граничным условиям. Подстановка

выражений (53) в формулы (50) и (51) и применение вариационного принципа Гамильтона приводит к уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{dA_i}{dt} \right)} \right] + \frac{\partial U}{\partial A_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (54)$$

Подставляя в однородную систему уравнений (54) выражения

$$A_i = \alpha_i \cos \omega t$$

и приравнявая определитель нулю, можно найти уравнение частот

$$b_0 \omega^6 + b_1 \omega^4 + b_2 \omega^2 + b_3 = 0.$$

Эта задача рассмотрена Э. И. Григолюком [20]. Результаты вычислений минимальных значений безразмерной частоты

$$\omega_* = \omega l \left[\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}}$$

при различных углах полурастворах и отношениях $\frac{h}{R_0}$ приведены в табл. 8. В скобках приведены соответствующие числа n волн в окружном направлении.

8. Минимальные частоты $\omega_* = \omega l \left[\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}}$ колебаний
опертой конической оболочки при различных углах полураствора α
и отношениях $\frac{h}{R_0}$ ($R_0 = l \sin \alpha$)

α	$\frac{h}{R_0}$					
	0,03	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
3	—	—	—	0,0769 (2)	0,0474 (4)	0,0340 (5)
5	—	—	0,141 (2)	0,0967 (3)	0,0623 (5)	0,0448 (6)
10	—	0,281 (2)	0,193 (3)	0,138 (4)	0,0895 (6)	0,0656 (7)
15	0,419 (2)	0,335 (3)	0,236 (4)	0,169 (5)	0,112 (7)	0,0814 (8)
20	0,479 (3)	0,381 (3)	0,287 (5)	0,199 (5)	0,130 (7)	0,0950 (9)
25	0,519 (3)	0,432 (3)	0,311 (5)	0,223 (6)	0,148 (8)	0,107 (9)
30	0,562 (3)	0,467 (4)	0,337 (5)	0,244 (6)	0,161 (8)	0,119 (9)
35	0,607 (3)	0,499 (4)	0,362 (5)	0,264 (6)	0,174 (8)	0,128 (10)
40	0,652 (3)	0,529 (4)	0,386 (5)	0,282 (6)	0,187 (8)	0,138 (10)
45	0,693 (3)	0,559 (4)	0,408 (5)	0,299 (6)	0,198 (8)	0,147 (10)
50	0,729 (3)	0,586 (4)	0,430 (5)	0,315 (6)	0,210 (8)	0,156 (9)
55	0,757 (3)	0,614 (4)	0,452 (5)	0,331 (6)	0,223 (8)	0,165 (9)
60	0,776 (3)	0,644 (4)	0,479 (5)	0,350 (6)	0,231 (7)	0,172 (9)
65	0,789 (3)	0,688 (4)	0,493 (4)	0,361 (5)	0,243 (7)	0,182 (8)
70	0,809 (3)	0,695 (3)	0,504 (4)	0,376 (5)	0,256 (6)	0,194 (8)
75	0,877 (3)	0,701 (3)	0,548 (4)	0,400 (4)	0,276 (6)	0,207 (7)
80	0,891 (2)	0,810 (3)	0,553 (3)	0,432 (4)	0,298 (5)	0,229 (6)
85	0,963 (2)	0,779 (2)	0,643 (2)	0,488 (3)	0,358 (4)	0,283 (3)
87	—	0,988 (2)	0,671 (2)	0,564 (2)	0,400 (3)	0,322 (4)

П р и м е ч а н и е. В скобках указано число волн в окружном направлении.

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК НА КОЛЕБАНИЯ

Общие соотношения. Понятие об асимптотическом методе В. В. Болотина было дано в гл. 7. Здесь рассмотрим его применение к тонким упругим оболочкам постоянной толщины [6, 8]. Если характеристические длины волны λ_1 и λ_2 у форм колебаний достаточно малы по сравнению с радиусами срединной поверхности R_1 и R_2 , то уравнения для форм собственных колебаний могут быть взяты в виде системы уравнений (15)

$$\left. \begin{aligned} D \Delta \Delta w + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} - \rho h \omega^2 w &= 0; \\ \frac{1}{Eh} \Delta \Delta \chi - \left(\frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Асимптотическое решение уравнений (55) для прямоугольной (в обобщенном смысле) области со сторонами a_1 и a_2 и с постоянной метрикой срединной поверхности дано в статье [6]. В частности, для собственных частот получена формула

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{Eh}{DR_1^2} \cdot \frac{(k_1^2 \gamma + k_2^2)^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \right], \quad (56)$$

где $\gamma = \frac{R_1}{R_2}$ (радиус R_1 предполагается конечным). Волновые числа k_1 и k_2 вычисляются из системы трансцендентных уравнений (условий склеивания) следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} k_1 a_1 &= \arctg u_{11}(k_1, k_2) + \arctg u_{12}(k_1, k_2) + m_1 \pi; \\ k_2 a_2 &= \arctg u_{21}(k_1, k_2) + \arctg u_{22}(k_1, k_2) + m_2 \pi; \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

здесь m_1, m_2 — целые числа или нуль, а функции $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$ зависят от граничных условий. Для свободно опертых краев все функции $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$ обращаются в нуль, а асимптотическое решение совпадает с хорошо известным точным решением.

Область применения асимптотического метода. Асимптотическое решение пригодно на всей плоскости волновых чисел k_1, k_2 за исключением областей вырождения краевого эффекта (подробнее см. статью [6]). Например, динамический краевой эффект не вырождается для тонких пластин и тонких сферических оболочек. Для цилиндрической оболочки краевой эффект вырождается лишь в случае достаточно малых волновых чисел

$$k_1^2 + k_2^2 \leq \left(\frac{Eh}{DR_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению динамического краевого эффекта, имеет комплексные корни, то краевой эффект называют *осциллирующим*. Если все корни характеристического уравнения, кроме пары чисто мнимых корней,

соответствующих порождающему решению, являются действительными, то краевой эффект называют *неосциллирующим*. При больших $r^2 = k_1^2 + k_2^2$ краевой эффект является неосциллирующим. Этот результат является вполне естественным, если учесть, что при больших показателях изменчивости оболочка ведет себя практически как пластина. При малых r^2 краевой эффект может оказаться осциллирующим. Это справедливо как для оболочек положительной гауссовой кривизны, так и для оболочек отрицательной гауссовой кривизны. Лишь при $0 < \gamma < 1$ краевой эффект остается неосциллирующим при всех зна-

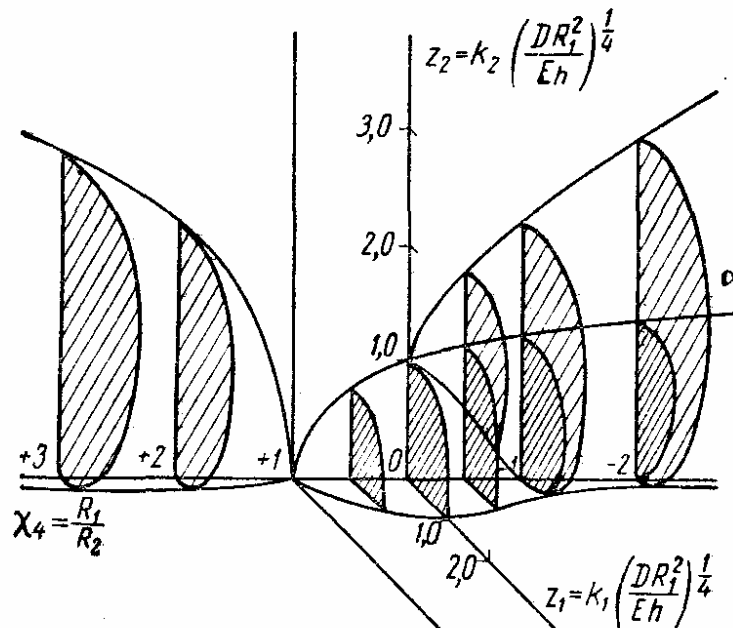


Рис. 19

чениях r . Разбиение пространства параметров по типам краевого эффекта показано на рис. 19. Область осциллирующего краевого эффекта обозначена редкой штриховкой, область вырождения — густой штриховкой.

Приложение метода к задаче о свободных колебаниях сферической панели. Рассмотрим сферическую панель, которая закреплена по контуру, ограниченному четырьмя ортогональными линиями кривизны. Формула для собственной частоты принимает вид

$$\omega = \left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + c^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$c = \left(\frac{Eh}{DR^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Асимптотические решения вблизи края $x_1 = 0$ будут

$$w(x_1, x_2) = W(x_1) \sin k_2(x_2 - \xi_2);$$

$$\chi(x_1, x_2) = X(x_1) \sin k_2(x_2 - \xi_2).$$

где $W(x_1)$ и $X(x_1)$ определяют по формулам

$$W(x_1) = \frac{R}{Eh} \left\{ (k_1^2 + k_2^2) [\sin k_1 (x_1 - \xi_1) - C_1 e^{-s_1 x_1}] + \right. \\ \left. + \frac{2k_2 c^4}{(k_1^2 + k_2^2)^2 + c^4} C_3 e^{-k_2 x_1} \right\};$$

$$X(x_1) = \sin k_1 (x_1 - \xi_1) + C_1 e^{-s_1 x_1} + C_2 e^{-k_2 x_1} + x_1 C_3 e^{-k_2 x_1};$$

здесь $s_1 = (k_1^2 + 2k_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Постоянные ξ_1 , C_1 , C_2 и C_3 определяют из граничных условий [8]. Пусть на краю заданы условия $W(0) = W'(0) = X(0) = X'(0) = 0$. Тогда $\operatorname{tg} k_1 \xi_1 = F_1(k_1, k_2)$, где

$$F_1(k_1, k_2) = \frac{k_1}{s_1} \cdot \frac{1 - g_1(k_1, k_2)}{1 - \frac{k_2}{s_1} g_1(k_1, k_2)};$$

$$g_1(k_1, k_2) = \frac{2k_2 (s_1^2 + k_1^2) c^4}{(k_1^2 + k_2^2) (s_1 + k_2) [(k_1^2 + k_2^2)^2 + c^4]}.$$

Волновые числа находят из уравнений типа (57):

$$k_1 a_1 = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{k_1}{s_1} \cdot \frac{1 - g_1(k_1, k_2)}{1 - \frac{k_2}{s_1} g_1(k_1, k_2)} \right] + m_1 \pi;$$

$$k_2 a_2 = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{k_2}{s_2} \cdot \frac{1 - g_2(k_1, k_2)}{1 - \frac{k_1}{s_2} g_2(k_1, k_2)} \right] + m_2 \pi.$$

Функция $g_2(k_1, k_2)$ получается из $g_1(k_1, k_2)$ круговой заменой индексов.

Некоторые другие приложения метода. К задаче о свободных колебаниях круговых цилиндрических оболочек и панелей асимптотический метод был применен Ю. В. Гавриловым [14, 15]. У прямолинейного края $x_2 = 0$ асимптотическое выражение для разрешающей функции имеет вид

$$\psi(x_1, x_2) = [\sin k_2 (x_2 - \xi_2) + C_1 e^{-s_1 x_2} + \\ + C_2 e^{-s_2 x_2} + C_3 e^{-s_3 x_2}] \sin k_1 (x_1 - \xi_1),$$

где

$$s_1 = (2k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}; \quad s_{2,3} = k_1 \left(1 \pm \frac{c^2}{k_1^2 + k_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для характеристических корней, описывающих краевой эффект у круговых кромок, явных выражений получить не удастся. Численный анализ был дан в статье [14]. Применение асимптотического метода к тонким оболочкам при наличии начальных усилий к срединной поверхности дано в статье [8].

Оценки для плотности собственных частот тонких упругих оболочек. Из формулы (57) можно вывести следующее более грубое приближение:

$$k_1 a_1 = m_1 \pi + O(1); \quad k_2 a_2 = m_2 \pi + O(1). \quad (58)$$

Формулы (58) аналогичны хорошо известным асимптотическим оценкам Р. Куранта для мембран и тонких пластин. Существенно, что для оболочек эти асимптотические оценки верны лишь в том случае, если динамический краевой эффект не вырождается.

Асимптотические формулы (56) и (58) можно использовать для получения оценок для плотности собственных частот преимущественно изгибных колебаний. Будем определять приближенно число собственных частот $N(\omega_*)$, меньших, чем заданное значение ω_* , как отношение площади области на плоскости k_1, k_2 , внутри которой частота ω меньше, чем заданное значение ω_* , к площади одной ячейки $\frac{\pi^2}{a_1 a_2}$:

$$N(\omega_*) \sim \frac{a_1 a_2}{\pi^2} \int_{\omega(k_1, k_2) < \omega_*} dk_1 dk_2.$$

Подробности вычислений см. в статье [35]. Для среднего числа собственных частот, меньших заданного значения ω , имеем формулу

$$N(\omega) \sim \frac{a_1 a_2}{2\pi^2} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \int [\omega^2 - \omega_2^2 (\gamma \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2]^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (59)$$

В этой формуле ω_2 — характерная частота,

$$\omega_2 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Интегрирование в формуле (59) производится по той части квадранта $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$, внутри которой выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно. Дифференцируя почленно формулу (59), для плотности собственных значений $n(\omega)$ получаем формулу

$$n(\omega) \sim \frac{a_1 a_2}{2\pi^2} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \omega \int [\omega^2 - \omega_2^2 (\gamma \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2]^{-\frac{1}{2}} d\theta. \quad (60)$$

Пусть n_C — характерная плотность собственных значений:

$$n_C = \frac{a_1 a_2}{4\pi} \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (61)$$

Выражение, стоящее в правой части формулы, совпадает с плотностью собственных частот для тонкой пластины. Удобно ввести безразмерный параметр $\alpha = \frac{\omega_2}{\omega}$. Всегда можно занумеровать координаты

x_1, x_2 так, что $\gamma = \frac{R_1}{R_2} \leq 1$. В этом случае вычисления по формуле (60) с использованием обозначения (61) дают

$$\frac{n(\omega)}{n_c} \approx \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{если } 1 - \alpha\gamma < 0; \\ \frac{2}{\pi \sqrt{(1+\alpha)(1-\alpha\gamma)}} K \left[\sqrt{\frac{2\alpha(1-\gamma)}{(1+\alpha)(1-\alpha\gamma)}} \right], & \text{если } 1 - \alpha\gamma > 0, \alpha < 1; \\ \frac{2}{\pi \sqrt{2\alpha(1-\gamma)}} K \left[\sqrt{\frac{(1+\alpha)(1-\alpha\gamma)}{2\alpha(1-\gamma)}} \right], & \text{если } 1 - \alpha\gamma > 0, \alpha > 1; \\ \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}, & \text{если } 1 - \alpha\gamma > 0, \gamma = 1. \end{array} \right\} \quad (62)$$

Здесь $K(x)$ — полный эллиптический интеграл в форме Лежандра первого рода. Последняя формула (62) соответствует случаю сферической оболочки.

Точки сгущения частот свободных колебаний тонких упругих оболочек. Формулы (62) позволяют обнаружить интересные свойства плотности частот свободных колебаний тонких упругих оболочек n . Пусть ω_1, ω_2 — характерные частоты,

$$\omega_1 = \frac{1}{R_2} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \omega_2 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (63)$$

Используя обозначения (63), можно сформулировать выводы из статьи [35]: плотность частот свободных колебаний для оболочки

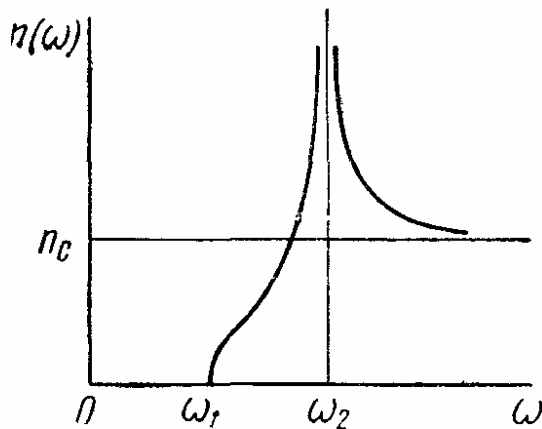


Рис. 20

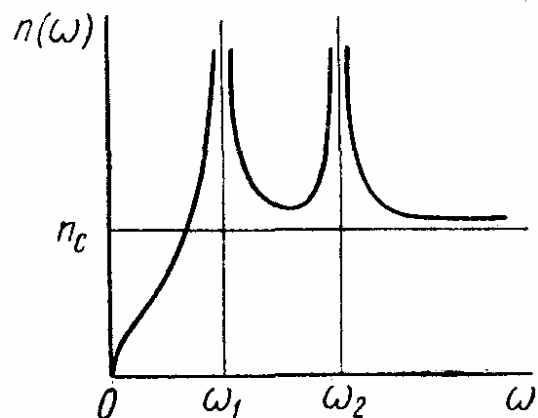


Рис. 21

положительной гауссовой кривизны равна нулю при $0 < \omega < \omega_1$, имеет полюс при $\omega = \omega_2$ и приближается к плотности собственных частот для пластины при $\omega > \omega_2$ (рис. 20). Аналогичные результаты получаются для оболочки нулевой гауссовой кривизны; в этом случае, однако, $\omega_1 \rightarrow 0$ и, следовательно, плотность частот отлична от нуля во всем диапазоне. Частоты свободных колебаний оболочки отрицательной гауссовой кривизны имеют две точки сгущения: одну — вблизи

$\omega = \omega_1$ и другую — вблизи $\omega = \omega_2$. С увеличением частоты плотность быстро приближается к значению плотности для пластинки n_C (рис. 21).

Обсуждаемые здесь точки сгущения принадлежат лишь асимптотическим оценкам распределения собственных частот. Эмпирические плотности частот будут иметь соответствующие максимумы лишь в том случае, если плотность P . Куранта достаточно высока. Сопоставление асимптотических оценок с эмпирическими данными проведено в статье [35].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеносов Л. Г. Устойчивость и колебания защемленной конической оболочки. Сб. «Итоговая научная конференция Казанского университета за 1963 г., секции: математика, кибернетика и теория вероятности, механика». Казань, 1964.
2. Алумян Н. А. О фундаментальной системе интегралов малых осесимметрических установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения. «Изв. АН Эстонской ССР, т. 9. Серия технических и физико-математических наук», 1960, № 1.
3. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Об устойчивости и колебаниях пологой ортотропной цилиндрической панели. Доклады АН Армянской ССР, т. 30, № 1, 1960.
4. Болотин В. В. Некоторые новые задачи динамики оболочек. «Расчеты на прочность». Вып. 4. Машгиз, 1959.
5. Болотин В. В. и др. О поведении тонких упругих оболочек при воздействии импульсивной нагрузки. «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 2.
6. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, т. 24, № 5, 1960.
7. Болотин В. В. Асимптотический метод в теории колебаний упругих пластин и оболочек. Труды Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Казань, КФАН СССР, 1961.
8. Болотин В. В. О влиянии безмоментного напряженного состояния на спектры собственных колебаний тонких упругих оболочек. «Изв. АН СССР, Механика и машиностроение», 1962, № 4.
9. Бреславский В. Е. О колебаниях цилиндрических оболочек. Инженерный сборник, т. 16, 1953.
10. Бреславский В. Е. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием гидростатического давления. «Изв. АН СССР, ОТН», 1956, № 2.
11. Бурмистров Е. Ф. Нелинейные поперечные колебания ортотропных оболочек вращения. Инженерный сборник. Т. 26, 1958.
12. Ван-Фо-Фы Г. А., Буйвол В. Н. Колебания пологих сферических оболочек. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, изд-во АН Армянской ССР, 1964.
13. Вейгель И., Мянниль А., Орг Э. Малые установившиеся осесимметричные колебания конической оболочки вращения. «Изв. АН Эстонской ССР. Серия технических и физико-математических наук», т. 9, № 1, 1960.
14. Гаврилов Ю. В. Определение частот собственных колебаний тонких упругих круговых цилиндрических оболочек. «Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение», 1961, № 1.
15. Гаврилов Ю. В. Исследование спектра собственных колебаний упругих цилиндрических оболочек. Труды Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Казань, КФАН СССР, 1961.
16. Годзевиц В. Г. Свободные колебания круговых конических оболочек. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, изд-во АН Армянской ССР, 1964.
17. Гонткевич В. С. Собственные колебания ортотропных цилиндрических оболочек. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Казань, КФАН СССР, 1961.
18. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев, «Наукова Думка», 1964.
19. Григолюк Э. И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней. «Изв. АН СССР, ОТН», 1955, № 3.
20. Григолюк Э. И. О малых колебаниях тонких упругих конических оболочек. «Изв. АН СССР, ОТН», 1956, № 6.

21. И в а н ю т а Э. И., Ф и н к е л ь ш т е й н Р. М. О влиянии тангенциальных сил инерции на величину частоты свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки. Сб. «Исследования по упругости и пластичности». Вып. 2, ЛГУ, 1963.
22. М а л к и н а Р. Л. Колебания некруговых цилиндрических оболочек. «Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение», 1960, № 1.
23. М а л к и н а Р. Л. Свободные колебания сферического купола. Изв. вузов, «Авиационная техника», 1964, № 1.
24. М о с к а л е н к о В. Н. О колебаниях конических оболочек. Сб. «Доклады научно-технической конференции МЭИ, секции энергомашиностроения, подсекция динамика и прочность машин» М., Изд. МЭИ, 1967.
25. Н и г у л У. К. Об общих формах колебания круговой замкнутой цилиндрической оболочки. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 147, 1958.
26. Н и г у л У. К. Некоторые результаты исследования уравнений собственных колебаний упругой кругоцилиндрической оболочки. Труды Таллинского политехнического института, № 171А, 1960.
27. Н и к у л и н М. В. Влияние осевых усилий на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки. Сб. «Прочность цилиндрических оболочек». М., Оборонгиз, 1959.
28. О н и а ш в и л и О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд-во АН СССР, 1957.
29. П о в е р у с Л. Ю., Р я я м е т Р. К. Малые неосесимметричные собственные колебания упругих тонких конических и цилиндрических оболочек. Труды Таллинского политехнического института, серия А, № 147, 1958.
30. Т р а п е з и н И. И. О колебаниях круговой тонкостенной конической оболочки. Сб. «Расчеты на прочность». Вып. 4, М., Машгиз, 1959.
31. Ш в е й к о Ю. Ю., Г а в р и л о в Ю. В., Б р у с и л о в с к и й А. Д. О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрических оболочек. Доклады научно-технической конференции МЭИ. М., изд-во МЭИ, 1965.
32. A r n o l d R. N., W a r b u r t o n G. B. Flexural vibrations of the walls of thin cylindrical shells having freely supported ends. Proc. Roy. Soc., vol. 197A, n. 1049, 1949.
33. A r n o l d R. N., W a r b u r t o n G. B. The flexural vibrations of thin cylinders. Proc. Inst. Mech. Engrs., vol. 167A, n. 1, 1953.
34. B a r o n L., B l e i c h H. H. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells. Journ. Appl. Mech. vol. 21, n. 2, 1954.
35. B o l o t i n V. V. The density of eigenvalues in vibration problems of elastic plates and shells. Proc. vibration problems, vol. 6, n. 4, 1965.
36. F o r s b e r g K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells. AIAA Journal, vol. 2, n. 12, 1964.
37. F u n g Y. C. On the vibrations of thin cylindrical shells under internal pressure. J. Aeronaut. Sci., v. 24, n. 9, 1957.
38. H e r r m a n n G., M i r s k y A. Three-dimensional and shell-theory analysis of axially symmetric motions of cylinders. Journ. Appl. Mech., vol. 23, n. 4, 1956.
39. H o p p m a n n W. H. Some characteristics of the flexural vibrations of orthogonally stiffened cylindrical shells. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 30, n. 1, 1958.
40. H o p p m a n n W. H., M i l l e r C. E. Flexural vibration of shallow orthotropic spherical shells. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 34, n. 8, 1962.
41. K a l n i n s A., N a g h d i P. M. Axisymmetric vibrations of shallow elastic spherical shells. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 32, n. 3, 1960.
42. M i r s k y J., H e r r m a n n G. Axially symmetric motions of thick cylindrical shells. Journ. Appl. Mech., vol. 21, n. 2, 1954.
43. N a g h d i P. M., B e r r y J. B. On the equations of motions of cylindrical shells. Journ. Appl. Mech., vol. 21, n. 2, 1958.
44. P o i s s o n S. D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides. Paris, Mém. de l'acad., t. 8, 1829.
45. P r a s a d C. On vibration of spherical shells. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 36, n. 3, 1964.
46. R e i s s n e r E. On axisymmetrical vibrations of shallow spherical shells. Quart. Appl. Math., vol. 13, n. 3, 1955.
47. W e i n g a r t e n V. I. Free vibration of thin cylindrical shells. AIAA Journal, vol. 2, n. 4, 1964.
48. J a m a n e J. R. Natural frequency curves of simply supported cylindrical shells. AIAA Journal, vol. 3, n. 1, 1965.
49. Y u Y. Y. Free vibrations of thin cylindrical shells having finite length with freely supported and clamped edges. Journ. Appl. Mech., vol. 22, n. 4, 1955.

Глава 9

ТЕОРИЯ АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Предмет теории аэрогидроупругости. Предметом теории *аэрогидроупругости* является исследование поведения конструкций, взаимодействующих с газом или жидкостью. В задачах аэрогидродинамики тела, внесенные в газ или жидкость, предполагают абсолютно жесткими. В задачах аэрогидроупругости учитывают упругие деформации тел. Более того, существенным моментом теории аэрогидроупругости является

учет обратного влияния деформаций тела на движение газа или жидкости. Следовательно, теория аэрогидроупругости является комплексной областью механики, в которой объединены методы теории упругости и строительной механики, с одной стороны, и методы аэрогидромеханики — с другой стороны. Поскольку большая часть аэроупругих явлений носит динамический характер, то в теории аэрогидроупругости широко используют методы теории колебаний. Место статических и

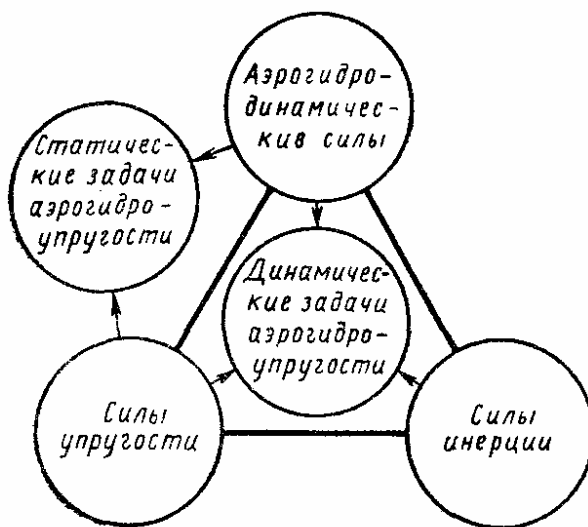


Рис. 1

динамических задач аэрогидроупругости наглядно иллюстрирует «треугольник аэроупругости» (рис. 1). В современных конструкциях существенное значение приобретает также и температурный фактор, что дает основание говорить о задачах *аэротермоупругости*. Наконец в случае достаточно гибких конструкций упругие деформации могут оказывать заметное влияние на устойчивость движения и процессы управления (и обратно). Следовательно, в общем случае нужно учитывать сложное взаимодействие аэродинамических сил, сил инерции, сил упругости, температурных процессов и процессов в системах управления. В настоящей главе мы не рассматриваем задачи аэрогидроупругости в столь общей постановке, а ограничимся более классическими задачами.

Статические задачи аэрогидроупругости. Простейшей статической задачей аэрогидроупругости является *определение квазистатических*

нагрузок, действующих со стороны потока на конструкцию, с учетом упругих деформаций последней. Для решения этой задачи требуется совместное рассмотрение уравнений теории упругости или строительной механики для статического случая и уравнений стационарного течения газа или жидкости. Если конструкция является достаточно гибкой, то при достижении определенной скорости может наступить статическая потеря устойчивости первоначальной формы, аналогичная явлению неустойчивости в классической теории упругой устойчивости. Наиболее известным примером статической потери аэроупругой устойчивости служит *дивергенция (закручивание) крыльев самолета*. Еще одним примером может служить *статическое выпучивание пластин и оболочек*, обтекаемых потоком газа. Наряду с аэродинамическими силами здесь важную роль могут играть начальные усилия в срединной поверхности и температурные усилия. К другим статическим аэроупругим явлениям можно отнести *влияние статических упругих деформаций на устойчивость и эффективность систем управления*.

Динамические задачи аэрогидроупругости. Важнейшим примером динамических задач служит *флаттер крыльев самолета* — автоколебания, поддерживаемые за счет энергии движения самолета (или энергии потока). Другим примером являются автоколебания пластин и оболочек, обтекаемых потоком — так называемый *панельный флаттер*. Как флаттер крыльев, так и панельный флаттер могут быть объяснены взаимодействием аэродинамических сил, сил инерции и упругих сил; важную роль при этом взаимодействии играет связь между различными формами колебаний. Для описания классического флаттера достаточно привлечь линеаризированную теорию потенциального течения.

Имеются автоколебательные аэроупругие явления, происхождение которых носит другой характер. Таков, например, *срывной флаттер лопаток и винтов*, возникающий в случае обтекания с большими углами атаки, *автоколебания проводов, дымовых труб, балок жесткости висячих мостов* и других плохо обтекаемых тел в потоке воздуха. Перечисленные явления сопровождаются срывами на обтекаемой поверхности, образованием *вихревой дорожки Кармана* в следу за телом и другими «неклассическими» особенностями.

Следует отметить, что в том случае, когда срывные явления не связаны с деформациями конструкции, соответствующие задачи являются задачами о вынужденных колебаниях.

Перечислим некоторые динамические задачи, которые не сводятся к автоколебательным задачам. К ним относятся *определение аэрогидродинамических нагрузок* при резком маневрировании, при движении в неспокойной атмосфере, задачи *бафтинга* хвостового оперения — вынужденных колебаний в вихревом следу за крыльями и т. д. Строго говоря, перечисленные выше задачи становятся задачами аэрогидроупругости лишь в том случае, если учитывают обратное влияние упругих деформаций на поведение жидкости или газа.

Некоторые особенности задач гидроупругости. Для задач гидроупругости характерны относительно низкие скорости, высокая плотность и малая сжимаемость среды. Большая часть аэроупругих явлений, перечисленных выше, имеет аналоги в случае плотной и малосжимаемой среды. Вместе с тем, для такой среды важное значение имеет *задача об определении присоединенных масс жидкости* и, вообще, задачи о собственных и вынужденных колебаниях упругих тел, помещенных в жидкость. Практический интерес представляют также и задачи об

акустическом излучении упругих тел, колеблющихся в жидкости (упруго-акустические задачи).

Библиографические указания. Укажем на основные источники — книги, в которых можно найти как систематическое изложение различных разделов теории, так и дальнейшие библиографические указания [4, 15, 24, 52, 67]. Обстоятельный библиографический обзор литературы по панельному флаттеру был недавно опубликован в работах [23, 79].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОАЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ДЕФОРМИРУЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Приведем некоторые сведения из аэрогидродинамики (подробнее см. работы [4, 39, 67]).

Уравнения потенциального течения. Допустим, что газ, обтекающий некоторое тело, например, крыло или часть обшивки, является идеальным и изэнтропическим, а движение — безвихревым. Пренебрегая массовыми силами, получим основное дифференциальное уравнение для потенциала скоростей

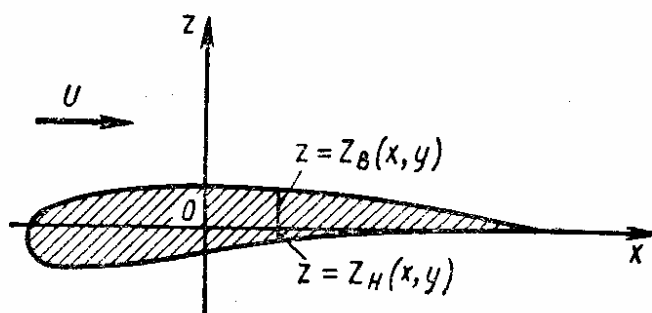


Рис. 2

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа; c — скорость звука.

Вектор скорости \mathbf{v} связан с потенциалом φ соотношением

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Уравнение (1) вытекает из уравнения неразрывности. Первый интеграл от уравнений движения приводит к уравнению Бернулли:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = \int \frac{dp}{\rho} + F(t), \quad (2)$$

где p — давление; ρ — плотность; $F(t)$ — функция, которая обычно тождественно равна нулю или может быть определена из условий на бесконечности.

Линеаризация уравнений. Если тело, помещенное в поток, хорошо обтекаемо, то вносимые им возмущения будут достаточно малы. Тогда уравнения (1) и (2) можно линеаризировать относительно возмущений потенциала φ . Пусть невозмущенная скорость потока U имеет направление, параллельное оси Ox (рис. 2). Вместо движения газа можно рассматривать движение тела со скоростью U в отрицательном направлении оси Ox . Малые возмущения скоростей имеют потенциал φ' :

$$v_x = U + \frac{\partial \varphi'}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}.$$

Линеаризированное уравнение для потенциала скоростей возмущений будет следующим (c_0 — невозмущенная скорость звука):

$$\Delta \varphi' = \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi'. \quad (3)$$

После определения φ' из уравнения (3), рассматриваемого совместно с некоторыми граничными условиями, давление p может быть найдено по линеаризированной формуле

$$p - p_0 = -\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi'; \quad (4)$$

здесь ρ_0 и p_0 — невозмущенные значения плотности и давления. В дальнейшем штрихи у малых возмущений опускаем.

Течение несжимаемой жидкости. В случае несжимаемой жидкости ($c_0 \rightarrow \infty$) вместо уравнения (3) имеем уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (5)$$

Сформулируем граничные условия для определения φ . Пусть поверхность тела определяется уравнением $z = Z(x, y)$, а проекция тела на плоскость Oxy есть S . Уравнение для верхней поверхности тела запишем в виде $z = Z_v(x, y)$, а для нижней — в виде $z = Z_n(x, y)$. Граничные условия обтекания тела будут

$$v_z = \begin{cases} \frac{\partial Z_v}{\partial t} + U \frac{\partial Z_v}{\partial x} & \text{при } z = Z_v, (x, y) \in S; \\ \frac{\partial Z_n}{\partial t} + U \frac{\partial Z_n}{\partial x} & \text{при } z = Z_n, (x, y) \in S. \end{cases}$$

Для весьма тонкого тела (тонкого крыла) эти условия могут быть перенесены на плоскость Oxy . Кроме этих условий должны быть поставлены условия за телом (в области вихревой пелены) и условия на бесконечности. Для несжимаемой жидкости первое условие (условие Жуковского) сводится к требованию того, чтобы возмущения скорости на задней кромке стремились к нулю (или чтобы потенциал стремился к постоянной величине). В случае дозвукового обтекания крыла возмущения скорости на бесконечности должны убывать, по крайней мере,

как $(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$. Выражения для подъемной силы L и момента M_y для случая тонкого абсолютно жесткого крыла бесконечного размаха, совершающего гармонические колебания с частотой ω , имеют вид

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4} \pi \rho b^2 (-\ddot{\xi} + U\dot{\theta} - x_m \ddot{\theta}) + \pi \rho U b C(k) \times \\ &\quad \times \left[-\dot{\xi} + U\theta + \left(\frac{1}{4} b - x_m \right) \dot{\theta} \right]; \\ M_y &= \frac{1}{4} \pi \rho b^2 \left[-x_m \ddot{\xi} - \left(\frac{1}{4} b - x_m \right) \dot{\theta} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{32} b^2 + x_m^2 \right) \ddot{\theta} \right] + \pi \rho U^2 b \left(\frac{1}{4} b + x_m \right) C(k) \times \\ &\quad \times \left[-\dot{\xi} + U\theta + \left(\frac{1}{4} b - x_m \right) \dot{\theta} \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

здесь b — длина хорды; $\xi(t)$ — поперечные смещения точки с координатой x_m ; $\theta(t)$ — угол поворота (рис. 3). Через $C(k)$ обозначена комплексная функция приведенной частоты

$$k = \frac{\omega b}{2U} \quad (7)$$

(функция Теодорсена), которая выражается через функцию Ганкеля второго рода

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}. \quad (8)$$

Полярная диаграмма для функции $C(k)$ показана на рис. 4.

Заменяя в формулах (6) функцию $C(k)$ на значение $C(0) = 1$, получим формулы, соответствующие так называемой квазистационарной

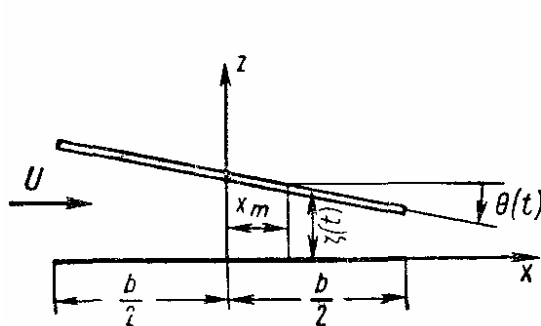


Рис. 3

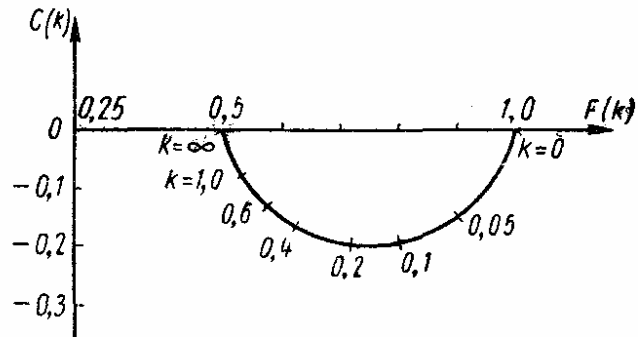


Рис. 4

теории. Еще более грубое приближение получим, беря формулы для стационарного обтекания и заменяя в них угол атаки мгновенным значением угла, который составляет вектор суммарной скорости со средней линией профиля

$$\left. \begin{aligned} L &= \pi \rho U b (-\dot{\xi} + U\theta); \\ M_y &= -L \left(\frac{b}{4} + x_m \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Гиперзвуковое течение. В случае больших сверхзвуковых скоростей ($M \gg 1$) возможно существенное упрощение теории. Пусть $\omega_a \ll c$, где ω_a — нормальный компонент скорости частиц на поверхности тела (скос потока). Тогда согласно «закону плоских сечений» имеем приближенное соотношение

$$p_v - p_n = 2\rho c_0 \omega_a(x, t). \quad (10)$$

Смысл рассматриваемого приближения состоит в следующем: при сверхзвуковых скоростях с увеличением скорости влияние возмущений носит все более локальный характер и в предельном случае весьма больших сверхзвуковых скоростей каждая частица газа движется практически лишь в направлении, перпендикулярном к скорости потока U . Частицы газа движутся в узких областях, ограниченных близкими вертикальными плоскостями. Чем больше скорость потока U , тем точнее выполняется этот «закон плоских сечений». Для давления на поверхность тела получается формула, аналогичная выражению для давления на

поршень, движущийся в одномерном канале. Отсюда происходит второе название данного подхода — поршневая теория. Выражение для давления на тело согласно нелинейной поршневой теории имеет вид

$$p = p_0 \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{w}{c_0} \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (11)$$

Считая скос потока малым ($w \ll c_0$), можно разложить правую часть формулы (11) в ряд по степеням $\frac{w}{c_0}$:

$$p = p_0 \left[1 + \frac{\kappa w}{c_0} + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{4} \left(\frac{w}{c_0} \right)^2 + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{12} \left(\frac{w}{c_0} \right)^3 + \dots \right].$$

Как частный случай из этой формулы следует формула Аккерета (если сохранить члены до $\frac{w}{c_0}$ включительно) и формула Буземана (если сохранить члены до $\frac{w^2}{c_0^2}$).

Библиографические указания. Определению сил, действующих на тонкие тела, которые движутся в потоке жидкости или газа, посвящена обширная литература [4, 5, 12, 14, 15, 24, 27, 28, 31, 39, 43, 52, 67, 74]. Изложение этого вопроса применительно к задачам аэроупругости можно найти в книгах [4, 15, 39, 67]. Приближенные формулы для больших сверхзвуковых скоростей приведены в статьях [27, 31, 74]; сопоставление этих формул дано в книге [15]. Области применения различных аэродинамических теорий приведены в табл. 1 [39]. В этой таблице k — приведенная частота по выражению (7); δ — отношение толщины или амплитуды к хорде крыла; L — удлинение (отношение длины крыла к хорде).

ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ

Предварительные замечания. Рассмотрим задачи аэрогидроупругости для конструкций, которые можно рассматривать как стержни. Важнейшим примером могут служить крылья достаточно большого удлинения. Методика расчета крыльев на флаттер и дивергенцию представляет собой весьма разработанную область теории аэроупругости. Здесь рассмотрим теорию флаттера и дивергенции крыльев в простейшей постановке и некоторые неклассические задачи аэрогидроупругости для стержней. Подробнее см. работы [4, 24, 67].

Уравнения малых колебаний крыла в потоке газа. Будем трактовать крыло как упругий стержень, жесткость которого в одном направлении максимальна и весьма велика по сравнению с другой изгибной жесткостью EJ , а также с крутильной жесткостью GJ_k . Ось центров изгиба Oy полагаем прямой, направленной перпендикулярно к потоку

1. Области применения различных аэродинамических

Характеристика случая	Дифференциальное уравнение для потенциала скорости	$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big _{z=+0}$	Давление
			$-\left(\frac{p-p_0}{\rho_0}\right)$
Нелинейное околосвуковое течение	$\left[(M^2-1) + \frac{\kappa+1}{U} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} +$ $+ 2 \frac{M}{a_0} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$	$U \frac{\partial h}{\partial x}$	$U \frac{\partial \varphi}{\partial x}$
Дозвуковое и сверхзвуковое течение	$(M^2-1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{M}{a_0} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} +$ $+ \frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$	$U \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}$	$U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$
Нестационарное околосвуковое течение	$\frac{2}{a_0} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} -$ $- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$		
Крыло малого удлинения или квазистационар- ное околосвуко- вое течение	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$		
Высокие частоты колебаний, сжимаемая среда	$\frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} -$ $- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$	$\frac{\partial h}{\partial t}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$
Высокие частоты колеба- ний, крыло малого удлинения	$\frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$		
Высокие частоты колебаний, крыло квази- малого удлинения			
Теория поршня	$\frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$		
Высокие частоты колебаний, не- сжимаемая среда	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$		
Высокие частоты колебаний, крыло очень малого удлинения	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$		

теорий к задаче обтекания тонкого крыла

на крыле	Ограничения на параметры			
Соотношение подобия для $\frac{p-p_0}{\rho_0 W^2}$	Удлинение L ($L \gg \delta$)	Число Маха M	Приведенная частота k	Относительная толщина или амплитуда δ
$\frac{\delta^{2/3}}{(\kappa+1)^{1/3}} \times$ $\times F \left[\frac{(\kappa+1)^{1/3} \delta^{1/3} L}{(M-1)}, \frac{(M-1)}{(\kappa+1)^{2/3} \delta^{2/3}}, \frac{k}{(\kappa+1)^{2/3} \delta^{2/3}} \right]$	$L^{-1} = 0$ $= O(\delta^{1/3})$	$ M-1 = 0$ $= O(\delta^{2/3})$	$k = O(\delta^{2/3})$	$\delta \ll 1$
$\frac{\delta}{ M^2-1 ^{1/2}} \times$ $\times F \left[- M^2-1 ^{1/2} L, \frac{kM^2}{ M^2-1 }, k \right]$	$L^{-1} = O(M^2-1 ^{1/2})$	$ M-1 \gg \delta^{2/3};$ $M \ll \delta^{-1}$	$k = O(1),$ $k = O(M^2-1)$	$\delta \ll 1,$ $\delta \ll M^{-1}$
$\delta F(L, k)$	$L^{-1} = O(k^{1/2})$	$ M-1 \ll k$	$k = O(1),$ $k \gg \delta^{2/3}$	$\delta \ll 1,$ $\delta \ll k^{3/2}$
$\delta L F(k)$	$L \ll \delta^{-1/3};$ $L \ll M^2-1 ^{-1/2}$	$ M^2-1 \ll L^{-2}$	$k = O(1);$ $k \gg (ML)^{-1}$	$\delta \ll 1$
$k^2 \delta F(L, kM)$	$L^{-1} = O(kM)$	$ M-1 = O(k);$ $M \ll (k\delta)^{-1}$	$1 \leq k \leq \delta^{-1};$ $k \ll (M\delta)^{-1}$	$\delta \ll (kM)^{-1};$ $\delta \ll k^{-1}$
$k^2 \delta L F(kML)$	$L \ll 1$	$M = O(k^{-1} L^{-1})$	$1 \leq k \leq \delta^{-1};$ $k \ll \delta^{-1}$	$\delta \ll k^{-1}$
$\text{const } k \delta M^{-1}$	$L^{-1} = O(kM)$	$M \gg k^{-1}$	$1 \leq k \leq \delta^{-1};$ $k \gg M^{-1}$	
$k^2 \delta F(L)$	$L^{-1} \ll kM$	$M \gg k^{-1}$	$1 \leq k \leq \delta^{-1};$ $k \gg M^{-1}$	
$\text{const } k^2 \delta L$	$L^{-1} = O(1)$	$M \ll k^{-1}$	$1 \leq k \leq \delta^{-1};$ $k \ll M^{-1}$	
—	$L \ll 1$	$M \ll (kL)^{-1}$	$1 \leq k \leq \delta^{-1};$ $k \ll (ML)^{-1}$	

(рис. 5). Для смещений центров изгиба $v(x, t)$ и углов поворота поперечных сечений $\theta(x, t)$ имеем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - x_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) &= L; \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + m \left(r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - x_m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) &= M_y; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

здесь m — масса крыла на единицу длины (вдоль размаха); x_m — расстояния между осью центров изгиба и осью центров масс; r — радиус инерции сечения относительно центра изгиба; L и M_y — линеаризированные выражения для подъемной силы и момента, отнесенных к единице длины крыла.

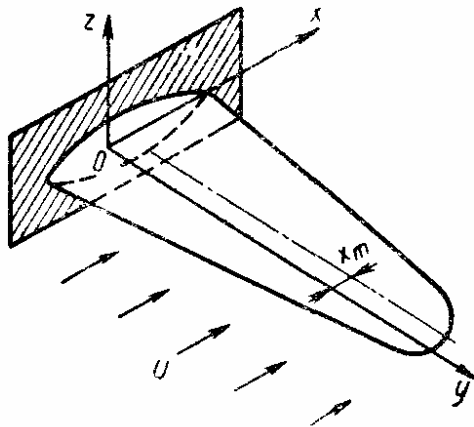


Рис. 5

Вообще говоря, сила L и момент M_y выражаются через перемещение v и угол θ весьма сложно. В случае, если крыло достаточно длинное и его параметры вдоль размаха меняются медленно, вычисления можно упростить, трактуя приближенно поток в каждом сечении как плоский. Тогда сила L и момент M_y могут быть определены по формулам типа (6) и (9).

Дивергенция крыла. Рассмотрим некоторые стационарные решения системы (12). Допустим, что в стационарном случае сила L от перемещения v не зависит, а момент M_y выражается через эмпирический коэффициент $c_M(\theta)$ следующей формулой:

$$M_y = c_M \rho \frac{U^2 b^2}{2}. \quad (13)$$

Тогда второе уравнение системы (12) может быть рассмотрено независимо. После линеаризации относительно угла θ оно принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(GJ_k \frac{d\theta}{dx} \right) + \frac{\partial c_M}{\partial \theta} \cdot \frac{\rho U^2 b^2 \theta}{2} = 0. \quad (14)$$

Краевые условия для консольного крыла будут

$$\theta(0) = \frac{d\theta(l)}{dx} = 0, \quad (15)$$

где l — длина крыла. При $U = 0$ краевая задача не имеет никаких решений, кроме тривиального решения $\theta = 0$. Минимальное значение скорости U , при котором краевая задача имеет решения, отличные от тривиального, соответствует разветвлению форм равновесия. При этом значении наряду с тривиальной (незакрученной) формой появляется смежная с ней форма равновесия, которая сопровождается закручиванием крыла. Исследование соответствующей неоднородной задачи показывает, что приближение к указанной скорости ведет к резкому нара-

станию углов закручивания — к *дивергенции крыла*. Дивергенция крыла является полным аналогом обычной статической неустойчивости в упругих системах, а метод определения критической скорости дивергенции — полным аналогом метода Эйлера в теории упругой устойчивости.

В случае крыла постоянного сечения уравнение (14) и краевые условия (15) весьма упрощаются:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + k^2\theta = 0; \quad \theta(0) = \frac{d\theta(l)}{dx} = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{\rho U^2 b^2}{2GJ_k} \cdot \frac{\partial c_M}{\partial \theta}.$$

Нетривиальные решения имеют место при $\cos kl = 0$; отсюда критическая скорость дивергенции

$$U_{div} = \frac{\pi}{2lb} \sqrt{\frac{2GJ_k}{\rho \frac{\partial c_M}{\partial \theta}}}. \quad (16)$$

Изгибно-крутильный флаттер крыла. Подстановка в уравнения (12) выражений

$$v(x, t) = V(x) e^{st}; \quad \theta(x, t) = \Theta(x) e^{st},$$

где V и Θ — некоторые функции координаты (формы колебаний); s — характеристический показатель, приводит к некоторой задаче о собственных значениях. Цель состоит в исследовании поведения показателей s в зависимости от скорости U . Относительное равновесие крыла в потоке газа устойчиво, пока все показатели s лежат в левой полуплоскости комплексного переменного (рис. 6, а). Наименьшее значение скорости U , начиная с которого хотя бы один из показателей переходит на правую полуплоскость, является критической скоростью. Выход на правую полуплоскость означает колебательную форму неустойчивости (*флаттер*). Исключение составляет случай, когда переход осуществляется через точку $s = 0$; этот случай, очевидно, соответствует дивергенции (рис. 6, б). При изгибно-крутильном флаттере существенное значение имеет парное взаимодействие различных степеней свободы. Эта сторона становится особенно ясной, если от системы с бесконечным числом степеней свободы перейти к конечномерной системе. Наиболее распространенный подход основан на задании движения крыла в следующем виде:

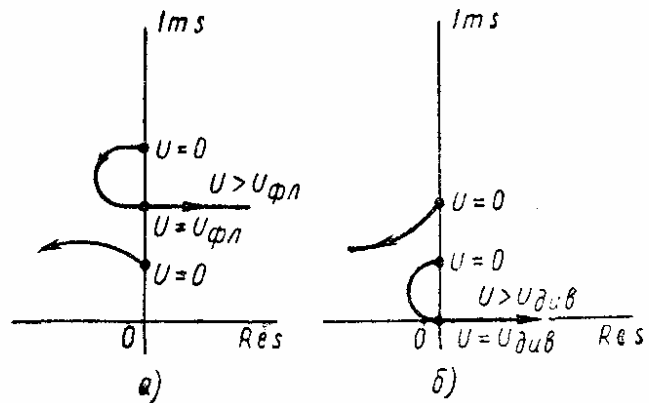


Рис. 6

$$v(x, t) = \sum g_k(t) \varphi_k(x); \quad \theta(x, t) = \sum f_k(t) \psi_k(x); \quad (17)$$

здесь g_k и f_k — обобщенные координаты, первая из которых соответствует изгибу, вторая — кручению; φ_k и ψ_k — функции, удовлетворяющие краевым условиям (например, «балочные» функции). Подставляя выражения (17) в уравнения (12) и применяя вариационный метод Галеркина, приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно g_k и f_k .

Вычисления показывают, что, удерживая в рядах (17) по одному первому члену, мы получаем качественно удовлетворительные результаты. Изгибно-крутильный флаттер поддерживается, следовательно, благодаря взаимодействию основных форм изгибных и крутильных колебаний. На критическую скорость существенное влияние оказывает соотношение между парциальной собственной частотой изгибных колебаний и парциальной собственной частотой крутильных колебаний. В зависимости от соотношения параметров критическая скорость флаттера может оказаться как меньше, так и больше критической скорости дивергенции.

Колебания плохо обтекаемых стержней в потоке газа. Рассмотрим колебания плохообтекаемого тела, например, кругового цилиндра (рис. 7) в потоке газа. Характерным для этих колебаний является возникновение в следу вихревой дорожки Кармана. При отделении от тела одиночного вихря циркуляция изменяется на величину, равную интенсивности вихря. Если за телом образуется вихревая дорожка Кармана,

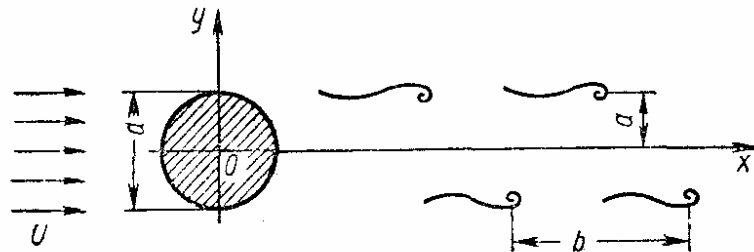


Рис. 7

то с тела попеременно через равные интервалы времени срываются вихри противоположного направления. Поэтому возникают периодические изменения подъемной силы, что служит причиной колебаний, происходящих поперек направления потока.

Если цилиндр неподвижен, то частота срыва вихрей θ может быть найдена из условия, что число Струхала (приведенная частота)

$$k = \frac{\theta d}{U} \approx 0,2. \quad (18)$$

Более точное эмпирическое соотношение, справедливое для чисел Рейнольдса Re , лежащих в диапазоне $40 < Re < 5 \cdot 10^3$, имеет вид

$$k = 0,195 \left(1 - \frac{20,1}{Re} \right). \quad (19)$$

Амплитуда подъемной силы, действующей на неподвижный цилиндр, может быть найдена по формуле

$$q_0 = c_y \frac{\rho U^2 d}{2}, \quad (20)$$

где

$$c_y = 2 \sqrt{2} \frac{b}{d} \left(1 - \frac{b}{d} k \right), \quad (21)$$

а b — расстояние между вихрями (см. рис. 7). При $k = 0,2$ и $\frac{b}{d} = 4,3$ формула (21) дает $c_y = 1,70$. Это значение, по-видимому, дает верхний предел коэффициента подъемной силы. Опыты [12] дают значения $c_y = 0,50 \div 1,00$.

Колебания плохо обтекаемых тел в потоке газа могут трактоваться либо как вынужденные колебания, либо как автоколебания в некоторой системе с запаздыванием [12]. Опыты показывают, что колебания, воз-

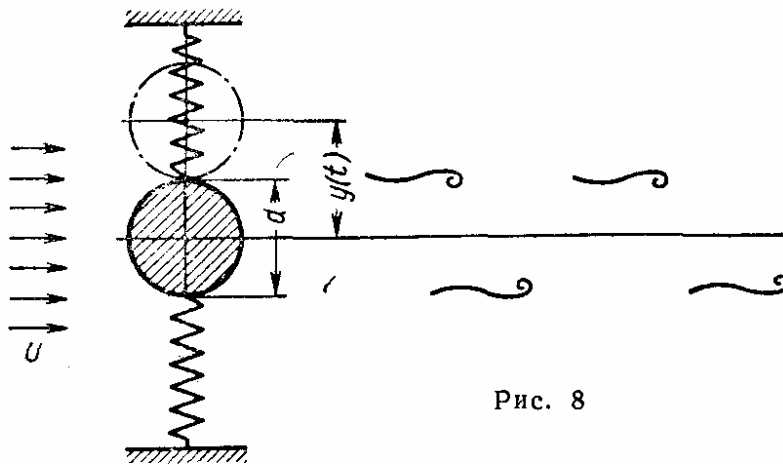


Рис. 8

буждаемые потоком тяжелой жидкости, лучше описываются как вынужденные колебания, а колебания в потоке газа — как автоколебания [12, 15]. Механическая модель цилиндра, колеблющегося в потоке жидкости, показана на рис. 8. Уравнение для описания автоколебаний имеет вид

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = \frac{q[y(t)]}{m}, \quad (22)$$

где ω — собственная частота; ε — коэффициент демпфирования; m — масса единицы длины цилиндра; q — аэродинамическая нагрузка на единицу его длины. Эту нагрузку будем считать периодической кусочно-постоянной функцией с амплитудой q_0 , частотой, равной частоте колебаний цилиндра и запаздывающей по фазе на время τ (рис. 9). Предполагая, что перемещение $y(t)$ меняется по закону

$$y(t) = A \cos \theta t, \quad (23)$$

и беря первый член ряда Фурье в разложении для $q[y(t)]$, получим

$$q[y(t)] = \frac{4q_0}{\pi A} y(t - \tau). \quad (24)$$

Подстановка выражений (23) и (24) в уравнение (22) дает

$$A \approx \frac{4q_0}{c\delta} \sin \omega \tau; \quad \theta \approx \omega \sqrt{1 + \frac{\delta}{\pi} \operatorname{ctg} \omega \tau}, \quad (25)$$

где c — коэффициент жесткости; $\delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega}$ — декремент затухания собственных колебаний. Эксперименты показывают, что автоколебательные режимы с большими амплитудами устойчивы лишь вблизи частот,

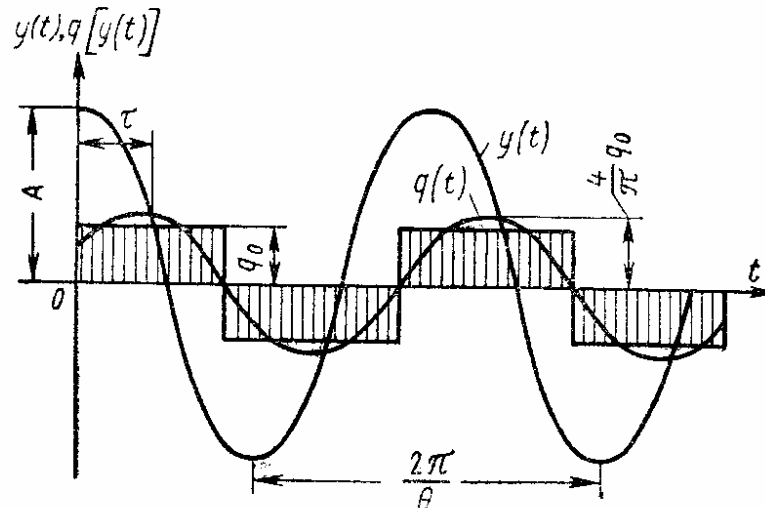


Рис. 9

удовлетворяющих соотношениям (18) и (19), а сдвиг фазы $\omega\tau$ близок к $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, амплитуда колебаний может быть оценена по формуле

$$A \approx \alpha \frac{\rho U^2 d}{c \delta},$$

где числовой коэффициент $1 \leq \alpha < 3,4$. Подробнее см. статьи [12, 43] и в литературных источниках, указанных в статье [12].

ФЛАТТЕР ПЛОСКИХ ПАНЕЛЕЙ (ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ)

Бесконечная пластинка. Рассмотрим бесконечную пластинку, обтекаемую потоком газа. Ограничимся случаем простой гармонической волны, распространяющейся вдоль потока (рис. 10), и определим ско-

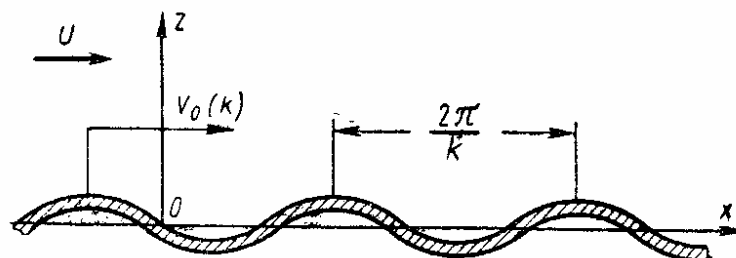


Рис. 10

рость потока, при которой амплитуда волны начинает возрастать со временем. Движение бесконечной пластинки, обтекаемой с одной стороны потоком газа с невозмущенной скоростью U , может быть описано уравнением

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{z=+0} = 0. \quad (26)$$

Здесь w — прогиб пластинки; D — цилиндрическая жесткость; h — толщина пластинки; ρ и ρ_0 — плотности материала пластинки и газа соответственно; N_x — растягивающее усилие в срединной поверхности. Потенциал возмущений φ удовлетворяет волновому уравнению (3), условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \text{ при } z = +0,$$

условиям ограниченности и условию излучения на бесконечности. Решение уравнения (26) ищем в виде

$$w(x, t) = w_0 e^{i(\Omega t - kx)},$$

где w_0 , Ω и k — константы, причем $k w_0 \ll 1$. Выражение для потенциала скоростей имеет вид

$$\varphi = -\frac{i w_0 (V - U)}{\sqrt{1 - M_1^2}} \exp \left[i(\Omega t - kx) - k \sqrt{1 - M_1^2} z \right],$$

где M_1 — число Маха в относительном движении

$$M_1 = \left| M - \frac{V}{c_0} \right|.$$

Фазовая скорость V распространения упругой волны в пластинке при отсутствии потока имеет следующее значение:

$$V_0^2 = \frac{Dk^2 + N_x}{\rho h}.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее данному случаю, можно записать в виде

$$\rho h k (V_0^2 - V^2) - \frac{\rho_0 (U - V)^2}{\sqrt{1 - M_1^2}} = 0.$$

При сверхзвуковом обтекании ($M \gg 1$) и для не слишком больших длин волн критическая скорость определяется выражением

$$U_{кр} = V_0(k) + c_0. \quad (27)$$

Для несжимаемой жидкости $U_{кр} = V_0(k)$. Для последнего случая более точной является формула

$$U_{кр} = V_0(k) \sqrt{\frac{1 + \mu}{\mu}} \quad \left(\mu = \frac{\rho_0}{\rho h k} \right). \quad (28)$$

Как уже было указано, формой движения пластинки при флаттере являются волны, распространяющиеся в направлении потока. В то же время волны, распространяющиеся вверх по потоку, всегда затухают. Скорость газа относительно бегущих волн всегда дозвуковая. Для малых длин волн (порядка толщины пластинки h) гипотеза Кирхгофа-Лява становится неприменимой. В этом случае неустойчивое движение пластинки имеет вид волн Рэлея, а скорость V_0 совпадает со скоростью их распространения [32, 33].

Прямоугольная пластинка, опертая по контуру. Рассмотрим прямоугольную упругую пластинку со сторонами a и b постоянной толщины h . Пусть пластинка оперта по всем кромкам, вмонтирована в абсолютно жесткую диафрагму и обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью U (рис. 11). Уравнение малых

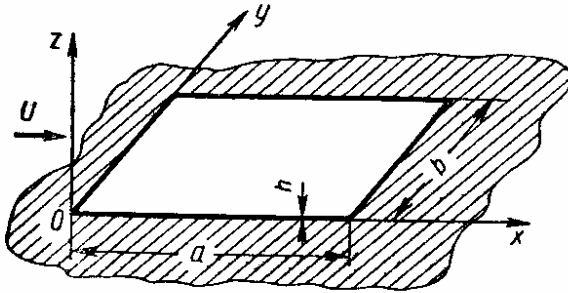


Рис. 11

колебаний такой пластинки, подверженной постоянным растягивающим усилиям N_x и N_y , имеет вид

$$D \Delta \Delta w - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \epsilon \rho h \frac{\partial w}{\partial t} = p. \quad (29)$$

Аэродинамическое давление будем определять по формуле стационарной трехмерной теории [68]:

$$p = \rho_0 U \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$\varphi = -\frac{U}{\pi} \iint \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 - \beta^2 (y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

где $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$.

Интегрирование во второй формуле ведется по переднему конусу Маха. Разыскивая решение уравнения (29) в виде

$$w(x, y, t) = \operatorname{Re} \left(\sum_r \sum_s f_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} e^{i\Omega t} \right),$$

придем к системе уравнений для определения f_{rs} :

$$\left\{ \left[m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 + m^2 \bar{N}_x + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \bar{N}_y - \omega^2 \right\} \times \\ \times f_{mn} = \frac{\lambda^*}{\pi^3} \sum_r \sum_s L_{mn, rs} f_{rs} \quad (m, n = 1, 2, \dots); \quad (30)$$

здесь

$$\omega^2 = \frac{\rho h a^4}{\pi^2 D} \Omega^2; \quad \bar{N}_x = \frac{N_x a^2}{\pi^2 D}; \quad \bar{N}_y = \frac{N_y a^2}{\pi^2 D};$$

$$\lambda^* = \frac{a^3 \rho_0 \kappa M^2}{D \sqrt{M^2 - 1}}.$$

Обобщенные силы определяют по формуле

$$L_{mn,rs} = \frac{4\beta m r}{a^2 b} \int_0^a \int_0^b \int_0^x \int_{y - \frac{x-\xi}{\beta}}^{y + \frac{x-\xi}{\beta}} \times$$

$$\times \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi \xi}{a} \sin \frac{s\pi \eta}{b}}{[(x-\xi)^2 - \beta^2 (y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}} I(\eta) d\eta d\xi dy dx.$$

Чтобы исключить из интегрирования область, лежащую вне пластинки, введена ступенчатая функция

$$I(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta < 0, \eta > b; \\ 1 & \text{при } 0 < \eta < b. \end{cases}$$

Величины обобщенных сил для четырех значений $\beta \frac{b}{a} = 1, 2, 4$ и ∞ вычислены в работе [68]. Используя условие существования нетривиального решения системы (30), можно получить уравнение для вычисления критического значения параметра скорости потока λ^* . Для различных значений $\beta \frac{b}{a}$ и \bar{N}_x эти значения приведены в табл. 2.

Как показали вычисления в работе [68], при изменении \bar{N}_y в достаточно широких пределах параметр $\lambda_{кр}^*$ практически не изменяется.

2. Критические значения параметра λ для прямоугольной опертой по контуру пластинки, сжатой в направлении сверхзвукового потока

\bar{N}_x	$\beta \frac{b}{a}$			
	1	2	4	∞
6	822	848	860	863
4	648	668	677	680
2	480	496	502	505
0	323	334	399	341
-2	179,6	186,3	189,1	190,3
-4	54,4	56,6	57,6	58,0

Прямоугольная пластинка, опертая по контуру. Применение приближенных формул для избыточного давления. Решение задачи для опертой по контуру пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком, получено в работе [68] с применением для аэродинамического давления

формулы Аккерета, а в работе [47] — с применением поршневой теории. В случае применения поршневой теории аэродинамическое давление определяют по формуле

$$p = \frac{\kappa p_0}{c_0} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (31)$$

Решение ищем в виде

$$w = \operatorname{Re} \left[W_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\Omega t} \right].$$

Уравнение для $W_n(\xi)$ в этом случае можно записать следующим образом:

$$W_n^{IV} - 2R\pi^2 W_n'' + R^2\pi^4 W_n + \lambda W_n' + \sigma W_n = 0;$$

здесь

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad R = \frac{1}{2} \bar{N}_x + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2; \quad \sigma = \omega^2 + \pi^4 d;$$

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} - g \frac{\Omega}{\Omega_0} i;$$

$$d = \frac{1}{4} \bar{N}_x^2 + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 (\bar{N}_x - \bar{N}_y);$$

$$g = \frac{1}{\Omega_0} \left(\varepsilon + \frac{\kappa p_0}{\rho h} \right); \quad \Omega_0 = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}};$$

$$\lambda = \frac{a^3 p_0 \kappa U}{D c_0}. \quad (32)$$

Характеристическое уравнение

$$(r^2 - R^2\pi^2)^2 + \lambda r - \sigma = 0$$

после преобразования

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta;$$

$$r_{3,4} = -\alpha \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha^2}$$

для данной краевой задачи будет следующим:

$$\lambda = -4\alpha(\beta^2\alpha^2 + 4\pi^2);$$

$$\sigma = R^2\pi^4 + (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2 + 2R\pi^2);$$

$$\begin{aligned} F(R, \alpha, \beta) = & \frac{\alpha^2 (\operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2R\pi^2} \cos \beta)}{(\beta^2 - 3\alpha^2 + R\pi^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{(\beta^2 - \alpha^2 + R\pi^2)^2 + 2\alpha^2(\alpha^2 - R\pi^2)}{(\beta^2 - 3\alpha^2 + R\pi^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \times \\ & \times \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2R\pi^2}}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2R\pi^2}} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} = 0. \end{aligned}$$

В работе [48] предложено различать две критические скорости. Первая — это дофлаттерная скорость. При этой скорости движение панели из стоячих волн переходит в бегущие волны с ограниченной амплитудой. Вторая — флаттерная скорость, т. е. скорость, при которой амплитуда бегущих волн начинает возрастать во времени. Для дофлаттерной скорости было предложено выражение [48]

$$U_{доф} = \frac{c_0 D}{\rho_0 \kappa a^3} \cdot \frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}} \left(5 + n^2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{2} \bar{N}_x \right) \times \\ \times \sqrt{2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} + \frac{1}{2} \bar{N}_x}.$$

Применение метода Галеркина и поршневой теории приводит к флаттерному уравнению, которое можно записать в виде [15]

$$|(\omega_j^2 - \omega^2 + g\omega i) \delta_{jm} + \lambda b_{jm}| = 0;$$

здесь

$$\omega_j^2 = \frac{\Omega_j^2}{\Omega_0^2} = \pi^4 \left\{ \left[j^2 + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 + \left[\bar{N}_x j^2 + \bar{N}_y n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \right\};$$

$$g = \frac{\varepsilon + \frac{\kappa \rho_0}{\rho h c_0}}{\Omega_0}; \quad \lambda = \frac{a^3 \kappa \rho_0 M}{D};$$

$$\bar{N}_x = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{N_x a^2}{D}; \quad \bar{N}_y = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{N_y a^2}{D};$$

$$b_{jm} = \begin{cases} \frac{4jm}{m^2 - j^2}, & \text{если } j \pm m \text{ — четное число,} \\ 0, & \text{если } j \pm m \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

В случае двучленного приближения критический параметр находят по простой формуле

$$\lambda_{\phi л} = \frac{3}{16} \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 2g^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)}. \quad (33)$$

Если демпфирование достаточно мало, то

$$\lambda_{\phi л} = \frac{3}{16} (\omega_2^2 - \omega_1^2). \quad (34)$$

Формулы (33) и (34) определяют значения параметра скорости, соответствующего наступлению динамической неустойчивости. При переходе через границу, определяемую этими значениями, характеристические показатели переходят в правую плоскость (см. рис. 6, а). Уравнения (33) и (34) определяют линию, являющуюся границей области устойчивости на плоскости характерных параметров приведенной скорости и нагрузки. Кроме того, на плоскости указанных параметров можно найти линию, соответствующую $\omega = 0$:

$$\lambda^2 + \frac{9}{64} \omega_1^2 \omega_2^2 = 0. \quad (35)$$

Переход через эту линию при изменении параметров системы соответствует выходу характеристического показателя в правую полуплоскость через начало координат — выпучиванию панели (см. рис. 6, б).

Для квадратной панели $\frac{a}{b} = 1$ и $N_y = 0$ область устойчивости показана на рис. 12 [15].

Область устойчивости ограничена линиями AB и BE . Линия BE построена по уравнению (34) [линия, построенная по уравнению (33), мало отличается от BE], а линия AB соответствует уравнению (35).

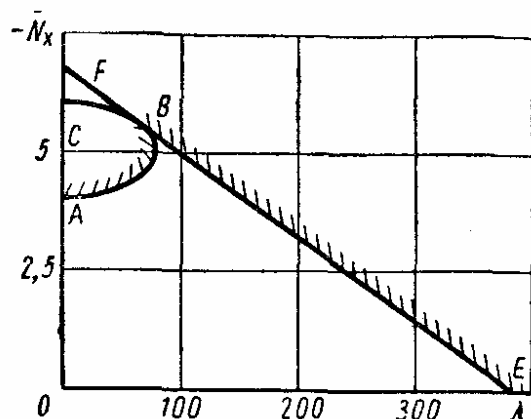


Рис. 12

При переходе через BE наступает флаттер, при переходе через AB — выпучивание панели.

Формулы (33), (34) дают значения критических скоростей, заниженные на 20—30%.

Другие задачи. Сводка результатов. Пластинки, бесконечные в направлении, перпендикулярном направлению потока, рассмотрены в работе [88] с использованием точных формул теории линейризованного потенциального сверхзвукового течения. На основе поршневой теории и тео-

рии Аккерета эти пластинки рассмотрены в статьях [6, 36, 47, 48, 68, 81]. Исследование прямоугольных пластинок с различным опиранием сторон описано во многих работах. Так, пластинка, защемленная по контуру, рассмотрена в работе [40] с применением метода Галеркина и поршневой теории. В качестве аппроксимирующих функций использованы «балочные функции», функции Игути и квазиполная система тригонометрических функций. В той же работе рассмотрены различные комбинации заделки и шарнирного опирания. Точное решение для пластинки, опертой по кромкам, которые параллельны потоку, и свободной по двум другим кромкам, дано на основе поршневой теории в статье [49]. Двухпролетная неразрезная пластинка рассмотрена в статьях [44, 45]. Сопоставление результатов, которое для этой задачи дают различные аэродинамические теории, приведено в статье [34]. Круглые и эллиптические пластинки описаны в работе [80]. В статьях [1, 2, 3, 22, 75] рассмотрены ортотропные и трехслойные пластины, а в статьях [38, 89] — пластины, обтекаемые проводящим газом.

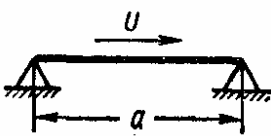
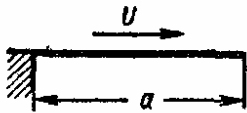
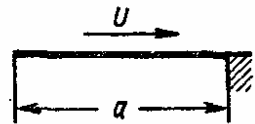
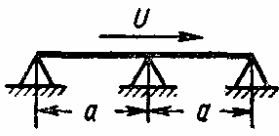
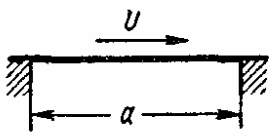
Численные результаты для сверхзвукового обтекания приведены в табл. 3 и 4. Через λ обозначен параметр, вычисляемый по формуле (32). Все формулы соответствуют поршневой теории и, следовательно, пригодны лишь при $M^2 \gg 1$. Результаты можно использовать для умеренных сверхзвуковых скоростей, если под λ понимать выражение

$$\lambda = \lambda^* = \frac{a^3 \rho_0 \kappa M^2}{D \sqrt{M^2 - 1}}.$$

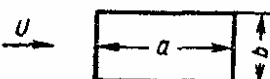

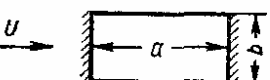
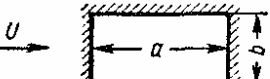
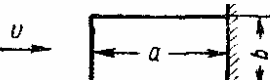
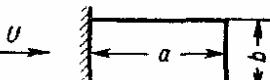
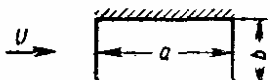
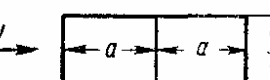

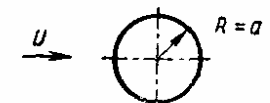
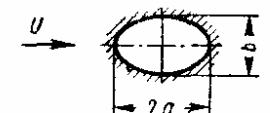
Это соответствует, очевидно, применению формулы Аккерета.

Сопоставление экспериментальных и теоретических результатов. Это сопоставление показано на рис. 13; сплошные и пунктирные линии

3. Минимальные критические значения параметра λ для бесконечной поперек потока пластинки (поток — сверхзвуковой, поршневая теория)

Схема опорных закреплений	Точное решение	Метод Галеркина (n — число удерживаемых членов ряда)			Характер неустойчивости на границе
		$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	
	343	274	352	337	Флаттер
	135	122,7	—	—	Флаттер
	6,33	6,33	—	—	Дивергенция
	154,8	125	—	—	Флаттер
	636	600	660	630	Флаттер

4. Минимальные критические значения параметра λ для пластинок конечных размеров ($N_x = N_y = 0$)
(поток — сверхзвуковой, поршневая теория)

Схема	$\frac{b}{a}$	Точное решение	Метод Галеркина (n — число удерживаемых членов ряда)		
			$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
	1 0,5	513 384	383 —	558 —	507 —
	1	535	—	—	—
	1	814	594	—	638
	1	—	768	905	842
	1	652	—	—	—
					
	1	—	429	—	—
	1	384	—	—	—
	1	—	300	—	—
	1	—	464	—	—
	0,5	—	656	—	—
Примечание. Обозначения закреплений краев см. гл. 2, рис. 2.					

соответствуют теоретическим результатам. Кривая 1 относится к квадратной пластинке, защемленной по передней и задней кромкам и опертой по боковым кромкам. Экспериментальные точки * для этого случая обозначены квадратами. Кривые 2 и 3 относятся к бесконечной поперек потока пластинке, защемленной по передней и задней кромкам. Кривая 2 получена с использованием стационарной теории; кривая 3 — с использованием нестационарной теории. Кружками отмечены экспериментальные результаты, относящиеся к конечным пластинкам, защемленным по передней кромке, упруго заделанным на задней кромке и свободным на боковых. Белые кружки соответствуют результатам Локка и Фына, черные — Сильвестра и Бейкера и черно-белые — Андерсона. Кривая 4 относится к первоначально выпущенной панели; треугольники — экспериментальные точки, соответствующие этому случаю (белые — по работе Сильвестра и Бейкера и черные — по работе Эйсли). Подробнее см. работы [23, 46].

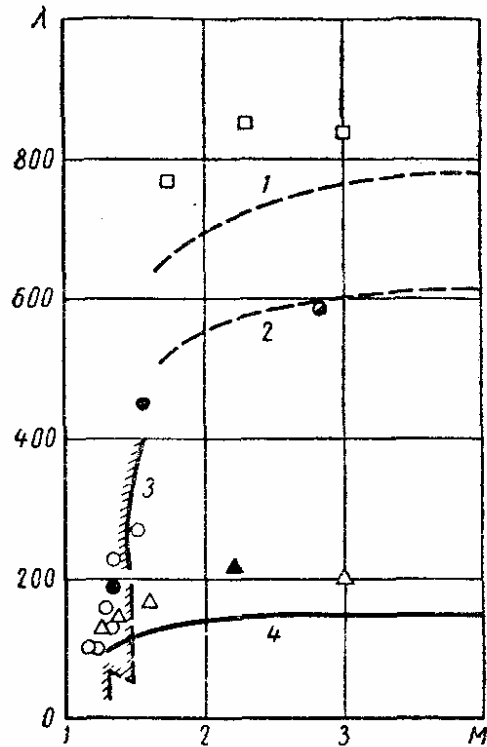


Рис. 13

ФЛАТТЕР ОБОЛОЧЕК И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Исходные уравнения. Исследование устойчивости упругих оболочек и криволинейных панелей постоянной толщины h в потоке сжимаемого газа сводится в общем случае к исследованию уравнений движения вида [15]

$$\left. \begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= -\frac{1-v^2}{Eh} q_1; \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= -\frac{1-v^2}{Eh} q_2; \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= \frac{1-v^2}{Eh} q_3; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

здесь L_{lk} — дифференциальные операторы, вид которых определяется геометрией срединной поверхности оболочки, наличием подкрепляющих элементов, системой координат и выбором того или иного варианта теории оболочек. Функции u, v, w описывают соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности. Компоненты нагрузки q_1, q_2, q_3 , отнесенные к единице площади срединной поверхности, определяют по формулам

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= -\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_1^0; \quad q_2 = -\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_2^0; \\ q_3 &= -\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_i - p_e + q_3^0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

* Ссылки на экспериментальные работы даны в обзоре [23].

здесь ρ_0 — плотность материала оболочки; h_0 — приведенная толщина оболочки, которая при отсутствии подкрепляющих элементов равна h ; p_i , p_e — соответственно внутреннее и внешнее давление на оболочку; q_1^0 , q_2^0 , q_3^0 — прочие статические или динамические нагрузки, приходящиеся на единицу площади срединной поверхности.

К уравнениям (36) должны быть присоединены граничные условия. Если замкнутая оболочка или панель считаются бесконечно длинными в направлении потока, то предполагается, что решения на бесконечности ограничены в любой момент времени. Для оболочек и криволинейных панелей конечных размеров граничные условия можно записать, зная в каждом конкретном случае способ закрепления торцов оболочки или кромок панели.

Бесконечно длинная круговая цилиндрическая оболочка. Следуя работе [5], операторы L_{ik} возьмем в форме

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2}; & L_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}; \\ L_{12} &= L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial s}; \\ L_{23} &= L_{32} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial s} - \frac{3-\nu}{2} c^2 R \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial s}; \\ L_{13} &= L_{31} = \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - c^2 R \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x \partial s^2} \right); \\ L_{33} &= c^2 \left(R^2 \Delta \Delta + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{R^2} \right) + \frac{1}{R^2}; \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где x , r , θ — цилиндрические координаты;

$$s = R\theta; \quad c^2 = \frac{h^2}{12R^2}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}. \quad (39)$$

При $q_1^0 = q_2^0 = q_3^0 = 0$ решение задачи ищем в классе волн, распространяющихся вдоль оболочки:

$$\begin{aligned} u &= i\xi e^{i(\Omega t - kx)} \cos n\theta; \\ v &= \eta e^{i(\Omega t - kx)} \sin n\theta; \\ w &= \zeta e^{i(\Omega t - kx)} \cos n\theta; \end{aligned} \quad (40)$$

здесь ξ , η , ζ — некоторые, вообще говоря, комплексные коэффициенты; $k = \frac{\pi}{\lambda}$ — волновое число (λ — длина полуволны в направлении обтекающих, см. рис. 10); $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Согласно линеаризованной потенциальной теории аэродинамическое давление может быть представлено в виде

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \rho_i R \alpha_i (\Omega - kU_i)^2 \zeta e^{i(\Omega t - kx)} \cos n\theta; \\ p_e &= -\rho_e R \alpha_e (\Omega - kU_e)^2 \zeta e^{i(\Omega t - kx)} \cos n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

В формулах (41) обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{Z_n(\mu_i R)}{\mu_i R Z'_n(\mu_i R)}; & \alpha_e &= -\frac{Z_n(\mu_e R)}{\mu_e R Z'_n(\mu_e R)}; \\ \mu &= k \sqrt{|M_1^2 - 1|}; & M_1 &= \frac{|U - V|}{c_0}; \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

при этом Z_n — одна из цилиндрических функций порядка n ; $V = \frac{\Omega}{k}$ — фазовая скорость распространения упругой волны в оболочке; μ и M_1 вычисляются для случаев внешнего и внутреннего обтекания подстановкой соответствующих скоростей U_i или U_e .

Используя граничные условия для потенциала скоростей и формулы дифференцирования цилиндрических функций, получим

$$\frac{1}{\alpha_i} = \begin{cases} \mu_i R \frac{I_{n-1}}{I_n} - n & (M_1 < 1); \\ \mu_i R \frac{J_{n-1}}{J_n} - n & (M_1 > 1); \end{cases} \quad (43)$$

$$\frac{1}{\alpha_e} = \begin{cases} \mu_e R \frac{K_{n-1}}{K_n} + n & (M_1 < 1); \\ n - \mu_e R \frac{H_{n-1}^{(1)}}{H_n^{(1)}} & (M_1 > 1, V < U); \\ n - \mu_e R \frac{H_{n-1}^{(2)}}{H_n^{(2)}} & (M_1 > 1, V > U). \end{cases} \quad (44)$$

В формулах (43) и (44) J_n и N_n — функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода; I_n и K_n — функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого и второго рода; $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$ — функции Ганкеля первого и второго рода. Все цилиндрические функции вычисляются для значения аргумента $z = \mu R$.

Коэффициенты α_e при $M_1 > 1$ оказываются комплексными. Можно записать также

$$\alpha_e = \begin{cases} -\frac{1}{\mu_e R} \cdot \frac{J_n - iN_n}{J'_n - iN'_n} & (V > U); \\ -\frac{1}{\mu_e R} \cdot \frac{J_n + iN_n}{J'_n + iN'_n} & (V < U). \end{cases} \quad (45)$$

Отделяя вещественные и мнимые части, представим коэффициенты α_e в виде

$$\alpha_e = \alpha_* - i\beta \operatorname{sign}(V - U),$$

где

$$\alpha_* = -\frac{1}{\mu_e R} \cdot \frac{J_n J'_n - N_n N'_n}{(J'_n)^2 + (N'_n)^2}; \quad \beta = \frac{1}{\mu_e R} \cdot \frac{J_n N'_n - N_n J'_n}{(J'_n)^2 + (N'_n)^2}.$$

Коэффициент $\alpha_* > 0$ характеризует приведенную массу газа; $\beta > 0$ — коэффициент демпфирования.

Вычисление коэффициентов α_i , α_e , α_* и β приведено в работе [47]. Графики для коэффициентов α_* и β показаны на рис. 14 и 15.

Критические скорости потока, при которых оболочка теряет устойчивость, можно найти из уравнения

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_j}{\Omega_j^2 - \Omega^2} = \frac{1}{\chi (\Omega - kU)^2} \quad (n \neq 0). \quad (46)$$

Если $n = 0$, то число членов в левой части уравнения (46) сокращается до двух.

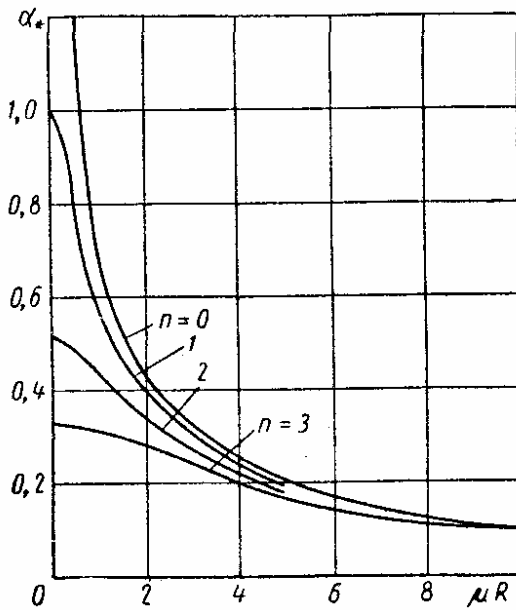


Рис. 14

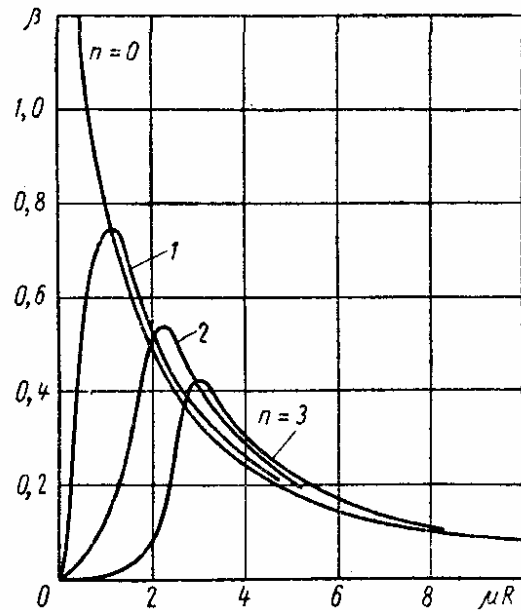


Рис. 15

В уравнении (46) через Ω_i обозначены частоты свободных колебаний оболочки в вакууме ($j = 1, 2, 3$). Им соответствуют компоненты векторов $(1, \eta_j, \xi_j)$, характеризующие формы колебаний,

$$\chi = \frac{(\rho_i \alpha_i + \rho_e \alpha_e) R}{\rho_0 h}; \quad \gamma_j = \frac{1}{1 + \eta_j^2 + \xi_j^2}.$$

При достаточно больших волновых числах n частота преимущественно поперечных колебаний Ω_1 оказывается значительно меньше двух других частот. Пусть $\Omega_1^2 \ll \Omega_2^2$, $\Omega_1^2 \ll \Omega_3^2$, $\gamma_1 \approx 1$; тогда уравнение (46) можно представить в виде

$$\Omega_1^2 - \Omega^2 - \chi (\Omega - kU)^2 = 0, \quad (47)$$

Частоту преимущественно изгибных колебаний в вакууме определяют по формуле

$$\Omega_1 = \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_0 h}} F(m, n),$$

где

$$F(m, n) = \sqrt{(m^2 + n^2)^2 + \frac{1 - v^2}{c^2} \cdot \frac{m^4}{(m^2 + n^2)^2}}; \quad m = kR = \frac{\pi R}{\lambda}.$$

Для нахождения критической скорости дивергенции в уравнении (46) необходимо положить $\Omega = 0$. Тогда получим формулу

$$U_* = k^{-1} \left(\chi \sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_j}{\Omega_j^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

Если использовать упрощенное уравнение (47), то

$$U_* \approx \frac{V_1}{\sqrt{\chi}}; \quad (49)$$

здесь V_1 — фазовая скорость распространения преимущественно изгибных волн при свободных колебаниях оболочки в вакууме

$$V_1 = \frac{\Omega_1}{k} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{D}{\rho_0 h}} F_1(m, n);$$

$$F_1(m, n) = \sqrt{\frac{(m^2 + n^2)^2}{m^2} + \frac{1 - v^2}{c^2} \cdot \frac{m^2}{(m^2 + n^2)^2}}. \quad (50)$$

Так как параметр χ также зависит от скорости потока U , то вычисление критических скоростей дивергенции можно вести по формулам (48) или (49) методом последовательных приближений. Возможен также графический способ решения [10].

Фазовая скорость распространения изгибных волн в вакууме будет минимальной при

$$\min F_1 \approx \left(\frac{2}{c} \right)^{1/2}.$$

Если $m^2 \gg n^2$, то для длин полуволн λ , соответствующих минимальной фазовой скорости, можно получить оценку

$$\lambda \approx 1,68 (Rh)^{\frac{1}{2}}.$$

Минимальная фазовая скорость приближенно составляет

$$V_1 \approx 0,760 \left(\frac{E}{\rho_0} \cdot \frac{h}{R} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Соответствующая частота

$$\Omega_1 \approx 1,42 \frac{1}{R} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При внешнем обтекании сверхзвуковым потоком ($M = M_1 > 1$), как следует из формул (44), дивергенция оказывается невозможной.

Критические скорости флаттера при $M_1 > 1$ с учетом аэродинамического и конструкционного демпфирования ε могут быть получены из уравнения

$$\Omega_1^2 - i\varepsilon\Omega - \Omega^2 - \chi(\Omega - kU)^2 = 0. \quad (51)$$

Скорость флаттера определяют как минимальную скорость потока, при которой появляются бегущие волны с нарастающей амплитудой. При этом среди частот Ω будут появляться частоты, имеющие отрицательную мнимую часть.

Параметр χ является сложной трансцендентной функцией скорости U и частоты Ω . Поэтому для решения уравнения (51) целесообразно

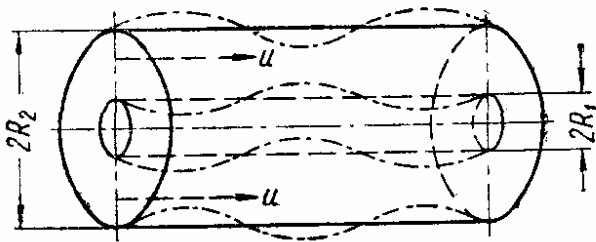


Рис. 16

применить критерий Коши-Найквиста. В случае больших чисел M_1 , когда χ может быть заменено простым асимптотическим выражением, представляется возможным получить оценки для критической скорости флаттера в явном виде. Пусть числа M_1 в отно-

сительном движении газа и упругой волны достаточно велики ($M_1^2 \gg 1$) и показатель изменяемости n в окружном направлении достаточно мал:

$$n \ll \mu R = kR \sqrt{M_1^2 - 1}.$$

Используя для получения условий устойчивости критерий, аналогичный критерию Рауса-Гурвица, найдем следующее выражение для критической скорости флаттера бесконечно длинной цилиндрической оболочки [10]:

$$U_* = V_1(m, n) \left(1 + \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{\varepsilon h}{c_0} \right). \quad (52)$$

Из формулы (52) видно, что влияние конструкционного демпфирования весьма существенно. Если отказаться от условия $M_1 \gg 1$ и пренебречь демпфированием, то для критической скорости получим формулу [15]:

$$U_* = V_1 + c_0. \quad (53)$$

Необходимо отметить, что приведенные выше формулы критических скоростей получены для бесконечно длинной оболочки и могут не совпадать с соответствующими формулами для конечной, хотя и весьма длинной оболочки, так как здесь не учитывались условия отражения упругих волн от торцов оболочки.

Впервые задача об устойчивости бесконечно длинной цилиндрической оболочки в потоке сжимаемого газа была рассмотрена в работе [5]. Этому вопросу посвящены также работы [85, 87].

Коаксиальные бесконечно длинные круговые цилиндрические оболочки. Уравнения возмущенного движения для двух коаксиальных упругих цилиндрических оболочек, между которыми течет поток идеального сжимаемого газа (рис. 16), получены в работе [29]. Более детально исследованы случаи, когда одна из оболочек является абсолютно жесткой. При этом уравнения движения упругой оболочки после

преобразований могут быть сведены к уравнениям вида (46). Формулы для коэффициентов уравнения (46) в данном случае можно взять из работы [30].

Критические числа $M_* = U_*/c_0$ будут функциями чисел m и n . Зависимости $M_* = f(m, n)$ при фиксированных значениях n могут иметь два минимума. Эти минимумы имеют место при волновых числах m , близких к волновым числам, соответствующим минимальным скоростям распространения упругих волн по оболочке в вакууме.

Вычисления критических чисел для оболочек с параметрами $0,001 < \frac{h}{R} < 0,03$, $0,33 \leq \frac{R_2}{R_1} \leq 0,99$; $1,01 \leq \frac{R_2}{R_1} \leq 3$ (R_1 и R_2 — радиусы коаксиальных оболочек) позволяют сделать ряд выводов. Во-первых, критическая скорость для указанных диапазонов не зависит от того, какая из двух границ потока (внешняя или внутренняя) является упругой. Во-вторых, для не слишком тонких оболочек и при $\frac{R_2}{R_1}$, не слишком близком к единице, критическая скорость для бесконечно длинной цилиндрической оболочки, обтекаемой с наружной стороны потоком газа, может быть определена по формуле (53), где V_1 — минимальная фазовая скорость распространения упругих волн по оболочке в вакууме при $n=0$. В-третьих, для достаточно тонких оболочек критические скорости записывают в виде

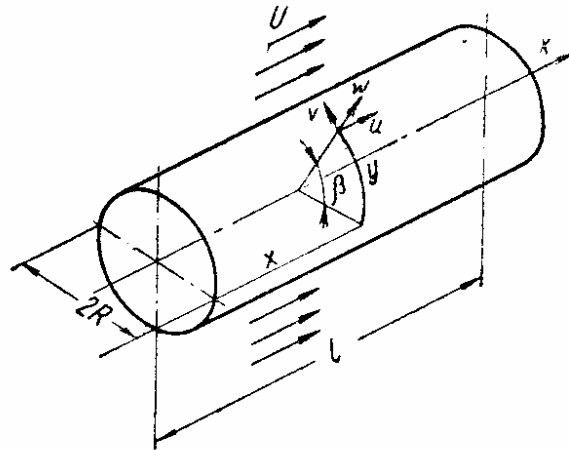


Рис. 17

$$M_{*2} = \frac{V_{*2}}{c_0} \left(1 + \frac{\rho_0 h}{\rho R \gamma_1 \alpha_0} \right)^2; \quad (54)$$

здесь V_{*2} — минимальная фазовая скорость распространения упругих волн по оболочке в вакууме при $n=2$, а параметр α_0 определяют по формуле

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \left| \frac{1 + \chi^{-4}}{1 - \chi^{-4}} \right|.$$

Итак, критические скорости для коаксиальных оболочек, одна из которых является абсолютно жесткой, в указанном выше диапазоне параметров $\frac{h}{R}$ и $\frac{R_2}{R_1}$, можно вычислять по формулам (53) и (54). Из двух полученных значений M_{*1} и M_{*2} следует брать меньшее.

Круговые цилиндрические оболочки конечной длины. При определении критических скоростей флаттера достаточно тонких оболочек (по крайней мере, при $\frac{R}{h} > 100$) можно использовать основные соотношения технической теории тонких оболочек [69]. В этом случае для

безразмерных переменных $\alpha = \frac{x}{R}$, $\beta = \frac{y}{R}$ (рис. 17) дифференциальные операторы L_{ik} системы (36) будут иметь вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \quad L_{22} = \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \\ L_{33} &= c^2 \Delta \Delta + 1; \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \\ L_{13} &= L_{31} = \nu \frac{\partial}{\partial \alpha}; \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

Используя для определения аэродинамических сил стационарное линейное приближение формулы поршневой теории и предполагая также, что $\rho = \rho_0$, в случае отсутствия начальных усилий в срединной поверхности оболочки запишем формулы для компонентов поверхностной нагрузки:

$$\begin{aligned} q_1 = q_x &= -\rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad q_2 = q_y = -\rho_0 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ q_3 = q_z &= -\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa \rho_0 M \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}$$

Критические скорости флаттера определяют на основании исследования свободных частот оболочки в потоке газа. Для свободных колебаний с частотой ω решение системы (36) представляется в виде $u = U_n(\alpha) \cos n\beta e^{i\omega t}$; $v = V_n(\alpha) \sin n\beta e^{i\omega t}$; $w = W_n(\alpha) \cos n\beta e^{i\omega t}$. (55) где n — рассматриваемое в качестве параметра число волн упругой поверхности оболочки в окружном направлении;

$$\begin{aligned} U_n(\alpha) &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} \varphi_{jn}^{(1)}(\alpha); \quad V_n(\alpha) = \sum_{j=1}^8 C_{jn} \varphi_{jn}^{(2)}(\alpha); \\ W_n(\alpha) &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} \varphi_{jn}^{(3)}(\alpha); \end{aligned} \quad (56)$$

$\varphi_{jn}^{(1)}$, $\varphi_{jn}^{(2)}$, $\varphi_{jn}^{(3)}$ ($j = 1, 2, \dots, 8$) — вещественные частные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой после подстановки решения вида (55) в исходную систему (36); C_{jn} — вещественные постоянные интегрирования. Явные выражения для частных решений $\varphi_{jn}^{(1)}$, $\varphi_{jn}^{(2)}$, $\varphi_{jn}^{(3)}$ можно записать после вычисления корней характеристического уравнения.

После подстановки решения (55) в граничные условия (по четыре условия на каждом из торцов $\alpha = 0$ и $\alpha = \gamma$) придем к системе восьми однородных уравнений относительно величин C_{jn} . Приравняв нулю определитель Δ , составленный из коэффициентов, стоящих при C_{jn} , можно получить уравнение относительно искомой частоты ω .

В дальнейшем введем обозначения:

$$\mu = 4(1-\nu^2) \frac{R^2}{lh} \cdot \frac{\kappa \rho_0}{E} M; \quad \lambda^2 = (1-\nu^2) \frac{\rho_0 R^2 \omega^2}{E}, \quad \gamma = \frac{l}{R}. \quad (57)$$

Для определения критических чисел μ_* , соответствующих началу возникновения флаттера, необходимо при каждом фиксированном числе волн n в окружном направлении построить зависимости $\lambda = f(\mu)$. Значение μ , при котором впервые появляются два кратных значения λ , переходящих при последующем увеличении μ в комплексно-сопряженные, дает искомую величину μ_* .

Частоты λ целесообразно определять численным методом [19], сущность которого состоит в следующем: для исходных значений $\frac{l}{R}$, $\frac{R}{h}$, ν и фиксированных значений числа n и величины μ задают ряд последовательных значений параметра частоты λ , для каждого λ вычисляют величину определителя Δ ; нули кривой $\Delta = f(\lambda)$ дадут искомые величины частот λ . Вблизи границы области флаттера зависимости $\lambda = f(\mu)$ целесообразно строить другим способом. Так как при фиксированных значениях $\frac{l}{R}$, $\frac{R}{h}$, ν и n величина Δ является функцией двух переменных λ и μ , то в этом случае нули функции $\Delta = f(\lambda, \mu)$ можно определять, задавая ряд последовательных значений параметра μ при фиксированной величине λ . Полученные таким способом значения μ_* следует рассматривать в качестве точного решения задачи об определении критических скоростей флаттера замкнутой цилиндрической оболочки конечной длины в данной постановке; они могут служить эталоном для оценки различных приближенных решений.

Весьма надежные результаты при определении критических скоростей флаттера для длинных $\left(\frac{l}{R} \geq 2\right)$ цилиндрических оболочек дает применение метода Галеркина. При этом решение системы уравнений возмущенного движения ищут в виде рядов, где в качестве координатных функций используют формы свободных колебаний незагруженной оболочки в вакууме

$$u = \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}(t) U_{mn}(\alpha);$$

$$v = \sin n\beta \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}(t) V_{mn}(\alpha);$$

$$w = \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}(t) W_{mn}(\alpha);$$

здесь U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} характеризуют форму срединной поверхности оболочки в направлении образующей при преимущественно поперечных колебаниях. Функции U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} удовлетворяют всем граничным условиям на торцах оболочки. Из условий ортогональности свободных форм колебаний следует, что

$$\int_0^{\gamma} (U_{mn}U_{jn} + V_{mn}V_{jn} + W_{mn}W_{jn}) d\alpha = 0 \quad (m \neq j).$$

В этом случае критические числа μ_* определяют из уравнения

$$|(\lambda_{mn}^2 - \lambda^2) \delta_{mj} + \mu c_{mj}^{(n)}| = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, m_1; m = 1, 2, \dots, m_1; n = 1, 2, \dots). \quad (58)$$

где λ_{mn} — собственные безразмерные частоты преимущественно поперечных колебаний оболочки в вакууме; δ_{mj} — символ Кронекера;

$$c_{mj}^{(n)} = \frac{\gamma}{4} \frac{\int_0^\gamma \frac{dW_{jn}}{d\alpha} W_{mn} d\alpha}{\int_0^\gamma (U_{mn}^2 + V_{mn}^2 + W_{mn}^2) d\alpha}.$$

Число волн в окружном направлении, минимизирующее критическую скорость. Критические числа μ_* являются функцией числа волн в окружном направлении n . Функция $\mu_* = f(n)$ имеет минимум μ_{**} при числе

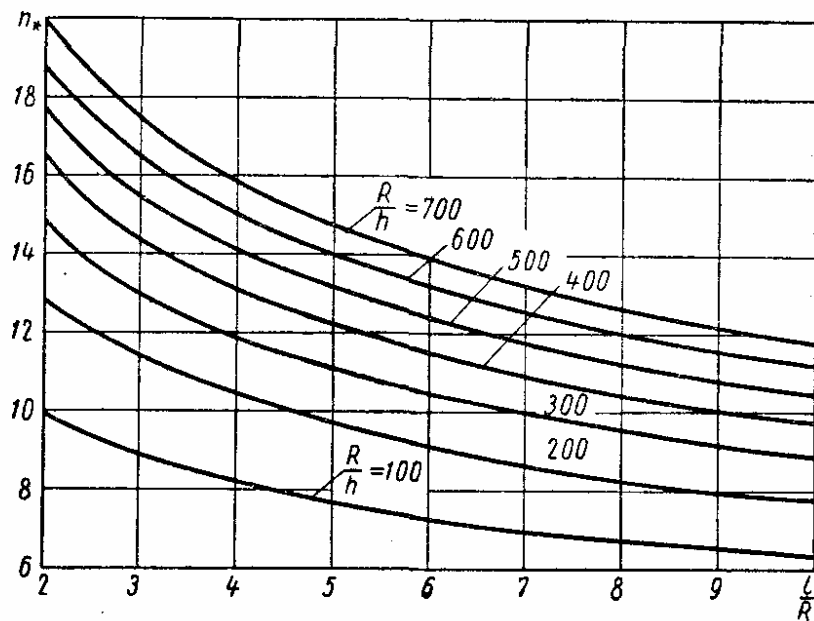


Рис. 18

волн n_* , которое зависит от параметров оболочки $\frac{l}{R}$ и $\frac{R}{h}$ и условий закрепления ее торцов. Для оболочек, имеющих $\frac{l}{R} \geq 2$, критические числа μ_{**} отвечают слиянию двух низших собственных частот оболочки в потоке газа. Результаты вычислений приближенных значений чисел n_* для свободно опертых цилиндрических оболочек [69] в достаточно широком диапазоне отношений $\frac{l}{R}$ и $\frac{R}{h}$ и $\nu = 0,3$ показаны на рис. 18.

Результаты численных расчетов минимальных критических скоростей флаттера для свободно опертой и защемленной цилиндрической оболочки даны соответственно на рис. 19 и 20. При вычислениях здесь

использовано точное решение уравнений колебаний цилиндрической оболочки в потоке газа. Критические числа μ_{**} в этих случаях определялись на основании исследования зависимостей $\lambda = f(\mu)$ в диапазоне чисел $n = 2 \div 14$. У рассмотренной оболочки критические числа μ соответствуют слиянию двух низших частот.

Зависимости $\lambda = f(\mu)$ при числах волн $n = 6, 7, 8, 9$ для свободно опёртой оболочки показаны на рис. 19, для оболочки с жестко заш

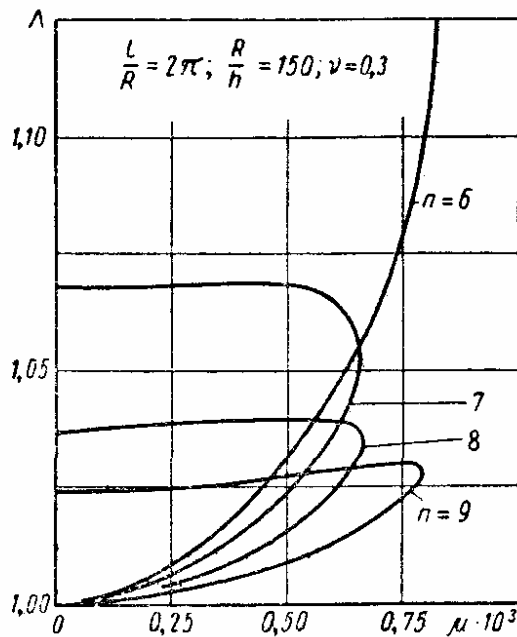


Рис. 19

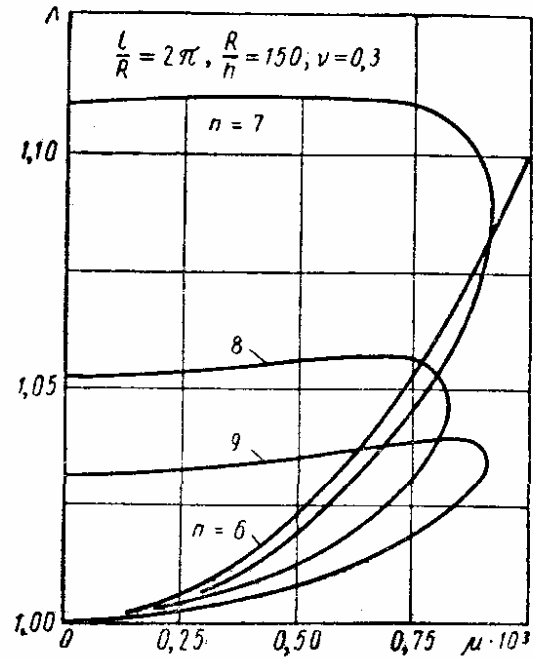


Рис. 20

ными торцами — на рис. 20. На обоих графиках по оси ординат отложено отношение $\Lambda = \lambda^2/\lambda_{1n}^2$, где λ_{1n} — частота первого тона преимущественно поперечных колебаний оболочки в вакууме для каждого рассмотренного случая. Критические числа μ_* , отвечающие числам волн $n = 6, 7, 8, 9$, приведены в табл. 5. Из табл. 5 следует, что для

5. Зависимость критических параметров $\mu_* \cdot 10^3$ от числа волн в окружном направлении для круговой цилиндрической оболочки

при $\frac{L}{R} = 2\pi$, $\frac{R}{h} = 150$, $\nu = 0,3$

(сверхзвуковой поток, поршневая теория)

Способ закрепления	Метод решения	n			
		6	7	8	9
Свободное опирание по торцам	Точное решение на ЭЦВМ	834	661	668	799
	Четырехчленное приближение по методу Галеркина	822	646	626	680
Зашемление по торцам	Точное решение на ЭЦВМ	1258	915	830	911

свободно опертой оболочки четырехчленное приближение метода Галеркина дает значение минимальных критических скоростей флаттера с точностью, достаточной для практических расчетов. Жесткое защемление оболочки ведет к увеличению критической скорости флаттера и соответствующего ей числа волн упругой поверхности оболочки в окружном направлении.

Формы колебаний W для двух низших частот собственных колебаний свободно опертой оболочки в потоке газа представлены на рис. 21 и 22. Все формы нормированы к своему максимальному значению. На рис. 21

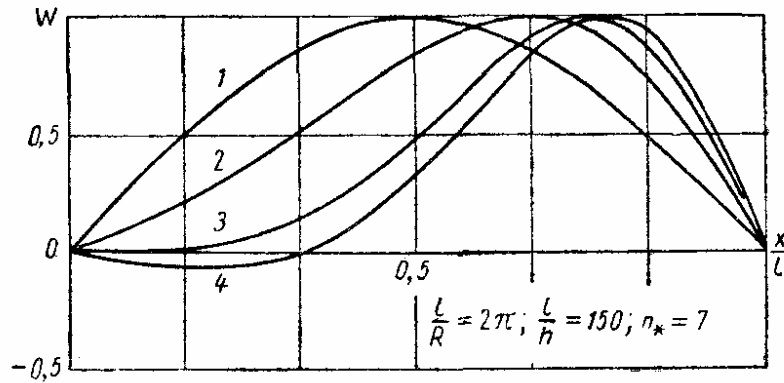


Рис. 21

приведены формы колебаний, соответствующие меньшей из двух частот (кривая 1 — $\mu = 0$; кривая 2 — $\mu = 0,3 \cdot 10^{-3}$; кривая 3 — $\mu = 0,6 \times 10^{-3}$; кривая 4 — $\mu = \mu_{**} = 0,661 \cdot 10^{-3}$), на рис. 22 — формы колебаний, отвечающие большей частоте (значение цифр около кривых

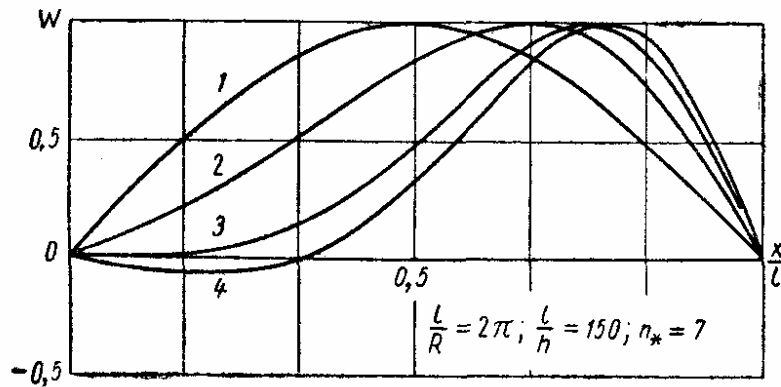


Рис. 22

такое же, как на рис. 21). Вначале при увеличении параметра скорости потока $0 < \mu < \mu_1$ форма колебаний для низшей частоты не имеет узловых точек на интервале $0 < \frac{x}{l} < 1$. Однако вблизи границы области флаттера при $\mu > \mu_1$ форма качественно меняет свой вид: на интервале $0 < \frac{x}{l} < 1$ у нее появляется одна узловая точка, так же как и у формы колебаний, отвечающей второй частоте. При дальнейшем увеличении параметра μ в пределах $\mu_1 < \mu < \mu_{**}$ происходит также и количествен-

ное сближение обеих форм. Значению параметра $\mu = \mu_{**}$ соответствует форма W с одной узловой точкой на интервале $0 < \frac{x}{l} < 1$.

Следовательно, при определении минимальных критических скоростей флаттера для длинных $\left(\frac{l}{R} \geq 2\right)$ цилиндрических оболочек метод Галеркина дает весьма надежные результаты. Вид закрепления торцов оболочки существенно влияет на величину минимальной критической скорости флаттера. Применение точного решения системы уравнений возмущенного движения позволяет определять собственные частоты и формы колебаний, а также исследовать устойчивость замкнутых круговых цилиндрических оболочек в потоке газа для достаточно широкого класса граничных условий на торцах оболочки.

Для коротких $\left(\frac{l}{R} < 2\right)$ оболочек при малом числе волн в окружном направлении обнаруживается второй минимум критической скорости μ_{**} , отвечающий большому числу полуволн по длине оболочки, причем $\mu_{**} < \mu_{**}$ [35]. Величину этого минимума при свободно открытых торцах оболочки в случае $n = 2$ можно определить по приближенной формуле [35], которая в принятых выше обозначениях будет иметь вид

$$\mu_{**} = 77,2 (1 - \nu^2) \frac{1}{\nu^3} \frac{h}{R} \sqrt{\nu \frac{h}{R}}. \quad (59)$$

Формула (59), как указано в работе [35], справедлива при

$$\frac{l}{R} > 3 \left(\frac{h}{R}\right)^{1/3}.$$

Минимальные критические скорости флаттера цилиндрической оболочки конечной длины впервые были определены в работе [69]. Эта задача рассматривалась затем в работах [19, 35, 83, 90].

Дополнительные библиографические указания. Оценка влияния тангенциальных сил инерции на критические скорости флаттера цилиндрических оболочек дана в статье [69]. Осесимметричный флаттер цилиндрических оболочек исследован в работах [37, 50]; балочной форме флаттера оболочки посвящена работа [63]. Влияние начальных усилий в срединной поверхности учтено в работе [70]. Флаттер цилиндрических панелей рассмотрен в работах [61, 90].

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ПАНЕЛЬНОГО ФЛАТТЕРА

Предварительные замечания. Решение задач об устойчивости пластинок и оболочек в потоке газа в линейной постановке дает возможность определить лишь критические скорости, а также минимальные толщины панелей, необходимые для предотвращения флаттера или дивергенции. Вопросы об определении амплитуд флаттера (амплитуд предельного цикла автоколебаний), амплитуд выпучивания, о поведении панели при установлении предельного цикла автоколебаний остаются открытыми. На эти вопросы ответ может дать только решение соответствующей нелинейной задачи. Следует отметить, что критические скорости

флаттера, найденные при решении линейной задачи, могут в некоторых случаях иметь смысл «верхних» критических скоростей. При скоростях, лежащих ниже этих скоростей, могут существовать устойчивые предельные циклы, которые будут осуществлены, если система получит достаточно большие начальные отклонения. Впервые на этот факт было указано в статье [7].

Важнейшим нелинейным фактором, лимитирующим амплитуды при флаттере и прогибы при выпучивании, являются нелинейности геометрического происхождения. Эти нелинейности связаны с возникновением усилий в срединной поверхности, которые существенным образом зависят от краевых условий.

В некоторых задачах следует учитывать также нелинейности физического происхождения, связанные с неупругими эффектами. Следует учитывать также влияние конструктивных нелинейностей. Учет аэродинамических нелинейностей важен при больших числах M , особенно при определении возможности существования периодических режимов и устойчивых статических конфигураций при скоростях, которые меньше, чем критические скорости, найденные по линейной теории.

Решению задач панельного флаттера в нелинейной постановке посвящено много работ. Краткий обзор можно найти в книге [15] и статье [23].

Основные уравнения. В первую очередь необходимо учитывать геометрические и аэродинамические нелинейности. Приведем основные уравнения для описания поведения плоских и криволинейных панелей в потоке газа с учетом этих нелинейностей, оставляя в стороне учет физических и конструктивных нелинейностей.

При исследовании поведения панелей в сверхзвуковом потоке принимают следующие предположения: а) гипотезу Кирхгофа-Лява считают справедливой; б) прогибы панели полагают малыми по сравнению со сторонами (или характерными размерами) панели, но сопоставимыми с толщиной h ; в) криволинейную панель считают настолько пологой, чтобы метрику ее срединной поверхности можно было отождествить с евклидовой; г) тангенциальные силы инерции и силы демпфирования считают пренебрежимо малыми; д) материал панели подчиняется закону Гука, а механические характеристики не зависят от температуры; е) аэродинамические силы определяют согласно поршневой теории; ж) вследствие аэродинамического нагрева в панели возникает температурное поле, линейно меняющееся по толщине:

$$T(x, y, z; t) = T_0(x, y, t) + z\Theta(x, y, t). \quad (60)$$

Поведение прямоугольной пластинки со сторонами a и b может быть описано при помощи уравнений типа Кармана [8, 11]

$$\left. \begin{aligned} D\Delta\Delta w + \alpha(1+\nu)D\Delta\Theta &= L(w, \Phi) + q; \\ \frac{1}{Eh}\Delta\Delta\Phi + \alpha\Delta T_0 &= -\frac{1}{2}L(w, w); \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

здесь w — прогиб; Φ — функция усилий в срединной поверхности, связанная с усилиями соотношениями

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (62)$$

α — коэффициент температурного расширения; L — дифференциальный оператор, определяемый соотношением

$$L(\varphi, \psi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (63)$$

Для пологой криволинейной панели основные уравнения будут следующими:

$$D\Delta\Delta w + \alpha(1+\nu)D\Delta\Theta = L(w, \Phi) + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + q;$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi + \alpha\Delta T_0 = -\frac{1}{2} L(w, w) - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (64)$$

Для пластинки с начальным прогибом $w_0(x, y)$ будем иметь систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} D\Delta\Delta w + \alpha(1+\nu)D\Delta\Theta &= L(w, \Phi) + L(w_0, \Phi) + q; \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi + \alpha\Delta T_0 &= -\frac{1}{2} L(w, w) - L(w_0, w). \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Нагрузка q складывается из инерционных сил, сил демпфирования и сил аэродинамического давления:

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + p; \quad (66)$$

здесь ε — коэффициент демпфирования; ρ — плотность материала панели; p — давление, подсчитывают по формуле (11) или по ее линеаризованному варианту.

Методы сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ввиду сложности исходных уравнений точного решения в замкнутом виде получить не удастся. Возможны лишь различные приближенные подходы. Наиболее эффективный подход основан на применении метода Галеркина [9] и его модификаций. В результате задача сводится к исследованию системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Полученная бесконечная система усекается, и дальнейшее исследование проводят для усеченной системы.

Один из методов сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям состоит в следующем. Выражение прогиба $w(x, y, t)$ представляют в виде ряда по координатным функциям, удовлетворяющим условиям для прогиба

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) w_i(x, y). \quad (67)$$

Поскольку условия совместной работы панели с подкрепляющей конструкцией очень сложны, условие для функции усилий в срединной поверхности можно формулировать «в среднем», требуя, чтобы осредненные усилия на кромках $\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy}$ были пропорциональны осредненным смещениям Δ_x, Δ_y и Δ_{xy} :

$$\bar{N}_x = c_x \Delta_x; \bar{N}_y = c_y \Delta_y; \bar{N}_{xy} = -c_{xy} \Delta_{xy}. \quad (68)$$

Функцию усилий ищут в виде двух слагаемых, одно из которых является однородной квадратической функцией координат, а второе — соответствующим образом выбираемым частным решением уравнения совместности. Коэффициенты квадратической функции определяют, исходя из требования удовлетворения осредненных условий (68). После нахождения функции усилий требуем, чтобы первое уравнение, коротко записанное в виде $P(\omega, \Phi) = 0$, после подстановки в него ряда (67) и выражения для функции усилий удовлетворялось в смысле метода Галеркина

$$\int_0^a \int_0^b P(\omega, \Phi) \omega_j(x, y) dx dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (69)$$

Если в качестве координатных функций взять формы малых собственных колебаний панели с собственными частотами Ω_j , то система (69) примет вид

$$\frac{d^2 f_j}{dt^2} + \varepsilon \frac{df_j}{dt} + \Omega_j^2 f_j + \Psi_j(f_k, M) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (70)$$

Другим методом сведения задачи к системе типа (70) является непосредственное применение метода Галеркина не только к уравнению движения, но и к уравнению совместности. Этот метод удобен, например, когда для функции Φ поставлены следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, x = a; \\ \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, y = b. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

В случае двучленного приближения для прогиба (67) система (70) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_j}{d\tau^2} + g \frac{d\varphi_j}{d\tau} + \Omega_j^2 \varphi_j + a_{j1} \varphi_1 + a_{j2} \varphi_2 + b_{j1} \varphi_1^2 + \\ + b_{j2} \varphi_1 \varphi_2 + b_{j3} \varphi_2^2 + c_{j1} \varphi_1^3 + c_{j2} \varphi_1^2 \varphi_2 + c_{j3} \varphi_1 \varphi_2^2 + c_{j4} \varphi_2^3 + d_j = 0 \\ (j = 1, 2); \end{aligned} \quad (72)$$

здесь введены безразмерные величины

$$\varphi_j = \frac{f_j}{h}; \quad \tau = \Omega_0 t; \quad \Omega_0^2 = \frac{D\pi^2}{\rho_0 h a^4}; \quad g = \frac{\varepsilon}{\Omega_0}$$

и, кроме того, предположено, что $\Theta = 0$. Значения коэффициентов уравнения (72) для плоской изотропной панели можно найти в работе [16] в случае применения поршневой теории, а для случая применения линей-

ризированной аэродинамической теории — в работе [56]. Для пластинок, имеющих защемленные стороны, значения коэффициентов системы (72) приведены в работах [40, 41]. Цилиндрическая панель, опертая на прямоугольный в плане контур, рассмотрена в работах [53, 55]. Панели, бесконечные по размаху, рассмотрены в работах [8, 66]. Коэффициенты системы (72) для ортотропных и трехслойных пластин можно найти в работах [1, 2, 3].

Температурное выпучивание панелей. Панель, обтекаемая потоком газа, подвергается аэродинамическому нагреву и может выпучиться [13, 18]. Рассмотрим случай, когда поведение панели описывается системой (72). Статические конфигурации панели определяют из этой системы при условии, что Φ_j не зависит от времени. В случае, когда $d_j \neq 0$, система не допускает нулевого решения. Вообще говоря, коэффициенты d_j зависят от параметра температуры. Поэтому при изменении температуры будет изменяться величина прогиба панели. Другой случай реализуется, когда все $d_j = 0$. В этом случае система допускает тривиальное решение, соответствующее первоначальной плоской форме панели. Исследование устойчивости этого решения показывает, что на плоскости параметров скорости μ и температуры θ можно выделить область устойчивости плоской формы панели. Амплитуды выпучивания можно определить нахождением нетривиального не зависящего от времени решения системы (72) и исследования устойчивости этого решения. Фактически осуществляемые амплитуды выпучивания соответствуют устойчивому решению.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Опертая по контуру прямоугольная пластинка. Область устойчивости на плоскости μ, θ ограничена отрезком эллипса [13, 16]

$$(\omega_{11}^2 - s_{11}\theta)(\omega_{21}^2 - s_{21}\theta) + \mu^2 = 0 \quad (73)$$

и прямой

$$\mu = -\frac{s_{21} - s_{11}}{2}\theta + \frac{\omega_{21}^2 - \omega_{11}^2}{2} \quad (74)$$

(демпфированием пренебрегаем).

На рис. 23 область устойчивости заштрихована. Для определения амплитуд выпучивания целесообразно решать систему уравнений не относительно неизвестных Φ_1 и Φ_2 , а относительно параметров μ и θ [16]. На плоскости μ, θ нетрудно получить семейства кривых $\Phi_1 = \text{const}$ и $\Phi_2 = \text{const}$, являющихся горизонталями некоторой поверхности. Часть из полученных решений устойчива, а часть — неустойчива.

Пример 2. Опертая по контуру цилиндрическая панель, прямоугольная в плане [53]. В этом случае, вообще говоря, $d_j \neq 0$. Последнее имеет место, например, в случае, когда кромки панели $y=0$ и $y=b$ не могут смещаться в тангенциальном направлении. При любом изменении температуры прогиб панели изменяется. Величины амплитуд температурного выпучивания можно определить решением соответствующей систе-

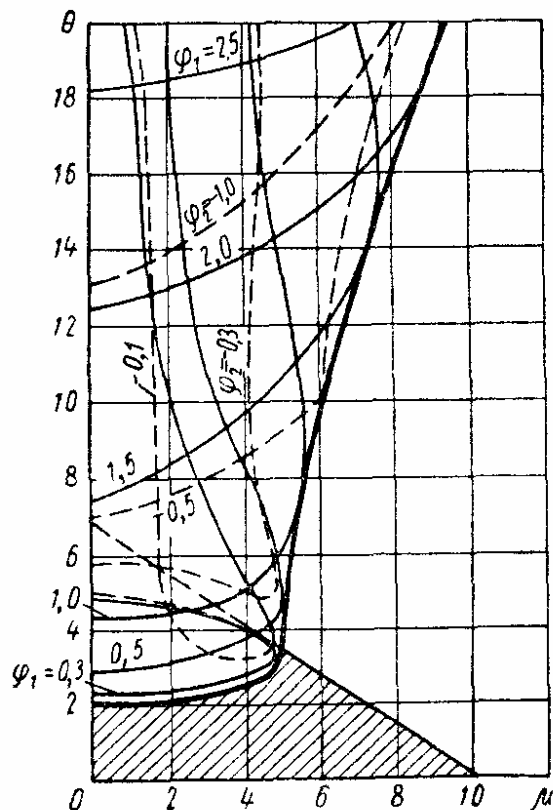


Рис. 23

мы уравнений. Линии $\varphi_1 = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$ для частного случая панели с параметрами $\frac{a}{b} = 1$; $\beta_x = \beta_y = 1$; $\rho = -0,125$ показаны на рис. 24. При этом параметры β_x , β_y и ρ определяются соотношениями

$$\beta_x = \left(1 + \frac{Eh}{c_x}\right)^{-1}; \beta_y = \left(1 + \frac{Eh}{c_y}\right)^{-1}; \rho = \frac{b^2 k_y}{\pi^4 h},$$

там же показана граница устойчивости (сплошная жирная кривая).

Возможен случай, когда $d_j = 0$. Таков, например, случай свободно смещающихся кромок $y = 0$ и $y = b$. Здесь имеется область на плоскости пара-

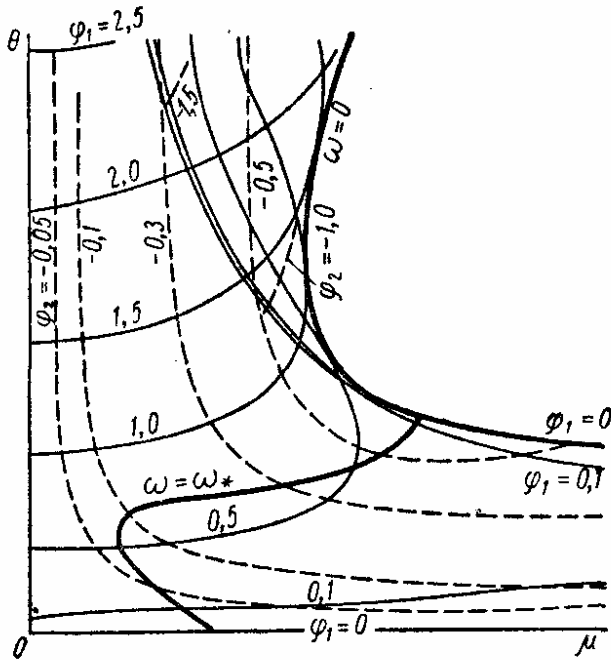


Рис. 24

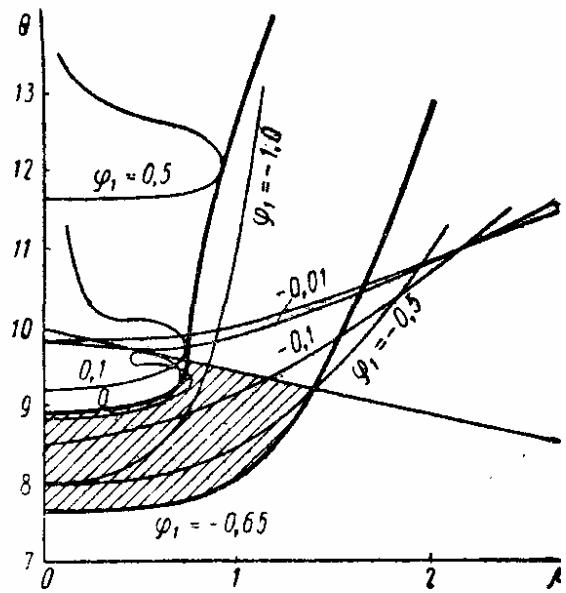


Рис. 25

метров μ , θ , в которой невыпученная панель будет устойчива. При этом имеется возможность прощелкивания панели. Область наиболее вероятного прощелкивания панели на рис. 25 заштрихована.

Вышеприведенные результаты были получены при использовании поршневой теории для учета аэродинамического давления. Учет воздействия потока по более точным теориям не изменяет качественной картины явления [56]. Вопросы температурного выпучивания панелей в потоке газа рассматривались в работах [13, 16, 53, 55, 82].

Установившийся флаттер панелей. Разрушение панелей, колеблющихся в потоке газа, не носит катастрофического характера, а наступает вследствие накопления усталостных повреждений. Для предсказания времени возможного разрушения панели необходимо знать в первую очередь амплитуды колебаний в области флаттера. Для оценки амплитуд колебаний могут быть применены известные методы теории нелинейных колебаний: метод гармонического баланса, метод малого параметра, метод последовательных приближений и др. В области, прилегающей к границе флаттера, удобен метод малого параметра. В более широкой области надежные результаты дает метод гармонического баланса (метод тригонометрических рядов).

Решение по методу малого параметра. Решение уравнений флаттера в первом приближении имеет вид [11]

здесь $\varphi_1 = A \cos \omega_* \tau$; $\varphi_2 = A (-\cos \omega_* \tau - g\chi \sin \omega_* \tau)$;

$$\chi = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2};$$

ω_* — частота флаттера, определяемая формулой

$$\omega_* = \left(\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Критический параметр скорости вычисляют по формуле

$$\mu_* = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2}.$$

Амплитуду определяют по формуле

$$A = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{\mu - \mu_*}{c_0 - \mu_*^3 b_0}}, \quad (75)$$

где

$$c_0 = c_{24} + c_{22} - c_{11} - c_{13}; \quad b_0 = \frac{27}{1792} (\kappa + 1) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{D^2 \pi^{10}}{\kappa^2 p_0^2 a^6}. \quad (76)$$

Выписанные формулы получены в предположении о малости затухания в системе. Парциальные частоты Ω_1 и Ω_2 для пластинки, нагруженной усилиями N_x и N_y , можно найти из соотношений

$$\Omega_1^2 = (1 + m^2)^2 - \frac{a^2}{\pi^2 D} (N_x + m^2 N_y);$$

$$\Omega_2^2 = (4 + m^2)^2 - \frac{a^2}{\pi^2 D} (4N_x + m^2 N_y),$$

а для пластинки, подверженной воздействию температурного поля, — из соотношений [16]

$$\Omega_1^2 = (1 + m^2)^2 - s_{11} \theta;$$

$$\Omega_2^2 = (4 + m^2)^2 - s_{21} \theta.$$

Характер решения вблизи $\mu = \mu_*$ зависит от знака выражения $c_0 - \mu_*^3 b_0$. Если $c_0 - \mu_*^3 b_0 > 0$, то на границе флаттера мы имеем «мягкое» возбуждение (постепенное нарастание амплитуды); если $c_0 - \mu_*^3 b_0 < 0$, то возбуждение будет «жестким» (возбуждение скачком).

Зависимость амплитуды A от скорости потока показана на рис. 26 для двух случаев: 1) абсолютно податливого стержневого набора ($\beta_x = \beta_y = 0$), (сплошные линии); 2) абсолютно жесткого стержневого набора ($\beta_x = \beta_y = 1$), (штриховые линии). Реальное закрепление обшивок, подкрепленных стержневым набором, соответствует некоторому

промежуточному случаю. Результаты относятся к квадратной панели $m = \frac{a}{b} = 1$; $\nu = 0,25$; $N_x = N_y = 0$; $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кн} \cdot \text{см}^{-2}$, обтекаемой потоком воздуха ($\kappa = 1,4$; $\rho_0 = 10 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}$).

Сравнение результатов первого (кривая 1), второго (кривая 2) приближения по методу малого параметра и метода гармонического баланса (кривая 3) показано на рис. 27.

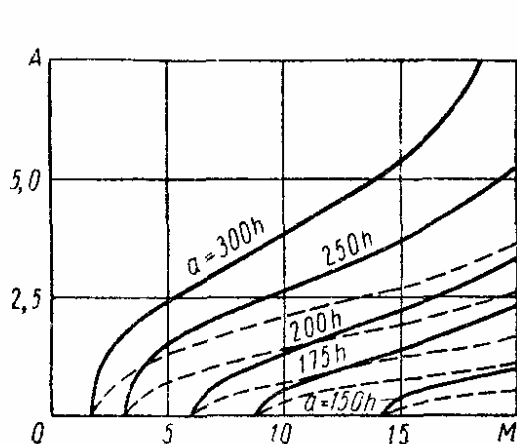


Рис. 26

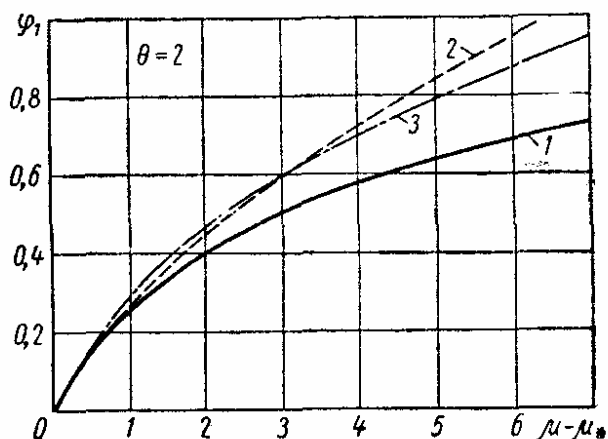


Рис. 27

Применение метода гармонического баланса при некоторых упрощающих предположениях приводит к формуле, совпадающей с формулой (75) с точностью до членов, содержащих M^3 . При этом решение ищут в виде тригонометрических рядов с учетом того, что начальная фаза решения для установившихся колебаний не существенна.

Решение по методу гармонического баланса можно найти в работах [8, 16, 53].

Дополнительные библиографические указания. Нелинейные задачи для защемленной панели рассмотрены в статье [42], а для трехслойной панели — в статьях [1, 2, 3, 84]. Нестационарные задачи панельного флаттера являются предметом работ [17, 54, 57]. Решение нелинейных уравнений панельного флаттера при помощи электронных моделирующих машин описано в статьях [8, 59]. Флаттер цилиндрических оболочек, наполненных жидкостью и обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, рассмотрен в статье [71].

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЖИДКОСТЬЮ

Здесь ограничимся лишь библиографическими указаниями. Колебаниям тел, содержащих жидкость, посвящено большое количество работ [25, 51, 52, 65, 72]. Колебания стержней с полостью, частично заполненной жидкостью, рассмотрены в работах [24, 26, 64, 86]. Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, содержащих жидкость, описаны в работах [65, 91], а осесимметричные — в работах [72, 73].

Имеется много работ, посвященных устойчивости труб при протекании внутри них жидкости. Задача об устойчивости двухслойной цилиндрической оболочки, в полостях которой течет жидкость, решена в работе [58].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Ж. Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1961, № 4.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Ж. Е. Об устойчивости нелинейно упругих трехслойных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1961, № 5.
3. Багдасарян Ж. Е. Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. «Изв. АН Армянской ССР (физико-математические науки)». Т. 14, 1961, № 5.
4. Бисплингхофф Р. А., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. М., ИЛ, 1958.
5. Болотин В. В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости. Инженерный сборник. Т. 24, 1956.
6. Болотин В. В. К вопросу об устойчивости пластинки в потоке сжимаемого газа. Сб. «Вопросы прочности материалов и конструкций». Изд-во АН СССР, 1959.
7. Болотин В. В. О критических скоростях в нелинейной теории аэроупругости. Научные доклады высшей школы. «Машиностроение и приборостроение», 1958, № 3.
8. Болотин В. В. и др. Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1959, № 3.
9. Болотин В. В. О применении вариационного метода Галеркина к задачам флаттера упругих панелей. «Изв. вузов. Машиностроение», 1959, № 11.
10. Болотин В. В. Некоторые новые задачи динамики оболочек. Сб. «Расчеты на прочность». Вып. 4. Машгиз, 1959.
11. Болотин В. В. Нелинейный флаттер пластин и оболочек. Инженерный сборник. Т. 28, 1960.
12. Болотин В. В. и др. О вибрациях проводов воздушных линий электропередачи и о борьбе с ними. Труды Московского энергетического института. Вып. 32. Изд. МЭИ, 1959.
13. Болотин В. В. Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сб. «Расчеты на прочность». Вып. 6. Машгиз, 1960.
14. Болотин В. В. О применении «закона плоских сечений» для определения аэродинамических сил, действующих на колеблющиеся оболочки. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1961, № 1.
15. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
16. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Выпучивание и установившийся флаттер термически сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке. «Инженерный журнал». Т. 1. Вып. 2. 1961.
17. Болотин В. В. Нестационарный флаттер пластин и пологих оболочек в потоке газа. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1962, № 3.
18. Болотин В. В. О поведении нагретых пластин и оболочек в потоке газа. «Инженерный журнал». Т. 2. Вып. 3. 1962.
19. Брусиловский А. Д., Мельникова Л. М., Швейко Ю. Ю. Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки в потоке газа. «Инженерный журнал». Механика твердого тела, 1966, № 1.
20. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
21. Григолюк Э. И., Лампер Р. Е., Шандаров Л. Г. Некоторые теоретические и экспериментальные исследования автоколебаний криволинейных панелей в потоке газа. Сб. «Теория оболочек и пластин». Труды IV Всесоюзной конференции. Ереван, изд-во АН Армянской ССР, 1964.
22. Григолюк Э. И., Михайлов А. П. Трехслойная прямоугольная пластина в сверхзвуковом потоке газа. ДАН СССР, 1965, № 6, 1964.
23. Григолюк Э. И., Лампер Р. Е., Шандаров Л. Г. Флаттер панелей и оболочек. Итоги науки. Механика. Изд-во АН СССР, 1963.
24. Гроссман Е. П. и Пановко Я. Г. Упругие колебания частей самолета. Л., Ленинградская Военно-воздушная Академия, 1947.
25. Докучаев Л. В. Решение краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях. ПММ. Т. 28. Вып. 1, 1964.
26. Докучаев Л. В. Об уравнениях упругих колебаний полости, частично заполненной жидкостью. «Изв. АН СССР, Механика», 1965, № 3.

27. И л ь ю ш и н А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ. Т. 20. Вып. 6, 1956.
28. К о п з о н Г. И. Гармонические колебания упругих пластин в дозвуковом потоке. «Изв. АН СССР, ОТН», 1956, № 2.
29. К у д р я в ц е в Е. П. О колебаниях коаксиальных упругих цилиндрических оболочек, между которыми течет сжимаемая жидкость. Сб. «Теория оболочек и пластин». Труды IV Всесоюзной конференции. Ереван, изд-во АН Армянской ССР, 1964.
30. К у д р я в ц е в Е. П. О колебаниях бесконечно длинной упругой цилиндрической оболочки, обтекаемой потоком сжимаемого газа. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1964, № 6.
31. Л а й т х и л л М. Дж. Колебания профилей при больших числах М. Сб. «Механика». М., ИЛ, № 5, 1954.
32. Л а м п е р Р. Е. Устойчивость взаимного движения двух сред. «Изв. вузов. Авиационная техника», 1959, № 4.
33. Л а м п е р Р. Е. Устойчивость упругой полосы в потоке газа. «Изв. вузов. Авиационная техника», 1960, № 3.
34. Л а м п е р Р. Е. О применении некоторых аэродинамических теорий к расчету флаттера панели. ПМТФ, 1960, № 2.
35. Л а м п е р Р. Е., Ш а н д а р о в Л. Г. Расчет и экспериментальное исследование автоколебаний цилиндрических оболочек и панелей в потоке газа. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1963, № 3.
36. Л и в а н о в К. К. Устойчивость защемленной панели в сверхзвуковом потоке. Инженерный сборник. Т. 25, 1959.
37. Л и в а н о в К. К. Осесимметричные колебания цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа. «Инженерный журнал», 1963, Т. 3, № 2.
38. Л и с у н о в А. Д. Флаттер панели в потоке сжимаемой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. ПМТФ, 1960, № 4.
39. М а й л с Дж. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Физматгиз, 1963.
40. М а к а р о в Б. П. Об устойчивости защемленных пластин в потоке сжимаемого газа. «Изв. вузов. Машиностроение», 1961, № 1.
41. М а к а р о в Б. П. О нелинейном флаттере пластин, защемленных по контуру. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Казань, КФ АН СССР, 1961.
42. М а к а р о в Б. П. Амплитуды установившегося флаттера защемленных панелей. «Изв. вузов. Машиностроение», 1961, № 5.
43. М а р е й н Н. С. Определение подъемной силы для кругового цилиндра, колеблющегося в потоке жидкости. Труды Московского энергетического института. Вып. 32. Изд. МЭИ, 1959.
44. М а х о р т ы х Ж. К. Устойчивость многопролетной панели, движущейся в газе. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1959, № 2.
45. М а х о р т ы х Ж. К. Колебания двухпролетной панели в газовом потоке. Инженерный сборник. Т. 28, 1960.
46. М и к и ш е в Г. Н. Экспериментальное исследование автоколебаний квадратной пластины в сверхзвуковом потоке. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1959, № 1.
47. М о в ч а н А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. ПММ. Т. 20. Вып. 2, 1956.
48. М о в ч а н А. А. Об устойчивости панелей, движущихся в газе. ПММ. Т. 21. Вып. 2, 1957.
49. М о в ч а н А. А. Устойчивость лопатки, движущейся в газе. ПММ. Т. 21. Вып. 5, 1957.
50. М о в ч а н А. А. О влиянии аэродинамического демпфирования на сверхзвуковой флаттер обшивки. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1960, № 1.
51. М о и с е е в Н. Н. К теории колебаний упругих тел, имеющих жидкие полости. ПММ. Т. 23. Вып. 5, 1959.
52. М о и с е е в Н. Н., Р у м я н ц е в В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
53. Н о в и ч к о в Ю. Н. Устойчивость и автоколебания плоских и криволинейных панелей в потоке газа. Труды III Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Киев, 1962.
54. Н о в и ч к о в Ю. Н. Об устойчивости решений в задаче о флаттере панелей. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1962, № 4.
55. Н о в и ч к о в Ю. Н. О решении уравнений установившегося флаттера цилиндрических панелей. «Инженерный журнал». Т. 2. Вып. 4, 1962.
56. Н о в и ч к о в Ю. Н. О применении трехмерной аэродинамической теории к задачам выпучивания и флаттера панелей. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1963, № 3.

57. Новичков Ю. Н. Нестационарный флаттер цилиндрических панелей. Сб. «Теория оболочек и пластин». Труды IV Всесоюзной конференции. Ереван, изд-во АН Армянской ССР, 1964.
58. Новичков Ю. Н., Швейко Ю. Ю. Колебания и устойчивость двухслойной цилиндрической оболочки, в полостях которой течет жидкость. Доклады научно-технической конференции МЭИ, секция энергомашиностроительная. М., изд-во МЭИ, 1965.
59. Новичков Ю. Н., Нагорнов Л. Н. Исследование флаттера и термического выпучивания панелей в потоке газа методом электронного моделирования. Доклады научно-технической конференции МЭИ, секция энергомашиностроительная. М., изд-во МЭИ, 1965.
60. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. Изд. МГУ, 1963.
61. Степанов Р. Д. О флаттере цилиндрических панелей, движущихся в газе. Инженерный сборник. Т. 25, 1959.
62. Раппопорт И. М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М. «Машиностроение», 1967.
63. Рабинович Б. И. О малых гармонических колебаниях цилиндрической оболочки, вдоль оси которой течет со сверхзвуковой скоростью идеальный газ. ПММ. Т. 23. Вып. 5, 1959.
64. Рабинович Б. И. Об уравнениях упругих колебаний тонкостенных стержней с жидким заполнением при наличии свободной поверхности. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1959, № 4.
65. Рабинович Б. И. Об уравнениях поперечных колебаний оболочек с жидким заполнением. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1964, № 1.
66. Фын Я. Ц. О двумерном флаттере панели. Сб. «Механика», М., ИЛ, № 1 (53), 1959.
67. Фын Я. Ц. Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1959.
68. Хеджепет Д. Флаттер прямоугольных свободноопертых панелей при больших сверхзвуковых скоростях. Сб. «Механика», М., ИЛ, № 2 (48), 1958.
69. Швейко Ю. Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1960, № 6.
70. Швейко Ю. Ю. О влиянии сверхзвукового потока на нижнее критическое усилие для цилиндрической панели. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1961, № 4.
71. Швейко Ю. Ю. Устойчивость цилиндрической оболочки с жидким заполнением в потоке газа. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1964, № 5.
72. Шклярчук Ф. Н. О приближенном методе расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1965, № 6.
73. Шамаков В. П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1964, № 1.
74. Ashley H., Zartarian G. Piston theory — a new aerodynamic tool for the aeroelastician. J. Aeronaut. Sci., v. 23, n. 12, 1956.
75. Calligeros J. H., Dugundji J. Effects of orthotropy orientation on supersonic panel flutter. AIAA Journal, v. 1, n. 2, 1963.
76. Cunningham H. J. Flutter analysis of flat rectangular panel based on three-dimensional supersonic potential flow. AIAA Journal, v. 1, n. 8, 1963.
77. Dzigadlo Z., Kaliski S. Selfexcited vibration of a stiffened inelastic shell in a linearized supersonic flow. Proceedings of vibration problems, v. 1, n. 3, 1960.
78. Dzigadlo Z. Selfexcited vibration of a cylindrical shell of finite length in supersonic flow. Proceedings of vibration problems, v. 3, n. 1, 1962.
79. Fung Y. C. Some recent contributions to panel flutter research. AIAA Journal, v. 1, n. 4, 1963.
80. Johns D. I. Some panel flutter studies using piston theory. J. Aeronaut. Sci., v. 25, n. 11, 1958.
81. Hedgepeth J. M. On the flutter of panels at high Mach numbers. J. Aeronaut. Sci., v. 23, n. 6, 1956.
82. Hoff N. J. Thermal buckling of supersonic wing panels. J. Aeronaut. Sci., v. 23, n. 11, 1956.
83. Holt M., Strack S. L. Supersonic panel flutter of a cylindrical shell of finite length. J. Aeronaut. Sci., v. 28, n. 3, 1961.

84. Librescu L. Asupra flatterului neliniar al structurilor cilindrice, subtiri, neomogene. Studii si Cercatori de Mechanica Aplicata, 13, n. 3, 1962.
85. Leonard R. W., Hedgepeth J. M. On panel flutter and divergence of infinitely long unstiffened and ring-stiffened thin-walled circular cylinders. NACA Rep. n. 1302, 1957.
86. Lindholm U. S., Kana D. D., Abramson H. N. Breathing vibration of a circular cylindrical shell with an internal liquid. J. Aerospace Sci., v. 29, n. 9, 1962.
87. Miles J. W. Supersonic flutter of a cylindrical shell. J. Aeronaut. Sci., v. 24, n. 2, 1957; v. 25, n. 5, 1958.
88. Nelson H. C., Cunningham H. J. Theoretical investigation of flutter of two-dimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow. NACA Rep. n. 1280, 1956.
89. Kaliski S., Solarz E. Aero—magneto—flutter of a plate flow past by a perfectly conductive gas in magnetic field with isotropic action. Proceedings of vibration problems, v. 3, n. 3, 1962.
90. Voss H. M. The effect of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin cylindrical shells. J. Aerospace Sci., vol. 28, n. 12, 1961.
91. Wen-Hwa-Chu. Breathing vibrations of a partially filled cylindrical tank-linear theory. Journal of Appl. Mech., v. , n. 4, 1963.
-

Глава 10

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие о статистической динамике механических систем. Раздел механики, посвященный изучению поведения механических систем при различных случайных воздействиях, называют *статистической динамикой механических систем* [6]. В то же время этот раздел является частью *статистической динамики* [24, 26, 27] — области прикладной математики, посвященной применению вероятностных методов к механическим, электрическим, радиотехническим, кибернетическим и тому подобным системам. Статистическая динамика механических систем связана с механикой общностью объектов, со статистической динамикой — общностью методов исследования.

Задачи статистической динамики механических систем. Эти задачи можно разбить на две группы (рис. 1). К первой группе принадлежат задачи, связанные с обеспечением *надежности конструкций* (см. гл. 8, т. 1). Эти задачи можно формулировать по-разному. В одних случаях цель состоит в определении *вероятности отказа*, достигаемой к концу установленного срока эксплуатации, или в определении среднего или наиболее вероятного срока службы. В других случаях требуется отыскание *законов распределения параметров*, характеризующих деформированное состояние (например, остаточных деформаций, которые накапливаются к концу срока эксплуатации). Может возникнуть задача об отыскании законов распределения внешних или внутренних параметров (например, допусков при выполнении конструкции или уровня флуктуационных нагрузок), при которых обеспечивается нормативная надежность конструкции. Перечисленные примеры не исчерпывают всего многообразия задач. Их постановки могут видоизменяться в зависимости от назначения и условий работы конструкции.

Другая группа задач связана с обработкой и интерпретацией результатов испытаний конструкций на прочность, устойчивость и колебания. Наиболее типичным примером являются испытания тонких оболочек на устойчивость. Известно, что из-за большого разброса экспериментальных критических сил не удастся провести полного сопоставления опытных данных и результатов теории. Для возможности такого сопоставления необходимо знать статистические распределения начальных неправильностей, флуктуаций в осуществлении краевых условий и других факторов, влияющих на величину критических нагрузок. Основная задача состоит в том, чтобы, зная распределение случайных параметров,

характеризующих оболочку и условия испытания, найти законы распределения критических сил. Может возникнуть и обратная задача — на основании данных об эмпирических распределениях критических нагрузок вынести суждение о законах распределения «внутренних» параметров для испытываемой серии оболочек. Очевидно, указанный круг задач не связан непосредственно с проблемой надежности: эти задачи могли бы возникнуть и в том случае, если бы проблемы надежности не существовало.

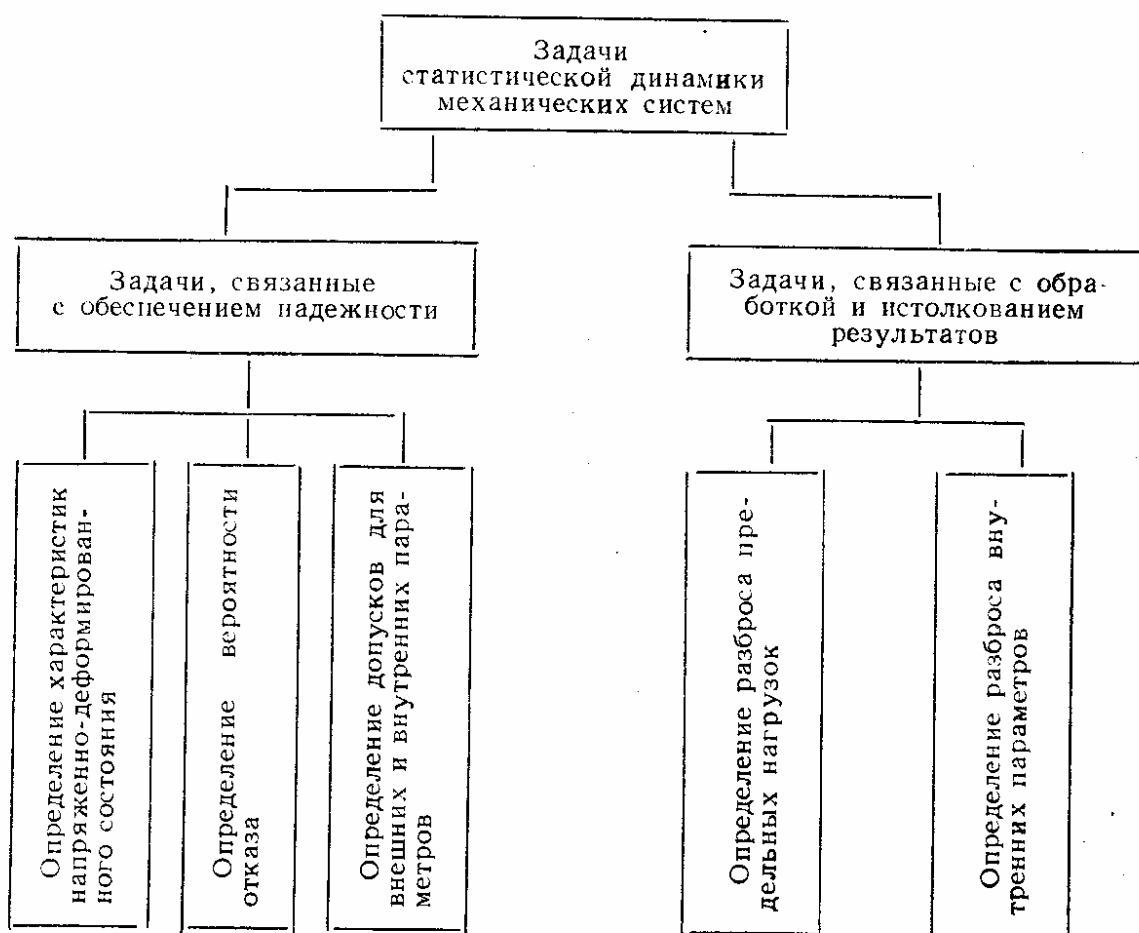


Рис. 1. Классификация задач статистической динамики механических систем

Типы случайных факторов. Выбор метода исследования в первую очередь определяется вероятностной природой тех факторов, от которых зависит поведение конструкции (рис. 2). Одни из параметров представляют собой случайные величины. Другие являются случайными функциями времени или пространственных переменных (нередко — и того, и другого), или, как принято говорить, представляют собой случайные процессы. Свойства конструкции, как правило, характеризуются случайными величинами; нагрузки, обычно, приходится трактовать как случайные процессы. Указанное деление является довольно условным.

Известно, что определенный класс случайных функций можно представить в виде суммы конечного или бесконечного числа соответствующим образом выбранных детерминистических (неслучайных) функций, зависящих от случайных параметров. Если число этих параметров конечно, то от операции над случайными функциями можно перейти к операциям над соответствующими случайными величинами. Если же

это число бесконечно, но счетно, то может оказаться, что поведение случайной функции с хорошим приближением описывается небольшим числом параметров. Так, дефекты в изготовлении конструкции, строго говоря, представляют собой случайные функции координат. Раскладывая же эти функции в ряды по некоторым детерминистическим функциям, мы получаем возможность описать неправильности при помощи случайных чисел — коэффициентов этих рядов. В качестве другого примера можно указать на кратковременные импульсивные нагрузки.

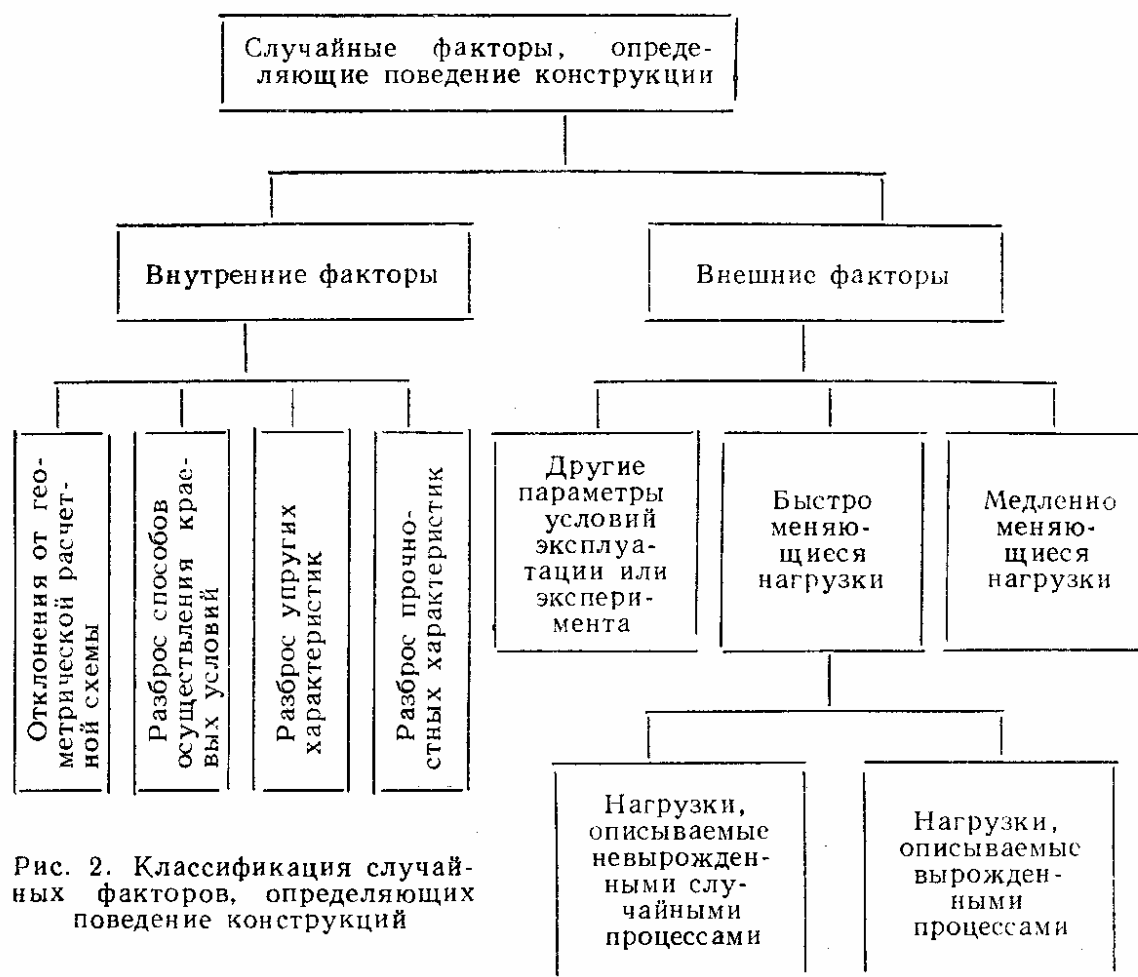


Рис. 2. Классификация случайных факторов, определяющих поведение конструкций

Форма случайных импульсов обычно бывает довольно проста и поэтому может быть описана при помощи детерминистических функций времени и нескольких случайных параметров. Напротив, такие случайные нагрузки, как давление от пульсаций в пограничном слое и акустическое излучение работающих двигателей, давление беспокойного моря на судовые и ограждающие конструкции и т. п., описываются лишь в рамках теории случайных процессов.

Обзор методов статистической динамики. Эти методы могут быть разбиты на три группы (рис. 3): *квазистатистические методы*, *корреляционные методы* и родственные им и, наконец, методы, основанные на использовании *кинетических уравнений*. Каждый метод имеет свои достоинства и недостатки, свою область применения. Эти области могут перекрываться.

Квазистатистические методы основаны на применении хорошо известных формул теории вероятностей. Эти методы с успехом могут быть применены к тем задачам, в которых случайные факторы описываются при помощи конечного (практически не слишком большого) количества случайных величин. Для того чтобы использовать квазистатистические методы, необходимо располагать решениями соответствующих детерми-

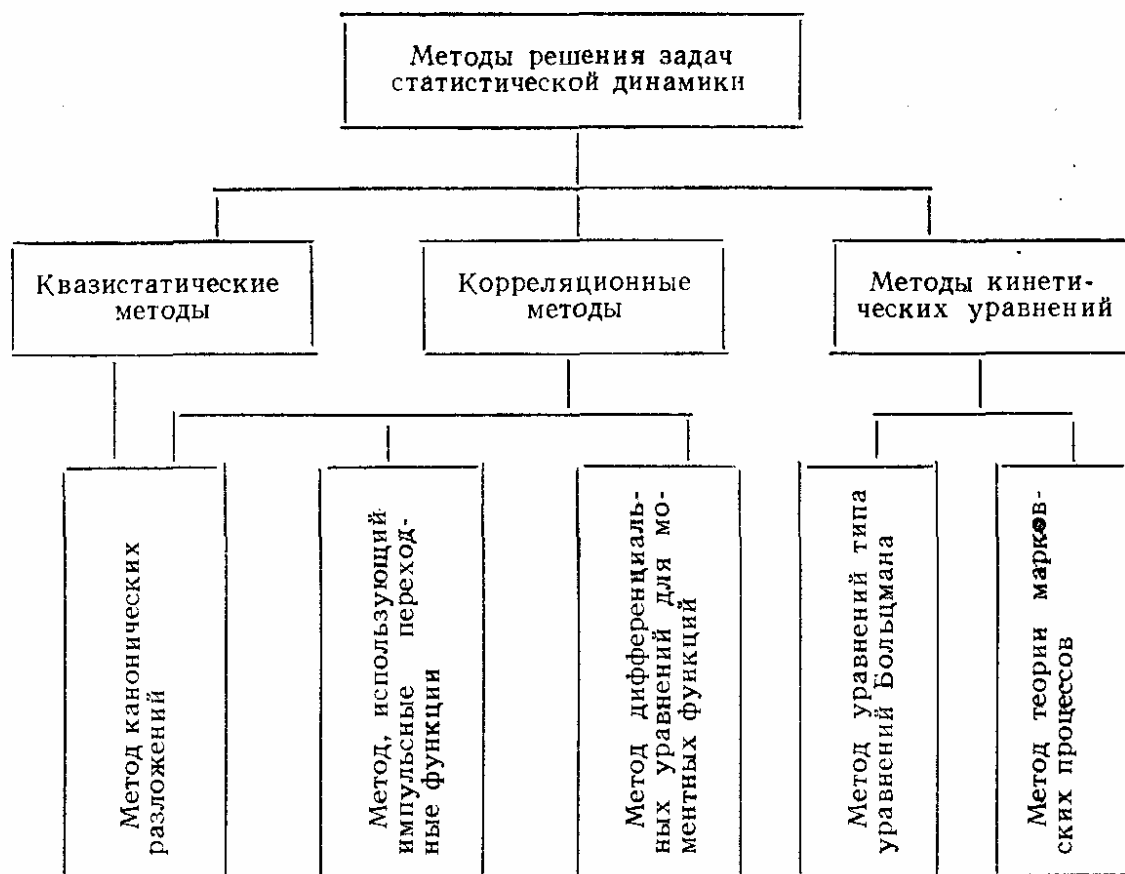


Рис. 3. Классификация методов решения задач статистической динамики

нистических задач во всей области изменения случайных параметров; дальнейшие операции сводятся к преобразованию распределений вероятностей для этих параметров. Область применения квазистатистических методов не ограничивается теми задачами, где нагрузки изменяются весьма медленно (квазистатистически). Если случайные динамические нагрузки могут быть представлены в виде детерминистических функций времени, зависящих от конечного числа случайных величин, то квазистатистические методы и здесь могут оказаться весьма эффективными.

Корреляционные методы основаны на использовании связи между корреляционными (или моментными) функциями «входных» параметров (например, нагрузок) и «выходных» параметров (прогибов, внутренних усилий, напряжений). Эти связи могут выражаться как при помощи дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, так и — в простейших случаях — при помощи конечных соотношений. Спектральный метод и метод канонических разложений занимают промежуточное место между корреляционными и квазистатистическими методами. Область применения корреляционных методов — задачи, в которых

внешняя нагрузка представляет собой коррелированный случайный процесс. Методы оказываются особенно удобными, если нагрузка является гауссовским процессом, а система — линейной. Однако и для ряда нелинейных систем иногда удается получить эффективное решение, привлекая методы нелинейной механики.

В третьей группе методов используют дифференциальные и интегродифференциальные уравнения, описывающие эволюцию функций распределения случайных параметров во времени. Методы кинетических уравнений особенно подробно разработаны применительно к процессам без последствия (марковским процессам). Поэтому область эффективного применения этих методов — задачи, в которых выходные величины можно трактовать как компоненты некоторого многомерного марковского процесса. Основное преимущество методов, основанных на рассмотрении марковских процессов, состоит в возможности непосредственного получения функций распределения. Однако реализация этого преимущества может оказаться невыполнимой из-за трудностей отыскания решений кинетических уравнений.

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Предварительные замечания. Квазистатистические методы основаны на формулах элементарной теории вероятностей и не требуют привлечения теории случайных процессов. Применение квазистатистических методов предполагает предварительное решение соответствующих детерминистических (статических или динамических) задач [3, 4, 25, 28, 50]. Приложения квазистатистических методов к различным задачам устойчивости оболочек даны в работах [10, 12, 21—23]. Аналогичные методы применяют в теории автоматического управления и радиотехнике под названием «методы безынерционных преобразований» [27].

Условия применения квазистатистических методов. Эти условия состоят в следующем [4]:

1) входные параметры, влияющие на поведение конструкции, могут быть описаны при помощи конечного числа случайных величин $u_1, u_2, \dots, u_m, q_1, q_2, \dots, q_r$ с известной совместной плотностью вероятности $p(u_1, u_2, \dots, u_m, q_1, q_2, \dots, q_r)$; здесь u_α — внутренние параметры, характеризующие форму и механические свойства конструкции; q_α — параметры, характеризующие нагрузку и другие внешние условия эксплуатации или эксперимента;

2) выходные параметры, характеризующие поведение конструкции (перемещения, деформации, усилия, моменты и напряжения), также могут быть описаны при помощи конечного числа случайных величин v_1, v_2, \dots, v_n ;

3) указанные две группы параметров связаны между собой известными детерминистическими зависимостями

$$v_\alpha = V_\alpha(u_1, u_2, \dots, u_m, q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

которые предполагают однозначными и кусочно-непрерывными.

Определение совместной плотности вероятности для выходных параметров. Плотность вероятности $p(v_1, v_2, \dots, v_n)$ определяют по известным формулам для плотностей вероятности функций случайных

величин. В частности, если $n \leq m$ и если соотношения (1) допускают решение

$$u_\alpha = U_\alpha(v_1, v_2, \dots, v_n, u_{n+1}, \dots, u_m, q_1, q_2, \dots, q_r) \\ (\alpha = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где U_α — однозначные и непрерывные функции переменных v_1, v_2, \dots, v_n , то решение дается формулой [4]

$$p(v_1, v_2, \dots, v_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(U_1, \dots, U_n, u_{n+1}, \dots, u_m, q_1, \dots, q_r) \times \\ \times \left| \frac{\partial(U_1, U_2, \dots, U_n)}{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)} \right| du_{n+1} \dots du_m dq_1 \dots dq_r. \quad (3)$$

Здесь использовано обозначение для якобиана преобразования

$$\frac{\partial(U_1, U_2, \dots, U_n)}{\partial(v_1, v_2, \dots, v_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial v_1} & \frac{\partial U_2}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial U_n}{\partial v_1} \\ \frac{\partial U_1}{\partial v_2} & \frac{\partial U_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial U_n}{\partial v_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial U_1}{\partial v_n} & \frac{\partial U_2}{\partial v_n} & \dots & \frac{\partial U_n}{\partial v_n} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Формула (3) может быть легко обобщена на случай, когда функции U_1, U_2, \dots, U_n не являются однозначными (тогда область интегрирования разбивается на ряд подобластей), на случай, когда эти функции являются кусочно-непрерывными (тогда плотность вероятности для v_1, v_2, \dots, v_n будет содержать дельтаобразные выбросы) и т. д. Если для решения поставленной задачи достаточно знать моментные характеристики параметров v_α , то они могут быть получены непосредственно усреднением уравнений (1).

Нетрудно переписать формулу (3) для случая, когда $m < n < m + r$. Если же $n > m + r$, то часть из параметров v_1, v_2, \dots, v_n будет, очевидно, функционально зависимой. Тогда можно принять, что $n = m + r$ и искать совместную плотность вероятности для параметров v_1, v_2, \dots, v_{m+r} .

Вместо формул (2) имеем соотношения

$$u_\alpha = U_\alpha(v_1, v_2, \dots, v_{m+r}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m); \\ q_\alpha = Q_\alpha(v_1, v_2, \dots, v_{m+r}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r).$$

Для совместной плотности $p(v_1, v_2, \dots, v_{m+r})$ имеем формулу

$$p(v_1, v_2, \dots, v_{m+r}) = \\ = p(U_1, \dots, U_m, Q_1, \dots, Q_r) \times \\ \times \left| \frac{\partial(U_1, \dots, U_m, Q_1, \dots, Q_r)}{\partial(v_1, v_2, \dots, v_{m+r})} \right|. \quad (5)$$

Определение вероятности отказа. Допустим, что области нарушения нормальных условий эксплуатации принадлежат точки в пространстве v_1, v_2, \dots, v_n , для которых $\Psi(v_1, v_2, \dots, v_n) > 0$. Тогда вероятность отказа (см. также гл. 8, т. 1) определяют по формуле

$$P = \int \dots \int_{\Psi > 0} p(v_1, v_2, \dots, v_n) dv_1 dv_2 \dots dv_n \quad (6)$$

Эту вероятность можно найти также иначе [4]. Если области $\Psi(v_1, v_2, \dots, v_n) > 0$ соответствуют в пространстве $u_1, u_2, \dots, u_m, q_1, q_2, \dots, q_r$, область $\Psi_1(u_1, u_2, \dots, u_m, q_1, q_2, \dots, q_r) > 0$, то

$$P = \int \dots \int_{\Psi_1 > 0} p(u_1, u_2, \dots, u_m, q_1, q_2, \dots, q_r) \times \\ \times du_1 du_2 \dots du_m dq_1 \dots dq_r. \quad (7)$$

Задачи, связанные с обработкой и интерпретацией опытных данных. Пусть независимыми случайными величинами являются внутренние параметры системы u_1, u_2, \dots, u_m . Требуется найти совместную плотность вероятности для предельных значений параметров q_1, q_2, \dots, q_r . Будем обозначать эти предельные значения через $q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*$. Допустим, что известны детерминистические соотношения между параметрами $q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*$ и внутренними параметрами конструкции u_1, u_2, \dots, u_m , а также совместная плотность вероятности $p(u_1, u_2, \dots, u_m)$. Пусть далее $r < m$ и, кроме того, существуют однозначные и непрерывные зависимости

$$u_\alpha = U_\alpha(q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*, u_{r+1}, \dots, u_m) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r); \quad (8)$$

тогда совместная плотность вероятности $p(q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*)$ может быть найдена по формуле типа (3):

$$p(q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(U_1, U_2, \dots, U_r, u_{r+1}, \dots, u_m) \times \\ \times \left| \frac{\partial(U_1, U_2, \dots, U_r)}{\partial(q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*)} \right| du_{r+1} \dots du_m. \quad (9)$$

Некоторые ограничения, накладываемые на зависимости (9), могут быть легко сняты. Случай, когда однозначная зависимость отсутствует, рассмотрен в книге [4].

Рассмотрим обратную задачу: по заданному распределению вероятностей для предельных нагрузок найти распределение вероятностей для внутренних параметров оболочки. Решить эту задачу можно

по формулам типа (3), (5) и (9). Пусть, например, $r = m$, а зависимости $q_\alpha^* = Q_\alpha^*(u_1, u_2, \dots, u_m)$ однозначны и непрерывны. Тогда

$$p(u_1, u_2, \dots, u_m) = p(Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_m^*) \times \left| \frac{\partial(Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_m^*)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \right|. \quad (10)$$

Распределение вероятностей для предельных сил $p(q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*)$ можно получить, исходя из формулы (7). Допустим, что параметры q_1, q_2, \dots, q_r фиксированы и равны $q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*$ соответственно. Тогда получим следующее выражение для условной вероятности отказа:

$$P(* | q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*) = \int \dots \int p(u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 du_2 \dots du_m; \quad (11)$$

$$\Psi_1(u_1, u_2, \dots, u_m | q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*) > 0.$$

Формула (11) дает по существу совместную функцию распределения для $q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*$. Для совместной плотности вероятности имеем формулу

$$p(q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*) = \frac{\partial^r P(* | q_1^*, q_2^*, \dots, q_r^*)}{\partial q_1^* \partial q_2^* \dots \partial q_r^*}. \quad (12)$$

Примеры применения квазистатических методов. Ряд работ [3, 12, 22, 23] посвящен следующей задаче: пластинку или оболочку нагружают внешними силами, заданными с точностью до одного общего множителя — параметра q . Этот параметр весьма медленно (квазистатически) и монотонно возрастает от нуля до некоторого конечного значения. Требуется найти распределение параметров деформации (обычно — обобщенных координат, характеризующих нормальный прогиб), достигаемое к концу процесса нагружения. В статье [3] рассмотрена задача о распределении вероятностей полного прогиба упругой пологой цилиндрической панели со смещающимися кромками, сжатой осевыми силами интенсивностью q . Параметр начального прогиба считают случайным, параметр нагрузки — детерминированным. Вероятность «хлопка» для той же задачи вычислена в статье [3] в предположении, что начальные прогибы подчиняются симметричному нормальному распределению со стандартом σ_μ . Эта вероятность показана на рис. 4 как функция нагрузки. Здесь $P(*)$ — вероятность «хлопка»; q — величина осевого усилия.

Задача о распределении критических сил подверглась наиболее подробному исследованию [3, 12, 22, 23]. В простейшем случае, когда

нагрузка задана с точностью до одного параметра q , а неправильности — с точностью до одного параметра u , формула (9) принимает вид [3, 4]

$$p(q_*) = \frac{p[U(q_*)] \left| \frac{\partial U(q_*)}{\partial q_*} \right|}{\int_{u_H}^{u_\theta} p(u) du}. \quad (13)$$

Перенормировочный множитель в знаменателе учитывает то обстоятельство, что «хлопок» возможен лишь в определенном диапазоне изменения параметра $u_H < u < u_\theta$. Здесь q_H и q_θ — нижнее и верхнее критические значения нагрузки соответственно.

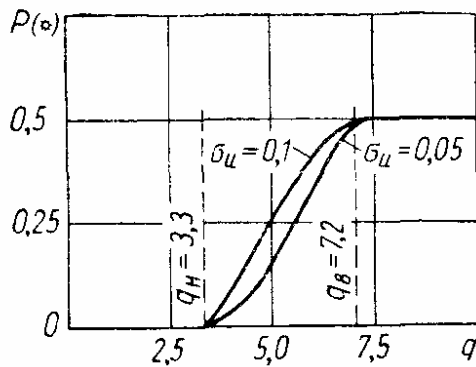


Рис. 4

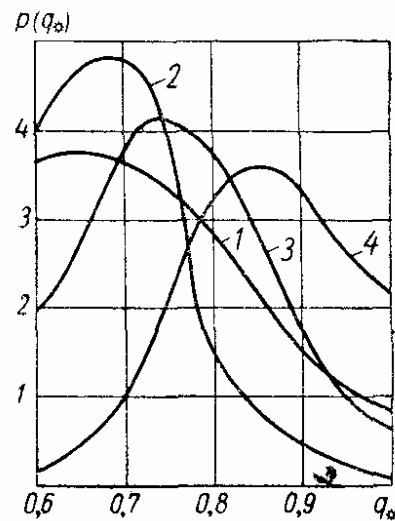


Рис. 5

Значения математического ожидания \bar{q}_* , вычисленные для симметричного нормального распределения параметра u при среднем квадратическом значении $\sigma_u = 0,1h$ и $\sigma_u = 0,25h$ (h — толщина панели), приведены в табл. 1. Имеет место удовлетворительное совпадение вычисленных значений и тех данных, которые обычно приводят экспериментаторы. Дальнейшее изучение теоретических законов распределения критических сил было выполнено Б. П. Макаровым [21—23]. Он рассмотрел различные случаи нагружения оболочек, используя при этом известные результаты решения соответствующих детерминистических задач. Законы распределения вероятности $p(q_*)$ для цилиндрической

1. Математические ожидания критической нагрузки для пологой цилиндрической панели

σ_u	\bar{q}_*	$\frac{\bar{q}_*}{q_\theta}$ в %	$\frac{\bar{q}_*}{q_H}$ в %
0,1	4,84	67	146
0,25	4,50	62	136

оболочки при всестороннем сжатии при различных предположениях относительно начальных прогибов показаны на рис. 5 (1 — равномерное в интервале $0 \leq u \leq u_n$ распределение; 2—4 — нормальные распределения со стандартом $\sigma_u = 0,3$ и различными значениями среднего \bar{u}). Из графика следует, что распределение начальных прогибов сильно влияет на распределение критических сил. Аналогичные кривые

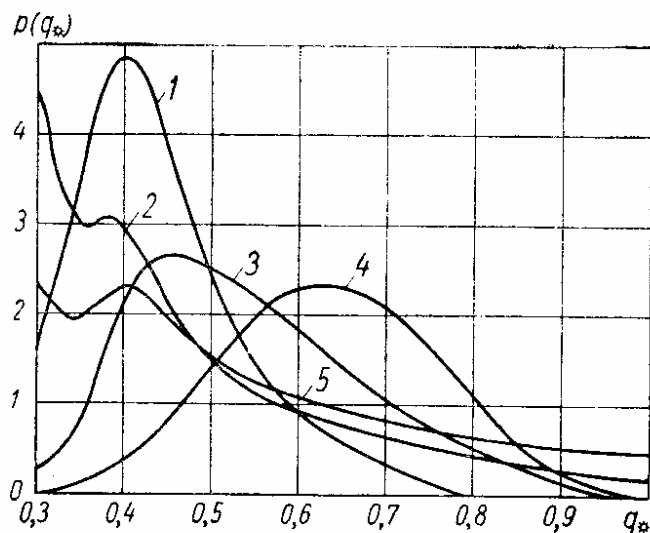


Рис. 6

для цилиндрической оболочки при осевом сжатии показаны на рис. 6 (кривые обозначены: 1 — при $\bar{u}=0,1$, $\sigma_u=0,05$; 2—при $\bar{u}=0,1$, $\sigma_u=0,1$; 3—при $\bar{u}=0,05$, $\sigma_u=0,05$; 4—при $\bar{u}=0$, $\sigma_u=0,05$; 5 — при $\bar{u}=0,05$, $\sigma_u=0,1$). Распределение параметра начального прогиба предполагалось нормальным:

$$u = \left(\frac{\omega_0}{R} \right) n^2 m^{\frac{3}{2}},$$

где ω_0 — начальный прогиб; n — число волн в

окружном направлении; m — отношение длин полуволн в окружном и продольном направлениях. Некоторые кривые имеют два экстремума: один — вблизи нижнего критического значения, другой — несколько смещен в сторону верхнего критического значения.

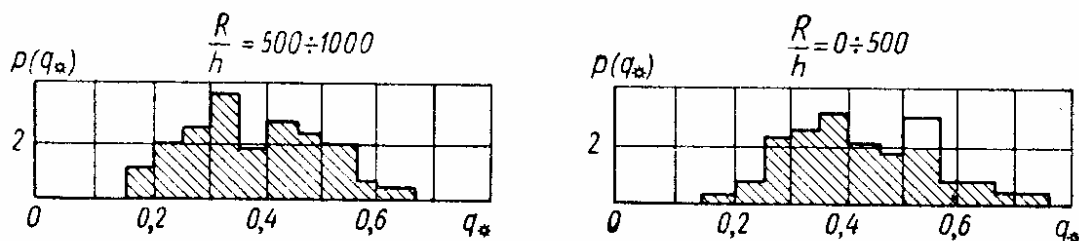


Рис. 7

В работе [21] Б. П. Макаров дал статистический анализ 222 результатов испытаний цилиндрической оболочки на осевое сжатие, собранных в работе Гарриса, Шуэра, Скина и Бенджамена [51] (в этой статье авторы ограничились построением кривых, соответствующих 10% и 1% вероятности «хлопка»). На рис. 7 показаны гистограммы для критических усилий в различных интервалах изменения $\frac{R}{h}$. В области малых $\frac{R}{h}$ гистограммы имеют два максимума, что согласуется с теоретическим выводом, полученным в статье [22].

Замечания о применении квазистатического метода к динамическим задачам. Ряд задач не допускает квазистатической трактовки даже при сколь угодно медленном нагружении. Пусть, например, оболочка

при фиксированных внешних силах имеет более двух устойчивых форм равновесия. Тогда при достижении значения q_0 снизу может осуществляться любое из двух или нескольких устойчивых положений. Выбор не может быть сделан на основании квазистатических соображений. Неопределенность устраняется, если рассмотреть нагружение с конечной (хотя и малой) скоростью и ввести в рассмотрение начальные условия. Решив детерминистическую задачу, можно затем применить квазистатический метод. Квазистатический метод может быть использован также для расчета на действие динамических нагрузок, если последние представляют собой вырожденные случайные процессы, т. е. выражаются через детерминистические функции, зависящие от конечного (практически — весьма небольшого) числа случайных параметров. Примеры применения метода к задачам о динамическом «хлопке» оболочек даны в книге [4].

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Общая характеристика корреляционных методов. Корреляционные методы основаны на нахождении явных зависимостей искомых функций (обобщенных координат) от возмущающих обобщенных сил и на последующем применении операции статистического осреднения. В случае линейной системы с постоянными параметрами эти зависимости могут быть найдены точно — в виде интегралов. В случае нелинейной или параметрической системы эти зависимости находят приближенно — на основе методов нелинейной механики (метода линеаризации, метода малого параметра и т. п.).

Другая разновидность корреляционных методов — метод моментов — заключается в применении операции осреднения непосредственно к стохастическим уравнениям движения. В случае линейной системы этот метод позволяет получить замкнутую систему уравнений для моментов искомых функций. В случае нелинейной или параметрической задачи получить такую замкнутую систему не удастся. Для решения задачи приходится вводить некоторые статистические гипотезы, в соответствии с которыми корреляционные моменты более высокого порядка выражаются через моменты низшего порядка. Таким способом «усекают» бесконечную последовательность уравнений для моментов.

Корреляционные методы. Пусть $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ — некоторые случайные функции времени t . Чертой сверху обозначим осреднение по ансамблю реализаций. Будем считать также, что средние значения функций $\overline{q_\alpha(t)} = 0$ (этому требованию легко удовлетворить, вводя соответствующее преобразование функций). Рассмотрим характеристики процесса, образуемые по следующим правилам:

$$\left. \begin{aligned} K_{q_\alpha q_\beta}(t_1, t_2) &= \overline{q_\alpha(t_1) q_\beta(t_2)}; \\ K_{q_\alpha q_\beta q_\gamma}(t_1, t_2, t_3) &= \overline{q_\alpha(t_1) q_\beta(t_2) q_\gamma(t_3)} \\ (\alpha, \beta, \gamma &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и т. д. Здесь t_1, t_2 — произвольно выбираемые моменты времени. Характеристики $K_{q_\alpha q_\beta}(t_1, t_2), K_{q_\alpha q_\beta q_\gamma}(t_1, t_2, t_3)$ и т. д. называют корреляционными функциями второго, третьего и т. д. порядка.

Для исчерпывающего описания процесса необходимо знать полную систему корреляционных функций. Значительная часть информации о случайном процессе все же заключена в средних $\overline{q_\alpha(t)}$ и корреляционных функциях второго порядка $K_{q_\alpha q_\beta}(t_1, t_2)$, именуемых в дальнейшем просто корреляционными функциями. В ряде задач (например, в тех задачах, где заранее известно, что обобщенные координаты подчиняются нормальному распределению) указанных характеристик достаточно для построения совместных плотностей вероятностей и последующего решения многих вопросов надежности.

Стационарные и эргодические стационарные случайные процессы. Описание случайного процесса упрощается, если он является стационарным, т. е. если все его статистические характеристики остаются неизменными относительно сдвига во времени. Понятие о стационарных случайных процессах оказывается весьма удобной абстракцией для описания реальных процессов. Статистические характеристики атмосферной турбулентности, шума двигателей, работающих на постоянном режиме, волнения моря и т. п. можно считать неизменными в достаточно широких интервалах наблюдения. Средние значения для стационарного случайного процесса постоянны, а корреляционные функции (14) зависят лишь от разностей $t_1 - t_2$, $t_1 - t_3$ и т. д.

В частности, корреляционные функции второго порядка выражаются формулами

$$K_{q_\alpha q_\beta}(\tau) = \overline{q_\alpha(t) q_\beta(t + \tau)}. \quad (15)$$

Почти все представляющие интерес стационарные случайные нагрузки обладают также свойством эргодичности. Это значит, что достаточно продолжительные реализации этих нагрузок содержат практически всю информацию о статистических свойствах процесса. Для эргодических случайных процессов осреднение по ансамблю реализаций может быть заменено осреднением по времени. В частности,

$$K_{q_\alpha q_\beta}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} q_\alpha(t) q_\beta(t + \tau) dt. \quad (16)$$

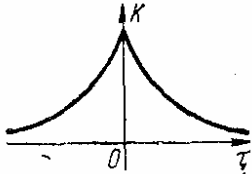
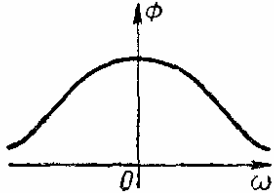
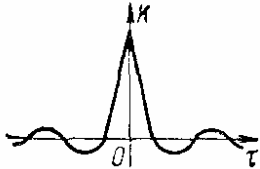
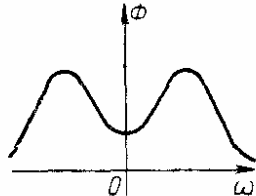
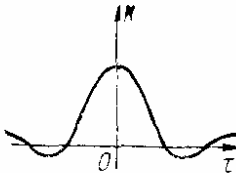
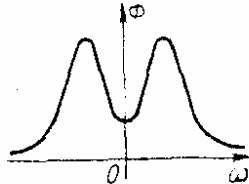
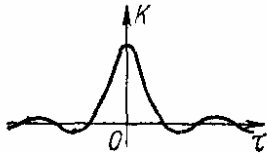
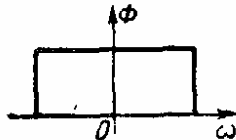
Спектральные плотности стационарных случайных процессов. Для стационарных случайных процессов оказывается возможным ввести другие статистические характеристики, обладающие хорошей физической наглядностью. Составим преобразование Фурье для корреляционных функций $K_{q_\alpha q_\beta}(\tau)$:

$$\left. \begin{aligned} K_{q_\alpha q_\beta}(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{q_\alpha q_\beta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \\ \Phi_{q_\alpha q_\beta}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{q_\alpha q_\beta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

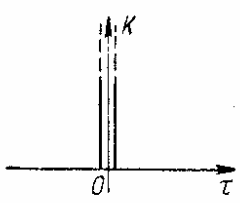
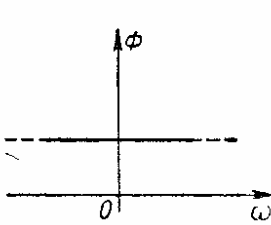
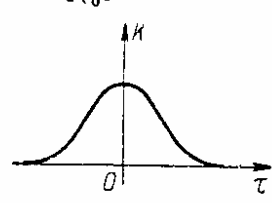
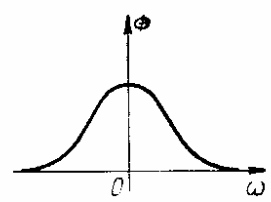
Функции $\Phi_{q_\alpha q_\beta}(\omega)$ называют совместными спектральными плотностями процессов $q_\alpha(t)$, $q_\beta(t)$. Они характеризуют распределение энергии процесса по частотам и весьма удобны для качественного и количественного исследования случайных колебаний в системах. Если процесс содержит периодические составляющие, то спектральные плотности будут иметь особенности типа дельта-функций.

Аналитические выражения, используемые для корреляционных функций и соответствующих спектральных плотностей некоторых случайных процессов, приведены в табл. 2. Корреляционные функции

2. Некоторые аналитические выражения, используемые для описания корреляционных функций и соответствующих спектральных плотностей

№ по пор.	Корреляционная функция $K(\tau)$	Спектральная плотность $\Phi(\omega)$
1	$K_0 e^{-\gamma \tau }$ 	$\frac{2\gamma K_0}{2\pi(\gamma^2 + \omega^2)}$ 
2	$K_0 e^{-\gamma \tau } \cos \beta \tau$ 	$\frac{2\gamma K_0}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + \beta^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$ 
3	$K_0 e^{-\gamma \tau } \left(\cos \beta \tau + \frac{\gamma}{\beta} \sin \beta \tau \right)$ 	$\frac{2\gamma K_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$ 
4	$K_0 \frac{\sin \omega_\theta \tau}{\omega_\theta \tau}$ 	$\begin{aligned} &\frac{K_0}{\omega_\theta} \text{ при } \omega < \omega_\theta \\ &0 \text{ при } \omega > \omega_\theta \end{aligned}$ 

Продолжение табл. 2

№ по пор.	Корреляционная функция $K(\tau)$	Спектральная плотность $\Phi(\omega)$
5	$K_1 \delta(\tau)$ 	$\frac{K_1}{\pi}$ 
6	$K_0 e^{-\frac{\gamma^2 \tau^2}{4}}$ 	$\frac{2K_0}{\gamma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{\gamma^2}}$ 

№ 1 и 6 соответствуют процессам с монотонно убывающей спектральной плотностью. Функции № 2 и 3 могут быть использованы для описания процессов, содержащих некоторые «преобладающие» частоты, близкие к β (такие спектры имеют, например, ординаты морских волн). Функция № 4 соответствует равномерному распределению энергии по частотам, меньшим ω_0 . Как предельный случай, при $\omega_0 \rightarrow \infty$ отсюда получается так называемый «белый» шум № 5. Такой процесс является чрезмерной абстракцией, поскольку он обладает бесконечно большой энергией. Процессам № 2 и 3 соответствует конечная энергия, но они не являются дифференцируемыми. Тем не менее, указанные процессы играют весьма полезную роль в исследованиях по статистической динамике.

Определение математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса по опытным данным. Ограничимся стационарными эргодическими процессами. При нахождении математических ожиданий и корреляционных функций этих процессов по одной конечной реализации

$$\bar{q}^* = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} q(t) dt; \quad (18)$$

$$K_{qq}^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_{t_0}^{t_0+T-\tau} [q(t) - \bar{q}] [q(t+\tau) - \bar{q}] dt \quad (19)$$

возникает вопрос об определении точности получаемых оценок. Погрешность здесь связана, во-первых, с конечной длиной реализации T . Во-вторых, практическое вычисление интегралов (18), (19) для реализаций $q(t)$, заданных в графической или табличной форме, связано с переходом от интегрирования к суммированию. Как правило, эти вычисления выполняются автоматически, при помощи механических, фотоэлектрических и электронных корреляторов.

Кроме того, иногда для некоторого улучшения оценок (18), (19) в подынтегральные выражения вводят специальным образом подбираемые весовые функции $a(t)$, $a(t, \tau)$.

Точность оценки \bar{q}^* математического ожидания q характеризуется ее среднеквадратическим отклонением σ_m . Эта оценка является несмещенной, т. е. математическое ожидание величины \bar{q}^* совпадает с \bar{q} . Для величины σ_m^2 справедлива формула [20]

$$\sigma_m^2 = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} q(t) dt - \bar{q} \right]^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) K_{qq}(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Задаваясь допустимой величиной σ_m и подставляя в формулу (20) вместо $K_{qq}(\tau)$ ее оценку (19), получаем минимальную длину реализации T , обеспечивающую принятую степень точности оценки математического ожидания.

При определении точности оценки корреляционной функции (19) могут встретиться два случая: 1) когда \bar{q} известно и 2) когда \bar{q} неизвестно и в выражении (19) вместо \bar{q} используется оценка \bar{q}^* . В случае 1 оценка (19) для $K_{qq}(\tau)$ является несмещенной. Выражение для ее среднего квадрата σ_k^2 отклонения приведено в работе [20]; из этого выражения получается следующая простая оценка сверху:

$$\sigma_k < 2K_{qq}(0) \sqrt{\frac{T_x - \frac{\tau}{2}}{T - \tau}} < 2K_{qq}(0) \sqrt{\frac{T_x}{T}}; \quad (21)$$

здесь T_x — такой интервал времени, что для $\tau > T_x$ корреляционную функцию $K_{qq}(\tau)$ можно считать практически равной нулю. В случае 2 оценка (19) для $K_{qq}(\tau)$ при отсутствии специальных поправок оказывается смещенной. Выражения для математического ожидания и среднего квадрата отклонения этой оценки приведены в книге [20]. В этой же книге приведены аналогичные формулы для оценки точности замены интегрирования суммированием, а также формулы для оценки точности определения взаимных корреляционных функций двух случайных процессов.

Определение спектральной плотности стационарной эргодической случайной функции по опытными данным. Спектральные плотности случайных процессов определяют либо по экспериментально найденной корреляционной функции, либо непосредственно при помощи системы узкополосных фильтров. Формулы, определяющие точность оценки

по первому способу, приведены в книге [20]. При практическом вычислении интеграла (18) интегрирование заменяют суммированием. Максимально допустимая величина промежутка ΔT , на которые разбивается интервал времени T , может быть определена согласно теореме В. А. Котельникова

$$\Delta T \leq \frac{\pi}{\omega_s}; \quad (22)$$

здесь ω_s — такое значение ω , что при $|\omega| \geq \omega_s$ функцию $\Phi(\omega)$ можно практически считать равной нулю.

ПРИМЕНЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Реакция линейной системы на действие случайных сил. Пусть уравнения движения линейной системы с m степенями свободы приведены к главным координатам, в которых неизвестные разделяются. Обозначим через $Q_\alpha(t)$ входы, через $v_\alpha(t)$ — выходы линейной системы ($\alpha = 1, 2, \dots, m$), а через $H_\alpha(t)$ — реакции на единичные импульсы, приложенные в момент $t = 0$. Решение стохастических уравнений, удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = t_0$, записывают в виде

$$v_\alpha(t) = \int_{t_0}^t H_\alpha(t - \tau) Q_\alpha(\tau) d\tau \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m). \quad (23)$$

Отсюда получаем формулы

$$\begin{aligned} K_{v_\alpha v_\beta}(t_1, t_2) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} H_\alpha(t_1 - \tau_1) H_\beta^*(t_2 - \tau_2) K_{Q_\alpha Q_\beta}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (24)$$

и аналогичные формулы для корреляционных функций более высоких порядков (звездочки означают комплексно сопряженные величины). Для стационарных случайных процессов из соотношения (24) получаем формулу, связывающую спектральные плотности входа и выхода

$$\Phi_{v_\alpha v_\beta}(\omega) = \frac{\Phi_{Q_\alpha Q_\beta}(\omega)}{F_\alpha(i\omega) F_\beta^*(i\omega)}; \quad (25)$$

здесь $F_\alpha(i\omega)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) — передаточные функции линейной системы. Формула (25) и входящие в нее функции имеют прозрачный физический смысл и весьма удобны для вычислений; эта формула имеет многочисленные технические приложения в области теории автоматического управления, теории связи и т. п.

Колебания систем с конечным числом степеней свободы под действием случайных сил. Допустим, что движение механической системы описывается уравнениями

$$\ddot{v}_\alpha + 2\varepsilon_\alpha \omega_\alpha \dot{v}_\alpha + \omega_\alpha^2 v_\alpha = Q_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots), \quad (26)$$

где ε_α — коэффициенты демпфирования; ω_α — частоты свободных колебаний; точками обозначено дифференцирование по времени. Формула (25) принимает вид

$$\Phi_{v_\alpha v_\beta}(\omega) = \frac{\Phi_{Q_\alpha Q_\beta}(\omega)}{(\omega_\alpha^2 + 2i\varepsilon_\alpha \omega \omega_\alpha - \omega^2)(\omega_\beta^2 - 2i\omega \varepsilon_\beta \omega_\beta - \omega^2)}. \quad (27)$$

По функции $\Phi_{v_\alpha v_\beta}(\omega)$ можно определить вторые моменты обобщенных координат. Учитывая, что

$$\overline{v_\alpha v_\beta} = K_{v_\alpha v_\beta}(0),$$

получим, применяя обратное преобразование Фурье,

$$\overline{v_\alpha v_\beta} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{v_\alpha v_\beta}(\omega) d\omega. \quad (28)$$

Формула для вторых моментов производных обобщенных координат имеет вид

$$\overline{\frac{d^k v_\alpha}{dt^k} \cdot \frac{d^l v_\beta}{dt^l}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{v_\alpha v_\beta}(\omega) (i\omega)^{k+l} d\omega. \quad (29)$$

Вычисление интегралов (28) и (29) для случаев, когда $\Phi_{v_\alpha v_\beta}(\omega)$ определяется соотношением (27), а спектральные плотности обобщенных сил $\Phi_{Q_\alpha Q_\beta}(\omega)$ являются дробно-рациональными функциями, может быть выполнено при помощи теоремы вычетов. В приложениях к книгам [24, 26] содержатся таблицы интегралов вида

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(i\omega)}{h_n(i\omega) h_n(-i\omega)} d\omega,$$

где $h_n(x)$ и $g_n(x)$ — полиномы. При помощи этих таблиц можно определять средние квадраты обобщенных координат и их производных.

Изложенная схема решения может быть использована и для определения моментов высших порядков. Если распределение обобщенных сил является нормальным, то распределение обобщенных координат и их производных также является нормальным. Поэтому их моменты высших порядков могут быть выражены через моменты второго порядка.

3. Вторые моменты обобщенных координат и обобщенных скоростей в системе с двумя степенями свободы, находящейся под действием дельта-коррелированных случайных сил

Величина	v_α	\dot{v}_α
v_α	$\frac{D_{\alpha\alpha}}{4\varepsilon_\alpha^3 \omega_\alpha}$	0
\dot{v}_α	0	$\frac{D_{\alpha\alpha}}{4\varepsilon_\alpha^3 \omega_\alpha}$
v_β	$\frac{D_{\alpha\beta}}{2(\varepsilon_\alpha^2 \omega_\alpha^2 + \varepsilon_\beta^2 \omega_\beta^2)} + 2\omega_\alpha \omega_\beta (\varepsilon_\alpha \omega_\beta + \varepsilon_\beta \omega_\alpha)$	$D_{\alpha\beta} \frac{\omega_\alpha \omega_\beta}{\omega_\beta^2 - \omega_\alpha^2} \cdot \frac{\varepsilon_\alpha \omega_\beta + \varepsilon_\beta \omega_\alpha}{\varepsilon_\alpha \omega_\alpha + \varepsilon_\beta \omega_\beta}$
\dot{v}_β	$D_{\alpha\beta} \frac{\omega_\alpha \omega_\beta}{\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2} \cdot \frac{\varepsilon_\alpha \omega_\beta + \varepsilon_\beta \omega_\alpha}{\varepsilon_\alpha \omega_\alpha + \varepsilon_\beta \omega_\beta}$	$D_{\alpha\beta} \frac{(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)^2}{2\omega_\alpha \omega_\beta (\varepsilon_\alpha \omega_\beta + \varepsilon_\beta \omega_\alpha)} + 2(\varepsilon_\alpha \omega_\alpha + \varepsilon_\beta \omega_\beta)$

В табл. 3 приведены формулы для вторых моментов обобщенных координат и скоростей системы (26) для случая, когда $Q_\alpha(t)$ — белые шумы с интенсивностями $D_{\alpha\alpha}$ и взаимными интенсивностями $D_{\alpha\beta}$. При этом $D_{\alpha\alpha} = \Phi_{\alpha\alpha}/\pi$, $D_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}/\pi$, где $\Phi_{\alpha\alpha}$, $\Phi_{\alpha\beta}$ — спектральные плотности и взаимные спектральные плотности соответственно. Из формул табл. 3 следует, что при малых значениях коэффициентов затухания, характерных для упругих систем ($\varepsilon_\alpha \ll 1$), взаимная корреляция различных обобщенных координат и скоростей оказывается заметной лишь при весьма близких значениях частот ω_α и ω_β . Например, при $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon$

$$\overline{v_\alpha v_\beta} = \frac{2D_{\alpha\beta}\varepsilon(\omega_\alpha + \omega_\beta)}{(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_\alpha\omega_\beta(\omega_\alpha + \omega_\beta)^2}. \quad (30)$$

Следовательно, если

$$2\varepsilon \sqrt{\omega_\alpha\omega_\beta} \ll |\omega_\alpha - \omega_\beta|,$$

то значения $\overline{v_\alpha v_\beta}$ оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с главными элементами матрицы вторых моментов.

Если демпфирование мало, то для средних квадратов обобщенных координат может быть дана приближенная формула

$$v_\alpha^2 = \frac{\pi\Phi_{Q_\alpha Q_\alpha}(\omega_\alpha)}{4\varepsilon_\alpha\omega_\alpha^3}. \quad (31)$$

ПРИМЕНЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Уравнения колебаний линейных распределенных систем. Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$L\mathbf{w} = \mathbf{q};$$

здесь $\mathbf{w}(x, y, z, t)$ — вектор перемещений; $\mathbf{q}(x, y, z, t)$ — вектор нагрузок; L — некоторый линейный оператор. Пусть компоненты вектора \mathbf{q} являются случайными функциями координат и времени с известными вероятностными характеристиками. Задача состоит в определении вероятностных характеристик вектора \mathbf{w} и его производных по координатам и времени. Для простоты в дальнейшем будем рассматривать уравнение

$$Lw = q, \quad (32)$$

где w и q — скалярные функции координат и времени. Уравнение (32) можно трактовать как «разрешающее» уравнение в теории колебаний стержней, пластинок и оболочек.

Сведение к системе с конечным числом степеней свободы. В соответствии с этим методом перемещение w представляется в виде разложения в ряд по формам собственных колебаний — по собственным функциям $\varphi_\alpha(x, y, z)$ оператора L :

$$w = \sum_{\alpha=1}^{\infty} u_\alpha(t) \varphi_\alpha(x, y, z). \quad (33)$$

После подстановки ряда (33) в уравнение колебаний (32) получаем бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Корреляционные функции обобщенных сил $Q_\alpha(t)$ определяются соотношениями

$$K_{Q_\alpha Q_\beta}(t_1, t_2) = \frac{1}{v_\alpha v_\beta} \iint K_q(x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2) \times \\ \times \varphi_\alpha(x_1, y_1, z_1) \varphi_\beta(x_2, y_2, z_2) dS_1 dS_2; \quad (34)$$

здесь K_q — корреляционная функция нагрузки, т. е.

$$K_q = \overline{q(x_1, y_1, z_1, t_1) q(x_2, y_2, z_2, t_2)}; \quad (35)$$

v_α — нормы собственных функций $\varphi_\alpha(x, y, z)$. Интегрирование ведут по загруженной поверхности тела S .

В случае, когда отсутствует точное решение задачи о собственных колебаниях, функции $\varphi_\alpha(x, y, z)$ могут быть найдены приближенно либо при помощи вариационных методов, либо на основании теории динамического краевого эффекта [5]. Применение последнего метода к задачам случайных колебаний стержней, пластинок и пологих оболочек дано в работах [5, 7, 14, 39].

После нахождения моментов обобщенных координат $K_{v_\alpha v_\beta}$ можно определить моменты других параметров, выражаемых через обобщенные координаты. Например, средний квадрат \bar{s}^2 некоторого фактора s определяют по формуле

$$\bar{s}^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} c_\alpha c_\beta K_{v_\alpha v_\beta}, \quad (36)$$

где c_α — коэффициент влияния, входящий в формулу для фактора s :

$$s = \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_\alpha v_\alpha.$$

Нагрузка, которая является стационарным временным случайным процессом. В этом случае корреляционные функции (34) и (35) зависят от временного интервала $\tau = t_2 - t_1$. Если выполняется условие эргодичности, то можно ввести преобразование Фурье по времени от K_q :

$$\Phi_q(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \omega) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (37)$$

Функцию Φ_q будем называть спектром пространственных корреляций. Взаимные спектральные плотности $\Phi_{Q_\alpha Q_\beta}$ обобщенных сил выражаются через спектр пространственных корреляций следующим образом:

$$\Phi_{Q_\alpha Q_\beta}(\omega) = \frac{1}{v_\alpha v_\beta} \iint_S \Phi_q(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \omega) \times \\ \times \varphi_\alpha(x_1, y_1, z_1) \varphi_\beta(x_2, y_2, z_2) dS_1 dS_2. \quad (38)$$

Статистические характеристики случайных нагрузок. Для решения практических задач в рамках корреляционной теории необходимо знать математическое ожидание $q(x, y, z, t)$ и корреляционную функцию $K_q(x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2)$ нагрузки или в случае эргодической стационарной нагрузки — спектр пространственных корреляций $\Phi_q(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \omega)$. В случае нагрузок, вызванных акустическими шумами, турбулентными пульсациями давления в пограничном слое, нерегулярным волнением моря, спектры давления в отдельных точках поверхности находятся из эксперимента. Соответствующие данные приведены в работах [17, 19, 42, 43, 57]. В задаче о движении автомобиля по неровной дороге спектр возмущений может быть вычислен по спектру длин волн неровностей, определенному путем геодезических измерений.

Полное экспериментальное определение корреляционной функции или спектральной плотности пространственно-временного случайного процесса связано, как правило, со значительными трудностями. Поэтому для приближенных оценок обычно используют простейшие аналитические зависимости. Некоторые из них указаны ниже.

Дельта-коррелированная в пространстве нагрузка. Это предельный случай нагрузки с весьма малым (по сравнению с длинами волн возбуждаемых форм колебаний) масштабом пространственной корреляции. В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi_q(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \omega) = \\ = \Psi(\omega) \delta(x_2 - x_1) \delta(y_2 - y_1) \delta(z_2 - z_1), \end{aligned} \quad (39)$$

где $\Psi(\omega)$ — заданная функция частоты; $\delta(x)$ — дельта-функция. При использовании такой модели весьма упрощаются вычисления. Например, для спектральных плотностей $\Phi_{Q_\alpha Q_\beta}(\omega)$ в случае ортогональных форм собственных колебаний получаем, что

$$\Phi_{Q_\alpha Q_\beta}(\omega) = \frac{\Psi(\omega)}{v_\alpha v_\beta}. \quad (40)$$

Полностью коррелированная в пространстве нагрузка. Это противоположный случай большого (по сравнению с размерами конструкции) масштаба пространственной корреляции. В этом случае спектр пространственных корреляций не зависит от координат.

Нагрузка волнового типа. Эта нагрузка характеризуется тем, что ее корреляционная функция зависит от времени и координат через посредство параметра:

$$\tau_1 = \tau - \frac{x_2 - x_1}{c_x} - \frac{y_2 - y_1}{c_y} - \frac{z_2 - z_1}{c_z};$$

здесь c_x, c_y, c_z — постоянные (скорости распространения волн нагрузки). В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi_q(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \omega) = \\ = \Psi(\omega) \cos \left[\omega \left(\frac{x_2 - x_1}{c_x} + \frac{y_2 - y_1}{c_y} + \frac{z_2 - z_1}{c_z} \right) \right], \end{aligned}$$

Нагрузки такого типа встречаются в задачах о воздействии на конструкцию дальнего акустического поля или турбулентных гидродинамических пульсаций струи [43, 46, 49], о движении в статистически неоднородной среде, о движении нагрузки по мосту [4] и т. п.

Акустические нагрузки. Задача о колебаниях упругих систем под действием акустического излучения работающих двигателей приобрела в последние годы большую важность в связи с так называемой проблемой «акустической усталости» конструкций [6, 43]. Экспериментальные данные по частотным спектрам пульсаций давления в различных точках акустических полей работающих двигателей приведены в работах [42, 43, 49]. Пространственную корреляцию в принципе можно рассчитывать в соответствии с теорией Лайтхилла [52], исходя из решения неоднородного волнового уравнения. В некоторых случаях, однако, пространственную корреляцию можно оценивать на основании чисто геометрических соображений [32].

Метод интегральных оценок. При применении корреляционных методов к решению задач о колебаниях распределенных систем в ряде случаев возникают трудности, связанные с необходимостью проводить суммирование по весьма большому числу возбуждаемых форм колебаний. Тогда эффективное приближенное решение может быть получено по методу интегральных оценок [4, 7, 39]. Суть метода заключается в переходе от суммирования в формулах типа (36) к интегрированию в пространстве некоторых параметров. В соответствии с теорией динамического краевого эффекта [5] такими параметрами являются волновые числа k_x , k_y , k_z форм колебаний.

Рассмотрим, например, пластинку, находящуюся под действием нормальной нагрузки. С учетом формулы (31) имеем

$$\bar{\sigma}^2 = \sum_{\alpha} \frac{\pi c_{\alpha}^2 \Phi_{Q_{\alpha} Q_{\alpha}}(\omega_{\alpha})}{4 \varepsilon_{\alpha} \omega_{\alpha}^3}. \quad (41)$$

Согласно методу интегральных оценок выражение (41) приближенно записывают в виде

$$\bar{\sigma}^2 \approx \frac{\pi}{4 \Delta k_x \Delta k_y} \iint \frac{c^2(k_x, k_y) \Phi(k_x, k_y)}{\varepsilon(k_x, k_y) \omega^3(k_x, k_y)} dk_x dk_y; \quad (42)$$

здесь $\Delta k_x = \frac{\pi}{a}$; $\Delta k_y = \frac{\pi}{b}$, а спектральная плотность обобщенных сил $\Phi_{Q_{\alpha} Q_{\alpha}}(\omega)$, собственные частоты ω_{α} , коэффициенты демпфирования ε_{α} и коэффициенты влияния c_{α} трактуются как функции волновых чисел, принимающих все значения из первого квадранта.

Применения метода интегральных оценок. В случае пластинки постоянной толщины, загруженной нормальной дельта-коррелированной на срединной поверхности нагрузкой с учетом формулы (40), получим следующую оценку для прогиба во внутренней области:

$$\bar{w}^2 \sim \frac{1}{8D^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{\Psi(r) dr}{\varepsilon(r) r}; \quad (43)$$

здесь D — цилиндрическая жесткость; ρh — плотность пластинки, отнесенная к единице площади срединной поверхности;

$$r^2 = k_1^2 + k_2^2 = \omega \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (44)$$

Для максимальных нормальных напряжений во внутренней области находим оценку

$$\bar{\sigma}^2 \sim \frac{q}{16h^4} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} (3 + 2\nu + 3\nu^2) \int \frac{\Psi(r) dr}{\varepsilon(r) r}, \quad (45)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Для максимальных напряжений в заделке имеем

$$\bar{\sigma}^2 \sim \frac{9}{h^4} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \int \frac{\Psi(r) dr}{\varepsilon(r) r} \quad (46)$$

и т. д. В табл. 4 для ориентировки приведены формулы для средних квадратов $\bar{\omega}^2$ и $\bar{\sigma}^2$ и эффективной частоты

$$\omega_{eff} = \left[\frac{\int_0^\infty \omega^2 \Phi_\sigma(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \Phi_\sigma(\omega) d\omega} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (47)$$

входящей в формулы для определения долговечности при циклических нагрузках (см. гл. 8, т. 1). Формулы выведены для усеченного временного белого шума

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} \text{const} & (\omega_n \leq \omega \leq \omega_\theta), \\ 0 & (\omega < \omega_n \text{ или } \omega > \omega_\theta). \end{cases} \quad (48)$$

Кроме того, введены обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{8D^2 r_n^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Psi}{\varepsilon_n};$$

$$\sigma_0^2 = \frac{9}{16h^4} (3 + 2\nu + 3\nu^2) \frac{\Psi}{\varepsilon_n};$$

r_n и ε_n — значения параметров r и ε при $\omega = \omega_n$.

В работе [39] рассмотрены другие случаи пространственной и временной корреляции, исследовано влияние инерции вращения и деформаций сдвига, получены формулы для случайных колебаний оболочек, произведены подробные вычисления для сферической оболочки. Ограничимся тем, что приведем формулу для среднего квадрата нормального

4. Оценки для средних квадратов перемещений и напряжений и эффективных частот для пластинки, нагруженной силами, дельта-коррелированными в пространстве и имеющими временную спектральную плотность в форме (48)

Тип демпфирования	$\frac{\bar{\omega}^2}{\omega_0^2}$	$\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$	ω_{eff}^2
Пропорциональное скорости $\frac{\partial \omega}{\partial t}$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_H}{\omega_\theta} \right)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_\theta}{\omega_H} - 1 \right)$	$\frac{1}{3} (\omega_H^2 + \omega_H \omega_\theta + \omega_B^2)$
Не зависящее от частоты	$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\omega_H^2}{\omega_\theta^2} \right)$	$\frac{1}{2} \ln \frac{\omega_\theta}{\omega_H}$	$\frac{\omega_\theta^2 - \omega_H^2}{\ln \frac{\omega_\theta^2}{\omega_H^2}}$
Трение Фойхта	$\frac{1}{6} \left(1 - \frac{\omega_H^3}{\omega_\theta^3} \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_H}{\omega_\theta} \right)$	$\omega_H \omega_\theta$

перемещения во внутренней области при силах, дельта-коррелированных в пространстве:

$$\bar{\omega}^2 \sim \frac{1}{4\pi D} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{\Psi(r, \theta) dr}{\varepsilon(r, \theta) [r^4 + r_0^4 (\chi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2]^{3/2}};$$

здесь

$$\chi = \frac{R_1}{R_2}; \quad r_0^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R_1^2}; \quad \theta = \arctg \frac{k_2}{k_1},$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности.

Некоторые методы статистической динамики распределенных систем. Методы, позволяющие решать задачи теории колебаний распределенных систем, не прибегая к их замене дискретными системами, разработаны еще недостаточно. Наметим идею одного из таких методов. Вернемся к уравнению (32). Допустим, что оператор L является линейным оператором по переменным x, y и z и линейным дифференциальным оператором по времени t ; при этом время t явно в выражение для оператора не входит. Предположим, что оператор L переводит любую функцию q с ограниченным квадратом в функцию w , квадрат которой также ограничен. Больше никаких ограничений на оператор не накладывается. Пусть, далее, нагрузка q является эргодической стационарной случайной функцией от времени t и произвольной случайной функцией с ограниченным средним квадратом от координат x, y, z . По теореме Хинчина

существует временное преобразование Фурье от пространственной корреляционной функции нагрузки — спектр пространственной корреляции (37). При сделанных предположениях об операторе L существует спектр пространственных корреляций для перемещений

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \omega) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(x_1, y_1, z_1, t) \omega(x_2, y_2, z_2, t + \tau)}{e^{-i\omega\tau}} dt. \end{aligned} \quad (49)$$

Можно показать, что функции Φ_q и Φ_{ω} связаны между собой соотношением

$$L_1(i\omega) L_2(-i\omega) \Phi_{\omega} = \Phi_q, \quad (50)$$

в котором через $L_1(i\omega)$ обозначен результат замены в выражении для L оператора $\frac{d}{dt}$ на $i\omega$, x на x_1 , y на y_1 , z на z_1 . Через $L_2(-i\omega)$ обозначен

результат замены $\frac{d}{dt}$ на $-i\omega$, x на x_2 , y на y_2 , z на z_2 . Если L является чисто временным оператором, то $L(i\omega)$ представляет собой передаточную функцию системы. Тогда уравнение (50) превращается в зависимость типа (25) между спектральными плотностями «входа» и «выхода» линейной системы с конечным числом степеней свободы и постоянными параметрами. Если же L является пространственно-временным оператором, то уравнение (50) является операторным уравнением. Так, если оператор L является дифференциальным оператором по x, y, z , то уравнение (50) превращается в дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции Φ_{ω} , зависящий от семи переменных $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ и ω . Граничные условия для этой функции вытекают из граничных условий для функции $\omega(x, y, z, t)$ и формулы (49).

Решение уравнения (50) может быть найдено по методу факторизации. Рассмотрим частный случай оператора

$$L = L_0 + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (51)$$

где L_0 — самосопряженный линейный оператор в пространстве координат; ε — положительная постоянная (коэффициент демпфирования). Решение уравнения (51) имеет вид

$$\Phi_{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}(\omega) \Phi_{\alpha}(x_1, y_1, z_1) \Phi_{\beta}(x_2, y_2, z_2)}{(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega)(\omega_{\beta}^2 - \omega^2 - 2i\varepsilon\omega)}; \quad (52)$$

здесь ω_{α} и Φ_{α} — собственные значения и собственные функции оператора L_0 соответственно; $a_{\alpha\beta}(\omega)$ — коэффициенты разложения спектра пространственной корреляции нагрузки Φ_q в ряд Фурье по функциям $\Phi_{\alpha}(x_1, y_1, z_1) \Phi_{\beta}(x_2, y_2, z_2)$. Решение (52) совпадает с формальным решением, получаемым в результате замены исходных уравнений в частных производных бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим применением к ней стандартной

процедуры статистической динамики. Если оператор L имеет вид, отличный от оператора (51), то решения, получаемые двумя методами, вообще говоря, не совпадают.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Метод статистической линеаризации [24, 41]. Этот метод нашел широкое применение в задачах автоматического управления. В задачах колебаний механических систем наиболее распространен следующий вариант метода. Рассмотрим для простоты случай системы с одной степенью свободы. Уравнение

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x + \mu V(x, \dot{x}) = f(t), \quad (53)$$

где μ — малый параметр, $f(t)$ — стационарная случайная функция, заменяют эквивалентным в некотором смысле линейным уравнением

$$\ddot{x} + \tilde{\beta} \dot{x} + \tilde{\omega}^2 x = f(t). \quad (54)$$

Параметры $\tilde{\beta}$, $\tilde{\omega}$ выбирают из условия минимизации среднего квадрата ошибки такой аппроксимации. Это условие дает формулы

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \beta + \mu \frac{\overline{\dot{x} V(x, \dot{x})}}{\overline{\dot{x}^2}}; \\ \tilde{\omega}^2 &= \omega_0^2 + \mu \frac{\overline{x V(x, \dot{x})}}{\overline{x^2}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Для определения средних значений, входящих в формулы (55), необходимо знать совместное распределение функций x , \dot{x} . В первом приближении в качестве такого может быть использовано распределение для соответствующей линейной системы. В случае гауссовского процесса $f(t)$ это будет нормальное распределение. Пусть, например, $f(t)$ — белый шум интенсивностью D_0 , а $V(x, \dot{x}) = x^3$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \overline{\dot{x} V(x, \dot{x})} &= 0; \quad \tilde{\beta} = \beta; \quad \overline{x V(x, \dot{x})} = \overline{x^4} \approx 3 \overline{x^2}^2; \\ \tilde{\omega}^2 &= \omega_0^2 + 3\mu \overline{x^2} = \omega_0^2 + 3\mu \frac{D_0}{2\beta \tilde{\omega}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Последнее соотношение (56) решается относительно $\tilde{\omega}^2$. В результате с точностью до членов порядка μ^2 получаем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}^2 &= \omega_0^2 + \frac{3\mu D_0}{2\beta \omega_0^2}; \\ \overline{x^2} &= \frac{D_0}{2\beta \omega_0^2} \left(1 - \frac{3\mu D_0}{2\beta \omega_0^4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Результаты исследования уравнения (53) для различных типов функции $V(x, \dot{x})$ и различных возмущающих процессов $f(t)$ приведены в работах [40, 41, 54]. В работах [44, 53] даны результаты исследований точности метода статистической линеаризации применительно к некоторым простым системам. Эти исследования основаны на сравнении результатов с точными выражениями, полученными при помощи теории марковских процессов. Вычисления показывают, в частности, что точность метода тем выше, чем меньше интенсивность возмущающего процесса (с увеличением последней возрастает «эффективная нелинейность» системы).

Идея метода статистической линеаризации (априорное введение функции распределения, зависящей от конечного числа параметров, которые далее находят из условия минимума ошибки) нашла применение и при решении детерминистических задач [18]. Аналогичную идею используют по существу и при исследовании нелинейных стохастических уравнений методом моментов. Для того чтобы замкнуть цепочку уравнений для моментов, постулируют зависимость между моментами различных порядков, соответствующую выбираемому закону распределения. В рассмотренном выше примере система уравнений для моментов второго и четвертого порядков замыкается при помощи дополнительного соотношения $\bar{x}^4 = 3(\bar{x}^2)^2$. В результате приходим к выражению (56) для $\tilde{\omega}^2$.

Метод малого параметра. Пусть в уравнении (53) $V(x, \dot{x})$ — полином относительно x, \dot{x} . Полагая, что

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots$$

получаем линейные стохастические дифференциальные уравнения относительно $x_k(t)$, в правые части которых входят функции $x_j(t)$ ($j < k$). В результате функции $x_k(t)$ могут быть выражены в виде квадратур от возмущающего процесса $f(t)$. После этого можно найти моменты процесса $x(t)$, например:

$$\bar{x}^2 = \bar{x}_0^2 + 2\mu \overline{x_0 x_1} + \mu^2 (\bar{x}_1^2 + 2\overline{x_0 x_2}) + \dots$$

Метод малого параметра применяли к системе с нелинейным демпфированием [44] и к нелинейной системе с двумя степенями свободы [41]. В работе [33] этим методом решена задача о нелинейных колебаниях пластинки под действием случайных сил. При этом метод малого параметра применяли непосредственно к нелинейным уравнениям в частных производных Кармана, а разложение по формам колебаний производилось на более позднем этапе вычислений.

Метод малого параметра может быть применен к параметрическим задачам, в которых случайные функции входят в коэффициенты дифференциального уравнения. Некоторые задачи устойчивости линейных систем со случайно изменяющимися параметрами исследованы при помощи этого метода в работах [35, 38, 48]. В работе [16] рассмотрена задача, приводящая к уравнению

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 [1 + \mu \xi(t)] x = a \cos \omega_0 t; \quad (58)$$

здесь $\xi(t)$ — стационарная случайная функция, для которой

$$\overline{\xi(t)} = 0; \overline{\xi(t) \xi(t + \tau)} = K(\tau).$$

Использование разложения (57) с последующим применением изложенной выше схемы вычислений дает с точностью до членов порядка μ^4

$$\bar{x} = \frac{a}{\beta \omega_0} \left[1 - \mu^2 \frac{\omega_0^2}{2\beta} (J_- - J_+) \right] \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где φ — постоянная фаза, а

$$J_{\pm} = \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-\beta \tau / 2} \cos(\omega_0 \pm \omega_1) \tau d\tau;$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}.$$

В работе [16] показано, что если $\frac{d\Phi}{d\omega} \leq 0$ при $\omega > 0$, где $\Phi(\omega)$ — спектральная плотность процесса $\xi(t)$, то $J_- - J_+ > 0$. Следовательно, при этом условии случайные изменения собственной частоты приводят к уменьшению «в среднем» амплитуды колебаний.

Метод усреднения. Этот метод использует известные идеи Крылова—Боголюбова в теории нелинейных колебаний. Если исследуемый колебательный процесс имеет узкополосный спектр, то уравнения движения могут быть усреднены за «период» колебаний. Затем применяют либо корреляционную теорию, либо теорию марковских процессов. Подробное изложение метода усреднения применительно к случайным функциям содержится в монографии [27], где рассмотрено большое количество нелинейных и параметрических задач.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Понятие о марковском процессе. Если движение системы описывается стохастическими дифференциальными уравнениями, то эволюция во времени совместной плотности вероятности неизвестных подчиняется, вообще говоря, некоторому дифференциальному или интегродифференциальному уравнению. Это уравнение будем называть кинетическим. Важный класс процессов, для которых применение кинетических уравнений позволяет получить содержательные результаты, образуют марковские процессы. Простой марковский процесс — это процесс без последствия, т. е. такой процесс, при котором распределение вероятностей в момент t_1 зависит от распределения в предшествующий момент $t_2 < t_1$ и не зависит от истории системы.

Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова. В качестве простейшего примера рассмотрим простой марковский процесс с одной переменной $x(t)$. Введем обозначения $x = x(t)$ и $x_{\tau} = x(t + \tau)$. Можно показать, что если пределы выражений

$$\kappa_k(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x_{\tau} - x)^k}}{\tau} \quad (59)$$

существуют, то плотность вероятности $p(x)$ подчиняется кинетическому уравнению

$$\dot{p}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^k [\kappa_k(x) p(x)]. \quad (60)$$

Функции $\kappa_k(x)$ называют интенсивностями марковского процесса. Из них $\kappa_1(x)$ характеризует среднее течение процесса; $\kappa_2(x)$ — его дисперсию и т. д. Коэффициенты интенсивности связаны с корреляционными функциями производной $\dot{x}(t)$ зависимостями

$$K\dot{x}(t_1, t_2, \dots, t_k) = \kappa_k(x) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_1 - t_k) + \dots \quad (61)$$

(точками обозначены члены, содержащие более слабые особенности).

Если все $\kappa_k(x)$ при $k > 2$ равны нулю, то марковский процесс называют непрерывным. Уравнение (60) принимает вид

$$\dot{p}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} [\kappa_1(x) p(x)] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\kappa_2(x) p(x)] \quad (62)$$

и носит название одномерного уравнения Фоккера—Планка. Оно описывает, например, случайное блуждание точки вдоль оси. Уравнение (62) может быть обобщено на случай многомерных непрерывных марковских процессов

$$\begin{aligned} \dot{p}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \\ = - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [\kappa_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_s) p(x_1, x_2, \dots, x_s)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} [\kappa_{\alpha\beta}(x_1, x_2, \dots, x_s) p(x_1, x_2, \dots, x_s)]; \end{aligned} \quad (63)$$

здесь

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x_{\alpha\tau} - x_\alpha)}}{\tau}; \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x_{\alpha\tau} - x_\alpha)(x_{\beta\tau} - x_\beta)}}{\tau}. \end{aligned} \quad (64)$$

Уравнение (63) называют обычно уравнением Фоккера—Планка—Колмогорова (уравнением ФПК).

Пусть движение системы описывается стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_\alpha + g_\alpha(x_1, \dots, x_s) + \sum_{\beta=1}^s h_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_s) \xi_\beta(t) = \xi_\beta(t), \quad (65)$$

где $\xi_\beta(t)$ — независимые белые шумы;

$$\overline{\xi_\alpha(t) \xi_\beta(t + \tau)} = \delta(\tau) \delta_{\alpha\beta}.$$

Кинетическое уравнение для этой системы имеет вид уравнения ФПК (63), где

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_s) &= g_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \sum_{\gamma=1}^s \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} h_{\beta\gamma}; \\ \kappa_{\alpha\beta}(x_1, x_2, \dots, x_s) &= \sum_{\gamma=1}^s h_{\alpha\gamma} h_{\beta\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Вывод этих соотношений дан, например, в книге [27].

Пусть имеющиеся в системе возмущения не являются белыми шумами, но их спектральные плотности являются дробно-рациональными функциями. Тогда уравнение ФПК можно составить, добавляя к стохастическим уравнениям движения систему линейных соотношений, связывающих эти возмущения с белыми шумами.

Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова для механических систем. Рассмотрим систему, движение которой описывается стохастическими уравнениями:

$$\rho_{\alpha} \ddot{v}_{\alpha} + 2\varepsilon_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} + f_{\alpha}(v_1, v_2, \dots, v_n) = Q_{\alpha}(t), \quad (67)$$

где

$$\overline{Q_{\alpha}(t)} = 0; \quad \overline{Q_{\alpha}(t) Q_{\beta}(t + \tau)} = c_{\alpha\beta} \delta(\tau).$$

Уравнение ФПК (63) для этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{p}(v_1, v_2, \dots, v_n, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots, \dot{v}_n) = \\ = - \sum_{\alpha=1}^n \dot{v}_{\alpha} \frac{\partial p}{\partial v_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{2\varepsilon_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \left(p + \dot{v}_{\alpha} \frac{\partial p}{\partial \dot{v}_{\alpha}} \right) + \\ + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\rho_{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{v}_{\alpha}} (f_{\alpha} p) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{c_{\alpha\beta}}{\rho_{\alpha} \rho_{\beta}} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{v}_{\alpha} \partial \dot{v}_{\beta}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Существует два частных случая [2, 4], для которых уравнение (68) имеет стационарное ($\dot{p} = 0$) распределение, называемое распределением Максвелла—Больцмана:

1) $n = 1$; $f = \frac{\partial V}{\partial v}$. Тогда

$$p(v, \dot{v}) = C \exp \left[-\frac{4\varepsilon}{c} \left(\frac{\rho \dot{v}^2}{2} + V \right) \right], \quad (69)$$

где C — постоянная, определяемая из условия нормировки;

2) $n > 1$; $f_\alpha = \partial V / \partial v_\alpha$; $\varepsilon_\alpha = \varepsilon = \text{const}$; $c_{\alpha\beta} = c\delta_{\alpha\beta}$. Тогда

$$p = C \exp \left[-\frac{4\varepsilon}{c} \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\rho_\alpha \dot{v}_\alpha^2}{2} + V \right) \right]. \quad (70)$$

Если уравнения (67) описывают колебания упругой пластинки или оболочки, то, как показано в статье [2], распределение (70) имеет место лишь в случае нагрузки, дельта-коррелированной в пространстве.

В остальных случаях нахождение решений уравнения ФПК связано, вообще говоря, со значительными трудностями. Решение в конечном виде можно получить для кусочно-линейных систем. Распределение получается «кусочно-гауссовским», удовлетворяющим некоторым условиям на поверхности разрывов. Эти условия были установлены в работе [34], где получены также решения для некоторых конкретных кусочно-линейных систем.

В работе [15] рассмотрено уравнение

$$\ddot{v} + 2\varepsilon\omega_0\dot{v} + \omega_0^2 \left[v + \frac{\partial V}{\partial v} \right] = Q(t). \quad (71)$$

Было принято, что процесс $Q(t)$ имеет спектральную плотность

$$\Phi(\omega) = \frac{D_0}{2\pi} \frac{1}{1 + \omega_0^2 \tau_0^2}; \quad \omega_0 \tau_0 \ll 1.$$

Приближенное выражение для совместного распределения обобщенной координаты, скорости и ускорения имеет вид

$$p(v, \dot{v}, \ddot{v}) = \frac{1}{J(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{v_0^2} \left[\frac{v^2}{2} + V(v) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\dot{v}^2}{2\omega_0^2 v_0^2} - \frac{\tau_0}{D_0} \left[\ddot{v} + \omega_0^2 \left(v + \frac{\partial V}{\partial v} \right) \right]^2 \right\}, \quad (72)$$

где

$$v_0^2 = \frac{D_0}{4\varepsilon\omega_0^3};$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{v_0^2} \left[\frac{v^2}{2} + V(v) \right] \right\} dv.$$

Уравнение Понтрягина. В задачах надежности часто оказывается необходимым вычислять вероятность невыхода изображающей точки системы за пределы некоторой области фазового пространства в течение заданного времени. Указанная вероятность подчиняется уравнению, сопряженному с уравнением (63), при заданных краевых условиях на границе области и заданных начальных условиях. Из этого уравнения получается дифференциальное уравнение в частных

производных, определяющее среднее время достижения границы — уравнение Л. С. Понтрягина:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\beta=1}^s \kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T}{\partial x_{\alpha}^0 \partial x_{\beta}^0} + \sum_{\alpha=1}^s \kappa_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}^0} = -1. \quad (73)$$

Здесь верхний индекс у x_{α}^0 соответствует начальным значениям переменных x_{α} . На границе области функция $T(x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0)$ должна обращаться в нуль. Если начальное состояние подчиняется распределению $p(x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0)$, то среднее время \bar{T} достижения границы определяют по формуле

$$\bar{T} = \int \dots \int T(x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0) p(x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0) \times \\ \times dx_1^0 dx_2^0 \dots dx_s^0. \quad (74)$$

В статье [8] указан эффективный метод приближенного решения уравнения (73). При помощи этого метода для механической системы с одной степенью свободы, имеющей две устойчивые особые точки, было вычислено среднее время пребывания внутри области, которая ограничена сепаратрисой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., Витт А. А. О статистическом рассмотрении динамических систем. «Журнал экспериментальной теоретической физики», Т. 3, 1933, № 3.
2. Болотин В. В. О стационарных распределениях в статистической динамике упругих систем. Рига, изд-во АН Латвийской ССР, 1963.
3. Болотин В. В. Статистические методы в нелинейной теории упругих оболочек. «Изв. АН СССР, ОТН», 1958, № 3.
4. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., Стройиздат, 1961 (1-е изд.), 1965 (2-е изд.).
5. Болотин В. В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. Инженерный сборник. Т. 31, 1981.
6. Болотин В. В. Обзор исследований по статистической динамике упругих систем. Сб. «Расчеты на прочность», М., Машгиз, 1964, № 10.
7. Болотин В. В. Об упругих колебаниях, возбуждаемых случайными силами с широкополосным спектром. «Изв. вузов, Машиностроение», 1963, № 3.
8. Болотин В. В., Макаров Б. П. О приближенном решении некоторых задач статистической динамики. «Изв. АН СССР, Механика», 1965, № 3.
9. Болотин В. В. Механика твердого тела и теория надежности. Труды Второго Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. М., изд-во «Наука», 1966.
10. Вольмир А. С. Устойчивость упругих и упруго-пластических систем. М., Физматгиз, 1962.
11. Воронич И. И. Статистический метод в теории устойчивости оболочек. ПММ. Т. 23. Вып. 5, 1959.
12. Гончаренко В. М. К определению вероятности потери устойчивости оболочкой. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1962, № 1.
13. Гончаренко В. М. Применение марковских процессов в теории устойчивости оболочек. «Украинский математический журнал», т. 24, 1962, № 2.
14. Диментберг М. Ф. Вынужденные колебания пластин при нагрузке, представляющей собой пространственно-временной случайный процесс. «Инженерный журнал», т. 1, 1961, № 2.

15. Диментберг М. Ф. Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1962, № 5.
16. Диментберг М. Ф. Резонансные свойства системы с одной степенью свободы со случайно изменяющейся собственной частотой. «Инженерный журнал» Механика твердого тела, 1966, № 1.
17. Екимов В. В. Вероятностные методы в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1966.
18. Коловский М. З., Первозванский А. А. О линейризации по функции распределения в задачах теории нелинейных колебаний. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1962, № 5.
19. Липпман Г. О применении статистических методов к проблеме бафтинга. Сб. «Механика», 1953, М., ИЛ, № 5.
20. Лифшиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Советское радио», 1963.
21. Макаров Б. П. Применение статистического метода для анализа экспериментальных данных по устойчивости оболочек. «Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение», 1962, № 1.
22. Макаров Б. П. Применение статистического метода для анализа нелинейных задач устойчивости оболочек. Теория пластин и оболочек. Труды II Всесоюзной конференции. Изд-во АН УССР, 1962.
23. Макаров Б. П. Анализ нелинейных задач устойчивости оболочек при помощи статистического метода. «Инженерный журнал», Т. 3, 1963, № 1.
24. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
25. Ржаницын А. Р. Статистические методы определения напряжений при продольном изгибе. Научные сообщения ЦНИПСа. М., Стройиздат, 1951, № 3.
26. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. М., Гостехиздат, 1960.
27. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. «Советское радио», 1961.
28. Стрелецкий Н. С. Основы статистического учета запаса прочности сооружений, М., Стройиздат, 1947.
29. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. Успехи физических наук. Т. 77, 1962, № 3.
30. Томсон У., Бэртон М. Поведение механических систем при случайных возмущениях. Сб. «Механика». М., ИЛ, 1958, № 4.
31. Фанг И. К статистическому расчету аэродинамических нагрузок. Сб. «Механика». М., ИЛ, 1954, № 2.
32. Федоров Ю. А. Колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки в поле случайных акустических давлений. «Инженерный журнал», 1963, № 3.
33. Федоров Ю. А. О нелинейных колебаниях прямоугольной пластинки под воздействием случайных сил. «Инженерный журнал», т. IV, вып. 3, 1964.
34. Хазен Э. М. Определение плотности распределения вероятностей для случайных процессов в системах с нелинейностью кусочно-линейного типа. «Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика», 1961, № 3.
35. Челпанов И. Б. Колебания системы второго порядка при случайных изменениях параметра. ПММ, т. 26, 1962, № 4.
36. Ariaratnam S. T. Response of a loaded nonlinear string to random excitation. Journ. Appl. Mech., vol. 29, n. 3, 1962.
37. Bartsch H. Statistische Methoden zur Untersuchung eines Schiffes im Seegang. Schiffstechnik, 1959.
38. Bogdanoff J. L., Kosin F. Moments of the output of linear random systems. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 34, n. 8, 1962.
39. Bolotin V. V. Broadband random vibrations of elastic systems. Internat. Journ. Solids Structures, vol. 2, n. 1, 1966.
40. Caughey T. K. Random excitation of a system with bilinear hysteresis. Journ. Appl. Mech., vol. 27, n. 4, 1960.
41. Caughey T. K. Equivalent linearization techniques. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 35, n. 11, 1963.
42. Clarkson B. L., Ford R. D. The response of a typical aircraft structure to jet noise. Journ. Roy. Aeron. Soc., vol. 66, n. 613, 1962.
43. Crandall S. H. (editor). Random vibration, Technology Press, Mass. Inst. Techn., 1958.
44. Crandall S. H. Perturbation techniques for random vibration of nonlinear systems. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 35, n. 11, 1963.

45. Donnell L. H., Wan C. C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. Journ. Appl. Mech., vol. 17, n. 1, 1950.
 46. Dyer I. Response of plates to a decaying and convecting random pressure field. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 31, n. 7, 1959.
 47. Eringen A. C., Samuels J. C. Response of Timoshenko beam to random process. Journ. Appl. Mech., vol. 25, n. 4, 1958.
 48. Eringen A. C., Samuels J. C. On stochastic linear systems. Journ. Math. Phys. (MIT), vol. 38, n. 2, 1959.
 49. Franklin R. E. Space-correlations in the fluctuating pressure field near to a jet engine. Journ. Roy. Aeron. Soc., vol. 65, n. 610, 1961.
 50. Freudenthal A. M., Shinozuka M. Probability of structural failure under earthquake acceleration. Trans. Japan Soc. Civ. Eng., n. 118, 1965.
 51. Harris L. A., Suer H. S., Skene W. T., Benjamin R. I. The stability of thin-walled unstiffened circular cylinders under axial compression including the effects of internal pressure. Journ. Aeronaut. Sci., vol. 24, n. 8, 1957.
 52. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc., vol. A 211, n. 1107, 1952.
 53. Lyon R. H. Equivalent linearization of the hard-spring oscillator. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 32, n. 9, 1960.
 54. Lyon R. H., Heckl M., Hazelgrove C. B. Response of hardspring oscillator to narrow-band excitation. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 33, n. 10, 1961.
 55. Nash W. A. Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells. Journ. Aeronaut. Sci., v. 22, n. 4, 1955.
 56. Smith P. W. Response of nonlinear structures to random excitation. Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 34, n. 6, 1962.
 57. Tack D. H., Lambert R. F. Response of bars and plates to boundary-layer turbulence. Journ. Aerospace Sci., vol. 29, n. 3, 1962.
-

**ПРЕДМЕТНЫЙ
АЛФАВИТНЫЙ
УКАЗАТЕЛЬ**

А

Автоколебания 267, 331, 469; — Амплитуды 269, 480; — Траектории фазовые 270; — Уравнения 268, 270; — Условия появления 268

— квазилинейные 270
— панелей, обтекаемых потоком газа 501
— релаксационные 268
— тел плохообтекаемых в потоке газа 480; — Уравнения 479
— фрикционные 267

Автоколебательные системы фрикционные 218, 254, 267—271

— Портреты фазовые 270, 271

Амплитуды автоколебаний 269, 480

— колебаний — см. под наименованиями колебаний, например: *Вынужденные колебания стержневых систем* — Амплитуды; *Свободные колебания механических систем с одной степенью свободы* — Амплитуды
— флаттера панельного 501, 506, 507

Анализ гармонический колебаний механических линейных систем 217, 249, 250, 254

Антирезонанс колебаний 283, 332

Аэрогидродинамика 470—475

— Теории — Применение 474, 475, 486, 489
— Теория поршневая — Применение 473, 474, 484—488, 496, 502, 504, 505
— Указания библиографические 473
— Уравнения — Линеаризация 470, 471

Аэрогидроупругость 468

— Задачи — Особенности 469, 470
— Задачи динамические и статические 468, 469
— Задачи для стержней 473, 476—480
— Теория — см. *Теория аэрогидроупругости*

Аэротермоупругость 468

Б

Балансировщики автоматические маятниковые 334—336

— Схемы и характеристики 335

Балки двухопорные — см. *Стержни однопролетные*

— неразрезные — Колебания изгибные 299, 303

— неразрезные на жестких опорах — Коэффициенты длины — Выбор 32—34; — Коэффициенты длины — Графики 30, 31; — Параметры вспомогательные 32, 33; — Подразделение на участки 14; — Силы критические 29

— неразрезные на упругих опорах — Жесткости опор — Коэффициенты 35; — Коэффициенты длины — Выбор 37; — Коэффициенты длины — Графики 40, 41

— неразрезные со ступенчатым изменением сечения — Колебания изгибные 299, 301

— с узким и высоким сечением — Устойчивость плоской формы изгиба — Потеря (опрокидывание) 66; — Устройства опорные 66, 67

— с узким и высоким сечением двутавровым — Нагрузки критические 76; — Устойчивость плоской формы изгиба 75

— с узким и высоким сечением прямоугольным (полосы) — Колебания изгибно-крутильные 235, 348, 354, 355; — Нагрузки критические 68, 69, 74, 75; — Нагрузки критические при сложных случаях нагружения 69, 71—73; — Равновесие — Формы возмущенные 67; — Устойчивость плоской формы изгиба 67—75

— с узким и высоким сечением прямоугольным (полосы) и круговой осью — Нагрузки критические 69, 70

— с узким и высоким сечением прямоугольным (полосы) консольные — Высота переменная 67; — Колебания изгибно-крутильные 348; — Нагрузки критические 68, 69, 73

Биеция 216, 249

В

- Валы** — Колебания крутильные 231
 — — Амплитуды — Расчет 316
 — — Гашение 333, 334
 — — Поглощение 336—338
 — — Уравнения частотные 293
 — Колебания поперечные 348
 — — Частоты собственные 324, 325, 327
 — Прецессия 325, 331
 — — Гашение с помощью автоматических балансировщиков 334—336
 — Состояния критические 325
 — — Влияние внутреннего гистерезиса 331
 — — Влияние масляной пленки и трения в подшипниках 330
 — Числа оборотов критические 324—331
- Валы гибкие** — Скорости угловые критические 324
 — — с несколькими дисками — Скорости угловые критические 327
 — — с одним диском — Прецессия 325; — Прогибы 324; — Скорости угловые критические 324—326; — Эффект гироскопический 325—327
 — — с одним диском на конце консоли — Моменты инерции и перемещения 326; — Скорости угловые критические 326, 327
 — — с распределенной массой 327; — Скорости угловые критические — Расчет 328, 329; — Характеристики 328
 — — упругие — Характеристики 221
- Вынужденные колебания** 469; —
 — — Отличие от параметрических колебаний 347
 — — механических систем линейных с одной степенью свободы 245—254; — Амплитуды 246—249, 252, 253; — Анализ гармонический 249, 250, 254; — Влияние вязкого трения 250—252; — Влияние гистерезиса 252, 253; — Законы движения 248, 251; — Коэффициенты динамичности 246, 247, 251, 253; — Коэффициенты передачи 246, 252; — Резонанс 247, 250, 252, 253; — Уравнения 245, 250
 — — механических систем нелинейных с одной степенью свободы 259—262; — Амплитуды 259, 261; — Амплитуды изменения резкие («срывы») 260; — Влияние вязкого сопротивления 261, 262; — Законы движения 259, 261, 262; — Процесс установившийся 260, 261; — Уравнения 259, 261

- — механических систем нелинейных с одной степенью свободы диссипативных — Амплитуды 266, 267; — Резонанс 267
 — — механических систем с несколькими степенями свободы 281—284; — Амплитуды 282—284; — Влияние вязкого трения 283; 284; — Резонанс 283; — Уравнения 281—283; — Формы собственные 281
 — — оболочек сферических в виде сегментов пологих — Уравнения 451—453
 — — пластинок прямоугольных гармонические 389, 390
 — — пластинок прямоугольных при сверхзвуковом обтекании газом 482, 483
 — — рамных систем 319, 322; — Амплитуды 323
 — — стержневых систем 314—318; — Амплитуды 315, 316; — Уравнения 314, 316; — Формы собственные 317, 318
 — — тел плохобтекаемых в потоке жидкости 478, 479
 — — цилиндров круговых в потоке жидкости 479; — Частоты приведенные 478
- Выпучивание** — см. под наименованиями оболочек, панелей и пластинок, например: *Оболочки цилиндрические круговые* — Выпучивание; *Панели, обтекаемые потоком газа* — Выпучивание; *Пластины круглые* — Выпучивание

Г

- Гасители колебаний динамические** 331—333; — Коэффициенты динамические и частоты собственные 332; — Применение 333; — Сравнение с поглотителями колебаний 340, 341
 — — колебаний динамические с вязким трением 224, 338—340; — Коэффициенты динамические и частоты собственные 338, 339; — Параметры — Расчет 339, 340; — Сравнение с поглотителями колебаний 341
 — — колебаний крутильных маятниковые для валов — Колебания свободные — Частоты собственные 333; — Конструктивные особенности 334
 — — прецессии валов маятниковые (балансировщики) 334—336; — Схемы и характеристики 335
- Гистерезис при циклическом нагружении** 252, 331
 — — Петли 253, 343
 — — Площади 252, 341, 343—346
 — — Уравнения ветвей 342

Д

- Декременты логарифмические 244, 265, 266, 341
 — Диаграммы 342
 Демпферы колебаний — см. *Гасители колебаний*
 Демпфирование колебаний параметрических — Влияние 363—365
 — конструкционное в механических системах 341—343, 494
 — конструкционное в соединениях деталей 343—346; — Интенсивность — Методы оценки 341; — Обозначения 343; — Примеры 344—346
 Дивергенция крыльев тонких 469, 476, 487; — Скорость критическая 477, 478
 — оболочек цилиндрических круговых, обтекаемых потоком газа 493
 Динамика статистическая механических систем 513—544
 — Задачи — Классификация 513, 514
 — — Методы решения — Классификация 515, 516
 — — Методы решения квазистатические 515—523
 — — — Применение — Условия 516, 517
 — — Методы решения корреляционные 515, 516, 523—538
 — — — Применение при колебаниях нелинейных 538—540
 — — — Применение при колебаниях параметрических случайных 539, 540
 — — Методы решения квазистатические — Применение к динамическим задачам 522, 523
 — — — Применение при определении вероятности отказов 519
 — — — Применение при определении плотности вероятностей случайных параметров 517, 518
 — — — Применение при определении распределения вероятностей случайных параметров 520—522
 — — Методы решения корреляционные — Применение при колебаниях механических систем линейных с конечным числом степеней свободы 528—531
 — — — Применение при колебаниях механических систем линейных с распределенными параметрами 531—536
 — — — Разновидности и характеристика общая 514, 523
 — — Методы решения с использованием кинетических уравнений 515—517 — см. также *Теория марковских процессов* — Методы

- Задачи, связанные с обеспечением надежности конструкций 513, 514, 519
 — Задачи, связанные с обработкой и интерпретацией опытных данных 513, 514
 — — Методы решения квазистатические 519
 — Содержание понятия 513
 Диски — Колебания 227, 230
 — — Частоты собственные 239
 Дорожки вихревые Кармана 469, 478

И

- Изгиб — Форма плоская — Устойчивость 66—75, 363
 — — продольный стержней сжатых центрально — Теория Кармана 81—85; — Теория Шенли 84, 85
 Изгибно-крутильные колебания балок с узким и высоким сечением прямоугольным 235, 348
 — Уравнения 354, 355
 Изгибно-крутильный флаттер тонких крыльев 469, 477, 478
 Изгибные колебания балок неразрезных 299; — Уравнения частотные 299, 303
 — — балок неразрезных со ступенчатым изменением сечения — Уравнения частотные 299; — Учет условий сопряжения сечений 301
 — — колец круговых 348
 — — механических систем 230, 235, 241; — Частоты собственные 240, 242
 — — оболочек 427, 458; — Уравнения 423, 445; — Частоты собственные — Оценки для плотности 464, 465
 — — оболочек цилиндрических круговых, обтекаемых потоком газа — Частоты 492, 493
 — — пластинок — Уравнения 372, 373, 401—403; — Частоты 404, 405
 Изгибные колебания стержней 294—305
 — Влияние сдвигов и инерции вращения 304, 305
 — Влияние силы продольной заданной 303, 304
 — Уравнения 294
 — Уравнения частотные 299, 300
 — Условия граничные 298
 — Формы собственные 294, 300, 301
 — — Значения функций Крылова 295—297
 — Частота собственная вторая 312, 314
 — Частота собственная первая 311, 314
 — Частоты собственные 304, 305
 — — Формулы 306, 309—311
 — Частоты собственные низшие 312, 313

- Изгибные колебания стержней вынужденные** 316, 317
 — консольных — Частоты собственные — Расчет 307—310
 — на упругих опорах — Частоты собственные 299, 302
 — с дополнительными сосредоточенными массами — Частоты собственные 299, 302

К

- Кинематика колебательных процессов** 216, 217
Колебания вынужденные — см. *Вынужденные колебания*
 — дисков 227, 230; — Частоты собственные 239
 — изгибные — см. *Изгибные колебания*
 — крутильные — см. *Крутильные колебания*
 — маятников 227, 231, 347; — Частоты собственные 238
 — нелинейные — см. *Нелинейные колебания*
 — оболочек 418—466 — см. также под наименованиями оболочек, например: *Оболочки конические* — Колебания; *Оболочки цилиндрические* — Колебания
 — пластинок 370—416 — см. также под наименованиями пластинок, например: *Пластинки изотропные* — Колебания; *Пластинки прямоугольные* — Колебания вынужденные
 — плоские 227—233
 — поперечные 287, 348; — Соотношения основные 288, 289; — Формы и частоты собственные 303, 304
 — поплавков 227, 229; — Частоты собственные 238
 — продольные — см. *Продольные колебания*
 — самовозбуждающиеся — см. *Автоколебания*
 — свободные — см. *Свободные колебания*
 — систем — см. *Механические системы* — Колебания; *Параметрические колебания упругих систем*; *Рамные системы* — Колебания; *Стержневые системы* — Колебания
 — собственные — см. *Колебания свободные*
 — тел упругих, взаимодействующих с жидкостью 508
Колебательные процессы — Кинематика 216, 217
Кольца круговые — Колебания изгибные 348; — Колебания параметрические 348—350, 365
 — упругие — Устойчивость — Потеря 50, 51

- Конструкции — Нагрузки квазистатические** — Определение 469
 — Нагрузки критические 7, 9
 — — Определение 12
 — Надежность — Обеспечение с помощью статистической динамики механических систем 513, 514, 519
 — — Применение уравнения Понтрягина 543, 544
 — Отказы — Вероятность — Определение 513, 514, 519, 520
 — Параметры случайные 517
 — — Плотность вероятности совместной 517, 518
 — — Распределение вероятностей 520—522
 — — Типы и их классификация 514, 515
 — Равновесие — см. *Равновесие конструкций*
 — Состояния критические
 — Состояния равновесные — Диаграммы 7—10, 12
 — Усталость «акустическая» 534
 — Устойчивость 7—215
 — — Задачи — Решение 10
 — — Задачи бифуркационные — Решение 11, 12
 — — Потеря — Типы важнейшие 7—10
 — — Потеря при ползучести материала 10, 12
Крутильные колебания валов 231; — Амплитуды — Расчет 316; — Гашение 333, 334; — Поглощение 336—338; — Уравнения частотные 293
 — механических систем 228, 231, 235, 241; — Частоты собственные 240
 — оболочек цилиндрических круговых — Частоты безразмерные 429—431
Крутильные колебания стержней
 — Соотношения основные 287—289
 — Уравнения 288
 — Уравнения частотные 290
 — Условия граничные 287, 289, 290
 — Формы собственные 288, 290, 291, 293
 — — Масштаб 286
 — Частоты собственные 290
 — — Спектры — Определение 287
 — — Формулы 306, 309—311
 — Частоты собственные низшие 314
Крутильные колебания стержней вынужденные 315, 316, 318
Крылья тонкие 471
 — Давления аэродинамические 474, 475
 — Дивергенция 469, 476, 487
 — — Скорость критическая 477, 478
 — Колебания свободные малые в потоке газа — Уравнения 473, 476
 — Обтекание — Применение различных теорий аэрогидродинамики 473—475

- — Уравнения для потенциала скоростей 470, 471
- — Условия граничные 471, 476
- Обтекание при сверхзвуковых скоростях 472, 474, 475
- Силы подъемные и моменты 471, 472
- Уравнения движения 477
- Флаттер изгибно-крутильный 469, 477, 478

М

Маятники 220

- Колебания 227, 231, 347
- — Частоты собственные 238
- Характеристики 223
- Мембраны «хлопающие» 8, 9
- Механические системы 216
- Динамика статистическая — см. *Динамика статистическая механических систем*
- Колебания — Виды 216, 217
- — Возбуждение кинематическое 218, 332
- — Гашение с помощью динамических устройств 331—341; — см. также *Гасители колебаний; Поглотители колебаний*
- — Демпфирование конструкционное 341—343, 494
- — Периоды, частоты и амплитуды 216
- — Уровни отсчетные 217
- Колебания изгибные 230, 235
- Колебания крутильные 228, 231, 235
- Колебания плоские 227—233
- Колебания продольные 233, 235
- Колебания случайные 525
- Свойство консервативности 723
- Силы возмущающие 217
- — Законы изменения 219, 220, 332
- — Источники возникновения 218, 219
- — Частоты 332, 340
- Силы возмущающие, передаваемые машинами на фундамент 219, 220
- Силы восстанавливающие 220
- Силы позиционные 217
- Силы смешанного характера 218
- Силы трения 218, 224
- Теория — см. *Теория колебаний механических систем*
- Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова 542, 543
- Уравнения движения стохастические 528, 539—542
- Устойчивость — Задачи статистические 513, 519—523
- Устойчивость динамическая 347, 348
- Число степеней свободы 225—233
- Число степеней свободы при наличии элементов трения 225, 234

- Элементы упругие и их характеристики 220—223, 331

Механические системы динамические с гасителем колебаний — Колебания свободные — Частоты собственные 331

- — динамические с несколькими степенями свободы 225; — Схемы расчетные 233
- — линейные распределенные — см. *Механические системы линейные с распределенными параметрами*
- — линейные с двумя степенями свободы — Моменты вторые обобщенных координат и скоростей 530, 531; — Схемы, особенности и перемещения 229—232
- — линейные с конечным числом степеней свободы — Колебания случайные — Исследования с помощью корреляционных методов 528—531

Механические системы линейные с одной степенью свободы 236

- Биеция 249
- Возмущения кинематические и силовые 245, 250
- Колебания вынужденные 245—254
- — Амплитуды 246—249, 252, 253
- — Анализ гармонический 249, 250, 254
- — Влияние вязкого трения 250—252
- — Влияние гистерезиса 252, 253
- — Законы движения 248, 251
- — Коэффициенты динамичности 246, 247, 251, 253
- — Коэффициенты передачи 246, 252
- — Резонанс 247, 250, 252
- — Уравнения 245, 250
- Колебания изгибные 240—242
- Колебания крутильные и продольные 240, 241
- Колебания свободные 236—244
- — Амплитуды 236, 243
- — Законы движения и траектории фазовые 236, 243, 244
- — Уравнения 236, 243
- — Частоты собственные 236—242
- Масса приведенная и момент инерции приведенный — Расчет 241, 242
- Силы возмущающие 245—248
- — Работа за один цикл колебаний 252
- Силы возмущающие непериодические 252
- Силы возмущающие периодические 249, 250, 253, 254
- — Законы изменения 251
- Схемы, особенности и перемещения 225—228
- Энергия кинетическая и потенциальная 237, 244

Механические системы линейные с распределенными параметрами — Динамика статистическая — Методы 536—538

- Колебания случайные — Исследование с помощью корреляционных методов 531—538
- — Метод интегральных оценок 534—536
- — Уравнения 531
- Нагрузки случайные — Спектры корреляций пространственных 532, 533
- — Характеристики статистические 533, 534
- Нагрузки случайные 533, 534
- Перемещения — Разложение в ряд 531
- Сведение к системе с конечным числом степеней свободы 531, 532, 537

Механические системы нелинейные с одной степенью свободы 254

- Автоколебания 267
- Колебания вынужденные 259—262
- — Амплитуды 259, 261
- — — Изменения резкие («срывы») 260
- — Влияние вязкого сопротивления 261, 262
- — Законы движения 259, 261, 262
- — Процесс установившийся 260, 261
- — Уравнения 259, 261
- Колебания свободные 254—258
- — Амплитуды 255, 257
- — Уравнения 254
- — Частоты собственные 255—258
- Силы возмущающие 259—261
- Силы восстанавливающие 255—257
- Характеристики амплитудно-частотные 259, 260, 262
- Характеристики упругие 221—223, 254
- Характеристики упругие не-симметричные 258
- Характеристики упругие симметричные 255

Механические системы нелинейные с одной степенью свободы диссипативные 218, 254, 262

- Колебания вынужденные — Амплитуды 266, 267
- Колебания свободные — Амплитуды 263—265
- — Влияние трения 264, 265
- — Декременты логарифмические 265, 266
- — Законы движения и траектории фазовые 264—265
- — Уравнения 262—265
- Силы восстанавливающие 262

Механические системы непрерывно деформируемые с распределенными параметрами 225; — Схемы и функции определяющие 235; — Частоты собственные низкие 240

- — с двумя и тремя степенями свободы — Схемы, особенности и перемещения 229—232

Механические системы с несколькими степенями свободы 229, 271

- Колебания вынужденные 281—284
- — Амплитуды 282—284
- — Влияние вязкого трения 283, 284
- — Резонанс 283
- — Уравнения 281—283
- — Формы собственные 281
- Колебания свободные 271—281
- — Влияние вязкого трения 280, 281
- — Влияние инерции вращения твердых тел 278—280
- — Уравнения 271—275, 277, 278, 280
- — Уравнения частотные 275, 276, 280
- — Формы собственные 276, 280
- — — Условия нормирования 277, 278
- — Частоты собственные 277, 278—280
- Схемы, особенности и перемещения 229—232
- Уравнения и их решение 528, 529
- Энергия кинетическая 271
- Энергия потенциальная 272

Механические системы с одной степенью свободы 225

- Схемы, особенности и перемещения 225—228

Н

- Надежность конструкций — Обеспечение с помощью статистической динамики 513, 514, 519
- Применение уравнения Понтрягина 543, 544

Напряжения критические — см. под наименованиями объектов, например: *Пластины круглые* — Напряжения критические; *Стержни сжатые* — Напряжения критические

- Нелинейные колебания — Исследования — Методы 538—540
- — оболочек сферических в виде сегментов пологих 449—452
- — пластинок 373, 374

О

- Оболочки — Выпучивание при ползучести 120, 121, 209—215
- Выпучивание термическое 203, 205
- Деформации 419
- Деформации температурные 205, 206
- Колебания 418—466
- — Уравнения 418—422

- Колебания изгибные 427, 458
- — Уравнения 422, 445
- — Частоты собственные —
Оценки для плотности 464, 465
- Кривизны и моменты 419
- Нагрузки критические верхние 127
- Нагрузки критические нижние 128, 129
- Параметры внутренние — Распределение вероятностей 519, 520
- Поверхность срединная — Неправильности формы 128, 129
- Прогибы — Распределение вероятностей 520
- Силы критические — Распределение вероятностей 520, 521
- Состояния равновесные — Диаграммы 127, 128
- Теория — см. *Теория оболочек*
- Углы поворота 420
- Усилия в срединной поверхности 419
- Условия граничные 422
- — Классификация 420, 421
- Устойчивость 127—197
- — Данные экспериментальные — Обработка статистическая 129, 141, 513, 514
- — Потеря — Особенности 127—129
- Устойчивость при высоких температурах 203—215
- Флаттер — см. *Флаттер оболочек*
- Энергия кинетическая и потенциальная 420
- Эффект краевой динамический — Области вырождения 461, 462
- — Уравнения 422, 423
- Оболочки конические — Деформации** 165, 166, 455
- Колебания 453—460
- — Влияние сил инерции тангенциальных 458, 459
- — Уравнения 454
- Колебания свободные — Уравнения 455, 456
- — Формы — Определение 457
- — Частоты безразмерные 457, 460
- — Частоты приведенные 459
- — Частоты собственные 458
- Моменты и усилия 454
- Перемещения 459
- Равновесие — Уравнения 166
- Силы инерции тангенциальные — Влияние на колебания 458, 459
- Уравнения для динамического случая 453, 454
- Усилия тангенциальные в срединной поверхности 455
- Устойчивость 168—175
- — Данные экспериментальные 173
- — Уравнения основные 164—167
- Энергия кинетическая и потенциальная 459
- Эффект краевой — Уравнения приближенные 454, 457
- Оболочки конические при внешнем давлении замкнутые — Давления критические верхние** 171—173; — Устойчивость 170—172
- при внешнем давлении, подкрепленные ребрами — Давления критические верхние 175; — Устойчивость 174, 175
- при внешнем давлении усеченные — Давления критические верхние и устойчивость 172, 173, 175
- при кручении — Усилия сдвигающие критические 173; — Устойчивость 173, 174
- при сжатии осевом — Выпучивание 169; — Усилия сжимающие критические 169, 170; — Устойчивость 168—170
- усеченные — Колебания свободные — Формы и частоты безразмерные 457, 458
- Оболочки пологие** 184
- Деформации 185, 203, 204
- Деформации температурные 205, 206
- Моменты изгибающие и «температурные» 204
- Напряжения 186, 203
- Обозначения 203
- Прогибы большие — Исследования 184—187
- — Диаграммы зависимости от нагрузки 185
- Равновесие — Уравнения 186
- Теория — Применение при исследованиях больших прогибов 184—187
- — Применение при исследованиях устойчивости сферических оболочек 178, 179, 181
- — Уравнения 423, 424
- — Учет изменений температуры 203—206
- Устойчивость 188—197
- — Уравнения основные 184—187
- Устойчивость при высоких температурах — Уравнения основные 203—206
- Оболочки сферические — Деформации и изменения кривизны** 444
- Деформации сдвига поперечного и инерция вращения 448, 449
- Колебания 443—453
- — Уравнения 443, 444, 449
- Колебания изгибные — Уравнения упрощенные 445
- — Частоты собственные — Оценки для плотности 465
- Колебания радиальные 448
- Колебания свободные 449

- — Расчет — Применение асимптотического метода 461—466
- — Уравнения 445, 543
- — Формы — Уравнения 461
- — Частоты — Точки сгущения 465
- Моменты и усилия 444, 445
- Перемещения во внутренней области при силах, дельта-коррелированных 535, 536
- Оболочки сферические в виде сегментов** — Устойчивость 176, 182
- — пологие — Деформации 449, 450; — Колебания вынужденные — Уравнения 451—453; — Колебания нелинейные 449—452; — Колебания свободные 446, 447; — Условия граничные 450
- — пологие при внешнем давлении — Выпучивание и волнообразование 194, 196, 197; — Давления критические 195, 197; — Устойчивость 194—197
- Оболочки сферические при внешнем давлении** — Выпучивание 177, 178, 181
- Давления критические 180, 183, 195
- Деформации 176, 179
- Нагрузки — Зависимость от прогибов 189
- Напряжения 178, 179
- Напряжения критические верхние 177, 181
- Напряжения критические нижние 180, 181
- Прогибы 179—181
- — Зависимость от нагрузки 189
- Условия граничные 179, 180
- Устойчивость 176—183
- — Данные экспериментальные 181, 182
- Оболочки цилиндрические** — Выпучивание за пределами упругости 198
- Устойчивость 129—158
- Устойчивость за пределами упругости 198—208
- Эффект краевой — Области вырождения 461
- Оболочки цилиндрические круговые** — Выпучивание и волнообразование 129, 132, 133
- Выпучивание термическое 206, 208
- Деформации 130—132, 134, 135
- Деформации сдвига и инерция вращения — Влияние на свободные колебания 442, 443
- Колебания изгибные 427
- Колебания крутильные и асимметричные — Частоты безразмерные 429—431
- Колебания свободные — см. *Свободные колебания оболочек цилиндрических круговых*
- Кривизны — Изменения 130, 134
- Моменты 130, 133
- Нагрузки — Зависимость от прогибов 189
- Нагрузки поперечные фиктивные 132
- Напряжения 130—132
- Напряжения кольцевые сжимающие 206—208
- Обозначения 129
- Перемещения 129, 135
- Прогибы 129, 135
- — Зависимость от нагрузки 189
- Равновесие — Уравнения 130, 131, 133, 134
- Силы инерции тангенциальные — Влияние на свободные колебания 440
- Силы поперечные 131, 134
- Температуры критические 206—208
- Усилия начальные в срединной поверхности — Влияние на свободные колебания 440—442
- Условия граничные 135, 207
- Условия граничные для динамического случая 426, 428, 433, 437, 440
- Устойчивость — Данные экспериментальные 141, 145, 149, 522
- — Уравнения основные 129—135
- Устойчивость при высоких температурах 208, 209
- — Уравнения основные 206, 207
- Энергия кинетическая и потенциальная 437
- Оболочки цилиндрические круговые, защемленные по торцам** — Колебания свободные — Частоты — Определение 438—440
- Частоты минимальные 433, 436, 437
- Оболочки цилиндрические круговые, обтекаемые потоком газа бесконечно длинные** 490
- Волны упругие — Распространение 490, 491, 493, 498
- Давления аэродинамические 490, 491
- Демпфирование конструкционное 494
- Дивергенция 493
- Колебания изгибные в вакууме — Частоты 492, 493
- Колебания свободные в вакууме — Формы и частоты 492, 493
- Уравнения движения и их решение 489—492
- Условия граничные 491
- Устойчивость 492, 494
- Флаттер — Скорости критические 494
- Оболочки цилиндрические круговые, обтекаемые потоком газа бесконечно длинные коаксиальные** — Волны упругие — Распространение 495
- Уравнения движения 494
- Флаттер — Скорости критические 495

Оболочки цилиндрические круговые, обтекаемые потоком газа конечной длины 495

- Колебания поперечные в вакууме 498
- Колебания свободные в вакууме — Формы и частоты 496, 497, 499, 500
- Уравнения движения — Операторы 496
- Устойчивость 500
- Флаттер — Скорости критические 495—497
- — Скорости критические минимальные 498—501

Оболочки цилиндрические круговые подкрепленные — Выпучивание 153, 156, 157; — Схемы расчетные — Выбор 153; — Устойчивость 153—158

- подкрепленные вафельные — Проектирование и расчет 158
- подкрепленные ортотропные — Деформации 154—156; — Нагрузки поперечные фиктивные 155; — Равновесие — Уравнения 154; — Свойства упругие 153; — Устойчивость — Уравнения основные 153—156; — Энергия деформации и энергия изгиба 156
- подкрепленные ортотропные при сжатии осевом — Устойчивость 157, 158
- подкрепленные ортотропные при сжатии осевом и внутреннем давлении — Устойчивость 157, 158

Оболочки цилиндрические круговые при внешнем давлении 141

- Выпучивание и волнообразование 143, 145
- Давления критические 141, 145
- Давления критические верхние 142—146, 201
- Давления критические нижние 143—145
- Нагрузки — Параметры безразмерные 142, 201
- Прогибы 141, 143
- Устойчивость 144—146
- — Данные экспериментальные 145
- — Уравнения основные 141—143
- Устойчивость за пределами упругости 201, 202

Оболочки цилиндрические круговые при изгибе — Выпучивание и волнообразование 148, 149; — Нагрузки критические 150; — Напряжения критические 148, 149

- при изгибе парами сил — Устойчивость 148, 149
- при изгибе поперечной силой на свободном конце — Устойчивость 149, 150

- при кручении — Выпучивание 147; — Напряжения критические касательные 146, 147; — Устойчивость 146—148; — Устойчивость за пределами упругости 202

Оболочки цилиндрические круговые при сжатии осевом — Выпучивание и волнообразование 136—139

- Выпучивание за пределами упругости 198, 200
- Напряжения критические — Значения экспериментальные 140, 141
- Напряжения критические верхние 136—139
- Напряжения критические за пределами упругости 198, 200
- Напряжения критические нижние 128, 140, 198
- Обозначения 135
- Прогибы 136, 137, 139
- Прогибы начальные 141
- Силы критические — Распределение вероятностей 522
- Состояния равновесные — Диаграммы 8
- Устойчивость 139—141
- — Данные экспериментальные 522
- — Уравнения основные 135—139
- Устойчивость за пределами упругости — Данные экспериментальные 200, 201
- — Уравнения основные 198, 199
- Устойчивость при ползучести 209
- Энергия потенциальная 139

Оболочки цилиндрические круговые при совместном действии нагрузок — Выпучивание 151; — Нагрузки критические 151, 152; — Напряжения критические 151, 153; — Устойчивость 150—153

- цилиндрические незамкнутые — см. *Панели цилиндрические*
- цилиндрические, содержащие жидкость — Колебания 508
- эллипсоидальные при внешнем давлении — Давления критические верхние 183, 184
- Устойчивость 183, 184

Отказы конструкций — Вероятность — Определение 513, 514, 519, 520**П****Панели, обтекаемые потоком газа — Автоколебания 501**

- Выпучивание температурное 501, 504, 505
- Нагрузка 503
- Поля температурные из-за аэродинамического нагрева 502
- Прогибы 504

- Уравнения основные 502
- — Решения приближенные 503, 504
- Флаттер — см. *Флаттер панельный*
- Флаттер установившийся 505, 506
- Панели, обтекаемые потоком газа**
- криволинейные — Уравнения основные 502; — Флаттер 489, 490; — Флаттер — Указания библиографические 501
- — плоские — Флаттер — см. *Флаттер панелей плоских*
- Панели пологие квадратные в плане** — Нагрузки — Зависимость от прогибов 189—191
- — конические при поперечной нагрузке 191; — Выпучивание и прогибы 193, 194; — Устойчивость 191—194
- — прямоугольные в плане 184, 187; — Нагрузки — Зависимость от прогибов 188, 189; — Нагрузки критические 189, 190; — Напряжения 188; — Условия граничные 188, 190; — Устойчивость 187—191
- — сферические — Колебания свободные 462, 463
- — сферические при внешнем давлении 184, 194; — Выпучивание и волнообразование 194, 196, 197; — Давления критические 195, 197; — Устойчивость 194—197
- — цилиндрические — Выпучивание температурное из-за аэродинамического нагрева 505; — Нагрузки критические — Ожидания математические 521; — Прогибы — Распределение вероятностей 520
- — цилиндрические при сдвиге — Напряжения касательные критические 163, 164; — Прогибы 162, 164; — Устойчивость 161—164
- Панели пологие цилиндрические при сжатии осевом** 159, 204
- Выпучивание при ползучести 215
- Деформации 211—213
- Нагрузки критические 191
- Напряжения 210, 211, 213
- Напряжения критические верхние 159, 211
- Напряжения критические нижние 161
- Прогибы 159, 160, 210, 213, 214
- Устойчивость 158—161
- Устойчивость за пределами упругости 202, 203
- Устойчивость при ползучести 210—215
- — Данные экспериментальные 214, 215
- Параметрические колебания колец круговых** 348—350, 365
- — пластинок 347, 348, 366, 367, 368
- — пластинок круглых, защемленных по контуру 353, 354
- — случайные — Исследование методом малого параметра 539, 540
- — стержней упругих прямолинейных 347, 349, 351, 367, 368; — Влияние перемещений в невозмущенном состоянии 365, 366
- Параметрические колебания упругих систем** 347—368 — Амплитуды — Влияние нелинейных факторов 367, 368
- Демпфирование и его влияние 363—365
- Классификация 348
- Коэффициенты возбуждения 350
- — Значения критические 364
- Отличие от вынужденных колебаний 347
- Связь с задачами динамической устойчивости 347, 348
- Уравнение Матвея 355, 356
- — Области неустойчивости 356—359
- — — Влияние демпфирования 363, 364
- Уравнение Мейснера 360
- Уравнение Хилла 355, 356
- — Области неустойчивости 359, 360
- Уравнения 353
- — Вывод — Примеры 353—355
- — Области неустойчивости — Границы 361—363, 365
- — — Классификация 360, 361
- — — Общий случай 351—353
- — Особый случай 349, 350, 353
- — Форма записи матричная 352, 355
- Частоты 363
- Параметрические силы** 348
- Параметрический резонанс** 218, 347, 361, 366
- Пластинки** — Выпучивание критическое термическое 119
- Выпучивание при ползучести 120, 121, 209
- Деформации и моменты при неравномерном температурном поле 118, 119
- Деформации сдвига поперечного и инерция вращения — Влияние на колебания 397, 401—405
- Изгиб — Уравнения для динамического случая 370, 371
- Колебания 370—416
- — Влияния деформаций сдвига и инерции вращения 397, 401—405
- — Влияния начальных усилий в срединной плоскости 372, 373, 399—401
- — Уравнения 370—374, 399, 400
- — Учет трения 373
- Колебания изгибные — Уравнения 372, 373, 401—403
- — Частоты 404, 405

- Колебания нелинейные 373
- — Уравнения 374
- Колебания параметрические 347, 348, 366, 367, 368
- Колебания под действием случайных нагрузок — Исследования по методу интегральных нагрузок 534—536
- Колебания свободные — Расчет — Применение асимптотического метода 406—416
- — Уравнения 543
- Края — Обозначения способов закрепления 94
- Моменты и силы перерезывающие 403
- — Связь с прогибами 370, 371
- Нагрузки случайные дельта-коррелированные — Действие 534—536
- Напряжения нормальные максимальные во внутренней области 534
- Напряжения при колебаниях изгибных 402
- Прогибы — Распределение вероятностей 520
- Прогибы во внутренней области 534
- Равновесие — Уравнения 373
- Состояния равновесные — Диаграммы 127
- Трение внешнее и внутреннее — Учет при колебаниях 373
- Усилия начальные в срединной плоскости — Влияние на колебания 372, 373, 399—401
- Условия граничные при колебаниях 372, 373, 397, 404
- Устойчивость 91—112
- Устойчивость при высоких температурах 117—125
- Пластины бесконечные, обтекаемые потоком газа** — Волны упругие — Распространение 480, 481; — Скорости возмущений — Потенциал 481; — Уравнения характеристические 481
- — бесконечные, обтекаемые потоком газа сверхзвуковым 486; — Скорости U критические 481; — Параметр λ — Значения критические 487
- — изотропные — Колебания поперечные малые — Уравнения 370, 371
- — изотропные прямоугольные — Колебания 375—390
- — квадратные — Колебания свободные — Расчет — Условия склеивания решений 410, 411; — Колебания свободные — Формы и частоты 412—416
- — квадратные заземленные по контуру — Колебания свободные 410, 411, 413; — Колебания свободные — Формы и частоты 378—380
- — квадратные подкрепленные ребрами — Деформации закритические при сдвиге 109; — Коэффициенты редуцированные при сжатии 107, 108
- — квадратные свободные по контуру — Колебания свободные 381
- — квадратные шарнирно-оперные по контуру — Колебания — Частоты 405
- — квадратные шарнирно-оперные по контуру и в центре — Колебания свободные 384
- — круглые — Выпучивание и деформации осесимметричные 109; — Напряжения критические 110; — Устойчивость 109—111
- — круглые заземленные по контуру — Колебания параметрические 353, 354
- — круглые кольцевые — Выпучивание 111; — Деформации осесимметричные 109; — Напряжения критические 110
- — круглые, обтекаемые сверхзвуковым потоком газа 486; — Параметр λ — Значения критические 488
- — обтекаемые сверхзвуковым потоком газа — 486; — Данные теоретические и экспериментальные — Сопоставление 489; — Параметр λ 484, 486; — Параметр λ — Значения критические 487, 488
- — ортотропные — Устойчивость — Уравнения 100
- — по форме параллелограмма — Колебания 390, 391; — Напряжения критические 112; — Устойчивость 111, 112
- Пластины прямоугольные** — Деформации — Интенсивность 113
- Колебания вынужденные гармонические 389, 390
- Колебания свободные 388
- — Зависимости между параметрами 399
- — Расчет — Применение асимптотического метода 406—408
- — — Условия склеивания решений 408—410
- — Уравнения 397, 398, 406, 407
- — Частоты 407
- Коэффициенты расчетные 93, 95
- — Графики 94
- Коэффициенты расчетные в упруго-пластической области 116, 117
- Модули 113
- Напряжения критические 92
- Напряжения критические в упруго-пластической области 114
- Напряжения критические касательные и нормальные 94, 95
- Параметры расчетные 114, 115
- Прогибы 389, 390
- Условия граничные 397, 408, 409

- Устойчивость 91—109
- — Уравнения и их решение 91, 92
- Устойчивость за пределами упругости 113—117
- — Расчет — Выбор метода 113
- Эффект краевой динамический 406—408

Пластины прямоугольные дюралюминовые — Выпучивание при ползучести — Расчет 125, 126

- — заземленные по двум краям — Колебания свободные при переменной толщине 388; — Коэффициенты расчетные 93, 94, 96, 116; — Силы критические 94
- — заземленные по контуру — Колебания свободные — Формы и частоты 377—379, 386, 387, 389, 410, 415; — Коэффициенты расчетные 94, 96; — Напряжения критические 97, 99
- — заземленные по контуру, обтекаемые сверхзвуковым потоком газа 486; — Давления аэродинамические 482; — Колебания вынужденные малые 482, 483; — Параметр λ — Значения критические 488
- — изотропные — Колебания 375—390
- — переменной толщины — Колебания свободные 385—387
- — переменной толщины, изменяющейся линейно — Колебания свободные — Частоты 388, 389
- — подкрепленные ребрами — Выпучивание 105, 108; — Выпучивание при неравномерном нагреве 119, 120; — Деформации закритические при сдвиге 108; — Деформации закритические при сжатии 105—107; — Коэффициенты расчетные 101—105; — Коэффициенты редуccionные при сжатии 105—107, 117; — Напряжения критические 101—103, 106; — Напряжения растягивающие 108; — Устойчивость 104
- — при произвольных случаях опорного закрепления — Колебания свободные — Расчет — Условия склеивания решений 408—410, 413; — Колебания свободные — Формы и частоты 382—384, 401, 414, 415; — Параметр λ — Значения критические 488
- — свободные по контуру — Колебания свободные 380, 381
- — шарнирно опертые по двум краям — Колебания 375, 400; — Колебания — Частоты 376, 377; — Силы критические 94

Пластины прямоугольные, шарнирно опертые по контуру 375

- Выпучивание при ползучести 121—126
- Деформации ползучести — Интенсивность 123, 124
- Колебания 375
- Колебания вынужденные гармонические 390
- Колебания свободные 385, 398, 400, 401, 404
- Колебания свободные при переменной толщине 388
- Коэффициенты расчетные 93—95, 97—100, 116, 117
- Напряжения и их интенсивность 122, 124
- Напряжения критические при изгибе и сдвиге 99, 100
- Напряжения критические при сжатии в двух направлениях 96, 97, 123
- Напряжения критические при сжатии и касательных усилиях 97, 98
- Напряжения критические при сжатии (растяжении) и сдвиге 98, 99
- Отношение ширины к толщине 92
- Прогибы 121, 390
- Прогибы дополнительные, вызванные ползучестью 124
- Силы критические 93

Пластины прямоугольные, шарнирно опертые по контуру и в отдельных точках — Колебания свободные 382

- — шарнирно опертые по контуру, обтекаемые сверхзвуковым потоком газа 483; — Волны пружие — Распространение 485; — Выпучивание температурное 505; — Давления аэродинамические 484, 503; — Параметр λ — Значения критические 488; — Уравнения основные 502; — Устойчивость 485
- — шарнирно опертые по контуру ортотропные — Напряжения критические 100
- — шарнирно опертые по контуру с сосредоточенными массами — Колебания свободные 384, 385

Пластины ромбовидные — Колебания 392, 393

- — трапециевидные консольные — Колебания свободные 392, 393
- — треугольные — Колебания — Уравнения 393
- — треугольные равнобедренные консольные — Колебания свободные — Формы и частоты 394
- — треугольные равнобедренные — Устойчивость и напряжения критические 111
- — треугольные с углом 90° — Колебания свободные — Формы и частоты 394, 395

- эллиптические — Колебания — Уравнения 395, 396
- эллиптические, защемленные по контуру — Колебания — Частоты 396, 397
- эллиптические, обтекаемые сверхзвуковым потоком газа 486; — Параметр λ — Значения критические 488
- Плоские колебания механических систем** 227—233
- Поглотители колебаний вязкие** — Коэффициенты динамические 336, 337; — Моменты инерции эффективные 337; — Сравнение с гасителями колебаний 340, 341
- с сухим трением 224, 337; — Моменты трения и энергия рассеиваемая 338; — Сравнение с гасителями колебаний 340, 341
- Ползучесть материалов** — Влияние на выпучивание оболочек 120, 121, 209—215
- Влияние на выпучивание пластинок 120, 121, 209
- Влияние на выпучивание пластинок прямоугольных дуралюминовых 125, 126
- Влияние на выпучивание пластинок прямоугольных, шарнирно опертых по контуру 121—126
- Влияние на устойчивость конструкций 10, 12
- Влияние на устойчивость стержней сжатых 88, 89
- Полосы** — см. также *Балки с узким и высоким сечением прямоугольные* (полосы)
- упругие, прижатые к жесткому основанию — Гистерезис при циклическом деформировании 342, 343
- Поперечные колебания валов** 348; — Частоты собственные 324, 325, 327
- стержней сжатых — Формы и частоты собственные 303, 304
- струн 287; — Соотношения основные 288, 289; — Частоты собственные 304
- Поплавки** — Колебания 227, 229
- Частоты собственные 238
- Характеристики 222, 223
- Портреты фазовые** 270, 271
- Прецессия валов** 325, 331
- Гашение с помощью автоматических балансировщиков 334—336
- Продольные колебания механических систем** 233, 235, 241
- Частоты собственные 240
- Продольные колебания стержней** — Амплитуды 315
- Соотношения основные 287—289, 291
- Уравнения 288
- Уравнения частотные 290, 292
- Условия граничные 287, 289, 290
- Формы собственные 287, 288, 290
- Масштаб и условия ортогональности 286
- Частоты собственные 290
- — Спектры — Определение 287
- — Формулы 306, 309—311
- Частоты собственные низкие 314
- Продольные колебания стержней** вынужденные 314, 315, 317, 318
- консольных 287, 314, 315
- ступенчатых — Частоты собственные 292
- Процессы колебательные** — Кинематика 216, 217
- марковские — Интенсивность 541; — Содержание понятия 517, 540; — Теория — см. *Теория марковских процессов*
- случайные — Функции корреляционные 523, 524
- случайные стационарные — Плотности спектральные 524—529; — Функции корреляционные 524, 526, 527, 532
- случайные стационарные эргодические — Ожидания математические — Определение 525, 527; — Осреднение по времени 524; — Плотность спектральная — Определение 528; — Спектры корреляций пространственных 532, 533; — Функции корреляционные 524, 525, 527, 528
- Пружины витые** — Потеря устойчивости — Виды 77; — Характеристики 221, 222
- растянутые — Витки — Перекашивание 77; — Потеря устойчивости при посаженных витках 80
- сжатые круглые — Осадка критическая 77, 78; — Потеря устойчивости при посаженных витках 77, 79; — Силы критические 78
- сжатые призматические — Потеря устойчивости 78; — Силы критические 79
- скручиваемые — Моменты скручивающие критические 80; — Потеря устойчивости 77, 79

Р

- Равновесие балок с узким и высоким сечением прямоугольным (полос)** — Формы возмущенные 67
- Равновесие конструкций** — Диаграммы состояний 7—10
- Формы — Бифуркация (разветвление) 8
- — — Точки — Методы определения 11, 12
- — Устойчивость — см. *Устойчивость конструкций*

- Формы качественно новые — Появление 7
- Формы любые — Исчезновение полное 9
- Формы несмежные — Появление 8
- Формы устойчивые — Исчезновение 9
- Равновесие оболочек конических** 166
 - оболочек пологих 186
 - оболочек цилиндрических круговых 130, 131, 133, 134
 - оболочек цилиндрических круговых подкрепленных ортотропных 154
 - пластинок — Уравнения 373
 - стержней сжатых 9, 81, 84, 127
 - стержней тонкостенных 7, 57—60, 63—65
 - стержней упругих на упругих опорах 35
 - упругих на упругом основании сплошном 35
- Рамные системы** 319
 - Колебания вынужденные 319, 322
 - — Амплитуды 323
 - Колебания свободные 319
 - — Частоты собственные 321, 322
 - Расчет динамический — Методы 319
 - — Формулы 320, 321
 - Смещения узлов 319
 - — Коэффициенты расчетные 320
- Рамы упругие плоские — Нагрузки критические** 44, 47; — Реакции единичные — Расчет 44—47; — Устойчивость 43—50
 - — однопролетные — Графики расчетные 47, 48; — Коэффициенты 49, 50
- Резонанс колебаний механических систем нелинейных** 267
 - колебаний механических систем с несколькими степенями свободы 283
 - колебаний механических систем с одной степенью свободы линейных 247, 250, 252, 253
 - параметрический 218, 347, 361, 366
- Роторы — Самоцентрирование** 324, 334
 - в упругих подшипниках — Скорости угловые критические 330

С

- Самолеты — Крылья — см. Крылья тонкие**
- Свободные колебания** 218
 - гасителей колебаний — Частоты собственные 332, 333, 339
 - крыльев тонких малые в потоке газа — Уравнения 473, 476

Свободные колебания механических систем динамических с гасителем колебаний — Частоты собственные 331

- — линейных с одной степенью свободы 236—244; — Амплитуды 236, 243; — Декременты логарифмические 244; — Законы движения и траектории фазовые 236, 243, 244; — Периоды 243; — Уравнения 236, 243; — Частоты собственные 236; — Частоты собственные — Формулы 238, 239, 240—242
- — нелинейных с одной степенью свободы 254—258; — Амплитуды 255, 257; — Уравнения 254; — Частоты собственные 255—258
- — нелинейных с одной степенью свободы диссипативных — Амплитуды 263—265; — Влияния трения 264, 265; — Декременты логарифмические 265, 266; — Законы движения и траектории фазовые 264, 265; — Уравнения 262—265
- — с несколькими степенями свободы 271—281; — Влияние вязкого трения 280, 281; — Влияние инерции вращения 278—280; — Уравнения 271—275, 277, 278, 280; — Уравнения частотные 275, 276, 280; — Формы собственные 276—278, 280; — Частоты собственные 277, 278—280
- Свободные колебания оболочек — Расчет — Применение асимптотического метода** 461—466; — Уравнения 543; — Формы — Уравнения 461; — Частоты — Точки сгущения 465
 - — сферических 449; — Уравнения 445
 - — сферических в виде сегментов пологих 446; — Частоты собственные и их уравнения 447
- Свободные колебания оболочек цилиндрических круговых** 423—443
 - Влияние граничных условий 440
 - Влияние деформаций сдвига и инерции вращения 442, 443
 - Влияние сил инерции тангенциальных 440
 - Влияние усилий начальных в срединной поверхности 440—442
 - Расчет — Применение асимптотического метода 463
 - Уравнения в перемещениях 423, 424, 440, 441
 - — Решение с применением теории оболочек 424, 425
 - — Решения точные 428, 432, 433, 437
 - Формы 426, 427, 429—431, 433, 435, 437, 438, 440
 - Частоты безразмерные 427, 429—432

- Частоты первого тона 433—435
- Частоты приведенные 427, 428, 443
- Частоты собственные — Влияющие факторы 440—443
- — Определение вариационными методами 437—440
- — Уравнения 426, 428, 437, 441, 442
- Частоты собственные минимальные 425, 433, 436, 437
- Свободные колебания оболочек цилиндрических круговых, обтекаемых потоком газа —** Формы и частоты 492, 493, 496, 497, 499, 500
- панелей пологих сферических 462, 463
- пластинок — Расчет — Применение асимптотического метода 406—416; — Уравнения 543
- пластинок квадратных 381; — Расчет — Условия склеивания решений 410, 411; — Формы и частоты 378—380, 412—416
- пластинок квадратных, опертых по контуру и в центре 384
- пластинок прямоугольных 382, 384; — Зависимости между параметрами 399; — Уравнения 397, 398
- пластинок прямоугольных переменной толщины 385—389
- пластинок прямоугольных, свободных по контуру 380, 381
- пластинок прямоугольных, шарнирно опертых по контуру 385, 388, 400, 401, 404
- пластинок трапецидалных консольных 392, 393
- пластинок треугольных — Формы и частоты 394, 395
- рамных систем 319; — Частоты собственные 321, 322
- Свободные колебания стержневых систем 285—314**
- Исследование приближенными способами 305—314
- — Формулы Гогенемзер—Прагера 310
- — Формулы Граммеля 309, 310
- — Формулы Донкерли 311
- — Формулы Рэлея 305—309
- Исследование точными методами 285—305
- Расчет — Условия склеивания решений 411
- Свободные колебания стержней консольных —** Формы и частоты собственные 279, 280, 287, 290, 292, 300
- однопролетных 290, 299, 300
- Силы возмущающие 217, 245—248, 259—261; —** Действие 252, 317, 318; — Законы изменения 219, 220, 332; — Источники возникновения; — Работа за один цикл колебаний 252; — Частоты 332, 340
- возмущающие, передаваемые на фундамент 219, 220
- возмущающие периодические — Действие 249, 250, 253, 254; — Законы изменения 251
- восстанавливающие 220, 255—257, 262
- гидроаэродинамические, действующие на деформируемые поверхности — Определение 470—473
- параметрические 348
- подъемные для крыльев тонких 471, 472
- позиционные 217
- случайные — Действие 528—531
- смешанного характера 218
- трения 218, 224
- трения сухого — Действие при конструкционном демпфировании 341, 343
- Системы — см. также Автоколебательные системы; Механические системы; Рамные системы; Стержневые системы**
- упругие — Колебания параметрические — см. *Параметрические колебания упругих систем*
- Собственные колебания — см. Свободные колебания**
- Соединения деталей —** Гистерезис при циклическом нагружении — Площади петли 341, 343—346
- — Уравнения ветвей петли 342
- Демпфирование конструкционное 343—346
- — Интенсивность — Методы оценки 341
- — Обозначения 343
- — Примеры 344—346
- Связи между слоями упругофрикционные 345, 346
- Станки металлорежущие —** Декременты колебаний логарифмические 341, 342
- Стержневые системы 285**
- Колебания вынужденные 314—318
- — Амплитуды 315, 316
- — Уравнения 314, 316
- — Формы собственные 317, 318
- Колебания свободные — см. *Свободные колебания стержневых систем*
- Массы распределенные — Замена несколькими сосредоточенными 305
- — Замена одной сосредоточенной (приведенной) 241
- Моменты инерции приведенные 241
- Параметры распределенные — Замена сосредоточенными 305
- Силы возмущающие — Действие 317, 318
- Число степеней свободы бесконечное 285

- Число степеней свободы конечное 305
- Стержни** — Задачи аэрогидроупругости 473, 476—480
- Колебания — см. *Изгибные колебания стержней; Крутильные колебания стержней; Продольные колебания стержней*
- Перемещения при колебаниях 285, 305, 307, 311
- Состояния равновесные — Диаграммы 8, 127
- Стержни консольные** — см. также *Стержни упругие на жестких опорах консольные*; — Колебания изгибные — Частоты собственные — Расчет 307—310; — Колебания изгибные вынужденные 316, 317; — Колебания продольные 287, 314, 315; — Колебания свободные — Формы и частоты собственные 279, 280, 287, 290, 292, 300; — Характеристики 222
- — однопролетные — см. также *Стержни упругие на жестких опорах однопролетные; Стержни упругие на упругих опорах однопролетные*; — Колебания вынужденные 317, 318; — Колебания свободные 290, 299, 300
- — с дополнительными сосредоточенными массами — Колебания изгибные 299, 302
- — с полостью, частично заполненной жидкостью — Колебания 508
- Стержни сжатые** — Гибкость критическая 81
- Колебания поперечные — Формы и частоты собственные 303, 304
- Напряжения критические 80
- Равновесие «безразличное» 127
- Устойчивость за пределами пропорциональности 80—88
- Устойчивость при ползучести материала 88, 89
- Стержни сжатые внецентренно** — Напряжения критические 87; — Устойчивость — Потеря 86—88
- — тонкостенные — Равновесие — Формы возмущенные 63—65; — Силы критические 64, 65
- Стержни сжатые центрально** — Гибкость 82, 83, 85
- Изгиб продольный — Теория Кармана 81—84
- — Теория Шенли 84, 85
- Модуль касательный 81, 83
- Модуль приведенный 82, 83
- Напряжения критические 82, 84, 85
- — Коэффициент ϕ 86
- Напряжения сжатия дополнительные 81
- — Эпюры 82
- Равновесие — Формы смежные — Появление 81, 84
- Силы критические 82, 84
- Стержни сжатые центрально двухтавровые дуралюминовые** — Кривые «критическое напряжение — гибкость» — Построение 83—85
- — сжатые центрально консольные — Равновесие — Формы устойчивые — Исчезновение 2
- — сжатые центрально тонкостенные — см. *Стержни тонкостенные сжатые центрально*
- — ступенчатые — Колебания продольные 292
- Стержни тонкостенные** — Закручивание — Условия граничные 59; — Изгиб — Условия граничные 58; — Равновесие — Формы 57, 58; — Устойчивость при поперечной нагрузке 66
- — сжатые внецентренно — Равновесие — Формы возмущенные 63—65; — Силы критические 64, 65; — Устойчивость — Потеря при ползучести материала 10; — Устойчивость при различных случаях приложения силы 64, 65
- — сжатые внецентренно упругопластические — Состояния равновесные — Диаграммы 9
- — сжатые двутавровые — Время критическое при ползучести материала 89; — Модуль приведенный 82
- Стержни тонкостенные сжатые центрально** — Равновесие — Формы возмущенные 59, 60
- — Формы возмущенные изгибно-крутильные 63
- — Формы качественно новые — Появление 7
- Силы сжимающие критические 60—63
- — Влияние коэффициента длины 61
- Состояния равновесные — Диаграммы 7
- Устойчивость при сечении с одной осью симметрии 60—62
- Устойчивость при совпадении центра изгиба сечения с его центром тяжести 59
- Стержни упругие** — Характеристики 221, 222
- Стержни упругие на жестких опорах** — Гибкость и длина приведенная 16
- Действие нагрузок распределенных 16, 19, 20
- Действие нагрузок распределенных и сосредоточенных 21
- Ось изогнутая — Уравнения и их решение 13, 14
- Силы критические 13, 15, 16
- Устойчивость 13—34
- Стержни упругие на жестких опорах двухпролетные** — Коэффициенты длины и параметры вспомогательные 32

- консольные — Коэффициенты длины 18; — Силы критические 15, 16; — Силы критические — Определение методом Ритца 25; — Силы критические при нагрузке равномерно распределенной 20; — Устойчивость 16, 18
- консольные с изменением жесткости непрерывным — Коэффициенты η 32; — Нагрузки критические распределенные 29
- консольные с изменением жесткости ступенчатым — Силы критические 21, 22
- многопролетные (балки неразрезные) — Коэффициенты длины — Выбор 32—34; — Коэффициенты длины — Графики 30, 31; — Параметры вспомогательные 32, 33; — Подразделение на участки 14; — Силы критические 29
- однопролетные постоянного сечения — Действие нагрузок сосредоточенных 16—18; — Коэффициенты длины при нагрузке распределенной 19, 20; — Коэффициенты длины при нагрузке сосредоточенной 17, 18; — Нагрузки критические — Определение методом Галеркина 19, 20; — Устойчивость 16—21
- Стержни упругие на жестких опорах однопролетные с изменением жесткости непрерывным** — Работа сил внешних 23
 - Силы критические — Коэффициенты η — Значения 26—29
 - — Определение методом Ритца 25, 26
 - — Определение методом Рэлея 24, 25
 - — Определение методом энергетическим 23, 24
 - — Определение по формуле Тимошенко 24, 25
 - Устойчивость 23—29
- Энергия потенциальная 23—25
- Стержни упругие на жестких опорах однопролетные с изменением жесткости ступенчатым** — Подразделение на участки 14; — Силы критические и устойчивость 21—23
 - с заделанными концами — Коэффициенты длины 17; — Силы критические 13, 14
- трехпролетные — Коэффициенты длины и параметры вспомогательные 32, 33
- Стержни упругие на упругих опорах** — Колебания изгибные 299, 302; — Опоры и их реакции 34; — Равновесие — Формы возмущенные 35; — Устойчивость 34—41; — Устойчивость — Потеря — Виды 34, 35
 - на упругих опорах многопролетные (балки неразрезные) — Жесткости опор — Коэффициенты безразмерные 35; — Коэффициенты длины — Выбор 37; — Коэффициенты длины — Графики 40, 41
 - на упругих опорах однопролетные — Жесткости опор — Коэффициенты длины — Выбор и графики 36—40
 - на упругом основании сплошном — Коэффициенты длины — Выбор и графики 41, 42; — Равновесие — Формы возмущенные 35; — Устойчивость 35, 42
- Стержни упругие прямолинейные** — Колебания параметрические 347, 349, 351, 367, 368; — Колебания параметрические — Влияние перемещений в невозмущенном состоянии 365, 366
 - прямолинейные витые (естественно закрученные) — Силы критические и устойчивость 52, 53
 - прямолинейные под действием следящих сжимающих сил — Нагрузки критические 55; — Силы критические 54; — Устойчивость 53—55
 - прямолинейные скручиваемые — Устойчивость и элементы критические 56, 57
- Струны** — Колебания поперечные 287
 - — Соотношения основные 288, 289
 - — Частоты собственные 304

Т

- Тела плохообтекаемые** 478
 - Автоколебания в потоке газа — Амплитуды 480
 - — Уравнения 479
 - Колебания вынужденные в потоке жидкости 479
 - — Частоты приведенные 478
 - Срывы вихрей и образование вихревой дорожки Кармана 469, 478
- Тела упругие, взаимодействующие с жидкостью** — Колебания 508
- Температуры высокие** — Влияние на устойчивость оболочек 203—215
 - Влияние на устойчивость пластин 117—125
- Теория аэрогидродинамики** — Применение 474, 475, 486, 489
 - аэрогидродинамики поршневая — Применение 473, 474, 484—488, 496, 502, 504, 508

- аэрогидроупругости 468—508; — Задачи — Особенности 469, 470; — Задачи динамические и статические 468, 469; — Задачи для стержней 473, 476—480; — Указания библиографические 470, 473, 508; — Учет обратного влияния упругих деформаций 468, 469
 - деформаций — Применение 198—200, 202
 - изгиба продольного стержней сжатых центрально 81—85
 - колебаний механических систем 216—284; — Задачи статистические 513, 525, 528—540; — Формулы Гогенемзер—Прагера 310; — Формулы Граммеля 242, 309, 310; — Формулы Донкерли 242, 311; — Формулы Рэлея 240, 241, 305—309, 328; — Функции Крылова 294—297
 - марковских процессов — Методы 516, 517, 540—544; — Уравнение Понтрягина 543, 544; — Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова 540—542; — Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова для механических систем 542, 543
 - Теория оболочек** — Применение 495; — Уравнения для динамического случая 418—421, 448, 454; — Уравнения упрощенные 424, 425
 - безмоментная — Уравнения для динамического случая 421, 422, 424, 445
 - линейная — Применение при исследованиях устойчивости оболочек конических 164—167; — Применение при исследованиях устойчивости оболочек цилиндрических круговых 129—133, 141, 146, 148, 150, 151
 - нелинейная — Применение при исследованиях устойчивости оболочек сферических 178, 179; — Применение при исследованиях устойчивости оболочек цилиндрических круговых 133—135, 139, 150, 152
 - пологих — Применение при исследованиях больших прогибов 184—187; — Применение при исследованиях устойчивости сферических оболочек 178, 179, 181; — Уравнения 423, 424; — Учет изменений температуры 203—206
 - полубезмоментная — Применение при исследованиях свободных колебаний 455, 456; — Применение при исследованиях устойчивости 143, 147
 - Теория упругости** — Уравнения — Применение 405, 448
 - эффекта краевого динамического — Применение 406—408, 422, 423, 454, 457, 461, 462, 532
 - Траектории фазовые автоколебаний** 270
 - свободных колебаний механических систем линейных 236, 243, 244
 - свободных колебаний механических систем нелинейных диссипативных 264, 265
 - Трение** внешнее — Влияние на критические состояния валов 330, 331; — Влияние на число ступеней свободы механических систем 225, 234; — Силы 218, 224; — Учет при колебаниях пластинок 373
 - внешнее вязкое — Влияние на вынужденные колебания механических систем 250—252, 261, 262; — Влияние на свободные колебания механических систем 280, 281; — Характеристики 224
 - внутреннее 224; — Влияние на вынужденные колебания механических систем 265; — Учет при колебаниях пластинок 373
 - Трение сухое (кулоново)** — Влияние на автоколебания 268; — Влияние на колебания свободные механических систем нелинейных 264
 - Влияние на критические состояния валов 330
 - Моменты 338
 - Силы — Действие при конструкционном демпфировании 341, 343
 - Характеристики 224
- У**
- Устойчивость за пределами упругости оболочек цилиндрических** 191—208
 - за пределами упругости панелей пологих цилиндрических 202, 203
 - за пределами упругости пластинок прямоугольных 113—117
 - колец круговых упругих — Потеря 50, 51
 - конструкций 7—215; — Задачи — Решение 10; — Задачи бифуркационные — Решение 11, 12; — Потеря — Типы важнейшие 7—10; — Потеря при ползучести материала 10, 12
 - оболочек 127—197 — см. также под их наименованиями, например: *Оболочки конические* — Устойчивость; *Оболочки пологие* — Устойчивость

Устойчивость панелей пологих конических 191—194

— прямоугольных в плане 187—191

— сферических 194—197

— цилиндрических при сдвиге 161—164

— цилиндрических при сжатии осевом 158—161, 202, 203, 210—215

Устойчивость пластинок круглых 109—111

— при высоких температурах 117—125

— прямоугольных 91—109

— прямоугольных за пределами упругости 113—117

— прямоугольных, подкрепленных ребрами 104

— треугольных и по форме параллелограмма 111, 112

Устойчивость плоской формы изгиба 66—75, 363

— при высоких температурах оболочек 203—215

— при высоких температурах пластинок 117—125

— при ползучести материалов 10, 12, 88, 89 — см. также *Ползучесть материалов* —

Влияние на выпучивание

— пружин витых 77

— пружин витых растянутых 77, 80

— пружин витых сжатых 77—79

— пружин витых скручиваемых 77, 79, 80

— рам упругих плоских 43—50

— стержней — см. под их наименованиями, например: *Стержни сжатые* — Устойчивость;*Стержни упругие на жестких опорах* — Устойчивость**Ф****Флаттер крыльев тонких изгибно-крутильный** 469, 477, 478

— оболочек — Скорости критические минимальные 498; —

Уравнения исходные 489, 490

— оболочек цилиндрических круговых — Возникновение

497; — Скорости критические

494—497; — Скорости критические

минимальные 498—

501; — Указания библиографические

501; — Уравнения

и их решение 489—491

— панелей криволинейных 489, 490; — Указания библиографические

501

— панелей плоских 480—489; — Данные теоретические и экспериментальные — Сопоставление

486, 489; — Пара-

метр λ — Значения критические 483, 485; — Уравнения

482, 485; — Уравнения характеристические 481, 484; —

Учет нелинейностей 502

Флаттер панельный 469

— Амплитуды 501, 506, 507

— Задачи линейные 480—489

— Задачи нелинейные 501—508

— Указания библиографические

470, 508

— Уравнения 502

— — Решение методом гармонического баланса 506, 508

— — Решение методом малого параметра 506, 507

— — Решения приближенные 503, 504

— Частоты 506

Флаттер панельный установившийся 505, 506

— срывной 469

Формы колебаний — см. под наименованиями колебаний, например: *Крутильные колебания стержней* — Формы; *Продольные колебания стержней* — Формы**Ц****Цилиндры круговые** — Колебания вынужденные в потоке жидкости 479

— — Частоты приведенные 478

Ч**Частоты колебаний** — см. под наименованиями колебаний, например: *Изгибные колебания механических систем* — Частоты; *Свободные колебания оболочек* —

Частоты

Ш**Шум «белый»** 525, 531, 535**Э****Энергия кинетическая механических систем линейных** 237

— оболочек 420

— оболочек конических 459

— оболочек цилиндрических круговых 437

Энергия потенциальная механических систем линейных 237, 244

— оболочек 420

— оболочек конических 459

— оболочек цилиндрических круговых 139, 437

— стержней упругих на жестких опорах однопролетных 23—25

**«ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ,
КОЛЕБАНИЯ»**

Справочник, том 3

Под ред. И. А. Биргера
и Я. Г. Пановко

Редактор издательства Д. В. Баженов

Технический редактор Т. Ф. Соколова

Корректор А. П. Озерова

Художник А. Я. Михайлов

Сдано в производство 22/I 1968 г.

Подписано к печати 15/VIII 1968 г.

Т-10544. Тираж 40 000 экз.

Печ. л. 29,4. Бум. л. 8,75. Уч.-изд. л. 40

Формат 84×108¹/₃₂. Цена 2 р. 32 к.

Зак. 1949.

Издательство «МАШИНОСТРОЕНИЕ»,
Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3

Ленинградская типография № 6
Главполиграфпрома Комитета
по печати при Совете Министров СССР
Ленинград, ул. Моисеенко, 10

Замеченные опечатки в томах 2 и 3

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
Том 2			
57	5-я снизу	$= k^2 (\xi^2 +$	$k^2 \left(\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} \xi^2 +$
57	8-я снизу	$\approx \frac{Q_z}{2\pi}$	$\approx \frac{Q_z}{4\pi}$
259	1-я снизу	$+ \mu (A + K\psi^2)$	$+ \mu (N + K\psi^2)$
314	3-я сверху	(рис. 4 и 11)	(рис. 4 и 13 гл. 9)
348	5-я снизу	$(3 + 16)^2$	$(3 + v_0)^2$
349	5-я сверху	$\exp(-\gamma\beta,$	$\exp(-\gamma\beta_1$
349	15-я сверху	ряда	рода
358	3 и 4-я сверху	$(0.98)^2$	$(0.98)^{-2}$
365	9-я сверху	$\frac{x}{c_1}$	$\frac{x}{c_2}$
367	13-я сверху	$= \frac{r_0^4}{\sqrt{Rh}} \sqrt{\frac{3}{2}}$	$= \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} \sqrt{\frac{3}{4}}$
370	8-я сверху	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
372	10-я снизу	$\varepsilon = \frac{1}{9}$	$\varepsilon = -\frac{1}{9}$
374	2-я сверху	$\varepsilon = \frac{1}{9}$	$\varepsilon = -\frac{1}{9}$
378	11-я сверху	$\psi_1^{(2)}$	$\psi_1^{(1)}$
П о п р а в к а. На стр. 311 формулы (8) и (9) поменять местами.			
Том 3			
150	16-я снизу	(72)	(62)
161	5-я сверху	ниже	выше
161	7-я снизу	$k > 20$	$k > 30$
172	10-я сверху	$= \frac{x}{2}$	$= \frac{1}{2}$
259	2-я »	Богомолова	Боголюбова
265	8-я »	В этом	В общем
286	17-я »	\sum_{δ}	\sum_s
475	Табл. 1, 6-я графа, 2-я сверху	$= 0 (\delta^{1/3})$	$= 0 (\delta^{1/3})$
478	5-я »	к системе двух	к системе
525	Табл. 2, 3-я графа, 1-я сверху	$\frac{2\pi (v^2 + \omega^2)}{}$	$\frac{\pi (v^2 + \omega^2)}{}$
531	4-я »	$= \Phi_{\alpha\alpha}/\pi, D_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}/\pi$	$= \Phi_{\alpha\alpha}\pi, D_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}\pi$
П о п р а в к и: 1. На стр. 55 в табл. 26 сила P на схемах показана ошибочно.			
2. На стр. 438, рис. 12 по оси абсцисс отложены значения $\frac{x}{l}$, а не α .			

