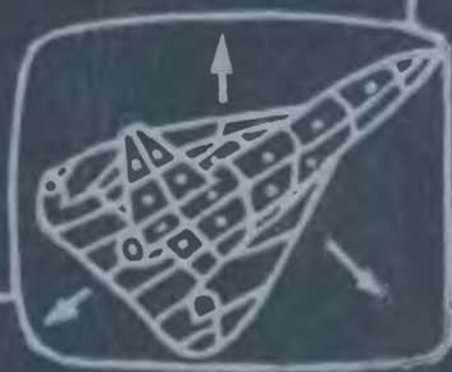


Р24.Т.02
Р44

РЕШЕТЧАТЫЕ КРЫЛЬЯ



РЕШЕТАТЫЕ КРЫЛЬЯ

Под редакцией
С. М. Белоцерковского



МОСКВА
« МАШИНОСТРОЕНИЕ »
1985

ББК 39.52

Р47

УДК 629.7.015.7

*С. М. Белоцерковский, Л. А. Одновол, Ю. З. Сафин, А. И. Тюленев,
В. П. Фролов, В. А. Шитов*

Рецензент
д-р техн. наук В. Ф. Рошин

**Решетчатые крылья/С. М. Белоцерковский, Л. А. Одновол,
Р47 Ю. З. Сафин и др.; Под ред. С. М. Белоцерковского. — М.: Ма-
шиностроение, 1985. — 320 с., ил.**

В пер.: 1 р. 40 к.

Впервые изложены результаты теоретических и экспериментальных исследований аэродинамических, прочностных и технологических характеристик решетчатых крыльев, а также особенности их применения в реальных конструкциях.

Для инженерно-технических работников, занимающихся самолетостроением, ракетостроением и судостроением.

Р 3606030000-211
038(01)-85 211-85

ББК 39.52

6Т5.1

© Издательство «Машиностроение», 1985 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

История развития науки и техники не лишена примеров, когда ряд научных идей находит свое бурное воплощение в жизнь спустя многие годы после их первоначального открытия. Воплощение этих идей происходит на совершенно новом уровне, в новых областях и направлено на решение новых задач. Это может быть с полным основанием отнесено и к решетчатым крыльям: еще на заре развития авиации предлагались аэродинамические схемы самолетов с решетчатыми крыльями, представляющие собой несущие системы, состоящие из большого числа планов конечного размаха.

Приводя некоторые из этих схем, Н. Е. Жуковский в своей работе «Теоретические основы воздухоплавания» писал: «В прежнее время надеялись получить хорошую подъемную силу, делая поддерживающие планы решетчатого типа»*.

Жуковский с учениками провел теоретические и экспериментальные исследования подобных несущих систем. В 1911 г. С. А. Чаплыгиным была написана статья «Теория решетчатого крыла»** для решеток с бесконечным размахом, которая впервые была опубликована в «Математическом сборнике» (т. XXIX, 1914 г.). Позже полипланные несущие системы рассматривались применительно к бипланам как их логическое продолжение. В дальнейшем интерес к полипланам, как и к бипланам системам, уменьшился, так как по мере увеличения скоростей полета главное внимание было уделено изучению и применению монопланых крыльев.

В конце 40-х годов были начаты работы по аэродинамике складывающихся решетчатых крыльев на дозвуковых скоростях с целью их возможного использования на планирующих торпедах. Положительные результаты этих работ послужили основой для дальнейших исследований по решетчатым крыльям, которые с 1955 г. под руко-

* Жуковский Н. Е. Полн. собр. соч. Лекции, вып. 1. Теоретические основы воздухоплавания, с. 1. М. — Л. ОНТИ, НКТП СССР, 1938, с. 124.

** Чаплыгин С. А. Собр. соч., т. II, М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1948, с. 414—430.

водством проф. С. М. Белоцерковского вылились в создание целого комплексного научного направления. Это направление включало широкие теоретические и экспериментальные исследования по аэродинамике, конструкции, прочности, массе и технологии изготовления решетчатых крыльев.

В результате этих исследований были разработаны теоретические методы расчета аэродинамических характеристик решетчатых крыльев в широком диапазоне скоростей (дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых). Проведены систематические экспериментальные исследования этих характеристик, разработаны расчетные методы определения аэродинамических характеристик компоновок с решетчатыми крыльями (С. М. Белоцерковский, В. С. Демидов, Л. А. Одновол, Ю. З. Сафин, В. А. Шитов, Л. Н. Кравченко, Б. И. Ульянов).

Решетчатые крылья представляют собой новый вид несущих, стабилизирующих и управляющих поверхностей, обладающих в определенных условиях рядом преимуществ перед традиционными монопланными крыльями.

Планы решетчатых крыльев, соответствующим образом спроектированные, позволяют получать плавное обтекание до углов атаки $40\text{--}50^\circ$. На сверхзвуковых скоростях планы решетки можно расположить достаточно близко друг от друга без их взаимного влияния и получить большую суммарную площадь решетчатого крыла в малом объеме. Поэтому подъемная сила решетчатого крыла оказывается в несколько раз большей, чем подъемная сила монопланного крыла при равных объемах: при $M=4$ подъемная сила решетки примерно в 3 раза превышает подъемную силу соответствующего монопланного крыла.

Удобство складывания — одна из важных особенностей решетчатого крыла. Его можно сложить вдоль корпуса летательного аппарата, не увеличивая его габаритных размеров. В ряде случаев раскрытие крыльев может осуществляться автоматически под действием аэродинамических сил.

Соответствующим выбором относительного шага решетчатого крыла можно управлять законом изменения производной $c_{y\alpha}$ в широком диапазоне чисел M . При малых числах M сильное взаимное влияние между планами снижает $c_{y\alpha}$ до тех значений, которые получаются при больших числах M ; в результате можно добиться практически постоянного значения этой величины во всем диапазоне скоростей. Это особенно важно при значительном перемещении в полете центра масс корпуса летательного аппарата. Подобный эффект у монопланного крыла получить не удастся.

Весьма малый абсолютный размер хорды решетчатых крыльев обуславливает незначительные шарнирные моменты в случае использования их в качестве управляющих поверхностей. Благодаря этому для них требуются малые мощности рулевых механизмов.

Срыв потока с планов решетчатых крыльев происходит на значительно больших углах, чем на монопланых крыльях, в силу чего возможно их использование в весьма широком диапазоне углов.

Однако одних аэродинамических преимуществ еще недостаточно для внедрения решетчатых крыльев в практику. Существенное значение имели исследования технологии изготовления, их прочности и массы.

Анализ показал, что основная особенность решетчатых крыльев как несущей конструкции, принципиально отличающая их от традиционных монопланых, заключается в рациональном пространственном распределении силовых элементов крыла, при котором плоскость наибольшей жесткости конструкции совпадает с плоскостью действия наибольших аэродинамических нагрузок. Понятно, что это огромное преимущество компоновки крыла не могло не привести к существенному выигрышу в весовой отдаче.

В результате анализа прочностных и жесткостных свойств полипланых систем, выполненного проф. А. И. Тюленевым, были определены основные направления по выбору рациональных конструкций решетчатого крыла. В дальнейшем им были предложены и некоторые новые конструктивные схемы решетчатых крыльев: с переменным шагом по размаху, с косой ячейкой, цилиндрические, с полыми планами и т. д.

В процессе совместного исследования аэродинамических и весовых характеристик решетчатого крыла оказалось возможным выработать рациональные соотношения для геометрических параметров и материала конструкции, обеспечившие значительный выигрыш в массе при заданной подъемной силе по сравнению с известными схемами монопланых крыльев.

Важное значение имел также выбор конструкционных материалов для изготовления решетчатых крыльев. Поэтому параллельно с работами по аэродинамике, конструкции, прочности и массе проводился комплекс теоретических и экспериментальных исследований по выбору рациональных конструкционных материалов для заданных условий эксплуатации крыльев и по технологии их изготовления (проф. В. П. Фролов).

Основной целью разработок этого направления явилось создание натуральных крыльев разных типоразмеров, работающих в условиях аэродинамического нагрева с высокими температурами торможения. С учетом требований производства и условий применения реализация этих работ в конечном итоге сводилась к отысканию компромиссного варианта конструктивных форм, несущих свойств выбранных конструкционных материалов в заданном диапазоне температур и рациональной технологии изготовления решетчатых крыльев.

Главный результат проведенных исследований состоит в том, что выявлены особенности и преимущества решетчатых крыльев,

даны методы их практического расчета и изготовления для тех случаев, когда при конструировании ряда объектов затруднено или невозможно применение традиционных монопланов крыльев. Эти исследования получили уже широкое внедрение и найдут дальнейшее применение в различных областях техники.

Настоящая монография имеет большой теоретический и практический интерес, и я с удовольствием рекомендую ее читателям, как теоретикам, так и прикладникам, которые, несомненно, найдут новое применение решетчатым крыльям.

Академик А. Д. НАДИРАДЗЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Геометрические параметры

- l — размах крыла
 b — хорда крыла
 H — высота крыла
 t — шаг решетки крыла (расстояние между двумя соответственными точками двух соседних планов крыла)
 $\bar{t} = t/b$ — относительный шаг крыла
 S — несущая площадь крыла
 n — число планов крыла
 n_z — число боковин крыла
 t_z — шаг боковин крыла
 $\bar{t}_z = t_z/b$ — относительный шаг боковин крыла
 $S^* = Hl$ — площадь лобовой поверхности крыла
 c — толщина плана крыла
 $\bar{c} = c/b$ — относительная толщина крыла
 \bar{f} — максимальная кривизна плана
 $\bar{f} = \bar{f}/b$ — относительная кривизна плана крыла
 \bar{f}^* — максимальная изогнутость лобовой поверхности крыла
 $\bar{f}^* = \bar{f}^*/b$ — относительная изогнутость крыла
 $L = \sqrt{H^2 + l^2}$ — диагональ крыла
 α_0 — угол установки планов крыла (угол между хордой плана и направлением, перпендикулярным к оси крыла в плоскости симметрии крыла)

Кинематические параметры

- \vec{V} — вектор абсолютной скорости начала O связанной системы координат относительно воздушной среды, не возмущенной летательным аппаратом
 $v_x v_y v_z$ — проекции скорости на связанные оси координат
 $v_{x_a} v_{y_a} v_{z_a}$ — проекции скорости на скоростные оси координат
 $\vec{\Omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости крыла
 $\omega_x \omega_y \omega_z$ — составляющие угловой скорости по осям связанной системы координат
 $\omega_{x_a} \omega_{y_a} \omega_{z_a}$ — составляющие угловой скорости по осям скоростной системы координат
 M_∞ — число Маха невозмущенного потока
 a — скорость звука

$M_{кр1}$ — число Маха невозмущенного потока, при котором в самом узком сечении решетчатого крыла между планами скорость потока равна скорости звука

$M_{кр2}$ — число Маха невозмущенного потока, при котором перед решетчатым крылом возникает прямой скачок уплотнения, а между планами — дозвуковой поток

$M_{кр3}$ — число Маха невозмущенного потока, при котором заканчивается взаимное влияние между планами по скачкам или характеристикам

$$q = \rho \frac{V^2}{2} \text{ — скоростной напор}$$

α — угол атаки крыла

β — угол скольжения

γ — угол крена крыла

Динамические характеристики

\vec{R} — результирующая аэродинамических сил

X — продольная сила

Y — нормальная сила

Z — поперечная сила

X_a — сила лобового сопротивления

Y_a — подъемная сила

Z_a — боковая сила

$$c_x = \frac{X}{qS} \text{ — коэффициент продольной силы}$$

$$c_y = \frac{Y}{qS} \text{ — коэффициент нормальной силы}$$

$$c_z = \frac{Z}{qS} \text{ — коэффициент поперечной силы}$$

$$c_{x_a} = \frac{X_a}{qS} \text{ — коэффициент лобового сопротивления}$$

$$c_{y_a} = \frac{Y_a}{qS} \text{ — коэффициент подъемной силы}$$

$$c_{z_a} = \frac{Z_a}{qS} \text{ — коэффициент боковой силы}$$

M — момент аэродинамических сил, действующих на крыло, центром приведения которых является начало O

M_x — момент крена (составляющая момента \vec{M} по оси OZ связанной системы координат)

M_y — момент рыскания (составляющая момента \vec{M} по оси OY связанной системы координат)

M_z — момент тангажа (составляющая момента \vec{M} по оси OZ связанной системы координат).

$$m_x = \frac{M_x}{qSl} \text{ — коэффициент момента крена}$$

$$m_y = \frac{M_y}{qSl} \text{ — коэффициент момента рыскания}$$

$$m_z = \frac{M_z}{qSb} \text{ — коэффициент момента тангажа}$$

$$c_y^a = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \text{ — частная производная коэффициента подъемной силы по углу атаки}$$

$$K = \frac{c_{y_a}}{c_{x_a}} \text{ — аэродинамическое качество крыла}$$

Параметры напряженно-деформированного состояния крыла

- $u_i; u_3 = w$ ($i=1,2$) — компоненты перемещения точек срединной поверхности крыла — поверхности, делящей хорды крыла пополам
- ϵ_{ij} ($i, j=1,2$) — компоненты тангенциальной деформации срединной поверхности крыла
- κ_{ij} — компоненты изгибной деформации срединной поверхности крыла
- v_i — компоненты деформации, характеризующие искривление координатных линий в срединной плоскости крыла
- N_{ik}, M_{ik} ($i=1, 2; k=1, 2, 3$) — усилия в сечениях эквивалентной пластины
- N_{ii}'' — продольные силы в планах решетки
- M_{ii}'' — изгибающие моменты, действующие в плоскостях планов решетки
- Q_s, Q_x, Q_n — продольная и поперечные силы в сечениях окаймляющего плана
- L_s, L_x, L_n — крутящий и изгибающий моменты в сечениях окаймляющего плана
- q_k — компоненты распределенной нагрузки, отнесенной к срединной поверхности крыла
- E, G, μ — упругие константы материала крыла (модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона)
- F, I, J, J_k — геометрические характеристики сечения планов решетки: соответственно площадь, момент инерции при изгибе из плоскости плана, момент инерции при изгибе в плоскости плана, момент инерции при кручении
- $\frac{1}{\eta} = \frac{6H^2}{t^2}$ — параметр густоты решетки
- ζ_1, ζ_2 — малые параметры, характеризующие жесткость решетки при деформации, сопровождающейся изгибом планов из своей плоскости
- E_s, D_s, B_s — приведенные жесткости эквивалентной пластины
- E_s, B_s, D_s, C_s, G_s — жесткости окаймляющего плана панели соответственно при растяжении, изгибе из плоскости плана, изгибе в плоскости плана, кручении, сдвиге в плоскости панели

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга посвящена одному из необычных типов несущих поверхностей — решетчатым крыльям, которые позволяют подбором многочисленных геометрических параметров существенно влиять на их аэродинамические характеристики.

Решетчатое крыло представляет собой несущую пространственную систему, состоящую из большого числа профилированных или плоских планов, соединенных между собой боковинами.

Будем рассматривать два основных вида решетчатых крыльев — рамное крыло, с планами, перпендикулярными боковинам и параллельными между собой (рис. В.1), и сотовое крыло с диагональным набором планов (рис. В.2). Наибольшее распространение получило крыло с квадратными сотами, когда диагональный набор планов составляет с боковинами угол 45° .

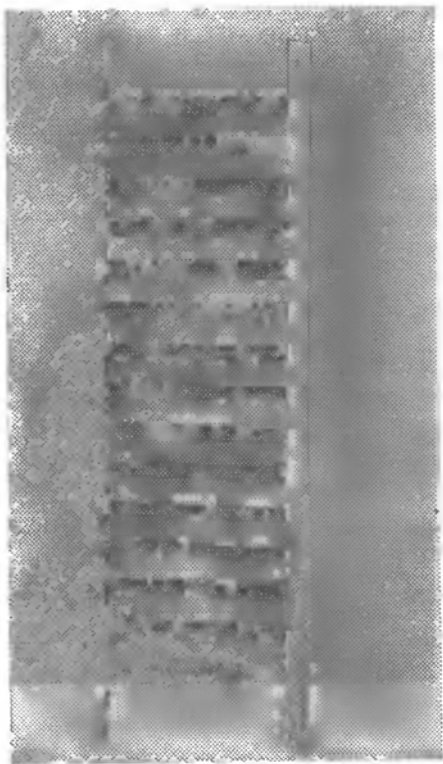


Рис. В.1. Рамное решетчатое крыло

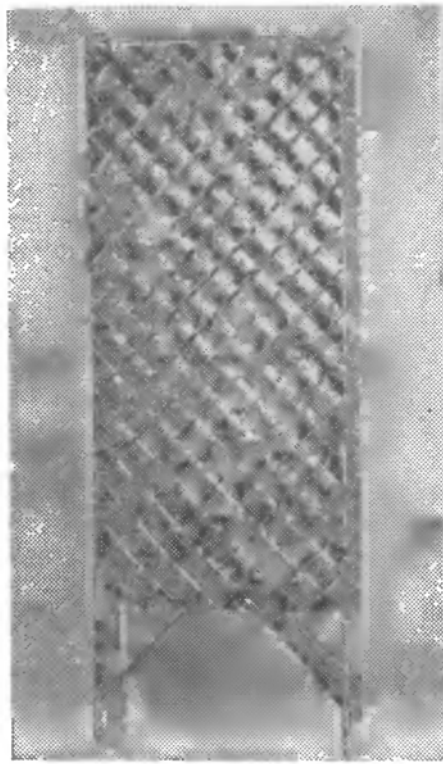


Рис. В.2. Сотовое решетчатое крыло

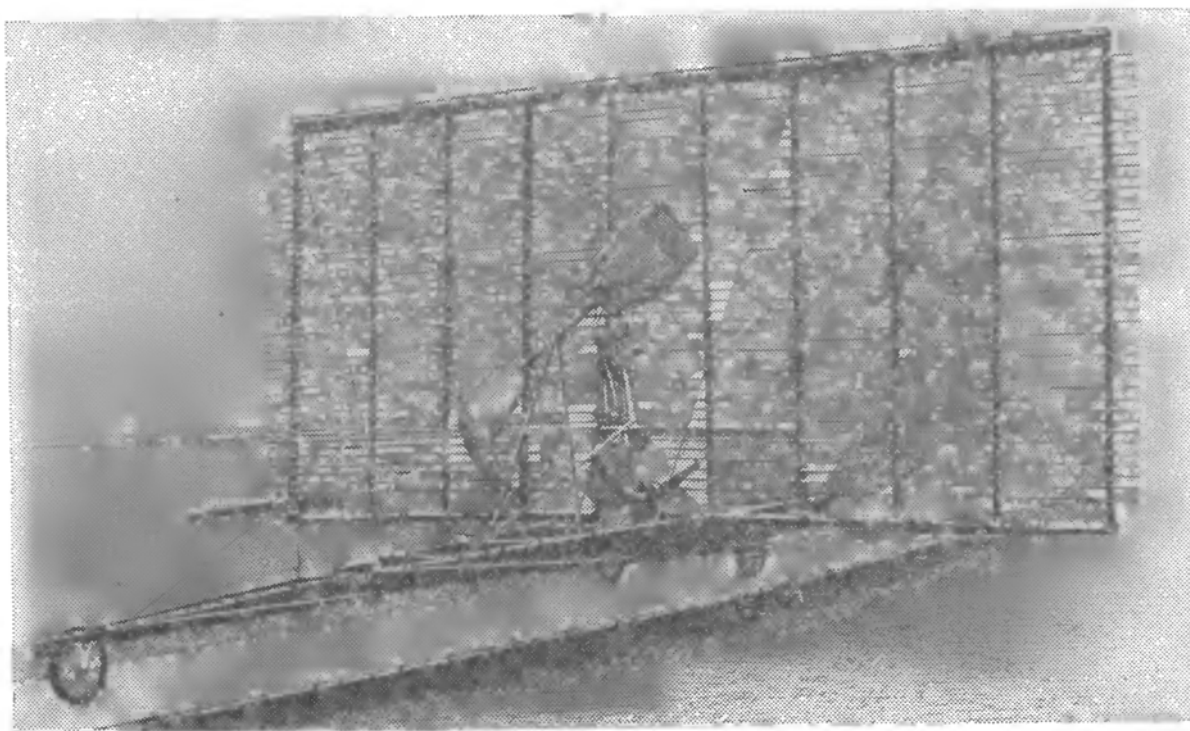


Рис. В.3. Самолет Филлипса

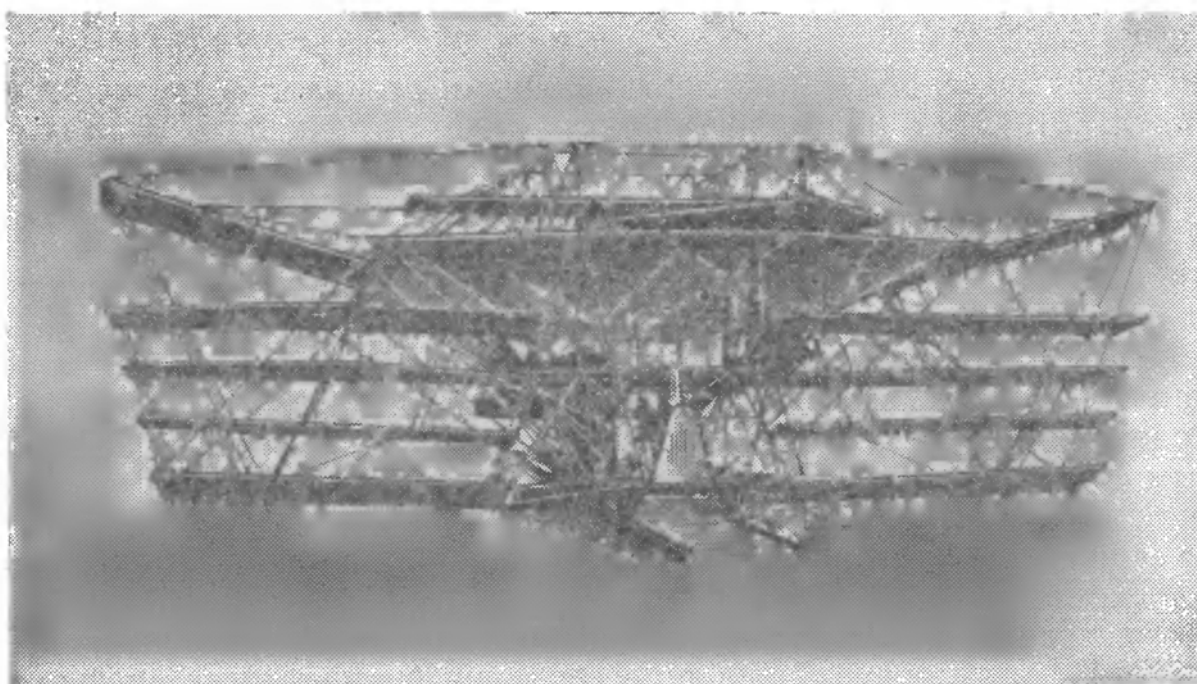


Рис. В.4. Самолет Максима

Решетчатые крылья не являются новым типом несущих систем. Так, еще в 1883 г. английский инженер Г. Филлипс построил летающую машину, у которой поддерживающие планы представляли собой вертикальную решетку с большим числом легких деревян-



Рис. В.5. Космический корабль «Союз» и ракета-носитель с решетчатыми стабилизаторами

ных пластин, скрепленных вертикальными стойками и расчалками (рис. В.3). Суммарная площадь этих пластин равнялась 13 м^2 . Испытания показали, что подъемной силы было достаточно, чтобы поднять аппарат в воздух, но он был совершенно неустойчив. В том же году Х. Максим сделал свою летательную машину многопланного типа (рис. В.4). В более позднее время полипланные несущие системы применялись многими конструкторами для создания летательных аппаратов. Уже в 20-е годы комиссия ВСНХ, возглавляемая Н. Е. Жуковским, занималась проектированием тяжелого самолета по схеме триплана с высокой коробкой крыльев и бипланым оперением. Этот самолет вошел в историю авиации под названием КОМТА, по имени комиссии, его создавшей. Самолет летал, но серийно не изготовлялся. Развитие авиации пошло по монопланной схеме.

Исследования по аэродинамике решетчатых крыльев начались в связи с интересом к проблеме создания системы, имеющей при заданных габаритных размерах наилучшие несущие свойства. Этой проблемой занимались в ЦАГИ и ВВИА имени проф. Н. Е. Жуковского. В академии были разработаны для дозвуковых скоростей полета весьма компактные, легкие и простые по конструкции складывающиеся решетчатые крылья, раскрытие которых осуществлялось только под действием аэродинамических сил, возникающих в полете.

В дальнейшем было доказано, что и на сверхзвуковых скоростях решетки вполне работоспособны, обладают важными аэродинамическими свойствами и иногда имеют преимущества перед монопланными крыльями.

Однако одних аэродинамических исследований было недостаточно для практической реализации решетчатых крыльев в реальных конструкциях. Поэтому многие годы в ВВИА им. Н. Е. Жуковского велись комплексные теоретические и экспериментальные исследования по аэродинамике, прочности, конструкции, массе и технологии изготовления решетчатых крыльев, а также по анализу перспектив их применения на различных летательных аппаратах. Работы проводились в тесном содружестве с рядом НИИ и КБ и получили признание. Итоги этой многолетней работы и обобщены в данной книге.

В настоящее время решетчатые крылья достаточно широко применяются в различных областях техники. В частности, они установлены в качестве стабилизаторов в системе аварийного спасения космического корабля «Союз» (рис. В.5), а также успешно применяются на судах на подводных крыльях.

Часть 1

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. АЭРОДИНАМИКА

Решетчатые крылья обладают целым рядом взаимосвязанных особенностей. Они завоевали право на жизнь именно благодаря сочетанию различных положительных свойств: более широким возможностям для получения необходимых аэродинамических характеристик, чем на монопланых крыльях, более высокой весовой отдачей, удобству складывания. Таким образом, здесь тесно переплелись вопросы аэродинамики, прочности, конструкции и технологии производства. Поэтому настоящая книга содержит материалы, относящиеся ко всем сторонам данной проблемы.

Аэродинамика решетчатых крыльев обладает целым рядом специфических особенностей. Это потребовало проведения большого цикла теоретических и экспериментальных исследований на дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых скоростях. В первой части настоящей книги подводятся итоги многолетних работ авторов, которые были начаты еще в 50-е годы и ранее публиковались лишь частично.

Аэродинамикой решетчатых крыльев также занимались В. С. Демидов, Л. Н. Кравченко, В. Н. Сучков, Г. И. Таганов, В. Г. Табачников, Б. И. Ульянов, В. Ф. Шушпанов и др.

Кроме того, в книге приведены и новые теоретические данные по аэродинамике решетчатых крыльев, основанные на схеме несущей поверхности, полученные В. А. Подобедовым и С. Н. Морозовым.

С точки зрения аэродинамики решетчатое крыло обладает двумя основными особенностями.

Во-первых, это несущая система с пространственно распределенной системой свободных вихрей. При установившемся режиме они сходят главным образом с боковин крыла, образуя две параллельные вихревые стенки. При неустановившемся движении наряду с указанными появляются и поперечные свободные вихри чисто нестационарной природы, сходящие с задних кромок всех планов.

Во-вторых, оно представляет собой полипланную систему, работающую в условиях сильного взаимного влияния планов друг на друга. Наличие продольного и поперечного наборов планов приводит также к существенно более равномерному течению, чем на монопланых крыльях. При достаточно больших сверхзвуковых ско-

ростях практически все крыло работает в условиях плоскопараллельного течения.

Первая особенность позволила построить приближенную стационарную теорию при дозвуковых скоростях, основанную на схеме несущей нити. Наличие боковых «вихревых стенок», сходящих с боковин, создает поле скосов, обладающее большой равномерностью в районе планов крыла. Поэтому такие классические гипотезы схемы несущей нити, как истинный угол атаки, здесь работают лучше, чем в теории моноплановых крыльев.

Однако практика может потребовать использование решетчатых крыльев сложной формы (с криволинейными обводами, вырезами, «наростами» и т. д.). В этих случаях, а также при изучении нестационарных аэродинамических характеристик точность указанной схемы недостаточна. Здесь необходимо использовать схему несущей поверхности.

Вторая особенность позволила теоретически изучить аэродинамику решетчатых крыльев на трансзвуковых скоростях. Используя то, что решетчатые крылья состоят из большого числа ячеек, удалось, рассматривая течение как квазиодномерное, построить метод расчета характеристик и в такой сложной области течения, как трансзвуковые числа Маха.

При достаточно больших сверхзвуковых скоростях, когда взаимное влияние между планами отсутствует, каждый план решетчатого крыла работает в условиях плоскопараллельного потока. Поэтому в данном случае возникает только одна новая задача — для каждой решетки уметь определять такие числа M_∞ и углы атаки α , при которых начинается взаимное влияние между планами. На умеренных сверхзвуковых скоростях аэродинамические характеристики решетчатых крыльев находятся с учетом взаимного влияния между планами.

Достоверность разработанных расчетных методов проверяется и подтверждается целой серией систематических экспериментальных исследований, проводившихся авторами в широком диапазоне числа Маха.

Наличие большого числа планов, образующих как бы направляющие каналы, привело к тому, что решетчатые крылья сохраняют работоспособность при всех числах Маха на больших углах атаки. Многочисленные экспериментальные исследования дали возможность тщательно изучить и эту важную область аэродинамики.

Систематические теоретические и экспериментальные исследования аэродинамики решетчатых крыльев в довольно широком диапазоне чисел Маха ($0 < M_\infty \leq 5$) позволили получить почти исчерпывающий материал для практического применения.

Глава 1

Общие сведения

1.1. Решетчатое крыло и его геометрические параметры

Схематически решетчатое крыло можно представить как набор тонких планов, собранных в окантовывающую их коробку (рис. 1.1). Эти планы могут быть ориентированы в коробке произвольно, однако основными вариантами являются два указанных на рис. 1.1. Первый назовем рамным решетчатым крылом, а второй — сотовым.

Основными геометрическими параметрами решетчатого крыла являются хорда крыла b — расстояние между наиболее удаленными друг от друга точками профиля плана, размах крыла l — расстояние между крайними боковинами решетчатого крыла и высота H — расстояние между верхним и нижним планами, замеренное по оси крыла. Осью крыла назовем любую прямую, проходящую через соответствующие точки несущих планов и половину размаха и хорды верхнего и нижнего планов. За геометрический центр крыла примем точку с координатами $H/2$; $l/2$; $b/2$. К основным геометрическим параметрам относится также шаг крыла t — расстояние между соответственными точками двух соседних планов. Ему соответствует безразмерный геометрический параметр — относительный шаг крыла

$$\bar{t} = t/b.$$

Количество планов и боковин определяется в процессе конструирования в зависимости от того, в каком направлении нужно реализовать наибольшие несущие свойства. Шаг боковин обозначим t_z и

соответственно относительный шаг боковин $\bar{t}_z = t_z/b$.

Угол между осью крыла и перпендикуляром к скорости невозмущенного потока обозначим δ , а угол установки планов, образуемый хордой плана с перпендикуляром к оси крыла, α_0 (рис. 1.2).

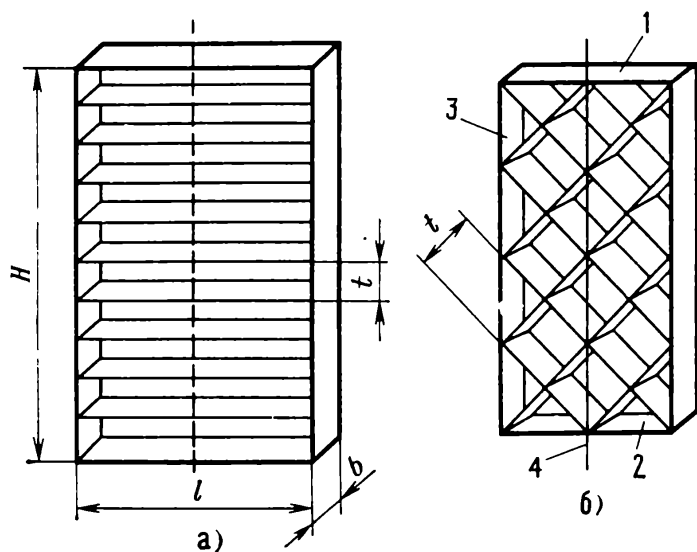


Рис. 1.1. Схема двух типов решетчатых крыльев:

а — рамное; б — сотовое: 1 — верхний план; 2 — нижний план; 3 — боковая стенка; 4 — ось крыла

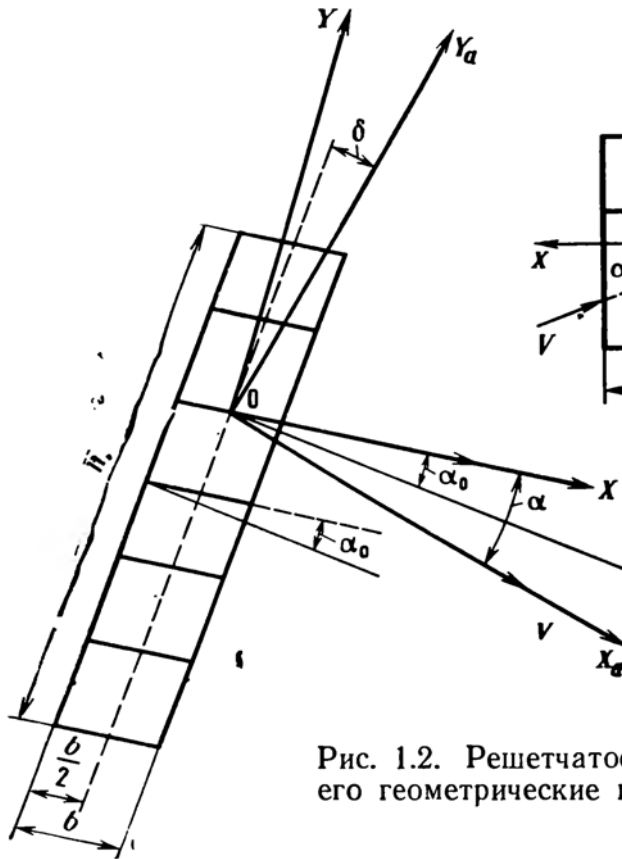
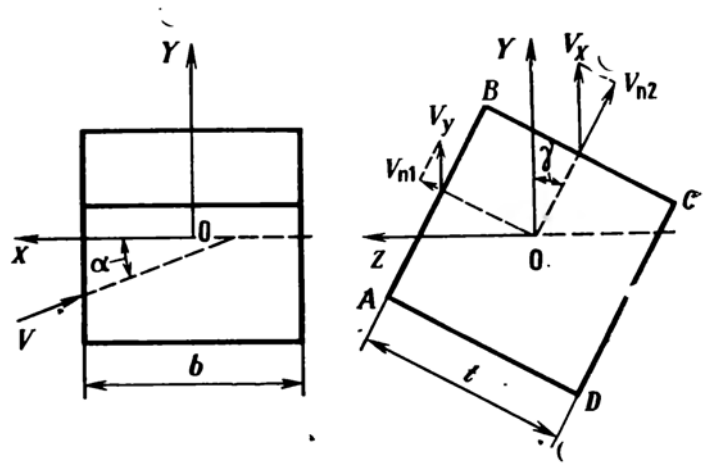


Рис. 1.2. Решетчатое крыло и его геометрические параметры


 Рис. 1.3. Схема, поясняющая свойства независимости нормальной силы Y от угла α

Геометрический угол атаки решетчатого крыла определяется углом между хордой плана и проекцией вектора скорости невозмущенного потока на плоскость симметрии крыла. Тогда угол атаки может быть выражен через углы α_0 и δ :

$$\alpha = \alpha_0 + \delta. \quad (1.1)$$

Внешне рамные и сотовые решетчатые крылья заметно отличаются друг от друга. Однако их несущие свойства при одинаковом размере и одинаковом относительном шаге \bar{l} практически отличаться не будут.

В решетчатом крыле имеется большое количество ячеек, которые в среднем работают в одинаковых условиях. Каждую ячейку сотового крыла можно рассматривать как коробчатое квадратное крыло, одна из сторон которого расположена под углом γ к плоскости симметрии крыла (рис. 1.3). Поясним, почему у такого крыла его нормальная сила Y не будет зависеть от угла γ .

Угол атаки сторон AB и DC

$$\alpha_{n1} = \frac{V_{n1}}{V} = \alpha \sin \gamma,$$

а угол атаки сторон AD и BC

$$\alpha_{n2} = \frac{V_{n2}}{V} = \alpha \cos \gamma.$$

С учетом этих соотношений и применением гипотезы плоских сечений нормальная сила коробки

$$Y = (c_{y\alpha}^{\alpha_{n1}} \sin \gamma + c_{y\alpha}^{\alpha_{n2}} \cos \gamma) q_{\infty} t b = c_{y\alpha}^{\alpha} q_{\infty} t b. \quad (1.2)$$

Здесь c_y^a — производная коэффициента нормальной силы по углу атаки прямоугольного крыла со сторонами t и b : $q_\infty = \rho V^2/2$ — скоростной напор.

Таким образом, нормальная сила квадратного коробчатого крыла с точностью, которую дает гипотеза плоских сечений, остается постоянной при повороте его относительно продольной оси. Отсюда нетрудно заключить, что соответствующие сотовое и рамное решетчатые крылья имеют одинаковое несущее свойство. Это будет далее обосновано более строго. Многочисленные опыты, результаты которых приводятся ниже, показали, что такое свойство имеет место не только на малых, но и на больших углах атаки.

На основании изложенного можно записать связь между геометрическими параметрами эквивалентных сотовых и рамных крыльев следующим образом:

$$H_c = H_p, \quad l_c = l_p, \quad b_c = b_p, \quad t_c = t_p, \quad n_c = n_p = H/t + 1. \quad (1.3)$$

Несущая площадь решетчатого крыла, составленного из прямоугольных планов, которая создает подъемную силу, определяется соотношением

$$S = nlb, \quad (1.4)$$

где число планов n может быть определено по следующей формуле:

$$n = \frac{H}{t} + 1. \quad (1.5)$$

Площадь боковой поверхности крыла, создающая боковую силу, при боковинах прямоугольной формы

$$S_z = n_z H b, \quad (1.6)$$

где число боковин n_z определяется через шаг боковин t_z :

$$n_z = \frac{l}{t_z} + 1. \quad (1.7)$$

Форма в плане боковин и планов крыла может быть разнообразной. Например, при компоновке крыльев на цилиндрическом корпусе целесообразно применять планы, образованные дугами окружности с прямоугольными торцами. В этом случае вводится дополнительный геометрический параметр, характеризующий изогнутость крыла $\bar{f} = f/b$.

Обычно у решетчатого крыла шаг планов и боковин одинаков, т. е. $\bar{t} = \bar{t}_z$. Тогда основными безразмерными параметрами крыла будут

$$H/l; \quad \bar{t}; \quad n. \quad (1.8)$$

1.2. Система координат

Будем пользоваться в основном двумя системами координат: $OXYZ$ — системой, связанной с несущей поверхностью, и $OX_aY_aZ_a$ — поточной. Ось OX направим вдоль хорды плана крыла, ось OY — расположим в плоскости симметрии крыла, а ось OZ —

вдоль размаха крыла так, чтобы получилась правая прямоугольная система координат (рис. 1.4). В скоростной системе координат ось OX_a совпадает с направлением вектора скорости полета, ось OY_a — лежит в плоскости симметрии крыла, а ось OZ_a — вправо по размаху.

Движение крыла как твердого тела в данный момент времени будет полностью определяться вектором скорости центра или любой другой точки и вектором угловой скорости вращения относительно этой точки (центра).

Пусть \vec{V} — вектор абсолютной скорости подвижного начала O и $\vec{\Omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости крыла.

Векторные кинематические характеристики абсолютного движения крыла будем проектировать на подвижные оси связанной системы координат:

$$\vec{V} = iV_x + jV_y + kV_z, \quad \vec{\Omega} = i\Omega_x + j\Omega_y + k\Omega_z. \quad (1.9)$$

При рассмотрении неустановившегося движения решетчатого крыла, когда основным является поступательное перемещение с постоянной скоростью, кинематические параметры вводятся в следующем виде:

$$q_1 = \alpha; \quad q_2 = \beta; \quad q_3 = \omega_x = \frac{\Omega_x b}{V}; \quad q_4 = \omega_y = \frac{\Omega_y b}{V}; \quad q_5 = \omega_z = \frac{\Omega_z b}{V}. \quad (1.10)$$

Здесь α и β углы атаки и скольжения; b — характерный размер; $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ — проекции абсолютной угловой скорости решетчатого крыла на оси связанной системы координат.

Производные кинематических параметров по времени определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = \dot{\alpha} &= \frac{d\alpha}{dt} \frac{b}{V}; & \dot{q}_2 = \dot{\beta} &= \frac{d\beta}{dt} \frac{b}{V}; \\ \dot{q}_3 = \dot{\omega}_x &= \frac{d\omega_x}{dt} \frac{b}{V}; & \dot{q}_4 = \dot{\omega}_y &= \frac{d\omega_y}{dt} \frac{b}{V}; \\ &= \frac{d\omega_y}{dt} \frac{b}{V}; & & \\ \dot{q}_5 = \dot{\omega}_z &= \frac{d\omega_z}{dt} \frac{b}{V}; & \tau &= \frac{tb}{V}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

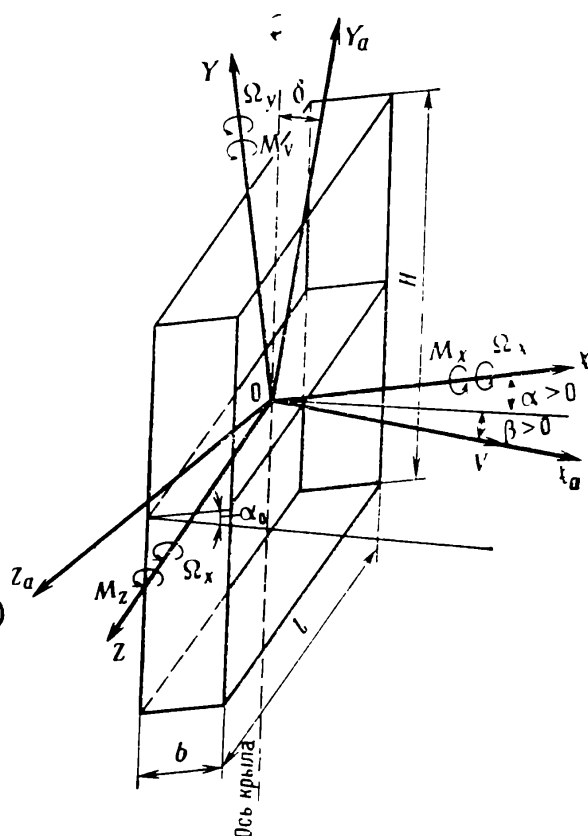


Рис. 1.4. Схема осей координат:

$OXYZ$ — связанная; $OX_aY_aZ_a$ — скоростная

Момент аэродинамических сил, действующий на крыло, центром приведения которых является начало O , спроектируем на те же оси:

$$\vec{M} = \vec{i}M_x + \vec{j}M_y + \vec{k}M_z. \quad (1.12)$$

Проекцию M_x называют моментом крена или поперечным моментом, M_y — моментом рыскания, M_z — моментом тангажа, или продольным моментом. Положительные направления угловых скоростей вращающегося крыла и аэродинамических моментов соответствуют правилу правого винта и показаны на рис. 1.4. Положение крыла в потоке принято характеризовать углами атаки α и скольжения β , также указанными на рис. 1.4.

Результирующая аэродинамическая сила \vec{R} характеризует реакцию среды на движущееся крыло. Спроектируем вектор силы на оси связанной системы координат:

$$\vec{R} = -\vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z. \quad (1.13)$$

Величину X называют продольной, Y — нормальной, Z — поперечной силами.

Проектируя результирующую аэродинамических сил на оси скоростной системы координат, получим

$$\vec{R} = -\vec{i}X_a + \vec{j}Y_a + \vec{k}Z_a. \quad (1.14)$$

Здесь проекция X_a — сила лобового сопротивления, Y_a — подъемная сила, Z_a — боковая сила.

Компоненты сил в скоростной системе координат выражаются через проекции на связанные оси по известным формулам:

$$\begin{aligned} X_a &= X \cos \alpha \cos \beta + Y \sin \alpha \sin \beta - Z \sin \beta; \\ Y_a &= Y \cos \alpha - X \sin \alpha; \\ Z_a &= X \cos \alpha \sin \beta + Y \sin \alpha \sin \beta + Z \cos \beta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Частным случаем является движение крыла без скольжения с малым углом атаки. В этих случаях зависимость (1.15) примет вид

$$\begin{aligned} X_a &= X + Y_a; \\ Y_a &= Y; \\ Z_a &= Z. \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.3. Аэродинамические коэффициенты и физическая картина обтекания решетчатых крыльев потоком трансзвуковых и сверхзвуковых скоростей

При определении коэффициентов аэродинамических сил и моментов будем относить силы к характерной площади S , определяемой соотношением (1.4) или (1.6), а моменты еще и к характерному линейному размеру L и b .

Иногда будем пользоваться другими характерными площадями и линейными размерами, о чем будет сказано ниже.

Коэффициенты подъемной силы, лобового сопротивления и боковой силы будут соответственно

$$c_{ya} = \frac{Y_a}{q_{\infty} S}; \quad c_{xa} = \frac{X_a}{q_{\infty} S}; \quad c_{za} = \frac{Z_a}{q_{\infty} S}, \quad (1.17)$$

скоростной напор

$$q_{\infty} = \frac{\rho V^2}{2},$$

коэффициенты нормальной силы, продольной силы и поперечной силы

$$c_y = \frac{Y}{q_{\infty} S}; \quad c_x = \frac{X}{q_{\infty} S}; \quad c_z = \frac{Z}{q_{\infty} S}. \quad (1.18)$$

Для момента крена M_x за характерный размер будем брать диагональ крыла $L = \sqrt{H^2 + l^2}$, а для моментов рыскания M_y и тангажа M_z — хорду b , тогда коэффициенты моментов запишутся так:

$$m_x = \frac{M_x}{q_{\infty} SL}; \quad m_y = \frac{M_y}{q_{\infty} Sb}; \quad m_z = \frac{M_z}{q_{\infty} Sb}. \quad (1.19)$$

Коэффициент c_y , отнесенный к несущей площади S , не является величиной, характеризующей несущие свойства крыла с заданными габаритными размерами H , l , b . Действительно, уменьшение относительного шага \bar{l} при данном габаритном размере приводит к уменьшению коэффициента c_y , но это еще не значит, что будут падать несущие свойства крыла. В данном случае число планов n и площадь S возрастают, и поэтому произведение $c_y S$, которое определяет несущие свойства крыла, тоже может возрастать.

Для обеспечения наибольших несущих свойств и наименьшего сопротивления несущих поверхностей последние обычно стараются сделать такими, чтобы обеспечить их плавное (безотрывное) обтекание. У решетчатых крыльев (при $\bar{l} < 1$) условия для плавного обтекания лучше, чем у изолированного профиля. Соседние планы содействуют обеспечению плавного обтекания, направляя

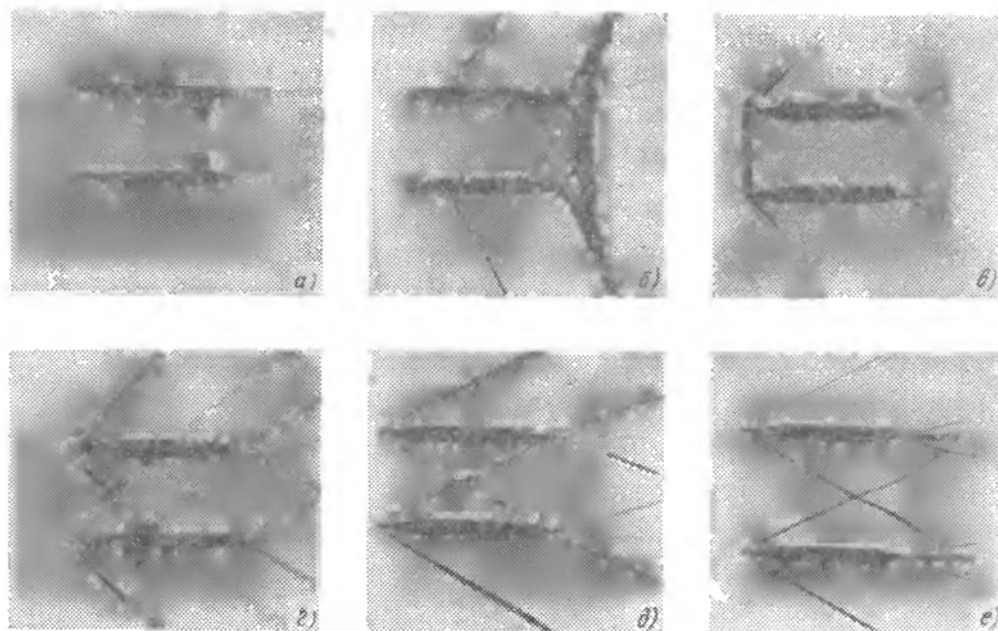


Рис. 1.5. Спектры обтекания двух профилей дозвуковым и сверхзвуковым потоками:

$a - M_{\infty} = M_{кр1}$; $b - M_{кр1} < M_{\infty} < M_{кр2}$; $в - M_{\infty} = M_{кр2}$; $г - M_{кр2} < M_{\infty} < M_{кр3}$; $д - M_{\infty} = M_{кр3}$; $е - M_{\infty} > M_{кр3}$

соответствующим образом набегающий поток. Взаимодействие планов между собой вызывает затягивание плавного обтекания на большие углы атаки. Это явление приводит к тому, что критические углы атаки решетчатых крыльев существенно превышают критические углы атаки профиля (монопланного крыла). Кроме того, наличие боковин препятствует концевым перетеканиям и приближает поток к плоскопараллельному.

Рассмотрим физическую картину обтекания плоским трансзвуковым потоком двух профилей, расположенных на расстоянии l друг от друга под нулевым углом атаки. В общем случае характер обтекания решетчатого крыла будет зависеть от числа M_{∞} невозмущенного потока относительного шага \bar{l} , угла атаки, формы профиля планов и относительной толщины профиля. Ниже будут рассмотрены все типичные режимы обтекания решетки.

При обтекании околосзвуковым потоком газа, если скорость невозмущенного потока дозвуковая, в некотором сечении между профилями местная скорость потока будет равна скорости звука. Назовем скорость невозмущенного потока V_1 , при которой в самом узком сечении достигается скорость звука, первой критической скоростью решетчатого крыла, а соответствующее число $M_{\infty} = M_{кр1}$ — первым критическим числом Маха. Этот режим обтекания показан на рис. 1.5, *a*. Он характеризуется началом появления скачков уплотнения в наиболее узком сечении, которые приводят к существенному уменьшению несущих свойств решетчатого крыла и увеличению его сопротивления.

Дальнейшее увеличение скорости невозмущенного потока приведет к появлению зоны сверхзвуковых скоростей в расширяющейся части канала и целой сетки скачков уплотнения. На рис. 1.5, б показано обтекание планов, когда $M_\infty > M_{кр1}$.

При переходе на малые сверхзвуковые скорости на некотором расстоянии впереди крыла образуется прямой скачок уплотнения, который при возрастании скорости будет приближаться к передним кромкам планов крыла и при некоторой скорости V_2 и числе $M_\infty = M_{кр2}$ расположится на передних кромках планов решетчатого крыла. Это число $M_{кр2}$ назовем вторым критическим числом Маха, а скорость невозмущенного потока V_2 — соответственно второй критической скоростью. При этом резко возрастает сопротивление решетчатого крыла. Указанная картина обтекания двух планов представлена на рис. 1.5, в. При данном режиме обтекания перед всем решетчатым крылом будет наблюдаться прямой скачок уплотнения, за которым скорость потока будет дозвуковой. У задних кромок скорость снова может стать сверхзвуковой, и тогда на задних кромках планов образуются хвостовые ударные волны.

Когда скорость невозмущенного потока станет выше второй критической, на передних кромках планов образуются косые скачки уплотнения, многократно или однократно отражающиеся от соседних планов. Такой режим обтекания показан на рис. 1.5, г, здесь $M_\infty > M_{кр2}$. При всех рассмотренных режимах обтекания имеет место взаимное влияние между планами, которое будет сказываться на несущих свойствах крыла. Но наступит такой момент, когда ударные волны от передней кромки одного плана не будут падать на другой и взаимное влияние между планами прекратится. Каждый план будет обтекаться как изолированный. Назовем скорость невозмущенного потока V_3 , при которой прекращается взаимное влияние, третьей критической скоростью, а соответствующее ей число $M_\infty = M_{кр3}$ — третьим критическим числом Маха. Этот режим обтекания показан на рис. 1.5, д.

Дальнейший рост скорости, когда $M_\infty > M_{кр3}$, не будет качественно изменять картину обтекания решетчатого крыла (см. рис. 1.5, е).

При решении практических задач представляет большой интерес определение условий, при которых отсутствует взаимное влияние между планами. Ниже будет получена зависимость между числом M_∞ , углом атаки и относительным шагом решетчатого крыла для определения этих условий.

1.4. Общие сведения о работе конструкции и весовых характеристиках

С точки зрения строительной механики решетчатое крыло представляет собой короткую консоль большой строительной высоты, соизмеримой с размахом крыла и значительно превышающей хорду. При таком соотношении размеров максимальные рас-

четные нагрузки действуют в плоскости наибольшей жесткости крыла, что выгодно отличает решетчатое крыло от традиционного монопланного. В конструктивном отношении решетчатое крыло можно рассматривать как окаймленную по краям полипланную панель. При этом продольные окаймляющие планы (боковины) 1—2, 4—3 (рис. 1.6) решетчатого крыла выполняют роль поясов лонжеронов монопланного крыла, а планы — роль стенки лонжерона. Помимо перечисленных силовых элементов, крыло имеет корневой (1—4) и концевой (2—3) планы и узлы крепления крыла к летательному аппарату, расположенные обычно в местах пересечения корневого плана с боковинами.

Решетка ортогональных планов, вообще говоря, может быть произвольно ориентирована по отношению к прямоугольному контуру панели, однако основными вариантами являются два: когда направление осей решетки совпадает с краями панели (рамное крыло) и когда оси планов наклонены под углом 45° к окаймлениям крыла (сотовое крыло). В последнем случае крыло представляет собой по существу тонкостенную ферму, т. е. весьма легкую и жесткую конструкцию.

В связи с тем, что жесткость на сдвиг панели с диагональной решеткой планов значительно превышает жесткость рамной панели, решетчатое крыло второго типа существенно выгоднее рамного крыла.

Особенностью решетчатого крыла с диагональным набором планов как силовой конструкции, способной эффективно воспринимать аэродинамическую нагрузку, является принципиальное преимущество этого типа крыла перед монопланным по жесткостным и весовым параметрам. Это объясняется, в первую очередь, рациональным распределением и ориентацией жесткостей крыла по отношению к действующим на него нагрузкам. Так, например, наибольшая из аэродинамических сил сила Y вызывает изгиб в плоскости наибольшей жесткости решетчатого крыла YZ , тогда как в случае монопланного крыла эта сила действует в плоскости наименьшей жесткости. Сопоставление решетчатого крыла с монопланным при одинаковых размахе и несущей площади показывает, что прочность решетчатого крыла при изгибе силой Y без учета лобового сопротивления превышает прочность монопланного крыла той же массы на величину порядка H/t , а жесткость — примерно на величину H^2/t^2 .

Другой характерной особенностью решетчатого крыла, определяющей его высокую весовую эффективность, является тот факт,

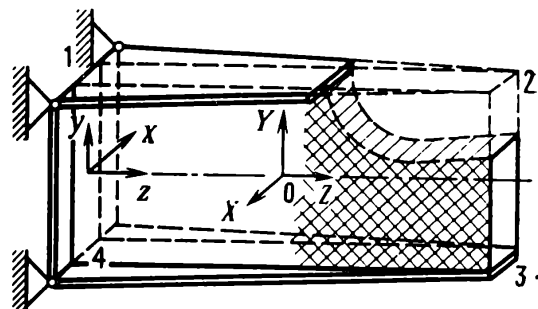


Рис. 1.6. Решетчатое крыло как полипланная панель

что в отличие от монопланного, силовой набор которого расположен под обшивкой и в создании аэродинамических сил не участвует, в решетчатом крыле силовой набор находится в потоке, и, следовательно, составляет несущую площадь крыла. Иными словами, все элементы решетчатого крыла выполняют двойную роль — и силовой конструкции, и аэродинамической поверхности.

Для эффективного восприятия силы лобового сопротивления боковины могут выполняться с переменной хордой по размаху (высоте), что обеспечивает достаточную жесткость и прочность крыла при изгибе в плоскости XZ .

Наконец, на решетчатое крыло может действовать значительная по величине сила Z , которая вызывает сложное напряженное состояние, причем в этом случае крыло оказывается также весьма жесткой и прочной конструкцией.

Из изложенного следует, что при одинаковой прочности с монопланом решетчатое крыло намного легче и существенно жестче последнего. Отметим, что решетчатое крыло может выполняться с полыми силовыми элементами (боковинами и планами). Такое конструктивное решение, обеспечивая достаточную местную жесткость конструкции, дает дополнительный выигрыш в массе и является особенно целесообразным для крупногабаритных крыльев.

1.5. Особенности конструкции и технология изготовления

Решетчатые крылья могут воспринимать значительные нагрузки, что предполагает достаточную жесткость и прочность конструктивных элементов при их малой толщине s , высокие механические свойства соединений в конструкции при малой массе.

Решетчатые крылья состоят из однотипных элементов — тонких планов и окантовывающих пластин — и представляют собой сравнительно малогабаритные конструкции.

Особенностью решетчатых крыльев является малая металлоемкость, характеризуемая отношением объема металла в конструкции V_m к объему изделия в габаритных размерах $V_{изд}$. Для оценки значения коэффициента металлоемкости k_m по формуле

$$k_m = \frac{V_m}{V_{изд}} \quad (1.20)$$

примем $s = 0,02 b$; $t = 0,5 b$; $H = 2,5 b$; $l = 5 b$ и $b = 100$. Тогда согласно (1.20) коэффициент металлоемкости составит всего лишь 6%. В современном авиа- и ракетостроении только полые трехслойные панели с сотовым заполнителем обладают таким низким значением k_m .

Решетчатые крылья отличаются тонкостенностью, а с учетом малости коэффициента металлоемкости, еще и ажурностью. Ввиду

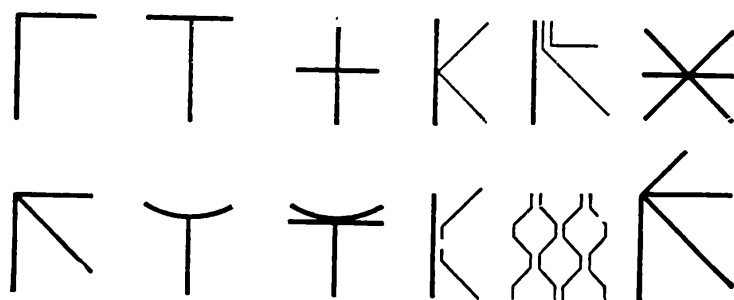


Рис. 1.7. Типовые соединения элементов решетчатых крыльев

довольно большой густоты ортогональной решетки подходы к местам стыка отдельных элементов затруднены.

Наряду с этими отличиями следует отметить разную толщину элементов крыла, особенно в местах сочленения планов с окантовкой. При толщине планов 0,5 мм толщина окантовки может быть равной 10 мм, в этом случае различная толщина стенок конструкции будет выражаться отношением 1:20. Такое отличие в толщинах соединяемых элементов сравнительно редко встречается в выполненных узлах авиационной и ракетной техники.

На рис. 1.7 приведены наиболее распространенные типовые соединения элементов решетчатых крыльев. Здесь также показано, что возможно соединение из гофрированных пластин, собранных в сотовую конструкцию.

Шероховатость поверхностей элементов решеток исходя из требований аэродинамики и вибропрочности, должна быть от $Rz\ 40$ —10 до $Ra\ 0,32$ —2,5 и даже меньше. Требования точности изготовления элементов конструкции регламентируются стандартами единой системы допусков и посадок ГОСТ 25347—82, 25346—82 и 25348—82; в соответствии с этими документами и опытом создания решетчатых крыльев точность обработки отдельных пластин рекомендуется соблюдать в пределах квалитетов от $IT5$ до $IT10$, остальные геометрические размеры — в пределах $IT5$ — $IT12$.

Решетчатые крылья являются технологичными изделиями, хорошо приспособленными к условиям серийного производства при экономном использовании конструкционных материалов. Опыт показывает, что при изготовлении решетчатых крыльев достигается высокий уровень коэффициента использования материала $K_{и.м.}$, который лежит в пределах от 0,5 до 0,9. Этот коэффициент вычисляется по формуле

$$K_{и.м.} = \frac{G}{N}, \quad (1.21)$$

где G — масса изделия; N — норма расхода материала.

Рассматривая решетчатые крылья как совокупность тонких пластин, ориентированных определенным образом между собой, можно прийти к выводу, что наиболее рациональной формой заготовки для изготовления этих изделий является листовая материал.

Это положение не может не повлиять на выбор марки конструкционного материала. Поскольку не все сплавы, даже из числа деформируемых, могут прокатываться в листы и фольгу, то не лишенным смысла может оказаться такое решение, когда будет отдано предпочтение менее прочному, но более технологичному материалу, поставленному в листах различной толщины, а также в виде лент и фольги. Поэтому в выполненных конструкциях решетчатых крыльев нашли широкое применение стали: 12Х1810Т (Я1Т), 08Х25Н16Г7АР (ЭИ835), 09Х15Н8Ю (ЭИ904, СН2), 09Х15Н7ЮМ2 (СН4, ЭП35) и алюминиевый сплав АМгб. Эти материалы, отличающиеся высокой коррозионной стойкостью, могут подвергаться любым видам холодной и горячей обработки, включая различные способы сварки и пайки.

Глава 2

Теория решетчатого крыла на дозвуковых скоростях

2.1. Общие положения

Последовательное развитие численных методов открыло широкие возможности для изучения течений вокруг различных несущих поверхностей, в том числе и весьма сложной формы. Развитие ЭВМ и совершенствование численных методов позволили детально моделировать обтекание решетчатых крыльев с учетом пространственности конструкции крыла и большого числа элементов.

Реальная среда, в которой движется решетчатое крыло, вязкая, и силовое воздействие потока на него может быть сведено к двум системам распределенных нагрузок — нормальным давлениям и касательным напряжениям. Появление последних вызвано вязкостью среды. С достаточной точностью для практических приложений удастся определять эти величины раздельно, что позволяет при расчете давлений пренебрегать вязкостью среды, считая ее идеальной.

Как правило, несущие поверхности стремятся сделать такими, чтобы обеспечить плавное (безотрывное) обтекание. Это условие в решетчатых крыльях реализуется с большей вероятностью, чем у монопланов. Действительно, соседние планы образуют своеобразный канал, где верхняя поверхность плана, на которой возникает разрежение, испытывает положительное (с точки зрения срыва) влияние соседнего плана, что приводит к затягиванию плавного обтекания до больших углов атаки.

Другой важной гидродинамической особенностью пространственного решетчатого крыла является наличие ортогональных планов. Так, на рамном решетчатом крыле несущие горизонтальные

планы испытывают влияние вертикально расположенных элементов, которые препятствуют перетеканию потока вдоль размаха плана. Это приводит к снижению влияния составляющей скорости потока вдоль размаха крыла, что дает больше оснований обратиться к линейной теории не только несущей поверхности, но и несущей линии. Кроме того, отдельно выбранный план решетчатого крыла соответствует прямоугольному крылу большого удлинения, обычно большему, чем это встречается в практике применения моноплан-ных крыльев.

Как и в большинстве ранее выполненных работ [4, 5, 6], будем пользоваться представлениями о присоединенных и свободных вихрях, а также методологией замены крыла поверхностью присоединенных вихрей, с которой сходят соответствующие свободные вихри.

2.2. Аэродинамические характеристики полиплана

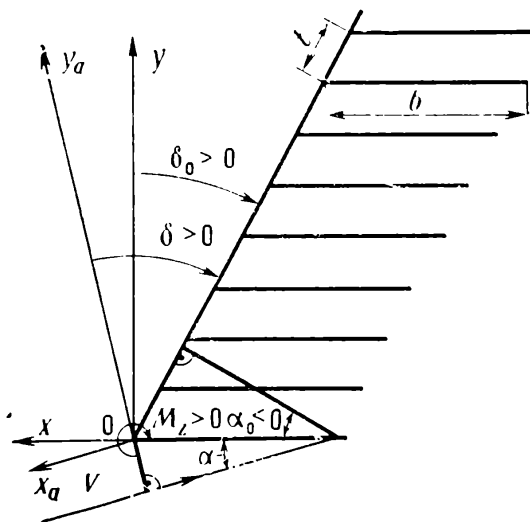
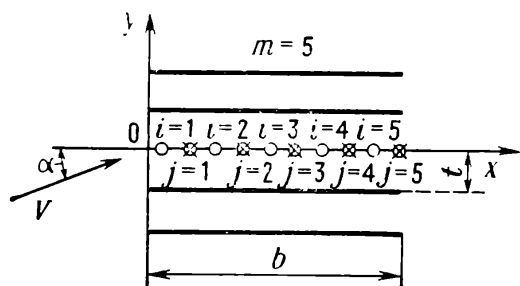
Задача о полиплане бесконечного размаха рассматривалась различными авторами и имеет обширную библиографию. Несущие свойства полиплана будут рассматриваться прежде всего как исходные данные в схеме несущей линии, кроме того, они помогут обосновать методику расчета решетчатого крыла конечного размаха.

Метод решения задачи, использованный для определения аэродинамических характеристик, подробно изложен в [4], здесь же приведем некоторые основные положения и результаты расчетов.

Рассматривается полиплан, состоящий из конечного числа плоских пластин (рис. 2.1). Задача решается в линейной постановке, углы атаки α считаются малыми. Каждый план заменяется m присоединенными дискретными вихрями, причем они располагаются на $1/4$ длины каждого отрезка. Расчетные точки, в которых удовлетворяются граничные условия, выбираются на расстоянии $3/4$ от длины того же отрезка. При таком способе размещения особенностей обес-

Рис. 2.1. Присоединенные вихри i и расчетные точки j на одном из плоских профилей полиплана

Рис. 2.2. Система координат и основные геометрические параметры решетчатого крыла



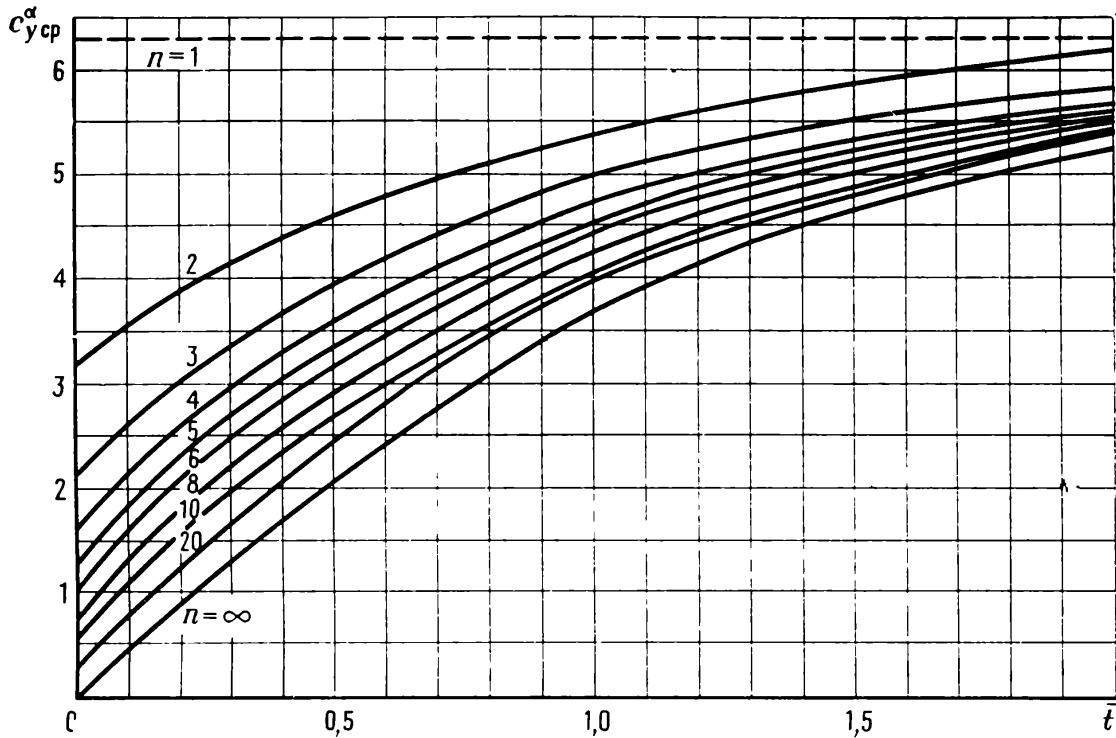


Рис. 2.3. Зависимость производной $c_{y_{cp}}^{\alpha}$ полиплана от числа планов и относительного шага \bar{t} при $\alpha_0=0$

печивается выполнение гипотезы Чаплыгина — Жуковского о конечности скоростей на задней кромке профиля. Условие плавного обтекания позволяет получить систему уравнений для определения циркуляции присоединенных вихрей и далее по теореме Н. Е. Жуковского перейти к определению аэродинамической характеристики как каждого плана, так и всего полиплана в целом.

Представим коэффициенты, характеризующие свойства всего полиплана, в виде

$$c_y = c_{y_{cp}}^{\alpha} \alpha; \quad m_z = m_{z_{cp}}^{\alpha} \alpha; \quad \bar{x}_{\alpha} = m_{z_{\alpha}}^{\alpha} / c_{y_{cp}}^{\alpha}; \quad \bar{x}_{\alpha} = x_{\alpha} / b,$$

где $c_{y_{cp}}^{\alpha}$ — производная, характеризующая средние несущие свойства профилей, отнесенные к площади всех планов nb (размах принят равным единице); x_{α} — расстояние от носика профиля до фокуса. Основные обозначения, применяемые далее для полипланов и решетчатых крыльев, даны на рис. 2.2.

Характеристики $c_{y_{cp}}^{\alpha}$ полиплана в зависимости от относительного шага \bar{t} и числа планов n даны на рис. 2.3—2.5.

В качестве примера на рис. 2.6 приведены характеристики \bar{x}_{α} в зависимости от параметров \bar{t} и n полиплана без выноса. Предельные значения для $c_{y_{cp}}^{\alpha}$ и \bar{x}_{α} полиплана с $n = \text{const}$ при $\bar{t} \rightarrow 0$ получены по формулам

$$\lim_{\bar{t} \rightarrow 0} c_{y_{cp}}^{\alpha}(n, \bar{t}) = 2\pi/n, \quad \lim_{\bar{t} \rightarrow 0} \bar{x}_{\alpha}(n, \bar{t}) = 0,25.$$

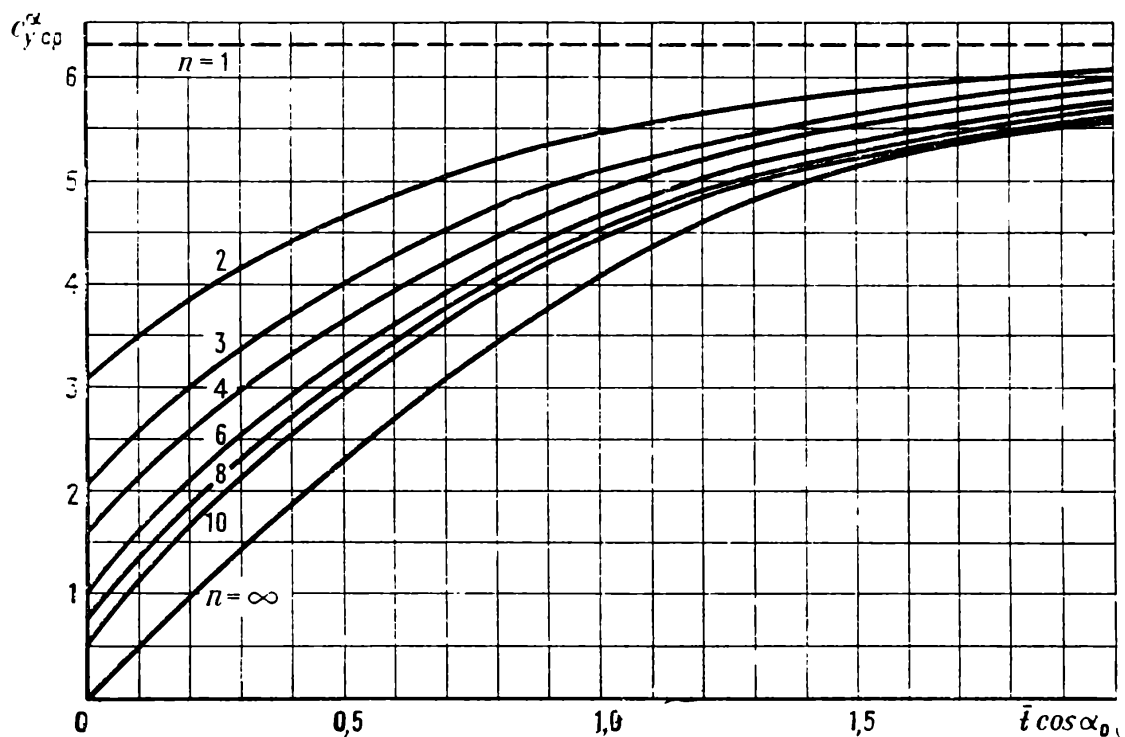


Рис. 2.4. Зависимость производной $c_{y,ср}^{\alpha}$ полиплана от числа планов n и относительного шага \bar{t} при $\alpha_0 = \pm 20^\circ$

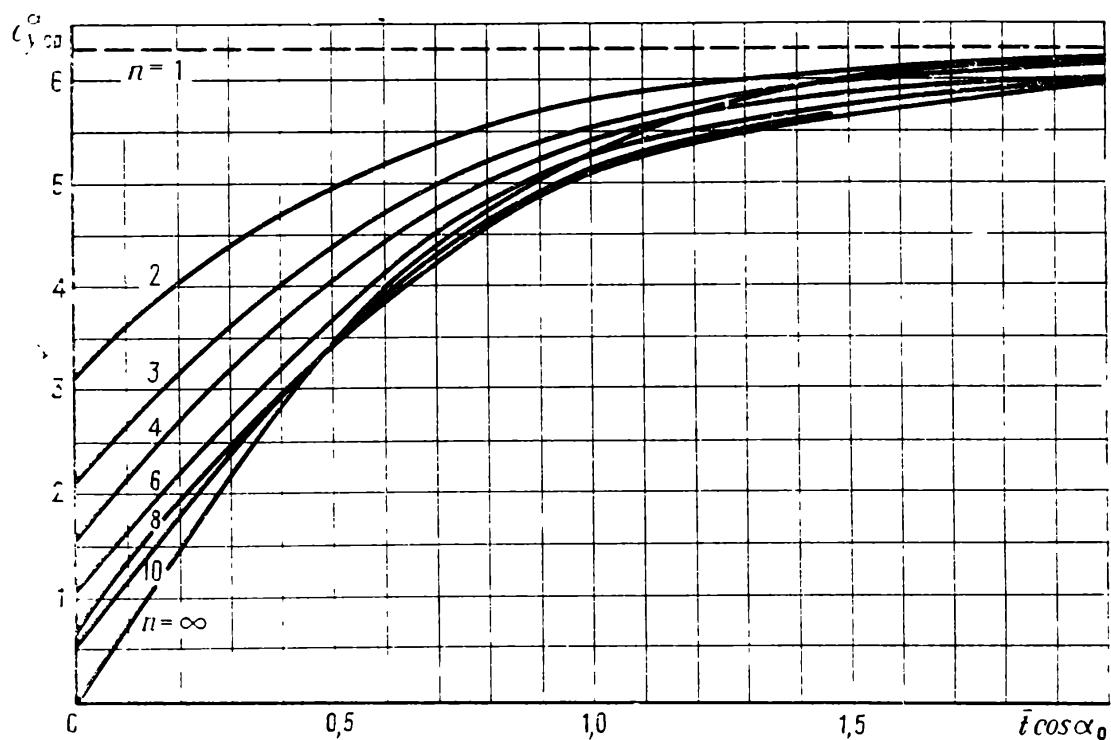
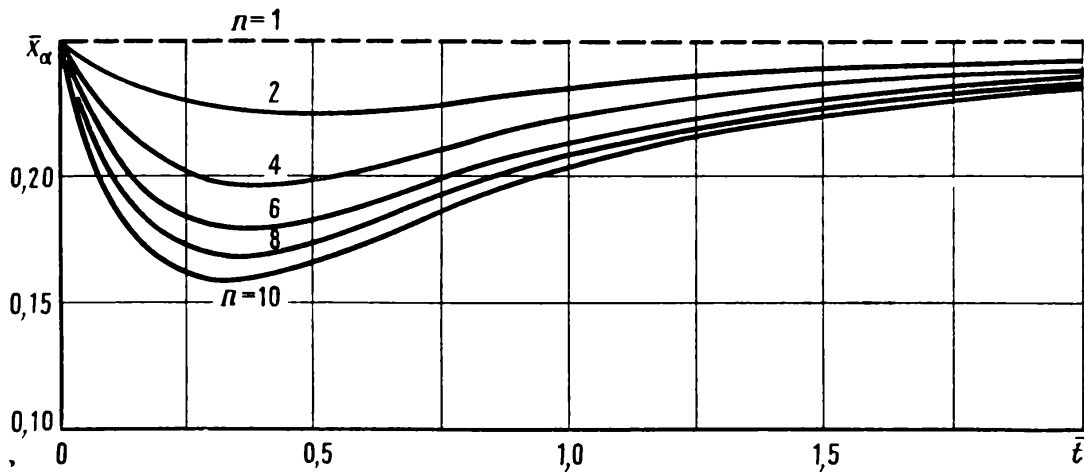
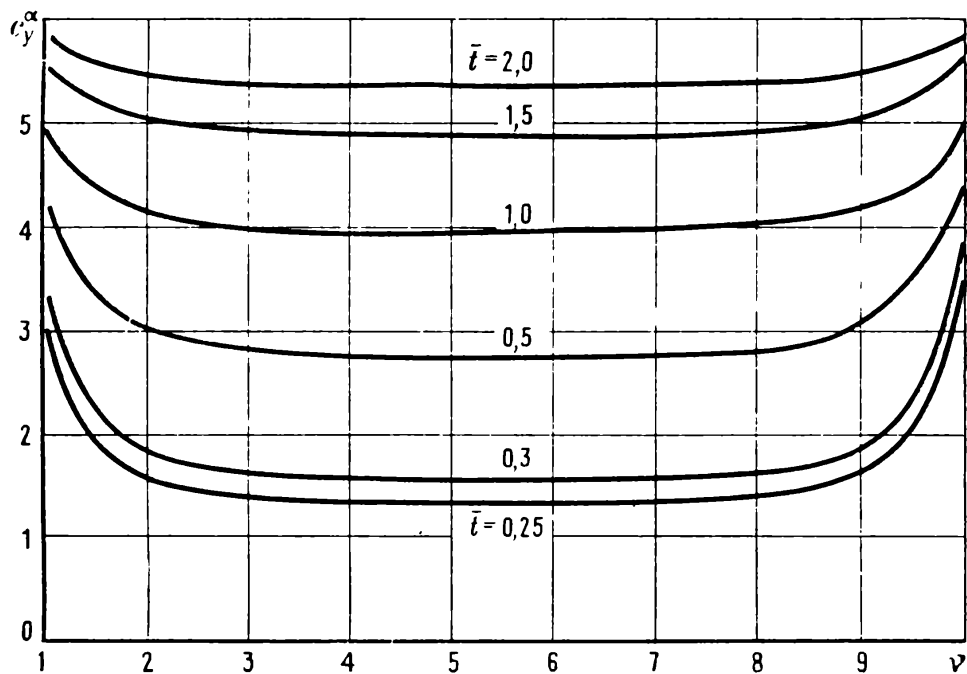


Рис. 2.5. Зависимость производной $c_{y,ср}^{\alpha}$ полиплана от числа планов n и относительного шага \bar{t} при $\alpha_0 = \pm 40^\circ$

В этом случае полиплан в пределе превратится в изолированный профиль и будет иметь соответствующие аэродинамические характеристики.

Рис. 2.6. Зависимость координаты фокуса полиплана от n и \bar{t} при $\alpha_0=0$ Рис. 2.7. Результаты численных расчетов коэффициента c_y^α для решеток профилей в зависимости от \bar{t} и номера плана

Координата центра давления полиплана ($n=\text{const}$) при уменьшении \bar{t} ($\bar{t}=2,0—0,4$) смещается к носу профиля тем существеннее, чем больше число планов n при фиксированном шаге \bar{t} . При дальнейшем уменьшении \bar{t} координата центра давления начинает возрастать, стремясь к $\bar{x}_{\text{ц.д.}}=0,25$ при $\bar{t}=0$.

На рис. 2.7 показано изменение производных c_y^α по планам $c_{y_v}^\alpha(\bar{t}, v)$ (v — номер плана). Приведенные данные показывают, что вследствие неблагоприятной интерференции планов при уменьшении относительного шага \bar{t} средние несущие свойства полиплана ($n=\text{const}$) снижаются тем значительнее, чем больше число планов n .

при фиксированном шаге \bar{t} . Несущие свойства внутренних планов снижаются в большей степени, чем несущие свойства внешних.

Эти характеристики потребуются для построения приближенной теории изолированного решетчатого крыла конечного размаха, которая рассматривается в двух следующих разделах.

2.3. Простейшая вихревая схема решетки и скосы от свободных вихрей

Рассмотрим решетку, состоящую из конечного числа планов, установленных под одинаковым углом α_0 . Опыт показывает, что с боковин решетки сбегают свободные вихри, оси которых наклонены по отношению к направлению скорости V под некоторым углом θ .

Примем следующие допущения.

1. Все планы находятся в среднем в одинаковых условиях, т. е. имеют одинаковые аэродинамические характеристики.

2. Свободные вихри, сбегające с боковин, представляют собой равномерно распределенный вихревой слой постоянной интенсивности γ (рис. 2.8).

Скосы, создаваемые свободными вихрями такой структуры, обладают большой равномерностью. С точностью, значительно большей, чем у соответствующего изолированного плана, их можно считать постоянными как вдоль, так и по размаху каждого плана. Поэтому схема несущей нити в этом случае оказывается примени-

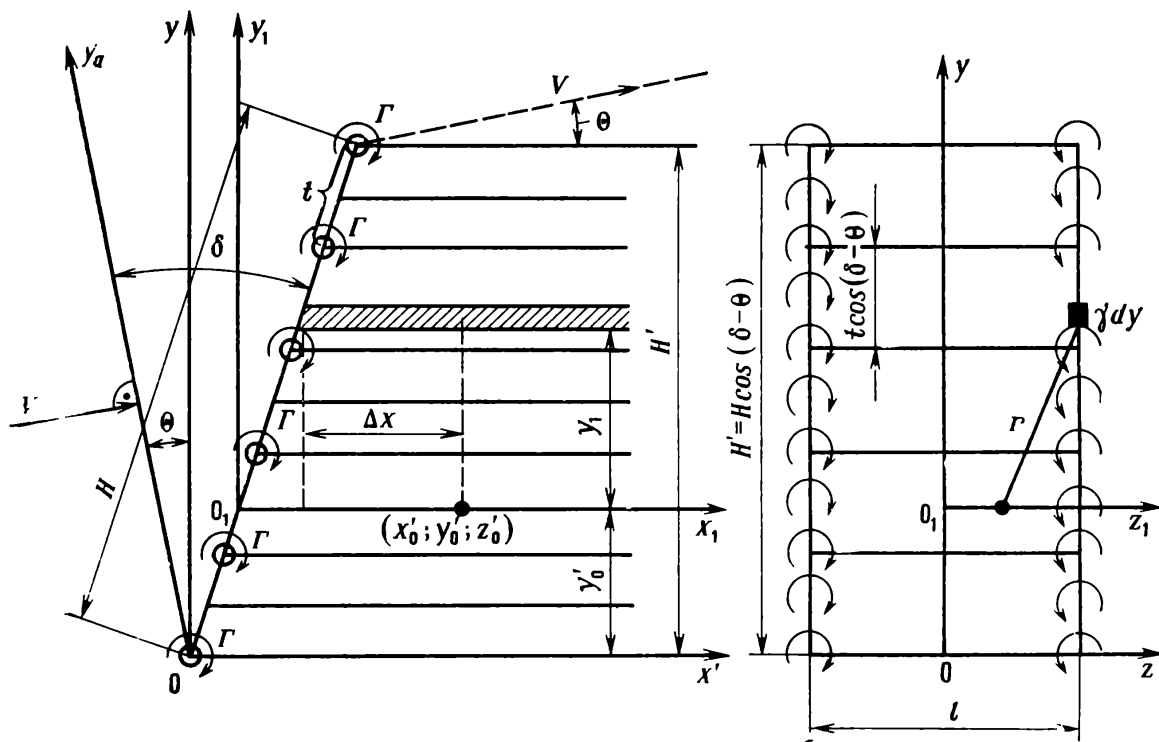


Рис. 2.8. Вихревая схема решетки и ее основные геометрические параметры

мой при меньших удлинениях λ , чем у монопланых крыльев. Исследования показали, что при небольших значениях относительного шага ($\bar{t} < 1,5$) учет влияния дискретности строения свободных вихрей дает пренебрежимую поправку.

Заменяем решетку системой вихрей, изображенной на рис. 2.8. Каждый план решетки заменяется одним присоединенным вихрем напряженности Γ , расположенным в центре давления плана. Свободные вихри представляют собой две плоские пелены, сходящиеся с боковин решетки. Истинный угол атаки будет определен по среднеинтегральному значению скосов, вызываемых в плоскости присоединенных вихрей решетки на прямоугольнике со сторонами H и l .

Найдем выражения для скосов от свободных вихрей, сходящихся с одной боковины решетки. Для этого введем систему координат $Ox'y'z'$ (см. рис. 2.8), выбрав начало ее на середине присоединенного вихря нижнего плана. Ось Oz направим по размаху, а ось Ox' — вдоль свободных вихрей, которые считаем прямолинейными.

Рассмотрим полосу, ширина которой в направлении оси Oy' равна $t \cos(\delta - \theta)$. Суммарная напряженность ее вихрей будет равна Γ , следовательно, считая интенсивность свободных вихрей γ постоянной, будем иметь

$$\gamma = \frac{\Gamma}{t \cos(\delta - \theta)}.$$

Элементарная вихревая нить $\gamma dy'$ вызывает скорость dV , перпендикулярную плоскости, проходящей через нить и точку (x_0', y_0', z_0') , в которой вычисляется скорость, причем

$$dV = \frac{\gamma dy'}{4\pi r} \left(1 + \frac{\Delta x}{\sqrt{r^2 + (\Delta x)^2}} \right).$$

Ее составляющая на ось Oy' найдется следующим образом:

$$dV_y' = -dV \frac{l/2 - z_0}{r}.$$

Рассмотрим систему координат $O_1x_1y_1z_1$, причем

$$x_1 = x' - y_0' \operatorname{tg}(\delta - \theta); \quad y_1 = y' - y_0', \quad z_1 = z,$$

тогда координаты точки, в которой вычисляется скорость, будут равны:

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_0' - y_0' \operatorname{tg}(\delta - \theta); & y_{10} &= 0; & z_{10} &= z_0; \\ r^2 &= y_1^2 + (l/2 - z_0)^2; & \Delta x &= x_0 - y_1 \operatorname{tg}(\delta - \theta). \end{aligned}$$

Выражение для скосов можно представить в виде

$$V_y' = -\frac{\gamma}{4\pi} (J_1 + J_2); \quad J_1 = \operatorname{arctg}(\bar{H}' - \bar{Y}_0') + \operatorname{arctg} \bar{Y}_0'; \quad (2.1)$$

$$J_2 = \int_{-y_0}^{\bar{H}' - y'_0} \frac{[x_0 \cos(\delta - \theta) - \bar{y}_1 \sin(\delta - \theta)] d\bar{y}_1}{(\bar{y}_1^2 + 1) \sqrt{(1 + \bar{x}_0^2) \cos^2(\delta - \theta) - 2\bar{x}_0\bar{y}_1 \sin(\delta - \theta) \cos(\delta - \theta) + \bar{y}_1^2}}, \quad (2.1)$$

причем безразмерные величины здесь вводятся следующим образом:

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1}{l/2 - z_0}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{l/2 - z_0}, \quad \bar{y}'_0 = \frac{y'_0}{l/2 - x_0}, \quad \bar{H}' = \frac{H'}{l/2 - z_0},$$

$$H' = H \cos(\delta - \theta). \quad (2.2)$$

Значение скорости V_y' , определенное по формуле (2.1), вызвано пеленой, лежащей в плоскости $z = l/2$. Скорость, возникающая от пелены, лежащей в плоскости $z = -l/2$, получается из тех же формул, если заменить $l/2 - z_0$ на $l/2 + z_0$.

Таким образом, значение скорости V_y' для всей решетки будет подсчитываться по формуле

$$V_y' = -\frac{\gamma}{4\pi} [(J_1 + J_2)_{l/2 - z_0} + (J_1 + J_2)_{l/2 + z_0}]. \quad (2.3)$$

Вычислим среднеинтегральное значение скорости V_y' в плоскости присоединенных вихрей на прямоугольнике:

$$0 \leq y_0 \leq H'; \quad -l/2 \leq z_0 \leq l/2.$$

Можно показать, что при $\bar{x}_0 = 0$ среднее значение J_2 равно нулю, поэтому достаточно найти только

$$J_{1cp} = \frac{1}{H'l} \int_0^{H'} \int_{-l/2}^{l/2} J_1 dz_0 dy'_0. \quad (2.4)$$

После небольших вычислений получим

$$V'_{1cp} = \frac{\Gamma}{4 + \cos(\delta - \theta)} k_H,$$

где множитель k_H , учитывающий влияние конечности размеров решетки, равен

$$k_H = \frac{1}{\pi} \left[2 \operatorname{arctg} \frac{H'}{l} + \frac{1}{2} \frac{H'}{l} \ln \left(1 + \frac{l^2}{H'^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{l}{H'} \ln \left(1 + \frac{H'^2}{l^2} \right) \right]. \quad (2.5)$$

График функции k_H в зависимости от H'/l представлен на рис. 2.9.

Для решеток с плоскими планами прямоугольной формы, установленными под углом $\alpha_0 = 0$, можно несколько уточнить значение k_H .

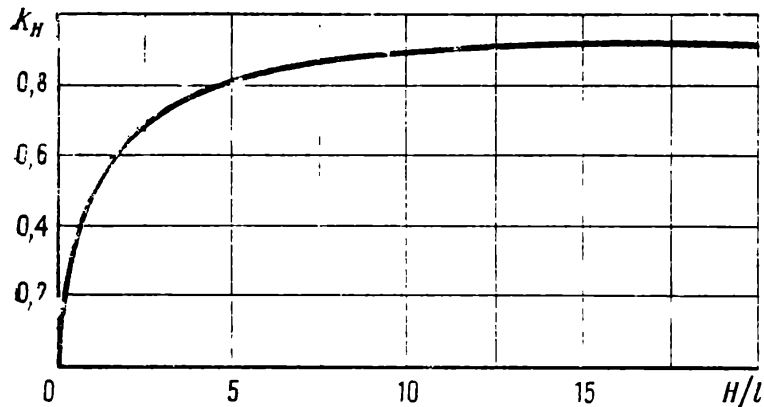
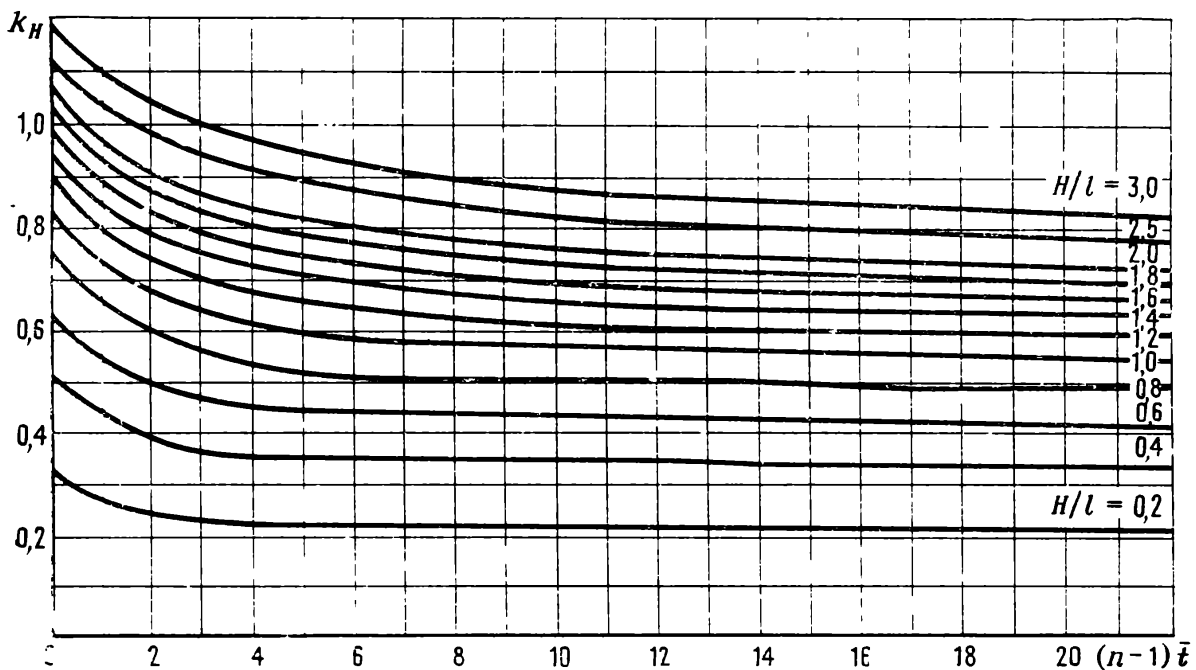


Рис. 2.9. Зависимость функции k_H от величины H'/l

Рис. 2.10. Зависимость функции k_H от H/l и $(n-1)\bar{t}$ при $\bar{x}_{ц.д}=0,2$



Интеграл J_1 не зависит от координаты x_1 , поэтому среднее значение интеграла J_1 в объеме решетки будет определяться формулой (2.4). Среднее значение интеграла J_2 в объеме решетки в данном случае будет иметь вид

$$J_{2\text{ср}} = \frac{1}{Hlb} \int_0^H \int_{-l/2}^{l/2} \int_{\bar{x}_{ц.д}}^{(1-\bar{x}_{ц.д})} J_2 dx dy dz.$$

Здесь $\bar{x}_{ц.д} = x_{ц.д}/b$ — относительная координата центра давления решетчатого крыла, отсчитанная от передней кромки.

Графическая зависимость коэффициента k_H от H/l и $(n-1)\bar{t}$ при $\bar{x}_{ц.д}=0,2$, вычисленная по уточненной формуле на основании указанного выражения для $J_{2\text{ср}}$, приведена на рис. 2.10.

Здесь видно, что коэффициент k_H при $H/l = \text{const}$ возрастает с уменьшением $(n-1)\bar{t}$ тем существеннее, чем больше H/l и меньше $H/b = (n-1)\bar{t}$.

2.4. Подъемная сила и индуктивное сопротивление по схеме несущей нити

На основе схемы несущей нити принимаем, что каждый план решетки работает как профиль соответствующего полиплана бесконечного размаха при истинном угле атаки.

Тогда подъемная сила решетки приближенно будет равна подъемной силе соответствующего полиплана бесконечного размаха, угол атаки которого определяется с учетом среднего скоса от свободных вихрей решетки.

Если подъемную силу отнести к площади всех планов решетки, то можно написать

$$c_y = c_{y\text{cp}}^{\alpha} \alpha_n, \quad (2.6)$$

где $c_{y\text{cp}}^{\alpha}$ — производная коэффициента c_y по углу атаки полиплана бесконечного размаха с теми же значениями t , n и α_0 , как и у решетки; $\alpha_n = \alpha_0 + \delta - \varepsilon$ — истинный угол атаки. Здесь ε — средний скос от двух систем свободных вихрей решетки,

$$\varepsilon = -\frac{V'_{y\text{cp}}}{V_{\infty}} = -\frac{\Gamma k_H}{2tV_{\infty} \cos(\delta - \theta)}.$$

Так как, с одной стороны,

$$Y = \rho_{\infty} V \Gamma l,$$

а, с другой,

$$Y = c_y \frac{V^2 S \rho_{\infty}}{2},$$

то уравнение связи имеет вид

$$\Gamma = c_y \frac{VS}{2l},$$

поэтому для скоса будем иметь выражение

$$\varepsilon = \frac{c_y k_H}{4\bar{t} \cos(\delta - \theta)} \frac{1}{\lambda} \frac{l}{b}. \quad (2.7)$$

Подставив (2.7) в уравнение (2.6), получим формулы

$$c_y = c_y^{\alpha} \alpha; \quad \alpha = \alpha_0 + \delta;$$

$$c_y^{\alpha} = \frac{c_{y\text{cp}}^{\alpha}}{1 + \frac{c_{y\text{cp}}^{\alpha} k_H}{4\bar{t} \cos(\delta - \theta)} \frac{1}{\lambda} \frac{l}{b}}. \quad (2.8)$$

Угол скоса свободных вихрей θ , строго говоря, будет изменяться от $\Delta\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon$ (места схода с плана) до $\Delta\alpha = \varepsilon$ (на бесконечности).

В качестве расчетного можно взять среднеарифметическое из этих значений:

$$\theta = 0,75 \frac{c_y k_H}{4\bar{t} \cos(\delta - \theta)} \frac{1}{\lambda} \frac{l}{b}. \quad (2.9)$$

Расчет коэффициентов c_y ведется методом последовательных приближений. Сначала в (2.8) следует положить $\theta = 0$ и найти коэффициент c_y , затем подставить это значение в (2.9), положив в правой части $\theta = 0$, потом найденное значение θ подставить в формулу (2.8) и т. д.

Расчеты показали, что при малых углах атаки и умеренных установочных углах α_0 можно принять $\cos(\delta - \theta) \approx 1$. Поэтому для решеток с прямоугольными планами ($\lambda = l/b$) формула для c_y^α может быть написана в упрощенном виде:

$$c_y^\alpha = \frac{c_{y\text{ср}}^\alpha}{1 + \frac{c_{y\text{ср}}^\alpha k_H}{4\bar{t}}}. \quad (2.10)$$

Подъемная сила Y перпендикулярна средней скорости $V_{\text{ср}}$, поэтому для индуктивного сопротивления с учетом подсасывающей силы можем написать

$$X_i = Y \operatorname{tg} \varepsilon \approx Y \varepsilon,$$

откуда

$$c_{xi} = \frac{c_y^2 k_H}{4\bar{t} \cos(\delta - \theta)} \frac{1}{\lambda} \frac{l}{b}. \quad (2.11)$$

Для решеток с прямоугольными планами при малых углах атаки α и умеренных углах α_0 формула (2.11) примет более простой вид:

$$c_{xi} = \frac{c_y^2 k_H}{4\bar{t}}. \quad (2.12)$$

Формулы (2.11) и (2.12) получены на основании теоремы количества движения и предположения о плавном обтекании. Поэтому они дают значение коэффициента индуктивного сопротивления с подсасывающей силой. В реальных условиях эта сила реализуется на планах с утолщенными передними кромками, обтекание которых происходит плавно.

У планов с острой передней кромкой образуется местный отрыв. Здесь величину индуктивного сопротивления следует подсчитывать без учета подсасывающей силы.

При малых углах атаки, если кривизна планов равна нулю, сила Y перпендикулярна хорде (так как в данном случае совпадает с нормальной силой) и

$$\overline{X} = Y(\alpha_0 + \delta),$$

откуда на основании (2.8) имеем

$$\bar{c}_{xi} = c_y^2 \left[\frac{1}{c_{y\text{cp}}^2} + \frac{k_H}{4t \cos(\delta - \theta)} \frac{1}{\lambda} \frac{l}{b} \right]. \quad (2.13)$$

Если планы имеют прямоугольную форму, то при небольших значениях α и α_0 формула (2.13) упрощается:

$$\bar{c}_{xi} = c_y^2 \left[\frac{1}{c_{y\text{cp}}^2} + \frac{k_H}{4t} \right]. \quad (2.14)$$

Таким образом, можно найти два предельных теоретических значения для индуктивного сопротивления решетчатого крыла с учетом и без учета подсасывающей силы. В зависимости от профилирования передней кромки планов соответствующие опытные данные, находясь между двумя теоретическими значениями, будут приближаться к одному из них.

2.5. Вихревая схема несущей поверхности

Теоретическое исследование аэродинамических характеристик решетчатых крыльев на дозвуковых скоростях сопряжено с определенными трудностями ввиду сложности и многообразия конструктивных форм крыльев такого типа и существенного взаимодействия между их элементами. Анализ возможных подходов к получению решения с учетом конструктивных особенностей решетчатых крыльев показал, что для исследования их аэродинамики на основных рабочих режимах большинства летательных аппаратов, когда имеют место линейные зависимости сил и моментов от кинематических параметров, расчеты целесообразно проводить на основе линейной теории. Схематизация решетчатого крыла системой несущих поверхностей и использование метода дискретных вихрей позволяют построить эффективные алгоритмы для проведения численных экспериментов на ЭВМ.

В рамках указанного подхода, подробно разработанного для моноплановых крыльев произвольной формы в плане [5], рассмотрим неустановившееся движение решетчатого крыла.

Граничное условие на поверхности крыла представляет собой требования равенства нулю нормальной составляющей относительной скорости в каждой точке (ξ_0, η_0, ζ_0) поверхности крыла и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{W_y}{V} \cos(n, \eta) + \frac{W_z}{V} \cos(n, \zeta) = & (-\alpha - \xi_0 \omega_z - \zeta_0 \omega_x) \cos(n, \eta) + \\ & + (\eta_0 \omega_x + \xi_0 \omega_y) \cos(n, \zeta); \end{aligned} \quad (2.15)$$

где W_y, W_z — возмущенные скорости; $\cos(n, \eta), \cos(n, \zeta)$ — направ-

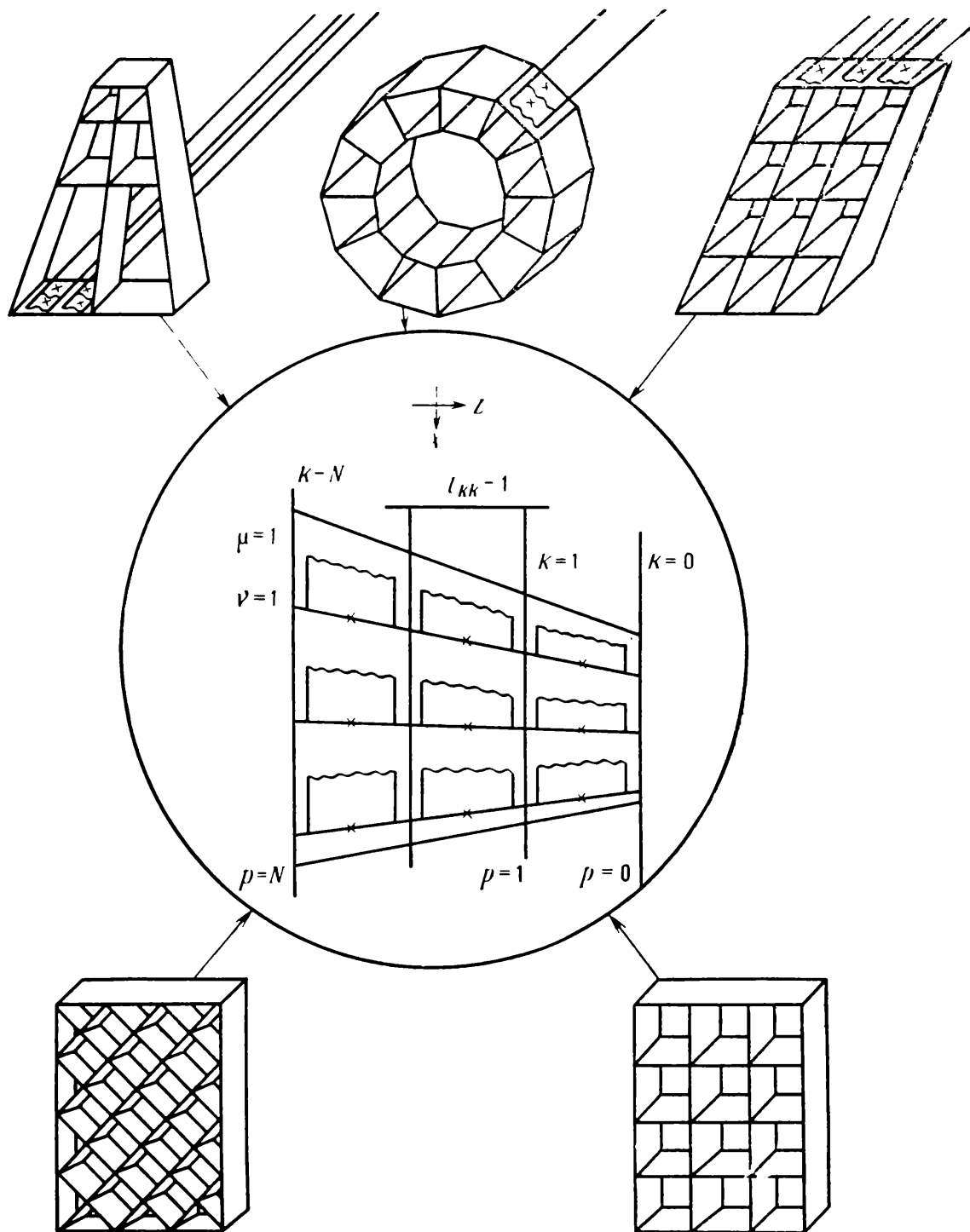


Рис. 2.11. Замена решетчатых крыльев различной конфигурации косыми подковообразными вихрями

ляющие косинусы нормали к поверхности крыла; $\xi = x/b$; $\eta = y/b$, $\zeta = z/b$.

Заменяем решетчатое крыло и след за ним дискретными присоединенными вихрями и отходящими от каждого из них свободными вихрями. Такой способ схематизации позволяет заменить решетчатое крыло практически любой конструкции системой косых под-

ковообразных вихрей, расположенных на элементах базовых плоскостей, имеющих в общем случае один и тот же вид — трапеций (рис. 2.11). Размещение дискретных вихрей и контрольных точек, в которых выполняется условие непротекания, рассмотрим на примере трапеции, параллельной плоскости Oxz .

Пусть решетчатое крыло разбито на m трапеций. Каждая r трапеция ($1 \leq r \leq m$) делится на N_r полос линиями, параллельными вектору невозмущенной скорости (боковым кромкам). Границам полос присвоим номера p ($0 \leq p \leq N_r$). Ширина полос не только разных трапеций, но и в пределах одной трапеции может быть разной. Разделим каждую из трапеций на панели. Для этого делим в определенном соотношении их хорды b_{rp} и проводим через них прямые (см. рис. 2.11). Границы полученных таким образом панелей обозначим номером v , отсчитывая их от носка и включая в эту систему передние и задние кромки. Общее число панелей, считая от носка трапеции, обозначим n_r ; панель, совпадающая с передней кромкой, имеет индекс $0 \rightarrow v_0$. Координаты передней кромки и величины текущих хорд трапеции считаются известными. Пересечение линий v и p делит элемент базовой поверхности — трапецию — на ряд элементарных ячеек. Присоединенные вихревые шнуры будем характеризовать номером μ , отсчитывая его от носка. Введем для сечений, которыми делится трапеция по размаху наряду с нумерацией p , нумерацию k ($0 \leq k \leq N_r$). Координаты точек, находящихся на пересечении линий μ и k , будем отмечать индексами μ и k . Координаты точек передней кромки в сечении k и величину хорды в этом сечении считаем известными. Тогда нетрудно найти координаты точек пересечения μ и k — $\xi_{\mu k}$ и $\zeta_{\mu k}$.

Безразмерные координаты середин косых присоединенных вихрей, соединяющих точки μ, k и $\mu, k-1$, обозначим $\xi_{\mu k-1}^{\mu k}$, $\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}$:

$$\xi_{\mu k-1}^{\mu k} = \frac{1}{2} (\xi_{\mu k} + \xi_{\mu k-1}); \quad \zeta_{\mu k-1}^{\mu k} = \frac{1}{2} (\zeta_{\mu k} + \zeta_{\mu k-1}). \quad (2.16)$$

Размах дискретного вихря между сечениями k и $k-1$ не зависит от μ :

$$\bar{l}_{kk-1} = \zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}. \quad (2.17)$$

Угол стреловидности дискретного вихря определится из соотношения

$$\operatorname{tg} \chi_{\mu k-1}^{\mu k} = \frac{\xi_{\mu k-1} - \xi_{\mu k}}{\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}}. \quad (2.18)$$

Для каждой трапеции угол стреловидности присоединенного вихревого шнура χ_{μ} постоянен.

Контрольные точки должны располагаться на средней хорде b_{p-1}^p между сечениями $p-1$ и p . Контрольные точки между присое-

диненными вихрями следует брать так, чтобы при увеличении числа вихрей они оказывались между ними посередине. Положение контрольных точек будет определяться пересечением хорд b_{p-1}^p с линиями v (они указаны на рис. 2.11 крестиками). Координаты их отмечаются индексами p и v : ξ_{vp-1}^p , ζ_{vp-1}^p .

Выбор положения границ полос (сечений p и k) и панелей (сечений μ и v) определяется видом вихревой схемы. Наиболее употребительна равномерная схема. В этом случае хорды b_p и b_{p-1} делятся на n_r равных частей. Каждый из полученных отрезков, в свою очередь, делится на четыре равные части. Точки, лежащие на $1/4$ длины каждого отрезка, считая от его верхнего по потоку конца, принимаем за точки излома косых подковообразных вихрей. Контрольные точки располагаем посередине линий, соединяющих точки, лежащие на $3/4$ длины отрезков.

Соответственно при использовании равномерной схемы положение середины присоединенного вихря и угол его стреловидности определяются формулами:

$$\begin{aligned}\xi_{\mu k-1}^{\mu k} &= \frac{1}{2} (\xi_{0k} + \xi_{0k-1}) + \frac{\mu - 3/4}{2n_r} (\bar{b}_k + \bar{b}_{k-1}); \\ \zeta_{\mu k-1}^{\mu k} &= \frac{1}{2} (\zeta_{\mu k} + \zeta_{\mu k-1}); \\ \operatorname{tg} \chi_{\mu k-1}^{\mu k} &= \frac{(\xi_{\mu k-1} - \xi_{\mu k}) + \frac{\mu - 3/4}{2n_r} (\bar{b}_{k-1} - \bar{b}_k)}{\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}},\end{aligned}\quad (2.19)$$

а координаты контрольных точек — соотношениями:

$$\begin{aligned}\xi_{vp-1}^p &= \frac{1}{2} (\xi_{0p} + \xi_{0p+1}) + \frac{v - 1/4}{2n_r} (\bar{b}_p + \bar{b}_{p-1}); \\ \zeta_{vp-1}^p &= \frac{1}{2} (\zeta_{vp} + \zeta_{vp-1}); \\ \mu &= 1, 2, \dots, n_r; \quad v = 1, 2, \dots, n_r; \\ k &= 1, 2, \dots, N_r; \quad p = 1, 2, \dots, N_r.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Расчет числовых параметров вихревой схемы завершается переходом к связанной с решетчатым крылом системе координат $Oxyz$ и расчетам углов наклона трапеций ψ_r к плоскости Oxz .

2.6. Уравнения для циркуляций

Безразмерную циркуляцию $\Gamma_{\mu k k-1}$ представим через коэффициенты аэродинамических производных [4]:

$$\Gamma_{\mu k k-1} = \sum_i \Gamma_{\mu k k-1}^{q_i} q_i; \quad (2.21)$$

$$q_i = \alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z.$$

Подставляя (2.21) в соотношения, определяющие индуцированные скорости в каждой контрольной точке, получим выражения указанных соотношений через коэффициенты аэродинамических производных циркуляции. Потребуем, чтобы скорость, индуцированная в контрольной точке всей вихревой системой, удовлетворяла граничным условиям (2.15). Выполняя граничные условия во всех контрольных точках элементов базовых плоскостей, получим системы линейных алгебраических уравнений относительно искоемых аэродинамических производных циркуляций. Эти системы уравнений будут замкнуты, так как количество неизвестных в них равно числу контрольных точек. Единственность решения и заданный его вид обеспечиваются не только замкнутостью систем, но и соответствующим построением вихревой системы, обеспечивающей выполнение гипотезы Чаплыгина — Жуковского путем размещения в каждом сечении последней контрольной точки ближе к кормовой части профиля, чем последний дискретный вихрь. В результате получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^m \sum_{R=1}^{N_r} \sum_{\mu=1}^{n_r} \Gamma_{r\mu k k-1}^{q_i} \mathcal{W}_{nr p p-1}^{\mu k k-1} &= H_{r\nu p p-1}^{(q_i)}; \\ p &= 1, 2, \dots, N_r; \nu = 1, 2, \dots, n_r; \\ r &= 1, 2, \dots, m; q_i = \alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\mathcal{W}_{nr p p-1}^{\mu k k-1}$ — безразмерная нормальная к r -му базовому элементу скорость.

Входящие в системы (2.22) параметры $H^{(q_i)}$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned} H_{r\nu p p-1}^{(\alpha)} &= -\cos \psi_r, \quad H_{r\nu p p-1}^{(\beta)} = -\sin \psi_r; \\ H_{r\nu p p-1}^{(\omega_x)} &= -(\zeta_{\nu p-1}^{\nu p} \cos \psi_r + \eta_{\nu p-1}^{\nu p} \sin \psi_r); \\ H_{r\nu p p-1}^{(\omega_y)} &= \xi_{\nu p-1}^{\nu p} \sin \psi_r; \quad H_{r\nu p p-1}^{(\omega_z)} = \xi_{\nu p-1}^{\nu p} \cos \psi_r. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Зная аэродинамические производные циркуляции $\Gamma_{r\mu k k-1}^{q_i}$, можно найти как распределенные, так и суммарные аэродинамические характеристики решетчатого крыла.

Определим вначале коэффициент аэродинамической нагрузки $\Delta \bar{p}$, т. е. разность коэффициентов давлений в точках «нижней» и «верхней» поверхностей элемента решетчатого крыла с координатами

тами $\xi_{\mu k-1}^{\mu k}$, $\eta_{\mu k-1}^{\mu k}$, $\zeta_{\mu k-1}^{\mu k}$. Как и ранее, примем, что в каждом сечении $\xi_{\mu k-1}^{\mu k}$ на промежутке $\Delta \xi_{\mu k k-1}$ напряженность вихревого слоя постоянна. Размеры этого промежутка определяются расстоянием между ближайшими контрольными точками:

$$\Delta \xi_{\mu k k-1} = \xi_{\nu p-1}^{\nu p} - \xi_{\nu-1 p-1}^{\nu-1 p}; \quad \mu = \nu, \quad k = p.$$

Отсюда получим, что напряженность присоединенного вихревого слоя будут определяться через напряженность дискретного вихря следующим образом:

$$\gamma(\xi_{\mu k-1}^{\mu k}, \eta_{\mu k-1}^{\mu k}, \zeta_{\mu k-1}^{\mu k}) = \frac{\Gamma(\xi_{\mu k-1}^{\mu k}, \eta_{\mu k-1}^{\mu k}, \zeta_{\mu k-1}^{\mu k})}{\Delta \xi_{\mu k k-1}}. \quad (2.24)$$

Представляя циркуляцию распределенного вихревого слоя через коэффициенты аэродинамических производных таким же образом, как циркуляцию дискретных вихрей (2.21), получим

$$\gamma_{r \mu k k-1}^{q_i} = \frac{\Gamma_{r \mu k k-1}^{q_i}}{\Delta \xi_{\mu k k-1}}. \quad (2.25)$$

Напряженность циркуляции присоединенного вихревого слоя при малом количестве дискретных вихрей в сечении может быть получена интерполяцией.

Выражая аэродинамическую нагрузку через коэффициенты аэродинамических производных

$$\overline{\Delta p} = \sum_i p^{q_i} q_i \quad (2.26)$$

и используя теорему Жуковского «в малом» для циркуляционного обтекания, будем иметь

$$p^{q_i} = 2\gamma^{q_i}. \quad (2.27)$$

Коэффициенты аэродинамических производных сил и моментов сечений и решетчатого крыла в целом определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_y^{q_i} &= 4 \frac{b^2}{S} \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^N \bar{l}_{kk-1} \cos \psi_r \sum_{\mu=\mu_0}^{\mu=\mu^*} \Gamma_{\mu k k-1}^{q_i}; \\ m_z^{q_i} &= 4 \frac{b^2}{S} \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^N \bar{l}_{kk-1} \cos \psi_r \sum_{\mu=\mu_0}^{\mu=\mu^*} \Gamma_{\mu k k-1}^{q_i} \xi_{\mu k-1}^{\mu k}; \\ m_x^{q_i} &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Выражения (2.28) соответствуют симметричному движению крыла, а для несимметричного движения будут иметь вид

$$m_x^{qi} = -4 \frac{b^2}{S} \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^N \bar{l}_{kk-1} \left(\cos \psi_r \sum_{\mu=\mu_0}^{\mu=\mu_*} \Gamma_{\mu kk-1}^{qi} \xi_{\mu k-1}^{\mu k} + \right. \\ \left. + \sin \psi_r \sum_{\mu=\mu_0}^{\mu=\mu_*} \Gamma_{\mu kk-1}^{qi} \cdot \eta_{\mu k-1}^{\mu k} \right); \quad (2.29)$$

$$c_y^{qi} = m_z^{qi} = 0.$$

Нагрузка на элементарный участок крыла определяется следующей зависимостью:

$$\Delta p = \frac{2}{\Delta \xi_{\mu kk-1}} \sum_i \Gamma_{\mu kk-1}^{qi} q_i \quad (2.30)$$

2.7. Особенности методики расчета на ЭВМ

Получение достоверных результатов с заданной точностью при использовании численного метода на ЭВМ требует проведения тщательных методических исследований. Они представляют собой численный эксперимент, направленный на анализ практической сходимости решения, сравнение результатов численных расчетов с известными точными решениями, выбор рациональной схематизации решетчатых крыльев и т. д.

Вихревая модель, принципы построения которой изложены в разд. 2.5, не только обеспечивает получение решения необходимого вида вследствие выполнения гипотезы Чаплыгина — Жуковского на задних кромках элементов решетчатого крыла, но и удобен для расчетов на ЭВМ. Это объясняется тем, что в основе ее лежат достаточно простые особенности одного вида — косые подковообразные вихри, а любые части конструкций разнообразных решетчатых крыльев схематизируются однотипно элементами базовых плоскостей в виде трапеций с расположенными на них дискретными вихрями и контрольными точками. Существенно также, что системы алгебраических уравнений, к которым сводится решение задачи, обладают рядом важных свойств. В частности, диагональные элементы в матрице коэффициентов играют доминирующую роль, поэтому детерминанты системы существенно отличны от нуля, решения обладают большой устойчивостью к исходным данным и малочувствительны к погрешностям счета.

Исследование практической сходимости является одним из способов контроля численных расчетов и обеспечивает рациональный выбор параметров вихревой модели — необходимого числа дискретных вихрей по хорде n_r , размаху N_r элементов решетчатого крыла. Такие исследования применительно к монопланым крыльям и компоновкам типа самолетных проведены и подробно проанализированы [6]. Существенной особенностью процесса обтекания решетчатого крыла является взаимное влияние его отдельных планов, поэтому при формировании вихревой модели наряду с рекомендациями работы [6] необходимо дополнительно учитывать значение относительного шага решетчатого крыла \bar{l} . С целью выявления влияния относительного шага на необходимое количество дискретных вихрей по хорде была проведена серия методических расчетов аэродинамических характеристик полипланов. Анализ полученных результатов показал, что при расчете силовых характеристик полипланов с относительным шагом от 0,3 до 2,1, каждый план достаточно моделировать двумя присоединенными

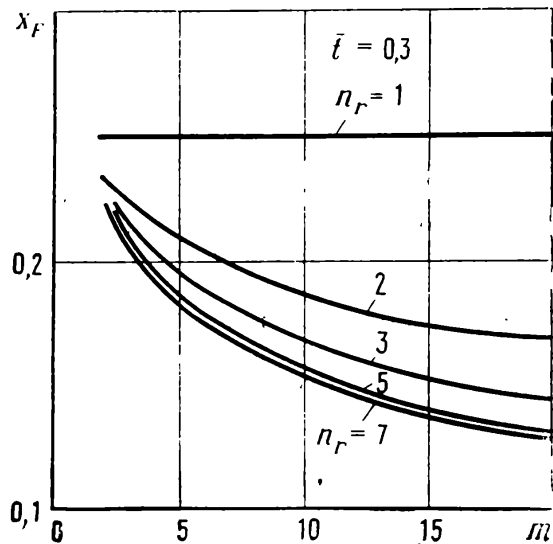
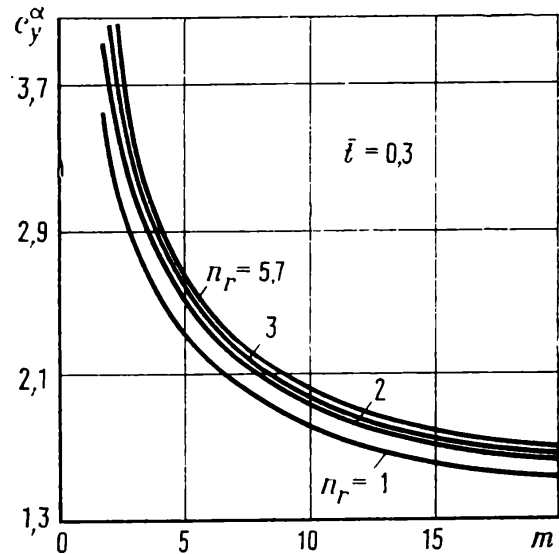
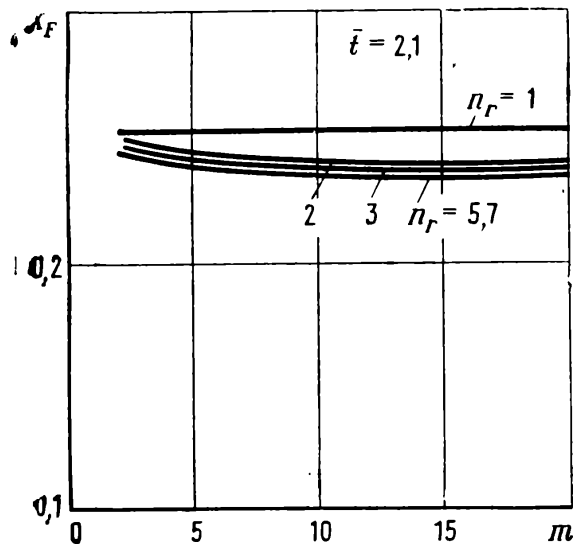
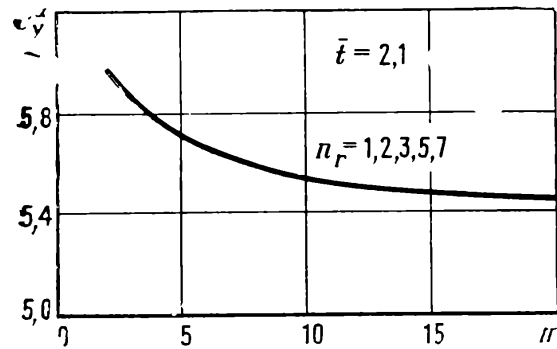


Рис. 2.12. Зависимость производной c_y^α и коэффициенты фокуса от числа моделирующих присоединенных вихрей n_r при $\bar{t}=2,1$ и различном числе профилей m

Рис. 2.13. Зависимость производной c_y^α и координаты фокуса \bar{x}_F от числа моделирующих присоединенных вихрей при $\bar{t}=0,3$ и различном числе профилей m

вихрями. Из зависимостей c_y^α полиплана от числа профилей в наборе m , приведенных на рис. 2.12 и 2.13, видно, что увеличение числа присоединенных вихрей n_r , моделирующих один план более 2, практически не приводит к уточнению результатов расчетов во всем исследованном диапазоне изменения относительного шага \bar{t} , а при $\bar{t} > 2$ достаточно $n_r = 1$. На рис. 2.12 и 2.13 приведены также зависимости расстояния от носка до фокуса полиплана \bar{x}_F (отнесенные к хорде профиля) от числа профилей m , рассчитанные для $\bar{t} = 0,3; 2,1$ при варьировании n_r от 1 до 7. Сопоставление полученных результатов показывает, что при малых относительных шагах ($0,3 \leq \bar{t} \leq 1,2$) в данном случае повышение точности достигается увеличением n_r до 7, при $1,2 \leq \bar{t} \leq 2$ — до 5, а при $\bar{t} > 2,1$ можно ограничиться $n_r = 2 \dots 3$. Погрешности расчета, связанные с ограничением числа дискретных вихрей n_r , снижаются при увеличении числа профилей в наборе m . Расчеты аэродинамических характеристик решетчатых крыльев конечного разма-

ха показывают, что результаты исследований практической сходимости численной методики, полученные для полипланов, применимы и для широкого класса реальных конструкций.

При расчете аэродинамических характеристик достаточно сложных решетчатых крыльев (конструкция которых содержит большое число элементов) с использованием ЭВМ с ограниченным объемом памяти и средним быстродействием возникают трудности, связанные с возрастанием числа дискретных вихрей и порядка систем линейных уравнений. Снижение числа неизвестных циркуляций возможно как вследствие симметрии большинства реальных решетчатых крыльев, так и путем учета особенностей распределения аэродинамических нагрузок по элементам решетчатого крыла. Так, например, для решетчатого крыла, симметричного относительно плоскости Oxy , число уравнений снижается в два раза. Распространенные решетчатые крылья прямоугольного лобового сечения обладают двумя плоскостями симметрии, параллельными оси Ox , соответственно в силу наличия оси симметрии второго порядка, число неизвестных циркуляций дискретных вихрей может быть снижено в четыре раза.

Учет особенностей распределения аэродинамических нагрузок в ряде случаев позволяет существенно упростить решение задачи. Анализ распределения несущих свойств между отдельными профилями полиплана показал, что оно может быть описано степенной зависимостью. Аппроксимация напряженности дискретных вихрей, моделирующих полиплан, по степенному закону совместно с учетом его симметрии позволяет снизить порядок систем в $m/6$ или в $(m+1)/6$ раз соответственно при четном и нечетном числе планов m .

Сопоставление аэродинамических характеристик различных решетчатых крыльев показало, что определяющими геометрическими параметрами являются: размах l , высота набора H и относительный шаг \bar{l} . Вид набора — косой или прямой — практически не влияет на суммарные аэродинамические характеристики (табл. 2.1). Приведенные результаты расчетов аэродинамических производных решетчатых крыльев указанных типов показывают, что погрешности не превышают нескольких процентов. Указанная особенность позволяет при решении α -, β -, ω_y -, ω_z -задач упростить вихревую модель, рассчитывая вместо крыльев с перекрещивающимся набором крылья с параллельным набором.

2.8. Особенности расчета нестационарных характеристик

Аэродинамические нагрузки, действующие на решетчатое крыло при неустановившемся движении, могут быть рассчитаны точно (с учетом допущений линейной теории) путем определения переходных функций и использования интеграла Дюамеля [5]. Пусть кинематические параметры заданы в виде

$$q_i(\tau) = q_i^* f(\tau), \quad (2.31)$$

где q_i^* — максимальное значение модуля кинематического параметра; τ — безразмерное время; $f(\tau)$ — произвольная функция безразмерного времени.

Введем для аэродинамических коэффициентов обозначения:

$$c_{q_i}(\tau) = \frac{c(\tau)}{q_i^*}. \quad (2.32)$$

Тогда аэродинамические характеристики определяются из зависимости

Т а б л и ц а 2.1

Сравнение характеристик сотовых и рамных крыльев

Коэффициент	Косой набор	Прямой набор	ε , %
c_y^a	4,093	4,031	1,5
\dot{c}_y^a	-7,322	-7,209	1,5
c_{yz}^ω	1,125	1,086	3,5
m_{xx}^ω	-1,03	-1,00	3,0

$$c_{q_i}(\tau) = f(0) A_{q_i}(\tau) + 2\mu k_{q_i} \frac{df(\tau)}{d\tau} + \int_0^\tau \frac{df}{d\tau_1} A_{q_i}(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (2.33)$$

Здесь $A_{q_i}(\tau)$ — переходная функция составляющей характеристики при ступенчатом изменении кинематического параметра q_i ; k_{q_i} — коэффициенты присоединенных масс; началу нестационарного процесса соответствует $\tau=0$; $q_i=0$ при $\tau<0$, множитель μ равен 1 при $M=0$ и нулю при $M \neq 0$ [5].

При расчете нестационарных аэродинамических характеристик решетчатое крыло заменяется совокупностью несущих вихревых поверхностей, которые в дальнейшем представляются приближенно в виде системы дискретных подковообразных вихрей, напряженность которых зависит от времени: $\Gamma_+ = \Gamma_+(t)$.

Согласно закону о постоянстве напряженности присоединенного вихря процесс сопровождается сходом свободных вихрей, уносимых потоком вниз по течению. В соответствии с линейной постановкой задачи считается, что все свободные вихри остаются в плоскости, проходящей через соответствующий присоединенный вихрь и вектор скорости набегающего потока, а скорость сноса свободных вихрей равна скорости набегающего потока.

В большинстве практически важных случаев с достаточной степенью точности аэродинамические характеристики могут быть определены через коэффициенты аэродинамических производных [5]:

$$c(\tau) = \sum_i [c^{q_i} q_{i(\tau)} + c^{\dot{q}_i} \dot{q}_{i(\tau)}], \quad (2.34)$$

причем коэффициенты аэродинамических производных рассчитываются при гармонических зависимостях кинематических параметров при весьма малых (стремящихся к нулю) частотах колебаний.

Если напряженность присоединенного вихря изменяется по гармоническому закону

$$\Gamma_+(t_0) = Vb\Gamma \sin pt_0, \quad (2.35)$$

где Γ — безразмерная постоянная; p — круговая частота, то индуцируемая этим вихрем скорость может быть представлена в виде

$$W = \frac{v_0\Gamma}{4\pi} w(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \chi, p^*, t_0), \quad p^* = \frac{pb}{V}; \quad (2.36)$$

$$w = w^{(1)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \chi, p^*) \sin pt_0 + w^{(2)}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \chi, p^*) \cos pt_0.$$

Указанные формулы позволяют определить скорости, индуцируемые одним подковообразным вихрем, а следовательно, и системой вихрей, моделирующих решетчатое крыло. При расчете нестационарных аэродинамических характеристик применяющиеся вихревые системы полностью совпадают с вихревыми системами, используемыми при решении стационарной задачи.

При движении крыла как жесткого тела безразмерные циркуляции присоединенных вихрей представляют в виде соответствующих производных:

$$\Gamma = \sum_i [\Gamma^q_i q_i + \Gamma^{\dot{q}}_i \dot{q}_i]. \quad (2.36)$$

Система линейных алгебраических уравнений для определения напряженности дискретных вихрей формируется таким же образом, как и при решении стационарной задачи, и представляет собой совокупность условий непротекания в контрольных точках элементов базовых поверхностей:

$$\begin{aligned} |\omega^{(1)}| |\Gamma^q_i| - p^* |\omega^{(2)}| |\Gamma^{\dot{q}}_i| &= |H^*_{q_i}|; \\ |\omega^{(2)}| |\Gamma^q_i| + p^* |\omega^{(1)}| |\Gamma^{\dot{q}}_i| &= 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $|\Gamma^q_i|$, $|\Gamma^{\dot{q}}_i|$, $|H^*_{q_i}|$ — векторы-столбцы производных циркуляций и нормальных составляющих переносной скорости на поверхности тела; $|\omega^{(1)}|$, $|\omega^{(2)}|$ — матрицы коэффициентов, набираемые с учетом соотношений (2.35).

В большинстве практически важных случаев значения безразмерной частоты p^* весьма малы, поэтому рассчитанные значения аэродинамических производных при $p^* \rightarrow 0$ носят достаточно универсальный характер. Учитывая, что при $p^* \rightarrow 0$ квазистационарная составляющая схода $w^{(1)}$ совпадает с соответствующей зависимостью стационарной составляющей w , нестационарная составляющая схода может быть представлена в виде

$$w^{(2)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial p^*} p^*.$$

Система уравнений (2.37) может быть упрощена:

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}| |\Gamma^{qi}| &= |H_{qi}^*|; \\ |\mathcal{W}| |\Gamma^{qi}| &= - \left| \frac{\partial \mathcal{W}^{(2)}}{\partial p^*} \right| |\Gamma^{qi}|, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $\left| \frac{\partial \mathcal{W}^{(2)}}{\partial p^*} \right|$ — матрица коэффициентов, соответствующая матрице $|\mathcal{W}^{(2)}|$ системы (2.37).

Из (2.36) следует, что система (2.38) может быть разделена на две независимые. Решение этих подсистем производится последовательно, вначале определяются значения Γ^{qi} , затем $\dot{\Gamma}^{qi}$, причем величины аэродинамических производных по \dot{q}_i определяются совершенно аналогично, как и в стационарной задаче.

2.9. Сопоставление некоторых результатов

Одним из важнейших является вопрос о том, насколько хорошо предложенные выше методы расчетов согласуются с опытными данными. Если расчеты подвергнуты разнообразной математической проверке и их достаточная точность установлена, указанное сравнение позволяет проверить справедливость гипотез, положенных в основу теории, и установить пределы ее применимости.

Также важно установить погрешности приближенных методов определения аэродинамических характеристик относительно более точных, но требующих громоздких вычислений.

В этих сопоставлениях опытные данные не должны приниматься за абсолютно достоверные, так как в эксперименте имеют место разного рода погрешности, которые довольно трудно оценить, особенно когда речь идет о начальной турбулентности аэродинамической трубы, влиянии державок, используемых для крепления моделей и т. п. Поэтому целесообразно проводить совместный анализ как опытных, так и теоретических данных, обращая особое внимание на те области, где не наблюдается согласования между ними. С этой целью все многообразие экспериментальных данных для различных типов решетчатых крыльев сопоставляется по одной

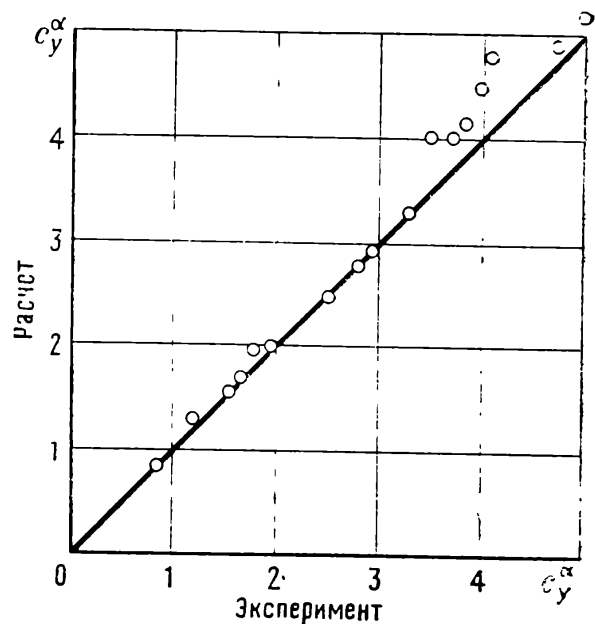


Рис. 2.14. Сравнение расчетных и экспериментальных данных для различных решетчатых крыльев

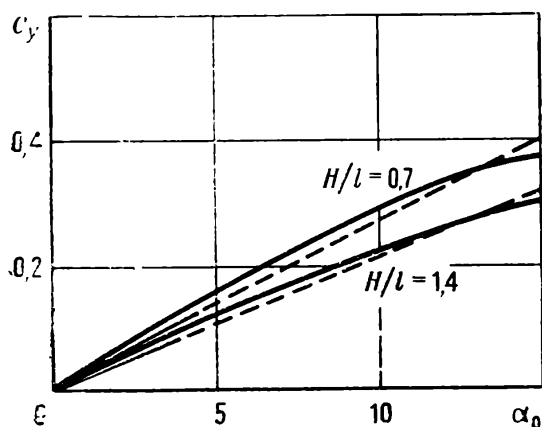


Рис. 2.15. Сравнение теоретических и экспериментальных данных для решетчатых крыльев с $H/l = 0,7$ и $1,4$:

— расчет; — — — эксперимент

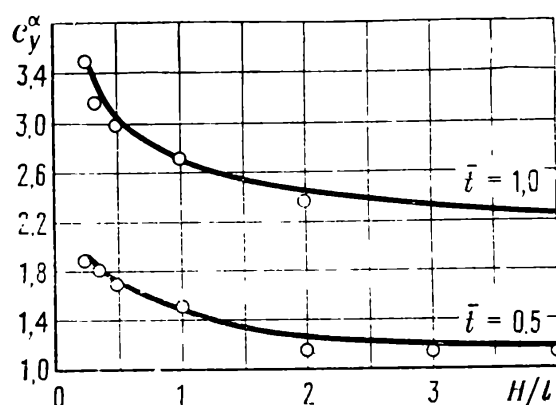


Рис. 2.16. Сравнение теоретических и экспериментальных данных для различных решетчатых крыльев:

— расчет; \circ — эксперимент

из аэродинамических характеристик, определенной для тех же геометрических параметров крыла расчетным путем (рис. 2.14).

Каждая точка на указанном графике соответствует своему крылу. Прямая, проведенная под углом 45° к координатным осям, дает геометрическое место точек, где расчетные данные полностью совпадают с экспериментальными. Чем дальше от прямой лежат точки, тем хуже данные опыта совпадают с расчетными.

Можно отметить, что расчетные данные по производной коэффициента подъемной силы удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, при этом геометрические параметры крыла варьировались в широких пределах ($0,25 \leq H/l \leq 4$; $0,4 \leq \bar{t} \leq 2,5$; $5 \leq n \leq 70$) (см. рис. 2.14).

Систематическое сопоставление по коэффициенту продольного момента m_z и положению фокуса крыла \bar{x}_α провести затруднительно, так как небольшие моменты на крыле при малых хордах b тре-

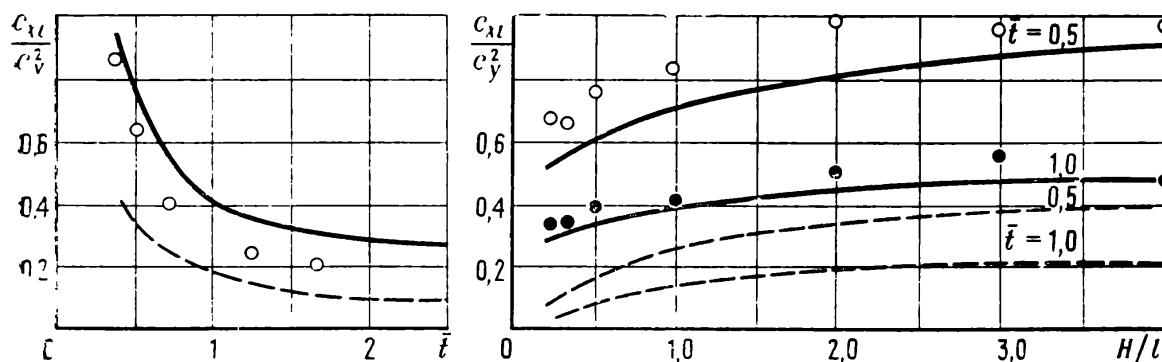


Рис. 2.17. Сравнение теоретических и опытных данных для величины c_{xi}/c_{ya} в зависимости от относительного шага \bar{t} и H :

— без подсасывающей силы; — — — с подсасывающей силой; \circ , \bullet — эксперимент

бовали создания специальных высокочувствительных аэродинамических весов. В тех же случаях, когда было возможно определить эту величину, согласование между опытом и расчетом было удовлетворительным.

На рис. 2.15 даны результаты расчетов и испытаний крыльев с одним и тем же относительным шагом $\bar{t}=0,45$ и различными значениями H/l . Из этих кривых видно, что достаточно хорошее совпадение данных наблюдается сравнительно до больших углов атаки ($\alpha=15...20^\circ$).

Данные, приведенные на рис. 2.16, свидетельствуют о том, что несущие свойства крыла с плоскими планами при $\bar{t}=\text{const}$ изменяются незначительно в области больших значений H/l ($H/l>1,5$), а также показывают достаточно высокую степень совпадения расчетов и экспериментов. Сравнение опытных и расчетных данных коэффициента индуктивного сопротивления крыла дано на рис. 2.17. Коэффициент сопротивления подсчитывался по формуле (2.12) с учетом подсасывающей силы и по зависимости (2.14) без учета подсасывающей силы. Видно, что экспериментальные точки располагаются между двумя теоретическими кривыми.

Заметим, что передняя кромка планов моделей была закруглена по радиусу $r=c/2$ (где c — толщина плана, равная 1,5 мм), а задняя — заострена. Чем острее передняя кромка планов, тем лучше согласование с опытом дает расчет без учета подсасывающей силы (см. рис. 2.17).

Важное теоретическое и практическое значение имеет положение об аэродинамической равноценности крыльев с ортогональным внутренним набором, параллельным высоте и длине решетки, и таким же образом, установленным под углом 45° к окаймляющей раме. В настоящей главе (и в более упрощенном виде в гл. 1) показано, что расчетные характеристики для различно установленного набора должны совпадать. Экспериментальная проверка (рис. 2.18) подтверждает это положение. Опытные зависимости показывают, что эквивалентность рамных и сотовых крыльев практически сохраняется во всем диапазоне углов атаки, включая закритические режимы. Особо следует отметить совпадения нестационарных характеристик $m_z^{\omega z} + m_z^a$ и $m_x^{\omega x}$ для этих двух типов внутреннего набора крыла в наиболее интересном с практической стороны диапазоне изменения относительного шага \bar{t} .

Отдельно остановимся на сопоставлении расчетных данных, полученных на основании теории несущей нити и линейной теории несущей поверхности. Достаточно простой подход к получению аэродинамических характеристик по теории несущей линии позволяет проанализировать влияние различных геометрических параметров крыла, так как зависимости получены в замкнутом виде.

На рис. 2.19 показано сравнение расчетов по теории несущей линии и несущей поверхности для трех значений относительных

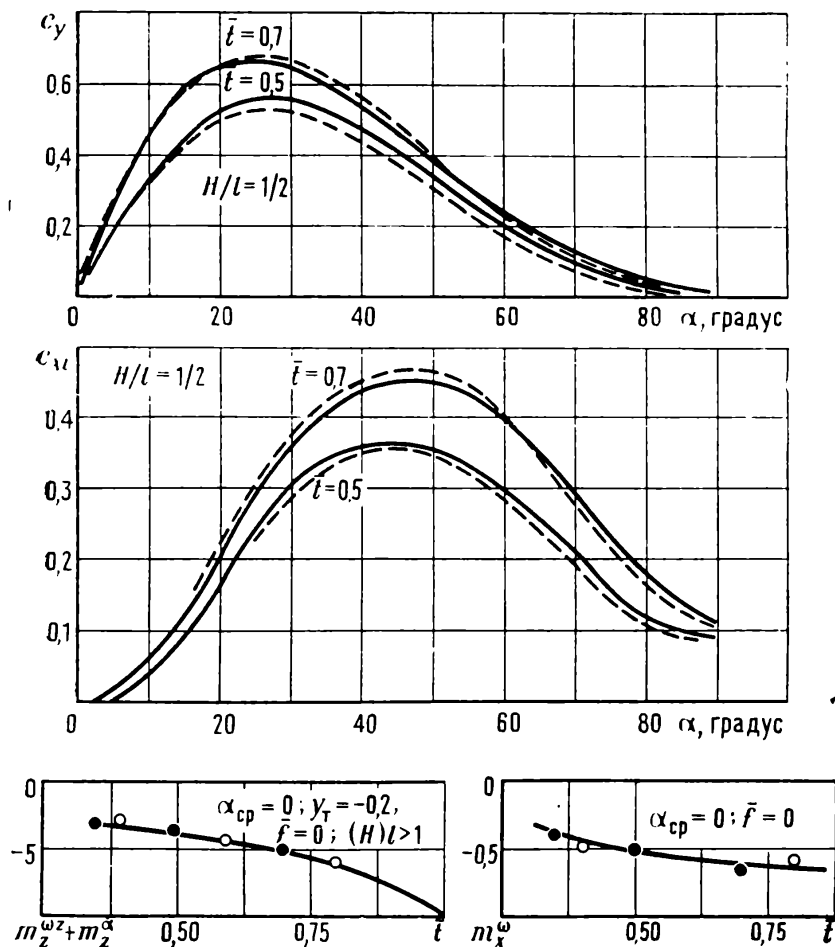


Рис. 2.18. Сравнение экспериментальных данных для рамных и сотовых решетчатых крыльев:

— рамные крылья; --- сотовые крылья

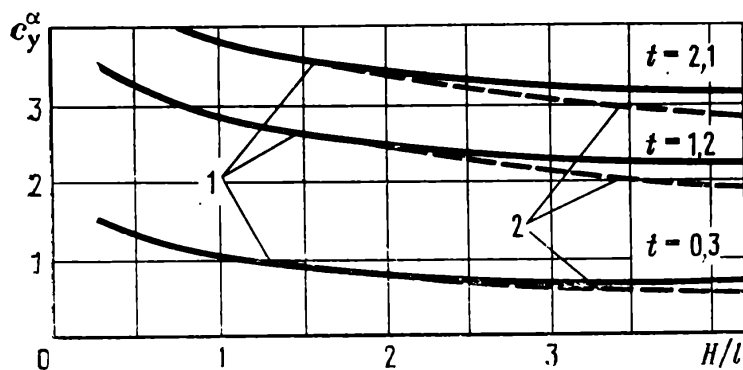


Рис. 2.19. Сравнение расчетных данных по теории несущей линии и теории несущей поверхности:

1 — теория несущей линии; 2 — теория несущей поверхности

шагов \bar{t} при числе планов, равном 5. Отмечается убедительное совпадение данных по c_y^α на небольших значениях H/l (до $H/l = 2 \dots 2,5$) и некоторые расхождения в районе $H/l = 4,0$. Отметим, что метод, основанный на теории несущей поверхности, более универсален и позволяет вести расчет аэродинамических характеристик крыльев сложной конфигурации, например кольцевых решеток, решеток с непрямоугольным очертанием внешней рамы, с вырезами и т. п.

Глава 3

Решетчатое крыло на больших дозвуковых и трансзвуковых скоростях**3.1. Параметры подобия**

В линейной постановке задачи об установившемся движении решетчатого крыла, составленного из тонких пластин, потенциал возмущенных скоростей $\Phi(x, y, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.1)$$

Граничными условиями на поверхности планов является условие непротекания, записанное в виде (2.15).

Представим потенциал $\Phi(x, y, z)$ в виде суммы

$$\Phi(x, y, z) = Vb [\varphi^a(\xi, \eta, \zeta) \alpha + \varphi^{\omega z}(\xi, \eta, \zeta) \omega_z + \varphi^{\omega x}(\xi, \eta, \zeta) \omega_x], \quad (3.2)$$

где $\xi = x/b_0$, $\eta = y/b_0$, $\zeta = z/b_0$.

Подставляя (3.2) в (3.1) и группируя члены при одинаковых кинематических параметрах, получим три уравнения:

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi^a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^a}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi^a}{\partial \zeta^2} &= 0; \\ (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi^{\omega x}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{\omega x}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{\omega x}}{\partial \zeta^2} &= 0; \\ (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi^{\omega z}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{\omega z}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{\omega z}}{\partial \zeta^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Граничные условия на поверхности планов для производных потенциалов скоростей будут следующими:

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial \eta} = -1; \quad \frac{\partial \varphi^{\omega z}}{\partial \eta} = -\xi_0; \quad \frac{\partial \varphi^{\omega x}}{\partial \eta} = -\zeta_0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим два крыла, для которых условия движения будут подобны. Обозначим через $x, y, z, b, M_\infty, \Phi(x, y, z)$ величины, относящиеся к движению первого решетчатого крыла. Для второго решетчатого крыла они будут $x', y', z, M_\infty', \Phi'(x', y', z')$.

Пусть эти величины связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= s_x x; \quad y' = s_y y; \quad z' = s_z z; \quad (1 - M_\infty'^2) = s_\beta (1 - M_\infty^2); \\ \varphi'(\xi', \eta', \zeta') &= s_\varphi \varphi(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где масштабные коэффициенты s пока произвольны.

Безразмерные координаты связаны зависимостями

$$\xi' = \xi; \quad \eta' = \frac{s_y}{s_x} \eta; \quad \zeta' = \frac{s_z}{s_x} \zeta. \quad (3.6)$$

Если уравнения (3.3) записаны для движения первого решетчатого крыла, тогда уравнения для функций φ^α , φ^{ω_z} , φ^{ω_x} второго крыла с учетом (3.5) и (3.6) можно записать в виде

$$\frac{1}{s_\beta s_\varphi} (1 - M_\infty'^2) \frac{\partial^2 \varphi_j'}{\partial \xi'^2} + \frac{s_y^2}{s_x^2 s_\varphi} \frac{\partial \varphi_j'}{\partial \eta'^2} + \frac{s_z^2}{s_x^2} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial^2 \varphi_j'}{\partial \zeta'^2} = 0; \quad (j = \alpha_1, \omega_z, \omega_x). \quad (3.7)$$

Граничные условия на поверхности планов второго крыла будут следующими:

$$\frac{s_y}{s_x s_\varphi} \frac{\partial \varphi'^\alpha}{\partial \eta'} = -1; \quad \frac{s_y}{s_x s_\varphi} \frac{\partial \varphi'^{\omega_z}}{\partial \eta'} = -\xi'_0; \quad \frac{s_y}{s_x s_\varphi} \frac{\partial \varphi'^{\omega_x}}{\partial \eta'} = -\frac{s_x}{s_z} \zeta'_0. \quad (3.8)$$

Из сравнения (3.3) и (3.7), (3.4) и (3.8) следует, что для подобия движения двух крыльев необходимо потребовать выполнения следующих соотношений между масштабными коэффициентами:

$$\frac{s_\beta s_y}{s_x} = 1; \quad \frac{s_z}{s_y} = 1; \quad \frac{s_y}{s_x s_\varphi} = 1; \quad \frac{s_x}{s_z} = 1. \quad (3.9)$$

Из условия (3.9) с учетом (3.6) получим соотношения между геометрическими параметрами сравниваемых решетчатых крыльев:

$$\frac{s_\beta s_y}{s_x} = \frac{\beta' t' b}{\beta t b'} = 1; \quad \frac{s_y}{s_z} = \frac{H' l}{H l'} = 1; \quad \frac{s_\beta s_y}{s_x} = \frac{\beta' H' b}{\beta H b'} = 1; \quad (3.10)$$

$$\frac{s_\beta s_z}{s_x} = \frac{\beta' l' b}{\beta l b'} = 1; \quad \beta = 1 \sqrt{1 - M_\infty'^2}.$$

Из этого преобразования координат найдем связь между безразмерными геометрическими параметрами сравниваемых решетчатых крыльев:

$$\beta \bar{t} = \beta' \bar{t}'; \quad \bar{H} = \bar{H}'; \quad n = n', \quad (3.11)$$

где $\beta = 1 \sqrt{1 - M_\infty'^2}$; $\beta' = \sqrt{1 - M_\infty'^2}$; $\bar{H} = H/l$; $\bar{H}' = H'/l$.

Параметрами подобия будут

$$\bar{t}\beta, \bar{H}, n. \quad (3.12)$$

Для производных аэродинамических коэффициентов можно записать

$$c_{y\alpha}\beta = F_1(\bar{t}\beta, \bar{H}, n); \quad m_z^{\omega_z}\beta = F_2(\bar{t}\beta, \bar{H}, n); \quad m_x^{\omega_x}\beta = F_3(\bar{t}\beta, \bar{H}, n). \quad (3.13)$$

3.2. Метод расчета производной c_{ya}^α на докритических скоростях ($M_\infty \leq M_{кр1}$)

В гл. 2 изложен метод расчета производной коэффициента подъемной силы по углу атаки c_{ya}^α решетчатого крыла в несжимаемой среде и получена формула (2.10).

Соотношения подобия для производных аэродинамических коэффициентов решетчатых крыльев позволяют свести задачу к определению производной c_{ya}^α преобразованного решетчатого крыла, движущегося в несжимаемой среде.

Действительно, при выполнении равенств

$$\bar{t}\beta = \bar{t}'\beta'; n = n'; \bar{H} = \bar{H}'; \beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}; \beta' = \sqrt{1 - M_\infty'^2}$$

для производной c_{ya}^α имеем

$$\beta c_{ya}^\alpha(\bar{t}, n, \bar{H}, M_\infty) = \beta' c_{ya}^\alpha(\bar{t}', n', \bar{H}', M_\infty')$$

или

$$F(\bar{t}, \beta, n, H) = F(\bar{t}'\beta', n', \bar{H}').$$

Для несжимаемого потока $M_\infty = 0$, тогда

$$\beta c_{ya}^\alpha(\bar{t}, n, \bar{H}, M_\infty) = c_{yaM}^\alpha(\bar{t}_M, n_M, H_M). \quad (3.14)$$

В этом соотношении «М» отмечены величины, относящиеся к преобразованному крылу в несжимаемом потоке.

Учитывая соотношения (3.12) и (3.14), можно прийти к выводу, что параметры преобразованного и исходного крыльев связаны соотношениями

$$\bar{t}_M = \bar{t}(\sqrt{1 - M_\infty^2}); n_M = n; \bar{H}_M = \bar{H}. \quad (3.15)$$

Для производной c_{ya}^α крыла, движущегося в сжимаемой среде, формула (2.10) примет вид

$$c_{ya}^\alpha = \frac{c_{ya\text{срМ}}^\alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{c_{ya\text{срМ}}^\alpha k_{HM}}{4\bar{t}}}, \quad (3.16)$$

где $c_{ya\text{срМ}}^\alpha = c_{ya}^\alpha(n_M, \bar{t}_M)$ — среднее значение производной соответствующего преобразованного полиплана бесконечного размаха; $k_{HM} = k_{HM}\left[\frac{H_M}{l_M}; \bar{t}_M(n-1)\right]$ — коэффициент, учитывающий конечность размаха преобразованного крыла.

Значения $c_{ya\text{срМ}}^\alpha$ и k_{HM} определяются по графикам, приведенным на рис. 2.9 и 2.10 для преобразованного решетчатого крыла по соотношениям (3.15).

Определим предельное значение для производной $c_{y\alpha}^\alpha$ решетчатого крыла при $M \rightarrow 1$. По мере увеличения числа M_∞ относительный шаг планов преобразованного крыла \bar{t}_M уменьшается и при числе M_∞ , стремящемся к нулю, \bar{t}_M также стремится к нулю.

При весьма малых значениях относительного шага производная для полиплана в несжимаемой среде

$$c_{y\alpha \text{ срМ}}^\alpha = \frac{2\pi}{n} + A \bar{t}_M,$$

где A — некоторая постоянная.

Тогда, при числе M_∞ , близком к единице, для производной $c_{y\alpha}^\alpha$ будем иметь

$$c_{y\alpha}^\alpha = \frac{\frac{2\pi}{n} + A \bar{t}_M}{\sqrt{1 - M_\infty^2 + \frac{\left(\frac{2\pi}{n} + A \bar{t}_M\right) \bar{k}_{HM}}{4\bar{t}}}}. \quad (3.17)$$

При $M_\infty \rightarrow 1$ из (3.17) получим

$$c_{y\alpha M_\infty=1}^\alpha = \frac{4\bar{t}}{k_{H0}}; \quad k_{H0} = \lim_{\bar{t}_M \rightarrow 0} k_{HM}. \quad (3.18)$$

На графике рис. 3.1 приведена зависимость произведения $c_{y\alpha}^\alpha \sqrt{1 - M_\infty^2}$ от параметра подобия $\bar{t} \sqrt{1 - M_\infty^2}$ для решетчатых крыльев при $n=13,8$ и 8 и $\bar{H}=1$ и $0,5$.

Зависимости $c_{y\alpha}^\alpha = f(M_\infty)$, рассчитанные по формулам (3.16) и (3.18), представлены на рис. 3.2 для двух решетчатых крыльев. По-

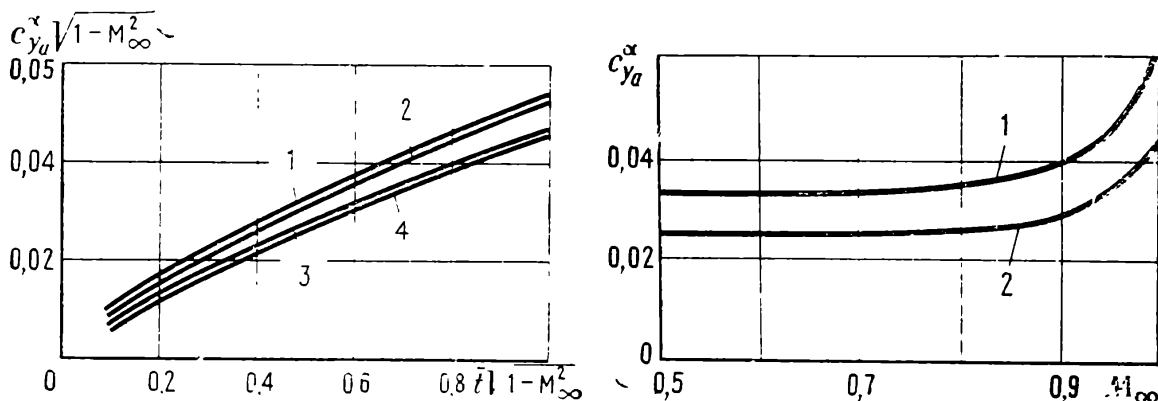


Рис. 3.1. Зависимость производной коэффициента подъемной силы по углу атаки от параметров подобия решетчатого крыла:

1 — $n=8$; $\bar{H}=0,5$; 2 — $n=13,8$; $\bar{H}=0,5$; 3 — $n=8$; $\bar{H}=1$; 4 — $n=13,8$; $\bar{H}=1$

Рис. 3.2. Изменение коэффициента подъемной силы по числу M_∞ на докритических скоростях:

1 — $n=8$; $\bar{H}=0,5$; $\bar{t}=0,5$; 2 — $n=13,8$; $\bar{H}=1$; $\bar{t}=0,5$

лученные результаты справедливы в том случае, когда крыло обтекается потоком без образования местных сверхзвуковых зон, т. е. до чисел $M_\infty \leq M_{кр1}$.

3.3. О теории несущей поверхности решетчатого крыла при больших дозвуковых скоростях

В линейном приближении нетрудно учесть влияние сжимаемости среды при больших дозвуковых скоростях и в рамках схемы несущей поверхности.

При неустановившемся движении уравнения для потенциала возмущенных скоростей (3.1) в стандартной системе координат (см. рис. 1.4) будут иметь вид [6].

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2M_\infty \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.19)$$

Введением аффинного преобразования для координат $x = x_M \sqrt{1 - M_\infty^2}$, $y = y_M$, $z = z_M$ соотношение (3.19) для потенциала скоростей приводится к уравнению Лапласа для потенциала скоростей при установившемся движении. Поэтому задача сводится к расчету аффинно-преобразованного решетчатого крыла по методу, изложенному в разд. 2.5 и 2.6, и затем пересчету полученных аэродинамических характеристик на большие дозвуковые скорости [5, 6].

Несколько сложнее решается задача по определению производных аэродинамических коэффициентов с точками. Здесь кроме преобразования координат требуется учесть, что возмущения в сжимаемой среде распространяются с конечной скоростью, равной скорости звука.

В итоге задача сводится к последовательному решению нескольких систем алгебраических уравнений типа (2.22), но с новыми правыми частями.

Более подробно о подходах к решению этой задачи можно прочитать в монографии [6].

В гл. 11 приводятся результаты систематических расчетов производных аэродинамических коэффициентов при неустановившемся движении по теории несущей поверхности, проведенных на основе изложенного выше подхода.

3.4. Метод расчета C_{ya}^α на закритических дозвуковых скоростях ($M_\infty > M_{кр1}$)

Производная C_{ya}^α , полученная по формуле (3.16), непрерывно возрастает при увеличении числа M_∞ от нуля до единицы

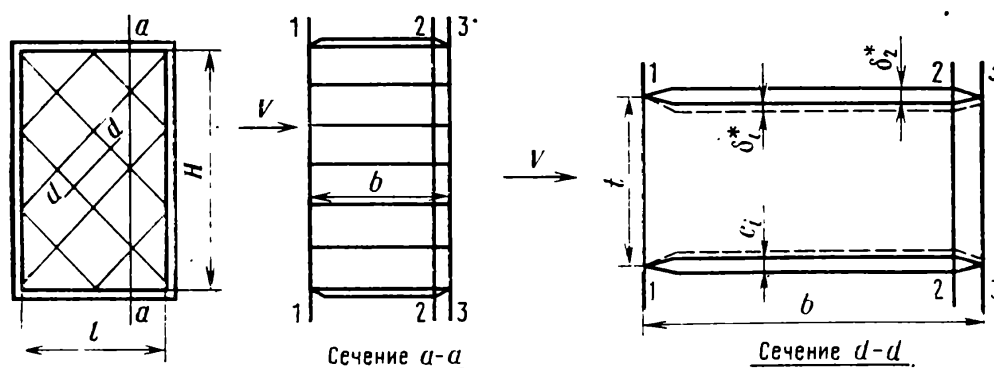


Рис. 3.3. Представление решетчатого крыла в виде канала переменной площади

(см. рис. 3.2). Экспериментальные исследования несущих свойств решетчатых крыльев показывают, что при больших дозвуковых скоростях невозмущенного потока производная c_{ya}^a начиная с некоторого числа M_∞ начинает уменьшаться. Рассмотрим причину такого изменения c_{ya}^a при увеличении числа M_∞ . Для этого представим каждую соту решетчатого крыла как канал с переменной площадью сечений (рис. 3.3). Отношение наименьшей площади в сечении 2—2 к площади входного сечения 1—1 (см. рис. 3.3, сечение $d—d$) зависит от толщины планов внутреннего набора и толщины пограничного слоя, который образуется на планах решетчатого крыла. Очевидно, что в сечении 2—2 с наименьшей площадью скорость будет больше, чем скорость невозмущенного потока и скорость в сечении 1—1. По мере увеличения скорости невозмущенного потока скорость в сечении 2—2 будет увеличиваться и при некотором малом числе M_∞ станет равной скорости звука.

Скорость невозмущенного потока, при которой в сечениях сот образуется скорость звука, была названа первой критической скоростью, а соответствующее число M_∞ обозначено $M_{кр1}$. Формула (3.16) остается справедливой только до этого числа $M_{кр1}$, так как характер обтекания решетчатого крыла при $M_\infty > M_{кр1}$ будет качественно отличаться от его обтекания при докритических скоростях.

Рассмотрим приближенный метод определения c_{ya}^a при закритических числах $M_\infty > M_{кр1}$. Поскольку будет определяться производная c_{ya}^a при нулевом угле атаки, будем рассматривать решетчатое крыло при $\alpha = 0$. Обтекание решетчатого крыла приближенно будем считать одномерным и заменим его эквивалентным одномерным каналом, площадь проходного сечения которого изменяется вдоль потока так же, как площади проходных сечений решетчатого крыла.

Проходные площади сечений крыла, перпендикулярные скорости невозмущенного потока, определим с учетом толщины планов внутреннего набора c и средней толщины вытеснения пограничного слоя δ^* в каждом сечении. Проходная площадь квадратной соты в любом i -м сечении, расположенном между входным (1—1) и выходным (2—2) сечениями (см. рис. 3.3, сечение $d—d$), будет равна $[t - (c + 2\delta_i^*)]^2$. Количество полных сот $j = 2j_H j_l$, где $j_H = \frac{H}{t\sqrt{2}}$ — число диагоналей сот по высоте крыла H , $j_l = \frac{l}{t\sqrt{2}}$ — число диагоналей сот по размаху l .

Проходная площадь сотового решетчатого крыла и эквивалентного канала.

$$F_i = [\bar{t} - (c_i + 2\delta_i^*)]^2 \frac{Hl}{t^2} - [Hl - (H - 2\delta_i^*)(l - 2\delta_i^*)], \quad (3.20)$$

где c_i — толщина профиля плана; δ_i^* — толщина вытеснения пограничного слоя в сечении i (рис. 3.3).

Второй член в правой части этого соотношения учитывает толщину вытеснения пограничного слоя на внутренней поверхности окантовывающей рамы. Пренебрегая в (3.20) квадратами и произведениями малых величин c_i и δ_i^* , получим

$$F_i = Hl - \frac{2Hl}{t} \left[c_i + \delta_i^* \left(2 + \frac{\bar{H} + 1}{n - 1} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Площадь входного сечения $1-1$

$$F_1 = Hl,$$

отношение площадей

$$\frac{F_i}{F_1} = 1 - \frac{2}{t} \left[c + \delta^* \left(2 + \frac{\bar{H} + 1}{n - 1} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Для рамных решетчатых крыльев аналогичным путем можно получить

$$\frac{F_i}{F_1} = 1 - \frac{1}{t} \left[\frac{n-2}{n-1} c + 2\delta_i^* \left(1 - \frac{\bar{H}}{n-1} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Таким образом, эквивалентный канал выбирается таким образом, чтобы площади его проходных сечений изменялись по закону, соответствующему соотношению (3.22) для сотового решетчатого крыла и (3.23) для рамного.

Определим $M_{кр1}$, рассматривая течение газа через эквивалентный канал (рис. 3.4). Поскольку проходные сечения канала определены с учетом толщины вытеснения пограничного слоя, воспользуемся соотношением для идеального газа. Нетрудно видеть, что пока в любом сечении канала (см. рис. 3.4, а) скорости дозвуковые

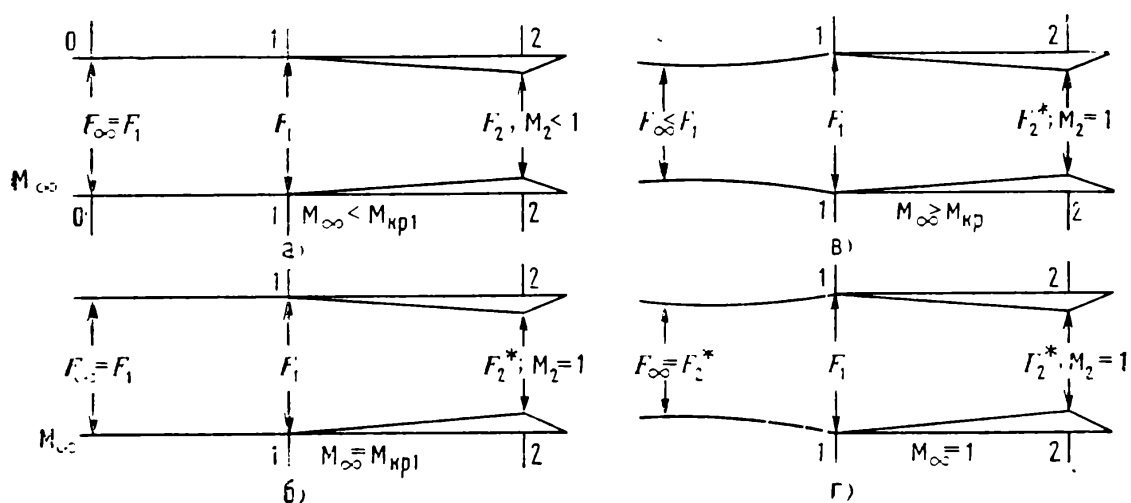


Рис. 3.4. Форма струн газа при обтекании канала эквивалентного решетчатому крылу, при числах M_∞ , больших $M_{кр1}$ и меньших $M_{кр2}$

имеют место соотношения $F_\infty = F_1$, $M_\infty = M_1$, $V = V_1$, $\rho_\infty = \rho_1$, $p_\infty = p_1$, где F_∞ — площадь струи невозмущенного потока; V , p_∞ , ρ_∞ — скорость, давление, плотность невозмущенного потока соответственно; V_1 , p_1 , ρ_1 , M_1 — скорость, давление, плотность, число Маха в сечении 1—1 на входе в канал.

При $M_\infty = M_{кр1}$ сечение 2—2 с наименьшей проходной площадью станет критическим (см. рис. 3.4, б). Это значит, что

$$V_2 = V^* = a^*; M_2 = 1; \rho_2 = \rho^*; F_2 = F_2^*; F_\infty = F_1,$$

причем звездочками отмечены критические значения соответствующих параметров.

Если известно отношение площадей F_2/F_1 , то можно найти $M_{кр1}$. Это отношение вычисляется по (3.22) или по (3.23) для сечения 2—2, т. е. при $i=2$. С другой стороны, для одномерного изоэнтропийного течения можно записать соотношение

$$\frac{F^*}{F_\infty} = \frac{F_2^*}{F_1} = M_\infty \left[\frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right) \right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}. \quad (3.24)$$

Решая совместно графически соотношения (3.22) и (3.24) или (3.23) и (3.24), можно определить $M_{кр1}$, т. е. M_∞ , при котором в сечении с наименьшей проходной площадью (в данном случае в сечении 2—2) возникает скорость, равная скорости звука.

На рис. 3.5 приведен график зависимости соотношения F_2^*/F_1 от M_∞ , рассчитанной по соотношению (3.24). Вычислив по формуле

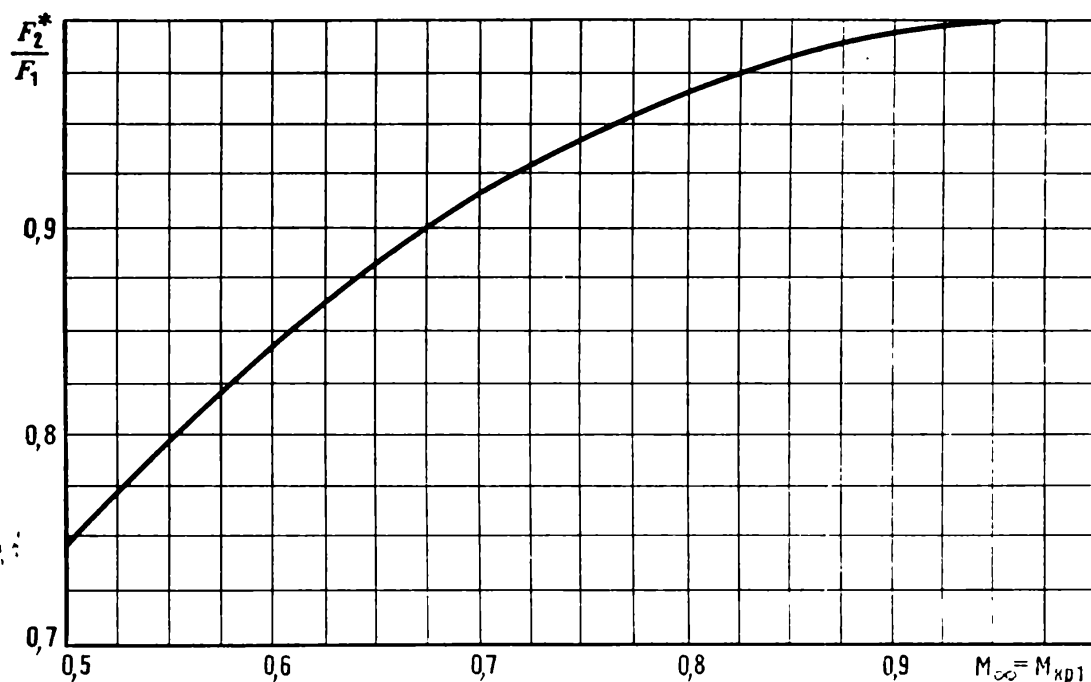


Рис. 3.5. График для определения первого критического числа $M_{кр1}$

(3.22) или (3.23) отношение F_2^*/F_1 , по этому графику определяем $M_{кр1}$.

При $M_\infty > M_{кр1}$ сечение 2—2 остается критическим. Все сечения эквивалентного канала будут зафиксированы и каждому его сечению, в том числе и входному (сечение 1—1), будет соответствовать вполне определенное число Маха независимо от M_∞ . Следовательно, при $1 > M_\infty > M_{кр1}$ поток непосредственно перед крылом притормаживается (см. рис. 3.4, в). Число M_1 на входе в канал будет меньше числа M_∞ , давление p_1 и плотность ρ_1 в этом сечении будут большими, чем давление p_∞ и плотность ρ_∞ в потоке. При этом торможение потока перед крылом можно считать изоэнтропийным.

Пусть крыло при $M_\infty > M_{кр1}$ работает в некотором фиктивном пространстве. При этом произведение производной $c_{y\alpha}^a$ на скоростной напор в реальном потоке равно такому же произведению в фиктивном потоке, т. е.

$$c_{y\alpha}^a q_\infty = c_{y\alpha\Phi}^a q_{\infty\Phi}. \quad (3.25)$$

Допустим, что параметры невозмущенного потока в фиктивном пространстве равны параметрам газа перед входным сечением эквивалентного канала, т. е.

$$p_{\infty\Phi} = p_1; \rho_{\infty\Phi} = \rho_1; M_{\infty\Phi} = M_1; V_\Phi = V_1; q_{\infty\Phi} = q_1.$$

При таком выборе параметров фиктивного пространства картина течения будет такой же, как в физическом при $M_\infty = M_{кр1}$. Отсюда следует, что производная $c_{y\alpha}^a$ в фиктивном пространстве будет равна $c_{y\alpha\кр1}^a$ в реальном потоке при $M_\infty = M_{кр1}$, поэтому

$$c_{y\alpha\Phi}^a q_{\infty\Phi} = c_{y\alpha\кр1}^a q_1.$$

Учитывая это соотношение и соотношение (3.25), производную $c_{y\alpha}^a$ можно рассчитать по формуле

$$c_{y\alpha}^a = c_{y\alpha\кр1}^a \frac{q_1}{q_\infty}, \quad (3.26)$$

где $c_{y\alpha\кр1}^a$ — производная коэффициента подъемной силы по углу атаки при числе $M_\infty = M_{кр1}$; q_1 — скоростной напор в сечении 1—1; q_∞ — скоростной напор в невозмущенном потоке.

Производная $c_{y\alpha\кр1}^a$ вычисляется по формуле (3.16).

Рассмотрим методику определения отношения q_1/q_∞ при числах $M_\infty > M_{кр1}$.

Известно, что скоростной напор можно вычислить по формуле $q = \frac{\kappa \rho M^2}{2}$. Для невозмущенного потока q_∞ рассчитывается по известным параметрам p_∞ и M_∞ .

Для определения числа M в сечении 1—1 можно воспользоваться уравнением, подобным уравнению (3.24), где вместо площади

критического сечения F_2^* при $M_\infty = M_{кр1}$ будет площадь критического сечения $F_2'^*$ при $M_\infty > M_{кр1}$, а вместо числа M_∞ будет M_1 :

$$\frac{F_2'^*}{F_1} = M_1 \left[\frac{2}{\kappa + 1} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \right) \right]^{-\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}. \quad (3.27)$$

Отношение площадей $F_2'^*/F$ определяется по соотношению (3.22). Таким образом, решая систему уравнений (3.27) и (3.22), можно определить число M_1 .

Площадь критического сечения F_2' при $M_\infty > M_{кр1}$, строго говоря, не будет равна площади критического сечения F_2^* при $M_\infty = M_{кр1}$ из-за изменения толщины пограничного слоя при увеличении M_∞ от $M_{кр1}$ до значения $M_1 > M_{кр1}$. Однако расчеты показывают, что этим изменением площади критического сечения F_2^* можно пренебречь и принять $M_1 = M_{кр1}$. Это значительно упрощает расчеты, не снижая заметно точности приближенного метода расчета c_{ya}^a .

Давление p_1 можно вычислить из условия изэнтропийного торможения потока перед крылом:

$$p_1 = p_\infty \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}}. \quad (3.28)$$

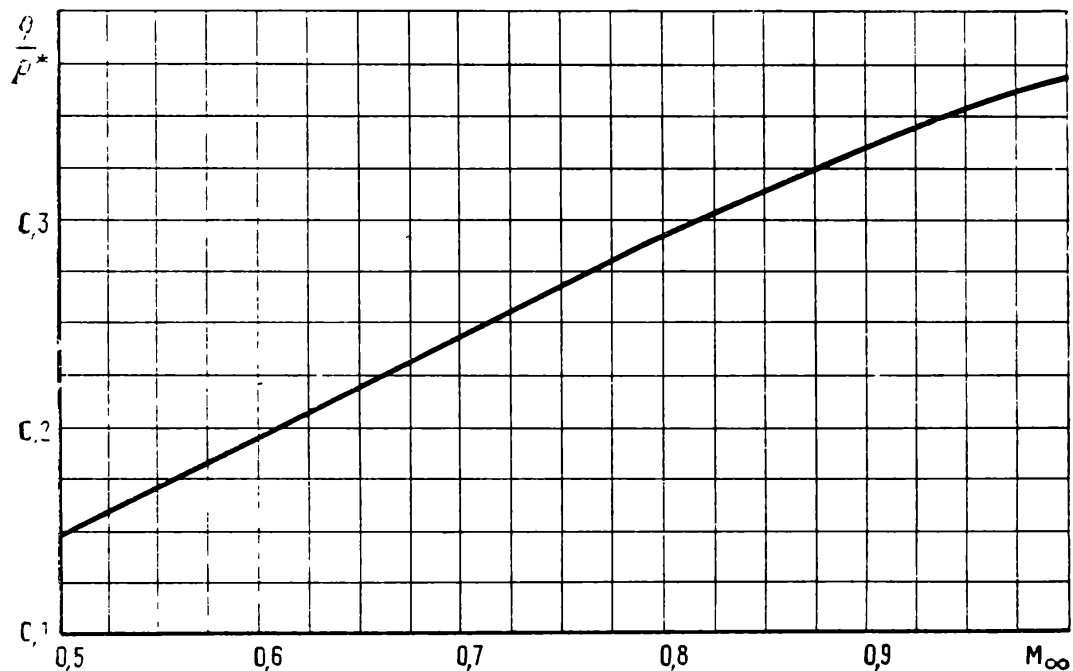


Рис. 3.6. Зависимость отношения скоростного напора к полному давлению от числа M_∞

Для вычисления отношений q_1/q_∞ в зависимости от числа M_∞ удобно пользоваться графиком $\frac{q}{p^*} = f(M_\infty)$, где p^* — давление торможения. Этот график представлен на рис. 3.6. Поскольку течение перед крылом изоэнтропийное, то

$$\frac{q_1}{q_\infty} = \frac{(q/p^*)_1}{(q/p^*)_\infty}, \quad (3.29)$$

где $(q/p^*)_1$ определяется по рис. 3.6 для числа $M_\infty = M_{кр1}$, а $(q/p^*)_\infty$ — для M_∞ .

В изложенном выше методе расчета c_{ya}^α при $M_\infty > M_{кр1}$ сверхзвуковая зона и скачки уплотнения, образующиеся за критическим сечением, не принимались во внимание. Из эксперимента следует, что область сверхзвукового сечения со скачками уплотнения относительно невелика и вследствие этого не оказывает заметного влияния на несущие свойства крыла. Однако, как будет показано ниже, образование сверхзвуковых зон и скачков уплотнения за критическим сечением при $M_\infty > M_{кр1}$ приводит к существенному увеличению коэффициента сопротивления решетчатого крыла.

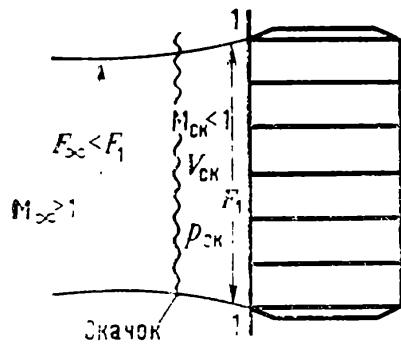
3.5. Метод расчета c_{ya}^α на малых сверхзвуковых скоростях ($1,0 \leq M_\infty \leq M_{кр2}$)

При малых сверхзвуковых скоростях перед крылом образуется отсоединенный скачок, скорости за которым дозвуковые. Воспользуемся этим обстоятельством для определения производной c_{ya}^α на малых сверхзвуковых скоростях. Допустим, что скачок перед крылом является прямым (рис. 3.7). Фотографии спектров обтекания планов решетчатого крыла свидетельствуют о правомерности такого допущения. В этом случае можно принять, что крыло работает в равномерном дозвуковом потоке, число $M_{ск}$ которого определяется по известному соотношению для определения числа M за прямым скачком

$$M_{ск} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2}{\kappa M_\infty^2 \frac{\kappa - 1}{2}}}. \quad (3.30)$$

Значение производной $c_{ya_{ск}}^\alpha$, соответствующей числу $M_{ск}$, можно найти по методике предыдущего раздела. Тогда характеристика c_{ya}^α при $M > 1$ будет следующей:

$$c_{ya}^\alpha = c_{ya_{ск}}^\alpha \cdot \frac{q_{ск}}{q_\infty}, \quad (3.31)$$



где

$$\frac{q_{ск}}{q_\infty} = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}. \quad (3.32)$$

Зависимость числа M за прямым скачком $M_{ск}$ от числа M_∞ приведена на рис. 3.8, из которого можно определить $M_{ск}$

Рис. 3.7. Схема обтекания элемента решетчатого крыла на малых сверхзвуковых скоростях

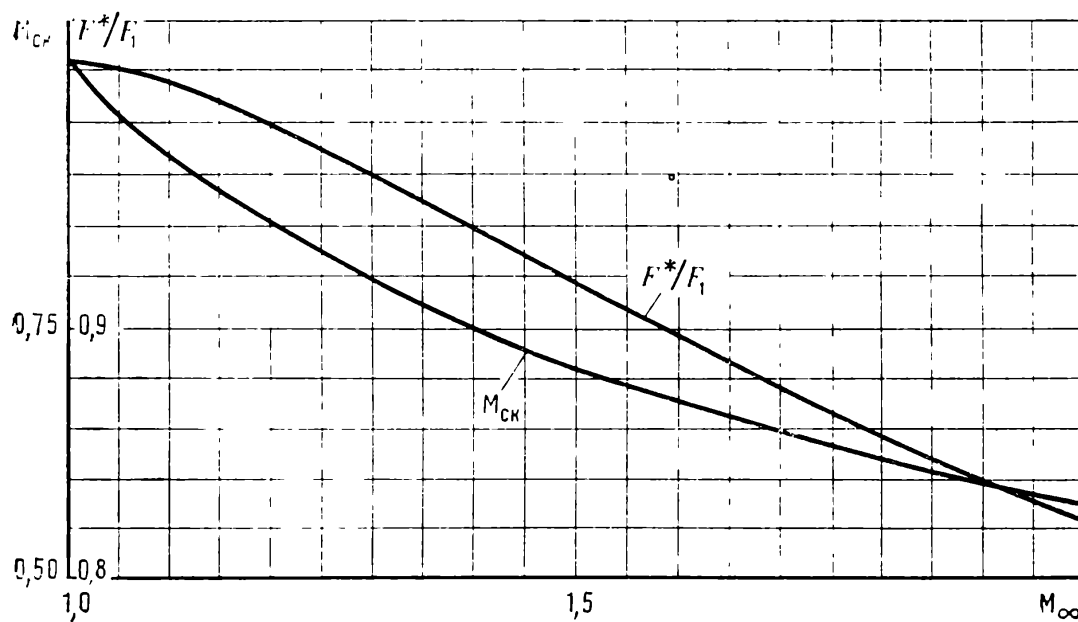


Рис. 3.8. Графики для определения числа $M_{ск}$ за прямым скачком и второго критического числа $M_{кр2}$

по данному числу M_∞ . По графику зависимости c_{ya}^a от M_∞ , построенному на основании расчета с помощью метода, который изложен в предыдущем разделе для диапазона $1 > M_\infty > M_{кр1}$, определяется c_{ya}^a для числа M , равного $M_{ск}$. Отношение $q_{ск}/q_\infty$ находится из рис. 3.9, где дан график зависимости этого отношения от числа M_∞ .

Соотношение (3.31) справедливо при числах M_∞ , при которых скачок перед крылом остается отсоединенным (рис. 3.10, а).

По мере увеличения числа M_∞ отсоединенный скачок перемещается к сечению 1—1 и при некотором числе M_∞ , которое обозначаем через $M_{кр2}$, располагается на входном сечении 1—1 (см. рис. 3.10, б).

Заменив крыло эквивалентным каналом, проходные сечения которого определяются по методике разд. 3.4, рассмотрим течение идеального газа через этот канал при $M_\infty > 1$ и найдем число $M_{кр2}$.

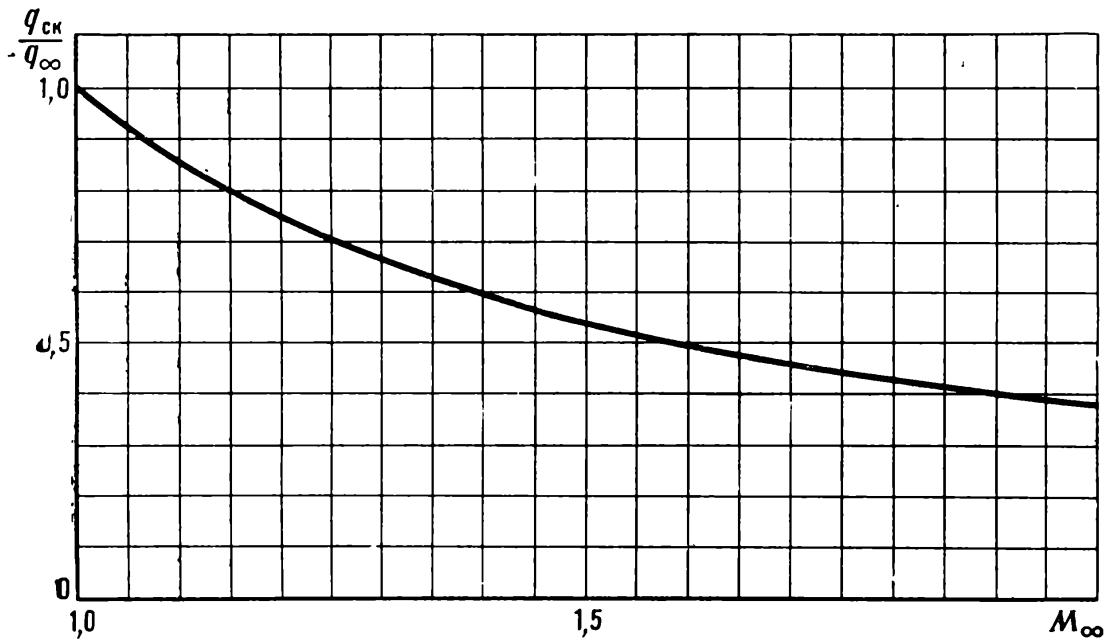
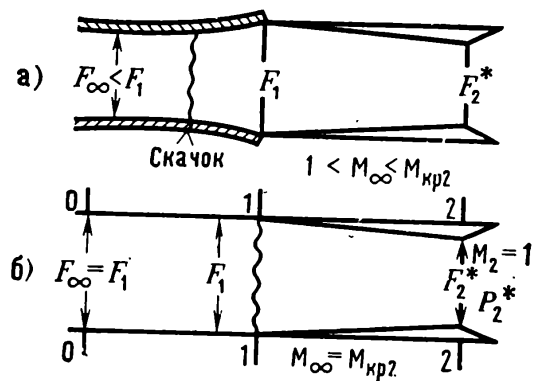


Рис. 3.9. Зависимость отношения скоростного напора за скачком к скоростному напору невозмущенного потока от числа M_∞

Рис. 3.10. Схема к расчету производной коэффициента подъемной силы на малых сверхзвуковых скоростях



Причиной образования отсоединенного скачка перед каналом является ограничение расхода через наименьшее сечение 2—2 канала, вследствие того, что газодинамические параметры в этом сечении принимают критические значения. Поэтому при $M_\infty < M_{кр2}$ площадь сечения F_∞ будет меньше площади входа канала F_1 и часть газа, соответствующая заштрихованной площади (см. рис. 3.10, а), не попадает в канал. Соотношения между параметрами будут следующими:

$$F_\infty < F_1; M_{ск} > M_{1ск}; \rho_{ск} < \rho_\infty; M_2 = 1.$$

Условием образования присоединенного скачка является

$$F_\infty \rho_\infty V = F_{ск} \rho_{ск} V_{ск} = F_{1ск} \rho_{1ск} V_{ск} = F_2 \rho^* V^*.$$

Схема течения, соответствующая этому случаю, показана на рис. 3.10, б, причем

$$F_\infty = F_1; M_{ск} = M_{1ск}; \rho_{ск} = \rho_{1ск}; M_\infty = M_{кр2}.$$

Между сечениями 1—1 и 2—2 (см. рис. 3.10, б) принимаем течение изэнтропическим, поэтому соотношение (3.24) при $M_{ск} =$

$=M_{1ск}$ остается справедливым. Тогда соотношения (3.24) и (3.30) приводят к формуле

$$\frac{F^*}{F_1} = \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2\right)^{1/2} \left(\kappa M_\infty^2 - \frac{\kappa - 1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}}{\left(\frac{\kappa + 1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}. \quad (3.33)$$

Решая графически уравнения (3.22) и (3.33), найдем $M_{кр2}$. Зависимость $F^*/F_1 = f(M_\infty)$ приведена на рис. 3.8. Этот график можно использовать для определения $M_{кр2}$.

Для этого по соотношению (3.22) определяется F^*/F_1 для критического, т. е. наименьшего сечения эквивалентного канала.

По графику (3.8) для этой величины определяется число M_∞ соответствующее второму критическому числу $M_{кр2}$, при котором скачок станет присоединенным.

Таким образом, в диапазоне чисел $1 \leq M_\infty < M_{кр2}$ производная c_{ya}^* определяется по формуле (3.31). При $M = M_{кр2}$ скачок становится присоединенным. При дальнейшем возрастании M_∞ на передних кромках крыла образуются косые скачки, а планы решетчатого крыла будут обтекаться сверхзвуковым потоком.

3.6. Методика расчета коэффициента сопротивления c_{xa}

Экспериментальные исследования показывают, что коэффициент сопротивления решетчатого крыла можно представить, как и для обычного плоского крыла, в виде

$$c_{xa} = c_{x0} + A c_{ya}^2, \quad (3.34)$$

где c_{x0} — коэффициент сопротивления при $c_{ya} = 0$. Величина $A c_{ya}^2$ характеризует сопротивление, обусловленное подъемной силой.

Так как планы решетчатого крыла, как правило, тонкие и имеют заостренные передние кромки, подсасывающая сила не реализуется. Поэтому

$$A = 1/c_{ya}^a. \quad (3.35)$$

В свою очередь, c_{xa} можно представить в виде суммы коэффициентов сопротивления трения $c_{xтр}$ и коэффициента сопротивления давления $c_{хдавл}$:

$$c_{xa} = c_{xтр} + c_{хдавл}.$$

Если планы решетчатого крыла обтекаются плавно без отрывов потока, то на малых дозвуковых скоростях c_{x0} будет равно $c_{xтр}$, а на закритических числах M_∞ коэффициент c_{x0} будет равен сумме коэффициентов сопротивления трения и волнового сопротивления

$$c_{x0} = c_{xтр} + c_{x0в}. \quad (3.36)$$

Коэффициент сопротивления трения $c_{xтр}$ можно рассчитать приближенно, заменяя профили планов и боковин тонкими пластинами. Далее определяется коэффициент сопротивления трения двухсторонней пластины $2c_f$ в зависимости от чисел Re и M_∞ по известным формулам или графикам для ламинарного или турбулентного пограничного слоя.

Коэффициент сопротивления трения, отнесенный к несущей площади решетчатого крыла,

$$c_{x\text{тр}} = 2c_f \frac{S_{\text{пов.пл}} + S_{\text{пов.бок}}}{S}, \quad (3.37)$$

$S_{\text{пов.пл}}$ — площадь поверхности планов; $S_{\text{пов.бок}}$ — площадь поверхности боковин; S — несущая площадь решетчатого крыла.

Коэффициент сопротивления трения решетчатого крыла отнесенный к его несущей площади, будет:

для рамного

$$c_{x\text{тр}} = 2c_f \left(1 + \frac{n_z}{n} \frac{H}{l} \right), \quad (3.38)$$

для сотового

$$c_{x\text{тр}} = 2c_f \left(1 + \frac{l+t}{H+t} \frac{H}{l} \right). \quad (3.39)$$

Далее рассмотрим определение коэффициента волнового сопротивления.

Величину коэффициента волнового сопротивления представим в виде суммы

$$c_{x0в} = c_{x0в1} + c_{x0в2}, \quad (3.40)$$

где $c_{x0в1}$ — коэффициент волнового сопротивления, обусловленного внутренним течением газа в крыле; $c_{x0в2}$ — коэффициент волнового сопротивления, обусловленного внешним обтеканием крыла.

Величину $c_{x0в2}$ можно оценить из продувок коробки с цилиндрической внутренней поверхностью при $\alpha=0$ (рис. 3.11). Результаты продувок показывают, что коэффициент волнового сопротивления такой коробки $c'_{x0в2}$, отнесенный к боковой площади всех стенок, весьма близок к коэффициенту волнового сопротивления ромбовидного профиля с относительной толщиной, равной относительной толщине стенок коробки. Коэффициент $c'_{x0в2}$ в параметрах трансзвукового подобия представлен на рис. 3.12 [2], на котором дана зависимость $\bar{c}'_{x0в2}$ от $\bar{\chi}$, причем

$$\bar{c}'_{x0в2} = c'_{x0в2} \frac{[M_\infty^2 (\chi + 1)]^{1/3}}{\bar{c}_{ок}^{5/3}}; \quad \bar{\chi} = \frac{M_\infty^2 - 1}{[M_\infty^2 (\chi + 1) \bar{c}_{ок}]^{2/3}},$$

где $\bar{c}_{ок} = c_{ок}/b$ — относительная толщина элементов окантовки решетчатого крыла.

Вычислив параметр подобия $\bar{\chi}$ и определив по графику $\bar{c}'_{x0в2}$, можно определить $c'_{x0в2}$ по формуле

$$c'_{x0в2} = \bar{c}'_{x0в2} \frac{\bar{c}_{ок}^{5/3}}{[M_\infty^2 (\chi + 1)]^{1/3}}. \quad (3.41)$$

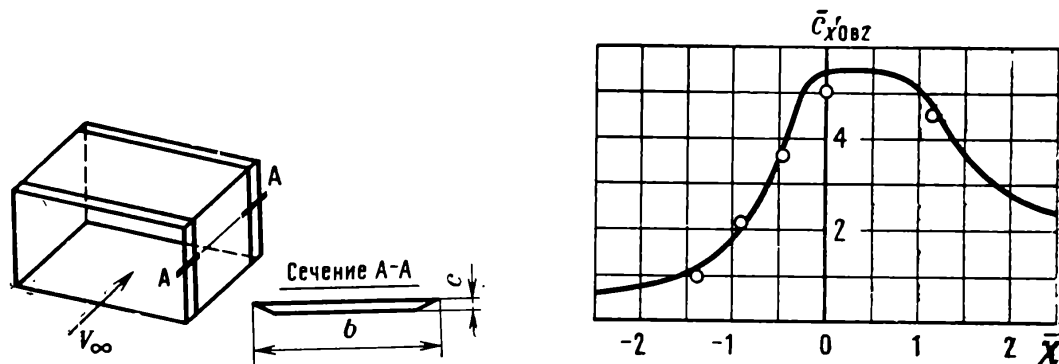


Рис. 3.11. Схема к расчету коэффициента волнового сопротивления, обусловленного внешним обтеканием решетчатого крыла

Рис. 3.12. Зависимость коэффициента волнового сопротивления коробки, моделирующей внешний контур решетчатого крыла, в параметрах подобия от параметра $\bar{\chi}$

Коэффициент волнового сопротивления окантовывающей рамы $c_{x0в2}$, отнесенный к несущей площади решетчатого крыла S ,

$$c_{x0в2} = c'_{x0в2} \frac{2 \left(1 + \frac{H}{l} \right)}{n}.$$

Волновое сопротивление окантовывающей рамы $c_{x0в2}$ при толщине ее элементов $\bar{c} = 2 \dots 5\%$ составляет $5 \dots 15\%$ всего волнового сопротивления решетчатого крыла. Поэтому основную часть волнового сопротивления решетчатого крыла составляет волновое сопротивление, обусловленное течением газа внутри решетчатого крыла, характеризующееся коэффициентом $c_{x0в1}$.

Рассмотрим течение внутри крыла с учетом толщины планов внутреннего набора и толщины вытеснения пограничного слоя. Это внутреннее течение можно рассматривать как течение через эквивалентный канал, проходные сечения которого вдоль оси изменяются так же, как и сечения крыла.

Применяя теорему импульсов для объема $1-1-3-3-1$ (см. рис. 3.3) в предположении одномерности течения, найдем силу воздействия внутреннего потока на канал:

$$X_{0в1} = mV_1 + p_1F_1 - mV_3 - p_3F_3,$$

где m — секундная масса газа, протекающего через канал; V_1, p_1 — скорость и давление на входе в канал; V_3, p_3 — то же на выходе из канала; F_1, F_3 — площади входа и выхода.

На внешние стенки канала действует сила $X_{0в2}$, равная интегралу от давления по наружной поверхности,

$$X_{0в2} = \int_{F_1}^{F_3} p dF, \quad (3.42)$$

где dF — элемент наружной поверхности. Эта величина имеет положительный знак, если нормаль к ней имеет составляющую, направленную против потока.

Суммарное воздействие внутреннего и внешнего потоков на канал без учета сил трения

$$X_{0в1} + X_{0в2} = mV_1 + pF_1 - mV_3 + \int_{F_1}^{F_3} p dF - p_3 F_3. \quad (3.43)$$

Вычтя из правой части этого соотношения тождество

$$\int_{F_1}^{F_3} p_{\infty} dF - p_{\infty} (F_3 - F_1) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} X_{0в1} + X_{0в2} &= mV_1 + (p_1 - p_{\infty}) F_1 - mV_3 - (p_3 - p_{\infty}) F_3 + \\ &\quad + \int_{F_1}^{F_3} (p - p_{\infty}) dF; \\ X_{0в1} &= mV_1 + (p_1 - p_{\infty}) F_1 - mV_3 - (p_3 - p_{\infty}) F_3; \\ X_{0в2} &= \int_{F_1}^{F_3} (p - p_{\infty}) dF. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Коэффициенты волнового сопротивления эквивалентного канала введем по формулам

$$c_{x0в1}^* = \frac{X_{в1}}{F_1^* q_{\infty}}; \quad c_{x0в2}^* = \frac{X_{в2}}{F_1^* q_{\infty}}.$$

Применительно к решетчатому крылу эти коэффициенты, отнесенные к ее габаритной площади $S^* = Hl$, будут

$$c_{x0в1}^* = \frac{X_{в1}}{S^* q_{\infty}}; \quad c_{x0в2}^* = \frac{X_{в2}}{S^* q_{\infty}}.$$

Коэффициенты волнового сопротивления решетчатого крыла, отнесенные к несущей площади,

$$c_{x0в1} = c_{x0в1}^* \frac{S^*}{S}; \quad c_{x0в2} = c_{x0в2}^* \frac{S^*}{S}. \quad (3.45)$$

Принимая во внимание отношение $mV_1 = \kappa p_1 M^2 F_1$ и $mV_3 = \kappa p_3 M_3^2 F_3$, а также (3.44), получим

$$C_{x0в1}^* = \frac{2}{\kappa M_{\infty}^2} \left\{ \frac{p}{p_{\infty}} \left(1 + \kappa M_1^2 \right) - 1 - \frac{F_3}{F_1} \left[\frac{p_3}{p_{\infty}} \left(1 + \kappa M_3^2 \right) - 1 \right] \right\}. \quad (3.46)$$

Из фотографий спектров обтекания решетчатых крыльев на рис. 1.5 видно, что при обтекании решетчатого крыла при числах

$M_{кр2} > M_\infty > M_{кр1}$ возникает сложная картина течения внутри крыла. При числе $M_\infty > M_{кр1}$ вблизи выходного сечения соты образуются местные сверхзвуковые зоны, оканчивающиеся скачками уплотнения. По мере увеличения M_∞ за критическим сечением возникает область сверхзвуковых скоростей, которая оканчивается внутри крыла скачком, близким к прямому. При достаточно больших числах M_∞ в расширяющейся части устанавливается сверхзвуковое течение, а за выходным сечением образуется сложная система скачков.

Для приближенного расчета $c_{x0в1}^*$ применяется полуэмпирический подход, связанный с упрощением картины обтекания. Закон изменения проходных сечений эквивалентного канала и параметры потока на входе примем такими же, как при расчете c_{ya}^2 в случае $M_\infty > M_{кр1}$. Примем, что при $M_\infty = M_{кр1}$ по всему наименьшему сечению канала скорость становится критической. Далее примем, что при $M_\infty > M_{кр1}$ за критическим сечением устанавливается изоэнтропийное сверхзвуковое течение. Параметры потока в выходном сечении будем определять по отношению площадей критического и выходного сечений для одномерного течения. Отличие реального течения от принятой схемы учтем введением поправочного коэффициента φ , который определяется экспериментально.

Тогда формула (3.46) примет вид

$$c_{x0в1}^* = \frac{2}{\kappa M_\infty^2} \left\{ \frac{p}{p_\infty} (1 + \kappa M_1^2) - 1 - \frac{F_3}{F_1} \left[\frac{p_3}{p_\infty} (1 + \kappa M_3^2) - 1 \right] \varphi \right\}; \quad (3.47)$$

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad \frac{p_3}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_3^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Обработка результатов эксперимента показывает, что коэффициенты $c_{x0в1}^*$ моделей крыльев, имеющих одинаковые значения параметра $2\bar{c}/\bar{l}$, который характеризует загромождение сечений планами внутреннего набора, располагаются на одной кривой, причем разброс точек не превышает точности эксперимента. Хорда планов сравниваемых моделей изменялась при этом в пределах от 10 до 80 мм, относительный шаг $\bar{t} = 0,36 \dots 0,7$, число $Re = 2,10^5 \dots 2,10^6$. Экспериментальное значение коэффициента $c_{x0в1}^*$ вычислялось по формуле

$$c_{x0в1}^* = (c_{x0} - c_{xтр} - c_{x0в2}) \frac{S}{S^*}, \quad (3.48)$$

где c_{x0} — экспериментальное значение коэффициента сопротивления при $M_\infty > M_{кр1}$; $c_{xтр}$ — экспериментальное значение коэффициента сопротивления при $M_\infty < M_{кр1}$.

Коэффициент $c_{x0в2}$ определялся с использованием рис. 3.12 по известной относительной толщине окантовывающей рамы для заданного M_∞ . Как показали эксперименты, изменение числа Re в пределах изменения длин хорд не оказывает заметного влияния на величину $c_{x0в2}^*$.

На малых сверхзвуковых скоростях перед крылом образуется отсоединенный скачок. Примем допущение, что он является прямым. Тогда всюду за скачком поток будет дозвуковым и крыло будет работать в потоке дозвуковых скоростей. Принимая параметры потока за скачком за параметры некоторого фиктивного невозмущенного потока, вместо (3.47) будем иметь

$$c_{x0в1}^* = \frac{2}{\kappa M_{ск}^2} \left\{ \frac{p_{1ск}}{p_{ск}} (1 + \kappa M_{1ск}^2) - 1 - \frac{F_3}{F_1} \left[\frac{p_{3ск}}{p_{ск}} (1 + \kappa M_{3ск}^2) - 1 \right] \varphi \right\}, \quad (3.49)$$

где

$$\frac{p_{1ск}}{p_{ск}} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{ск}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{1ск}^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad \frac{p_3}{p_{ск}} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{ск}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{3ск}^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Величина $c_{x0в1}^*$ отнесена к скоростному напору за прямым скачком. Умножая (3.49) на отношение скоростного напора за скачком к скоростному напору невозмущенного потока, получим формулу для вычисления $c_{x0в1}^*$ при $1 < M_\infty < M_{кр2}$:

$$c_{x0в1}^* = \frac{2p_{ск}}{\kappa p_\infty M_\infty^2} \left\{ \frac{p_{1ск}}{p_{ск}} (1 + \kappa M_{1ск}^2) - 1 - \frac{F_3}{F_1} \left[\frac{p_{3ск}}{p_{ск}} (1 + \kappa M_{3ск}^2) - 1 \right] \varphi \right\},$$

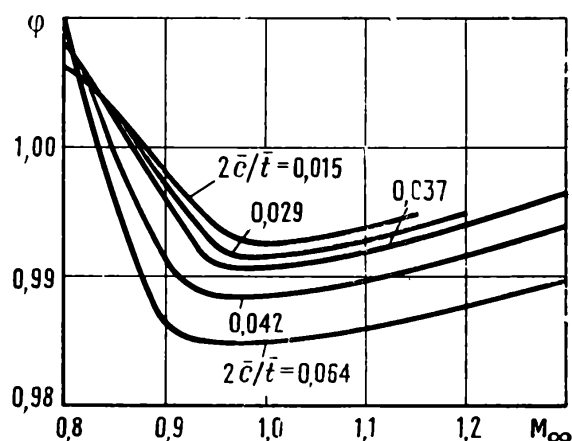
где

$$\frac{p_{ск}}{p_\infty} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} (M_\infty^2 - 1). \quad (3.50)$$

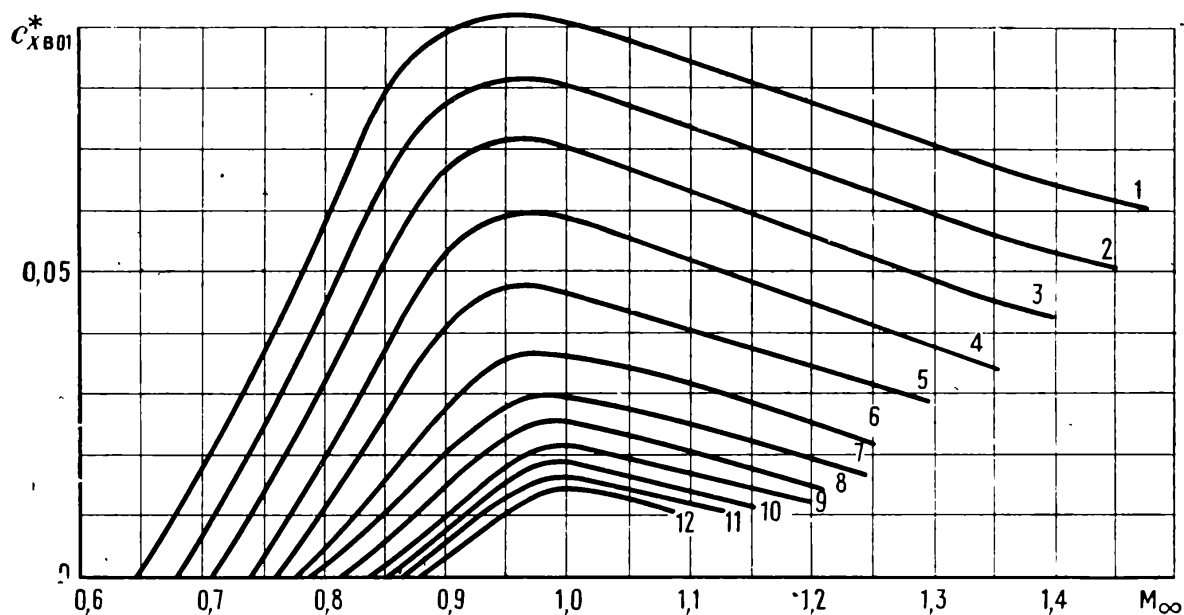
Зависимость $\varphi = \varphi(M_\infty, 2\bar{c}/\bar{t})$, вычисленная на основе формул (3.47) и (3.50) при $F_3/F_1 = 1$, представлена на рис. 3.13. За экспериментальные значения $c_{x0в1}^*$ принимались величины, которые определялись по формуле (3.48).

Как видно из рис. 3.13, коэффициент φ может принимать значения больше единицы. Это объясняется тем, что при M_∞ , немного больших $M_{кр1}$, перепад давлений $p_{1ск}^*/p_3$ на входе и выходе решетчатого крыла не обеспечивает реализации сверхзвукового течения в расширяющейся части вплоть до выходного сечения. В этом случае между критическим и выходным сечениями возникает скачок, близкий к прямому. За скачком течение дозвуковое. Следовательно, при реальном течении давление в расширяющейся части будет

Рис. 3.13. График для расчета волнового сопротивления

Рис. 3.14. График для расчета $c_{x0в1}$

Номер кривой	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{2\bar{c}}{\bar{t}}$	0,0862	0,0746	0,0638	0,0539	0,0449	0,0368	0,0296	0,0231	0,0176	0,0128	0,0086	0,0056
$M_{кр1}$	0,70	0,72	0,74	0,76	0,78	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,92



больше, а сопротивление меньше, чем в принятой схеме. С увеличением M_∞ перепад давлений p_1^*/p_3 возрастает, скачок перемещается назад к выходному сечению, что приводит к расширению области сверхзвукового течения и увеличению коэффициента волнового сопротивления. Коэффициент ϕ при этом уменьшается.

Итак, величину $c_{x0в1}^*$, необходимую для определения $c_{x0в1} = c_{x0в1}^* \frac{S^*}{S}$, можно рассчитать по формулам (3.47) и (3.50) для заданных параметров решетчатого крыла. Для упрощения вычислительных операций на рис. 3.14 дан график зависимостей $c_{x0в1}^*$ по

числам M_∞ для различных значений параметра $2\bar{c}/\bar{t}$, следовательно, и для различных $M_{кр1}$, полученных в результате расчета по формулам (3.47) и (3.50).

В соответствии с (3.40)

$$c_{x0в} = c_{x0в1} \frac{S^*}{S} + c_{x0в2}.$$

3.7. Сравнение результатов расчета с экспериментом

Разработанная методика дает возможность рассчитать основные аэродинамические характеристики на трансзвуковых скоростях.

На рис. 3.15 и 3.16 представлены зависимости $c_{y\alpha}^a$ от числа M_∞ некоторых исследованных моделей. Сплошными линиями нанесены результаты расчета производной $c_{y\alpha}^a$ на дозвуковых и трансзвуковых скоростях ($M_\infty \leq M_{кр2}$) по методике, изложенной в этой главе,

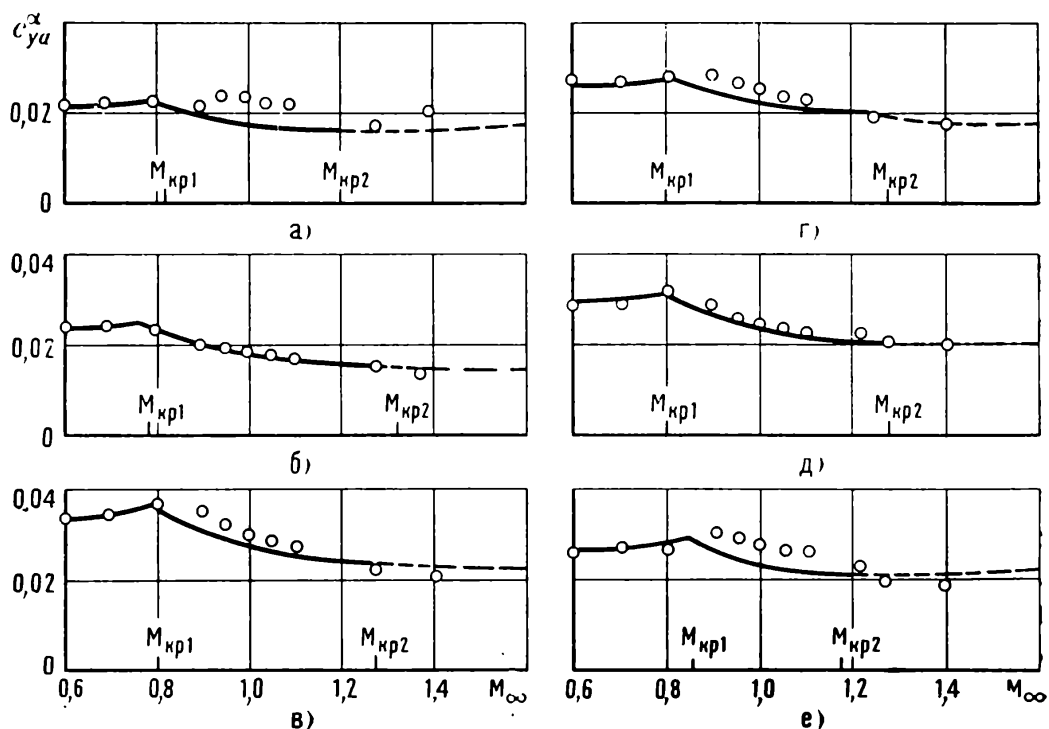


Рис. 3.15. Зависимости производных коэффициентов подъемных сил от числа M_∞ для крыльев с различными геометрическими параметрами ($c_{y\alpha}^a$, 1/градус):

a — $\bar{t}=0,35$; $\bar{H}=1$; $n=8$; *б* — $\bar{t}=0,35$; $\bar{H}=0,5$; $n=14$; *в* — $\bar{t}=0,5$; $\bar{H}=0,5$; $n=8$; *г* — $\bar{t}=0,35$; $\bar{H}=0,5$; $n=8$; *д* — $\bar{t}=0,5$; $\bar{H}=0,7$; $n=13$; *е* — $\bar{t}=0,35$; $\bar{H}=1,25$; $n=8$; — — — расчет; \circ — эксперимент

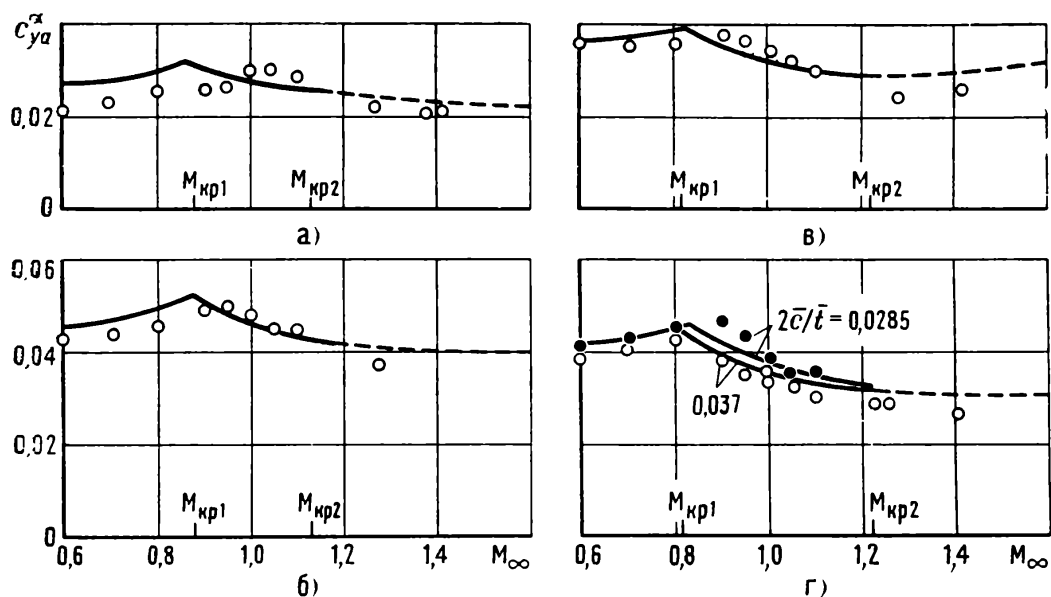


Рис. 3.16. Расчетные и экспериментальные зависимости производных коэффициентов подъемных сил от числа M_∞ для крыльев с различными геометрическими параметрами ($c_{y\alpha}^\alpha$, 1/градус):

а — $\bar{t}=0,35$; $\bar{H}=0,5$; $n=45$; б — $\bar{t}=0,7$; $\bar{H}=0,5$; $n=4,54$; в — $\bar{t}=0,7$; $\bar{H}=1$; $n=8$; г — $\bar{t}=0,7$; $\bar{H}=0,5$; $n=8$; —, — — расчет; \circ — эксперимент

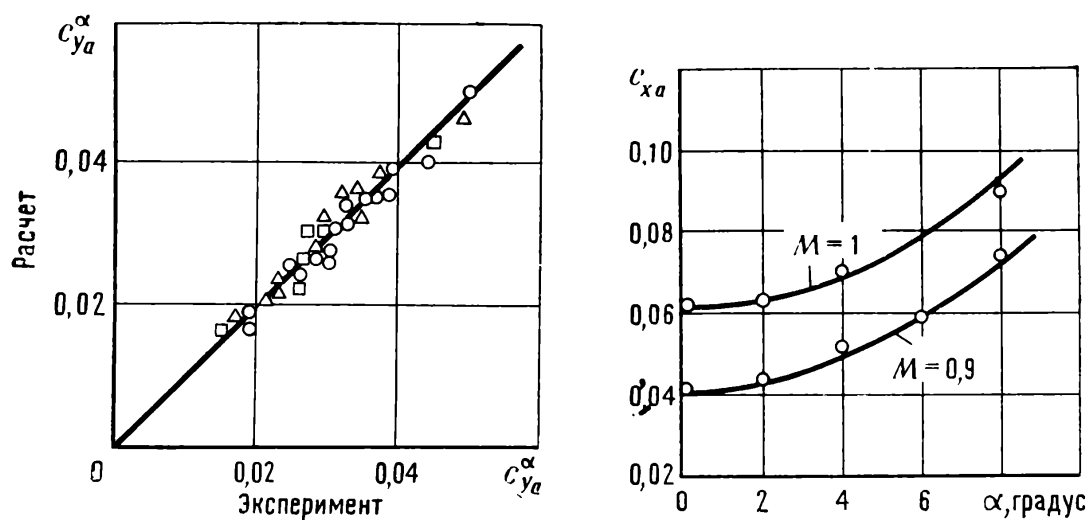


Рис. 3.17. Сравнение расчетных и экспериментальных значений производных коэффициентов подъемных сил:

\circ — $M_\infty=0,9$; \triangle — $M_\infty=1,0$; \square — $M_\infty=1,2$

Рис. 3.18. Расчетные и экспериментальные зависимости коэффициентов сопротивления от угла атаки ($\bar{t}=0,5$):

— расчет; \circ — эксперимент

штрихпунктирными — по методике гл. 4 для сверхзвуковых скоростей. Данные эксперименты отмечены точками.

Влияние параметра $2\bar{c}/\bar{t}$ на производную $c_{y\alpha}^\alpha$ в трансзвуковом диапазоне скоростей видно из рис. 3.16, г, где приведены расчетные

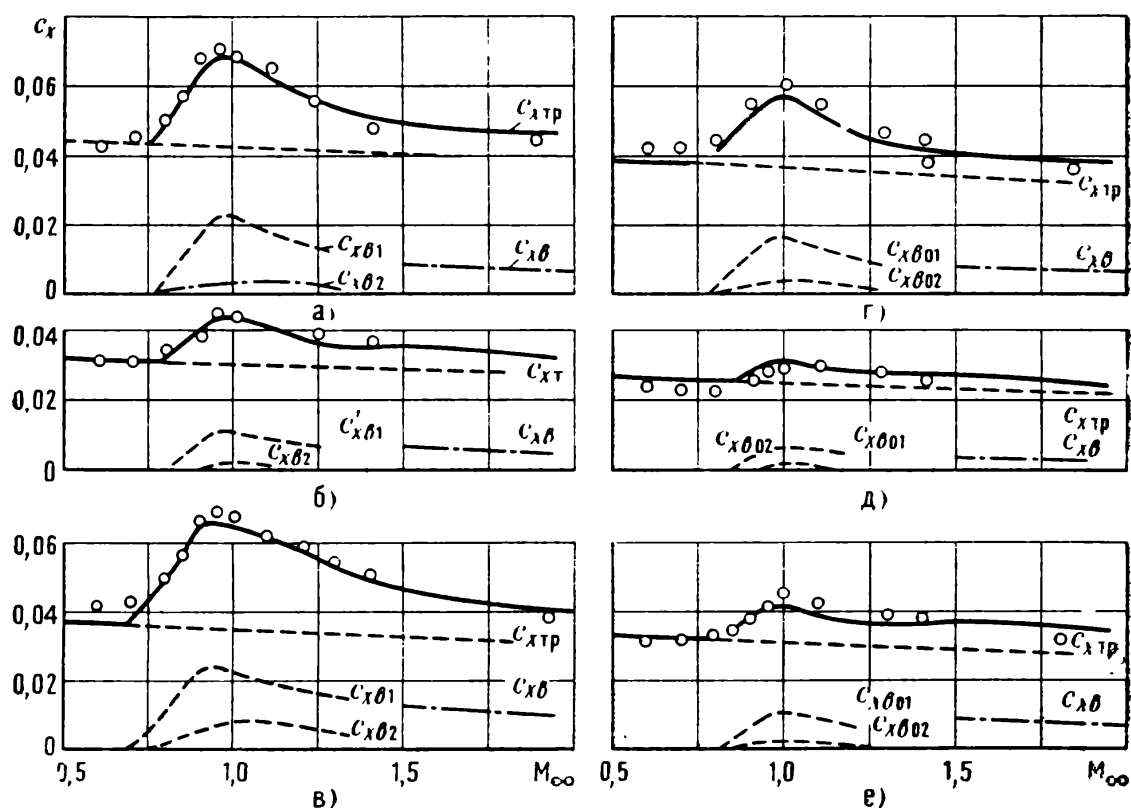


Рис. 3.19. Зависимости коэффициентов c_{x0} и их составляющих от числа M_∞ для крыльев с различными параметрами:

$a - \bar{t}=0,7; \bar{H}=0,5; n=8; 2\bar{c}/\bar{t}=0,037$; $б - \bar{t}=0,35; \bar{H}=0,5; n=8; 2\bar{c}/\bar{t}=0,037$; $в - \bar{t}=0,35; \bar{H}=0,5; n=14; 2\bar{c}/\bar{t}=0,0645$; $г - \bar{t}=0,5; \bar{H}=0,5; n=8; 2\bar{c}/\bar{t}=0,037$; $д - \bar{t}=0,35; \bar{H}=0,5; n=4,5; 2\bar{c}/\bar{t}=0,04$; $е - \bar{t}=0,35; \bar{H}=1; n=8; 2\bar{c}/\bar{t}=0,0286$; — расчет; \circ — эксперимент

и экспериментальные данные для двух моделей. Эти модели имеют одинаковые \bar{H} , \bar{t} , n и различные $2\bar{c}/\bar{t}$. Сравнение расчета с экспериментом при трех числах M_∞ дано на рис. 3.17, где каждая точка соответствует крылу со своими параметрами.

На рис. 3.18 приведена зависимость c_{xa} от угла атаки α , рассчитанная по формулам (3.34) и (3.35). Величина c_{x0} в формуле (3.34) получена из эксперимента. Точками нанесены экспериментальные данные.

На рис. 3.19 и 3.20 приведены результаты расчета коэффициента c_{x0} , рассчитанного по формуле (3.36). На этих графиках пунктиром нанесены расчетные величины составляющих коэффициента c_{x0} , а именно: c_{x01} , c_{x02} , c_{x03} , что позволяет видеть влияние отдельных факторов на сопротивление при $c_{ya}=0$. Сравнение данных расчета и экспериментов в трансзвуковом диапазоне чисел M_∞ приведено также на рис. 3.21, где каждая точка соответствует своей модели.

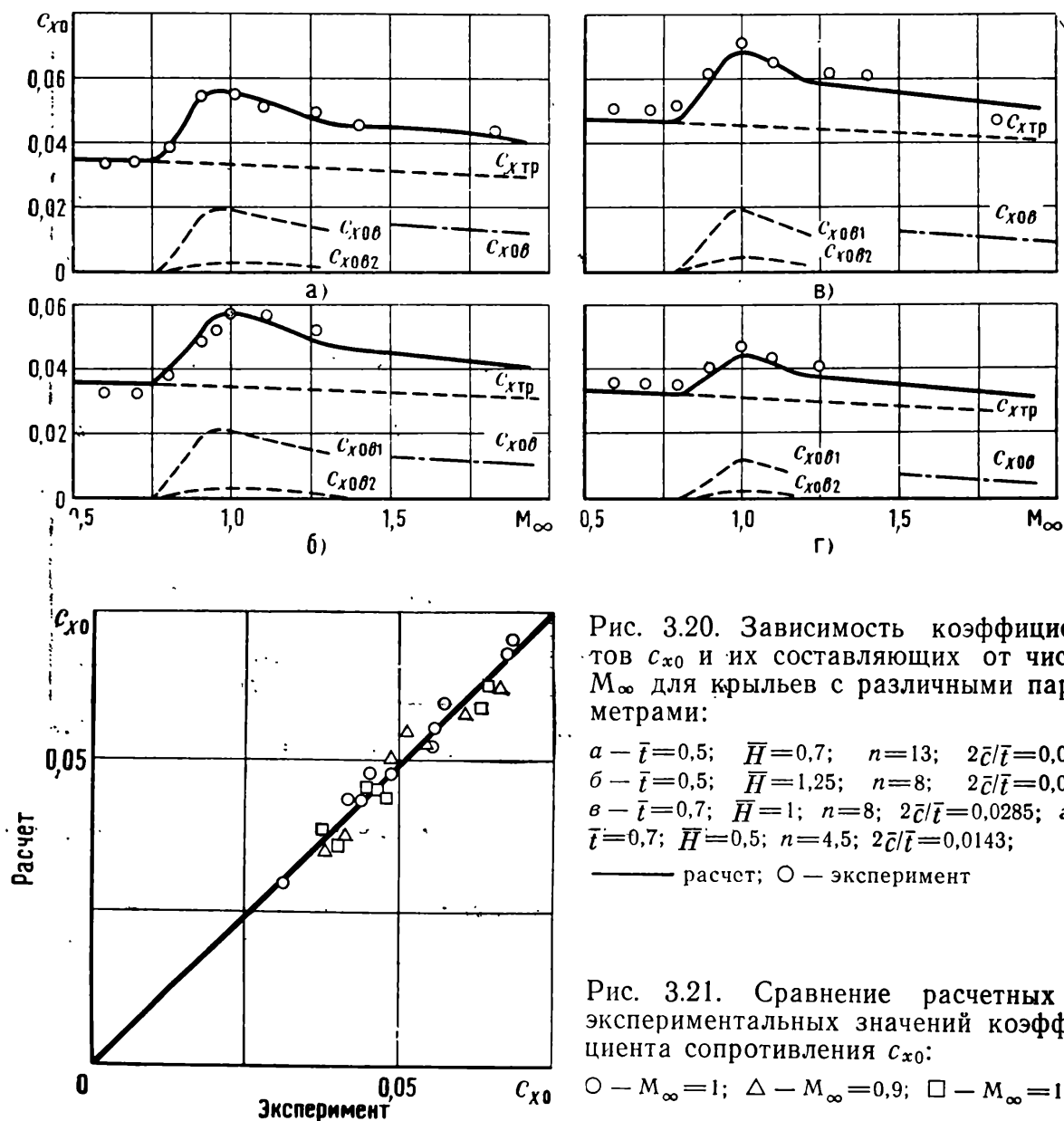


Рис. 3.20. Зависимость коэффициентов c_{x0} и их составляющих от числа M_∞ для крыльев с различными параметрами:

а — $\bar{t}=0.5$; $\bar{H}=0.7$; $n=13$; $2\bar{c}/\bar{t}=0.042$;
 б — $\bar{t}=0.5$; $\bar{H}=1.25$; $n=8$; $2\bar{c}/\bar{t}=0.028$;
 в — $\bar{t}=0.7$; $\bar{H}=1$; $n=8$; $2\bar{c}/\bar{t}=0.0285$; г —
 $\bar{t}=0.7$; $\bar{H}=0.5$; $n=4.5$; $2\bar{c}/\bar{t}=0.0143$;

— расчет; \bigcirc — эксперимент

Рис. 3.21. Сравнение расчетных и экспериментальных значений коэффициента сопротивления c_{x0} :

\bigcirc — $M_\infty=1$; \triangle — $M_\infty=0.9$; \square — $M_\infty=1.25$

Глава 4

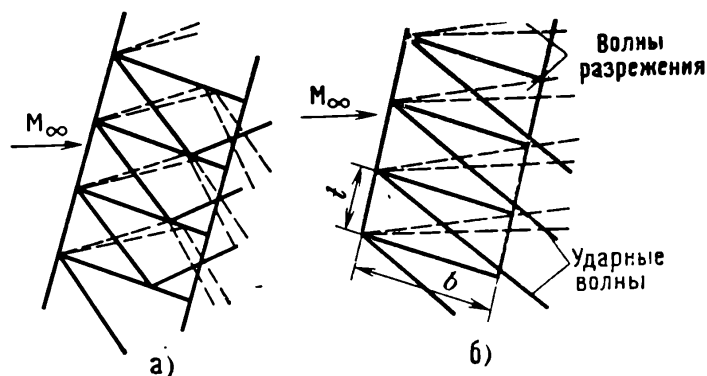
Решетчатое крыло на сверхзвуковых скоростях

4.1. Особенности обтекания решетчатого крыла на сверхзвуковых скоростях

Рассмотрим основные режимы сверхзвукового обтекания решетчатого крыла.

Как было показано в гл. 1, при числах $M_\infty > M_{кр2}$ скачки уплотнения перед планами решетчатого крыла становятся присоединенными. При этом могут реализоваться два режима обтекания.

Рис. 4.1. Решетчатое крыло в сверхзвуковом потоке



Первый характеризуется тем, что скачки уплотнения и характеристики, возникающие на передних кромках одного плана, попадают на соседние и отражаются от них. Таким образом, на этом режиме имеет место взаимное влияние между планами (рис. 4.1). При взаимном влиянии между планами подъемная сила решетчатого крыла уменьшается. Объясняется это тем, что повышение давления по нижней поверхности плана уменьшает разрежение на верхней поверхности соседнего плана. Число Маха невозмущенного потока M_∞ на этом режиме обтекания планов решетчатого крыла изменяется в интервале $M_{кр2} \leq M_\infty \leq M_{кр3}$.

По мере увеличения числа M_∞ взаимное влияние между планами будет уменьшаться, и при некотором значении $M_\infty = M_{кр3}$ оно будет отсутствовать. При этом режиме скачки уплотнения и волны разрежения не попадают на соседние планы. Таким образом, при условии $M_\infty > M_{кр3}$ планы решетчатого крыла обтекаются сверхзвуковым потоком независимо друг от друга (см. рис. 4.1, б). При заданном числе M_∞ характер обтекания зависит от относительного шага планов \bar{t} .

Определим условия, при которых не будет взаимного влияния между планами решетчатого крыла по характеристикам и скачкам уплотнения. Для этого рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком двух бесконечно тонких планов, расположенных друг от друга на расстоянии t , имеющих хорду, равную b , и наклоненных к потоку под углом α (рис. 4.2).

Взаимное влияние планов AB и DE будет, если

$$\sin \mu = \frac{1}{M_\infty} \leq \frac{EC}{AE}, \quad (4.1)$$

$$AE = \sqrt{t^2 + b^2}, \quad EC = t \cos \alpha - b \sin \alpha.$$

Отсюда получим условие отсутствия взаимного влияния между планами по характеристикам

$$M_\infty \geq \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{\bar{t} \cos \alpha - \sin \alpha}. \quad (4.2)$$

Определим далее условие отсутствия взаимного влияния между планами по скачкам уплотнения.

На рис. 4.3 видно, что взаимного влияния между двумя соседними планами не будет при $t/b \geq \tan(\beta - \alpha)$, так как при этом скачок

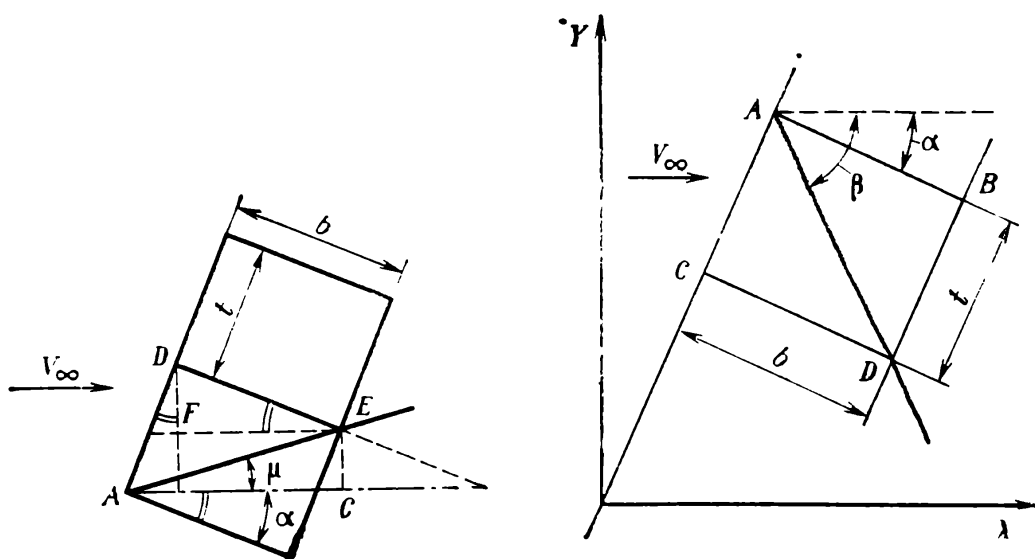


Рис. 4.2. Схема к расчету взаимного влияния между планами по характеристикам

Рис. 4.3. Схема к расчету взаимного влияния между планами по скачкам уплотнения

уплотнения не попадает на верхнюю поверхность соседнего плана. Таким образом взаимного влияния между соседними планами по скачку не будет, если

$$t \geq \operatorname{tg}(\beta - \alpha), \quad (4.3)$$

где α — угол атаки; β — угол наклона скачка уплотнения.

Для тонкой пластинки угол α равен углу поворота потока. Между углами α , β и числом M_∞ имеется известная связь [42]:

$$\frac{1}{M_\infty^2} = \sin^2 \beta - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos(\beta - \alpha)} \sin \beta. \quad (4.4)$$

С другой стороны, в предельном случае, согласно (4.3), имеем

$$\beta = \alpha + \operatorname{arctg} \bar{t}. \quad (4.5)$$

Решая совместно уравнение (4.4) и (4.5), можно получить семейство кривых, выражающих зависимость $\alpha = f(\bar{t})$ при различных числах M_∞ для предельного случая отсутствия взаимного влияния между планами (рис. 4.4). На графике каждая кривая, изображенная сплошной линией и соответствующая определенному значению M_∞ , разделяет значения относительных шагов \bar{t} в зависимости от угла α , при которых нет взаимного влияния между планами, и значения, при которых оно есть. Справа от каждой кривой находятся значения \bar{t} , при которых взаимного влияния не будет и слева —

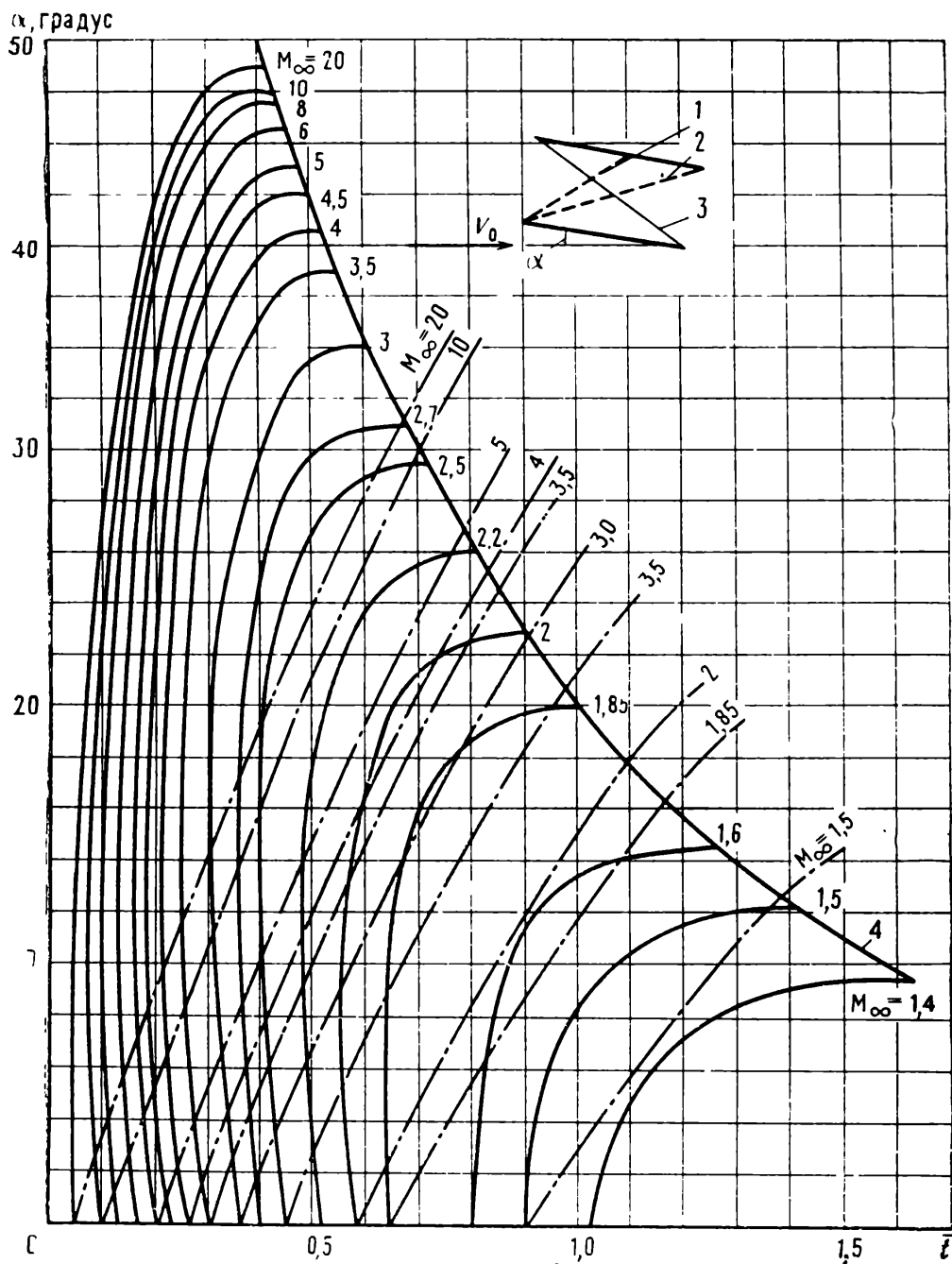


Рис. 4.4. Зависимость предельного значения угла поворота потока, при котором отсутствует взаимное влияние между планами от относительного шага для различных чисел M_∞ :

1 — первая характеристика; 2 — конечная характеристика; 3 — скачок уплотнения; 4 — линия предельных углов поворота на скачке; — — — взаимное влияние по первой характеристике; — — — взаимное влияние по скачку

относительные шаги \bar{t} , при которых будет взаимное влияние между планами.

На этом же графике пунктирными линиями нанесены аналогичные кривые, определяющие начало взаимного влияния по характеристике, которые рассчитаны по формуле (4.2).

4.2. Взаимное влияние между планами решетчатого крыла

Основным фактором, определяющим взаимное влияние между планами, является скачок уплотнения, отходящий от передней кромки соседнего верхнего плана. Если этот скачок, попадая на заднюю кромку соседнего нижнего плана, разделяет поверхности этих двух планов, то взаимного влияния между ними не будет. Если скачок уплотнения попадает на нижний план на некотором расстоянии от задней кромки, то влияние верхнего плана на соседний нижний будет сказываться на кормовой части плана, которая отделена скачком уплотнения.

С возрастанием угла α угол наклона скачка β относительно невозмущенного потока возрастает (рис. 4.5). Но разность углов $(\beta - \alpha)$ на малых углах атаки изменяется мало, причем это изменение будет тем меньше, чем больше число M_∞ . Поэтому положение скачка относительно нижнего плана при увеличении α изменяется мало. Это можно проследить по графикам, показывающим значения углов атаки, при которых начинается взаимное влияние между планами при данных \bar{t} и M_∞ (см. рис. 4.4, сплошные линии). Из этих кривых видно, что на умеренных углах атаки α можно пренебречь их влиянием на начало взаимного влияния планов. Причем чем больше число M_∞ , тем до больших углов справедливо это допущение (при $M_\infty = 2$ до $\alpha = 15^\circ$, а при $M_\infty = 3$ до $\alpha = 25^\circ$). Описанное можно проследить и по схемам, приведенным на рис. 4.5, где приведены положения скачков при углах атаки $\alpha = 0, 8$ и 15° . Углы β на

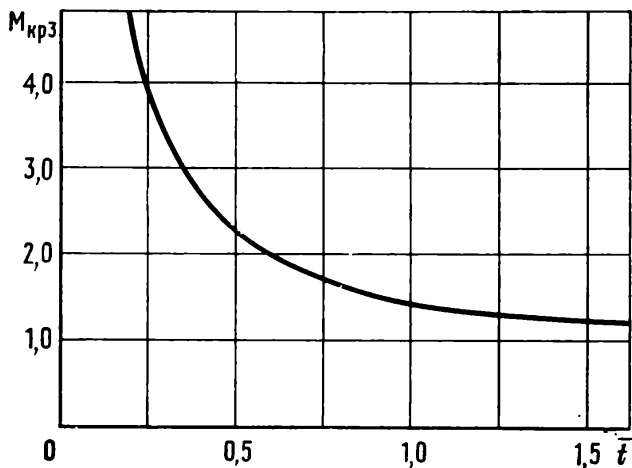
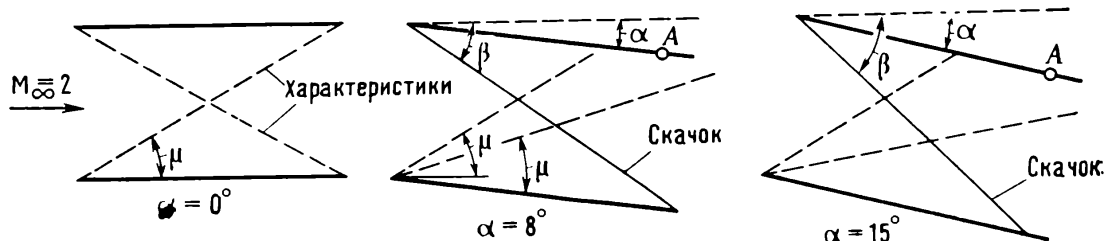


Рис. 4.5. Схемы, объясняющие физическую картину обтекания планов решетчатого крыла при изменении угла атаки

Рис. 4.6. График для определения минимального числа M_∞ , при котором отсутствует взаимное влияние между планами ($M_{крз}$) при данном значении относительного шага

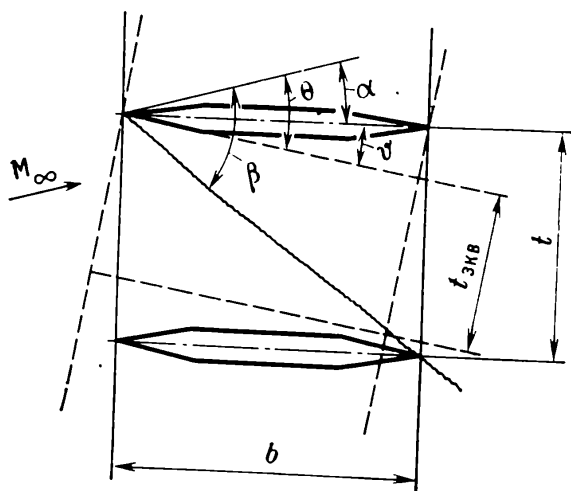


Рис. 4.7. Влияние толщины планов на взаимное влияние между планами

этих схемах соответствуют числу $M=2$. Из схем видно, что положение скачка относительно нижнего плана изменяется мало.

Таким образом, можно принять, что наличие или отсутствие влияния между планами при заданных числах M_∞ определяется величиной относительного шага \bar{t} при углах α , равных нулю. Исходя из этого на основе графика,

приведенного на рис. 4.4, построена зависимость числа $M_{крз}$, при котором не будет взаимного влияния между планами от относительного шага \bar{t} (рис. 4.6).

Все изложенное выше относилось к планам бесконечно малой толщины. Выявим влияние толщины планов решетчатого крыла на характер взаимного влияния между ними. Рассмотрим взаимное влияние планов, которые имеют клиновидное заострение передних и задних кромок с углом 2θ (рис. 4.7).

Условие отсутствия взаимного влияния по скачку будет следующим:

$$\bar{t} \geq \operatorname{tg}(\beta - \theta + \vartheta). \quad (4.6)$$

Для того чтобы использовать графики, приведенные на рис. 4.6, с целью определения начала взаимного влияния между планами конечной толщины введем понятие эквивалентного шага $\bar{t}_{\text{экв}}$.

Эквивалентным шагом $\bar{t}_{\text{экв}}$ будет шаг планов нулевой толщины, взаимное влияние между которыми начнется при том же числе M_∞ , что и планов конечной толщины, но при угле отклонения потока не $\theta = \alpha$, а $\theta = \alpha + \vartheta$ (см. рис. 4.7).

Условие отсутствия взаимного влияния между планами бесконечно малой толщины с эквивалентным шагом $\bar{t}_{\text{экв}}$ будет

$$\bar{t}_{\text{экв}} = \operatorname{tg}(\beta - \theta).$$

Если скачок уплотнения, отходящий от передней кромки реального плана, попадает на заднюю кромку соседнего плана (см. рис. 4.7), то

$$\bar{t} = \operatorname{tg}(\beta - \theta + \vartheta) \quad (4.7)$$

и аналогично для эквивалентного решетчатого крыла

$$\bar{t}_{\text{экв}} = \operatorname{tg}(\beta - \theta). \quad (4.8)$$

Так как

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta + \vartheta) = \frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta) + \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg}(\beta - \theta) \operatorname{tg} \vartheta},$$

то учитывая (4.8), получим

$$\bar{t} = \frac{\bar{t}_{\text{экв}} + \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg} \vartheta}$$

или

$$\bar{t}_{\text{экв}} = \frac{\bar{t} - \operatorname{tg} \vartheta}{1 + \bar{t} \operatorname{tg} \vartheta}. \quad (4.9)$$

Таким образом, по относительному шагу реального крыла и углу заострения профиля ϑ определяется эквивалентный шаг по формуле (4.9). По величине $\bar{t}_{\text{экв}}$ и графику, приведенному на рис. 4.6, находим число $M_{\text{крз}}$ — минимальное число M , при котором еще не будет взаимного влияния между планами. Например, для крыла с $\bar{t} = 0,5$ и $\vartheta = 6^\circ$ эквивалентный шаг $\bar{t} = 0,375$, а $M_{\text{крз}} = 2,8$.

Следует отметить, что все рассуждения о взаимном влиянии между планами проводились без учета взаимодействия между скачком и волной разрежения при их пересечении. Но, как показывают расчеты, это взаимодействие мало изменяет границы начала взаимного влияния между планами, причем граница взаимного влияния смещается в сторону меньших значений \bar{t} .

4.3. Параметры подобия для решетчатых крыльев на сверхзвуковых скоростях

Линеаризованное стационарное уравнение для потенциала возмущенных скоростей $\Phi(x, y, z)$ на сверхзвуковых скоростях имеет вид (3.1). Для движения решетчатого крыла со сверхзвуковыми скоростями вместо соотношений (3.13) можно получить следующие:

$$\begin{aligned} c_{ya}^a \sqrt{M_\infty^2 - 1} &= F_1\left(\bar{t} \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \frac{H}{l}, n\right); \quad m_z^a \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \\ &= F_2\left(\bar{t} \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \frac{H}{l}, n\right); \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} m_{x^*}^w \sqrt{M_\infty^2 - 1} &= F_3\left(\bar{t} \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \frac{H}{l}, n\right); \quad m_z^w \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \\ &= F_4\left(\bar{t} \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \frac{H}{l}, n\right). \end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что параметрами сверхзвукового подобия для решетчатых крыльев будут

$$\bar{t}\beta = \bar{t} \sqrt{M_\infty^2 - 1}; \quad \bar{H} = H/l; \quad n. \quad (4.11)$$

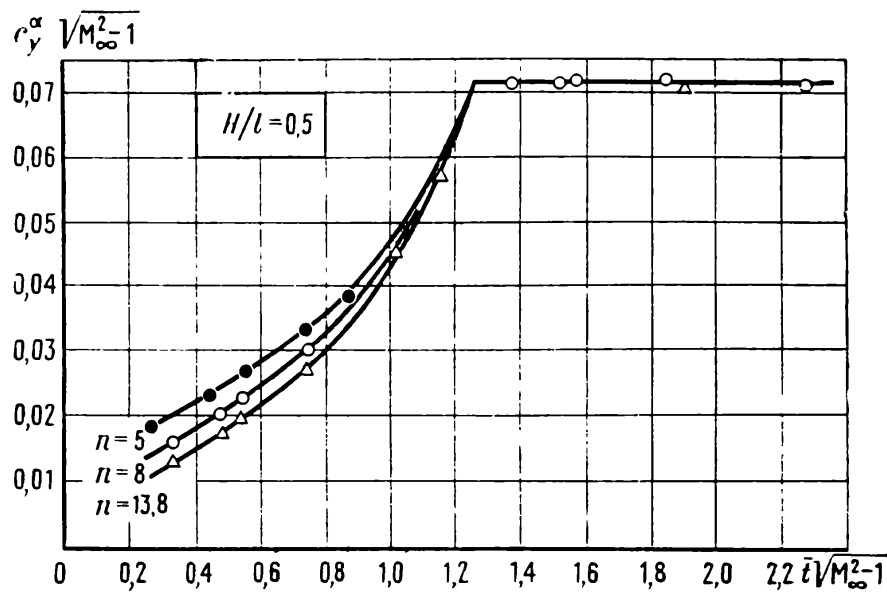


Рис. 4.8. Зависимость производной c_y^α от M_∞ и \bar{t} в параметрах подобия (c_y^α , 1/градус)

Приведенные выше соотношения подобия позволяют получать практически важные результаты.

В частности, соотношения подобия для производной c_y^α можно применять для расчета несущих свойств решетчатого крыла на сверхзвуковых скоростях. За исходные данные при этом можно принять результаты расчетных или экспериментальных исследований по определению c_{ya}^α , приведенные в зависимости от параметра подобия.

На рис. 4.8 приводятся экспериментальные зависимости значений βc_{ya}^α от параметра подобия $\beta \bar{t}$ при различных значениях n . Из этого графика видно, что экспериментальные значения βc_{ya}^α , полученные при различных числах M_∞ для решетчатых крыльев, имеющих одинаковое число планов, зависят от параметра подобия $\bar{t}\beta$. Таким образом, пользуясь графиком, данным на рис. 4.8, можно получить значения c_{ya}^α для решетчатого крыла любого шага при любых значениях чисел M_∞ для указанных на графиках значений n и \bar{H} .

Производную c_{ya}^α решетчатого крыла для сверхзвуковых скоростей при взаимном влиянии планов можно представить в виде

$$c_{ya}^\alpha = \frac{n-1}{n} c_{yat}^\alpha + \frac{1}{n} c_{yal}^\alpha, \quad (4.12)$$

где c_{yat}^α — производная коэффициента подъемной силы внутренних планов решетчатого крыла или полиплана с относительным шагом \bar{t} ;

$c_{ya\lambda}^a$ — производная коэффициента подъемной силы плана с удлинением λ , равным удлинению планов решетчатого крыла.

Объяснение физического смысла и вывод формулы (4.12) приведены в разд. 4.4. Здесь используем эту формулу для вывода соотношения, позволяющего определить величину c_{ya}^a для решетчатого крыла с параметрами n_2 , \bar{H}_2 при известных значениях c_{ya}^a крыла с параметрами n_1 , \bar{H}_1 .

Будем считать, что известна зависимость $c_{ya}^a \beta$ от параметра подобия $\bar{t}\beta$ для решетчатых крыльев, имеющих одинаковое число планов n_1 и одинаковое отношение высоты крыла к его размаху \bar{H}_1

$$(c_{ya}^a \beta)_1 = F(\bar{t}\beta, n_1, \bar{H}_1), \quad (4.13)$$

где
$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}; \quad \bar{H}_1 = \left(\frac{H}{l}\right)_1.$$

С учетом (4.12) соотношение (4.13) запишется в виде

$$(c_{ya}^a)_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1} [\beta c_{yat}^a(\bar{t}\beta)]_1 + \frac{1}{n_1} (\beta c_{ya}^a)_1. \quad (4.14)$$

Производную $c_{ya\lambda}^a$ с некоторым приближением можно принять равной c_y^a прямоугольного крыла с удлинением $\lambda = l/b$:

$$\beta c_{ya\lambda}^a = 4 - \frac{2}{\beta \lambda}. \quad (4.15)$$

Удлинение плана решетчатого крыла

$$\lambda = \frac{l}{b} = \frac{(n-1)\bar{t}}{\bar{H}}, \quad (4.16)$$

тогда

$$(\beta c_{ya\lambda})_1 = 4 - \frac{2\bar{H}_1}{(n_1 - 1)(\bar{t}\beta)_1}. \quad (4.17)$$

Подставив значение $(\beta c_{ya\lambda})_1$ в (4.14), получим

$$(\beta c_{ya}^a)_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1} [\beta c_{yat}^a(\bar{t}\beta)]_1 + \frac{4}{n_1} - \frac{2\bar{H}_1}{n_1(n_1 - 1)(\bar{t}\beta)_1}. \quad (4.18)$$

Для решетчатого крыла с геометрическими параметрами n_2 и \bar{H}_2 при числе M_∞ будем иметь

$$(\beta c_{ya}^a)_2 = \frac{n_2 - 1}{n_2} [\beta c_{yat}^a(\bar{t}\beta)]_2 + \frac{4}{n_2} - \frac{2\bar{H}_2}{n_2(n_2 - 1)(\bar{t}\beta)_2}. \quad (4.19)$$

При $(\bar{t}\beta)_1 = (\bar{t}\beta)_2$ в соответствии с соотношениями подобия имеет место равенство

$$[\beta c_{yat}^a(\bar{t}\beta)]_1 = [\beta c_{yat}^a(\bar{t}\beta)]_2.$$

Учитывая это равенство, из (4.17) и (4.19) получим

$$(\beta c_{y_a}^z)_2 = \frac{n_2 - 1}{n_2} \frac{n_1}{n_1 - 1} (\beta c_{y_a}^z)_1 + \frac{4(n_1 - n_2)}{n_2(n_2 - 1)} + \frac{2\bar{H}_2}{n_2(n_2 - 1)\bar{t}\beta} \times \\ \times \left[\left(\frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \right)^2 \frac{\bar{H}_1}{\bar{H}_2} - 1 \right]. \quad (4.20)$$

Таким образом, если известна зависимость (4.13) для решетчатых крыльев с параметрами n_1 и \bar{H}_1 , то такую зависимость для решетчатых крыльев с параметрами n_2 и \bar{H}_2 можно получить пересчетом по формуле (4.20).

4.4. Коэффициент подъемной силы решетчатого крыла на малых углах атаки

Рассмотрим особенности обтекания сверхзвуковым потоком решетчатого крыла, установленного под углом атаки α (рис. 4.9). Можно считать, что все внутренние планы, кроме верхнего и нижнего, обтекаются плоским потоком. Таким образом $(n-1)$ планов создают подъемную силу как профили полиплана. При этом следует отметить, что при числах M_∞ , больших $M_{кр2}$ и меньших $M_{кр3}$, эти планы будут обтекаться в условиях взаимного влияния, что снижает их подъемную силу. При числах M_∞ , больших $M_{кр3}$, взаимного влияния между планами не будет и каждый план будет обтекаться как изолированный профиль.

Нижняя поверхность нижнего плана и верхняя поверхность верхнего плана работают в условиях, отличных от условий работы остальных поверхностей. С нижней поверхности нижнего плана происходит перетекание воздуха, вызванное повышением давления на этой поверхности. Это уменьшает подъемную силу в зоне, ограниченной конусами возмущений с вершинами в угловых точках (см. рис. 4.9). На верхнюю поверхность верхнего плана вследствие пониженного давления на ней будет перетекать воздух с поверхностей боковин, уменьшая разрежение в зоне, ограниченной конусами возмущений, так же как и верхнем плане.

С некоторым допущением верхнюю поверхность верхнего плана и нижнюю поверхность нижнего плана можно условно

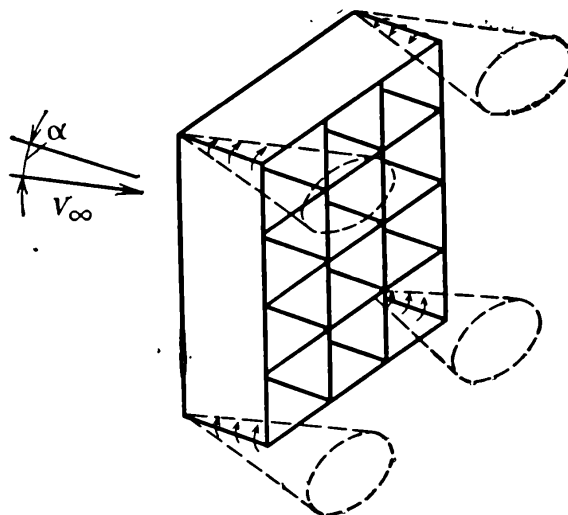


Рис. 4.9. Конусы, ограничивающие влияние кромок на сверхзвуковых скоростях

рассматривать как один изолированный план конечного размаха с площадью $S=lb$ и удлинением $\lambda=l/b$.

Тогда подъемная сила решетчатого крыла

$$Y = c_{yat}^{\alpha} aqlb(n-1) + c_{ya\lambda}^{\alpha} aqlb. \quad (4.21)$$

Коэффициенты c_{yat}^{α} и $c_{ya\lambda}^{\alpha}$ обозначают те же величины, что и в формуле (4.12).

Производная подъемной силы по углу атаки, отнесенная к площади всех планов $S=nbl$, будет

$$c_{ya\lambda}^{\alpha} = \frac{n-1}{n} c_{yat}^{\alpha} + \frac{1}{n} c_{ya\lambda}^{\alpha}. \quad (4.22)$$

Так как планы решетчатого крыла в основном имеют прямоугольную или близкую к ней форму в плане, то значение $c_{ya\lambda}^{\alpha}$ можно определить по известной формуле:

$$c_{ya}^{\alpha} = \frac{4}{M_{\infty}^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{2\lambda \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \right). \quad (4.23)$$

Подставив (4.23) в (4.22), получим

$$c_{ya}^{\alpha} = \frac{n-1}{n} c_{yat}^{\alpha} + \frac{4}{n(M_{\infty}^2 - 1)} - \frac{2}{n\lambda \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}. \quad (4.24)$$

Заменив в соответствии с (4.16) значение λ через параметры n , \bar{H} и \bar{t} , получим другую формулу для c_{ya}^{α} :

$$c_{ya}^{\alpha} = \frac{n-1}{n} c_{yat}^{\alpha} + \frac{4}{n \sqrt{M_2^2 - 1}} - \frac{2\bar{H}}{n(n-1)\bar{t}(M_{\infty}^2 - 1)}. \quad (4.25)$$

Если число планов велико ($n > 10-15$), то второй член в формуле (4.22), а следовательно, второй и третий в (4.24), малы. Тогда можно принять, что $c_{ya}^{\alpha} \approx c_{yat}^{\alpha}$.

Таким образом, для того чтобы определить c_{ya}^{α} решетчатого крыла при взаимном влиянии между планами ($M_{кр2} < M < M_{кр3}$), необходимо рассчитать c_{yat}^{α} полиплана с шагом \bar{t} .

При отсутствии взаимного влияния ($M_{\infty} > M_{кр3}$) все внутренние планы крыла работают в одинаковых условиях как пластины бесконечного размаха. Поэтому можно принять, что $c_{yat}^{\alpha} = c_{ya\infty}^{\alpha}$.

Тогда формула (4.22) примет вид

$$c_{ya}^{\alpha} = c_{ya\infty}^{\alpha} \frac{n-1}{n} + c_{ya\lambda}^{\alpha} \frac{1}{n}. \quad (4.26)$$

Если число планов n большое ($n > 10$), их удлинение $\lambda \geq 5$, а число M_{∞} достаточно большое, что обычно бывает, когда нет взаимного влияния между планами, концевой эффект на нижнем и

верхнем плане мало влияет на величину подъемной силы крыла. В этом случае можно принять, что $c_{ya\lambda}^a \approx c_{ya\infty}^a$. Тогда формула (4.26) для расчета c_{ya}^a решетчатого крыла при отсутствии взаимного влияния примет вид $c_{ya}^a \approx c_{ya\infty}^a$.

4.5. Коэффициент подъемной силы полиплана на сверхзвуковых скоростях при взаимном влиянии между планами ($1 < M_\infty < M_{кр3}$)

Рассмотрим два соседних плана, работающих при взаимном влиянии (рис. 4.10). На этом рисунке веера характеристик для упрощения рисунка заменены условно одной средней характеристикой. Из схемы обтекания этих профилей видно, что задача определения несущих свойств планов решетчатого крыла или полиплана с бесконечным числом планов сводится к расчету давлений на поверхности плана путем решения ряда газодинамических задач [42].

Рассмотрим кратко эти задачи.

1. Течение сжатия и расширения (рис. 4.11). Параметры потока в области 2 определяются по известным соотношениям через параметры потока в области 1.

2. Взаимодействие скачков уплотнения (рис. 4.12). Параметры потока в областях 2 и 3 определяются по начальным параметрам в области 1. По известным параметрам в областях 2 и 3 течение в области 4 определяется исходя из условий, что давление и направление скорости в ней должны быть одинаковы как при переходе из области 2, так и из области 3.

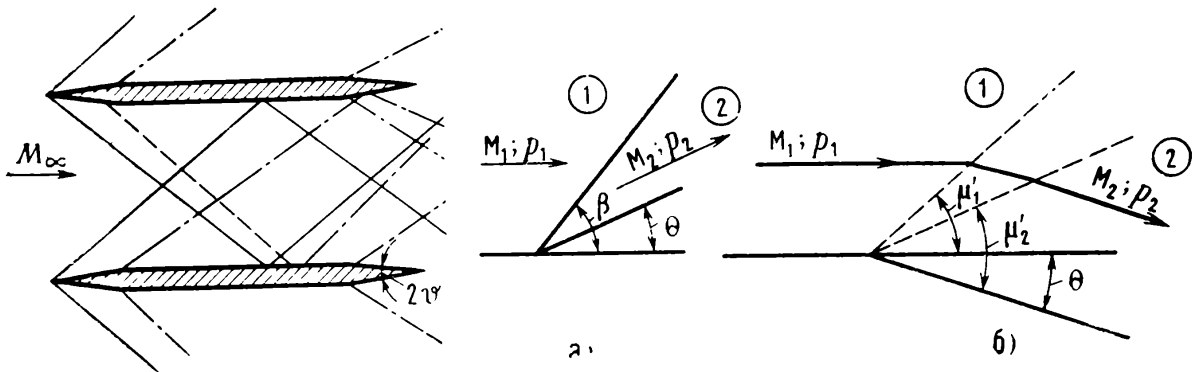


Рис. 4.10. Схема обтекания планов решетчатого крыла сверхзвуковым потоком

Рис. 4.11. Течения сжатия (а) и расширения (б)

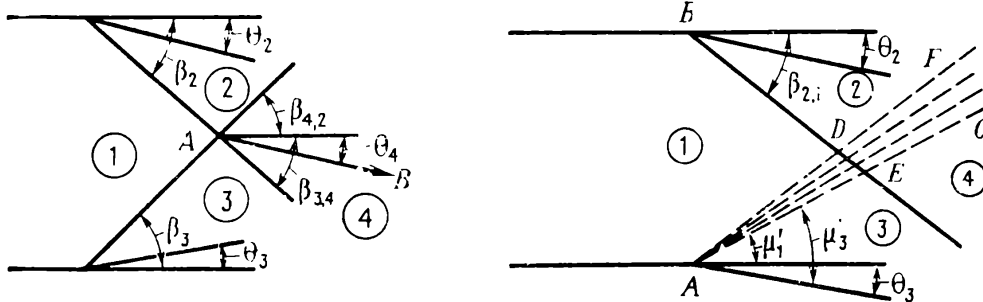


Рис. 4.12. Взаимодействие скачков уплотнения

Рис. 4.13. Взаимодействие скачка с волнами разрежения

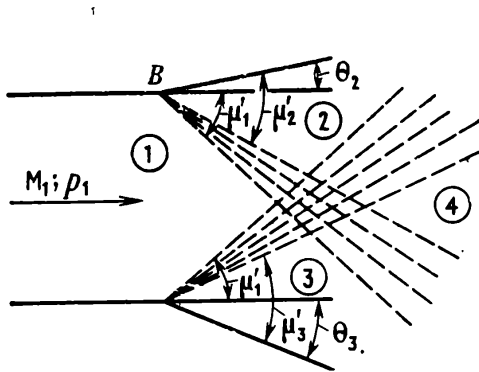


Рис. 4.14. Взаимодействие волн разрежения

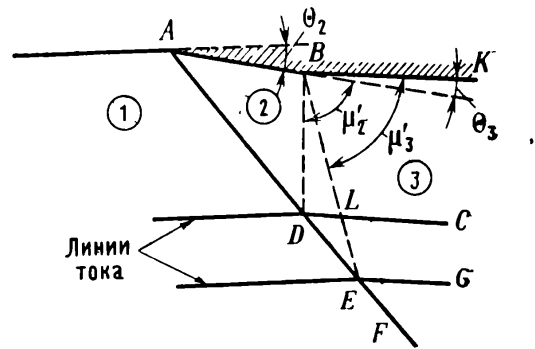


Рис. 4.15. Взаимодействие скачка уплотнения и характеристик того же плана

3. Взаимодействие скачка уплотнения с волной разрежения (рис. 4.13). При переходе из области 3 в 4 параметры потока терпят разрыв, а при переходе из области 2 изменение параметров потока происходит непрерывно от характеристики DF до характеристики EC . Угол наклона характеристик AD и DF к направлению невозмущенного потока неодинаков. Параметры потока в области 4 определяются с учетом условия равенства их как при переходе из области 2, так и из области 3.

4. Взаимодействие характеристик (рис. 4.14). Изменение параметров потока при переходе из областей 2 и 3 в область 4 происходит непрерывно. Течение в области 4 находится с учетом условия одинакового направления скоростей и равенства давлений как при переходе из области 2, так и из области 3.

5. Взаимодействие скачка и волны разрежения одного и того же плана (рис. 4.15). В точке A происходит поворот потока со сжатием. Здесь возникает скачок уплотнения. В точке B поток начинает расширяться. От нее отходит пучок характеристик. В результате взаимодействия скачка с характеристиками наклон участков скачка DE и EF изменяется. Задача сводится к определению взаимодействия скачка уплотнения с характеристиками.

6. Отражение скачка уплотнения и характеристик от стенки (рис. 4.16). Поток в области 1 движется вдоль стенки, в области 3 он опять будет двигаться вдоль стенки. Это условие будет соблюдаться и при рассмотрении случая отражения характеристик.

Для того чтобы упростить решение этих задач, веер характеристик заменяется одной характеристикой.

Решив приведенные выше газодинамические задачи, можно получить эпюры распределения давлений на верхней и нижней поверхностях соседних планов. На рис. 4.17 приведены некоторые эпюры для планов с относительной толщиной $\bar{c}=0,04$ и углом заострения носовой и хвостовой частей $2\theta=12^\circ$ при взаимном влиянии между планами и в случае, когда взаимного влияния нет, т. е. для изолированного плана. Здесь же нанесены результаты экспе-

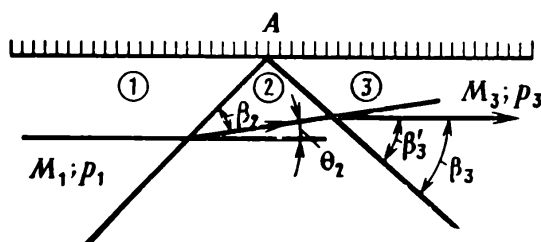


Рис. 4.16. Отражение скачка уплотнения от стенки

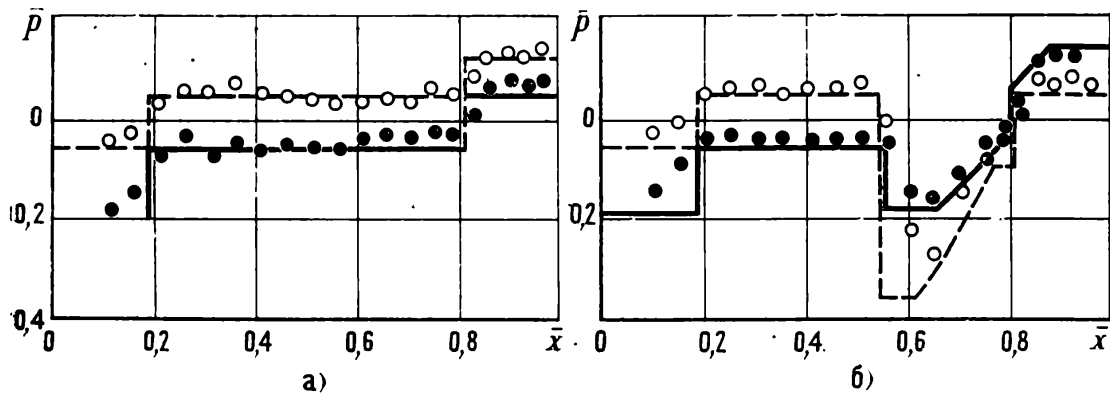


Рис. 4.17. Распределение давлений на плане:

a — взаимного влияния нет ($M_\infty=2,3$; $\bar{t}=\infty$; $\alpha=3^\circ$); *б* — взаимное влияние есть ($M_\infty=2,3$; $\bar{t}=0,35$; $\alpha=3^\circ$); — — — расчет по верхней поверхности; — — — расчет по нижней поверхности; \circ — экспериментальные точки по верхней поверхности; \bullet — экспериментальные точки по нижней поверхности

риментов по распределению давления. На этих эпюрах виден характер влияния соседних планов на распределение давления по плану, работающему в условиях взаимного влияния. В отличие от обтекания планов решетчатого крыла дозвуковыми скоростями на сверхзвуковых скоростях взаимное влияние между планами оказывает влияние на характер распределения давления только на тех участках поверхности плана, которые находятся в зонах сверхзвукового влияния соседних планов.

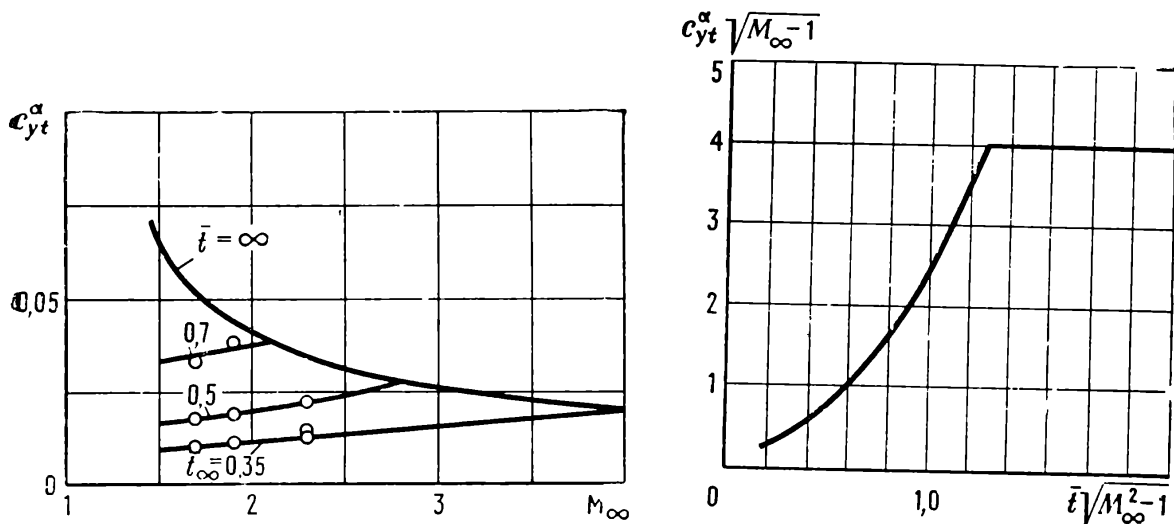


Рис. 4.18. Зависимости производной c_{yt}^α полиплана от числа M_∞ $\bar{c}=0,04$; $n=\infty$):

— — — расчет; \circ — эксперимент

Рис. 4.19. Зависимость производной коэффициента нормальной силы полиплана от числа M_∞ и \bar{t} в параметрах подобия

По эпюрам давлений были определены суммарные значения c_{yt}^a при различных углах атаки и числах M_∞ для решетчатых крыльев с различными относительными шагами \bar{t} . На рис. 4.18 приведены зависимости производной c_{yt}^a от числа M_∞ при различных значениях относительного шага \bar{t} при бесконечном числе планов, т. е. для полиплана. Здесь же нанесены экспериментальные данные, полученные по распределению давления. На этом же графике приведена зависимость c_y^a от числа M_∞ для плоской пластины бесконечного удлинения ($\bar{t} = \infty$).

Из графика видно, что при взаимном влиянии между планами c_{yt}^a уменьшается по сравнению с c_y^a пластины. Уменьшение c_{yt}^a тем больше, чем меньше относительный шаг \bar{t} , т. е. больше взаимное влияние между планами. Кривая зависимости c_{yt}^a при данном \bar{t} соединяется с кривой c_y^a по M_∞ для бесконечной пластинки при числе $M_\infty = M_{крз}$, при котором заканчивается взаимное влияние между планами.

На рис. 4.19 приведен график зависимости $c_{yt}^a \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ от $\bar{t} \sqrt{M_\infty^2 - 1}$, который получен на основе систематических расчетов и экспериментов. Этот график может использоваться для определения c_{yat} при расчетах решетчатого крыла по формуле (4.22) или (4.24).

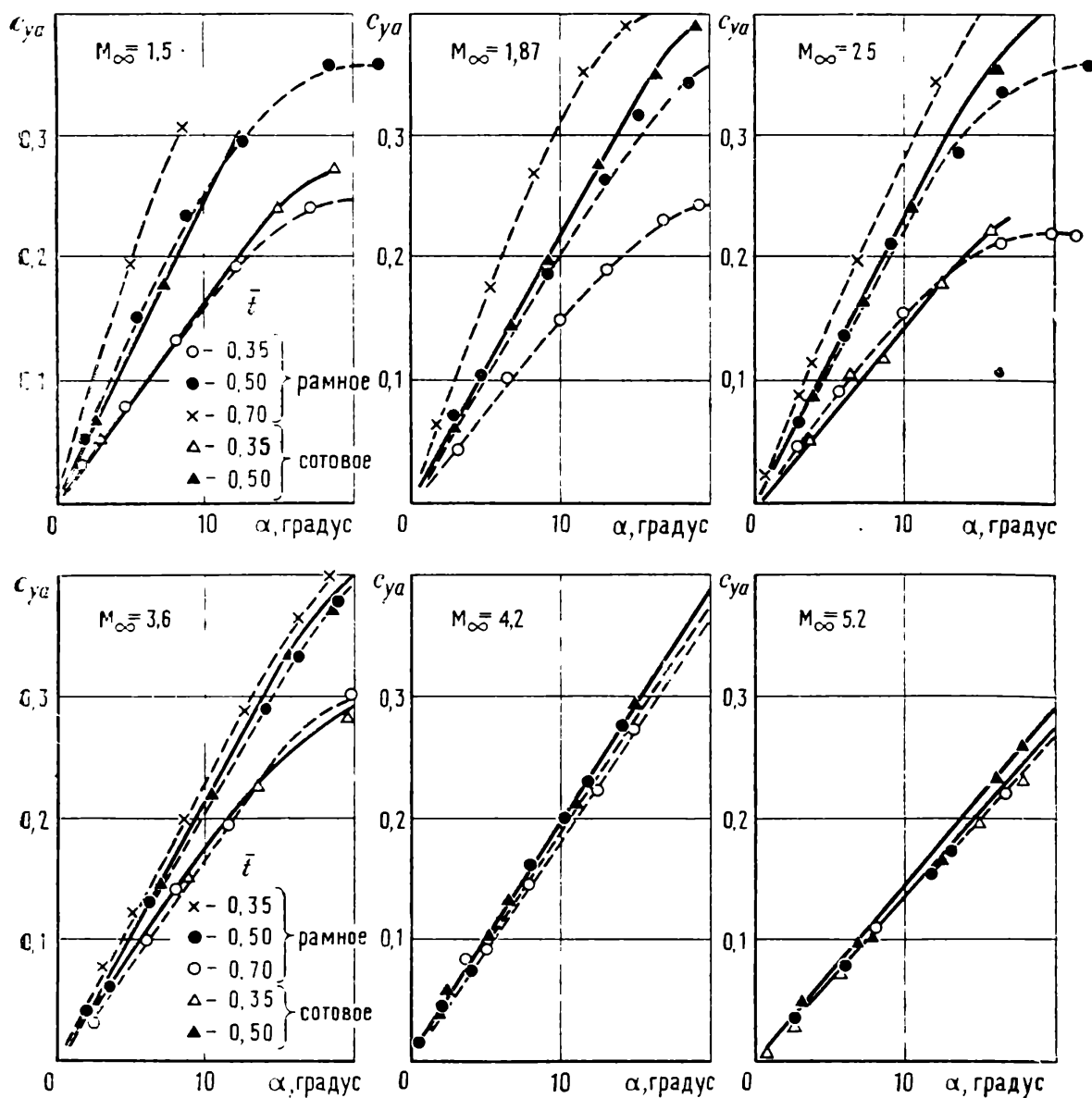
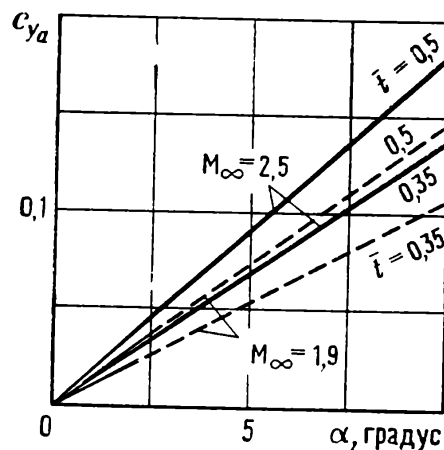
4.6. Зависимость коэффициента подъемной силы c_{ya} от углов атаки α

Систематические расчеты показали, что при наличии взаимного влияния между планами зависимости c_{ya} от α оказываются практически линейными до углов атаки $\alpha = 10 \dots 15^\circ$ (рис. 4.20). Объясняется это тем, что, как было показано в разд. 4.1, положение скачка, отходящего от передней кромки верхнего плана, относительно нижнего плана изменяется мало при увеличении угла атаки (см. рис. 4.5). Кроме того, несмотря на то, что первая и последняя характеристики, отходящие от нижнего плана, при увеличении α меняют свое положение на верхнем плане, средняя характеристика относительно этого плана меняет свое положение незначительно (см. рис. 4.5, точка А).

Систематические эксперименты подтвердили линейную зависимость c_{ya} от α на малых углах атаки при числах M_∞ от 1,5 до 5 (рис. 4.21). Величина угла атаки, до которого сохраняется линейная зависимость c_{ya} от α , зависит от относительного шага \bar{t} и числа M_∞ . Отметим, что зависимость c_{ya} от α для рамных и сотовых решетчатых крыльев практически совпадают. Таким образом, при известном значении производной коэффициента подъемной силы от угла атаки

Рис. 4.20. Зависимости коэффициентов подъемных сил от углов атаки, полученные расчетом

Рис. 4.21. Зависимости коэффициентов подъемных сил от углов атаки, полученные экспериментально



c_{ya}^* величину c_{ya} при заданном значении α можно определить как $c_{ya} = c_{ya}^* \alpha$. Метод расчета c_{ya} на больших углах приведен в разд. 11.2.

4.7. Коэффициент сопротивления решетчатых крыльев на сверхзвуковых скоростях

Экспериментальные исследования показывают, что коэффициент сопротивления решетчатого крыла c_{xa} на сверхзвуковых скоростях так же, как на дозвуковых и трансзвуковых, подчиняется зависимости (3.34). Величина A определяется по формуле (3.35).

Коэффициент сопротивления c_{x0} на сверхзвуковых скоростях равен сумме коэффициентов сопротивлений трения $c_{xтр}$ и волнового $c_{x0в}$.

Коэффициент сопротивления трения можно определить известными методами, заменяя планы и боковины тонкими пластинами.

Коэффициент волнового сопротивления $c_{x0в}$ можно рассчитать по эпюрам давления, построенным для планов при $\alpha=0$, по методу, изложенному в предыдущем разделе. При этом можно учесть и взаимное влияние или интерференцию между планами.

Следует отметить, что в некоторых случаях можно получить и полезную интерференцию между планами, когда происходит снижение $c_{x0в}$. Это снижение произойдет, например, в том случае, когда планы будут иметь торцевые срезы у задних кромок планов, а относительный шаг планов \bar{t} будет таким, чтобы при данном числе M_∞ скачки от передних кромок планов попадали на эти донные срезы. При этом уменьшается данное разрежение на задних торцах планов, что приводит к уменьшению $c_{x0в}$. В то же самое время такое взаимное влияние между планами не уменьшает несущих свойств планов.

Когда крыло работает в значительном диапазоне чисел M_∞ , как показывают систематические расчеты и эксперименты, уменьшение $c_{x0в}$ вследствие взаимного влияния между планами оказывается небольшим. Поэтому для практических целей волновое сопротивление решетчатого крыла можно определить без учета взаимного влияния между планами, что значительно упрощает расчет.

Таким образом, определение волнового сопротивления решетчатого крыла на сверхзвуковых скоростях сводится к определению коэффициента волнового сопротивления $c_{x0в}$ профиля планов и боковин.

Известно, что коэффициент волнового сопротивления профиля определяется по формуле

$$c_{x0в} = \frac{4k_1\bar{c}^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad (4.27)$$

где k_1 — коэффициент, учитывающий форму профиля.

Значения коэффициента k_1 для некоторых типов профилей приведены в табл. 4.1.

Коэффициент волнового сопротивления $c_{x0в}$ рамного крыла, отнесенный к площади планов горизонтального набора S , будет равен сумме волнового сопротивления планов горизонтального набора и волнового сопротивления боковин, отнесенного к площади S :


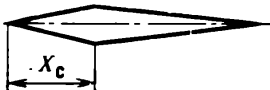
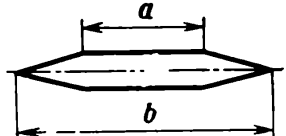

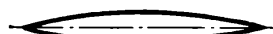
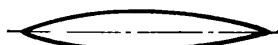
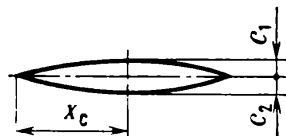
$$c_{x0в} = c_{x0в.пл} + c_{x0в.бок} \frac{n_z H b}{S}, \quad (4.28)$$

где n_z — число боковин; H — высота решетчатого крыла; b — хорда планов или боковин.

Для сотового крыла коэффициент волнового сопротивления $c_{x0в}$ будет равен сумме коэффициентов волнового сопротивления внутреннего набора $c_{x0в.вн}$, верхнего и нижнего плана $c_{x0в.пл}$, боковин

Таблица 4.1

Величины k_1 для различных форм профилей

Тип профиля	Форма профиля	Значение k_1
Ромбовидный		1,0
Четырехугольный		$\frac{1}{4\bar{x}_c(1-\bar{x}_c)}$
Шестиугольный		$\frac{1}{1-a/b}$
Треугольный		$\frac{1}{2\bar{x}_c(1-\bar{x}_c)}$
Синусоидальный		$\frac{\pi^2}{8}$
Образованный дугами окружности или параболы		4/3
Несимметричный параболический ($\bar{x}_c=0,5$; $c=\bar{c}_1+\bar{c}_2$)		$\frac{8}{3} \frac{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}{\bar{c}_2}$

или вертикальных планов $c_{x0в.бок.}$. Для того чтобы получить $c_{x0в.}$ решетчатого крыла, отнесенное к площади планов крыла S , необходимо каждое слагаемое умножить на площадь элементов, создающих волновое сопротивление, и разделить на площадь S

$$c_{x0в.} = c_{x0в.вн.} \frac{2jtb}{S} + c_{x0в.пл.} \frac{2bl}{S} + c_{x0в.бок.} \frac{2Hb}{S}. \quad (4.29)$$

Учитывая, что $S = nlb$, $\frac{jtb}{nl} = \frac{n-1}{n}$, для рамного и сотового крыльев соответственно получим

$$c_{x0в.} = 1,05(c_{x0в.пл.} + c_{x0в.бок.}) \frac{n_z H}{nl}; \quad (4.30)$$

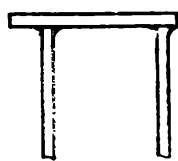
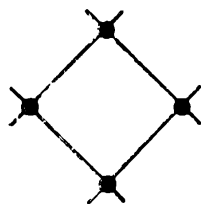
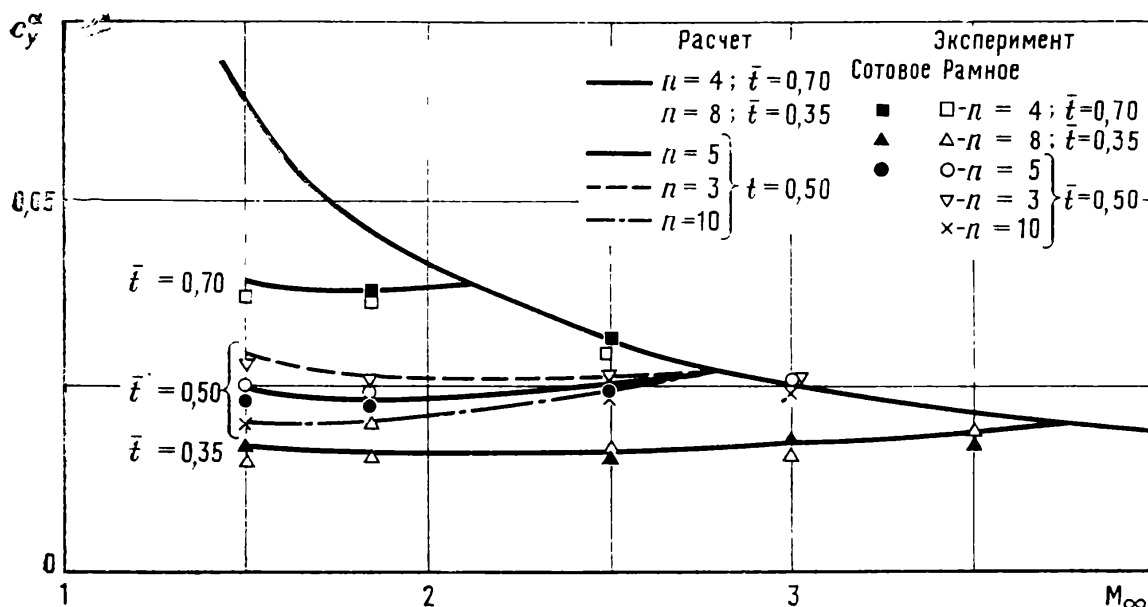


Рис. 4.22. Узлы сочленений планов

Рис. 4.23. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей производных коэффициентов нормальных сил от чисел M_∞ (c_y^α , 1/градус)

$$c_{x0B} = 1,15 \left(c_{x0B,ВН} \frac{2(n-1)}{n} + c_{x0B,ПЛ} \frac{n}{2} + c_{x0B,БОК} \frac{2H}{nl} \right).$$

Коэффициенты перед скобками учитывают дополнительное волновое сопротивление галтелей в узлах сочленения пластин, которые образуются при пайке (рис. 4.22). Они получены на основе обработки систематических экспериментальных данных.

4.8. Сравнения результатов расчета с экспериментами

Приведенная выше методика дает возможность рассчитать аэродинамические характеристики решетчатого крыла на сверхзвуковых скоростях.

На рис. 4.23 представлена зависимость производной коэффициента подъемной силы решетчатого крыла по углу атаки в зависимости от числа M_∞ для моделей с различными величинами параметров \bar{t} и n и постоянном значении \bar{H} . Сплошной линией нанесены результаты расчета, различными значками — экспериментальные.

На рис. 4.24 и 4.25 даны результаты сравнения расчетных значений $c_{y\alpha}^2$ (сплошная линия) с экспериментальными (точки) в зависимости от M_∞ для крыльев с различными n и \bar{H} .

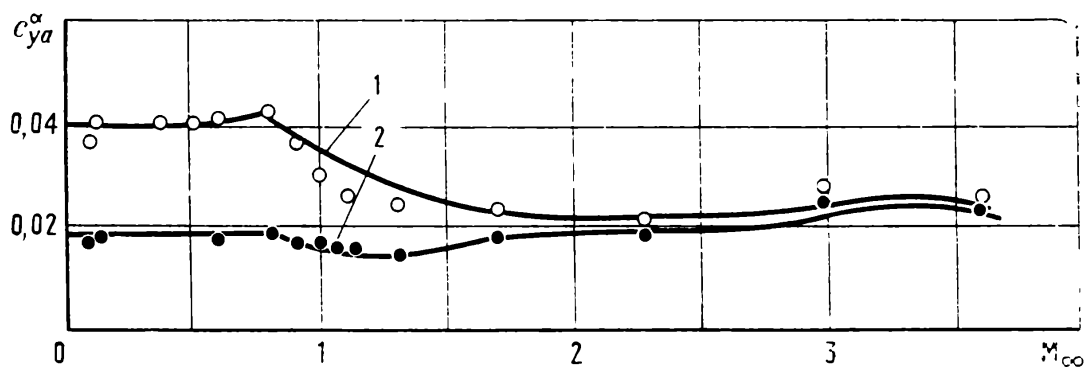


Рис. 4.24. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей c_{ya}^{α} от чисел M_{∞} (c_{ya}^{α} , 1/градус):

1 — $\bar{H}=0,34$; $\bar{t}=0,4$; $n=9,5$; $\bar{c}=0,008$; 2 — $\bar{H}=2,9$; $\bar{t}=0,43$; $n=17,2$; $\bar{c}=0,012$

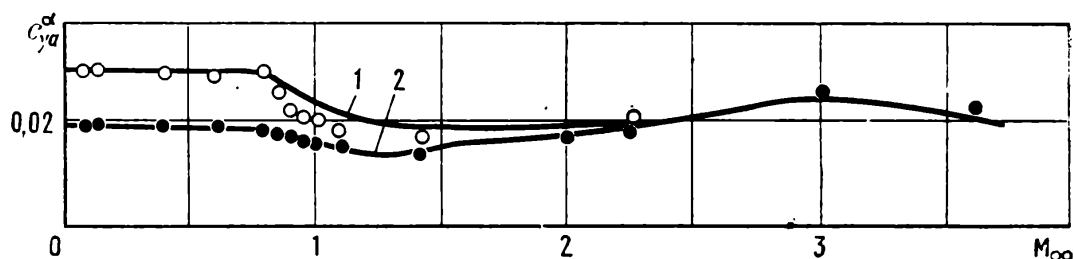


Рис. 4.25. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей c_{ya}^{α} от чисел M_{∞} (c_{ya}^{α} , 1/градус):

1 — $\bar{H}=0,34$; $\bar{t}=0,43$; $n=14,7$; $\bar{c}=0,012$; 2 — $\bar{H}=2,9$; $\bar{t}=0,43$; $n=17,2$; $\bar{c}=0,012$

Приведенные на этих графиках результаты в диапазоне чисел M_{∞} от 0 до $M_{кр2}$ получены расчетом по методике, изложенной в гл. 3. На сверхзвуковых скоростях расчет производился по методике, приведенной в этой главе начиная с чисел $M_{\infty}=1,4$.

В небольшом диапазоне от $M_{\infty}=M_{кр2}$ до $M_{\infty}=1,4$ проведена интерполяция.

Расчетные и экспериментальные зависимости коэффициента сопротивления c_{xa} от угла атаки α при $M_{\infty}=2,5$ приведены на рис. 4.26.

Сравнения расчетных и экспериментальных зависимостей c_{x0} от M_{∞} для решетчатых крыльев с различными относительными шагами \bar{t} и одинаковыми n и \bar{H} при сверхзвуковых числах M_{∞} даны на рис. 4.27.

Экспериментальные и расчетные значения c_{x0} при различных числах M_{∞} для решетчатых крыльев с различными \bar{H} , n , $\frac{2\bar{c}}{\bar{t}}$ при относительном шаге $\bar{t}=0,35$ сравнивались на рис. 3.19.

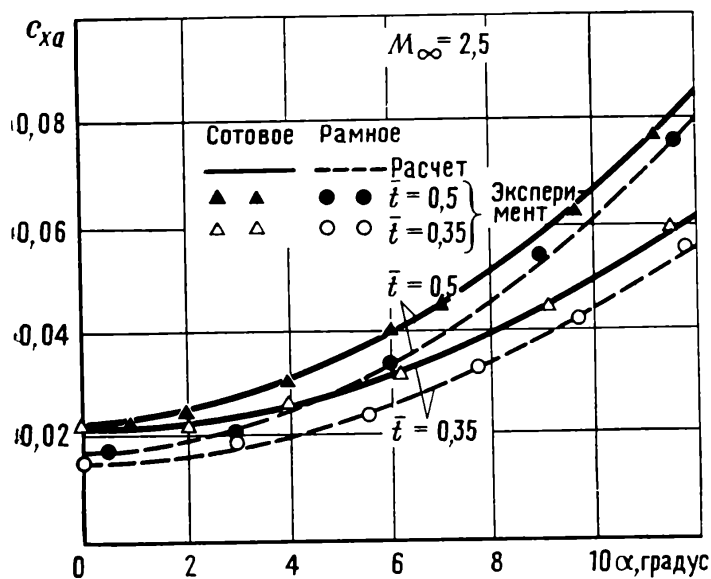
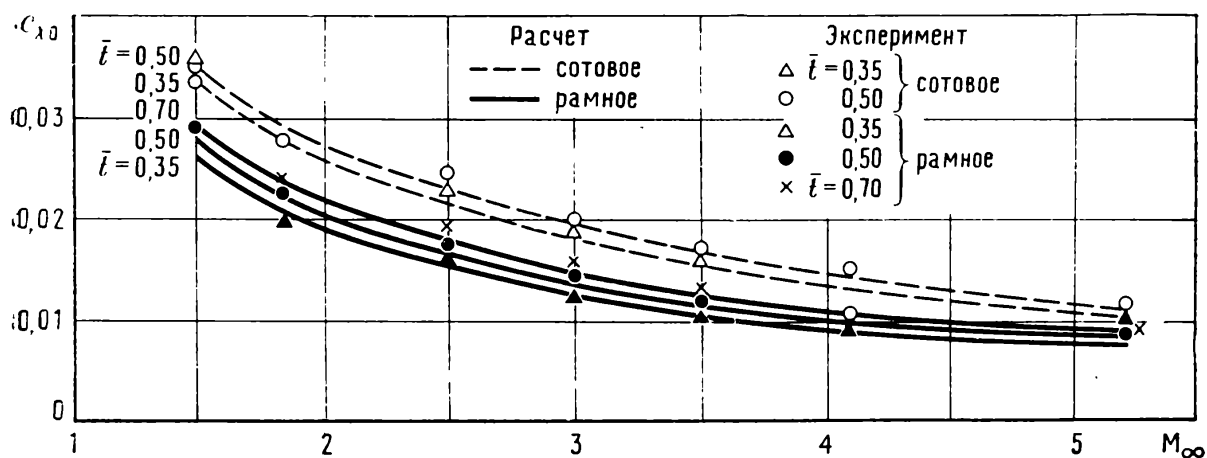


Рис. 4.26. Расчетные и экспериментальные зависимости коэффициентов сопротивления от углов атаки

Рис. 4.27. Сравнение расчетных и экспериментальных значений коэффициентов сопротивления c_{x0} при различных числах M_∞



Анализ приведенных результатов свидетельствует об удовлетворительном совпадении расчетных и экспериментальных данных.

Часть 2

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА РЕШЕТЧАТОГО КРЫЛА

Решетчатое крыло, выполненное по традиционной схеме, представляет собой тонкостенную ферменную или рамную консоль большой строительной высоты, соизмеримой с размахом крыла и значительно превышающей третий габаритный размер — хорду. При таком соотношении размеров максимальные расчетные нагрузки действуют в плоскости наибольшей жесткости крыла, что выгодно отличает решетчатое крыло от монопланного. В конструктивном отношении решетчатое крыло можно рассматривать как окаймленную по краям полипланную панель. При этом продольные окаймляющие планы или, иначе, боковины (1) решетчатого крыла выполняют роль поясов лонжерона монопланного крыла, а решетка (2) — роль стенки лонжерона (см. рис. 5.1). Помимо перечисленных силовых элементов крыло имеет корневой (3) и концевой (4) планы и узлы крепления крыла к летательному аппарату.

Основными геометрическими параметрами, характеризующими прочность и жесткость полипланной системы, являются: шаг решетки t_i ($i=1,2$), высота H и длина l панели (крыла), ширина (хорда) b и толщина c_i планов. Как правило, будем рассматривать густые тонкостенные решетки, такие, у которых хорда b , будучи одного порядка с величинами t_i , значительно меньше габаритных размеров H , l , а толщина планов c_i , в свою очередь, много меньше хорды $b : c_i \ll b$, $t_i \ll H$, l . Ортогональная решетка планов, вообще говоря, может быть произвольно ориентирована по отношению к прямоугольному контуру панели. Однако наиболее распространенными являются два варианта ориентации: когда направление осей решетки совпадает с краями панели (случай так называемого рамного решетчатого крыла) и когда оси планов наклонены под углом 45° к окаймленным краям панели (крыло с диагональным набором планов, или так называемое сотовое). В последнем случае решетка планов имеет квадратную конфигурацию $t_1=t_2$. Такое крыло представляет собой по существу тонкостенную ферму, т. е. весьма легкую и жесткую конструкцию. В связи с тем, что жесткость на сдвиг панели с диагональной решеткой планов значительно превышает жесткость рамной панели, решетчатое крыло ферменного типа в весовом отношении существенно выгоднее рамного.

Поэтому в дальнейшем ограничимся изучением главным образом полипланых крыльев с квадратно-диагональной решеткой, как наиболее перспективных.

Анализ решетчатого крыла как силовой несущей конструкции возможен с двух позиций: во-первых, в сопоставлении с традиционным монопланым крылом, во-вторых, в сравнении с такими хорошо известными решетчатыми конструкциями, как фермы, многорусные рамы, решетчатые своды и т. п., которые в определенном смысле могут рассматриваться как прототипы.

Сопоставляя решетчатое крыло с монопланым, можно отметить следующие три специфические особенности, которые существенным образом отличают решетчатое крыло от монопланного:

на порядок большая по сравнению с монопланым строительная высота конструкции;

рациональная ориентация жесткостей крыла по отношению к расчетным нагрузкам;

двойная функция силовых элементов конструкции, которые помимо передачи усилий на узлы крепления выполняют также роль несущей поверхности (обшивки) крыла.

Сопоставляя решетчатое крыло с известными рамными или ферменными строительными конструкциями, следует отметить такие отличительные особенности решетчатого крыла, как тонкостенность конструкции, густоту решетки, специфику нагружения. Некоторые из указанных особенностей решетчатого крыла как несущей конструкции в дальнейшем будут освещены подробнее.

Исходя из требований аэродинамики планы крыла должны быть возможно более тонкими. В то же время несущая способность их по условию устойчивости тем выше, чем гуще решетка. Отсюда следует, что конструкция решетчатого крыла должна представлять собой тонкостенную полипланную панель с густой решеткой.

Для исследования общего напряженного состояния подобной панели на базе моментной теории упругости вводится расчетная (физическая) модель, эквивалентная по жесткости исходной конструкции (гл. 5). Такая модель представляет собой сплошную скайм-ленную по краям квазиоднородную, ортотропную пластину. Анализ общих уравнений, полученных для расчетной модели, применительно к плоской прямоугольной панели с квадратно-диагональной решеткой (гл. 6) позволяет выявить специфические кинематические и жесткостные особенности конструкции и сформулировать ряд правил и рекомендаций по конструированию решетчатых крыльев, а также установить расчетные случаи нагружения и предложить методику расчета напряженного состояния крыла. В гл. 7 сформулированы алгоритмы инженерных расчетов решетчатых крыльев на прочность и приводятся числовые примеры. В той же главе на базе выявленных ранее специфических свойств плоской полипланной системы и с использованием приближенной расчет-

ной модели — «шарнирной» решетки — дается оценка прочности и жесткости и предлагается методика расчета решетчатых крыльев различных модификаций, в частности цилиндрических и с переменным шагом по размаху.

Для удобства изложения в данном разделе рассматривается только горизонтальное расположение крыла по отношению к летательному аппарату. В этом случае высота крыла H совпадает со строительной высотой панели. Подъемная и лобовая сила являются поперечными нагрузками для консольно закрепленной панели, причем подъемная сила вызывает в основном «плоское» напряженное состояние, а лобовая сила — изгиб из плоскости панели. Боковая сила, действуя вдоль оси симметрии крыла, приводит к симметричному «плоскому» напряженному состоянию панели.

Глава 5

Общие уравнения напряженно-деформированного состояния полипланной панели с диагональной решеткой

5.1. Физическая модель полипланного крыла

При определенных условиях нагружения решетчатое крыло (рис. 5.1) можно рассматривать как окаймленную по краям сплошную пластину — панель, эквивалентную в жесткостном отношении решетке планов. При этом представляется возможным использовать известные гипотезы и методы решения, принятые в теории пластин и оболочек.

Замена решетки эквивалентной ей по жесткости пластиной правомерна при достаточно плавном изменении напряженного состояния по осям x_i' , $i=1,2$ (рис. 5.2), т. е. тогда, когда приращения функций, характеризующих напряженное состояние решетки на расстояниях t_i , малы по сравнению с величинами самих функций. Скорость изменения напряженного состояния по координатам x_i' связана с характером нагружения панели. Полагаем, что для рассматриваемой полипланной конструкции медленное изменение напряженного состояния, как правило, имеет место, а нагрузки, действующие на решетчатую панель, являются нагрузками, распределенными по срединной поверхности и граничному контуру или сосредоточенными силами и моментами, приложенными в угловых точках панели (рис. 5.3). Имея в виду на первом этапе расчета исключить влияние местной аэродинамической нагрузки, принимаем, что распределенная по срединной поверхности панели нагрузка реализуется в виде сил, приложенных к узлам решетки.

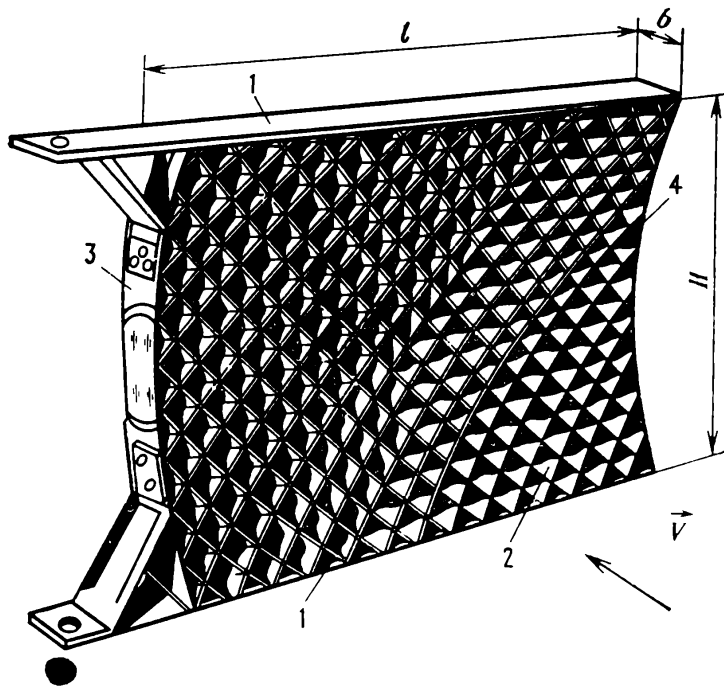


Рис. 5.1. Решетчатое крыло с диагональным набором планов

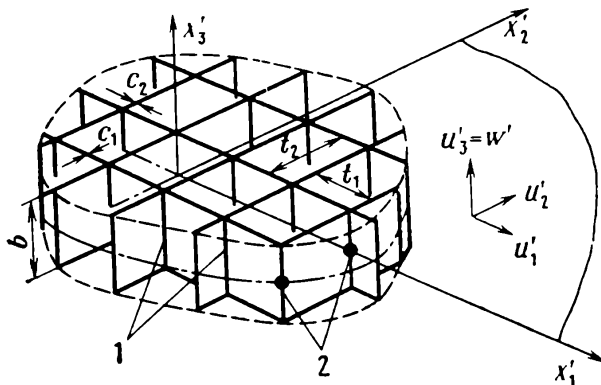


Рис. 5.2. Полипланная система

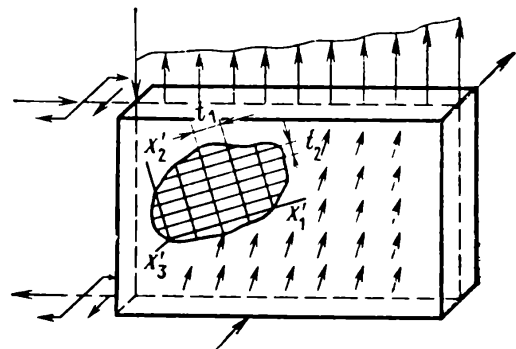


Рис. 5.3. Характер нагружения решетчатого крыла

Погрешность, связанная с переходом от реальной дискретной конструкции к континуальной среде, обуславливается главным образом заменой конечно-разностных зависимостей дифференциальными соотношениями при составлении уравнений деформации и равновесия для элемента конструкции. Запишем выражение в конечных разностях, например, для второй производной от какой-либо функции $f(x)$, характеризующей напряженно-деформированное состояние среды:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\Delta^2 f}{(\Delta x)^2} + \epsilon, \quad \epsilon \leq \frac{(\Delta x)^2}{12} \max |f^{IV}(x)|. \quad (5.1)$$

Отсюда видно, что замена второй производной разностью второго порядка, которая имеет место при переходе от континуальной среды к дискретной с шагом Δx и наоборот, приводит к ошибке, определяемой величиной ϵ . С повышением порядка разностей увеличивается ошибка, связанная с переходом к соответствующим производным. Например, для четвертой разности погрешность опреде-

ляется величиной

$$\epsilon \leq \frac{17}{90} (\Delta x)^2 \max |f^{IV}(x)|, \quad (5.2)$$

а для шестой разности имеем

$$\epsilon \leq \frac{169}{420} (\Delta x)^2 \max |f^{IV}(x)|. \quad (5.3)$$

Как будет показано, напряженное состояние полипланной системы в одних случаях описывается дифференциальными уравнениями в частных производных шестого порядка, в других — уравнениями четвертого порядка. Таким образом, формулы (5.2) и (5.3) определяют порядок погрешности предлагаемой физической модели в зависимости от вида напряженного состояния полипланной системы.

Заменяя полипланную решетку сплошной средой, приходим к окаймленной анизотропной пластине, толщина которой равна хорде крыла, а оси упругой симметрии совпадают с направлениями осей планов [1].

Для эквивалентной пластины и панели в целом принимается гипотеза прямых недеформируемых нормалей. Эта гипотеза в рассматриваемом случае соответствует предположению о недеформируемости узловых линий пересечения планов, и ее введение представляется не менее обоснованным, чем в теории изгиба сплошных пластин. Используя гипотезу прямых нормалей, деформацию эквивалентной пластины можно охарактеризовать удлинением и сдвигом срединной поверхности ($x_3' = 0$) и деформацией изгиба этой поверхности из своей плоскости.

Компоненты деформации удлинения и сдвига срединной поверхности с учетом нелинейных членов представим в форме [28]

$$\epsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j'} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i'} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i'} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j'} \right), \quad i, j = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.4)$$

где u_k' — компоненты перемещения точек срединной поверхности по осям x_k' (см. рис. 5.2).

Выражения для компонентов приращения кривизны срединной поверхности при изгибе из своей плоскости принимаются в линейной форме

$$\kappa'_{ij} = -\frac{\partial^2 w'}{\partial x_i' \partial x_j'}, \quad (w' = u_3'). \quad (5.5)$$

В соответствии с перечисленными видами деформаций в сечениях $x_i' = \text{const}$ эквивалентной пластины действуют следующие усилия, отнесенные к срединной поверхности: нормальные усилия N'_{ii} , касательные усилия N'_{ij} , изгибающие моменты M'_{ii} , крутящие моменты M'_{ij} , а также поперечные силы N'_{iz} (рис. 5.4).

Для более полной характеристики изучаемого объекта жесткостные свойства эквивалентной пластины будем описывать с по-

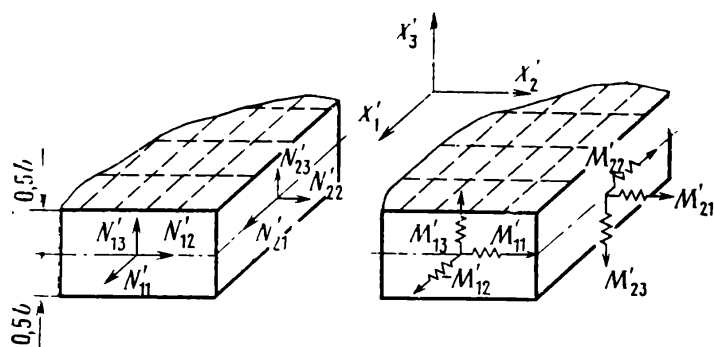


Рис. 5.4. Усилия в сечениях $x_i' = \text{const}$ эквивалентной пластины

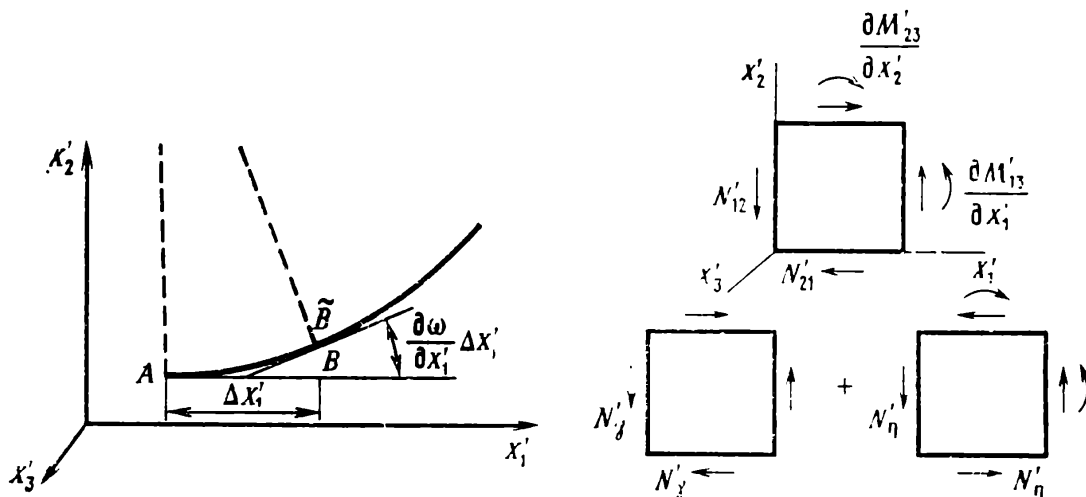


Рис. 5.5. Приращение кривизны координатных линий в срединной плоскости эквивалентной пластины

Рис. 5.6. Нагружение элемента эквивалентной пластины касательными усилиями

зиций моментной теории упругости [23, 32], которая в настоящее время все шире применяется в прикладных задачах при исследовании напряженного состояния дискретно-неоднородных конструкций (см., например, [10, 22, 40]). В соответствии с моментной теорией упругости в случае плоского напряженного состояния в сечениях $x_i' = \text{const}$ возникают как силовые, так и моментные напряжения, а следовательно, и моментные усилия вида M'_{i3} (см. рис. 5.4). Моментные усилия M'_{i3} обусловлены приращением кривизны ν_i' координатных линий x_i' в плоскости срединной поверхности (рис. 5.5):

$$\nu_i' = (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega}{\partial x_i'}; \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2'}{\partial x_1'} - \frac{\partial u_1'}{\partial x_2'} \right), \quad (5.6)$$

где ω — вращение элемента среды в плоскости $x_3' = \text{const}$.

Имея в виду в дальнейшем использовать вариационные принципы, выделим из всех усилий чисто статические усилия, деформацией от которых (в соответствии с принятой моделью полипланной системы) пренебрегаем и которые вследствие этого непосредственно в вариационные уравнения не входят, а могут быть определены

только из условий статики. К таким усилиям относятся, в частности, поперечные силы N'_{i3} , определяемые из условий равновесия моментов относительно осей x'_i для элемента пластины

$$N'_{i3} = \frac{\partial M'_{ii}}{\partial x'_i} + \frac{\partial M'_{ji}}{\partial x'_j}, \quad (5.7)$$

а также несимметричная составляющая N'_η касательных усилий

$$N'_\eta = 0,5 (N'_{12} - N'_{21}), \quad (5.8)$$

определяемая из условия равновесия моментов относительно оси x'_3 (рис. 5.6)

$$N'_\eta = 0,5 \left(\frac{\partial M'_{23}}{\partial x'_2} - \frac{\partial M'_{13}}{\partial x'_1} \right). \quad (5.9)$$

Таким образом, касательные усилия можно выразить в виде суммы симметричной N'_ν и несимметричной N'_η составляющих

$$N'_{12} = N'_\nu + N'_\eta; \quad N'_{21} = N'_\nu - N'_\eta, \quad (5.10)$$

причем N'_ν является тем усилием, которое обуславливает деформацию сдвига в плоскости $x'_3 = \text{const}$.

Аналогичным путем крутящие моменты представим как сумму двух составляющих

$$M'_{12} = M'_\chi + M'_\eta; \quad M'_{21} = M'_\chi - M'_\eta, \quad (5.11)$$

где M'_χ — момент, обуславливающий деформацию кручения, а M'_η чисто статическое усилие.

Как видим, закон парности касательных усилий и крутящих моментов, характерный для сплошных однородных сред, в общем случае дискретно-неоднородной среды, которой является полипланная система, не выполняется. Эта особенность проявляется тем в большей степени, чем более редкой является решетка планов, т. е. чем меньше параметр густоты решетки $1/\eta^2$, определяемый выражением

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{6H^2}{t^2}. \quad (5.12)$$

Рассматривая в дальнейшем достаточно густые решетки, как правило, будем пренебрегать величиной M'_η , сохраняя в то же время N'_η в выражениях (5.10). Иными словами, для крутящих моментов принимаем закон парности

$$M'_{12} = M'_{21} = M'_\chi. \quad (5.13)$$

Распределенные усилия эквивалентной пластины и усилия, действующие в планах реальной конструкции, которые будем отмечать индексом «п», связаны очевидными зависимостями:

$$N''_{ik} = N'_{ikt}; \quad M''_{ik} = M'_{ikt}. \quad (5.14)$$

5.2. Соотношения упругости для эквивалентной панели

Для определения упругих констант составим выражение удельной энергии деформации эквивалентной пластины. Деформированное состояние эквивалентной пластины (рис. 5.7) описывается функциями перемещений u_k , определяющими также положение узлов деформированной решетки. При этом деформированные координаты линии $x_i = \text{const}$, проходя через узлы решетки, вообще говоря, не совпадают с осями планов на участках между узлами.

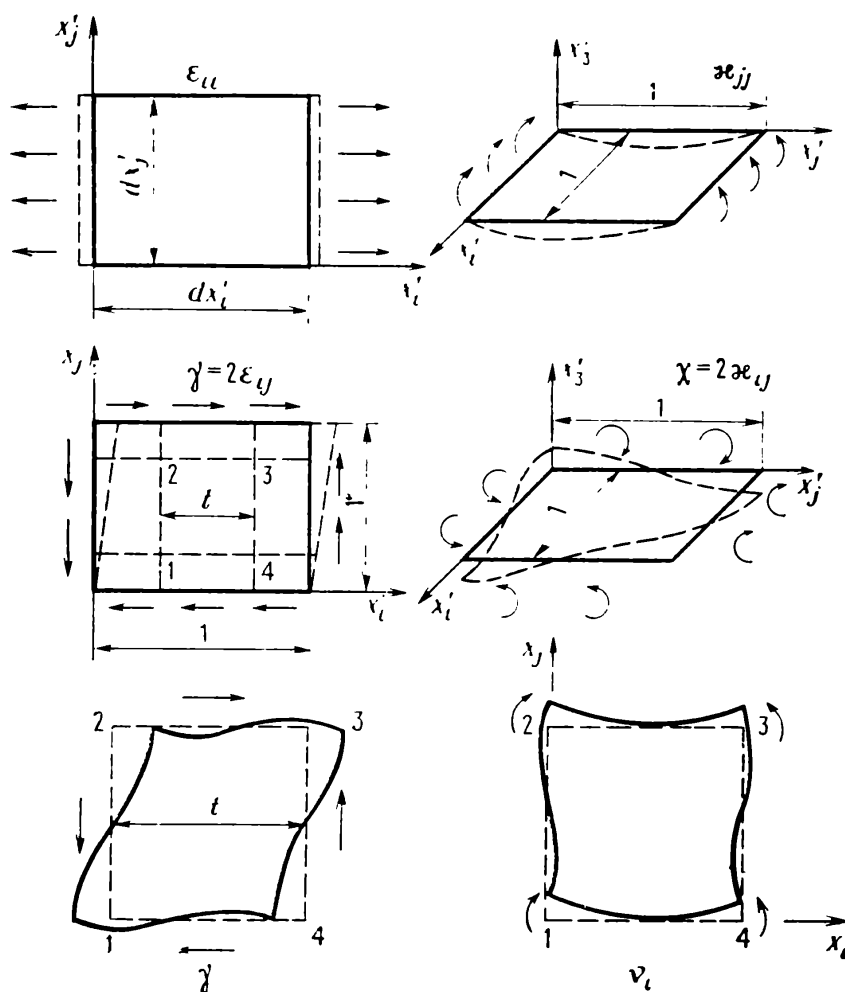


Рис. 5.7. Виды деформации элемента эквивалентной пластины

Величину энергии \mathfrak{E}_ϵ , обусловленную деформацией удлинения планов, запишем в форме

$$\mathfrak{E}_\epsilon = \frac{EF}{2t} (\epsilon_{11}'^2 + \epsilon_{22}'^2), \quad (5.15)$$

где EF — жесткость плана на растяжение.

Здесь и далее принято, что коэффициент Пуассона в направлении осей x_i' равен нулю.

Деформация сдвига срединной плоскости в направлении осей планов x_i' связана с изгибной деформацией элементарной ячейки решетки как рамы (см. рис. 5.7). Энергия деформации такой рамы, отнесенная к единице площади срединной поверхности панели,

$$\mathfrak{E}_\gamma = 12 \frac{EI}{t^3} \epsilon_{12}'^2, \quad (5.16)$$

где EI — жесткость изолированного плана на изгиб в плоскости x_1', x_2' .

Величины удельных энергий деформации изгиба в плоскости планов \mathfrak{E}_κ и кручения \mathfrak{E}_χ определяются выражениями

$$\mathfrak{E}_\kappa = \frac{EI}{2t} (\kappa_{11}'^2 + \kappa_{22}'^2); \quad \mathfrak{E}_\chi = \frac{GJ_k}{t} \chi_{12}'^2, \quad (5.17)$$

где EJ, GJ_k — жесткости плана на изгиб в своей плоскости и кручение.

Энергию деформации, обусловленную приращением кривизны координатных линий x_1', x_2' в плоскости панели, определим как энергию деформации элементарной рамы, отнесенную к площади срединной поверхности панели (см. рис. 5.7):

$$\mathfrak{E}_\nu = \frac{EI}{2t} \frac{4EFt^2 + 12EI}{EFt^2 + 12EI} (\nu_1'^2 + \nu_2'^2). \quad (5.18)$$

Полная величина удельной энергии деформации \mathfrak{E} полипланной системы и эквивалентной ей по жесткости пластины определяется суммой

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\epsilon + \mathfrak{E}_\gamma + \mathfrak{E}_\kappa + \mathfrak{E}_\chi + \mathfrak{E}_\nu.$$

Используя формулы перехода к наклонным осям, удельную энергию можно представить как функцию компонентов деформации $\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}, \nu_{ij}$ в координатных осях x_i , параллельных сторонам панели (рис. 5.8). Предполагая наличие упругого потенциала, усилия в сечениях $x_i = \text{const}$, обуславливающие деформацию эквивалентной пластины, определим выражениями

$$\begin{aligned} N_{ii} &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \epsilon_{ii}}; & N_\gamma &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial (2\epsilon_{12})}; & M_{i1} &= M_{i3} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \nu_i}; \\ M_{ii} &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \kappa_{ii}}; & M_\chi &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial (2\kappa_{ij})}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

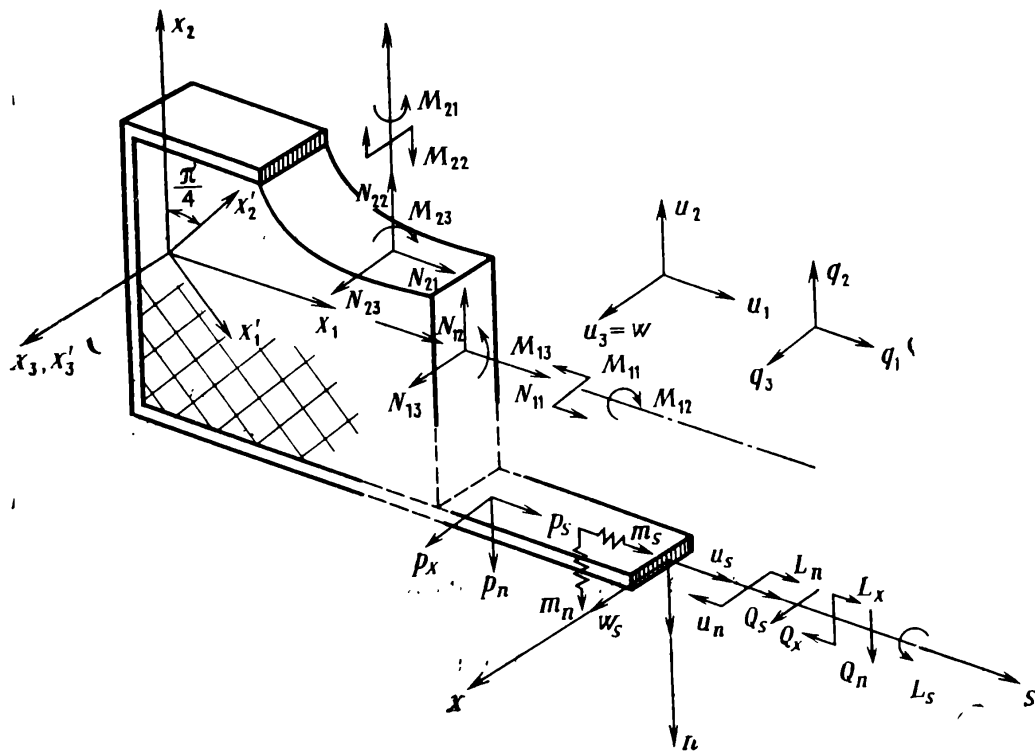


Рис. 5.8. Усилия и перемещения в эквивалентной панели

Здесь N_{ij} и M_{ij} — симметричные составляющие касательных усилий и крутящих моментов, для которых справедливы зависимости (5.10) и (5.11).

Реализуя (5.19), получаем следующие соотношения упругости:

$$N_{ii} = E_3 [\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj} + \zeta_1^2 (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})]; \quad N_{ij} = 2E_3 \varepsilon_{ij}; \quad M_{ij} = B_3 H^2 \nu_{ij}; \quad (5.20)$$

$$M_{ii} = D_3 [\kappa_{ii} + \kappa_{jj} + \zeta_2^2 (\kappa_{ii} - \kappa_{jj})]; \quad M_{ij} = 2D_3 \kappa_{ij}.$$

Входящие в (5.20) приведенные жесткости для эквивалентной пластины с учетом (5.12) определяются выражениями:

$$E_3 = \frac{EF}{2t}, \quad D_3 = \frac{EJ}{2t}, \quad B_3 = 4\eta^2 \zeta_1^2 \frac{1 + 0,25\zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} E_3; \quad (5.21)$$

$$\zeta_1^2 = \frac{12I}{t^2 F} = k_1 \frac{\bar{c}^2}{t^2}; \quad \zeta_2^2 = \frac{GJ_k}{EJ} = k_2 \bar{c}^2.$$

Здесь $\zeta_1^2 \ll 1$; $\zeta_2^2 \ll 1$; $\bar{c}^2 \ll 1$ — малые параметры, характеризующие жесткостные особенности планов, гибких из своей плоскости и достаточно жестких при деформации в своей плоскости, причем $\bar{c} = c/b$ — относительная толщина планов; k_1, k_2 — коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения планов, например, для тонких прямоугольных сечений $k_1 = 1$; $k_2 = \frac{2}{1 + \mu}$, где μ — коэффициент Пуассона материала планов.

Структура формул (5.20) указывает на возможность представления нормальных усилий N_{ii} и изгибающих моментов M_{ij} эквивалентной пластины в виде сумм двух компонентов

$$\begin{aligned} N_{11} &= N + N_{\zeta}; & N_{22} &= N - N_{\zeta}; \\ M_{11} &= M + M_{\zeta}; & M_{22} &= M - M_{\zeta}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где N, M — усилия, обуславливающие деформации в плоскости планов; N_{ζ}, M_{ζ} — усилия, связанные с изгибом планов из своей плоскости и кручением.

С учетом (5.22) соотношения упругости (5.20) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} N &= E_{\vartheta} \varepsilon; & N_{\zeta} &= \zeta_1^2 E_{\vartheta} \varepsilon_{\zeta}; & N_{\gamma} &= E_{\vartheta} \gamma; \\ M_{i\gamma} &= B_{\vartheta} H^2 \nu_i & (i &= 1, 2); \\ M &= D_{\vartheta} \kappa; & M_{\zeta} &= \zeta_2^2 D_{\vartheta} \kappa_{\zeta}; & M_{\chi} &= D_{\vartheta} \chi, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}; & \varepsilon_{\zeta} &= \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}; & \gamma &= 2\varepsilon_{12}; \\ \kappa &= \kappa_{11} + \kappa_{22}; & \kappa_{\zeta} &= \kappa_{11} - \kappa_{22}; & \chi &= 2\kappa_{12}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Расчетные усилия эквивалентной пластины в сечениях, параллельных осям планов, определяются через усилия (5.23) по формулам перехода к наклонным осям. При этом для реальных усилий, действующих в планах решетки с учетом (5.14), имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} N_{ii}'' &= [N + (-1)^{i+1} N_{\gamma}] t; & N_{ij}'' &= [N_{\gamma} + (-1)^{i+1} N_{\zeta}] t; \\ M_{i3}'' &= \frac{t}{\sqrt{2}} [M_{i\gamma} + (-1)^{i+1} M_{j\gamma}]; \\ M_{ii}'' &= [M + (-1)^{i+1} M_{\chi}] t; & M_{12}'' &= [M_{\gamma} + (-1)^{i+1} M_{\zeta}] t. \end{aligned} \quad (5.25)$$

При рассмотрении деформации граничного контура введем координатные оси n, s, x (см. рис. 5.8). Для усилий окаймляющего плана, обусловленных его удлинением, изгибом в плоскостях ns, sx и кручением, можно записать следующие соотношения упругости:

$$\begin{aligned} Q_s &= E_s \varepsilon_s; & L_x &= B_s \nu_s; \\ L_n &= D_s \kappa_s; & L_s &= C_s \chi_s, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где $\varepsilon_s, \nu_s, \kappa_s, \chi_s$ — компоненты деформации, определяемые через компоненты перемещений u_n, u_s, w_s точек граничного контура выражениями:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \right)^2;$$

$$v_s = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial u_s}{\partial n} \right); \quad (5.27)$$

$$\chi_s' = \frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2}; \quad \chi_s = \frac{\partial^2 w_s}{\partial s \partial n},$$

E_s, B_s, D_s — жесткости на растяжение и изгиб соответственно в плоскостях ns, sx изолированного окаймляющего плана.

Определяя жесткость граничного контура на кручение C_s с учетом конечной густоты решетки, к жесткости изолированного окаймляющего плана (жесткости свободного кручения) следует добавить жесткость на кручение примыкающего к граничному контуру ряда треугольных ячеек решетки, т. е. учесть жесткость стесненного кручения края (рис. 5.9).

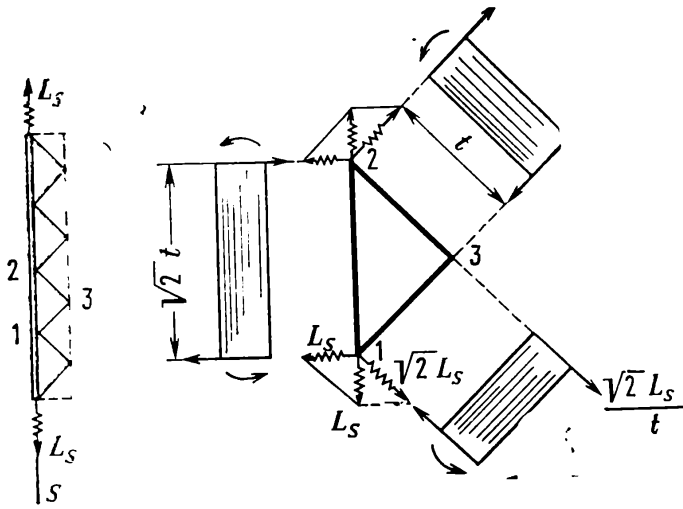
Раскладывая вектор крутящего момента стесненного кручения L_s по направлениям, перпендикулярным осям решетки и окаймляющего плана, нетрудно видеть, что примыкающая треугольная ячейка решетки и окаймляющий план нагружаются поперечной силой и изгибающим моментом так, как это показано на рис. 5.9. Полагая, что изгибная и сдвиговая жесткость окаймляющего плана в своей плоскости намного превышает соответствующие жесткости планов решетки, принимаем, что деформация стесненного кручения обуславливается только податливостью последних. В этом случае энергия деформации приграничных планов решетки на участке длиной $\sqrt{2}t$ определяется выражением

$$\mathcal{E}_{sx} \sqrt{2}t = \frac{1}{2} \left[\frac{2t}{GF} \left(\frac{\sqrt{2}L_s}{t} \right)^2 + \frac{2\sqrt{2}t}{3EJ} L_s^2 \right],$$

где GF, EJ — жесткости плана решетки на сдвиг и изгиб в своей плоскости.

Дифференцируя \mathcal{E}_{sx} по L_s , находим

$$\chi_s = \frac{\partial \mathcal{E}_{sx}}{\partial L_s} = \left(\frac{4}{\sqrt{2}GFt^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{EJ} \right) L_s.$$



Таким образом, суммарная жесткость на кручение граничного контура с учетом жесткости свободного кручения окаймляющего плана определяется выражениями

$$C_s = D_s t \left(\frac{3}{k_\eta^2 + 1} + \zeta_{2s}^2 \right);$$

Рис. 5.9. Кручение окаймленного края панели

$$k_{\eta}^2 = \frac{3\sqrt{2}EJ}{GFt^2}, \quad \zeta_{2s}^2 = \frac{GJ_{ks}}{EJ}, \quad (5.28)$$

где GJ_{ks} — жесткость свободного кручения окаймляющего плана.

Если окаймляющий план имеет тонкое прямоугольное сечение, то

$$k_{\eta}^2 = \frac{1+\mu}{\sqrt{2}} \left(\frac{b_s}{t} \right)^2; \quad \zeta_{2s}^2 = \frac{2}{1+\mu} \left(\frac{c_s}{b_s} \right)^2,$$

где c_s, b_s — соответственно толщина и хорда окаймляющего плана; μ — коэффициент Пуассона материала.

Рассматривая деформацию изгиба окаймляющего плана в плоскости срединной поверхности панели, будем учитывать, что помимо чисто изгибной деформации окаймляющий план может испытывать сдвиговую деформацию (рис. 5.10). Принимая в качестве оси окаймляющего плана геометрическое место точек граничных узлов решетки, полагаем, что приращение кривизны оси плана $\partial^2 u_n / \partial s^2$ может быть представлено с учетом тождества $\frac{\partial u_n}{\partial s} = \omega_s + \varepsilon_{ns}$, как сумма деформаций — деформации, вызываемой поворотом ω_s элемента плана, и деформации, обусловленной сдвигом ε_{ns} . При этом соотношении упругости, связывающее деформацию сдвига окаймляющего плана с поперечной силой Q_n , имеет вид

$$Q_n = G_s \varepsilon_{ns} = \zeta_{1s}^2 E_s \varepsilon_{ns}, \quad \zeta_{1s}^2 = \frac{12B_s}{t^2 E_s}. \quad (5.29)$$

Здесь $G_s = \zeta_{1s}^2 E_s$ — жесткость на сдвиг в плоскости панели окаймляющего плана, найденная при условии, что краевые узлы решетки лежат на граничном контуре.

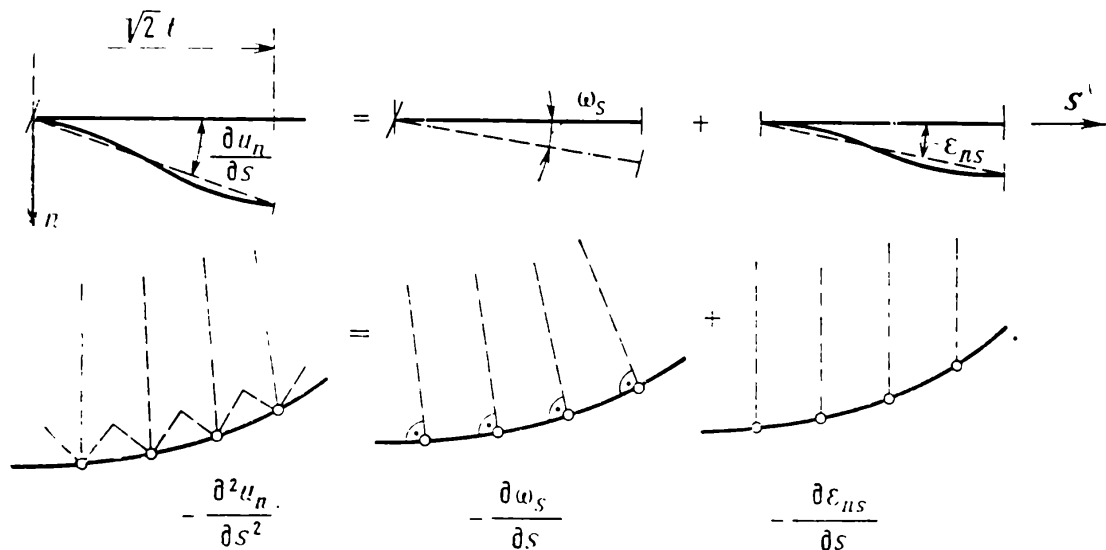


Рис. 5.10. Изгиб окаймляющего плана в плоскости срединной поверхности панели

Полученные зависимости можно обобщить на случай действия на конструкцию стационарного температурного поля $T(x_1, x_2, x_3)$. При условии равномерности распределения температуры по толщине планов и наличии градиента по хорде и в направлении осей x_1, x_2 учет температуры сводится к добавлению температурных членов в соотношения упругости, записанных для усилий N и M ,

$$N = E_s \varepsilon - N_T; \quad M = D_s \chi - M_T, \quad (5.30)$$

где N_T и M_T определяются выражениями [8]

$$N_T = \frac{E_s \alpha_T}{b} \int_{-0.5b}^{0.5b} T dx_3; \quad M_T = \frac{D_s \alpha_T}{b} \int_{-0.5b}^{0.5b} T x_3 dx_3. \quad (5.31)$$

В (5.31) α_T — коэффициент линейного расширения материала решетки. Аналогично учитываются температурные члены для окаймляющих планов:

$$Q_s = E_s \varepsilon_s - N_{Ts}; \quad L_s = D_s \chi_s - M_{Ts}. \quad (5.32)$$

Выражения для N_{Ts} , M_{Ts} имеют вид аналогичный (5.31).

Используя полученные зависимости, запишем выражение для удельной энергии деформации эквивалентной пластины с учетом действия температурного поля:

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2} & \left[E_s (\varepsilon^2 + \gamma^2 + \zeta_1^2 \varepsilon_\zeta^2) - 2N_T \varepsilon + \frac{N_T^2}{E_s} + \right. \\ & \left. + B_s H^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + D_s (\chi^2 + \chi_\zeta^2 + \zeta_2^2 \chi_\zeta^2) - 2M_T \chi + \frac{M_T^2}{D_s} \right]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Энергия деформации окаймляющего плана

$$\begin{aligned} \Theta_s = \frac{1}{2} & \left[E_s \varepsilon_s^2 + B_s \gamma_s^2 + D_s \chi_s^2 + C_s \chi_s^2 + G_s \varepsilon_{sn}^2 - \right. \\ & \left. - 2\varepsilon_s N_{Ts} - 2\chi_s M_{Ts} + \frac{N_{Ts}^2}{E_s} + \frac{M_{Ts}^2}{D_s} \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.3. Вариационные уравнения. Граничные условия

Из (5.33) и (5.34) следует, что энергия деформации W панели, определяемая как сумма энергии W_{s*} эквивалентной пластины и энергии W_s окаймляющих планов, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} W = W_{s*} + W_s = & \iint_{S^*} \Theta(\varepsilon, \varepsilon_\zeta, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \chi, \chi_\zeta, \chi_\zeta) dx_1 dx_2 + \\ & + \oint_s \Theta_s(\varepsilon_s, \gamma_s, \varepsilon_{sn}, \chi_s, \chi_s) ds. \end{aligned} \quad (5.35)$$

В (5.35) двойной интеграл берется по площади S^* срединной поверхности панели, ограниченной окаймляющими планами. Второй член, определяющий W_s , вычисляется как интеграл по замкнутому контуру от распределенной энергии \mathcal{E}_s окаймляющих планов.

Для вывода уравнений равновесия и граничных условий воспользуемся принципом Лагранжа

$$\delta(W_{S^*} + W_s - A) = 0, \quad (5.36)$$

где A — работа внешних сил.

С учетом (5.19) вариацию упругой энергии пластины можно определить выражением

$$\delta W_{S^*} = \iint_{S^*} (N \delta \varepsilon + N_\zeta \delta \varepsilon_\zeta + N_\gamma \delta \gamma + M_1 \delta v_1 + M_2 \delta v_2 + M_\chi \delta \chi + M_\zeta \delta \chi_\zeta + M_\chi \delta \chi) dx_1 dx_2. \quad (5.37)$$

Применяя формулу Грина и используя зависимости (5.4) — (5.6), (5.24), с учетом (5.7), (5.10), (5.22), преобразуем (5.37) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta W_{S^*} = & - \iint_{S^*} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} + N_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + N_\gamma \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{21} + N_\gamma \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + N_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \Big] \delta u_1 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{12} + N_\gamma \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \right. \right. \\ & + N_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{22} + N_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + N_\gamma \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Big] \delta u_2 + \left[\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 M_\chi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_\gamma \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \right. \\ & + N_\gamma \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big) \Big] \delta w \Big\} dx_1 dx_2 + \oint_S \left[\left(N_{nn} + N_{nn} \frac{\partial u_n}{\partial n} + N_{n\gamma} \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) \delta u_n + \right. \\ & + \left(N_{ns} + N_{n\gamma} \frac{\partial u_s}{\partial s} + N_{nn} \frac{\partial u_s}{\partial n} \right) \delta u_s + \left(\frac{\partial M_{nn}}{\partial n} + \frac{\partial M_{n\gamma}}{\partial s} + N_{n\gamma} \frac{\partial w_s}{\partial s} + \right. \\ & + \left. N_{nn} \frac{\partial w_s}{\partial n} \right) \delta w_s - M_{nn} \delta \frac{\partial w_s}{\partial n} - M_{n\chi} \delta \frac{\partial w_s}{\partial s} - M_{nv} \delta w_s \Big] ds. \quad (5.38) \end{aligned}$$

Здесь N_{nn} , $N_{n\gamma} = 0,5(N_{ns} + N_{sn})$, N_{ns} — нормальное и касательные усилия; M_{nv} , M_{nn} , $M_{n\chi}$ — изгибающие и крутящий моменты в граничных сечениях $n = \text{const}$.

Вариацию энергии деформации окаймляющего плана δW_s с учетом (5.26), (5.27), (5.29) можно представить в форме

$$\delta W_s = \oint_S (Q_s \delta z_s + Q_n \delta z_{sn} + L_\chi \delta v_s + L_n \delta \chi_s - L_s \delta \chi_s) ds =$$

$$= \oint_s \left(Q_s \delta \frac{\partial u_s}{\partial s} + Q_s \frac{\partial u_n}{\partial s} \delta \frac{\partial u_n}{\partial s} + Q_s \frac{\partial w_s}{\partial s} \delta \frac{\partial w_s}{\partial s} + Q_n \delta \varepsilon_{sn} + L_x \frac{\partial}{\partial s} \delta w_s + \right. \\ \left. + L_n \frac{\partial}{\partial s} \delta \frac{\partial w_s}{\partial s} - L_s \frac{\partial}{\partial s} \delta \frac{\partial w_s}{\partial n} \right) ds. \quad (5.39)$$

Выражение для δA составим, введя в рассмотрение понятия: удельной нагрузки, действующей на срединную поверхность панели с компонентами q_k ($k=1, 2, 3$);

распределенной силовой нагрузки, приложенной к граничному контуру, с компонентами p_n, p_s, p_x ;

действующей по граничному контуру моментной нагрузки с компонентами m_n, m_s (см. рис. 5.8).

Таким образом, имеем

$$\delta A = \iint_{S^*} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_3 \delta w) dx_1 dx_2 + \\ + \oint_s \left(p_n \delta u_n + p_s \delta u_s + p_x \delta w_s + m_n \delta \frac{\partial w_s}{\partial s} - m_s \delta \frac{\partial w_s}{\partial n} \right) ds. \quad (5.40)$$

Исходя из принятой расчетной модели полагаем, что панель может также нагружаться сосредоточенной нагрузкой в угловых точках контура. Обозначая компоненты сосредоточенной силы P^K , приложенной в K -й угловой точке, через P_s^K, P_n^K, P_x^K и момента M^K через M_s^K, M_n^K, M_x^K (рис. 5.11, а), найдем работу этих сил на соответствующих возможных перемещениях:

$$P_s^K \delta u_s^K + P_n^K \delta u_n^K + P_x^K \delta w_s^K - M_x^K \delta w_s^K + M_n^K \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \right)^K - M_s^K \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \right)^K. \quad (5.41)$$

Здесь индексом K обозначены перемещения, относящиеся к линии пересечения $(K-1)$ -го и K -го окаймляющих планов (см. рис. 5.11, б). Полная работа всех внешних сил, действующих на панель, может быть получена как сумма выражений (5.40) и (5.41) для всех нагруженных угловых точек.

Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением прямоугольного контура со сторонами $x_i = \text{const}$ и применяя к контурным интегралам (5.38), (5.39) и (5.40) правило интегрирования по частям в соответствии с (5.36), находим

$$- \iint_{S^*} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} + N_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{21} + N_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + N_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + q_1 \right] \delta u_1 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{12} + N_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + N_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{22} + N_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + q_2 \right] \delta u_2 + \left[\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \delta w \right\} dx_1 dx_2 +$$

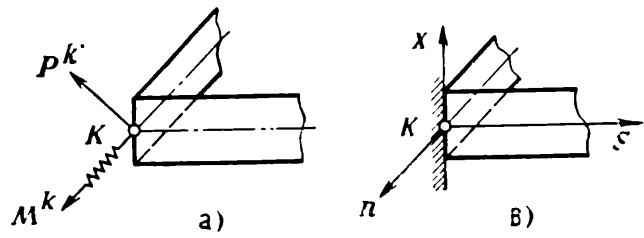
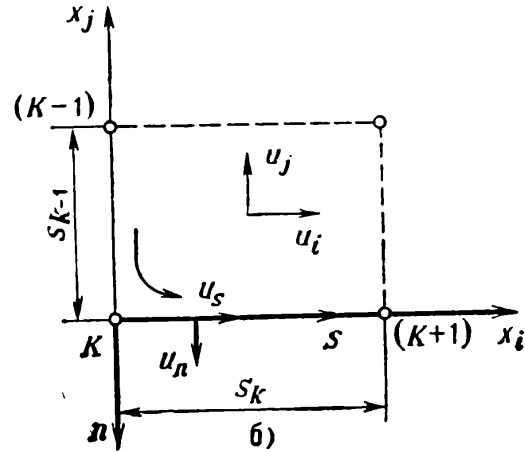


Рис. 5.11. Условия в угловых точках панели:

a — угловая точка нагружения силой и моментом; *b* — координатные оси, определяющие положение угловой точки; *в* — полностью защемленный угол панели



$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + q_3 \delta w \} \times \\
 & \times dx_1 dx_2 + \sum_{K=1}^4 \int_{s_K} \left\{ \left[N_{ns} + N_{12} \frac{\partial u_s}{\partial s} + N_{nn} \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial Q_s}{\partial s} - p_s \right] \delta u_s + \right. \\
 & + \left[N_{nn} + N_{nn} \frac{\partial u_n}{\partial n} + N_{12} \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial M_{nv}}{\partial s} + \frac{\partial^2 L_x}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left(Q_s \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) - p_n \right] \delta u_n + \\
 & + \left[\frac{\partial M_{nn}}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_x}{\partial s} + N_{12} \frac{\partial w_s}{\partial s} + N_{nn} \frac{\partial w_s}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \left(Q_s \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2 L_n}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial m_n}{\partial s} - p_x \right] \delta w_s + \left[-M_{nn} + \frac{\partial L_s}{\partial s} + m_s \right] \delta \frac{\partial w_s}{\partial n} + \frac{1}{2} \left[M_{nv} + Q_n + \right. \\
 & + \left. \frac{\partial L_x}{\partial s} \right] \delta \gamma \} ds + \sum_{K=1}^4 \left\{ Q_s \delta u_s + \left(-M_{nv} - \frac{\partial L_x}{\partial s} + Q_s \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) \delta u_n + \right. \\
 & + \left[M_x + Q_s \frac{\partial w_s}{\partial s} - \frac{\partial L_n}{\partial s} - m_n \right] \delta w_s + L_x \delta w_s + L_n \delta \frac{\partial w_s}{\partial s} - L_s \delta \frac{\partial w_s}{\partial n} \Bigg\}_{K-1}^K - \\
 & - \sum_{K=1}^4 \left[P_s^K \delta u_s^K + P_n^K \delta u_n^K + P_x^K \delta w^K - M_x^K \delta w_s^K + \right. \\
 & + \left. M_n^K \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \right)^K - M_s^K \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \right)^K \right] = 0. \quad (5.42)
 \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при вариациях под знаком двойного интеграла (5.42), получаем следующие уравнения равновесия для элемента эквивалентной пластины:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} + N_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{21} + N_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + N_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= -q_1; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{12} + N_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + N_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{22} + N_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) &= -q_2; \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) &= -q_3. \end{aligned} \quad (5.43)$$

В данных уравнениях отсутствуют нелинейные члены, содержащие моментную составляющую касательных усилий N_{12} , что объясняется выбором линейных соотношений для кривизн. При необходимости эти уравнения можно уточнить заменой N_{12} на N_{ij} . Интегралы по участкам s_K граничного контура определяют условия на краях панелей. Условия для незакрепленного края панели получим, приравнивая нулю коэффициенты при вариациях, входящих в эти интегралы. В соответствии с принятой моделью для окаймленного края панели (см. рис. 5.8) получаем следующие пять статических условий:

$$\begin{aligned} N_{ns} + N_{12} \frac{\partial u_s}{\partial s} + N_{nn} \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= p_s; \\ N_{nn} + N_{nn} \frac{\partial u_n}{\partial n} + N_{12} \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial Q_n}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(Q_s \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) &= p_n; \\ \frac{\partial M_{nn}}{\partial n} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial s} + N_{12} \frac{\partial w_s}{\partial s} + N_{nn} \frac{\partial w_s}{\partial n} + \frac{\partial^2 L_n}{\partial s^2} + \frac{\partial m_n}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(Q_s \frac{\partial w_s}{\partial s} \right) &= p_x; \\ M_{nn} - \frac{\partial L_s}{\partial s} = m_s; \quad M_{nv} + Q_n + \frac{\partial L_x}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Наконец, внеинтегральные члены выражения (5.44) определяют условия в угловых точках граничного контура панели. Для K -го незакрепленного угла панели с учетом

$$u_s^K = -u_n^{K-1}; \quad u_n^K = u_s^{K-1}; \quad w_s^K = w_s^{K-1};$$

$$\left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \right)^K = - \left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \right)^{K-1}; \quad \left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \right)^K = \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \right)^{K-1}; \quad \omega_s^K = \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} \right)^K = - \left(\frac{\partial u_s}{\partial n} \right)^{K-1}$$

имеем следующие шесть условий равновесия:

$$Q_s^K + Q_n^{K-1} + Q_s^{K-1} \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} \right)^{K-1} = -P_s^K;$$

$$\begin{aligned}
Q_n^K + Q_s^K \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} \right)^K - Q_s^{K-1} &= -P_n^K; \\
2M_x + Q_s^K \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \right)^K - Q_s^{K-1} \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \right)^{K-1} - \left(\frac{\partial L_n}{\partial s} \right)^K + \left(\frac{\partial L_n}{\partial s} \right)^{K-1} &= \\
= -P_x^K + m_n^K - m_n^{K-1}; \quad L_x^K - L_x^{K-1} &= M_x^K; \\
L_n^K - L_n^{K-1} &= -M_n^K; \quad L_s^K - L_s^{K-1} = -M_s^K.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

В выражениях (5.45) индексами K , $(K-1)$ отмечены усилия, действующие соответственно в сечениях K -го и $(K-1)$ -го окаймляющих планов панели (см. рис. 5.11, б).

Для закрепленного угла панели вместо статических условий (5.45) следует использовать кинематические, которые в случае полного защемления (см. рис. 5.11, в), имеют вид

$$\delta w_s^K = 0; \quad \delta u_n^K = 0; \quad \delta \omega_s^K = 0; \tag{5.46'}$$

$$\delta w_s^K = 0; \quad \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \right)^K = 0; \quad \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \right)^K = 0. \tag{5.46''}$$

5.4. Линейные уравнения в перемещениях

Как следует из предыдущего раздела, уравнения напряженного состояния эквивалентной панели, записанные в линейной форме, разделяются на уравнения плоского напряженного состояния (напряженного состояния, обусловленного действием нагрузок в плоскости x_1 , x_2) и уравнения изгиба панели из своей плоскости. Уравнения равновесия (5.43), (5.7), (5.9), деформации (5.4) — (5.6) и соотношения упругости в форме (5.20) или (5.23) представляют собой полную систему уравнений, которая в случае плоского напряженного состояния, может быть сведена к двум разрешающим уравнениям относительно перемещений u_i ($i=1, 2$). Подставляя (5.20) в первые два уравнения (5.43), и пренебрегая нелинейными членами, с учетом (5.4), (5.6) и (5.30) получаем

$$\begin{aligned}
(1 + \zeta_1^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (2 - \zeta_1^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \zeta_1^2 \eta^2 H^2 \frac{1 + 0,25 \zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} \times \\
\times \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{E_3} \left(-q_1 + \frac{\partial N_T}{\partial x_1} \right); \\
(2 - \zeta_1^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (1 + \zeta_1^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \zeta_1^2 \eta^2 H^2 \frac{1 + 0,25 \zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} \times \\
\times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{E_3} \left(-q_2 + \frac{\partial N_T}{\partial x_2} \right).
\end{aligned} \tag{5.47}$$

При этом усилия плоского напряженного состояния эквивалентной пластины определяются через перемещения u_i в соответствии с (5.23) по формулам

$$\begin{aligned} N &= E_s \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - N_T; \quad N_\tau = \zeta_1^2 E_s \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right); \\ N_T &= E_s \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right); \quad N_\eta = 0,25 B_s H^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right); \\ M_{iv} &= 0,5 B_s H^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Краевые условия для панели при плоском напряженном состоянии даются первыми двумя и пятым уравнениями (5.44). В случае пренебрежения нелинейными членами условия на окаймленном краю панели имеют вид

$$N_{ns} - \frac{\partial Q_s}{\partial s} = p_s; \quad N_{nn} - \frac{\partial Q_n}{\partial s} = p_n; \quad M_{nv} + Q_n + \frac{\partial L_x}{\partial s} = 0. \quad (5.49)$$

Здесь в дополнение к двум обычным зависимостям, выражающим собой условие равновесия проекций сил на оси s , n , добавляется третье краевое условие, определяющее равновесие моментов относительно оси x сил, действующих на элемент окаймляющего плана. Повышение числа краевых условий до трех соответствует повышению порядка дифференциальных уравнений равновесия (5.47) и связано с введением в рассмотрение моментных усилий M_{iv} и учетом изгибной жесткости планов решетки при деформации в плоскости x_1, x_2 .

В соответствии с (5.26), (5.27), (5.29) и (5.32) усилия окаймляющего плана связаны с перемещениями u_n, u_s зависимостями

$$\begin{aligned} Q_s &= E_s \frac{\partial u_s}{\partial s} - N_{Ts}; \quad Q_n = \zeta_{1s}^2 \frac{E_s}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} \right); \\ L_x &= \frac{B_s}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{\partial u_s}{\partial n} \right). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Используя (5.48) и (5.50), условия на краях (5.49) можно выразить через перемещения. Для прямоугольного контура на краях $x_i = \text{const}$ имеем

$$\begin{aligned} \pm \left[E_s \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{B_s H^2}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E_s \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = p_j + \frac{\partial N_{Ts}}{\partial x_j}; \\ E_s \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \zeta_1^2 E_s \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \mp \frac{E_s \zeta_{1s}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \end{aligned}$$

$$= -p_i + N_T; \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} & (-1)^{i+1} B_s H^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \pm \zeta_{1s}^2 E_s \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \pm \\ & \pm B_s \frac{\partial}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i, j = 1, 2 (i \neq j). \end{aligned}$$

В уравнениях (5.51) через p_j и p_i обозначены соответственно тангенциальная p_s и нормальная p_n составляющие распределенной нагрузки. Верхние знаки в этих уравнениях следует брать на участках контура с положительной нормалью, а нижний — на противоположных.

Помимо условий (5.51) для каждой конкретной задачи следует сформулировать условия в угловых точках контура. В консольно прикрепленной панели обычно два угла закреплены и два свободны. Для полностью закрепленного угла должны удовлетворяться условия (5.46).

Для угла, закрепленного по схемам, приведенным на рис. 5.12, а, б, имеем соответственно следующие условия:

$$u_i^K = 0; \quad u_j^K = 0; \quad L_x^{K-1} - L_x^K = 0;$$

$$u_i^K = 0; \quad u_j^K = 0; \quad L_x^{K-1} = L_x^K = 0.$$

Для свободного угла (см. рис. 5.12, в) условия (5.45) записываются следующим образом:

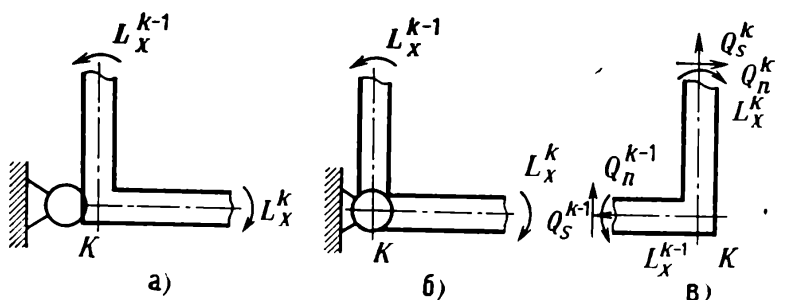
$$Q_s^K + Q_n^{K-1} = 0; \quad Q_n^K - Q_s^{K-1} = 0; \quad L_x^{K-1} - L_x^K = 0.$$

Уравнения деформации (5.5), третье уравнение равновесия (5.43) и соотношения упругости (5.23) с учетом (5.30), описывающие изгиб эквивалентной пластины, могут быть сведены к одному уравнению относительно функции прогиба w :

$$\begin{aligned} & (1 + \zeta_2^2) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right) - (6 - 2\zeta_2^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = \\ & = \frac{1}{D_s} \left(q_3 + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Рис. 5.12. Условия в угловой точке панели при плоском напряженном состоянии:

а — шарнирное опирание; б — шарнирное соединение панелей; в — свободный угол



Выражения для усилий в соответствии с (5.23), (5.24) и (5.7) имеют вид

$$\begin{aligned} M &= -D_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - M_T; \quad M_\tau = -\zeta_2^2 D_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right); \\ M_{12} &= M_{21} = M_\chi = -2D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ N_{i3} &= -(1 + \zeta_2^2) D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_i^3} - (3 - \zeta_2^2) D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j^2} - \frac{\partial M_r}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Статические условия на краях панели определяются третьим и четвертым уравнениями (5.44). Без учета нелинейных членов эти условия принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_n}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial M_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial M_{nn}}{\partial n} &= p_x - \frac{\partial m_n}{\partial s}; \\ -\frac{\partial L_s}{\partial s} + M_{nn} &= m_s. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Используя соотношения (5.53), (5.26), (5.32) и (5.27), условия на краях $x_i = \text{const}$ можно выразить через функцию прогиба:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(D_s \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right) \pm 2D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j^2} \pm \\ & \pm D_3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right) + \zeta_2^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right) + M_T \right] = p_x + \frac{\partial m_i}{\partial x_j} + \\ & + \frac{\partial^2 M_{Ts}}{\partial x_j^2} \pm \frac{\partial M_T}{\partial x_i}; \\ & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_s \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \pm D_3 \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_j^2} \right) + \zeta_2^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x_j^2} \right) \right] + M_T = \\ & = m_j, \quad i, j = 1, 2 (i \neq j). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Здесь m_i и m_j — нормальная и тангенциальная составляющие распределенной моментной нагрузки. Верхние знаки в уравнениях (5.55) следует брать для участков с положительной, а нижние — с отрицательной нормалью.

Условия в угловых точках контура при изгибе определяются внеинтегральными членами выражения (5.42). При этом для закрепленного угла должны удовлетворяться условия (5.46). Условия для ненагруженного угла в соответствии с (5.45) имеют вид

$$Q_x^{K-1} - Q_x^K = 0; \quad L_n^K - L_s^{K-1} = 0; \quad L_s^K + L_n^{K-1} = 0.$$

5.5. Уравнения устойчивости и колебаний полипланной системы

Большая гибкость планов решетки и окаймления делает актуальной задачу устойчивости полипланной панели. Напряженные состояния, определяемые как решения линейных уравнений, при некоторых (критических) значениях параметра нагрузки могут оказаться неустойчивыми. Так как потеря устойчивости планов решетки обычно приводит к полному разрушению панели, проверку на устойчивость следует считать одним из основных случаев расчета полипланной конструкции.

Следует различать два вида потери устойчивости: местную (рис. 5.13) и общую (рис. 5.14), отличающиеся подходом к решению задачи определения критических параметров нагрузки. Отличие это обусловлено тем, что предлагаемая модель эквивалентной пластинки описывает только те напряженные состояния, которые связаны с перемещениями узлов решетки, что имеет место при общей потере устойчивости и не наблюдается при местной потере устойчивости. В настоящем разделе на базе принятой модели приводятся уравнения общей устойчивости и колебаний панели, связанные с перемещением узлов решетки. Приближенное решение задачи о местной потере устойчивости рассматривается в гл. 7.

Принимая, что нагрузка, действующая на решетку, зависит от одного параметра P , под расчетом на устойчивость будем понимать определение критического значения $P = P_{кр}$ параметра нагрузки, при котором происходит бифуркация форм равновесия эквивалентной панели [9, 14]. Ниже приводится вывод линейных уравнений общей устойчивости гибкой полипланной панели.

Рассматривая момент бифуркации равновесных форм, полагаем, что для него возможны два бесконечно близких положения равновесия: невозмущенное и возмущенное. Обозначим перемещение первого из них через u_k^0 , $k=1, 2, 3$. Через \tilde{u}_k обозначим те перемещения, которые нужно сообщить точкам тела, находящегося в невозмущенном состоянии, чтобы перевести его в новое возму-

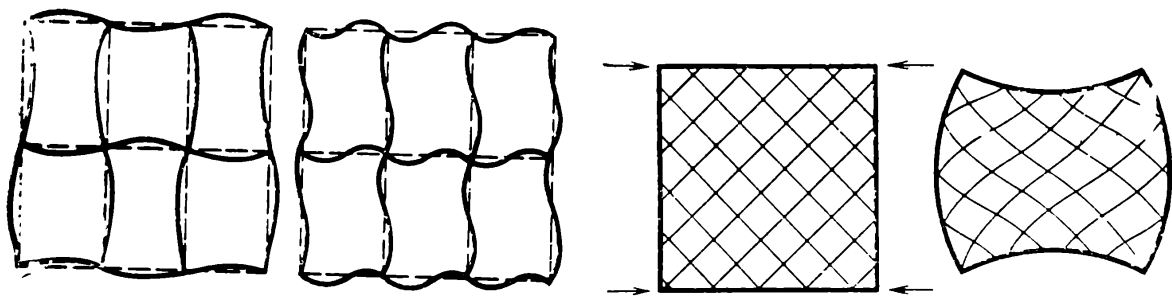


Рис. 5.13. Возможные формы местной потери устойчивости планов

Рис. 5.14. Возможная форма общей потери устойчивости панели в своей плоскости

шенное состояние, бесконечно близкое первому. Таким образом, перемещения возмущенного напряженного состояния

$$u_k = u_k^0 + \tilde{u}_k.$$

Для усилий возмущенного напряженного состояния имеем следующие соотношения:

$$N_{ik} = N_{ik}^0 + \tilde{N}_{ik}; \quad M_{ik} = M_{ik}^0 + \tilde{M}_{ik}. \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь N_{ik}^0, M_{ik}^0 — усилия и моменты невозмущенного напряженного состояния; $\tilde{N}_{ik}, \tilde{M}_{ik}$ — усилия и моменты, соответствующие бесконечно малым перемещениям \tilde{u}_k . Распределенную нагрузку возмущенного напряженного состояния представим следующим образом:

$$q_k = q_k^0 + \tilde{q}_k,$$

где q_k^0 — нагрузка невозмущенного напряженного состояния; \tilde{q}_k — возмущение нагрузки.

Чтобы иметь возможность использовать динамический критерий устойчивости здесь под \tilde{q}_k будем подразумевать инерционные силы:

$$\tilde{q}_k = -\rho b \frac{\partial^2 \tilde{u}_k}{\partial \tau^2}, \quad (5.56)$$

где ρ — плотность «материала» эквивалентной пластины; b — хорда планов; τ — время.

Уравнения равновесия, очевидно, справедливы как для невозмущенного напряженного состояния, так и для возмущенного. Подставляя в (5.43) вначале выражения для перемещений и усилий возмущенного напряженного состояния, а затем невозмущенного и вычитая из уравнений первой системы соответствующие уравнения второй системы, получим с точностью до малых второго порядка

$$N_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}; \quad \tilde{M}_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

следующие уравнения устойчивости полипланной панели в вариациях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\tilde{N}_{11} + N_{11}^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + N_{11}^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\tilde{N}_{21} + N_{22}^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + N_{11}^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} \right) = \\ = -\tilde{q}_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\tilde{N}_{12} + N_{11}^0 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} + N_{11}^0 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\tilde{N}_{22} + N_{22}^0 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + N_{11}^0 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \right) = \\ = -\tilde{q}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{M}_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{M}_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \tilde{M}_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11}^0 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_1} + N_{12}^0 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{22}^0 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_2} + N_{12}^0 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_1} \right) = -\tilde{q}_3. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Отметим, что уравнения (5.57) выведены без каких-либо ограничений в отношении величин углов поворота в возмущенном состоянии. Если последние являются пренебрежимо малыми по сравнению с единицей, то в первых двух уравнениях можно опустить члены, содержащие множители $\partial \tilde{u}_i / \partial x_i$. Входящие в уравнения функции \tilde{u}_i , \tilde{N}_{ij} , \tilde{M}_{ij} должны удовлетворять граничным условиям на контуре. Эти условия получаются из (5.44) аналогично тому, как были получены уравнения (5.57).

Ниже приводятся граничные условия для прямолинейного края панели в случае отсутствия распределенной нагрузки на контуре:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \tilde{Q}_s}{\partial s} + \tilde{N}_{ns} &= 0; \\ -\frac{\partial \tilde{Q}_n}{\partial s} + \tilde{N}_{nn} - Q_s^0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial s^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tilde{L}_n}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial \tilde{M}_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{M}_{nn}}{\partial n} - Q_s^0 \frac{\partial^2 \tilde{w}_s}{\partial s^2} &= 0; \\ \frac{\partial \tilde{L}_s}{\partial s} - \tilde{M}_{nn} &= 0; \\ \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial s} + \tilde{Q}_n = \tilde{M}_{nv} &= 0. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Здесь, как и ранее, чертой сверху отмечены величины, характеризующие возмущения упругой системы. Возмущения усилий и моментов связаны с соответствующими деформациями соотношениями упругости (5.20) и (5.26), (5.29). Рассматривая малые возмущения, выражения для компонент деформации принимаем в линейной форме.

Система уравнений (5.57) при граничных условиях (5.58) определяет возмущенное движение упругой эквивалентной пластины около положения равновесия. Эти уравнения позволяют исследовать

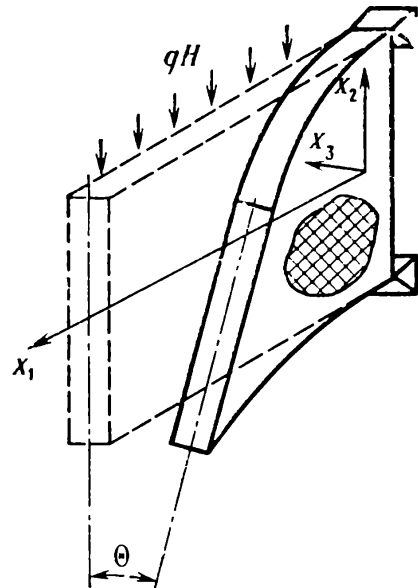


Рис. 5.15. Потеря устойчивости панели из своей плоскости

общую устойчивость конструкции, а также решать задачу о собственных колебаниях эквивалентной панели. Отметим, что уравнения (5.57), (5.58) разделяются на две группы. Первое и второе уравнения (5.57) с первым, вторым и пятым граничными условиями (5.58) определяют возмущенное движение в срединной плоскости панели (см. рис. 5.14). Третье уравнение (5.57) с третьим и четвертым граничными условиями (5.58) описывают возмущенное движение из плоскости панели (рис. 5.15).

Глава 6

Анализ напряженного состояния плоской полипланной панели

6.1. Классификация плоских напряженных состояний тонкостенной полипланной панели

Характерной особенностью полученных в предыдущей главе дифференциальных уравнений для густой тонкостенной решетки является наличие малого параметра ζ_1^2 при старших производных. Это позволяет при исследовании напряженного состояния решетчатых конструкций использовать хорошо разработанный в теории тонкостенных оболочек метод асимптотического интегрирования [16] и в отдельных случаях существенно упростить исходные уравнения. Вводя понятие показателя изменяемости, будем классифицировать напряженные состояния в зависимости от скорости их изменения по координатам x_i , выделив из них наиболее существенные для практических расчетов.

Однородные уравнения плоского напряженного состояния (5.47) можно свести к одному разрешающему уравнению относительно функции перемещений φ . С этой целью перейдем к безразмерным координатам по формулам $x_i = a\xi_i = H\xi_i$, где a — характерный размер, в качестве которого, как правило, будем принимать высоту панели ($a = H$). Функцию φ введем выражениями

$$\begin{aligned} u_1 &= - \left(2 - \zeta_1^2 + \eta^2 \zeta_1^2 \frac{1 + 0,25\zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}; \\ u_2 &= \left(1 - \eta^2 \zeta_1^2 \frac{1 + 0,25\zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \nabla^2 \varphi + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2}; \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Первому уравнению (5.47) функция φ удовлетворяет тождественно, а из второго получаем

$$\left[4(1-\zeta_1^2) \left(1 + \eta^2 \zeta_1^2 \frac{1+0,25\zeta_1^2}{1+\zeta_1^2} \nabla^2 \right) \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - \right. \\ \left. - (1+\eta_1^2) \left(1 - \eta^2 \zeta_1^2 \frac{1+0,25\zeta_1^2}{1+\zeta_1^2} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 \right] \varphi = 0. \quad (6.2)$$

Имея в виду дать общую характеристику возможных плоских напряженных состояний полипланной панели, примем, что решение уравнения (6.2) можно представить в форме тригонометрического ряда по переменной ξ_2 :

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi_1) \sin \omega_m \xi_2, \quad \omega_m = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.3)$$

Входящие в (6.3) функции φ_m — суть функции, определяющие так называемые элементарные напряженные состояния панели. Подставляя (6.3) в (6.2), получаем для каждой из функций $f_m(\xi_1)$ дифференциальное уравнение в обыкновенных производных следующего вида:

$$4(1-\eta_1^2) \left[1 + \eta^2 \zeta_1^2 \frac{1+0,25\zeta_1^2}{1+\zeta_1^2} \left(\frac{d^2}{d\xi_1^2} - \omega_m^2 \right) \right] \omega_m^2 \frac{d^2 f_m}{d\xi_1^2} + \\ + (1+\zeta_1^2) \left[1 - \eta^2 \zeta_1^2 \frac{1+0,25\zeta_1^2}{1+\zeta_1^2} \left(\frac{d^2}{d\xi_1^2} - \omega_m^2 \right) \right] \left(\frac{d^2}{d\xi_1^2} - \omega_m^2 \right)^2 f_m = 0. \quad (6.4)$$

Решение этого уравнения представим в виде $f_m = C_m e^{\lambda_m \xi_1}$. Уравнению (6.4) соответствуют характеристическое уравнение шестого порядка относительно λ_m . Учитывая, что в рассматриваемые уравнения входит малый параметр ζ_1^2 и имея в виду получить приближенные зависимости, соответствующие характерным типам напряженных состояний полипланной панели, будем искать корни предельного характеристического уравнения при $\zeta_1^2 \rightarrow 0$, которое с точностью до пренебрежения величиной ζ_1^2 по сравнению с единицей имеет вид

$$\eta^2 \zeta_1^2 \lambda_m^6 - (1 + 7\eta^2 \zeta_1^2 \omega_m^2) \lambda_m^4 - (2 - 7\eta^2 \zeta_1^2 \omega_m^2) \omega_m^2 \lambda_m^2 - \\ - (1 + \eta^2 \zeta_1^2 \omega_m^2) \omega_m^4 = 0. \quad (6.5)$$

Следуя [16], преобразуем (6.5), введя обозначения

$$\lambda_m = \zeta_1^{-p} \chi; \quad \eta = \zeta_1^r; \quad \omega_m = \zeta_1^{-\mu}, \quad (6.6)$$

где p, r, μ — положительные числа. Используя эти обозначения, будем искать такие комбинации значений p, r, μ , при которых величина χ стремится к конечному и отличному от нуля пределу при $\zeta_1 \rightarrow 0$. Подставляя (6.6) в (6.5), имеем

$$\zeta_1^{2+2r-6p} x^6 - \zeta_1^{-4p} (1 + 7\zeta_1^{2+2r-2\mu}) x^4 - \zeta_1^{-2\mu-2p} (2 - 7\zeta_1^{2+2r-2\mu}) x^2 - \zeta_1^{-4\mu} (1 + \zeta_1^{2+2r-2\mu}) = 0. \quad (6.7)$$

Нетрудно показать, что для тонкостенной полипланной системы могут быть реализованы только такие напряженные состояния, которые удовлетворяют условию

$$\mu - r < 1. \quad (6.8)$$

В самом деле, если принять $\mu - r = 1$, то в соответствии с (6.6) должно выполняться равенство $\omega_m \zeta_1 \eta = 1$, что для прямоугольного сечения с учетом (5.12) и (5.21) приводит к зависимости

$$m = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{H}{t} \frac{1}{c}. \quad (6.9)$$

С другой стороны, по условию выбранной модели напряженно-деформированное состояние панели определяется перемещением узлов решетки. Откуда следует, что в реальной конструкции могут быть реализованы только такие элементарные напряженные состояния (6.3), у которых длина полуволны синусоиды не превышает расстояния между узлами, т. е. должно выполняться условие

$$m \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{H}{t}. \quad (6.10)$$

Так как требования (6.9), (6.10) для тонкостенных полипланых систем ($\bar{c} < 1$) противоречивы, то остается в силе условие (6.8).

При условии выполнения неравенства (6.8) переход от (6.7) к предельному уравнению в зависимости от значений параметра (показателя) изменяемости p приводит к следующим двум возможным случаям:

$$\begin{aligned} p = \mu, \quad (x^2 + 1)^2 &= 0; \\ p = 1 + r > \mu, \quad x^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Соответствующие характеристические уравнения имеют вид

$$(\lambda_m^2 + \omega_m^2)^2 = 0; \quad \lambda_m^2 - \frac{1}{\eta^2 \zeta_1^2} = 0. \quad (6.12)$$

Первое уравнение (6.12) соответствует интегралам плоского напряженного состояния с малым показателем изменяемости по координате ξ_1 , описывающим основное (внутреннее) напряженное состояние панели. Кроме того, выявлены интегралы с большим показателем изменяемости по координате ξ_1 , которым соответствует второе характеристическое уравнение (6.12). Эти интегралы описывают напряженное состояние панели типа пограничного слоя, быстро затухающего с удалением от края $\xi_1 = \text{const}$, но имеющего малый показатель изменяемости по координате ξ_2 . Предельное дифференциальное уравнение, соответствующее первому характеристическому уравнению (6.12) и определяющее основное

напряженное состояние панели, получаем из (6.2) при $\zeta_1 \rightarrow 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right)^2 \varphi = 0. \quad (6.13)$$

Напряженному состоянию типа пограничного слоя соответствует следующее приближенное дифференциальное уравнение относительно функций f_m :

$$\frac{d^2 f_m}{d \xi_1^2} - \frac{1}{\eta^2 \zeta_1^2} f_m = 0. \quad (6.14)$$

Для оценки погрешности, связанной с переходом от точного уравнения к приближенным (6.13), (6.14), достаточно сравнить значение корней характеристического уравнения (6.5) с корнями приближенных уравнений (6.12).

В первом случае асимптотическая погрешность составляет величину $\zeta_1^2 \eta^2 \omega_m^4$, во втором — $\zeta_1^2 \eta^2 \omega_m^2$.

Рассмотрим теперь те изменения, которые претерпевают граничные условия при предельном переходе от точных уравнений к уравнениям (6.13) и (6.14). Как показано в следующем разделе, интегралы с малым показателем изменяемости соответствуют точным решениям для модели решетки планов с шарнирами в узлах, т. е. для такой системы, в которой $M_{iv} = 0$. При этом для каждого из краев подобной панели из трех условий (5.49) сохраняются только первые два, а третье исчезает, что соответствует понижению порядка дифференциального уравнения при переходе от (6.2) к (6.13). Для напряженного состояния типа пограничного слоя существенным является только третье условие (5.49), связанное деформацией сдвига края панели. Что касается первых двух условий (5.49), то вносимая в них пограничным слоем поправка пренебрежимо мала. Таким образом, напряженное состояние с малым показателем изменяемости и пограничный слой полностью разделяются, причем роль пограничного слоя, действующего в весьма узкой зоне у краев панели, сводится к уточнению краевых условий при переходе от шарнирной модели к реальной решетке с жесткими узлами.

6.2. Безмоментное плоское напряженно-деформированное состояние

Основным напряженным состоянием тонкостенной полипланной панели является напряженное состояние с малым показателем изменяемости, разрешающее уравнение для которого имеет вид (6.13). Выражения для перемещений в данном случае получаем из (6.1) при $\zeta_1 \rightarrow 0$:

$$u_1 = -2 \frac{\partial^2 \varphi}{d \xi_1 d \xi_2}; \quad u_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2}. \quad (6.15)$$

Введем в рассмотрение функцию напряжений по формуле

$$\Phi = \frac{E_s}{H} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2} \right). \quad (6.16)$$

Очевидно, что функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_2^2} = 0. \quad (6.17)$$

Предельные выражения для усилий основного напряженного состояния получаем с учетом (6.15), (6.16) из (5.48) при $\xi_1^2 \rightarrow 0$:

$$N = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} - N_T; \quad N_\xi = 0; \quad (6.18)$$

$$N_\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}; \quad N_\tau = 0; \quad M_{1v} = M_{2v} = 0.$$

Как видим, в этом случае не равны нулю только усилия N и N_η , т. е. замена исходных уравнений (5.47) приближенными (6.16) и (6.17) означает пренебрежение изгибной жесткостью панелей и переход к безмоментной модели решетки, в которой отсутствуют моментные усилия M_{iv} и N_η , а также N_ξ . Такой переход допускает простую механическую интерпретацию, а именно, он соответствует замене реальной конструкции с конечной жесткостью на изгиб шарнирным механизмом (рис. 6.1, а). При этом элементарная ячейка может воспринимать только систему сил, показанную на рис. 6.1, б

Переход от системы (5.47) к (6.16) и (6.17) связан с понижением порядка дифференциальных уравнений. Последнее, однако, не приводит к противоречиям на краях панели, так как третье из условий (5.49) при $M_{iv} = 0$ пропадает. Оставшиеся первые два условия (5.49) принимают вид

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial x_i^2} + N = p_n; \quad \mp \frac{\partial Q_s}{\partial x_i} + (-1)^{i+1} N_\eta = p_s. \quad (6.19)$$

Отметим случай, когда окаймляющий план панели не работает на изгиб ($B_s = G_s = 0$), т. е. когда окаймление решетки осуществляется шарнирной цепью. В этом случае условия на краях при $E_s = \text{const}$ можно записать в следующей форме:

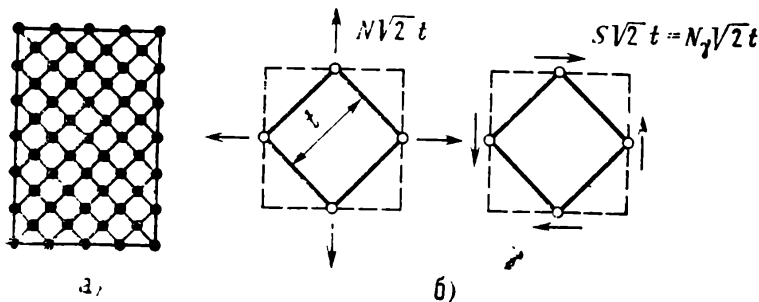


Рис. 6.1. Шарнирная модель решетки (а) и нагружение шарнирной ячейки (б)

для краев $\xi_2 = \text{const}$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} = p_n(\xi_1) + N_T; \quad \frac{2E_s}{H^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \xi_1^3 \partial \xi_2} \pm \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = p_s(\xi_1) - \frac{\partial N_{Ts}}{H \partial \xi_1}; \quad (6.20')$$

для краев $\xi_1 = \text{const}$,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} &= p_n(\xi_2) + N_T; \quad \frac{E_s}{H^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi_2^2} \mp \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = \\ &= p_s(\xi_2) - \frac{\partial N_{Ts}}{H \partial \xi_2}. \end{aligned} \quad (6.20'')$$

Здесь верхний знак берется, когда положительное направление осей s и x_i совпадает, а нижний — в противном случае.

Таким образом, в случае однородного плоского напряженного состояния безмоментной решетки задача сводится к последовательному интегрированию уравнений (6.17) и (6.16) при граничных условиях (6.20). Так как уравнения (6.16) и (6.17) — гиперболического типа, то краевые условия не являются независимыми. Последнее приводит к дополнительным условиям, определяющим возможные формы деформации шарнирной решетки как механизма и возможные виды равновесных нагрузок, воспринимаемых шарнирной моделью решетки.

Общее решение уравнений (6.16) и (6.17) представим в форме [37]

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}}, \quad \Phi = f_1(\xi_1 + \xi_2) + f_2(\xi_1 - \xi_2); \\ \bar{\varphi} &= f_3(\xi_1 + \xi_2) + f_4(\xi_1 - \xi_2), \quad \bar{\bar{\varphi}} = \xi_1 \hat{f}_1(\xi_1 + \xi_2) + \xi_2 \hat{f}_2(\xi_1 - \xi_2); \quad (6.21) \\ \hat{f}_1 &= \frac{H}{2E_s} \int_{\xi_0}^{\xi_1 + \xi_2} f_1(\xi) d\xi + C_1, \quad \hat{f}_2 = \frac{H}{2E_s} \int_{\xi_0}^{\xi_1 - \xi_2} f_2(\xi) d\xi + C_2. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\varphi}$ — функция, определяющая перемещения шарнирной решетки как механизма; $\bar{\bar{\varphi}}$ — функция, связанная с деформацией, обусловленной удлинением планов; $f_m(\xi)$ — функции, подлежащие определению из условий на краях панели. В соответствии с (6.18) нормальные N и касательные усилия $N_T = S$, действующие в эквивалентной пластине, определяются через функции f_1 и f_2 выражениями

$$N = -f'_1(\xi_1 + \xi_2) + f'_2(\xi_1 - \xi_2) - N_T; \quad S = f'_1(\xi_1 + \xi_2) + f'_2(\xi_1 - \xi_2). \quad (6.22)$$

Для перемещений из (6.15) и (6.21) имеем

$$u_i = \bar{u}_i + \bar{\bar{u}}_i, \quad \bar{\bar{u}}_i = (-1)^i 2f''_3(\xi_1 + \xi_2) + 2f''_4(\xi_1 - \xi_2), \quad (6.23)$$

$$\bar{u}_i = (-1)^i \frac{H}{E_3} [f_1(\xi_1 + \xi_2) + (-1)^{i+1} f_2(\xi_1 - \xi_2) - \xi_1 f'_1(\xi_1 + \xi_2) + \\ + (-1)^i \xi_2 f'_2(\xi_1 - \xi_2)].$$

Ниже рассмотрим некоторые частные случаи возможных деформаций шарнирной решетки как механизма. Из (6.18) следует, что при $\Phi = \text{const}$, $N_T = 0$ или $\Phi = 0$, $N_T = 0$ усилия в решетке отсутствуют. Первый случай соответствует перемещению панели как жесткого целого и интереса не представляет. Второй случай описывается функцией перемещения $\varphi = \bar{\varphi}$ при $\bar{\varphi} = 0$. Выясним, при каких условиях на краях панели возможна деформация решетки как механизма. Принимая, что окаймляющая шарнирная цепь нерастяжима, а угловые точки панели неподвижны, граничные условия запишем в виде

$$(u_2)_{\xi_2=0} = U_0(\xi_1), (u_2)_{\xi_2=\gamma} = U_\gamma(\xi_1), (u_1)_{\xi_1=0} = U_\kappa(\xi_2), (u_1)_{\xi_1=\lambda} = U_\lambda(\xi_2); \quad (6.24')$$

$$(u_1)_{\xi_2=0} = 0, (u_1)_{\xi_2=\gamma} = 0, (u_2)_{\xi_1=0} = 0, (u_2)_{\xi_1=\lambda} = 0. \quad (6.24'')$$

Здесь $\gamma = H/a$, $\lambda = l/a$ — относительные размеры сторон панели (рис. 6.2, а), принимая в дальнейшем $a = H$, имеем $\gamma = 1$, $\lambda = l/H$. Через U_0 , U_γ , U_κ , U_λ обозначены функции перемещений краев панели по нормали к контуру. Нетрудно видеть, что краевые условия (6.24) могут выполняться только при определенных соотношениях между функциями f_3'' , f_4'' , а именно: должны удовлетворяться следующие зависимости:

$$f_3''(\xi) = f_4''(\xi) = f(\xi); \quad f(\xi) = -f(-\xi); \quad (6.25)$$

$$f(\gamma - \xi) = -f(\gamma + \xi); \quad f(\lambda + \xi) = -f(\lambda - \xi).$$

Отсюда видно, что решение описывается одной функцией $f(\xi)$, которая является нечетной относительно $\xi = 0$. Из второго и третьего условий (6.25) сле-

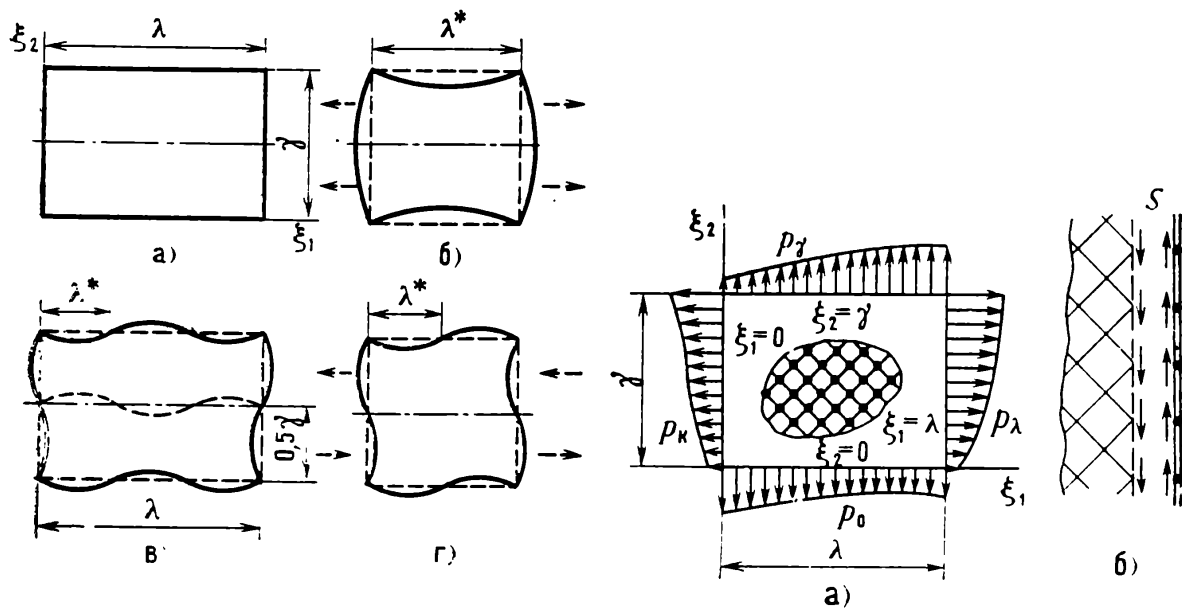


Рис. 6.2. Деформация шарнирной панели как механизма:

а — размеры сторон панели; б, в, г — виды деформации при различных соотношениях сторон

Рис. 6.3. Нагружение шарнирной панели по краям нормальной (а) и касательной (б) нагрузками

дует, что функция $f(\xi)$ должна быть периодической с периодом 2γ . Второе и четвертое условия (6.25) требуют, чтобы $f(\xi)$ имела, кроме того, период 2λ . Перечисленным требованиям удовлетворяет нечетная функция $f(\xi)$ с периодом $2\lambda^*$, где λ^* — суть общий делитель чисел γ и λ , т. е. длины сторон панели должны быть кратны отрезку λ^* . Оставшиеся уравнения (6.24) дают зависимости, связывающие функции перемещения краев панели

$$\begin{aligned} 4f(\xi_1) &= U_0(\xi_1); \quad U_\gamma(\xi_1) = U_0(\xi_1 + \gamma); \\ U_\kappa(\xi_2) &= -U_0(\xi_2); \quad U_\lambda(\xi_2) = -U_0(\xi_2 + \lambda). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Примеры, иллюстрирующие деформацию шарнирной решетки как механизма, приведены на рис. 6.2. При этом случаям *б*, *в*, *г* соответствуют следующие значения параметра λ^* : *б* — $\lambda^* = \gamma = \lambda$, *в* — $2\lambda^* = \gamma = \lambda$, *г* — $\lambda^* = \frac{\gamma}{2} = \frac{\lambda}{3}$.

Рассмотрим далее возможные равновесные состояния шарнирной решетки, нагруженной по краям распределенной нормальной $p_n = p_\kappa, p_0, p_\gamma, p_\lambda$ (рис. 6.3, *а*) и касательной p_s нагрузками. При наличии окаймления решетки в виде шарнирной цепи под $p_s = S$ будем подразумевать тангенциальную составляющую реакции этой цепи или, иначе, касательные усилия на контуре (рис. 6.3, *б*). Представляя общее решение уравнения (6.17) в форме (6.21) при $N_r = 0$ статические условия на краях можно записать следующим образом:

$$p_\kappa(\xi_2) = f'_2(-\xi_2) - f_1(\xi_2); \quad p_\lambda(\xi_2) = f'_2(\lambda - \xi_2) - f'_1(\lambda + \xi_2); \quad (6.27')$$

$$p_\gamma(\xi_1) = f'_2(\xi_1 - \gamma) - f'_1(\xi_1 + \gamma); \quad p_0(\xi_1) = f'_2(\xi_1) - f'_1(\xi_1);$$

$$S_\kappa(\xi_2) = f'_1(\xi_2) + f'_2(-\xi_2); \quad S_\lambda(\xi_2) = f'_1(\lambda + \xi_2) + f'_2(\lambda - \xi_2); \quad (6.27'')$$

$$S_\gamma(\xi_1) = f'_1(\xi_1 + \gamma) + f'_2(\xi_2 - \gamma); \quad S_0(\xi_1) = f'_1(\xi_1) + f'_2(\xi_1).$$

Значения индексов при p и S ясны из рис. 6.3, *а* и 6.6, *а*.

Выражения типа (6.27) позволяют выявить характер нагрузок, которые может воспринимать шарнирная модель решетки. Условия, определяющие равновесные состояния такой панели при нагружении ее по двум параллельным сторонам $\xi_1 = 0, \lambda$ нормальной нагрузкой p_κ, p_λ ($p_0 = p_\gamma = 0$), можно представить в форме

$$f'_2(\xi) = f'_1(\xi), \quad f'_1\left(\xi - \frac{\gamma}{2}\right) = \pm f'_1\left(\xi + \frac{\gamma}{2}\right). \quad (6.28)$$

Знаки «+» «—» в последнем равенстве определяют соответственно кососимметричное и симметричное относительно оси $\xi = \gamma/2$ нагружение панели, причем в первом случае функция $f'_1(\xi)$ является периодической с периодом γ , а во втором — периодической с периодом 2γ . Рассматривая функцию $f'_1(\xi)$ как сумму ее четной и нечетной относительно $\xi = 0$ ветвей и имея в виду, что в соответствии с (6.27) четная ветвь описывает нагружение панели при $p_\kappa = 0, S_\kappa \neq 0$, а нечетная — при $p_\kappa \neq 0, S_\kappa = 0$, примем в дальнейшем $f'_1(-\xi) = -f'_1(\xi)$. Таким образом, в соответствии с (6.27') имеем

$$p_\kappa(\xi_2) = -p_\kappa(-\xi_2) = -2f'_1(\xi_2), \quad 2p_\lambda(\xi_2) = p_\kappa(\lambda - \xi_2) - p_\kappa(\lambda + \xi_2). \quad (6.29)$$

Второе выражение (6.29) определяет нагрузку p_λ , которую надо приложить к стороне $\xi_1 = \lambda$ шарнирной панели для уравновешивания p_κ . На рис. 6.4 показан вид функций $p_\kappa(\xi_2)$ и $p_\lambda(\xi_2)$ в случае кососимметричного и симметричного относительно $\xi_2 = \gamma/2$ нагружения панели по сторонам $\xi_1 = 0, \lambda$ при различных соотношениях размеров сторон панели.

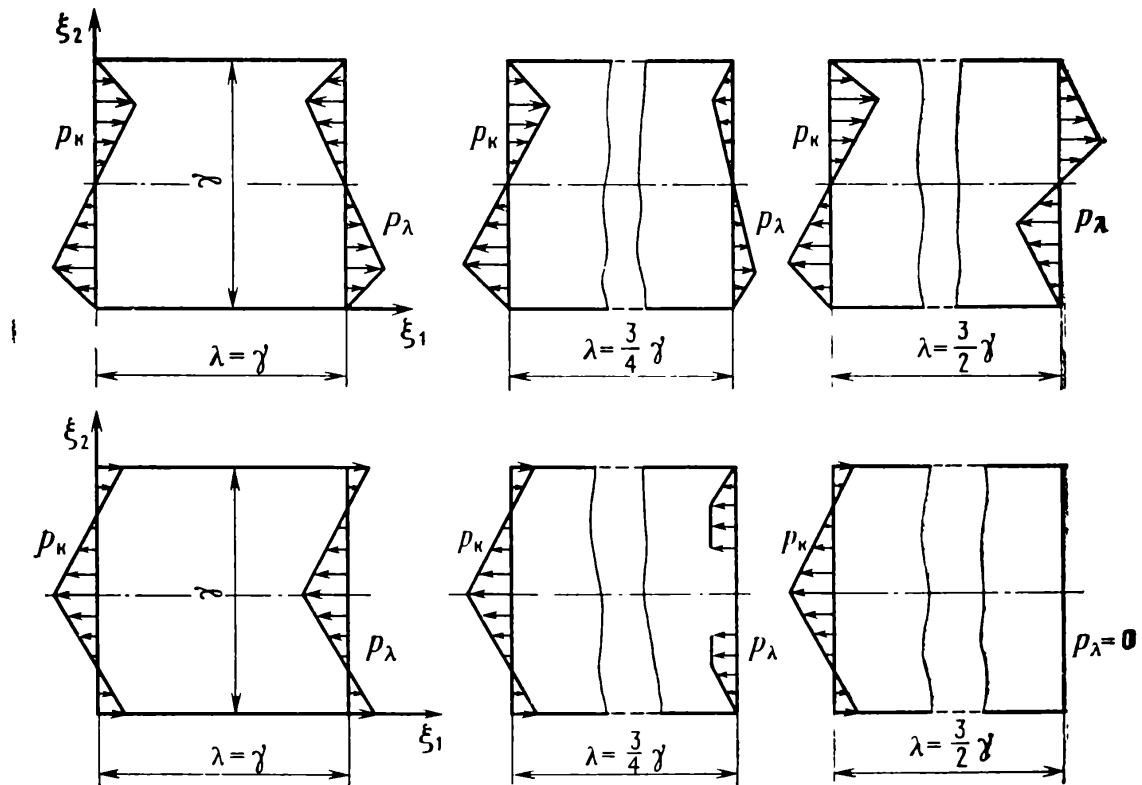


Рис. 6.4. Вид функций равновесной нормальной нагрузки, действующей по краям $\xi_1=0$, λ шарнирной панели

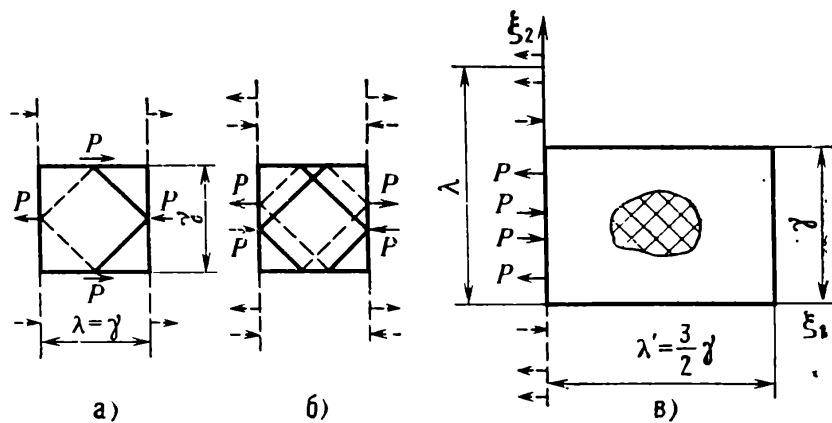


Рис. 6.5. Варианты нагружения шарнирной панели:

а, б — по двум сторонам; в — по одной стороне

Перечисленные свойства функции $p_k(\xi)$ позволяют при заданных нагрузках p_k, p_λ , представимых в виде периодических функций с периодом $2\lambda^*$ (где λ^* — отрезок, кратный длинам сторон панели), сформулировать те необходимые условия для соотношения размеров $\gamma, \lambda, \lambda^*$, при которых шарнирная решетка может воспринять указанную нагрузку.

Этими условиями при косимметричном относительно $\xi_1 = \lambda/2$ нагружении ($p_k = -p_\lambda$) являются

$$p_k\left(\frac{\gamma}{2} + \xi_2\right) = p_k\left(\frac{\gamma}{2} - \xi_2\right), \quad \gamma = (2n - 1)\lambda^*, \quad \lambda = (2k - 1)\lambda^*; \quad (6.30)$$

$$p_k \left(\frac{\gamma}{2} + \xi_2 \right) = -p_k \left(\frac{\gamma}{2} - \xi_2 \right), \quad \gamma = 2n\lambda^*, \quad \lambda = (2k-1)\lambda^*, \quad n, k = 1, 2, 3.$$

При симметричном относительно $\xi_1 = \lambda/2$ нагружении ($p_k = p_\lambda$) имеем

$$p_k \left(\frac{\gamma}{2} + \xi_2 \right) = p_k \left(\frac{\gamma}{2} - \xi_2 \right), \quad \gamma = (2n-1)\lambda^*, \quad \lambda = 2k\lambda^*; \quad (6.31)$$

$$p_k \left(\frac{\gamma}{2} + \xi_2 \right) = -p_k \left(\frac{\gamma}{2} - \xi_2 \right), \quad \gamma = n\lambda^*, \quad \lambda = 2k\lambda^*, \quad n, k = 1, 2, 3, \dots$$

Если $\lambda = 2k\lambda^*$, шарнирная решетка не может воспринять нагрузку вида $p_k = -p_\lambda$, а нагрузка вида $p_k = p_\lambda$ не воспринимается решеткой, если $\lambda = (2k-1)\lambda^*$. На рис. 6.5, а, б в качестве примеров показаны два варианта нагружения шарнирной решетки с квадратным контуром сосредоточенными силами P , действующими по краям $\xi_1 = 0, \lambda$. На рис. 6.2 для той же решетки пунктиром показаны системы нагрузок, не воспринимаемые конструкцией. Очевидно, что условия нагружения панели с размерами γ, λ по двум параллельным сторонам нагрузкой вида $p_k = -p_\lambda$ являются одновременно условиями нагружения панели с размерами сторон $\gamma, \lambda' = 0,5\lambda$ по одной стороне $\xi_1 = 0$ ($p_k \neq 0, p_\lambda = 0$). При этом в соответствии с (6.30) должны выполняться следующие требования для равновесной нагрузки:

$$p_k \left(\frac{\gamma}{2} + \xi_2 \right) = p_k \left(\frac{\gamma}{2} - \xi_2 \right), \quad \gamma = (2n-1)\lambda^*, \quad 2\lambda = (2k-1)\lambda^*; \quad (6.32)$$

$$p_k \left(\frac{\gamma}{2} + \xi_2 \right) = -p_k \left(\frac{\gamma}{2} - \xi_2 \right), \quad \gamma = 2n\lambda^*, \quad 2\lambda = (2k-1)\lambda^*.$$

На рис. 6.5, в показан пример нагружения шарнирной решетки нормальной нагрузкой по одному из краев панели.

При действии сосредоточенных нагрузок выражение для $p_k(\xi)$ можно записать, используя понятие дельта-функции [27]. В частности, для варианта нагружения, показанного на рис. 6.5, а, функцию $p_k(\xi)$ можно представить следующим образом:

$$p_k(\xi_2) = -\frac{P}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\delta \left(\xi_2 - \frac{2n-1}{2} \gamma \right) - \delta \left(\xi_2 + \frac{2n-1}{2} \gamma \right) \right],$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция. Имея $p_k(\xi)$, можно найти усилия во всех элементах решетки. В соответствии с (6.22) и (6.29) нормальные усилия в сечениях, параллельных осям планов, определяются соотношениями

$$N'_{11} = N + S = p_k(\xi_1 + \xi_2); \quad N'_{22} = N - S = -p_k(\xi_1 - \xi_2).$$

Эти выражения определяют нагруженные планы решетки. Усилия в нагруженных планах по модулю равны $P/2$. На рис. 6.5 нагруженные сжатые планы показаны сплошными линиями, растянутые — пунктиром.

Рассмотрим далее равновесное напряженное состояние шарнирной решетки в случае, когда окаймление полностью отсутствует, а решетка нагружается по всем четырем сторонам касательной нагрузкой (рис. 6.6, а). В соответствии с (6.27) условия, которым должна удовлетворять функция касательной нагрузки $S_0(\xi)$ при отсутствии нормальной ($p_0 = p = p_k = p_\lambda = 0$), имеют вид

$$S_0(\xi) = S_0(-\xi) = 2f'_1(\xi) = 2f'_2(\xi); \quad S_0(\xi + \gamma) = S_0(\xi - \gamma);$$

$$S_0(\lambda + \xi) = S_0(\lambda - \xi). \quad (6.33)$$

Отсюда следует, что равновесное состояние неокаймленной шарнирной решетки, нагруженной по краям касательной нагрузкой, возможно лишь в случае, если функция $S_0(\xi)$ является четной относительно точек $\xi=0, \lambda$, а следовательно, периодической с периодом 2λ и 2γ . Нетрудно видеть, что этим условиям одновременно может удовлетворять только периодическая функция с периодом $2\lambda^*$, где λ^* — общий делитель λ и γ .

Из (6.27) находим зависимости, связывающие между собой компоненты нагрузки, действующие по сторонам панели,

$$S_k(\xi) = S_0(\xi); S_\gamma(\xi) = S_0(\xi + \gamma); S_\lambda(\xi) = S_0(\xi + \lambda). \quad (6.34)$$

Зависимости (6.33) и (6.34) представляют собой те необходимые условия, которым должна удовлетворять касательная нагрузка, действующая по краям шарнирной решетки в отсутствии нормальной нагрузки. Усилия N и S , вызываемые касательной нагрузкой (6.34), определяются по формулам (6.22). В случае необходимости по формулам (6.23) можно также рассчитать деформацию решетки u_i , обусловленную удлинением планов.

Рассмотрим характерный случай нагружения окаймленной шарнирной панели касательными усилиями по одной из ее сторон, возникающими в сечении, граничном с окаймляющим планом, в результате деформации последнего. Пусть к одному из окаймляющих планов, например к плану $\xi_2 = \gamma$, приложена внешняя распределенная касательная нагрузка $p_s = p(\xi_1)$, кососимметричная относительно $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \gamma$ (см. рис. 6.6, б), с линейным законом распределения и уравновешивающая эту нагрузку сосредоточенная сила $2P$, приложенная в точке $\xi_1 = 0$. Эта схема соответствует нагружению боковины сосредоточенной силой в узле крепления крыла в точке $\xi_1 = 0$. Ввиду податливости окаймляющего плана (боковины) со стороны решетки на этот план, вообще говоря, будет действовать касательное усилие S_γ . Остальные окаймляющие планы нагружаются со стороны решетки касательными усилиями, связанными между собой условиями (6.34). Так как шарнирная решетка может воспринимать касательные усилия только строго определенного типа (6.33), то в дальнейшем произвольную касательную

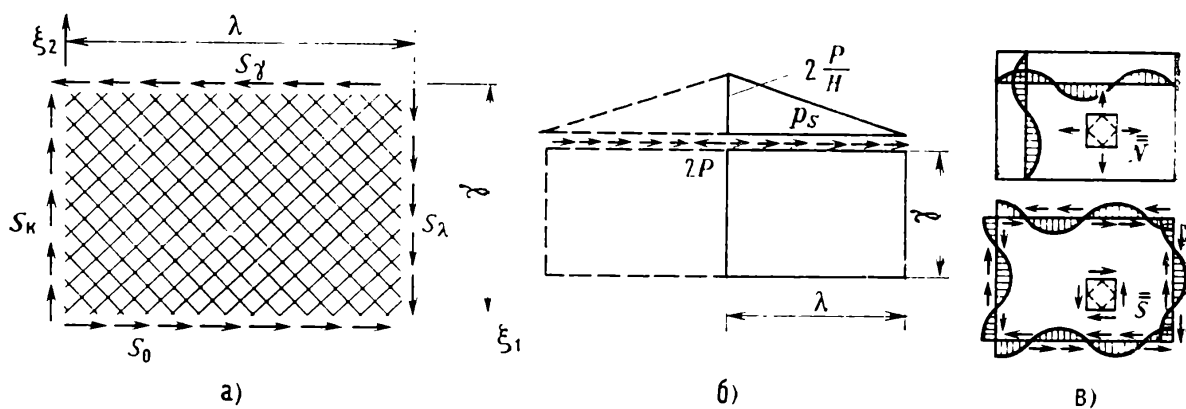


Рис. 6.6. Нагружение шарнирной панели касательной нагрузкой:

а — действие касательной нагрузки по неокаймленной решетке; б — нагружение окаймленной панели по одному из краев; в — эпюры усилий в шарнирной решетке

тельную нагрузку $p(\xi_1)$ представляем в виде суммы

$$p(\xi) = \bar{p}(\xi) + \overline{\bar{p}}(\xi), \quad (6.35)$$

где через $\bar{p}(\xi)$ обозначена нагрузка, не вызывающая в решетке касательных усилий, а через $\overline{\bar{p}}(\xi)$ — нагрузка, вызывающая такие усилия. При этом все величины, описывающие напряженно-деформированное состояние, вызываемое нагрузкой \bar{p} , будем отмечать значком «—», а величины, относящиеся к нагрузке $\overline{\bar{p}}$ — значком «=». Рассмотрим вначале случай нагружения панели нагрузкой $\overline{\bar{p}}(\xi_1)$. Учитывая, что функция $\overline{\bar{f}}_1'(\xi)$ должна обладать свойствами (6.33), представим ее в виде ряда

$$\overline{\bar{f}}_1'(\xi) = \overline{\bar{f}}_2'(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos \frac{k\pi}{\lambda^*} \xi, \quad (6.36)$$

где f_k — неизвестные пока коэффициенты ряда. Используя далее вторые краевые условия (6.20) для окаймленной панели в случае, когда $p_s = p$ ($\xi_2 = \gamma$) и $p_s = 0$ ($\xi_2 = 0$, $\xi_1 = 0, \lambda$) при $N_{Ts} = 0$, получаем четыре уравнения, позволяющие найти явные выражения для функций $\overline{\bar{f}}_3$, $\overline{\bar{f}}_4$ и $\overline{\bar{p}}$. Не приводя выкладок, дадим окончательные зависимости для этих функций:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}}_4^{IV}(\xi) &= \frac{H^2}{E_s} \sum_k f_k \cos \frac{k\pi}{\lambda^*} \xi; \quad \overline{\bar{f}}_3^{IV} = \frac{H^2}{2E_s} \psi_s \sum_k f_k \times \\ &\times \left[4 \frac{k\pi}{\lambda^*} \sin \frac{k\pi}{\lambda^*} \xi + \left(\frac{k\pi}{\lambda^*} \right)^2 \xi \cos \frac{k\pi}{\lambda^*} \xi \right]; \\ \overline{\bar{p}}(\xi) &= 2 \sum_k (-1)^{\frac{k\gamma}{\lambda^*}} \left[\psi_s \gamma \left(\frac{k\pi}{\lambda^*} \right)^2 - 2 \right] f_k \cos \frac{k\pi}{\lambda^*} \xi, \quad \psi_s = \frac{E_s}{HE_s}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

На следующем этапе рассмотрим нагружение панели нагрузкой $\bar{p}(\xi_1)$. По определению \bar{p} не вызывает касательных усилий в решетке. Следовательно, $\bar{f}_1' = \bar{f}_2' = 0$ и из (6.20) в данном случае имеем

$$\begin{aligned} \bar{f}_3^{IV}(\xi) &= \bar{f}_4^{IV}(\xi), \quad \bar{f}_3^{IV}(\xi) = -\bar{f}_3^{IV}(-\xi), \quad \bar{f}_3^{IV}(\lambda + \xi) = -\bar{f}_3^{IV}(\lambda - \xi); \\ \bar{p}(\xi) &= \frac{2E_s}{H^2} [\bar{f}_3^{IV}(\xi + \gamma) - \bar{f}_3^{IV}(\xi - \gamma)]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Отсюда видно, что функция $\bar{f}_3^{IV}(\xi)$ должна быть нечетной относительно точек $\xi = 0, \lambda$ и периодическая с периодом 2λ , а функция $\bar{p}(\xi)$ — четной относительно $\xi = 0$.

Таким образом, можно наметить следующий план решения задачи определения напряженного состояния панели при действии

на окаймляющий план касательной нагрузки. Продолжая $p(\xi_1)$ на отрицательную полуось ξ_1 четно, в интервале $-\lambda < \xi_1 < \lambda$ раскладываем нагрузку в ряд Фурье по косинусам, выделяя часть нагрузки \bar{p} с периодом $2\lambda^*$:

$$p(\xi_1) = \sum_n p_n \cos \frac{k\pi}{\lambda} \xi_1 = \sum_m \bar{p}_m \cos \frac{m\pi}{\lambda} \xi_1 + \sum_k \bar{p}_k \cos \frac{k\pi}{\lambda^*} \xi_1; \quad m\lambda \neq k\lambda. \quad (6.39)$$

Используя (6.37), находим коэффициенты

$$f_k = (-1)^{\frac{k\gamma}{\lambda^*}} \frac{\bar{p}_k}{4(\mu k^2 - 1)}; \quad \mu = \left(\frac{\pi}{\lambda^*}\right)^2 \frac{\gamma}{2} \frac{E_s}{HE_s}. \quad (6.40)$$

Выражение для функции \bar{f}_3^{IV} определим, раскладывая ее в ряд по синусам и используя четвертое соотношение (6.38) и (6.39). В результате получаем

$$\bar{f}_3^{IV}(\xi_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}_m \sin \frac{m\pi}{\lambda} \xi_1; \quad \bar{f}_m = \frac{H^2}{4EF_s} \frac{\bar{p}_m}{\sin m\pi \frac{\gamma}{\lambda}}. \quad (6.41)$$

Далее по формулам (6.22) с учетом (6.36) определяем выражения для усилий

$$S, N = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\frac{k\gamma}{\lambda^*}} \frac{\bar{p}_k}{\mu k^2 - 1} \left[\cos \frac{k\pi}{\lambda^*} (\xi_1 - \xi_2) \pm \cos \frac{k\pi}{\lambda^*} (\xi_1 + \xi_2) \right]. \quad (6.42)$$

Усилия в окаймляющих планах можно найти интегрированием второго уравнения (6.19), причем для планов, свободных от внешней нагрузки ($p_s = 0$), Q_s определяется интегрированием функции $N_\gamma = S$ (6.42), а для нагруженного плана — интегрированием функции $(p - S)$. Для определения перемещений $u_i = \bar{u}_i + \bar{u}_i$ используются формулы (6.23).

Проиллюстрируем это на примере нагружения панели с соотношением сторон $3\gamma = 2\lambda$ касательной нагрузкой, распределенной по закону (см. рис. 6.6, б)

$$p(\xi_1) = \frac{2P}{H} \left[1 - \frac{1}{\lambda} |\xi_1| - \lambda \delta(\xi_1) \right].$$

Раскладывая нагрузку $p(\xi_1)$ в интервале $-\lambda < \xi_1 < \lambda$ в ряд по косинусам, выделяем часть с периодом λ^* , соответствующую нагрузке \bar{p} ,

$$p(\xi_1) = \frac{2P}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)} \cos(2n-1) \frac{\pi}{\lambda} \xi_1 - \cos \frac{n\pi}{\lambda} \xi_1 \right] =$$

$$= -\frac{2P}{H} \left[\left(1 - \frac{4}{9\pi^2}\right) \cos \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_1 + \cos 2\pi \frac{\xi_1}{\lambda^*} + \cos \frac{3\pi}{\lambda^*} \xi_1 + \dots \right] -$$

$$-\frac{2P}{H} \left[\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \cos \frac{\pi}{\lambda} \xi_1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \xi_1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda} \xi_1 + \dots \right].$$

По формулам (6.42) определяем усилия

$$S = \bar{S} = -\frac{P}{H} \left(\frac{0,955}{\mu - 1} \cos \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_1 \cos \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_2 + \frac{1}{4\mu - 1} \cos \frac{2\pi}{\lambda^*} \xi_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda^*} \xi_2 + \dots \right);$$

$$N = \bar{N} = -\frac{P}{H} \left(\frac{0,955}{\mu - 1} \sin \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_1 \sin \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_2 + \frac{1}{4\mu - 1} \sin \frac{2\pi}{\lambda^*} \xi_1 \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{2\pi}{\lambda^*} \xi_2 + \dots \right).$$

Эпюры усилий N , $N_y = S$ для данного примера показаны на рис. 6.6, в.

Приведенную методику расчета усилий легко распространить на случай нагрева окаймляющего плана. Рассмотрим случай равномерного ($N_{Ts} = \text{const}$) нагрева одного из окаймляющих планов панели (рис. 6.7, а). Продолжим функцию $N_{Ts}(\xi_1)$ на всю ось ξ_1 таким образом, чтобы она была нечетной относительно точек $\xi_1 = 0, \lambda$. В интервале $-\lambda < \xi_1 < 2\lambda$ такую функцию можно выразить через единичные функции $1(\xi)$:

$$N_{Ts}(\xi_1) = 2N_T^0 [1(\xi_1) - 1(\xi_1 - \lambda) - 0,5];$$

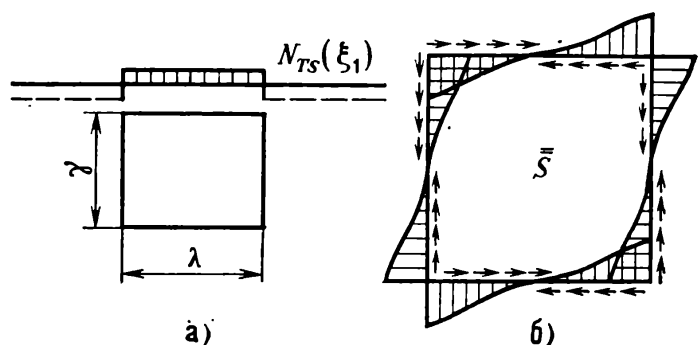
$$N_T^0 = \alpha_T T E_s b; \quad 1(\xi - \lambda) = \begin{cases} 0, & \xi < \lambda \\ 0,5, & \xi = \lambda \\ 1, & \xi > \lambda \end{cases}$$

Учитывая (6.20), найдем выражение для приведенной касательной нагрузки p^* , обусловленной нагревом плана:

$$p^*(\xi_1) = -\frac{1}{H} \frac{\partial N_{Ts}}{\partial \xi_1} = -\frac{2N_T^0}{H} [\delta(\xi_1) - \delta(\xi_1 - \lambda)].$$

Рис. 6.7. Температурное нагружение шарнирной панели:

а — равномерный нагрев по одному краю; б — касательные усилия в решетке



Раскладывая $p^*(\xi_1)$ в ряд по косинусам и выделяя часть нагрузки $\bar{p}^*(\xi_1)$, получаем

$$\bar{p}^*(\xi_1) = p^*(\xi_1) = -\frac{4N_T^0}{H} \left(\cos \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda^*} \xi_1 + \dots \right), \quad \bar{p} = 0.$$

Выражения для усилий решетки в этом случае имеют вид

$$\bar{S} = \frac{N_T^0}{H} \left(\frac{1}{\mu - 1} \cos \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_1 \cos \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_2 + \frac{1}{9\mu - 1} \cos \frac{3\pi}{\lambda^*} \xi_1 \cos \frac{3\pi}{\lambda^*} \xi_2 + \dots \right);$$

$$\bar{N} = \frac{N_T^0}{H} \left(\frac{1}{\mu - 1} \sin \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_1 \sin \frac{3\pi}{\lambda^*} \xi_2 + \frac{1}{9\mu - 1} \sin \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_1 \sin \frac{3\pi}{\lambda^*} \xi_2 + \dots \right).$$

Усилия в окаймляющих планах получим, проинтегрировав второе уравнение (6.19). Например, на краю $\xi_2 = \gamma$ имеем

$$Q_s = -N_T^0 \frac{\lambda^*}{\pi} \left(\frac{1}{\mu - 1} \sin \frac{\pi}{\lambda^*} \xi_1 + \frac{1}{3} \frac{1}{9\mu - 1} \sin \frac{3\pi}{\lambda^*} \xi_1 + \dots \right).$$

На рис. 6.7, б приведены эпюры касательных усилий $\bar{N}_\gamma = \bar{S}$ в случае нагрева из планов квадратной $\gamma = \lambda = \lambda^*$ панели.

В заключение рассмотрим частные решения неоднородной системы предельных ($\xi_1^2 \rightarrow 0$) уравнений (5.47), соответствующие нагружению шарнирной панели распределенной нагрузкой q_i . Как следует из (5.47) и (5.48) при $\xi_1^2 \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{\partial N}{\partial \xi_1} + \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} = -q_1 H; \quad \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial N}{\partial \xi_2} = -q_2 H. \quad (6.43)$$

В простейших случаях равномерно распределенной по срединной поверхности панели нагрузки: $q_1 = 0$, $q_2 = q$; $q_1 = q$, $q_2 = 0$ частные решения уравнений (6.43) с учетом узлов крепления крыла в углах 1, 4 (рис. 6.8, а) можно принять в форме

$$S^0 = qH(\lambda - \xi_1), \quad N^0 = 0; \quad S^0 = qH\lambda \left(\frac{\gamma}{2} - \xi_2 \right), \quad N^0 = 0. \quad (6.44)$$

Частные решения (6.44) совместно с общим интегралом однородной задачи должны удовлетворять граничным условиям (6.19). Для предельного случая шарнирной решетки, окаймленной шарнирной цепью, первое условие (6.19) при $p_n = 0$ сводится к условию $N = 0$, которому решения (6.44) удовлетворяют. Второе условие (6.19) может быть удовлетворено с учетом общего решения однородной задачи. Однако в первом приближении, пренебрегая податливостью окаймляющих планов на растяжение (панель окаймлена абсолютно жесткой шарнирной цепью), безмоментное плоское напряженное состояние можно определить частными интегралами (6.44), а второе уравнение (6.19) позволяет найти нормальные усилия $Q_s = Q_s^0$ в окаймляющих планах. Интегрируя (6.44)

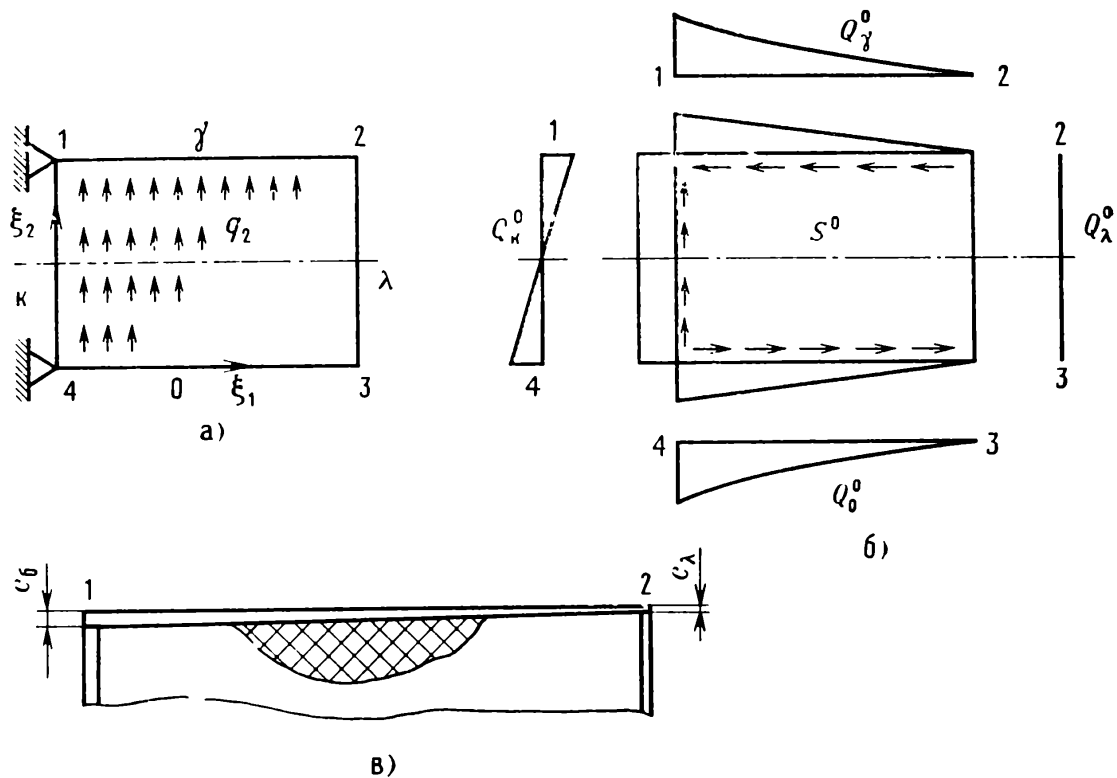


Рис. 6.8. Плоское напряженное состояние шарнирной панели:

a — нагружение панели поперечной нагрузкой; *б* — эпюры усилий; *в* — боковина переменной толщины по размаху

при условии закрепления панели в точках 1, 4, в соответствии с (6.19), находим

$$\begin{aligned} (Q_s^0)_{0,\gamma} &= \pm 0,5qH^2(\lambda - \xi_1)^2, \quad (Q_s^0)_k = qH(0,5\gamma - \xi_2), \quad Q_\lambda^0 = 0; \\ (Q_s^0)_{0,\gamma} &= 0,5qH^2(\lambda - \xi_1), \quad (Q_s^0)_k = 0,5qH\lambda(\gamma\xi_2 - \xi_2^2), \quad Q_\lambda^0 = 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Здесь, как и ранее, индексы 0, γ , k , λ означают принадлежность усилия Q_s соответствующим сторонам панели.

На рис. 6.8, б показаны эпюры усилий, вызываемые нагрузкой $q_2 = q$ при условии нерастяжимости окаймляющих планов.

6.3. Моментное плоское напряженное состояние

Как было показано, шарнирная модель решетчатой панели, являясь механизмом, допускает определенные виды деформации (описываемые функцией φ) без возникновения усилий в планах. Иными словами, некоторые нагрузки не могут восприниматься шарнирной решеткой. Реальная конструкция с жесткими узлами геометрически неизменяема и может, вообще говоря, воспринимать любую нагрузку. Поэтому интегралы, рассмотренные в разд. 6.2, для реальной конструкции имеют, в частности, тот смысл, что определяют нежелательные виды нагрузок. Однако,

если такие все-таки возникают, появляется необходимость расчета конструкции на эти виды нагрузок. Подобный расчет определяет моментное плоское напряженное состояние панели с учетом конечной жесткости планов на изгиб. Ниже предлагается приближенная методика расчета моментного плоского напряженного состояния.

Введем в рассмотрение функции напряжения Φ_1 , Φ_2 выражениями:

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{\partial \Phi_1}{H \partial \xi_2}; \quad N_{21} = -\frac{\partial \Phi_1}{H \partial \xi_1} - \hat{q}_1; \quad \hat{q}_1 = H \int q_1 d\xi_1; \\ N_{22} &= \frac{\partial \Phi_2}{H \partial \xi_1}; \quad N_{12} = -\frac{\partial \Phi_2}{H \partial \xi_2} - \hat{q}_2; \quad \hat{q}_2 = H \int q_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Условия равновесия (5.43), записанные в линейной форме, при этом удовлетворяются тождественно. Используя (5.8) и (5.22), можем записать

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi_1} = 2\zeta_1^2 E_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right) \quad -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_1} = B_3 H^2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} \right). \quad (6.47)$$

Введя еще одну функцию напряжений Φ^* по формулам

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi_1} = \Phi_1 + 2\zeta_1^2 E_3 u_2; \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi_2} = \Phi_2 + 2\zeta_1^2 E_3 u_1, \quad (6.48)$$

удовлетворим тождественно первому уравнению (6.47), а из второго с учетом (5.6) получим

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi_2^2} = \left[\frac{B_3}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) - 2\zeta_1^2 E_3 \right] \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right). \quad (6.49)$$

Введем функцию перемещений φ^* , которую в данном случае определим по формулам

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi_1} = u_1; \quad -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi_2} = u_2. \quad (6.50)$$

Подставляя (6.50) в первое соотношение (5.24), с учетом (5.23) и (5.22) находим

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \xi_2^2} = \frac{H}{2E_3} (N_{11} + N_{22}). \quad (6.51)$$

Выражая далее правые части уравнений (6.51) и (6.49) через функцию напряжений (6.48) с учетом (6.46) и функцию перемещений (6.50) и пренебрегая величиной ξ_1^2 по сравнению с единицей, окончательно получаем следующую систему разрешающих уравнений:

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \xi_2^2} = \frac{1}{E_3} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}; \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi_2^2} = 4\zeta_1^2 E_3 \left[\eta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) + 1 \right] \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}.$$

Отметим, что полученная система уравнений равносильна системе уравнений, записанных в перемещениях (5.47), при условии пренебрежения ζ_1^2 по сравнению с единицей. Нетрудно также видеть, что случаю безмоментного плоского напряженного состояния соответствует предельная система уравнений (6.52) при $\zeta_1^2 \rightarrow 0$. Как показано в разд. 6.2, первому уравнению (6.52) без правой части соответствуют интегралы, описывающие деформацию панели как шарнирного механизма. Очевидно, что эти же интегралы соответствуют случаю нерастяжимой решетки ($E_3 \rightarrow \infty$). Принимая в качестве основного допущения в данном разделе нерастяжимость планов панели, будем искать интегралы системы уравнений (6.52) в случае, когда в первом уравнении отсутствует правая часть.

Как и ранее, два из трех краевых условий, определяемых контурным интегралом в выражении (5.42), являются кинематическими: $u_s = 0$, $\gamma_s = 0$. Второе условие при принятых допущениях в отношении деформационных свойств решетки выполняется тождественно, а из первого следует (см. разд. 6.2), что функция $\varphi^* = \bar{\varphi}^*$, являющаяся интегралом первого однородного уравнения (6.52) и определяемая выражением

$$\bar{\varphi}^* = \bar{f}(\xi_1 + \xi_2) - \bar{f}(\xi_1 - \xi_2), \quad (6.53)$$

должна быть нечетной относительно $\xi = 0$ и периодической с периодом $2\lambda^*$, где λ^* — отрезок, которому кратны длины сторон панели.

Видим, что задача определения моментного плоского напряженного состояния полипланной панели с нерастяжимой решеткой сводится к последовательному интегрированию двух волновых уравнений, причем решение первого уравнения (6.52) имеет вид (6.53). Общее решение второго уравнения (6.52) можно представить в форме

$$\Phi^* = \bar{f}_1(\xi_1 + \xi_2) + \bar{f}_2(\xi_1 - \xi_2) + \Phi_1^*, \quad (6.54)$$

где Φ_1^* — частное решение второго уравнения (6.52) с правой частью, вид которой определяется функцией (6.53).

Выразим через функции Φ^* , $\varphi^* = \bar{\varphi}^*$ усилия эквивалентной панели. В соответствии с (6.46) и (6.48) имеем (при $N_T = 0$)

$$N = \frac{\partial^2 \Phi^*}{H \partial \xi_1 \partial \xi_2}; \quad -2N_T = \frac{\partial^2 \Phi^*}{H \partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{H \partial \xi_2^2} + \hat{q}_1 + \hat{q}_2;$$

$$N_{\zeta} = \zeta_1^2 E_s \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}^*}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^*}{\partial \xi_2^2} \right); \quad M_{iv} = (-1)^{i+1} B_s \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}; \quad (6.55)$$

$$2N_{\eta} = B_s \frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \hat{q}_1 - \hat{q}_2, \quad B_s = 4\eta^2 \zeta_1^2 E_s. \quad (6.56)$$

Запишем далее оставшееся неиспользованным второе статическое граничное условие (5.49), которое с учетом (5.22), (5.26) и (6.55) может быть представлено на каждом из четырех краях панели $x_i = \text{const}$ в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}^*}{H \partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{1}{H} B_s \frac{\partial^4 \bar{\varphi}^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} \pm \frac{\partial}{\partial \xi_j^2} B_s \frac{1}{H^4} \frac{\partial^3 \bar{\varphi}^*}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} = p_n, \quad i, j = 1, 2 (i \neq j). \quad (6.57)$$

Здесь верхний знак берется, когда положительные направления осей s и ξ_j совпадают, а нижний — в противном случае.

Таким образом, расчет усилий моментного напряженного состояния, обусловленного изгибной деформацией панели в своей плоскости (см. рис. 6.2), сводится к определению функций $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}$, входящих в выражения (6.53) и (6.54), путем использования уравнений (6.57) при заданных функциях нормальной нагрузки $p_n(\xi_j)$, приложенной к краям панели. Реализацию условий (6.57) при решении конкретных задач удобно осуществлять, представляя функции $\Phi^*(\xi_j)$, $\varphi^*(\xi_j)$ и нагрузку $p_n(\xi_j)$ в форме тригонометрических рядов и выделяя те гармоники, которые удовлетворяют свойствам функции (6.53). При этом моментные усилия N_{ζ} , N_{η} , M_{iv} определяются только величиной $\bar{\varphi}^*$, а усилия N_x , N_y зависят от суммы (6.54), где первое слагаемое соответствует расчетной модели шарнирной решетки, а второе — суть поправка, обусловленная конечной изгибной жесткостью решетки.

6.4. Напряженное состояние решетчатой панели типа пограничного слоя

Для полипланной панели при нагружении ее в своей плоскости характерным является напряженное состояние с малым показателем изменчивости (моментное или безмоментное). Слабо затухая с удалением от краев, оно распространяется на всю панель. В дальнейшем это напряженное состояние будем называть внутренним или основным. Как было показано в разд. 6.1, помимо внутреннего напряженного состояния в полипланной панели может также возникать напряженное состояние с большим показателем изменчивости, быстро затухающее с удалением от места приложения нагрузки. Такое напряженное состояние, обычно наблюдаемое у края панели, охватывает весьма узкую область (полосу), примыкающую к окаймляющему плану. По терминологии, принятой в теории оболочек, это напряженное состояние будем называть напряженным состоянием типа пограничного слоя или, короче, пограничным слоем. Полное напряженное состояние панели у краев можно представить как сумму внутреннего напряженного состояния и пограничного слоя.

Рассмотрим напряженное состояние типа пограничного слоя в районе края панели $\xi_1=0$. Используя допущение о возможности замены решетки планов континуальной средой, будем искать решение задачи о напряженном состоянии в предположении, что все функции усилий и перемещений можно представить в форме тригонометрических рядов по переменной ξ_2 . Представляя функцию перемещений в форме ряда (6.3), для интегралов с большим показателем изменчивости приходим к разрешающему уравнению второго порядка (6.14) относительно функции f_m .

Как следует из (6.1), (6.3), (6.14) и (5.48), m -е элементарное напряженное состояние с большим показателем изменчивости полностью определяется функцией

$$\varphi_m = (A_m e^{-\Psi \xi_1} + B_m e^{\Psi \xi_1}) \sin \omega_m \xi_2; \quad \omega_m = (2m-1) \frac{\pi}{\gamma}; \quad \Psi = \frac{1}{\eta \xi_1}. \quad (6.58)$$

Полагая, что напряженное состояние должно затухать с удалением от нагруженного края $\xi_1=0$, принимаем $B_m=0$. Выражение для перемещений и усилий найдем, используя (6.1) и (5.48). Принимая во внимание, что для рассматриваемого типа интегралов имеет место $\Psi \gg \omega_m$, в полученных соотношениях пренебрегаем членами ω_m/Ψ по сравнению с единицей. В результате находим следующие приближенные выражения для перемещений и усилий m -го элементарного напряженного состояния типа пограничного слоя:

$$\begin{aligned} u_1^m &= 3A_m \omega_m \Psi e^{-\Psi \xi_1} \cos \omega_m \xi_2; \quad u_2^m = A_m \Psi^2 e^{-\Psi \xi_1} \sin \omega_m \xi_2; \\ N_{11}^m &= N_{22}^m = -2A_m E_3 \omega_m \Psi^2 e^{-\Psi \xi_1} \cos \omega_m \xi_2; \\ N_{12}^m &= A_m E_3 \frac{6\tau_1^2 \omega_m^2 - 1}{\tau_1^2} \Psi e^{-\Psi \xi_1} \sin \omega_m \xi_2; \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$M_{13}^m = -2A_m H E_3 \Psi^2 e^{-\Psi \xi_1} \sin \omega_m \xi_2; \quad M_{23}^m = 2A_m H E_3 \omega_m \Psi e^{-\Psi \xi_1} \cos \omega_m \xi_2.$$

Наличие пограничного слоя в полипланной панели при плоском напряженном состоянии обуславливается сопротивлением окаймляющего плана деформации сдвига края решетки. Действительно, деформация сдвига при безмоментном напряженном состоянии (см. рис. 6.9, а) вследствие наличия шарниров в узлах не приводит к появлению моментов M_i на краю панели. В реальной же решетке с жесткими узлами, окаймляющие планы которой обладают конечной жесткостью на изгиб, сдвиг края панели (см. рис. 6.9, б) вызывает дополнительное моментное напряженное состояние — пограничный слой, который вместе с внутренним напряженным состоянием позволяет удовлетворить всем трем краевым условиям (5.49) или (5.51) при $\gamma_s \neq 0$.

Чтобы оценить величины усилий напряженного состояния пограничного слоя, рассмотрим деформацию сдвига решетки в районе края панели $\xi_1=0$ (рис. 6.9) в случае, когда окаймляющий план является абсолютно жестким. В узкой зоне, примыкающей к окаймляющему плану, деформация в плоскости решетки обуславливается двумя напряженными состояниями: безмоментным и пограничным слоем. Третье кинематическое граничное условие — отсутствие деформации сдвига края $\xi_1=0$ имеет вид

$$\gamma = (\gamma_s)_6 + (\gamma_s)_n = 0, \quad (6.60)$$

где $(\gamma_s)_6$, $(\gamma_s)_n$ — деформации сдвига края панели, обусловленные соответственно безмоментным напряженным состоянием и пограничным слоем. Полагаем, что деформация сдвига, связанная с удлинением планов решетки, обуславливается в основном действием касательных усилий N_γ безмоментного напряженного состояния (см. рис. 6.9, а). Примем также, что функция $N_\gamma(\xi_2)$ имеет тот же закон распределения по краю, что и усилия пограничного слоя.

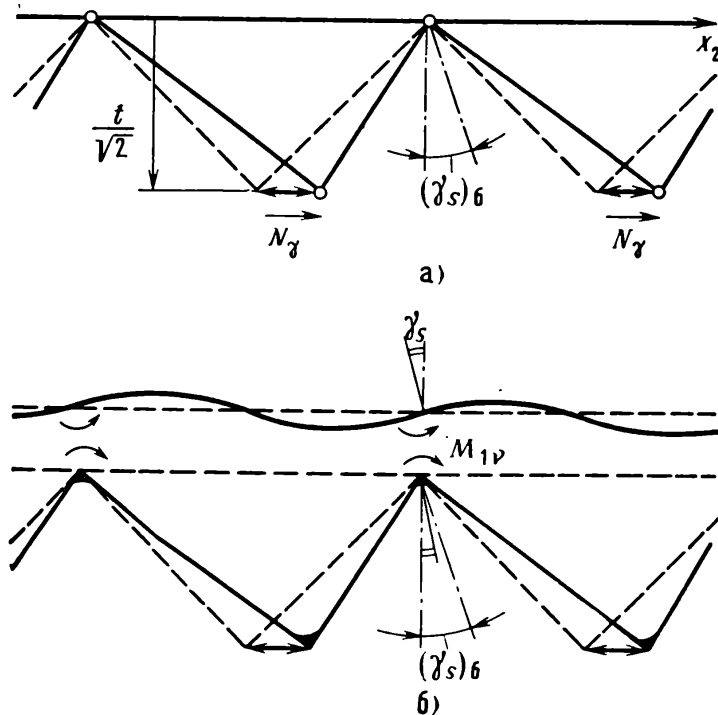


Рис. 6.9. Деформация сдвига края решетки:

а — сдвиг шарнирной решетки; б — усилия пограничного слоя, обусловленные сдвигом

Таким образом, используя (6.60), с той же степенью точности, с какой были получены зависимости (6.59), находим

$$A_m = \frac{N_\gamma}{E_3} \frac{1}{\Psi^3}.$$

Значение параметра Ψ , например, при $c/t = 0,1 \dots 0,01$, $H/t = 10$ составляет величину порядка 30—50. Используя (6.59), нетрудно выявить те усилия пограничного слоя, которые могут оказывать заметное влияние на напряженное состояние панели. К таким усилиям в первую очередь относится изгибающий момент M_{1v}^m (см. рис. 6.9, б), для которого имеем

$$M_{1v}^m = -N_\gamma \frac{H}{\Psi} e^{-\eta \xi_1} \sin \omega_m \xi_2.$$

Остальные усилия, а также компоненты перемещений пограничного слоя заметного влияния на плоское напряженное состояние не оказывают. Изгибные напряжения в планах, обусловленные моментом M_{1v}^m , для указанных значений параметров решетки могут превышать напряжения от усилий N_γ в 10—50 раз.

6.5. Колебания и устойчивость решетчатой панели в своей плоскости

В настоящем разделе рассматривается задача о свободных колебаниях и устойчивости панели в своей плоскости, как задача определения собственных значений и собственных форм при изгибной деформации нерастяжимой решетки. Предполагается, что панель предварительно нагружена такой системой сил, при которой изгибные формы деформации отсутствуют, т. е. панель находится в безмоментном напряженном состоянии. Это напря-

женное состояние будем называть начальным, или невозмущенным. Моментное напряженное состояние сотовой решетки, соответствующее изгибным формам деформации (см. разд. 6.3) и возникающее в результате колебаний или потери устойчивости панели, будем называть возмущенным напряженным состоянием. Перемещения $u_i = \tilde{u}_{i\tau}$ при возмущенном напряженном состоянии выражаются через функцию перемещений $\varphi^* = \varphi_\tau^*$ (6.50), которая в общем случае является функцией координат ξ_i и времени τ . Рассматривая гармонические колебания, представим функции φ_τ^* , $\tilde{u}_{i\tau}$ в виде

$$\varphi_\tau^* = \varphi^*(\xi_1, \xi_2) \sin \omega \tau; \quad \tilde{u}_{i\tau} = \tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) \sin \omega \tau, \quad (6.61)$$

где \tilde{u}_i — амплитудные значения перемещений точек срединной поверхности панели в плоскости ξ_1, ξ_2 , соответствующие одному из главных колебаний и определяющие его форму. Значком « \sim » здесь и далее обозначены величины, относящиеся к возмущенному напряженному состоянию.

Ставя задачей получить приближенные значения наинизших частот собственных колебаний, решение будем искать методом Ритца, полагая, что панель нагружается консервативной системой сил [3].

В соответствии с принципом Остроградского — Гамильтона функционал-действие Q на действительных перемещениях имеет стационарное значение

$$\delta Q = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau = 0, \quad (6.62)$$

где L — функция Лагранжа, определяемая как сумма энергий,

$$L = \tilde{T} - \tilde{W}_p - \tilde{W}_s + \tilde{V}. \quad (6.63)$$

Здесь \tilde{T} — кинетическая энергия системы; \tilde{W}_p , \tilde{W}_s — энергия деформации соответственно решетки и окаймляющих планов; \tilde{V} — потенциал внешних сил.

Полагая, что нормальные и касательные усилия моментного напряженного состояния пренебрежимо малы по сравнению с соответствующими усилиями безмоментного напряженного состояния, принимаем для суммарных усилий панели следующие соотношения (см. разд. 5.5):

$$\begin{aligned} N_{11} = N_{22} = N^0; \quad N_{12} = N_{21} = N_1^0; \quad Q_s = Q_s^0; \\ M_{1v} = \tilde{M}_{1v}; \quad M_{2v} = \tilde{M}_{2v}; \quad L_x = \tilde{L}_x. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Используя (5.37) и (5.39) с учетом (6.50), (6.53) и (6.58), запишем выражение для энергии деформации панели в своей плоскости

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_p + \tilde{W}_s = & \frac{1}{2} \iint_{S^*} \left\{ N^0 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] + \right. \\
& + 2N^0_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi_2} \right) + \eta^2 \zeta_1^2 E_9 \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \xi_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \xi_2^2} \right)^2 \right] \Big\} d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \frac{1}{2H} \int_0^\lambda \left[Q^0 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi_1} \right)^2 + \frac{B_s}{H} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \xi_1^2} \right)^2 \right]_{\xi_2=0,1} d\xi_1 + \\
& + \frac{1}{H} \int_0^1 \left[Q^0 \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi_2} \right)^2 + \frac{B_s}{H} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \xi_2^2} \right)^2 \right]_{\xi_1=0,\lambda} d\xi_2. \quad (6.65)
\end{aligned}$$

При нагружении панели постоянной во времени распределенной нагрузкой в соответствии с (5.40), имеем

$$V_{\max} = - \iint_{S^*} (q_1 \tilde{u}_1 + q_2 \tilde{u}_2) H d\xi_1 d\xi_2. \quad (6.66)$$

Обозначим через ρ плотность материала панели, кинетическую энергию определим по формуле

$$T = \frac{1}{2} \rho b H^2 \iint_{S^*} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tau} \right)^2 \right] d\xi_1 d\xi_2. \quad (6.67)$$

Заменяя в (6.59), (6.60) и (6.61) \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 соответственно на $\tilde{u}_{1\tau}, \tilde{u}_{2\tau}$, подсчитаем функционал-действие Q за время одного периода колебаний $\tau_2 - \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$Q = \frac{\pi}{\omega} \left[-\frac{1}{2} \rho b H^2 \omega^2 (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2) + \tilde{W}_p + \tilde{W}_s \right]. \quad (6.68)$$

Выберем теперь аппроксимирующие функции для компонентов перемещений \tilde{u}_i . Если ограничиться интегралами моментного напряженного состояния, то перемещения можно выразить через функцию $\varphi^* = \bar{\varphi}^*$. Принимая минимизирующую форму для φ^*, \tilde{u}_i в виде конечных рядов

$$\bar{\varphi}^*(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^n a_m \varphi_m^*; \quad \tilde{u}_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^n \tilde{u}_{im} \quad (6.69)$$

и выбирая координатные функции $\bar{\varphi}_m^*$ как частные интегралы первого уравнения (6.52) без правой части, с учетом (6.50) имеем

$$\bar{\varphi}_m^* = \sin \frac{m\pi}{\lambda^*} \xi_1 \sin \frac{m\pi}{\lambda^*} \xi_2, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{1m} &= b_m \cos \frac{m\pi}{\lambda^*} \xi_1 \sin \frac{m\pi}{\lambda^*} \xi_2; \quad \tilde{u}_{2m} = -b_m \sin \frac{m\pi}{\lambda^*} \xi_1 \cos \frac{m\pi}{\lambda^*} \xi_2; \\ b_m &= \frac{m\pi}{\lambda^*},\end{aligned}\quad (6.70)$$

где λ^* — общий наибольший делитель величин λ, γ .

В соответствии с (6.63) и (6.64) Q является функцией n независимых переменных b_m . Ее первая вариация определяется выражением

$$\delta Q = \sum_{m=1}^n \frac{\partial Q}{\partial b_m} \delta b_m. \quad (6.71)$$

Условию (6.62) удовлетворим, приравнявая нулю коэффициенты при вариациях δb_m . В результате получаем систему уравнений:

[illegible]

Коэффициент ν , входящий в уравнения (6.72), характеризует массу конструкции; μ_{mm} — коэффициенты, определяемые жесткостью конструкции; коэффициенты μ_{mk} ($m \neq k$) зависят от вида невозмущенного напряженного состояния. Ниже приводятся выражения для коэффициентов μ_{mk} в случае, когда невозмущенное напряженное состояние соответствует поперечному нагружению панели (см. рис. 6.8):

$$\mu_{mm} = \left(\frac{\eta}{2} \zeta_1^2 E_\gamma \gamma_\lambda + \frac{B_\kappa + B_\lambda}{2} \gamma + B_0 K_\gamma \gamma_\lambda \right) \left(\frac{m\pi}{\lambda^*} \right)^4 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 E_\gamma \gamma_\lambda \left(\frac{m\pi}{\lambda^*} \right)^2, \quad (6.73)$$

$$\mu_{mk} = 2[1 - (-1)^{m+k}] \frac{mk(m^2 + k^2)}{m^2 - k^2} \lambda H^2 q, \quad m \neq k, \quad \nu = \frac{\lambda \gamma}{2} \rho b H^2.$$

При выводе формул (6.73) принималось, что поперечные окаймляющие планы (корневой и концевой) имеют постоянную по длине изгибную жесткость, соответственно $B_s=B_k$ и $B_s=B_\lambda$. Продольные окаймляющие планы (боковины) принимались по жесткости одинаковыми, причем жесткость на изгиб боковин $B_s=B_\gamma$ в общем случае может быть переменной по длине, что учитывается коэффи-

циентом K_γ . При распределении изгибной жесткости боковин по закону

$$B_\gamma(\xi_1) = B_0 \left(1 - \frac{c_0 - c_\lambda}{\lambda c_0} \xi_1 \right)^3,$$

где B_0 — жесткость боковины у корня ($\xi_1 = 0$), а c_0, c_λ — толщины боковины соответственно у корня и на конце (см. рис. 6.8, в), коэффициент K_γ определяется по формуле

$$K_\gamma = 1 - \frac{3}{2} \frac{c_0 - c_\lambda}{c_0} \left(1 - \frac{1}{2m^2\pi^2} \right) + \left(\frac{c_0 - c_\lambda}{c_0} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{2m^2\pi^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{c_0 - c_\lambda}{c_0} \right)^3 \left(1 - \frac{6}{2m^2\pi^2} \right).$$

Условием нетривиальности решений однородных уравнений (6.72) является равенство нулю определителя системы

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} - \nu\omega^2 & \dots & \mu_{1m} & \dots & \mu_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{m1} & \dots & \mu_{mm} - \nu\omega^2 & \dots & \mu_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \dots & \mu_{nm} & \dots & \mu_{nn} - \nu\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.74)$$

Таким образом, мы получили частотное уравнение Ритца, позволяющее приближенно найти первые n собственных частот колебаний панели в своей плоскости.

Уравнение (6.74) позволяет также определить критические значения параметра поперечной нагрузки (см. рис. 6.8), соответствующие изгибным формам потери устойчивости панели в своей плоскости (см. рис. 6.2). Эти значения определяются как наименьшие корни уравнения (6.74) при $\omega = 0$. Для рассмотренного примера решение, найденное методом Ритца, совпадает с решением, получаемым по методу Бубнова — Галеркина с использованием уравнений (5.57).

Говоря об устойчивости полипланной панели в своей плоскости, следует отметить, что критические значения поперечной нагрузки, как правило, достаточно высоки и поэтому не являются расчетными. В то время как при неравномерном нагреве конструкции (решетки и окаймления) потеря устойчивости в плоскости панели может оказаться расчетным случаем.

Полученные в данном разделе формулы можно легко обобщить на случай действия температурного поля, если к усилиям невозмущенного напряженного состояния (6.44), (6.45) добавить соответствующие усилия, обусловленные нагревом конструкции (см. разд. 6.2).

6.6. Изгиб удлиненной полипланной панели из своей плоскости

Задача об изгибе полипланной панели из своей плоскости сводится к интегрированию уравнения (5.52) при граничных условиях (5.55) и соответствующих условиях в угловых точках панели, вид которых зависит от условий прикрепления панели. Анализ напряженного состояния панели показывает, что рациональные способы получения приближенных аналитических зависимостей для расчета усилий существенным образом зависят от соотношения размеров, жесткостей и условий прикрепления панели. Например, для короткой панели с жестким креплением узлов корневого плана целесообразно решение задачи по методу Трефца [30]. Этим методом было получено решение в виде конечной суммы частных интегралов уравнения (5.52), точно удовлетворяющих условиям в угловых точках и в среднем — по краям панели. Здесь приведем другую форму приближенного решения задачи об изгибе, которая представляется более рациональной для решетчатых панелей удлиненной формы ($\lambda > \gamma$).

Представим функцию прогиба в виде ряда

$$w = f_0(\xi_1) + f_1(\xi_1) \cos \pi \xi_2 + f_2(\xi_1) \cos 2\pi \xi_2 + \dots \quad (6.75)$$

Здесь f_k ($k=0, 1, 2, \dots$) — функции, подлежащие определению.

Используя (5.33), (5.34) и (5.40) с учетом симметрии напряженного состояния относительно оси $\xi_2 = 0,5\gamma$ и при отсутствии температурного поля, выражение для энергии, распределенной по координате ξ_1 при изгибе панели из своей плоскости ($u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = w$), можно представить в форме

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{D_3}{H^3} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)^2 - \frac{qH^4}{D_3} w \right] d\xi_2 + \\ + \psi_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} \right)_{\xi_2=0} + \psi_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)_{\xi_2=0} \Big|_{\xi_1=0}^{\xi_1=\lambda}, \quad \psi_1 = \frac{D_s}{HD_3}, \quad \psi_2 = \frac{C_s}{HD_3}, \quad (6.76) \end{aligned}$$

где ψ_1, ψ_2 — относительные жесткости боковин на изгиб и кручение.

Полная величина энергии W определяется интегрированием $\Theta(\xi_1)$ в пределах от $\xi_1 = 0$ до $\xi_1 = \lambda$. Требование минимума для функционала W приводит к вариационной задаче со следующими уравнениями Эйлера:

$$\Theta_{f_k} - \frac{d}{d\xi_1} \Theta_{f'_k} + \frac{d^2}{d\xi_1^2} \Theta_{f''_k} = 0. \quad (6.77)$$

Удерживая в (6.75) первые два члена ряда, примем для прогиба приближенное выражение

$$w(\xi_1, \xi_2) = f_0(\xi_1) + f_1(\xi_2) \sin \pi \xi_2. \quad (6.78)$$

Реализуя (6.77), приходим к системе двух уравнений относительно функций f_0, f_1 :

$$\begin{aligned} (1+2\psi_1)f_0^{IV} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{d^2}{d\xi_1^2} - \pi^2 \right) \frac{d^2 f_1}{d\xi_1^2} &= \frac{H^4 q}{D_9}; \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{d^2}{d\xi_1^2} - \pi^2 \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^4}{d\xi_1^4} - 2(3+2\psi_2)\pi^2 \frac{d^2}{d\xi_1^2} + \pi^4 \right] f_1 &= \frac{2}{\pi} \frac{H^4 q}{D_9}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Представляя решение уравнений (6.79) в виде суммы общего решения однородных уравнений \bar{f}_0, \bar{f}_1 и частного решения $\bar{\bar{f}}_0, \bar{\bar{f}}_1$ уравнений с правой частью, последнее запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}}_0 &= \pi a_1 \left(\frac{\xi_1^4}{24} + C_4 \frac{\xi_1^3}{6} + C_3 \frac{\xi_1^2}{2} + C_2 \xi_1 + C_1 \right) \frac{H^4 q}{D_9}; \\ \bar{\bar{f}}_1 &= \frac{4}{\pi} a_1 \left(\frac{\xi_1^2}{2} + C_4 \xi_1 + C_3 + \frac{2\psi_1 + 4\psi_2}{\pi} + \frac{6\pi^2 - 8}{\pi^4} \right) \frac{H^4 q}{D_9}; \\ a_1 &= \frac{1}{\pi^2 (1 + 2\psi_1) - 8}, \end{aligned} \quad (6.80)$$

где C_n — постоянные, подлежащие определению.

С учетом (6.79) и (6.80) для определения функций f_0, f_1 имеем систему двух однородных уравнений, которую можно свести к одному разрешающему уравнению относительно функции перемещения F :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \xi_1^4} - 2\pi^2 \bar{\psi} \frac{d^2 F}{d\xi_1^2} + \pi^2 F = 0; \quad \bar{\psi} = 1 + \frac{2\pi^2 (1 + 2\psi_1) (1 + \psi_2)}{\pi^2 (1 + 2\psi_1) + 8}, \quad (6.81)$$

вводя эту функцию по формулам

$$\bar{f}_0 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{d^2 F}{d\xi_1^2} - \pi^2 F \right); \quad \bar{f}_1 = -(1 + 2\psi_1) \frac{d^2 F}{d\xi_1^2}. \quad (6.82)$$

Здесь отброшены интегралы вида $F = C\xi_1 + C_0$, так как соответствующие члены для функции f_0 учтены в частном решении (6.80), а для функции f_1 они несущественны. Корни характеристического уравнения, определяемые формулой

$$\kappa_{1,2}^2 = \pi^2 \bar{\psi} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{\psi}^2}} \right), \quad (6.83)$$

— действительные числа, а общее решение уравнения (6.81) имеет вид

$$F = A_1 e^{-\kappa_1 \xi_1} + A_2 e^{-\kappa_2 \xi_1} + A_3 e^{\kappa_1 \xi_1} + A_4 e^{\kappa_2 \xi_1}. \quad (6.84)$$

Используя (6.82), (6.78), нетрудно получить выражение для прогиба w . В это выражение войдут восемь постоянных интегри-

рования, которые должны быть определены из условий на краях панели $\xi_1=0, \lambda$. Принимая для прогиба аппроксимацию (6.78), выразим суммарный изгибающий момент M_c и суммарную поперечную силу Q_c , действующие в сечениях панели $\xi_1=\text{const}$, через функции \bar{f}_0 и \bar{f}_1 (6.80):

$$M_c = 2L_n + \int_0^{\gamma} MH d\xi_2 = \left(\frac{\xi_1^3}{2} + C_4 \xi_1 + C_3 - \frac{8}{\pi^2} a_2 \right) H^3 q; \quad (6.85)$$

$$Q_c = \frac{dM_c^0}{H d\xi_1} = (\xi_1 - C_4) H^2 q; \quad a_2 = \frac{1}{\pi^2} + \frac{4(1 + \psi_2)}{\pi^2(1 + 2\psi_1) - 8}.$$

Здесь L_n — изгибающий момент в боковине (см. рис. 5.8). Используя условия ненагруженности свободного конца консоли, $M_c(\lambda) = 0$, $Q_c(\lambda) = 0$, с учетом (6.80) находим значения постоянных C_3 , C_4 . Постоянные C_1 , C_2 можно выразить через константы интегрирования A_1 , A_2 используя условия защемления боковин у корня: $w(0, 0) = 0$, $[w'(\xi_1, 0)]_{\xi=0} = 0$. Как видно из (6.85), в выражения для M_c , Q_c члены, содержащие экспоненциальные множители, не входят. Иными словами, функция F влияет на распределение усилий между решеткой и боковинами, причем для удлиненной панели можно предположить, что это влияние существенно только у краев $\xi_1 = 0, \lambda$. Имея в виду получить достоверные значения усилий корневой части панели, в выражении (6.84) сохраним лишь убывающие от края $\xi_1 = 0$ члены, положив $A_3 = A_4 = 0$. В результате для прогиба получаем выражение

$$\begin{aligned} w = \frac{H^4 q}{D_3} 2\pi a_1 \left\{ \frac{\kappa_1^2 - \pi}{(1 + 2\psi_1) \kappa_1^2} A_1^* e^{-\kappa_1 \xi_1} + \frac{\kappa_2^2 - \pi^2}{(1 + 2\psi_1) \kappa_2^2} A_2^* e^{-\kappa_2 \xi_1} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} (\xi_1^4 - 2\lambda \xi_1^2) + \frac{\pi}{8} (\lambda^2 + 2a_2) \xi_1^2 + \frac{A_1^*}{1 + 2\psi} \frac{\kappa_1^2 - \pi^2}{\kappa_1^2} (\kappa_1 \xi_1 + 1) + \right. \\ \left. + \frac{A_2^*}{1 + 2\psi} \frac{\kappa_2^2 - \pi^2}{\kappa_2^2} (\kappa_2 \xi_1 + 1) + \left[\frac{(\xi_1 - \lambda)^2}{\pi^2} + \frac{4(\psi_1 + \psi)}{\pi^4} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{2} (A_1^* e^{-\kappa_1 \xi_1} + A_2^* e^{-\kappa_2 \xi_1}) \right] \sin \pi \xi_2 \right\}, \quad (6.86) \end{aligned}$$

где A_1^* , A_2^* — новые обозначения для постоянных интегрирования.

Для определения A_1^* , A_2^* необходимо рассмотреть условия деформации корневого плана. Учитывая, что корневой план представляет собой весьма жесткую короткую балку на двух опорах, в дальнейшем полагаем его абсолютно жестким на изгиб в своей плоскости, $w(0, \xi_2) = 0$. Удовлетворяя этому условию, получаем за-

зависимость, связывающую постоянные A_1^2 , A_2^* ,

$$A_2^* = \frac{4}{\pi^3} \left(\frac{\lambda^2}{2} + 2 \frac{\bar{\psi} + \psi_1}{\pi^2} \right) - A_1^*. \quad (6.87)$$

Второму краевому условию (5.54) при принятой аппроксимации для функции $w(\xi_1, \xi_2)$ можно удовлетворить только приближенно.

Учитывая (5.42), запишем это условие в вариационной форме

$$\int_0^1 \left(M - \frac{\partial L_s}{H \partial \xi_2} - m_s \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)_{\xi_1=0} d\xi_2 = 0. \quad (6.88)$$

Используя зависимости (5.23) и (5.26) и учитывая принятую аппроксимацию для прогиба, выражение (6.88) можно переписать следующим образом:

$$\int \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} \right) + \psi_0 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2} + \frac{H^2 m_s}{D_3} \right]_{\xi_1=0} \frac{\partial}{\partial A_1^*} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right)_{\xi_1=0} d\xi_2 = 0;$$

$$\psi_0 = \frac{C_s}{H D_3}. \quad (6.89)$$

Здесь ψ_0 — относительная жесткость на кручение корневого плана.

Выражение (6.89) представляет собой условие ортогональности на краю $\xi_1=0$ производной от функции прогиба второму уравнению (5.55) при $\xi_2^2=0$, $M_T=0$. Реализуя (6.89), находим значение A_1^* и тем самым полностью определяем функцию прогиба, а также все усилия, действующие в панели.

Глава 7

Прочность и устойчивость решетчатых крыльев

7.1. Анализ расчетной схемы решетчатого крыла

Основным видом нагрузки, действующей на крыло, является аэродинамическая нагрузка. Компонентами разложения этой нагрузки по осям x_k для крыла, ориентированного так, как показано на рис. 7.1, по терминологии, принятой в аэродинамике, являются продольная сила $X=X_3$, нормальная сила $Y=X_2$, поперечная сила $Z=X_1$. Силы X_1 и X_2 , действуя в плоскости x_1, x_2 , вызывают так называемое плоское напряженное состояние крыла, а сила X_3 — изгиб крыла из плоскости x_1, x_2 .

В соответствии с принятым в данной работе подходом первый этап расчета на прочность заключается в определении усилий в

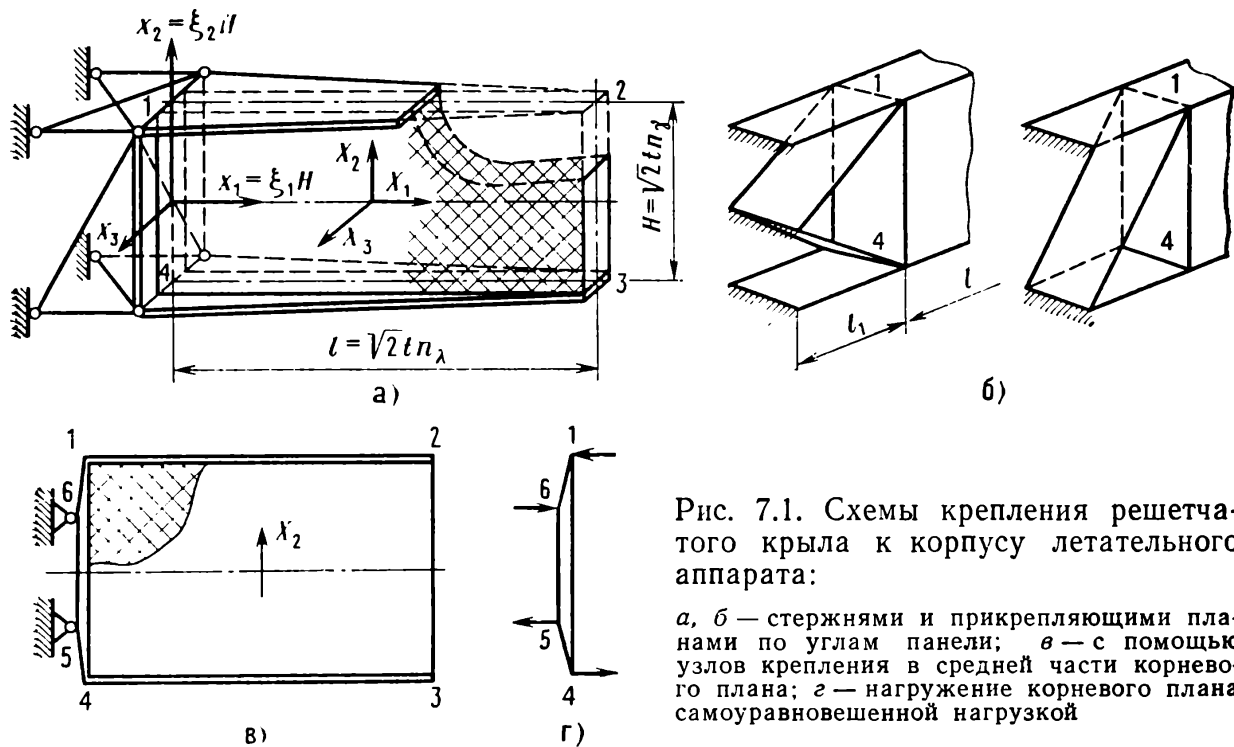


Рис. 7.1. Схемы крепления решетчатого крыла к корпусу летательного аппарата:

а, б — стержнями и прикрепляющими планами по углам панели; в — с помощью узлов крепления в средней части корневого плана; г — нагружение корневого плана самоуравновешенной нагрузкой

основных силовых элементах крыла при условии пренебрежения влиянием местного действия аэродинамической нагрузки на план. Вторым допущением является предположение о равномерном распределении аэродинамической нагрузки по срединной плоскости крыла x_1 , x_2 , ограниченной контуром 1—2—3—4 (рис. 7.1, а). Таким образом, на первом этапе расчета принимается, что вся аэродинамическая нагрузка распределяется равномерно по узлам решетки планов.

Решетчатое крыло как силовая конструкция представляет собой короткую большой строительной высоты консоль ферменного типа, состоящую из собственного решетчатого крыла (полипланной панели) и системы крепления крыла к корпусу летательного аппарата.

Проектирование и расчет системы крепления крыла к объекту представляет собой обычную пространственную задачу прикрепления твердого тела. Так как наиболее естественный способ шарнирного крепления крыла непосредственно в угловых точках корневого плана практически трудно реализуем, оно осуществляется обычно специальной прикрепляющей системой. Одна из возможных схем крепления крыла к объекту стержнями показана на рис. 7.1, а. В ряде случаев крепление решетчатого крыла выгоднее осуществлять не стержнями, а прикрепляющими планами (см. рис. 7.1, б), которые, находясь в аэродинамическом потоке, могут создавать дополнительную подъемную силу.

С точки зрения жесткостных свойств конструкции схемы крепления крыла можно разбить на две группы. К первой следует от-

нести такие, в которых узлы крепления расположены в углах панели (см. рис. 7.1, *а, б*). Для этих схем характерно отсутствие существенной изгибной деформации корневого плана. Ко второму типу относятся схемы, у которых узлы крепления расположены в средней части корневого плана (см. рис. 7.1, *в*). В этом случае корневой план может испытывать значительную деформацию и его необходимо выполнять достаточно мощным.

Принимая, что аэродинамическая нагрузка распределяется по срединной поверхности панели равномерно, введем зависимости $q_k = X_k / lH$ ($k = 1, 2, 3$). Статический расчет решетчатого крыла сводится на первом этапе к определению усилий плоского напряженного состояния, обусловленного нагрузками q_1 и q_2 , и изгиба, вызываемого нагрузкой q_3 . При этом определяются также усилия в боковинах и поперечных планах. При малой толщине планов решетки и боковин для основной схемы крепления крыла с узлами в угловых точках панели (см. рис. 7.1, *а, б*) плоское напряженное состояние полностью определяется как безмоментное, причем изгибная жесткость боковины и поперечных окаймляющих планов принимается равной нулю. Для крыла, имеющего узлы крепления не в угловых точках, плоское напряженное состояние может быть определено как сумма безмоментного напряженного состояния, соответствующего основной схеме крепления панели, и моментного плоского напряженного состояния от самоуравновешенной нагрузки (см. рис. 7.1, *г*). При определении моментного плоского напряженного состояния изгибная жесткость поперечных окаймляющих планов и боковин так же, как и планов решетки, принимается конечной (шарнирная модель заменяется решеткой с жесткими узлами). Аналогичный подход к решению задачи определения напряженного состояния крыла имеет место и при изгибе его из своей плоскости.

За основную схему принимается схема с защемленными боковинами (рис. 7.2, *а*). В случае реализации крепления панели по схеме (см. рис. 7.1, *в*), необходимо добавить к основному напряженному состоянию напряженное состояние, обусловленное действием самоуравновешенной нагрузки (см. рис. 7.2, *б*).

Определив усилия в эквивалентной панели по формулам (5.25), находим нормальные усилия N_{ii}'' и изгибающие моменты M_{ii}'' , действующие в планах решетки (рис. 7.3, *а*). В случае моментного плоского напряженного состояния усилия N_{η} и M_{iv} вызывают изгиб планов в срединной плоскости крыла. При этом моменты в планах, обусловленные M_{iv} , определяются также по формулам (5.25), а на действие N_{η} элементарная ячейка рассчитывается как плоская рама (рис. 7.3, *б*).

Второй этап расчета решетки сводится к решению задачи местной устойчивости планов на длине t (см. разд. 7.4) при совместном действии сжимающего усилия и изгибающего момента в плос-

Рис. 7.2. Расчетная схема при изгибе крыла из своей плоскости:

a — основной вид нагружения;
б — нагружение со стороны корневой плоскости

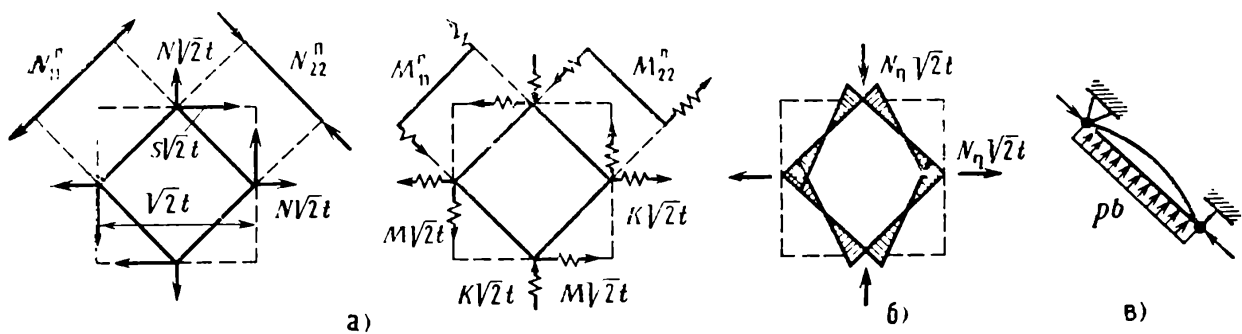
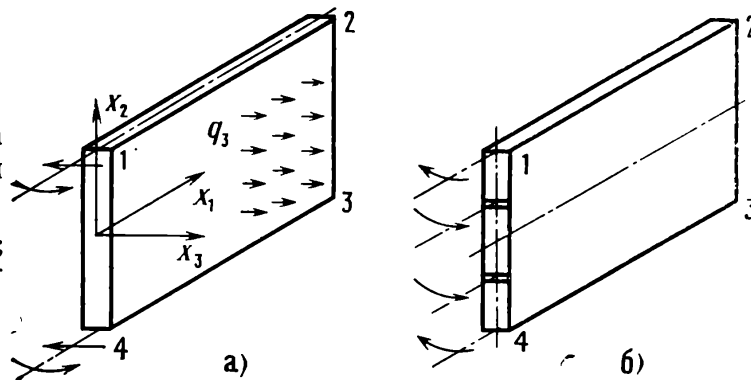


Рис. 7.3. Нагружение планов решетки:

a — усилиями N и S и моментами M и K ; *б* — нормальными усилиями N_η ; *в* — продольно-поперечный изгиб плана

кости плана. Боковины и поперечные окаймляющие планы также находятся в условиях продольно-поперечного изгиба.

Однако ввиду значительной толщины корневого поперечного плана и боковин для них, как правило, решающую роль играет расчет на прочность.

В указанной схеме расчета авторы исходили из предположения, что внешняя нагрузка приложена к узлам решетки. Фактически нагрузка действует по поверхности плана. Влияние местной распределенной нагрузки (например, давления p) в первом приближении можно учесть, рассмотрев нагружение плана, находящегося в условиях продольно-поперечного изгиба (см. рис. 7.3, в). Используя известные приближенные формулы [14], величину момента, действующего в плане, с учетом местной нагрузки можно определить следующим образом:

$$M'' = M_p'' - N'' \left(\frac{v_p}{1 - N''/N_{кр}''} + v_0 \right), \quad N'' = N_{ii}'', \quad i = 1, 2.$$

Здесь M_p'' , v_p — изгибающий момент и прогиб плана от поперечной нагрузки pb , $M_{iv}'', i=1,2$; v_0 — начальный прогиб плана; $N_{кр}''$ — критическая сила сжатия при потере устойчивости плана по двум полуволнам.

Помимо расчета планов на прочность и местную устойчивость в некоторых случаях может оказаться актуальным расчет на устойчивость плоской формы панели в целом (см. разд. 7.5).

В заключение отметим, что при анализе деформационно-жесткостных свойств реальных конструкций размеры сторон панели крыла l и H целесообразно измерять числом ячеек решетки: $n_\lambda = l/\sqrt{2}t$; $n_\gamma = H/\sqrt{2}t$, где n_λ , n_γ — числа ячеек, определяющие соответственно длину и высоту панели крыла (см. рис. 7.1, а). При этом параметр λ^* (см. разд. 6.2) также измеряется числом ячеек решетки: $n^* = H\lambda^*/\sqrt{2}t = \lambda^*n_\gamma$.

7.2. Расчет плоского напряженного состояния крыла

В данном разделе рассматривается плоское напряженное состояние решетчатого крыла применительно к двум наиболее характерным схемам крепления крыла. По первой схеме крепление осуществляется в угловых точках контура панели и в крыле возникает безмоментное плоское напряженное состояние. По второй схеме узлы крепления крыла располагаются в средней части корневого плана (см. рис. 7.1) и напряженное состояние крыла является моментным.

Ранее, в разд. 6.2, уже приводились эпюры усилий для эквивалентной панели, соответствующие безмоментному напряженному состоянию, при нагружении крыла нагрузкой q_2 . Ниже рассмотрим плоское напряженное состояние крыла в случае нагружения его нагрузкой q , произвольно ориентированной в плоскости x_1x_2 . Обозначим через $P = qHl$ равнодействующую этой нагрузки, наклоненную под углом θ к оси x_2 (рис. 7.4), имеем $q_2 = q \cos \theta$; $q_1 = q \sin \theta$. Выражения для усилий, рассматриваемых как частное решение уравнений (6.43), при условии нерастяжимости окаймляющих планов, имеют вид

$$N=0; S=qH[(\lambda-\xi_1)\cos\theta+\xi_2\sin\theta]. \quad (7.1)$$

Интегрируя второе уравнение (6.19) с учетом (7.1) и определяя постоянные интегрирования по величинам реакций в угловых точках панели, находим выражения для нормальных усилий в боковинах и поперечных планах. Например, для боковин имеем

$$Q_s = 0,5qH^2[(\lambda-\xi_1)^2\cos\theta \pm \gamma(\lambda-\xi_1)\sin\theta].$$

Здесь верхний знак относится к верхней боковине, нижний — к нижней. Эпюры усилий показаны на рис. 7.4. Максимальные значения усилий S и Q_s имеют место при $\xi_1=0$, $\xi_2=\pm 0,5\gamma$ и соответственно равны

$$S_{\max} = qH(\lambda \cos\theta \pm 0,5\gamma \sin\theta); (Q_s)_{\max} = 0,5qH^2(\lambda^2 \cos\theta \pm \lambda\gamma \sin\theta).$$

К усилиям, найденным при условии недеформируемости окаймляющих планов следует добавить усилия, обусловленные податливостью боковин и поперечных планов. Отметим, что необходимость учета этих усилий обуславливается, с одной стороны, вели-

Рис. 7.4. Общий случай нагружения крыла нагрузкой, действующей в плоскости x_1, x_2

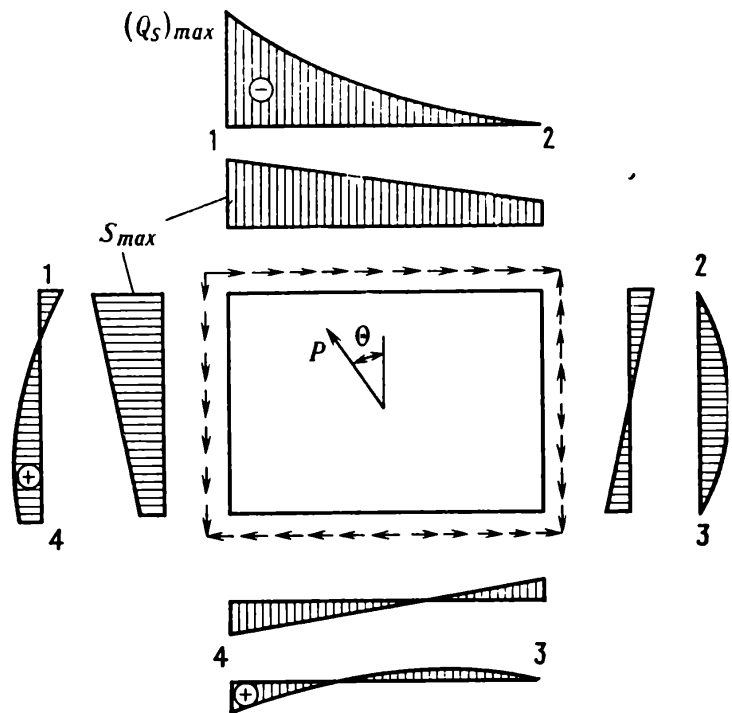
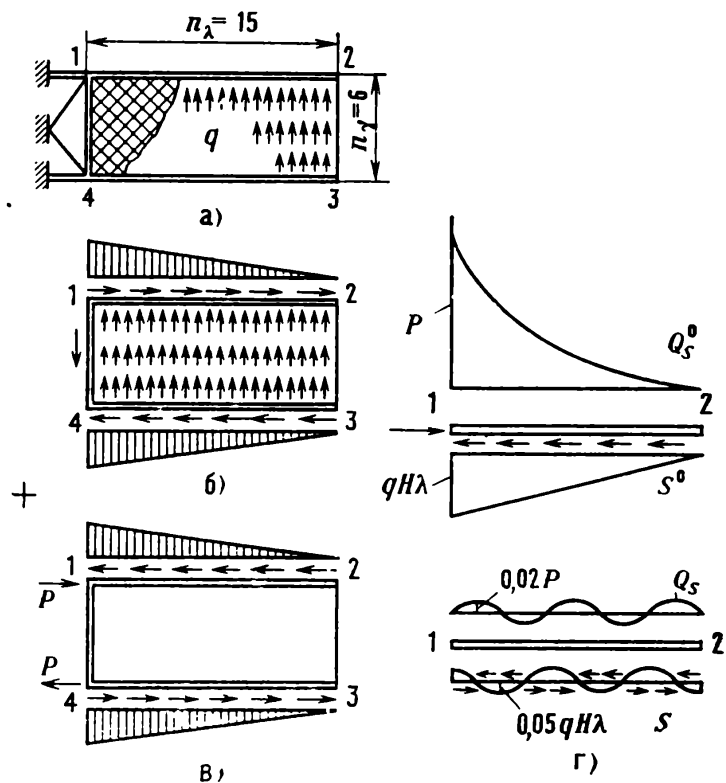


Рис. 7.5. Безмоментное плоское напряженное состояние крыла:

а — общий вид крыла; б — нагружение решетки планов; в — нагружение боковин; г — основные и дополнительные усилия в боковине и решетке



чиной относительной жесткости на растяжение окаймляющих планов, с другой стороны, величиной общего наибольшего делителя n^* чисел n_λ, n_γ , определяющих размеры сторон панели (см. рис. 7.1). Влияние дополнительных усилий тем меньше, чем жестче окаймление крыла и меньше величина n^* . Если $n^*=1$ дополнительные усилия отсутствуют. При этом растяжение, напри-

мер, боковины, под действием усилий, показанных на рис. 6.6, б, вызывает лишь дополнительную деформацию шарнирной решетки как механизма.

Рассмотрим пример расчета дополнительных усилий в крыле, нагруженном по схеме, приведенной на рис. 7.5, а. Так как в реальных конструкциях корневой план выполняется весьма жестким, а концевой план в данном случае не нагружен, определим дополнительные усилия исходя из условия деформации одних лишь боковин. Размеры крыла: $l=742$ мм ($n_\lambda=15$); $H=297$ мм ($n_\gamma=6$); $b=100$ мм; $c=0,6$ мм; $\bar{t}=0,35$; площадь сечения боковин $2,1$ см². Материал решетки и окаймляющих планов одинаковый. Напряженное состояние панели крыла представим как сумму двух напряженных состояний, показанных на рис. 7.5, б, в, где $P=0,5 qH^2\lambda^2$. Первое напряженное состояние ($S^0, N^0=0$) описывается частным решением второго уравнения (6.43). Усилия в решетке определяются по формулам (6.44), (5.25), боковины при этом не нагружаются. Второе напряженное состояние связано с деформацией боковин. Распределенная по линейному закону тангенциальная нагрузка и сосредоточенная сила вызывают деформацию боковины, а следовательно, дополнительные усилия в крыле. Решение соответствующей задачи при нагружении панели по одному краю было получено в разд. 6.2. В данном случае усилия, определяемые формулой (6.42), необходимо удвоить, так как деформации подвергаются как верхняя, так и нижняя боковины. Для рассматриваемого крыла $\lambda^*=0,5\gamma$ ($n^*=3$). Входящая в (6.42) величина μ , определяемая из (6.40), равна $\mu=163$. Удерживая в (6.42) два члена ряда, с учетом выбранного для осей ξ_1 начала координат (см. рис. 7.1, а) находим

$$\bar{S}=qH\lambda(0,062 \cos 2\pi\xi_1 \cos 2\pi\xi_2 - 0,0156 \cos 4\pi\xi_1 \cos 4\pi\xi_2);$$

$$\bar{N}=qH\lambda(0,062 \sin 2\pi\xi_1 \sin 2\pi\xi_2 - 0,0156 \sin 4\pi\xi_1 \sin 4\pi\xi_2).$$

Эпюры для \bar{S} , \bar{N} имеют тот же вид, что и на рис. 6.6, в. Нормальные усилия, действующие в боковинах, найдем, суммируя усилия Q_s^0 от нагрузки, распределенной по линейному закону, с усилиями \bar{Q}_s , обусловленными действием \bar{S} (см. рис. 7.5, г). Последние получаем, интегрируя \bar{S} ($\xi_1, \pm 0,5$) и учитывая, что постоянная интегрирования равна нулю:

$$\bar{Q}_s = \mp 0,5qH^2\lambda(0,0197 \sin 2\pi\xi_1 + 0,0025 \sin 4\pi\xi_1).$$

Верхний знак в данном выражении берется для верхней боковины, нижний — для нижней. На рис. 7.5, г показаны эпюры усилий для верхней боковины $S=S^0+\bar{S}$, $Q_s=Q_s^0+\bar{Q}_s$. Из этих эпюр видно, что дополнительные усилия \bar{Q}_s , \bar{S} в данном примере состав-

ляют величину порядка 2—6% максимальных значений усилий основного напряженного состояния и существенной роли не играют.

В качестве второго примера рассмотрим определение усилий, возникающих от поперечной нагрузки в крыле с узлами крепления, расположенными в средней части корневого плана (рис. 7.6). В этом случае напряженное состояние также представим как сумму напряженных состояний, вызываемых двумя видами нагрузок, показанных на рис. 7.6, а. Первый основной вид нагрузки был рассмотрен ранее. Определим дополнительные усилия, вызываемые вторым видом нагрузки: самоуравновешенными сосредоточенными силами, приложенными к краю панели.

Здесь возможны два варианта. В первом варианте нагрузка соответствует условиям (6.32). Величины усилий, возникающих в планах решетки, можно определить по формулам, приведенным в разд. 6.2, рассматривая решетку как безмоментную. При этом следует отметить, что ввиду относительно малой изгибной жесткости корневого плана силы P_1 практически полностью воспринимаются планами решетки, сходящимися в узлах 5, 6 (см. рис. 7.6, а), что требует значительного их усиления.

Во втором варианте нагружения, когда условия (6.32) не выполняются, в корневом плане и решетке возникает моментное

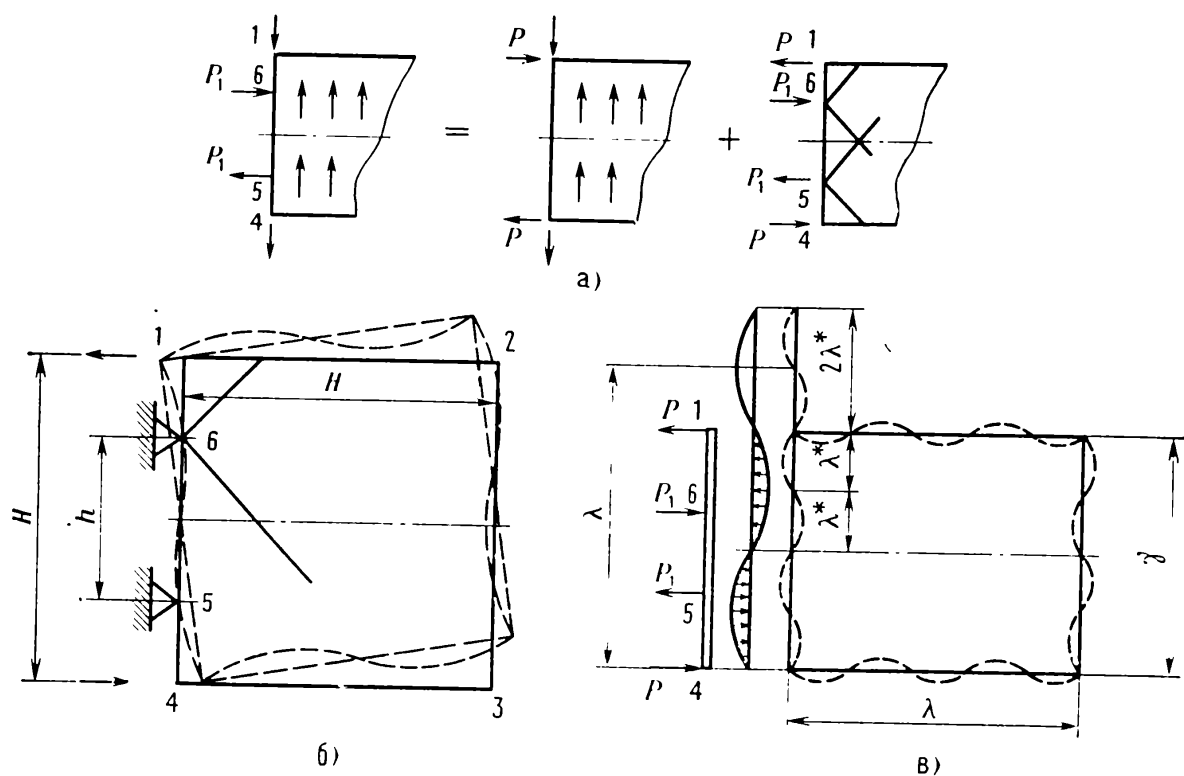


Рис. 7.6. Плоское моментно-напряженно-деформированное состояние крыла:

а — нагружение со стороны корневого плана; б — изгибная деформация крыла; в — к расчету усилий в крыле

напряженное состояние. В этом случае корневой план должен обладать достаточно большой жесткостью на изгиб.

Рассмотрим пример определения дополнительных усилий в панели с квадратным контуром при нагружении крыла поперечной нагрузкой (см. рис. 7.6, б). Размеры панели крыла следующие: $l=H=136$ мм; расстояние между узлами крепления $h=34$ мм; $b=12$ мм; $\bar{t}=0,5$; $c=0,1$ мм; толщина боковин — 2 мм; толщины корневого и концевого поперечных планов крыла — соответственно 5 и 0,1 мм; сечения планов прямоугольные. Материал решетки и окаймления одинаковый. В случае квадратного контура панели условия (6.32), очевидно, не выполняются. При этом силы $P_1=PH/h$ вызывают изгибную деформацию крыла. Как и ранее, принимаем, что планы нерастяжимы. Учитывая условия (6.25) и (6.26), а также то, что деформация крыла кососимметрична относительно оси $\xi_1=0$ (см. рис. 7.6, б), представим функцию перемещений $\bar{\varphi}^*=\bar{\varphi}^*$ (см. разд. 6.3) в форме тригонометрического ряда

$$\bar{\varphi}^*=\sum \bar{\varphi}_m^*=\sum a_m \sin 2m\pi\xi_1 \sin 2m\pi\xi_2. \quad (7.2)$$

Принимая $\Phi=\sum \Phi_m^*$ и подставляя (7.2) во второе уравнение (6.52), получаем уравнения для функций Φ_m^*

$$\frac{\partial^2 \Phi_m^*}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi_m^*}{\partial \xi_2^2} = -4m\pi\nu_m a_m \cos 2m\pi\xi_1 \cos 2m\pi\xi_2; \quad (7.3)$$

$$\nu_m = 4m\pi(1+8\eta^2 m^2 \pi^2) \zeta_1^2 E_s, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

Решение уравнений (7.3), учитывая симметрию напряженного состояния, представим в виде

$$\Phi_m^* = -\nu_m(a_m - c_m)\xi_1 \sin 2m\pi\xi_1 \cos 2m\pi\xi_2 + \nu_m c_m \xi_2 \cos 2m\pi\xi_1 \sin 2m\pi\xi_2 + b_m \sin 2m\pi\xi_1 \cos 2m\pi\xi_2.$$

Коэффициенты a_m , b_m , c_m определим из краевых условий (6.57). При малой толщине концевого плана для края $\xi_1=\lambda$ в выражении (6.57) положим $B_s=0$. Используя указанные условия на краях $\xi_1=\lambda$ и $\xi_2=\pm 0,5$, находим

$$b_m = \nu_m(a_m - c_m); \quad c_m = -\frac{2B_6}{H^3\nu_m} (2m\pi)^3 a_m. \quad (7.4)$$

Здесь $B_6=B_s$ — жесткость боковины на изгиб в срединной плоскости крыла. Условие (6.57) для края $\xi_1=0$, используя понятие дельта-функции $\delta(\xi)$ для выражения нагрузки, действующей на корневой план, можно записать в виде

$$\frac{B_k}{H^3} \frac{\partial^5 \bar{\varphi}^*}{\partial \xi_1 \partial^4 \xi} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = P_1 [\delta(\xi_2 - 0,25) - \delta(\xi_2 + 0,25)], \quad (7.5)$$

где B_k — жесткость на изгиб корневого плана. Раскладывая пра-

вую часть уравнения (7.5) в ряд по синусам в интервале — $0,5 < \xi_2 < 0,5$ и подставляя соответствующие выражения для Φ^* и $\bar{\Phi}^*$, получаем

$$(2m\pi)^5 \frac{B_k}{H^3} c_m + (2m\pi)^2 b_m \begin{cases} 0, & m=2, 4, 6... \\ (-1)^{\frac{m+3}{2}} 2P_1, & m=1, 3, 5... \end{cases} \quad (7.6)$$

Используя (7.4) и (7.6), окончательно находим

$$a_m = \frac{P_1 H^3}{4m^3 \pi^3} \frac{(-1)^{\frac{m+3}{2}}}{\xi_1^2 E_3 H^3 + 4m^2 \pi^2 B}; \quad c_m = -\frac{4m^2 \pi^2 a_m}{8m^2 \pi^2 \eta + 1} \frac{2B_6}{H^3 \xi_1^2 E_3},$$

$$m=1, 3, 5...;$$

$$b_m = (-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{P_1}{2m^2 \pi^2} \left(1 - \frac{4m^2 \pi^2 B_k}{H^3 \xi_1^2 E_3 + 4m^2 \pi^2 B} \right); \quad B = B_k + 2B_6 +$$

$$+ 2H^3 \eta^2 \xi_1^2 E_3.$$

Таким образом, функции $\bar{\Phi}^*$ и Φ^* полностью определимы. Используя эти функции, по формулам, приведенным в разд. 6.3, нетрудно определить все усилия и деформацию крыла. Ниже приводится выражение для нормального усилия N_{11} , действующего в стыковом сечении решетки с корневым планом:

$$N_{11} = -\frac{P_1}{H} \left\{ \frac{2B_6 + 2\eta^2 \xi_1^2 E_3 H^3}{B} [\delta(\xi_2 - 0,25) - \delta(\xi_2 + 0,25)] + \right.$$

$$\left. + \sum (-1)^{n+1} \frac{2\xi_1^2 E_3 H^3}{\xi_1^2 E_3 H^3 + 4\pi^2 (2n-1)^2 B} \sin 2\pi (2n-1) \xi_2 \right\}. \quad (7.7)$$

Для рассматриваемого примера $H^3 \xi_1^2 E_3 = 0,139 \cdot 10^{-1} E$, $2\eta^2 = 0,162 \cdot 10^{-3}$, $B_6 = 0,8 \cdot 10^{-3} E$, $B_k = 0,125 \cdot 10^{-1} E$, $B = 0,141 \cdot 10^{-1} E$. При этом из (7.7) получаем

$$N_{11} = -\frac{P}{H} \{ 0,226 [\delta(\xi_2 - 0,25) - \delta(\xi_2 + 0,25)] + 0,098 \sin 2\pi \xi_2 -$$

$$- 0,011 \sin 6\pi \xi_2 + \dots \}. \quad (7.8)$$

Используя это выражение, находим приближенные значения для нормальных усилий в планах, сходящихся в узле 6 (см. рис. 7.6, б):

$$N_{ii}^n \approx Nt + (-1)^{i+1} St = [-1,92 + (-1)^{i+1}] qtH\lambda.$$

Отсюда видно, что для данного примера нормальные усилия в наиболее нагруженных планах с учетом податливости корневого

плана получаются в три раза выше усилий, найденных при условии отсутствия изгибной деформации корневого плана. На рис. 7.6, б пунктиром показана изгибная деформация крыла при условии, что точки 5 и 6 закреплены. В случае необходимости, используя формулы, приведенные в разд. 6.3, можно найти моменты, действующие в планах решетки, боковинах и корневом плане.

Отметим, что алгоритм расчета дополнительных усилий, обусловленных изгибом корневого плана, изложенный на примере квадратной панели, легко распространяется на панель с произвольным соотношением сторон и расположением узлов крепления. Например, если n^* — общий делитель n_x , n_y , то, раскладывая функцию Φ^* в ряд по синусам с периодом $4\lambda^* = 4\sqrt{2} \frac{t}{H} n^*$, выделим из этого ряда четную и нечетную части относительно $\xi = \lambda^*$ (см. рис. 7.6, в). Четная часть ряда определяет напряженное состояние, не сопровождающееся изгибом решетки. Нечетная часть ряда соответствует напряженному состоянию, приведенному в примере для квадратной панели.

7.3. Расчет решетчатого крыла на изгиб из своей плоскости

Настоящий раздел посвящен реализации приведенного в разд. 6.6 алгоритма решения задачи об изгибе полипланной панели при расчете усилий для конкретных схем решетчатых крыльев. Используя выражение (5.53) и (6.86), формулы для изгибающего M и крутящего $K = M_x$ моментов эквивалентной панели можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{M} = a_1 & \left\{ 8a_2 + 0,25\pi(\lambda - \xi_1)^2 + 2\pi A_1^* \frac{x_1^2 - \pi^2}{1 + 2\psi_1} e^{-x_1 \xi_1} + 2\pi A_2^* \frac{x_2^2 - \pi^2}{1 + 2\psi_1} e^{-x_2 \xi_1} - \right. \\ & - \left[\frac{4}{\pi} (2\bar{\psi} + 2\psi_1 - 1) + 2\pi(\lambda - \xi_1) + \pi^2(x_1^2 - \pi^2) A_1^* e^{-x_1 \xi_1} + \right. \\ & \quad \left. + \pi^2(x_2^2 - \pi^2) A_2^* e^{-x_2 \xi_1} \right] \cos \pi \xi_2; \\ \bar{K} = -\frac{4a_1}{\pi} & \left(\xi_1 - \lambda + \frac{\pi^3}{4} x_1 A_1^* e^{-x_1 \xi_1} + \frac{\pi^3}{4} x_2 A_2^* e^{-x_2 \xi_1} \right) \sin \pi \xi_2. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{M} = M/qH^2$; $\bar{K} = K/qH^2$ — относительные величины моментов. Коэффициенты a_1 , a_2 , A_1^* , $\bar{\psi}$ вычисляются по формулам (6.80), (6.81), (6.85), (6.87). Изгибающий момент в боковинах L_n при принятой форме для прогиба (6.69) определяется выражением

$$L_n = \psi_1 q H^2 \bar{M}(\xi_1 \pm 0,5\gamma).$$

Таким образом, для усилий получены расчетные формулы, зависящие от геометрических и жесткостных параметров крыла. При этом аналитической зависимости для коэффициента A_1^* не най-

Рис. 7.7. Определение параметра A_1^* для крыла с узлами крепления в углах панели

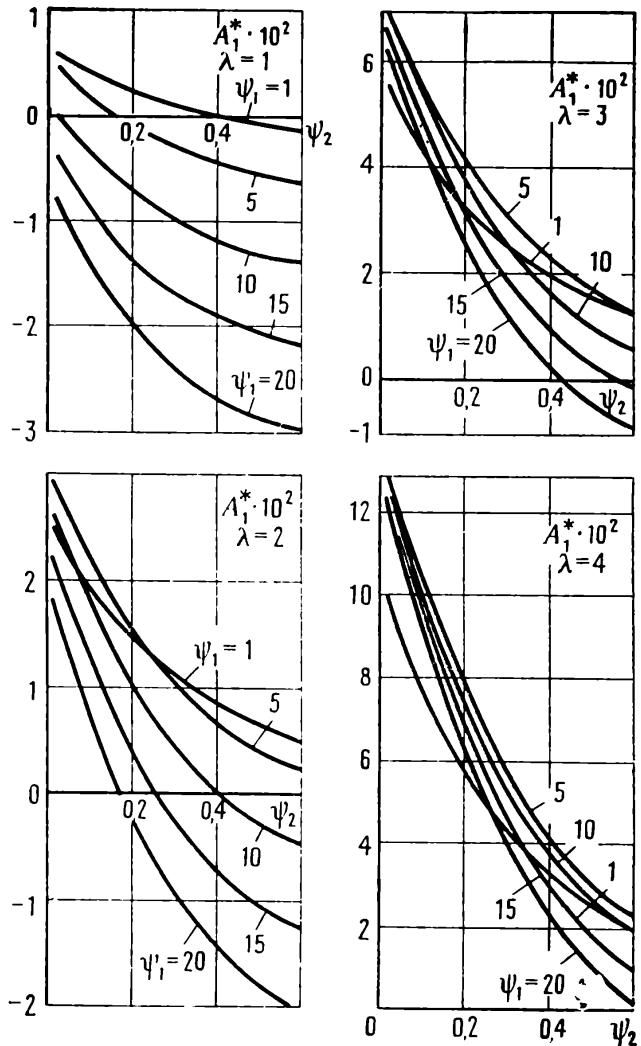
дено. Величина коэффициента A_1^* определялась численным решением уравнения (6.89). Для крыла с узлами крепления в угловых точках панели на рис. 7.7 приведены графики значений A_1^* как функции параметров жесткости окаймляющих планов $\psi_1, \psi_2 = \psi_0$ при различных удлинениях крыла λ . Полученные значения коэффициентов позволяют построить эпюры усилий в широком диапазоне изменения жесткостей крыла. Как указывалось, выражения (7.8) дают правильный результат в районе корня крыла. Чтобы получить удовлетворительную аппроксимацию эпюр усилий для всего крыла, необходимо учесть отброшенные ранее два последних члена в выражении (6.84) и добавить к полученному решению корректирующую часть $\Delta F(\xi_1)$, затухающую с удалением от свободного конца. Так как показатели степеней χ_i в рассматриваемом диапазоне изменения жесткостей крыла, как правило, больше единицы, что свидетельствует о достаточно быстром затухании самоуравновешенного напряженного состояния крыла с удалением от края, представляется возможным функцию ΔF записать в форме

$$\Delta F = A_3^* e^{-\chi_1(\lambda - \xi_1)} + A_4^* e^{-\chi_2(\lambda - \xi_1)}.$$

Постоянные A_3^*, A_4^* могут быть найдены из условий деформации концевого плана. В случае малой толщины можно принять, что план абсолютно податлив при кручении. В качестве второго условия примем, что план является абсолютно жестким на изгиб в своей плоскости.

Таким образом, имеем

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} \right)_{\xi_1 = \lambda} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} \right)_{\xi_1 = \lambda} = 0. \quad (7.9)$$



Используя (7.9), находим

$$A_3^* = -A_4^* = \frac{1+2\psi_1}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2} \left[\frac{2}{\pi^2} + \frac{8(1+\psi_2)}{\pi^2(1+2\psi_1)-8} \right].$$

Подстановка ΔF в (6.82) с учетом (6.75) позволяет скорректировать выражения для прогиба (6.86) и усилий (7.8).

В качестве примера на рис. 7.8 приведены эпюры распределения моментов M и K для панели с параметрами $\psi_1=5$; $\psi_0=\psi_2=0,4$; $\lambda=2$. Штрихпунктирной линией на рис. 7.8 показан участок эпюры M у свободного края панели без учета ΔF . На эпюры M и K в корневой и центральной частях панели приращение ΔF практически никакого влияния не оказывает. Как видно из эпюр, наиболее опасными точками для решетки являются угловые точки у корня панели. Последнее имеет место во всех тех случаях, когда $\psi_1 > 1$, $\lambda > 1$, а $\psi_0=\psi_2$ не очень велико. В угловых точках у корня панели изгибающие моменты, действующие в плоскостях планов и определяемые в соответствии с (5.25) по формуле

$$M'' = [|M(0; 0,5)| + |K(0; 0,5)|] t,$$

достигают максимальной величины.

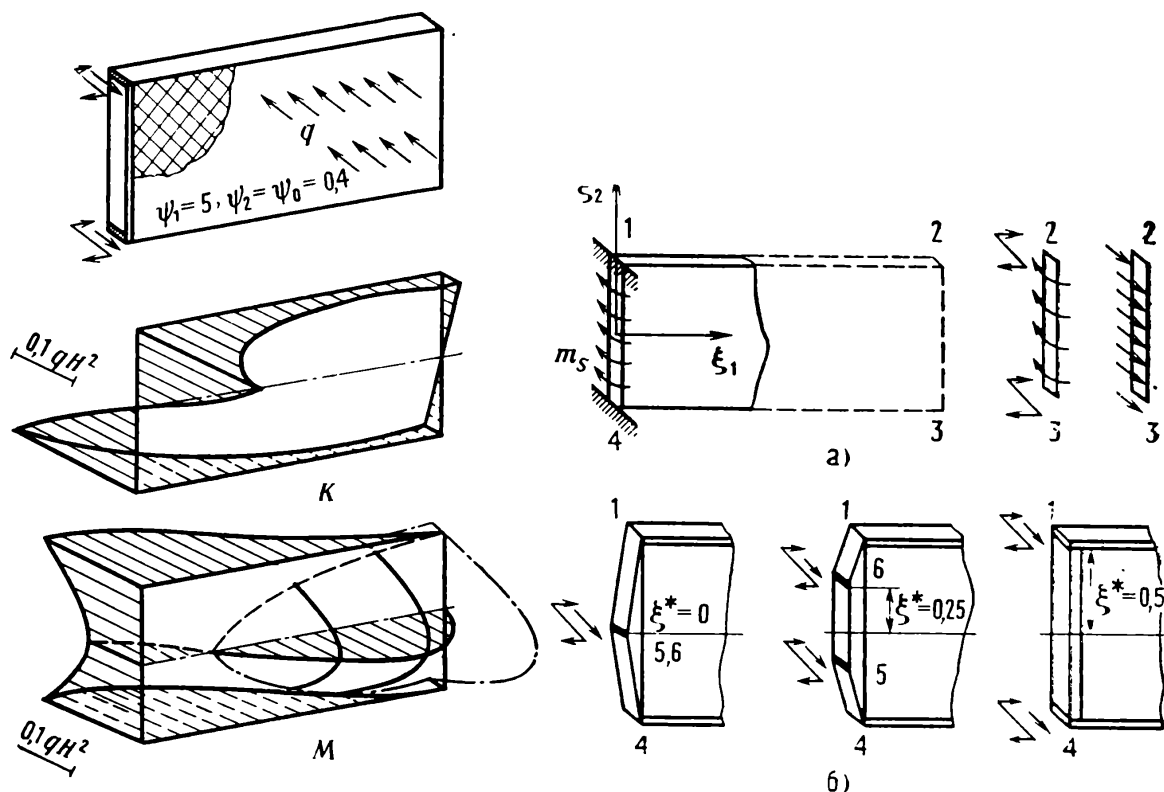


Рис. 7.8. Эпюры моментов K и M для крыла с узлами крепления в угловых точках панели

Рис. 7.9. Нагружение поперечных планов крыла при изгибе:

a — схемы нагружения при определении краевых условий; *b* — варианты расположения узлов крепления крыла

Выше был рассмотрен изгиб панели из своей плоскости при условии прикрепления ее в угловых точках. На практике может представить интерес случай, когда крыло прикрепляется к объекту в средних точках корневого плана. Рассмотрим случай прикрепления панели в точках $\xi_2 = \xi^* = 0; \pm 0,25; \pm 0,5$ (рис. 7.9, б). Полагая, что корневым план имеет переменное сечение, примем следующее приближенное выражение для крутильной жесткости $\psi_0(\xi_2)$ этого плана на различных его участках:

$$\begin{aligned}\psi_0(\xi_2) &= \psi_0 = \text{const}, \quad 0 \leq |\xi_2| \leq \xi^*; \\ \psi_0(\xi_2) &= \psi_0 \left(\frac{0,5 - \xi_2}{0,5 - \xi^*} \right)^3, \quad \xi^* \leq |\xi_2| \leq 0,5.\end{aligned}\tag{7.10}$$

Здесь ψ_0 — параметр, характеризующий относительную жесткость корневого плана на кручение (6.89).

При нахождении коэффициента A_1^* в данном случае использовалось условие (6.89), в котором функция $\psi_0(\xi_2)$ определялась формулами (7.10), а распределенный момент $m_s(\xi_2)$ — выражением

$$m_s(\xi_2) = \frac{qH^{2\lambda}}{4} \delta(\xi_2 - \xi^*), \quad 0 \leq \xi_2 \leq 0,5,$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция.

Значения коэффициента A_1^* , подсчитанные для различных соотношений жесткостей и удлинений панели, приведены на рис. 7.10. С увеличением ψ_0 кривые асимптотически приближаются к значениям, соответствующим условию жесткого защемления панели по всему корневному сечению. На рис. 7.11 в качестве примера даны эпюры усилий M и K для панели с параметрами: $\xi^* = 0,25$; $\lambda = 2$; $\psi_1 = 5$; $\psi_2 = 0,4$; $\psi_0 = 10$. Как видно из этих эпюр, крутящий момент K на отдельных участках панели имеет различные знаки, причем в районе корня знак крутящего момента, обратный знаку, полученному в примере, приведенном на рис. 7.8. Эпюра изгибающих моментов M также отличается от соответствующей эпюры, показанной на рис. 7.8. Максимальный момент в данном случае имеет место в центре корневой части панели. Очевидно, что при $\xi^* = 0,5$, $\psi_2 = \psi_0$ данный пример сводится к предыдущему.

7.4. Местная устойчивость плана

Для решетчатого крыла, представляющего собой тонкостенную конструкцию, одним из основных видов расчета, в значительной степени определяющим несущую способность системы, является расчет на устойчивость. Частичная или общая потеря устойчивости панели сопровождается большими деформациями и обычно предшествует полному разрушению конструкции. Следует различать два вида потери устойчивости: местную и общую. При

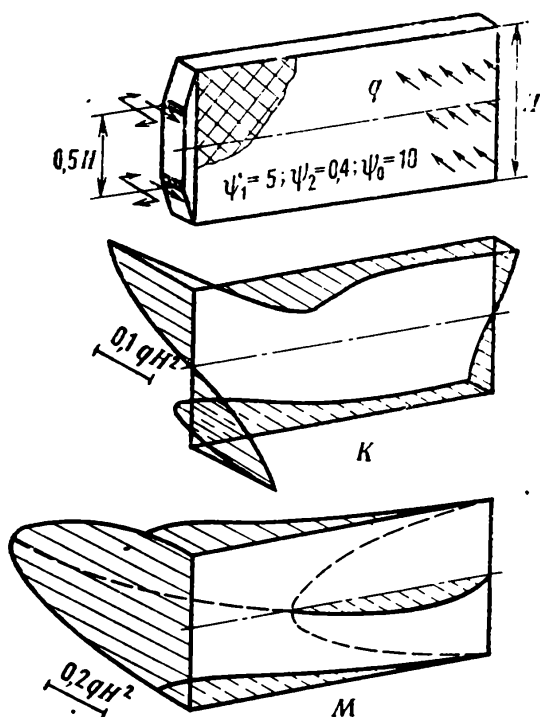
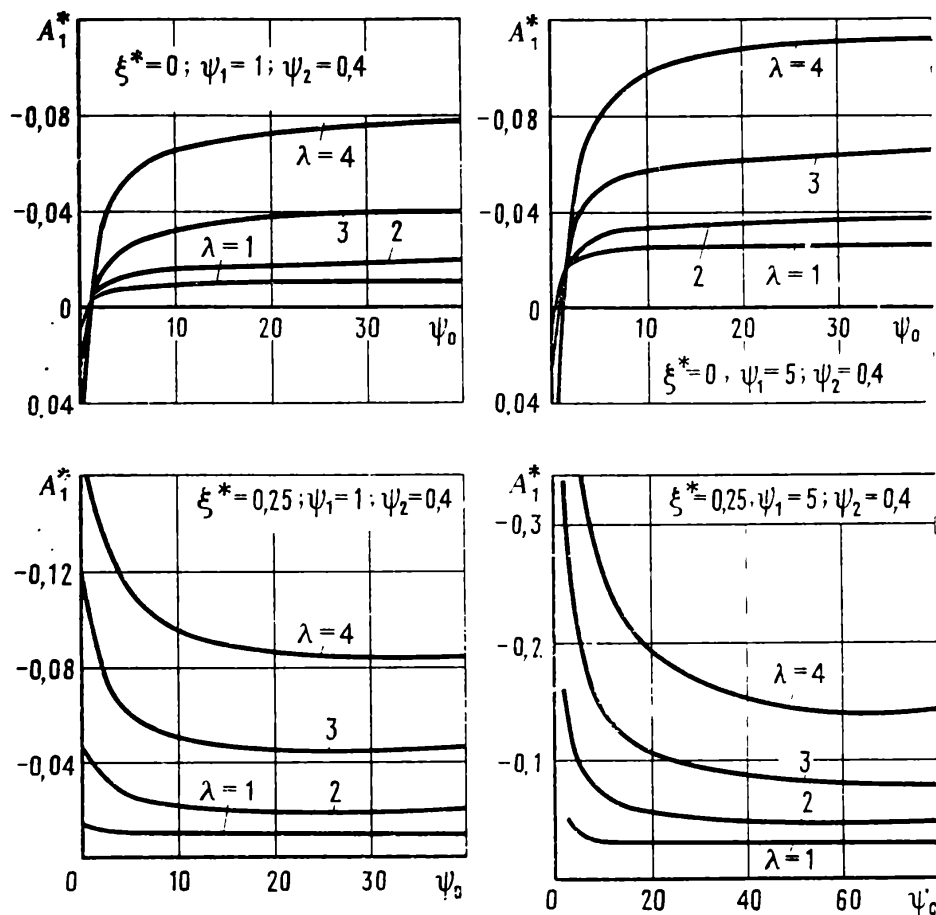


Рис. 7.10. Определение параметра A_1^* для крыла с узлами крепления в средней части корневой части

Рис. 7.11. Эпюры моментов K и M для крыла с узлами крепления в средней части корневой части

местной потере устойчивости выпучивание элементов конструкции — планов или боковин — происходит между узлами решетки. Сами узлы при этом перемещаются незначительно. Общая потеря устойчивости характерна большими изгибными деформациями панели в целом.

Рассмотрим местную устойчивость плана. В случае достаточно густой решетки в первом приближении можно принять, что сдвигающие усилия S экви-

валентной панели в некоторой локальной области нагружают планы решетки равными по модулю сжимающими и растягивающими усилиями N^p . При этом наиболее вероятная форма потери устойчивости имеет вид, показанный на рис. 7.12. Для сжатого и растянутого планов при наличии по краям моментов M_0 ,

обусловленных жесткостью узлов решетки, имеют место дифференциальные уравнения продольно-поперечного изгиба:

$$(-1)^{i+1} \frac{d^2 \tilde{v}_i}{d \tilde{x}_i^2} + k^2 \tilde{v}_i = \frac{M_0}{2EI}; \quad k^2 = \frac{N''}{EI}. \quad (7.11)$$

Здесь \tilde{v}_i — местные прогибы планов на участке между узлами решетки; EI — жесткость планов на изгиб из своей плоскости.

Представляя решения уравнений (7.11) в форме тригонометрических и гиперболических функций и используя условие равенства углов поворота сечений планов в узлах решетки, для определения величины k получаем уравнение $\operatorname{tg} 0,5kt = -\operatorname{th} 0,5kt$, наименьшим ненулевым корнем которого является величина $k = 3\pi/2t$.

Таким образом, из условия местной устойчивости планов решетки критическое значение сжимающих усилий определяется формулой

$$N_{\text{кр}}'' = \frac{9\pi^2 EI}{4t^2}.$$

Отсюда видно, что приведенная длина при учете поддерживающего влияния растянутых планов составляет величину $0,666t$ в отличие от шарнирной модели решетки, где она равна t . При расчете на местную устойчивость боковин и поперечных планов в качестве приведенной длины следует брать величину $\sqrt{2}t$.

Приведенная схема расчета на устойчивость не учитывает наличия лобовой силы. Последняя, однако, может играть существенную роль. Ниже дается приближенный способ расчета плана решетки на местную устойчивость с учетом совместного действия сил X_2 и X_3 . Принимая линейное распре-

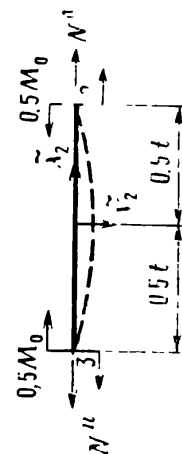
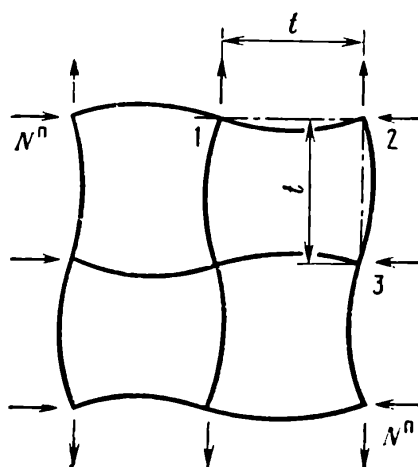
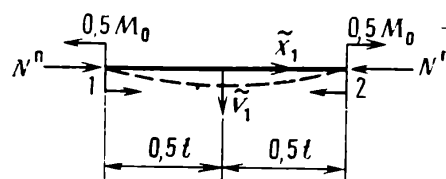
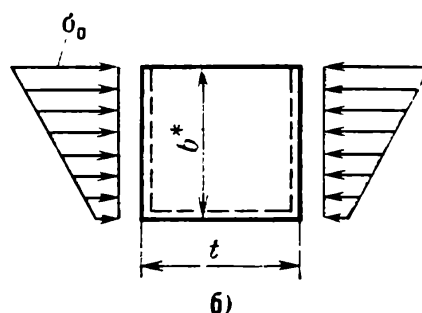
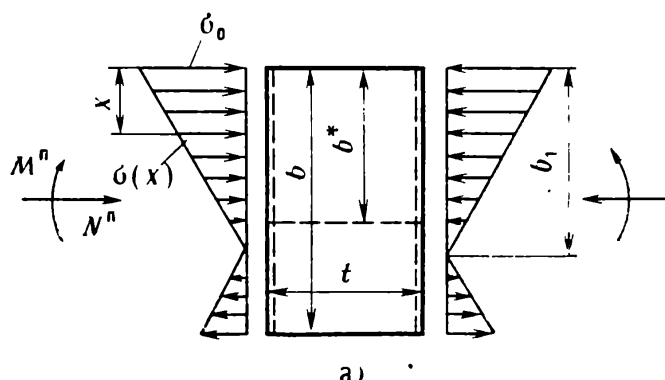


Рис. 7.12. Местная потеря устойчивости решетки планов

Рис. 7.13. Расчет изолированного плана на устойчивость:

a — нагружение плана; b — расчетная схема



деление напряжений по хорде плана прямоугольного сечения (рис. 7.13, а) без учета податливости боковин имеем

$$\sigma_x = \left(\frac{X_2 t}{H c b} + \frac{6 M''}{c b^2} \right) \left(\frac{x}{b_1} - 1 \right),$$

где c — толщина плана; b_1 — координата, определяющая положение нейтральной линии; M'' — изгибающий момент в плоскости плана. Величина b_1 определяется в зависимости от соотношения величин напряжений равномерного сжатия и изгиба. Ограничиваясь рассмотрением густых решеток ($\bar{t} \leq 1$), примем, что при расчетных значениях нагрузок X_2 и X_3 выполняется условие $b_1 < b$. В этом случае можно предположить, что местная потеря устойчивости плана реализуется по схеме, близкой к схеме, шарнирно опертой по трем сторонам пластинки, один край которой свободен. Для такой пластинки со сторонами t и b^* , погруженной сжимающими напряжениями, распределенными по линейному закону (см. рис. 7.13, б), известны формулы, определяющие критические значения нагрузки [33]. Для материала с коэффициентом Пуассона 0,3 критическая величина максимального напряжения

$$(\sigma_0)_{\text{кр}} = 0,9E \left(\frac{c}{t} \right)^2 \left[1 + 0,426 \left(\frac{t}{b^*} \right)^2 - \frac{0,143}{4 + \left(\frac{t}{b^*} \right)^2} \frac{t}{b^*} \right] \frac{1}{1 - 0,75 \frac{t}{b_1} \frac{b^*}{t}}. \quad (7.12)$$

Для того чтобы воспользоваться выражением (7.12), необходимо прежде найти b^* , т. е. определить тот участок плана, который находится в условиях шарнирно опертой по трем сторонам пластинки. Эту величину найдем, минимизируя выражение (7.12) по параметру b^*/t . В результате можно получить зависимость, связывающую b^*/t с параметром

$$\nu = \frac{1,5}{1 + \frac{b}{6H} \frac{t X_2}{M''}}.$$

Не приводя подробных выкладок, запишем полученное на основании (7.12) окончательное выражение для критического значения нагрузки X_2 с учетом действия силы X_3 :

$$(X_2)_{\text{кр}} = N''_{\text{кр}} \frac{H}{t} = k(\bar{t}, \nu) \frac{9\pi^2 EI}{4t^2} \frac{H}{t}. \quad (7.13)$$

Здесь $k(\bar{t}, \nu)$ — коэффициент, учитывающий действие лобовой силы и определяемый по графику (рис. 7.14).

Формулы, подобные (7.13), нетрудно получить и при других сочетаниях нагрузок, действующих на крыло.

Рис. 7.14. Определение коэффициента $k(t, \nu)$

7.5. Расчет крыла на общую устойчивость

Помимо расчета на местную устойчивость при определенных соотношениях геометрических параметров и нагрузки для решетчатого крыла может оказаться актуальным расчет на общую устойчивость. При этом можно наблюдать потерю устойчивости полипланной панели как в своей плоскости, так и из своей плоскости. Первый вид потери устойчивости происходит по формам, допускаемым нерастяжимой шарнирной моделью решетки (см. рис. 6.1, а). Этот вид тем более опасен, чем больше величина n^* — наибольшего делителя чисел n_y и n_z , определяющих соответственно высоту и длину панели (см. рис. 7.1, а). Задача определения критических значений нагрузки для этих форм потери устойчивости может решаться совместно с задачей о колебаниях решетки в своей плоскости. При этом критическое значение нагрузки находится по формулам, приведенным в раз. 6.5, если в этих формулах частоту колебаний принять равной нулю.

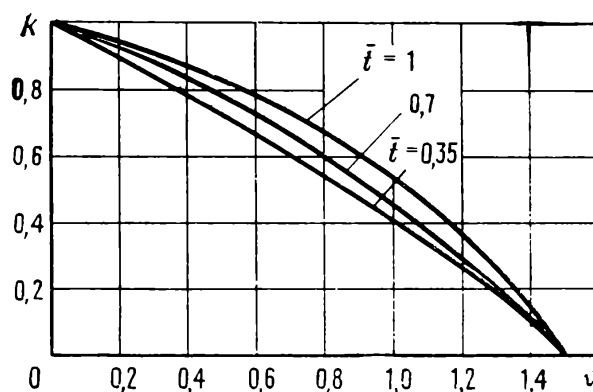
Второй вид общей потери устойчивости — это потеря устойчивости плоской формы (см. рис. 5.15), связанная с изгибной деформацией панели из своей плоскости, которая может иметь место при нагружении крыла нагрузкой $X_2 = qHl$. В первом приближении задачу определения критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости плоской формы панели, можно решать, используя известные формулы, приведенные, например, в работе [13].

Принимая допущение о недеформируемости поперечных сечений крыла $\xi_1 = \text{const}$, дифференциальные уравнения устойчивости плоской формы изгиба в случае, когда равнодействующая нагрузки проходит через центр жесткости сечения, запишем в виде

$$EJ_{\Pi} w^{IV} + H^2 [0,5qH^3 (\lambda - \xi_1)^2 \theta]'' = 0;$$

$$EJ_{\omega} \theta^{IV} - H^2 GJ_K \theta'' + 0,5qH^5 (\lambda - \xi_1)^2 w'' = 0.$$

Здесь θ — угол поворота поперечного сечения панели в плоскости x_2, x_3 (см. рис. 5.15); EJ_{Π} — жесткость панели на изгиб в той же плоскости; GJ_K — жесткость свободного кручения панели; EJ_{ω} — жесткость стесненного кручения панели. Аппроксимируя функции $w(\xi_1)$ и $\theta(\xi_1)$ полиномами, удовлетворяющими условиям на защемленном и свободном концах консоли, приходим к характеристическому уравнению однородной краевой задачи, корни которого оп-



ределяют критическое значение нагрузки:

$$q = \frac{z}{l^3 H} \sqrt{GJ_K EJ_n}, \quad z = 12 \sqrt{1 + 2,8 \frac{EJ_\omega}{l^2 GJ_K}}. \quad (7.14)$$

Ниже приведем приближенные выражения для жесткостей, входящих в формулы (7.14). Полагая, что суммарный крутящий момент $M_{кр}$, действующий в поперечных сечениях панели, зависит в основном от величины крутящего момента решетки K , для определения GJ_K имеем

$$M_{кр} = H \int_{-0,5}^{0,5} K d\xi_2 = GJ_K \frac{d\theta}{H d\xi_1}, \quad GJ_K = n_\gamma EJ.$$

При определении изгибной жесткости и жесткости стесненного кручения панели [41] учтем только изгибную жесткость боковин, пренебрегая жесткостью решетки, т. е. примем $EJ_n = 2EJ_6$, $EJ_\omega = 0,5 H^2 EJ_6$, где $EJ_6 = D_s$ — жесткость боковины на изгиб в своей плоскости. Таким образом, в качестве формул для прикидочного расчета критического значения нагрузки X_2 из условия устойчивости плоской формы изгиба крыла имеем

$$(X_2)_{кр} = 12 \frac{\sqrt{2EJ_6}}{\lambda l^2} \sqrt{\lambda^2 EJ n_\gamma + 1,4 EJ_6}.$$

7.6. Расчет усилий в цилиндрическом решетчатом крыле

Отличительной чертой рассмотренных выше схем решетчатых крыльев является то, что линии пересечения планов ориентированы нормально к срединной плоскости крыла $x_1 x_2$, причем ячейки решетки образуют прямоугольные параллелепипеды. Такие крылья будем называть крыльями с прямоугольной решеткой. Помимо указанных типов крыльев на практике встречаются такие, у которых решетка состоит из косоугольных ячеек — крылья с косоугольной решеткой. Среди решетчатых крыльев с косоугольной решеткой различают плоские и цилиндрические. Плоское крыло с косоугольной решеткой представляет собой полипланную панель, срединная плоскость $y_1 y_2$ которой наклонена под некоторым углом χ к лобовой плоскости $x_1 x_2$ (рис. 7.15, а). Цилиндрическое решетчатое крыло может быть представлено как система взаимоортогональных пересекающихся планов, нормальных лобовой плоскости крыла, ограниченных в направлении оси x_3 двумя цилиндрическими поверхностями радиуса R , отстоящими друг от друга на расстоянии, равном хорде b (см. рис. 7.15, б). Как и ранее, предполагается, что оси планов наклонены под углом $\pi/4$ к окаймленным краям крыла.

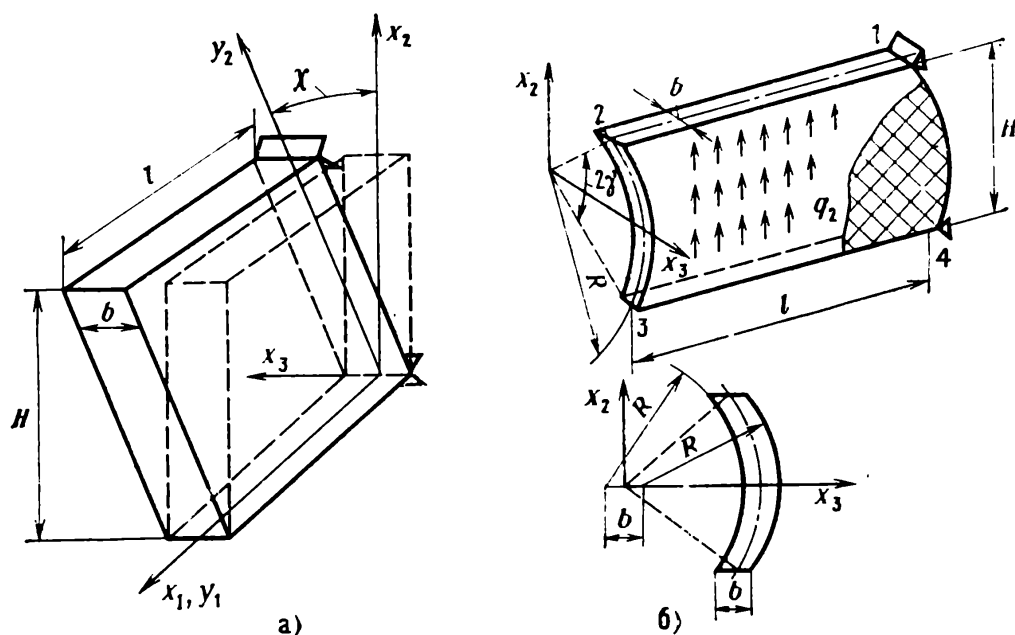


Рис. 7.15. Крыло с косоугольной решеткой планов:

а — плоская косоугольная решетка; б — цилиндрическое решетчатое крыло

Вывод уравнений, описывающих напряженное состояние крыла с косой решеткой, базируется на использовании основных положений безмоментной теории плоской полипланной панели (см. разд. 6.2), согласно которой планы имеют конечную жесткость на растяжение и изгиб в своей плоскости и абсолютно податливы при кручении и изгибе из своей плоскости. Расчетной моделью такого крыла может служить решетка с шарнирами в точках пересечения осей планов. Рассмотрим равновесие вырезанного сечениями $x_i = \text{const}$ ($i=1, 2$) элемента полипланной косоугольной панели, размеры которого совпадают с размерами элементарной ячейки решетки. В качестве усилий эквивалентной панели примем компоненты разложения по осям x_k ($k=1, 2, 3$) главного вектора и главного момента, действующих в сечениях $x_i = \text{const}$. Обозначения для усилий и нагрузок примем такими, какими они показаны на рис. 7.16, а. С учетом парности для сдвигающих усилий $N_{12} = N_{21} = S$, которое следует из условия равновесия моментов относительно оси x_3 , условия равновесия проекций на оси x_k приводят к уравнениям

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = -q_1; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = -q_2; \quad \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = q_3. \quad (7.15)$$

Рассмотрим далее равновесие проекций на плоскость $y_1 y_2$ всех сил, приложенных к узлам 1 и 2 решетки (см. рис. 7.16, б). Из условий эквивалентности усилий, действующих в панели, усилиям, действующим в сечениях планов, находим

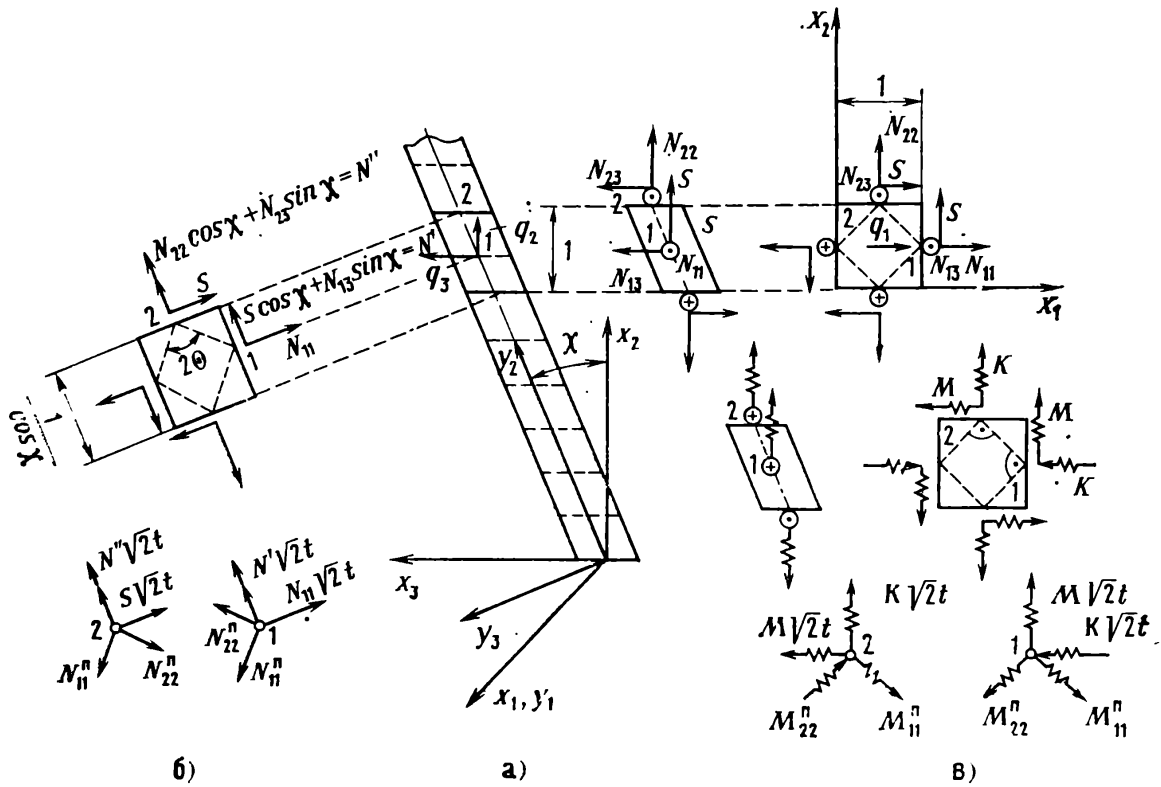


Рис. 7.16. Условия равновесия шарнирной решетки:
 а — равновесие элементарной ячейки; б, в — равновесие узлов

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}t(N_{22} \cos \chi - N_{23} \sin \chi) &= (N_{11}'' + N_{22}'') \cos \theta; \\
 \sqrt{2}tS &= (N_{11}'' - N_{22}'') \sin \theta; \\
 \sqrt{2}t(S \cos \chi - N_{13} \sin \chi) &= (N_{22}'' - N_{11}'') \cos \theta; \\
 \sqrt{2}tN_{11} &= (N_{11}'' + N_{22}'') \sin \theta; \\
 \sin \theta \sqrt{1 + \cos^2 \chi} &= \cos \chi.
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Из (7.16), исключая N_{ii}'' , получаем для усилий эквивалентной панели дополнительно к (7.15) еще два уравнения

$$N_{11} - N_{22} \cos^2 \chi - N_{23} \sin \chi \cos \chi = 0; \quad \sin \chi (S \sin \chi - N_{13} \cos \chi) = 0, \tag{7.17}$$

а также выражение, определяющее усилия в планах,

$$N_{ii}'' = \frac{t}{\sqrt{2} \sin \theta} [N_{11} + (-1)^{i+1} S]. \tag{7.18}$$

Условия равновесия моментов, действующих на узлы 1, 2 (см. рис. 7.16, в) дают: $M_{11} = M_{22} = M$; $M_{12} = M_{21} = K$. При этом уравнения

равновесия моментов относительно осей x_i для элемента эквивалентной панели имеют вид

$$\frac{\partial M}{\partial x_2} + \frac{\partial K}{\partial x_1} - N_{23} + N_{22} \sin \chi = 0; \quad \frac{\partial M}{\partial x_1} + \frac{\partial K}{\partial x_2} - N_{13} + S \sin \chi = 0. \quad (7.19)$$

Моменты M_{ii} , действующие в сечениях планов косоугольной решетки, определяются по тем же формулам (5.25), что и в случае прямоугольной решетки.

Таким образом, получаем семь уравнений (7.15), (7.17) и (7.19), содержащих семь неизвестных функций усилий. Интегрирование этих уравнений при заданных условиях на краях позволяет решать задачу определения напряженного состояния крыла.

Выведенные выше уравнения для плоской косоугольной панели полностью справедливы также и для цилиндрического решетчатого крыла. При этом следует иметь в виду, что входящие в уравнения $\sin \chi$, $\cos \chi$ являются переменными величинами и связаны с x_2 очевидными зависимостями

$$R \sin \chi = x_2; \quad R \cos \chi = \sqrt{R^2 - x_2^2}. \quad (7.20)$$

Ниже приведем алгоритмы расчета усилий и выведем приближенные формулы для частного случая нагружения пологого цилиндрического решетчатого крыла. Положим цилиндрическим крылом будем называть такое крыло, у которого угол γ (см. рис. 7.15, б) достаточно мал, чтобы можно было пренебречь в записанных выше уравнениях величиной $H^2/4R^2$ по сравнению с единицей, т. е. принять, например, в уравнениях (7.17) $\cos \chi \approx 1$. В этом случае вместо (7.17) будем иметь

$$N_{11} - N_{22} - N_{23} \frac{x_2}{R} = 0; \quad N_{13} - \frac{x_2}{R} S = 0. \quad (7.21)$$

Следует иметь в виду, что в связи с делением на величину x_2/R , второе уравнение (7.21) справедливо для всех значений x_2 , кроме $x_2 = 0$. Учитывая, что моменты M и K входят только в последние два уравнения (7.19), определение усилий разбиваем на два этапа. На первом этапе определяем усилия N_{11} , N_{22} , S , N_{13} и N_{23} из уравнений (7.15), (7.21), а на втором этапе интегрированием (7.19) находим M и K . Располагая координатные оси x_k так, как показано на рис. 7.17, а, краевые условия для первой группы уравнений примем в форме

$$N_{22}(x_1, \pm 0,5H) = 0; \quad N_{11}(0, x_2) = 0; \quad N_{11}(l, x_2) = 0. \quad (7.22)$$

Задачу интегрирования уравнений (7.15) и (7.17) будем решать методом последовательных приближений, для чего перепишем уравнения (7.15) и (7.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_1} &= -q_2 - \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial N_{22}}{\partial x_1} = -q_1 - \frac{\partial S}{\partial x_2}; \\ \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} &= -q_3 - \frac{x_2}{R} \frac{\partial S}{\partial x_1}; \quad N_{22} = N_{11} - \frac{x_2}{R} N_{23}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

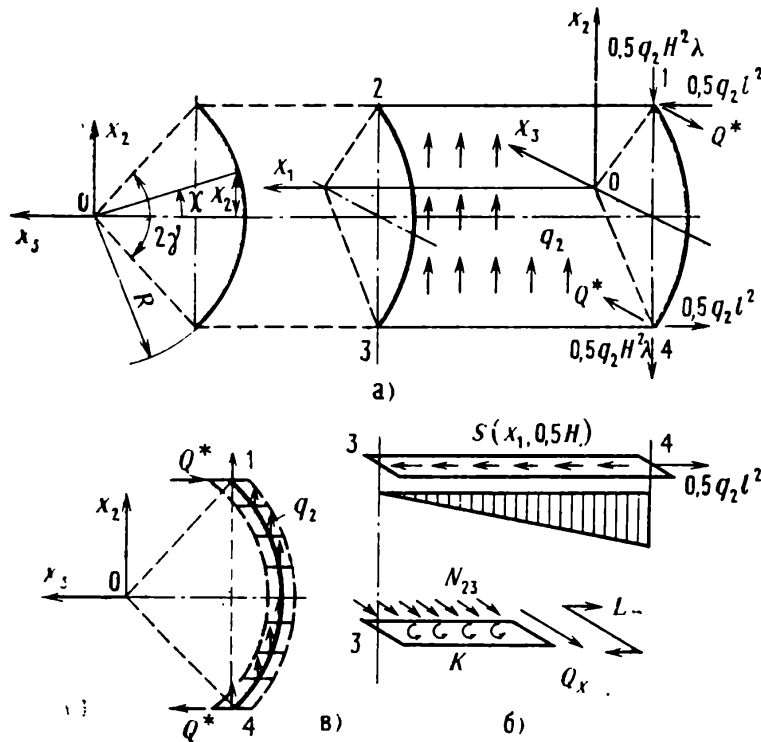


Рис. 7.17. Расчет усилий в цилиндрическом крыле:

а — координатные оси; б — условие равновесия боковины; в — определение реакций Q^*

Рассматривая нагружение крыла нагрузкой $q_2 = q$ ($q_1 = q_3 = 0$), примем в первом приближении $N_{22}^I = 0$. Интегрируя первое и второе уравнение (7.23), находим

$$S^I = -qx_1 + f_1(x_2); N_{11}^I = -x_1 f_1'(x_2) + f_2(x_2).$$

Условия на краях (7.22) дают $f_2 = 0$; $f_1 = c_1$. Постоянную c_1 определяем, используя условие равновесия для боковины, нагруженной касательным усилием $S(x_1, 0,5H)$, и реакцией $0,5ql^2$ в узле крепления крыла (см. рис. 7.17, б). В результате с учетом (7.23) и (7.21) в первом приближении получаем

$$S^I = q(l - x_1); N_{11}^I = 0, N_{13}^I = q(l - x_1) \frac{x_2}{R}; N_{23}^I = \frac{x_2^2}{2R} q + f_3(x_1).$$

Функцию $f_3(x_1)$ определим, найдя из четвертого уравнения (7.23) выражение для усилия N_{22} во втором приближении

$$N_{22}^{II} = N_{11}^I - \frac{x_2}{R} N_{23}^I = -\frac{x_2^3}{2R} q - \frac{x_2}{R} f_3(x_1) \quad (7.24)$$

и удовлетворяя первому из граничных условий (7.22), $f_3 = 0,125H^2q$. Таким образом, определены все усилия в первом приближении. Принимая во втором приближении для N_{22}^{II} выражение (7.24) и повторяя операции, аналогичные предыдущим, находим усилия во втором приближении. Учитывая, что в исходных уравнениях были отброшены члены порядка $H^2/4R^2$, логично и окончательные формулы для усилий записать с той же степенью точности.

В результате получаем следующие приближенные выражения для усилий:

$$S = q(l - x_1), N_{11} = \frac{3ql}{2R^3} (lx_1 - x_1^2) x_2, N_{22} = -\frac{q}{2R^2} (x_2^3 - 0,25H^2x_2);$$

$$N_{13} = \frac{q}{R} (l - x_1) x_2, \quad N_{23} = \frac{q}{2R} \left[x_2^2 - 0,25H^2 + \frac{3l}{R} (lx_1 - x_1^2) \right].$$

Далее определяем моменты M и K . Придерживаясь принятой степени точности, уравнения (7.19) заменим следующими приближенными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x_2} + \frac{\partial K}{\partial x_1} &= F, \quad \frac{\partial M}{\partial x_1} + \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0; \\ F &= \frac{q}{2R} \left[x_2^2 - 0,25H^2 + \frac{3l}{R} (lx_1 - x_1^2) \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Решение уравнений (7.25) ищем в форме двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} M &\sim \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \sin \frac{2n\pi}{H} x_2; \\ K &\sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \nu_{mn} a_{mn} \cos \frac{m\pi}{l} x_1 \cos \frac{2n\pi}{H} x_2; \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$F \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \nu_{mn} c_{mn} \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \cos \frac{2n\pi}{H} x_2; \quad \nu_{mn} = \begin{cases} 0,25 & m=n=0 \\ 0,5 & m \neq 0, n=0 \\ 0 & m \neq 0, n \neq 0. \end{cases}$$

Коэффициенты c_{mn} определяются по формуле

$$c_{mn} = \frac{8}{lH} \iint_{S^*} F(x_1, x_2) \sin \frac{m\pi}{l} x_1 \cos \frac{2n\pi}{H} x_2 dx_1 dx_2, \quad (7.27)$$

где интегрирование производится по прямоугольнику S^* ($0 \leq x_1 \leq l$, $0 \leq x_2 \leq 0,5H$). Принятая форма решения (7.26) удовлетворяет на краях панели условиям $M=0$, что соответствует пренебрежению жесткости на кручение окаймленного края. Реализуя (7.27) и используя зависимости (7.25) и (7.26), находим коэффициенты a_{mn} , b_{mn} . Ограничиваясь членами до $m, n=1$ включительно, запишем окончательные выражения для моментов M и K :

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{\pi^4} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2 - 1} \frac{qH^3}{R} \sin \frac{\pi}{l} x_1 \sin \frac{2\pi}{H} x_2; \\ K &= \frac{a_{00}}{4} - \frac{\lambda}{3\pi^2} \left(\frac{36\lambda^3}{\pi^2} \frac{H}{R} - 1 \right) \frac{qH^3}{R} \cos \frac{\pi}{l} x_1 - \frac{1}{\pi^4} \frac{2\lambda}{4\lambda^2 - 1} \frac{qH^3}{R} \times \\ &\quad \times \cos \frac{\pi}{l} x_1 \cos \frac{2\pi}{H} x_2. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Входящий во второе выражение (7.28) коэффициент a_{00} находится в процессе определения усилий в окаймляющих планах. Уси-

лия в окаймляющих планах, обусловленных изгибом их в своей плоскости, в соответствии с (5.54) и известными дифференциальными соотношениями можно определить из уравнений

$$\frac{\partial Q_x}{\partial s} = -N_{n3}; \quad \frac{\partial L_n}{\partial s} = -Q_x' - K. \quad (7.29)$$

Интегрируя последовательно выражения (7.29) с учетом симметрии напряженного состояния, находим следующие выражения для усилий в боковинах и поперечных окаймляющих планах:

$$\begin{aligned} Q_x^{2-3} &= C_1, \quad Q_x^{1-4} = \frac{ql}{2R} x_2^2 + C_2; \quad Q_x^{1-2} = -Q_x^{4-3} = \frac{3ql}{2R^2} \left(\frac{lx_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{3} \right) + C_3; \\ L_n^{2-3} &= -C_1 x_2 - \int_0^{x_2} K(l_1 x_2) dx_2; \quad L_n^{1-4} = -\frac{ql}{6R} x_2^3 + C_2 x_2 - \int_0^{x_2} K(0, x_2) dx_2; \\ L_n^{1-2} &= -L_n^{4-3} = -\frac{3ql}{2R^2} \left(\frac{lx_1^3}{6} - \frac{x_1^4}{12} \right) + C_3 x_1 - \int_0^{x_1} K(x_1 - 0,5H) dx_1 + C_4. \end{aligned}$$

Используя условия в угловых точках панели (5.45), постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4, a_{00}$ определяем из следующих пяти соотношений:

$$\begin{aligned} L_n^{2-3}(0,5H) &= 0; \quad L_n^{1-4}(0,5H) = 0; \quad L_n^{1-2}(l) = 0; \\ Q_x^{2-3}(-0,5H) - Q_x^{1-4}(l) + 2K(l, 0,5H) &= 0, \quad Q_x^{1-4}(-0,5H) + \\ &+ Q_x^{1-2}(0) + 2K(0, 0,5H) = Q^*, \end{aligned}$$

где Q^* — реакция в узлах крепления крыла (см. рис. 7.17, в), определяемая, в свою очередь, из условия равновесия цилиндрической панели в целом. Принимая распределение нагрузки по координате x_2 равномерным, составим условие равновесия моментов относительно оси x_1 от распределенной нагрузки и реакций в узлах крепления крыла:

$$2 \int_0^{0,5H} qlR \cos \gamma dx_2 = qHlR \cos \gamma + Q^* 2R \sin \gamma,$$

откуда находим $Q^* = \frac{lH}{12R} q$. Таким образом, задача полностью решена. Алгоритм решения аналогичной задачи при действии на крыло нагрузок q_1 и q_3 принципиально не отличается от рассмотренного выше.

Особенностью задачи о напряженном состоянии цилиндрического крыла является то, что она полностью статически определима. Это объясняется тем, что уравнения «плоского» напряженного состояния в данном случае не разделяются с уравнениями изгиба,

причем число уравнений статики соответствует числу неизвестных усилий.

Крыло с прямоугольной решеткой можно рассматривать как предельный случай цилиндрического крыла при $R \rightarrow \infty$. В этом случае в уравнениях (7.19) исчезают члены, содержащие S и N_{22} , и пропадает второе уравнение (7.17). В результате уравнения плоского напряженного состояния и изгиба разделяются, причем в три уравнения изгиба входят четыре неизвестные функции, т. е. задача становится статически неопределимой.

7.7. Плоское напряженное состояние решетчатого крыла с переменным шагом по размаху

В данном разделе рассматривается решетчатое крыло, представляющее собой полипланную панель, ортогональная решетка которой образована двумя семействами взаимно пересекающихся логарифмических спиралей (рис. 7.18):

$$\rho = ae^{|\beta \pm n\mu|}, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

где ρ, β — полярные координаты; a, μ — геометрические параметры решетки (рис. 7.19, а). Размеры диагоналей элементарной ячейки или, иначе, шаг решетки по радиусу и в окружном направлении являются линейными функциями радиуса ρ :

$$t_\rho = (e^\mu - 1)\rho; \quad t_\beta = \mu\rho. \quad (7.30)$$

Очевидно, что при малых μ $t_\beta \approx t_\rho$. Габаритные размеры крыла определяются центральным углом 2γ и размером в направлении радиуса $l = \lambda a$.

Как наиболее характерное, рассмотрим плоское напряженное состояние крыла. В качестве расчетной модели примем, как и ранее, решетку с шарнирами в узлах. Кроме того, учтем, что в реальной конструкции оси планов на участках между узлами решетки прямолинейны.

Рассмотрим равновесие узла решетки (см. рис. 7.19, б). Обозначая через α_1, α_2 углы между планами в радиальном направлении, а через ν — угол между хордой и касательной, при составлении уравнений проекции будем учитывать, что $\alpha_1, \alpha_2 = 0,25\pi \pm \nu$. Проектируя все силы, приложенные к узлу, на направление радиуса и касательной к окружности $\rho = \text{const}$ и принимая при малых μ $\sin \nu \approx \nu$, $\cos \nu \approx 1$, получаем с учетом (5.25), (7.30), следующие приближенные уравнения:

$$\begin{aligned} [1 - 0,25(e^\mu - 1)] \frac{\partial N}{\partial \rho} + \frac{\mu}{e^\mu - 1} \frac{\partial S}{\rho \partial \beta} - \frac{\mu}{4} \frac{\partial N}{\rho \partial \beta} - \frac{N}{\rho} &= -\sqrt{2}\mu\rho q_\rho; \\ [1 - 0,25(e^\mu - 1)] \frac{\partial S}{\partial \rho} + \frac{\mu}{e^\mu - 1} \frac{\partial N}{\rho \partial \beta} + \frac{\mu}{4} \frac{\partial S}{\rho \partial \beta} + \frac{S}{\rho} &= \sqrt{2}\mu\rho q_\beta; \quad (7.31) \\ N &= N_{11}'' + N_{22}''; \quad S = N_{22}'' - N_{11}''. \end{aligned}$$

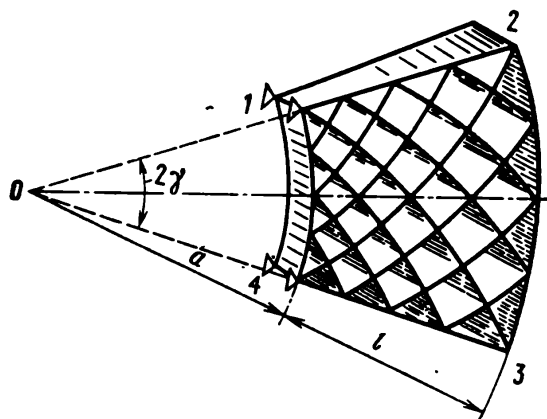
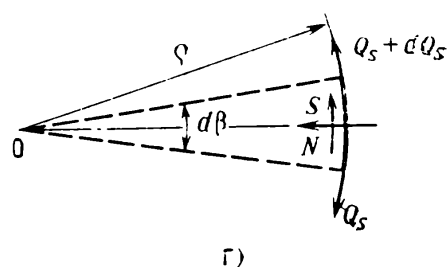
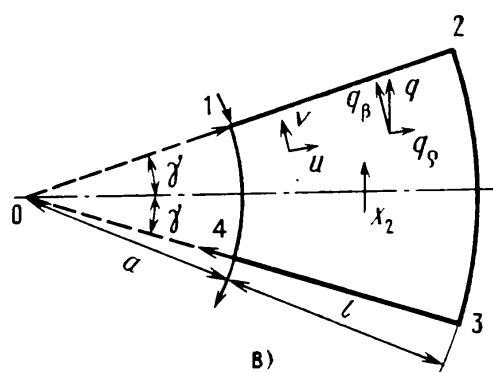
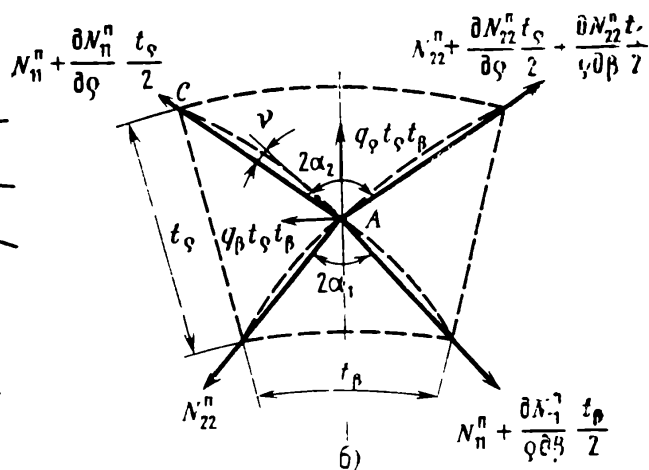
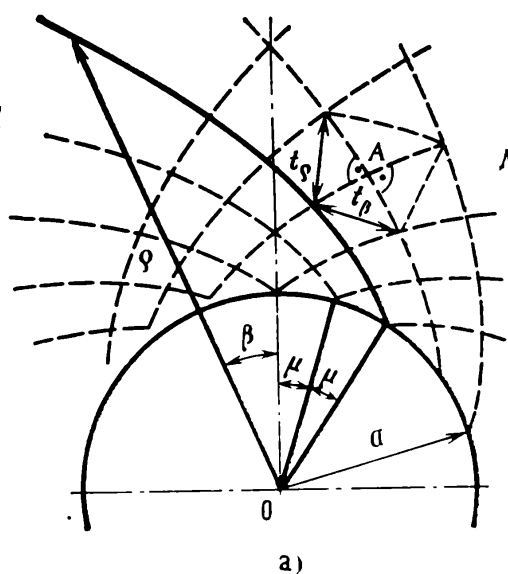


Рис. 7.18. Крыло с переменным шагом по размаху

Рис. 7.19. Определение усилий в крыле с переменным шагом:

a — геометрия решетки крыла; b — равновесие узла решетки; $в$ — нагружение крыла силой X_2 ; $г$ — равновесие окружающего скаймляющего плана



Если $\mu \ll 1$, уравнения (7.31) еще более упрощаются. Полагая, что скорость изменения функций N и S по координате β не выше, чем по координате ρ , в уравнениях (7.31) пренебрегаем величинами порядка $0,25(e^\mu - 1)$ по сравнению с единицей и принимаем $0,25 \times (e^\mu - 1) = 0,25 \mu$. В результате получаем

$$-\frac{N}{\rho} + \frac{\partial N}{\partial \rho} + \frac{\partial S}{\rho \partial \beta} = -\sqrt{2} \mu \rho q_\rho; \quad \frac{S}{\rho} + \frac{dS}{d\rho} + \frac{\partial N}{\rho \partial \beta} = \sqrt{2} \mu \rho q_\beta. \quad (7.32)$$

Уравнения (7.32) могут быть получены также из известных уравнений плоской задачи теории упругости, записанной в поляр-

ных координатах, при условии, что планы не обладают жесткостью на изгиб ($N_\xi = 0$).

Рассмотрим случай, когда компоненты распределенной нагрузки не зависят от координаты ρ . При нагружении крыла силой X_2 соотношения между компонентами распределенной нагрузки имеют вид (см. рис. 7.19, в)

$$q_\rho = q \cos \beta; \quad q_\beta = q \sin \beta; \quad q = \frac{X_2}{\gamma l (2a + l)}.$$

При этом уравнения (7.32) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \rho^3 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{N}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\rho S) &= -\sqrt{2} \mu \rho^3 q \sin \beta; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho S) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{N}{\rho} \right) &= \sqrt{2} \mu q \rho \cos \beta. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Введем функцию напряжений Φ по формулам

$$-\rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = S; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = \frac{N}{\rho} + \sqrt{2} \mu q \rho \sin \beta. \quad (7.34)$$

Первое уравнение (7.33) при этом удовлетворяется тождественно, а из второго получаем

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = -2\sqrt{2} \mu q \rho \cos \beta. \quad (7.35)$$

Общее решение этого уравнения представим в виде

$$\Phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mu q \rho \cos \beta + \sum_n F_n(\rho) \cos \frac{n\pi}{\gamma} \beta, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (7.36)$$

Здесь первое слагаемое — частное решение неоднородного уравнения, а второе — общее решение однородного уравнения (7.35). Подставляя (7.36) в (7.35), получаем для определения каждой из функций F_n уравнение Эйлера

$$\rho^2 F_n'' + 3\rho F_n' + \left(\frac{n\pi}{\gamma} \right)^2 F_n = 0,$$

которое подстановкой $\rho = ae^\xi$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial F_n}{\partial \xi} + \left(\frac{n\pi}{\gamma} \right)^2 F_n = 0. \quad (7.37)$$

В случае $n=0$ решение уравнения (7.37) имеет вид

$$F_0 = A_0 e^{-2\xi} - B_0. \quad (7.38)$$

При $n=1, 2, 3 \dots$ имеем

$$F_n = A_n e^{-\xi} \cos r_n \xi + B_n e^{-\xi} \sin r_n \xi; \quad r_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\gamma} \right)^2 - 1}. \quad (7.39)$$

Подставляя (7.38) и (7.39) в (7.36) и учитывая (7.34), можно найти выражения для усилий S и N . Постоянные A_0 , A_n и B_n определяются из условий на краях $\xi=0$, $\xi=\lambda=\ln(l/a)$ в предположении, что окружные планы 1—4, 2—3 (см. рис. 7.18) абсолютно податливы на изгиб. В частности, A_0 находим из условия равновесия моментов относительно начала координат O для плана 2—3, нагруженного касательными усилиями: $\int_{-\gamma}^{\gamma} S(\lambda, \beta) d\beta = 0$.

В результате для S и N получаем

$$S = \frac{\mu}{\sqrt{2}} qa^2 e^{2\xi} \left(\cos \beta - \frac{\sin \gamma}{\gamma} e^{3\lambda-3\xi} \right) + a \sum_{n=1}^{\infty} [(B_n + r_n A_n) \sin r_n \xi + (A_n - r_n B_n) \cos r_n \xi] \cos \frac{n\pi}{\gamma} \beta;$$

$$N = -\frac{\mu}{\sqrt{2}} qa^2 e^{2\xi} \sin \beta - a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\gamma} (A_n \cos r_n \xi + B_n \sin r_n \xi) \sin \frac{n\pi}{\gamma} \beta.$$

Рассматривая равновесие элемента окружного окаймляющего плана, способного воспринимать только нормальные усилия Q_s (см. рис. 7.19, г), можем записать

$$\frac{Q_s}{r} + N = 0; \quad \frac{dQ_s}{r d\beta} + S = 0; \quad r = a, (a + l).$$

Отсюда получаем зависимость, связывающую усилия N и S на краях $\xi=0$, λ :

$$S - \frac{dN}{d\beta} = 0. \quad (7.40)$$

Реализация (7.40) приводит к разложению в ряд Фурье следующих двух функций:

$$f_1(\beta) = \sqrt{2} \mu qa^2 e^{2\lambda} \left(2 \cos \beta - \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^\lambda \cos \frac{n\pi}{\gamma} \beta; \quad (7.41)$$

$$f_2(\beta) = \sqrt{2} \mu qa^2 \sin \gamma (2 - e^{3\lambda}) [\delta(\beta + \gamma) + \delta(\beta - \gamma)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^0 \cos \frac{n\pi}{\gamma} \beta,$$

где $\delta(\beta)$ — дельта-функция.

Используя (7.41), вычисляем величины b_n^λ и b_n^0 как коэффициенты Фурье функций f_1 и f_2 . Постоянные A_n и B_n определяем через

коэффициенты b_n^λ и b_n^0 с помощью полученной из (7.40) следующей системы уравнений:

$$\left[\left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{\gamma^2} \right) \cos r_n \lambda + r_n \sin r_n \lambda \right] A_n + \left[\left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{\gamma^2} \right) \sin r_n \lambda - r_n \cos r_n \lambda \right] B_n = \frac{b_n^\lambda}{a};$$

$$\left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{\gamma^2} \right) A_n - r_n B_n = \frac{b_n^0}{a}.$$

Таким образом, на основе шарнирной модели решетки была рассмотрена задача о плоском напряженном состоянии крыла с переменным шагом по размаху. Следует отметить, что, как и для прямоугольного крыла, закрепленного в угловых точках панели, в данном случае действие нагрузки X_2 не вызывает в крыле моментных усилий.

Применяя модель нерастяжимой шарнирной решетки, рассмотрим далее деформацию крыла в лобовой плоскости. Обозначая через u , v (см. рис. 7.19, в) соответственно радиальное и окружное перемещения точек срединной поверхности крыла, запишем известные соотношения для компонентов деформации:

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \epsilon_\beta = \frac{u}{\rho} + \frac{\partial v}{\partial \beta}; \quad \epsilon_{\rho\beta} = \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \beta}. \quad (7.42)$$

Используя условия нерастяжимости решетки $\epsilon_\rho = -\epsilon_\beta$, $\epsilon_{\rho\beta} = 0$, соотношения (7.42) можно преобразовать в следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{\rho} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (\rho u) + \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{v}{\rho} \right) = 0. \quad (7.43)$$

Введя функцию перемещений φ по формулам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \rho u; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -v, \quad (7.44)$$

уравнения (7.43) приводим к одному разрешающему уравнению

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0. \quad (7.45)$$

Представим функцию перемещений в форме ряда

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \frac{n\pi}{\gamma} \beta.$$

Вводя, как и ранее, новую переменную ξ по формуле $\rho = a e^\xi$ и используя (7.45), получаем уравнение в обыкновенных производных, определяющих вид функций $f(\xi)$. В результате находим

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} e^\xi (A_n^* \cos r_n \xi + B_n^* \sin r_n \xi) \cos \frac{n\pi}{\gamma} \beta, \quad (7.46)$$

где r_n вычисляется по (7.39).

Подставляя (7.46) в (7.44), получаем выражения для перемещений

$$u = -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\gamma} (A_n^* \cos r_n \xi + B_n^* \sin r_n \xi) \sin \frac{n\pi}{\gamma} \beta;$$

$$v = -\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n^* + r_n B_n^*) \cos r_n \xi + (B_n^* - r_n A_n^*) \sin r_n \xi] \cos \frac{n\pi}{\gamma} \beta.$$

Используя условия нерастяжимости окружных планов на краях крыла $\xi=0, \lambda$: $v(0, \beta)=0, v(\lambda, \beta)=0$, находим

$$A_n^* + r_n B_n^* = 0; B_n^* (1 + r_n^2) \sin r_n \lambda = 0.$$

Отсюда следует, что нетривиальное решение, описывающее деформацию шарнирной решетки как механизма, возможно при условии

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2 - 1} = k\pi; \quad k, n = 1, 2, 3, \dots$$

Эта зависимость определяет те формы деформации, которые допускаются нерастяжимой решеткой и сопровождаются в реальной конструкции изгибом планов.

Часть 3

КОНСТРУКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ, ТЕХНОЛОГИЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ИСПЫТАНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ КРЫЛЬЕВ

В части III рассматриваются результаты теоретических и экспериментальных исследований в области выбора оптимальных конструкционных материалов для решетчатых крыльев, обоснования рациональной технологии изготовления и методов испытания изделий.

До последнего времени эти задачи решались преимущественно на основе экспериментов и опыта производителей. Однако таким путем не всегда удается достигнуть желаемого результата, даже при значительных затратах времени и материальных средств.

Аналитические методы решения указанных задач более эффективны, хотя они находятся еще в начальной стадии своего становления. Поэтому авторы стремились в максимальной мере использовать для достижения поставленных целей методы численного анализа, математическое моделирование, выработку критериев для оптимизации принимаемых решений, применение ЭВМ и статистической обработки в сочетании с экспериментальными исследованиями и различными испытаниями.

Этот подход обеспечил эффективную реализацию разработанных рекомендаций и найденных научно-технических решений.

Так, при разработке методики выбора оптимальных конструкционных материалов для решетчатых крыльев различного назначения (гл. 8) была установлена неприемлемость известных частных критериев удельной прочности и жесткости материалов и поэтому значительное внимание было уделено поиску интегральных критериев эффективности материала, отражающих специфику конструкции решетчатого крыла. При этом механические свойства промышленных сплавов и чистых металлов рассматривались во всем диапазоне возможных температур, т. е. от абсолютного нуля до точек плавления соответствующих материалов. В итоге было показано, что в современный период, когда общее число промышленных сплавов достигло нескольких тысяч, а каждый из них характеризуется несколькими десятками свойств, выбор оптимального материала представляет собой многоаспектную задачу и возможен лишь на основе математического моделирования и применения ЭВМ.

В гл. 9 изложены материалы исследований по обоснованию типовой технологии изготовления решетчатых крыльев. Показано, что при решении данной задачи наибольшими техническими и экономическими возможностями обладает процесс пайки, позволивший создать уникальные конструкции решетчатых крыльев, которые эксплуатируются при температурах до 1600 К и отличаются высокой технологичностью и надежностью.

Для проведения количественного анализа трудоемкости отдельных операций и выяснения степени влияния вносимых усовершенствований на повышение эффективности типовой технологии в целом впервые рассмотрено уравнение состояния производства решетчатых крыльев. Такой метод анализа позволил не только использовать ЭВМ при технологическом проектировании и сократить сроки технологической подготовки производства изделий, но и создать наиболее технологичный вариант решетчатого крыла. Для обеспечения требуемой надежности решетчатых крыльев разработана методика расчета паяных соединений на прочность с учетом температуры нагрева в эксплуатации, а также методика анализа температурного поля в процессе пайки решетчатых крыльев. Работы, нашедшие отражение в разд. 9.3 и 9.5 данной главы, выполнялись совместно с канд. техн. наук М. И. Чикуновым.

Методы всесторонних испытаний решетчатых конструкций приведены в гл. 10. Для этих целей использовались паяные натурные решетчатые крылья и их модели, выполненные из различных конструкционных материалов. Статические испытания производились при действии сосредоточенных и распределенных нагрузок. Специфика работы решетчатого крыла на изгиб исследовалась методом муаров. Для апробации теории моментного плоского напряженного состояния были проведены экспериментальные исследования по определению форм и частот свободных колебаний некоторых типов решетчатых крыльев.

Значительный интерес для оценки несущих свойств рассматриваемых изделий представили результаты испытаний решетчатых крыльев в гидравлическом канале, в горячей выходной струе газотурбинного двигателя и в сверхзвуковой струе газов жидкостно-реактивного двигателя. Выполненные решетчатые крылья подвергались также специальным испытаниям в условиях вибрации.

Испытания в целом подтвердили правомерность принятых гипотез и рекомендованных расчетных методов. Исследования, изложенные в разд. 10.4—10.6 и 10.8, выполнялись авторами при участии канд. техн. наук Б. М. Агишева.

Глава 8

Методика выбора оптимальных конструкционных материалов для решетчатых крыльев различного назначения

8.1. Анализ критериев удельной прочности и жесткости материалов

Важнейшими характеристиками, определяющими в общем случае применение конструкционных материалов для решетчатых крыльев, являются высокотемпературная кратковременная прочность и жесткость, а также необходимый минимум пластичности материалов в диапазоне температур их использования. Однако эффективность применения материала в эксплуатации при различных температурах T определяется не только абсолютными значениями предела прочности σ_B^T и модуля упругости $E(T)$.

Наиболее эффективной следует считать ту конструкцию крыла, которая может выдержать заданную нагрузку при наименьшей собственной массе. Следовательно, в качестве критерия для сравнения эффективности различных материалов можно взять отношение $\sigma_{\text{доп}}^T/\gamma$, т. е. отношение допускаемого напряжения при расчетной температуре к удельной массе материала.

Существует, однако, много различных видов допускаемых напряжений в зависимости от типа нагрузки, геометрии конструкции и температуры: при растяжении, сдвиге, продольном изгибе, потере устойчивости пластины, начале текучести в стержне, потере устойчивости полого плана или боковины и т. д.

При расчетной температуре максимум максимум отношения $\sigma_{\text{доп}}^T/\gamma$ можно достигнуть лишь тогда, когда допускаемое напряжение становится равным пределу прочности материала σ_B^T . Поэтому для крыльев, отличающихся высоким уровнем температур и напряжений, имеет смысл выбрать в качестве сравниваемого фактора отношение σ_B^T/γ , получившее название удельной прочности. Этот фактор является основным критерием при выборе материалов для элементов, у которых расчетной является разрушающая нагрузка при растяжении, например окантовывающие боковины в решетчатых крыльях.

Для материалов, сравниваемых по показателю удельной прочности, должно соблюдаться условие

$$\sigma_B/\sigma_{0,2} \leq f, \quad (8.1)$$

где f — коэффициент безопасности; $\sigma_{0,2}$ — предел текучести при растяжении. Если же $\sigma_B/\sigma_{0,2} > f$, то при сравнительной оценке материалов по удельной прочности следует пользоваться величиной условного предела прочности:

$$\sigma'_B = \sigma_{0,2} f. \quad (8.2)$$

Когда сечения элементов крыльев выбираются из условий разрушения при потере устойчивости от сжатия, изгиба, сдвига, то основными критериями мас-

совой отдачи материала в конструкции служат различные показатели удельной жесткости [24, 39].

В области упругих деформаций для стержней таким критерием является $E(T)/\gamma$. Если критические нагрузки пропорциональны $\sigma^2 E$, например при сжатии или изгибе длинного тонкостенного цилиндра, критерием оценки материала служит величина $\sqrt{E(T)/\gamma}$.

Массу тонкостенных пластин может лимитировать требование обеспечения местной устойчивости. Так, при сжатии пластин, поперечном изгибе и сдвиге обшивки полых планов критерием оценки материала является $\sqrt[3]{E(T)/\gamma}$. Расчеты показывают, что критерии $E(T)/\gamma$ и $\sqrt[3]{E(T)/\gamma}$ численно весьма существенно отличаются у одних и тех же материалов, так что лучший по критерию $E(T)/\gamma$ материал может оказаться худшим из числа рассматриваемых по критерию $\sqrt[3]{E(T)/\gamma}$.

Использование указанных критериев осложняется тем, что в реальной конструкции один и тот же элемент имеет несколько расчетных случаев, причем в одном из них определяющей является, например, разрушающая нагрузка при растяжении, а в другом — разрушение при потере устойчивости от сжатия или изгиба. Задача о комплексном учете разнородных критериев составила предмет специального исследования и рассматривается в конце данной главы.

Здесь же необходимо подчеркнуть, что приведенные выше частные критерии удельной прочности и удельной жесткости материалов, если и могут быть применимы, например в ходе предварительной оценки эффективности конструкционных материалов для решетчатых крыльев, то только при наличии известных функциональных зависимостей σ_b^T и $E(T)$ в широком диапазоне температур в соответствии с потребностями варьирования расчетными температурами T . В действительности же, как показывает анализ работ [18, 20, 24, 39, 43, 46], эти данные носят исключительно дискретный характер, недостаточно систематизированы, для многих конструкционных материалов они приводятся лишь в узком диапазоне температур, а для ряда перспективных материалов вообще отсутствуют.

Для восполнения указанного пробела были проведены соответствующие исследования с целью разработки инженерных методов расчета σ_b^T и $E(T)$ чистых металлов и промышленных сплавов в широком диапазоне температур, т. е. от абсолютного нуля до точки плавления соответствующего материала.

8.2. Метод расчета предела прочности промышленных сплавов в функции температуры

Все характерные физические свойства любого металла, в том числе и прочность, зависят от строения атомов данного элемента. С. М. Винаров исходя из известного положения о том, что прочность материала находится в зависимости от энергии между-

атомной связи, одной из характеристик которой является температура плавления $T_{пл}$ [38], отмечал: «... между энергией связи и температурой плавления есть, по крайней мере, качественная зависимость. Хотя и известны исключения, такая зависимость представляет определенные удобства ввиду того, что температуры плавления технических металлов и сплавов хорошо известны» *.

Гипотезу о существовании связи между характеристиками прочности и температурой плавления материала $T_{пл}$ развивали также Р. И. Джаффи, Дж. Е. Дорн, В. С. Иванова и др. Данная гипотеза была положена в основу рассматриваемого ниже метода математического описания связи $\sigma_B^T = f(T, T_{пл})$. Эта зависимость, как было установлено в ходе работы над данной проблемой, особенно четко проявляется у технически чистых металлов, поэтому анализ их механических свойств явился отправным пунктом исследования.

При этом было установлено, что логарифмы чисел, характеризующих σ_B^T , хорошо аппроксимируются линейной зависимостью, или, иначе, было принято допущение о существовании экспоненциального закона:

$$\sigma_B^T = \sigma_0 e^{-bT}, \quad (8.3)$$

где σ_0 — предел кратковременной прочности при абсолютном нуле; b — константа.

Прологарифмировав левую и правую части уравнения (8.3), получим

$$\ln \sigma_B^T = \ln \sigma_0 - bT. \quad (8.4)$$

Положив

$$\ln \sigma_B^T = y; \ln \sigma_0 = a; T = x, \quad (8.5)$$

уравнение (8.3) можно написать в виде

$$y = a - bx, \quad (8.6)$$

что означает уравнение прямой относительно x и y .

Значения a и b были определены для 14 различных металлов путем обработки экспериментальных данных методом наименьших квадратов по формулам

$$a = \bar{y} - b\bar{x}; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8.7)$$

* Винаров С. М. Авиационное металловедение. М.: Оборонгиз, 1962, с. 74.

Для удобства введем обозначения:

$$\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i; \quad \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i,$$

где y_i — полученные при эксперименте значения $\ln \sigma_b^T$ при соответствующих $x_i = T$, причем $i = 1, 2, 3, \dots k$.

Схема расчета данных для определения коэффициентов a и b на примере циркония при $i = 9$ [24, 39] приведена в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Расчет коэффициентов a и b для циркония

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
4	4,2195	—388	150544	+0,8579	—412,8652
77	3,8501	—315	99225	+0,4885	—153,8775
293	3,8712	—99	9801	+0,5096	—50,4504
293	3,2581	—99	9801	—0,1035	+10,2465
373	3,6889	—19	361	+0,3273	—6,2187
473	3,2958	+81	6561	—0,0658	—5,3298
573	2,9957	+181	32761	—0,3659	—66,2279
673	2,7726	+281	78961	—0,5890	—165,5090
773	2,3026	+381	145161	—1,0590	—403,4790
$\Sigma = 3532$	30,2545		533176		—1253,7110
$\bar{x} = \frac{3532}{9} = 392; \quad \bar{y} = \frac{30,2545}{9} = 3,3616$					

Согласно (8.7) и данным табл. 8.1 вычисляем:

$$b = -\frac{1253,711}{533176} = -2,35 \cdot 10^{-3}$$

и

$$a = 3,3616 - (-2,35 \cdot 10^{-3} \cdot 392) = 4,2828,$$

после чего находим уравнение прямой (8.6):

$$y = 4,2828 - 0,00235x.$$

После подстановки согласно (8.5) и потенцирования получаем для циркония следующую зависимость:

$$\sigma_b^T = 72,4 e^{-0,00235T} \text{ кгс/мм}^2 = 710,2 e^{-0,00235T} \text{ МПа}.$$

Подобным образом были получены необходимые константы σ_0 и b (8.3) для всех 14 исследовавшихся металлов (табл. 8.2).

Таблица 8.2

Константы для расчета σ_b^T металлов

Металл	$T_{пл}, K$	σ_0		$b \cdot 10^3$
		кгс/мм ²	МПа	
Олово	495	13,5	132,4	7,01
Свинец	600	7,97	78,2	6,59
Магний	924	39,9	391,4	5,18
Алюминий	933	36,6	359,0	5,05
Медь	1356	58,5	573,9	3,16
Никель	1728	88,7	870,1	2,81
Титан	1941	136,0	1334,2	3,24
Цирконий	2128	72,4	710,2	2,35
Хром	2183	79,4	778,9	2,07
Ванадий	2192	135,0	1324,3	2,68
Гафний	2495	67,1	658,2	1,61
Ниобий	2741	95,0	932,0	1,76
Тантал	3269	100,0	981,0	1,49
Вольфрам	3683	150,0	1471,5	1,31

Итак, формула (8.3) и данные табл. 8.2 позволяют рассчитывать σ_b^T во всем диапазоне температур от 0 К до точек плавления соответствующих металлов. Результаты этих расчетов для некоторых металлов приведены на рис. 8.1, где на расчетные кривые точками нанесены исходные экспериментальные данные. Разброс экспериментальных точек объясняется как различиями в условиях испытания металлов разными авторами (скорость нагружения, форма и размеры образцов, точность измерительной аппаратуры), так и свойствами самих металлов, зависящими от способа их получения, количества и характера примесей, вида применявшейся термомеханической обработки и других факторов.

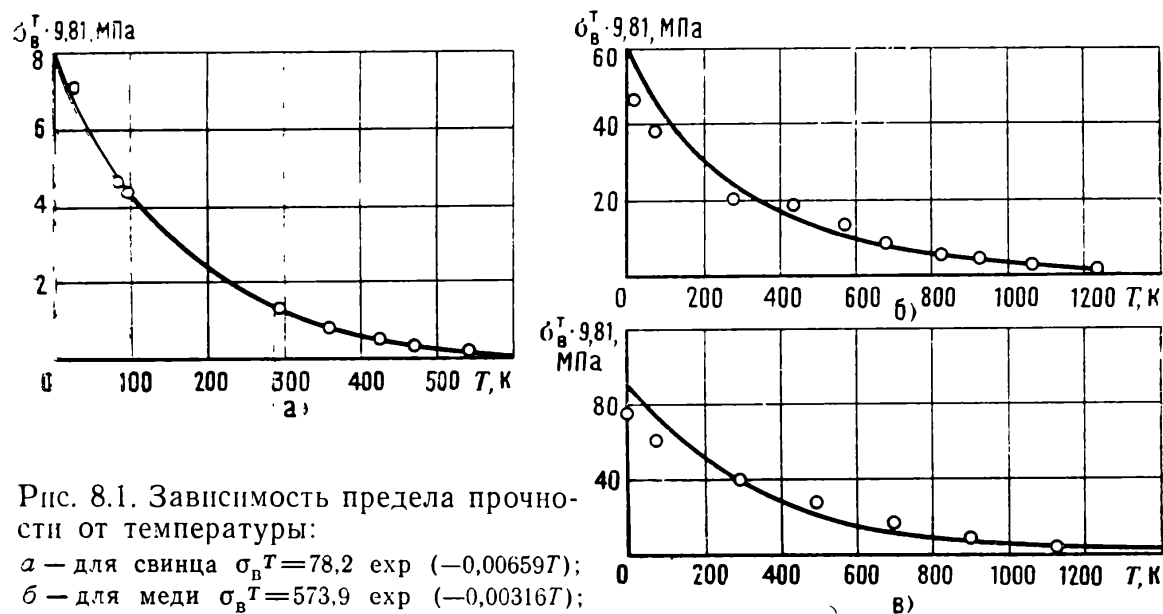


Рис. 8.1. Зависимость предела прочности от температуры:

а — для свинца $\sigma_b^T = 78,2 \exp(-0,00659T)$;
 б — для меди $\sigma_b^T = 573,9 \exp(-0,00316T)$;
 в — для никеля $\sigma_b^T = 870,1 \exp(-0,00281T)$

Как видно из графиков и данных табл. 8.2, в общем по мере возрастания $T_{пл}$ увеличивается σ_b^T при абсолютном нуле, а темп разупрочнения в функции температуры нагрева, выражаемый константой b , замедляется.

Формула (8.3), однако, не может быть непосредственно использована для расчета σ_b^T тех металлов, экспериментальные данные по которым отсутствуют или ограничиваются двумя-тремя значениями, т. е. когда метод наименьших квадратов не позволяет получить требуемые константы σ_0 и b . Поэтому для обобщения полученных зависимостей и распространения их на любые другие металлы расчетные данные для упомянутых 14 металлов были построены в системе координат σ_b^T — $T_{пл}$ при соответствующих гомологических (сходственных) температурах $K=T/T_{пл}$, изменявшихся в пределах от 0 до 0,9 с интервалом в 0,1.

Полагая в первом приближении, что между σ_b^T и $T_{пл}$ имеется линейная связь вида

$$\sigma_b^T = A_0 T_{пл}, \quad (8.8)$$

методом наименьших квадратов были определены коэффициенты A_0 при соответствующих значениях гомологической температуры K . Результаты этой обработки приведены в табл. 8.3.

Исследование полученной зависимости $A_0(K)$, проведенное также методом наименьших квадратов, показало возможность описания ее экспонентой в виде

$$A_0 = 0,386 e^{-4,866K}, \text{ МПа/К.} \quad (8.9)$$

Поэтому, решая совместно (8.8) и (8.9), получим

$$\sigma_b^T = 0,386 T_{пл} \exp\left(-4,866 \frac{T}{T_{пл}}\right), \text{ МПа.} \quad (8.10)$$

Т а б л и ц а 8.3

Зависимость коэффициента A_0 от гомологической температуры K

K	A_0 , МПа/К	K	A_0 , МПа/К
0	0,3904	0,5	0,0334
0,1	0,2403	0,6	0,0206
0,2	0,1452	0,7	0,0128
0,3	0,0898	0,8	0,0079
0,4	0,0546	0,9	0,0049

Это выражение в отличие от ранее найденного (8.3) позволяет в первом приближении рассчитывать σ_b^T для любых чистых металлов, если известны лишь температуры их плавления. Последние же достаточно точно определены [24, 34, 39, 46].

Далее на втором этапе исследования была сделана попытка распространить зависимость (8.10) на промышленные сплавы, которые, как известно, имеют существенно более высокую прочность по сравнению с чистыми металлами.

С этой целью расчетные данные $(\sigma_v^T)_{\text{расч}}$, полученные по формуле (8.10), сравнивались с опубликованными по результатам эксперимента значениями $(\sigma_v^T)_{\text{эксп}}$ для ряда промышленных сплавов. Итог сравнения записывался в виде

$$A = \frac{\sigma_v^T \text{эксп}}{\sigma_v^T \text{расч}}. \quad (8.11)$$

В ходе последующего анализа было установлено следующее.

1. Величина A (8.11), выражающая степень упрочнения сплава путем легирования, термомеханической и термической обработки, зависит от гомологической температуры $K = T/T_{\text{пл}}$.

2. Максимум функции $A = f(K)$ наблюдается при значениях $0,4 \leq K \leq 0,8$. Эта закономерность находится в связи с явлением рекристаллизации промышленных сплавов, которое, как известно [24], протекает в указанном диапазоне изменения K .

3. Натуральные логарифмы чисел $A = \varphi(K)$ хорошо аппроксимируются линейным законом в виде двух (рис. 8.2) или трех (рис. 8.3) прямых. Точками здесь изображены данные экспериментов [18, 24, 39].

На основе этих положений был сформирован метод нахождения $A = \varphi(K)$, заключающийся в следующих операциях.

1. Определяется $T_{\text{пл}}$ сплава. В качестве такой следует брать температуру солидуса, выраженную в кельвинах.

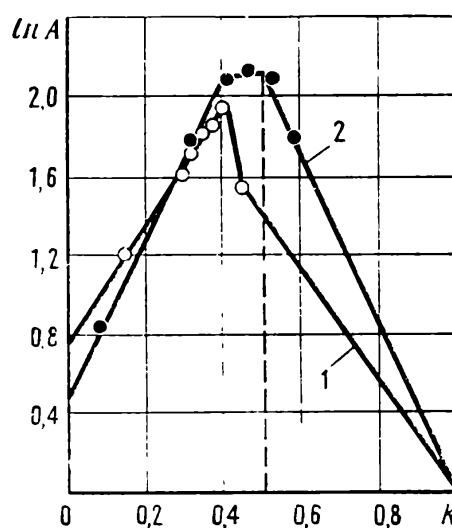
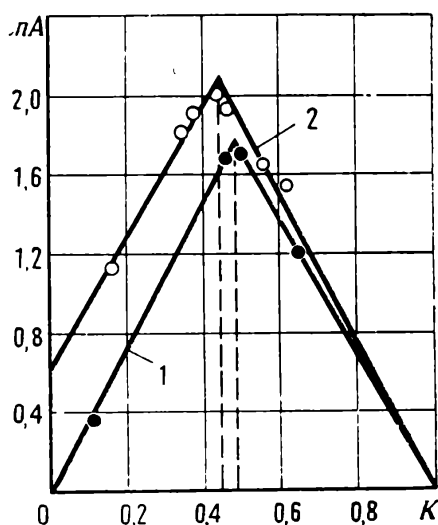


Рис. 8.2. Зависимость $\ln A$ от гомологической температуры K для сплава ВН2 (1) и стали 08Х20Н6МД2Т (ЭП309, ВНС4) (2)

Рис. 8.3. Зависимость $\ln A$ от гомологической температуры для сплавов ВТ16 (1) и АЦМУ (2)

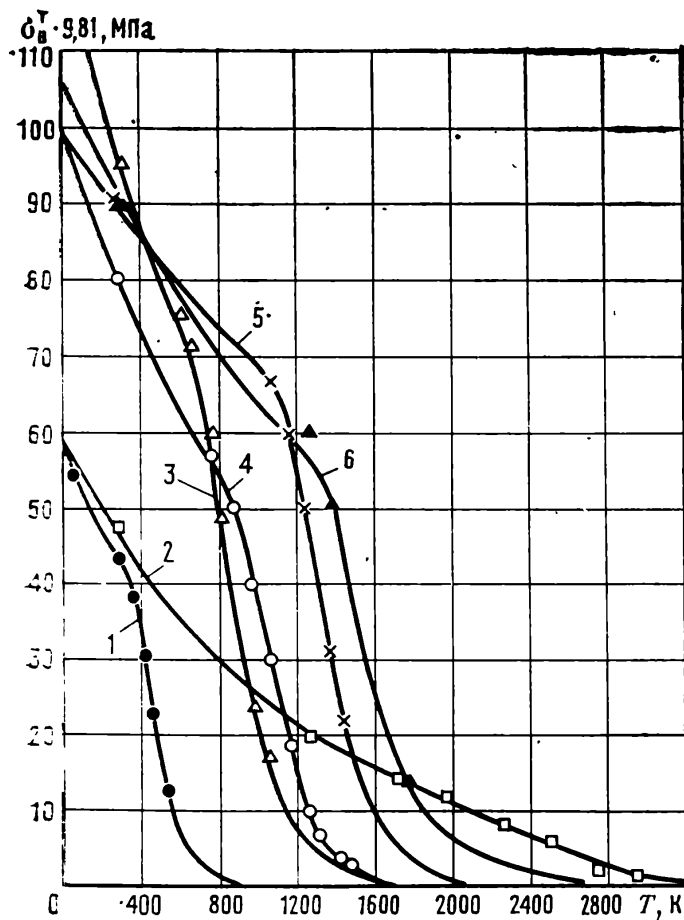


Рис. 8.4. Сравнение результатов расчета (линии) с экспериментом (точки) $\sigma_{\text{в}}^T$ для некоторых сталей и сплавов:

1 — АЦМУ; 2 — ВВ2; 3 — ВНС4; 4 — ЭИ835; 5 — ВН35; 6 — ВН2

2. По формуле (8.10) рассчитываются значения $\sigma_{\text{в}}^T$ для тех значений T , при которых известны экспериментальные данные о прочности сплава. Вычислив значения A (8.11), находим числа $\ln A$.

3. Зная величины K и значения $\ln A$, графически строим функцию $\ln A = f(K)$. Убедившись в наличии двух (трех) линейных зависимостей, представляем их с помощью метода наименьших квадратов в виде уравнений прямых. Путем потенцирования получаем выражения для $A = \varphi(K)$.

Итак, применительно к промышленным сплавам формула (8.10), с учетом поправочного коэффициента $A = \varphi(K)$, принимает вид

$$\sigma_{\text{в}}^T = 0,386 A T_{\text{пл}} \exp\left(-4,866 \frac{T}{T_{\text{пл}}}\right) \text{ МПа.} \quad (8.12)$$

Расчеты, проведенные по этой формуле для ряда сталей и сплавов (рис. 8.4), показали хорошую сходимость результатов с экспериментальными данными. Подробнее этот вопрос рассмотрен в разд. 8.4.

8.3. Метод расчета модуля упругости промышленных сплавов в функции температуры

Модуль нормальной упругости E является весьма существенным фактором при металловедческой оценке конструкционных материалов, применяемых для решетчатых крыльев. Он характеризует сопротивление упругим деформациям, т. е. жесткость отдельных элементов и конструкции в целом. Модуль упругости относится к числу структурно-малочувствительных свойств материала и потому не может быть так легко изменен при металлургической обработке, как другие свойства, например прочность и пластичность.

Для промышленных сплавов сведения об изменении модуля упругости в функции температуры получают исключительно экспериментальным путем (ГОСТ 1497—61) и, как правило, в диапазоне от комнатной температуры до $T=0,65 T_{\text{пл}}$. За пределами этой области температур значения E , особенно для листовых сплавов, практически отсутствуют [18, 20, 24, 39, 43].

Теоретически модули упругости твердых веществ в настоящее время определяют на основании квантово-механических расчетов энергетического электронного спектра тел, выражая в функциях других физических постоянных. Для описания температурной зависимости $E=\psi(T)$ предлагаются лишь эмпирические формулы, абсолютное большинство которых применимо только для чистых металлов и химических соединений [43].

Так, Е. Р. Петти и Х. О'Нейл приводят расчетную формулу

$$E=E_0 e^{-bT}, \quad (8.13)$$

где E_0 — значение модуля упругости, экстраполированное на 0К; T — температура нагрева, К; b — константа, имеющая два значения: одно в области ниже $0,5 T_{\text{пл}}$, другое — при температурах выше $0,5 T_{\text{пл}}$. Однако численные значения E_0 и b авторы не приводят и ничего не сообщают о возможности применения формулы (8.13) для промышленных сплавов. Все это потребовало собственных исследований для восполнения имеющегося пробела.

В основу данного исследования была положена гипотеза о том, что модуль упругости подобно твердости и пределу прочности характеризует прочность межатомной связи материала, которая, в свою очередь, находится в функции температуры плавления.

Поэтому для указанной цели была применена та же методика, что и для определения σ_v^T , с тем лишь отличием, что было учтено замечание авторов формулы (8.13) о наличии характерной точки при $K=0,5$. Для доказательства правомерности выражения (8.13) покажем, что имеющиеся экспериментальные данные для $E=\psi(T)$ чистых металлов действительно могут быть описаны экспоненциальными зависимостями.

Отметим прежде всего математическую аналогию между (8.13) и (8.3), откуда следует, что после логарифмирования и замены переменных выражение (8.13) приводится к уравнению (8.6), означающему уравнение прямой относительно x и y , причем в данном случае считаем

$$y=\ln E; \quad x=T; \quad a=\ln E_0. \quad (8.14)$$

Определение значений E_0 или, иначе, $a=\ln E_0$, а также константы b , производилось методом наименьших квадратов для 14 различных металлов с использованием формулы (8.7). Полученные данные приведены в табл. 8.4.

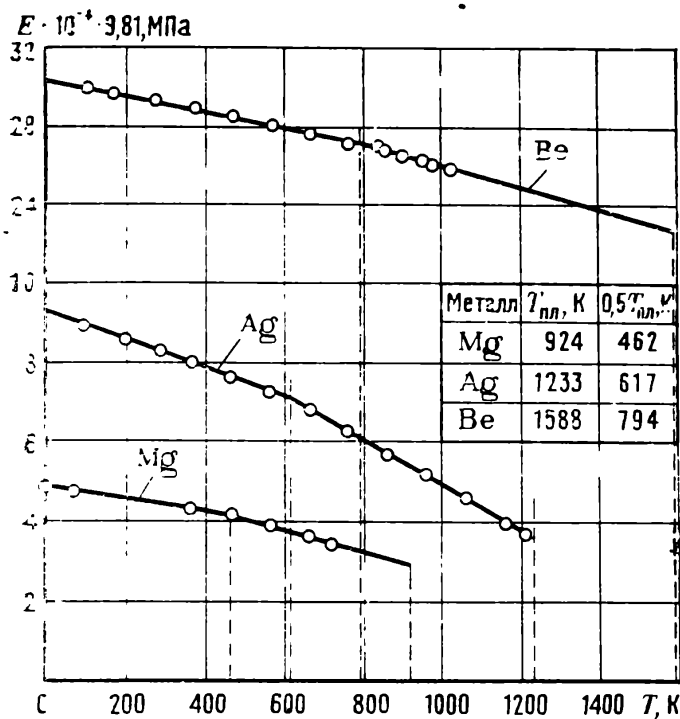


Рис. 8.5. Влияние температуры на изменение модуля упругости магния, серебра, бериллия

Результаты расчетов по формуле (8.13) для некоторых металлов приведены на рис. 8.5 и 8.6, где на расчетные кривые точками нанесены экспериментальные данные.

Однако формула (8.13) не может быть применена для расчета модуля упругости тех металлов, экспериментальные данные по которым вообще отсутствуют или имеется всего лишь 2—3 значения $E = \psi(T)$. Поэтому с

целью обобщения полученных зависимостей и распространения их на любые другие металлы расчетные данные для упомянутых 14 металлов (см. табл. 8.4) были построены в системе координат $E-T_{пл}$ при соответствующих гомологических температурах, изменявшихся в пределах $0 \leq K \leq 1$ с интервалом в 0,1.

Таблица 8.4

Константы E_0 и b для расчета модуля упругости металлов при $0 \leq K \leq 1$

Металл	$T_{пл}, K$	$0 < K < 0,5$			$0,5 < K < 1$		
		$E_0 \cdot 10^{-3},$ кгс/мм ²	$E_0 \cdot 10^{-4},$ МПа	$b \cdot 10^3$	$E_0 \cdot 10^{-3},$ кгс/мм ²	$E_0 \cdot 10^{-4},$ МПа	$b \cdot 10^3$
Магний	924	4,82	4,73	0,291	5,88	5,77	0,741
Серебро	1233	9,39	9,21	0,444	15,23	14,94	1,153
Золото	1337	8,62	8,46	0,288	12,0	11,77	0,751
Медь	1356	14,65	14,37	0,364	24,4	23,94	1,073
Марганец	1518	22,5	22,07	0,396	30,5	29,92	0,834
Бериллий	1588	30,5	29,92	0,143	32,6	31,98	0,227
Железо	1812	23,8	23,35	0,358	44,8	43,95	1,140
Цирконий	2128	12,6	12,36	0,767	41,1	40,32	1,013
Хром	2183	28,05	27,52	0,176	32,7	32,08	0,332
Ванадий	2192	14,2	13,93	0,167	17,1	16,77	0,301
Никобий	2741	11,7	11,48	—0,064	25,4	24,92	0,493
Молибден	2895	35,0	34,33	0,161	69,7	68,38	0,609
Тантал	3269	19,1	18,74	0,147	32,0	31,39	0,411
Вольфрам	3683	42,7	41,89	0,118	83,8	82,21	0,479

Рис. 8.6. Влияние температуры на изменение модуля упругости циркония, железа, хрома, молибдена и вольфрама

С учетом в первом приближении, что между E и $T_{пл}$ имеется линейная связь в виде

$$E = B_0 T_{пл}, \quad (8.15)$$

были вычислены методом наименьших квадратов значения коэффициента B_0 при соответствующих значениях K . Результаты этой обработки приведены в табл. 8.5.

Исследование полученных данных, проведенное также методом наименьших квадратов, показало возможность их описания двумя экспонентами в виде

$$E = 92,8 T_{пл} \exp\left(-0,45 \frac{T}{T_{пл}}\right) \text{ МПа при } 0 \leq K \leq 0,5, \quad (8.16)$$

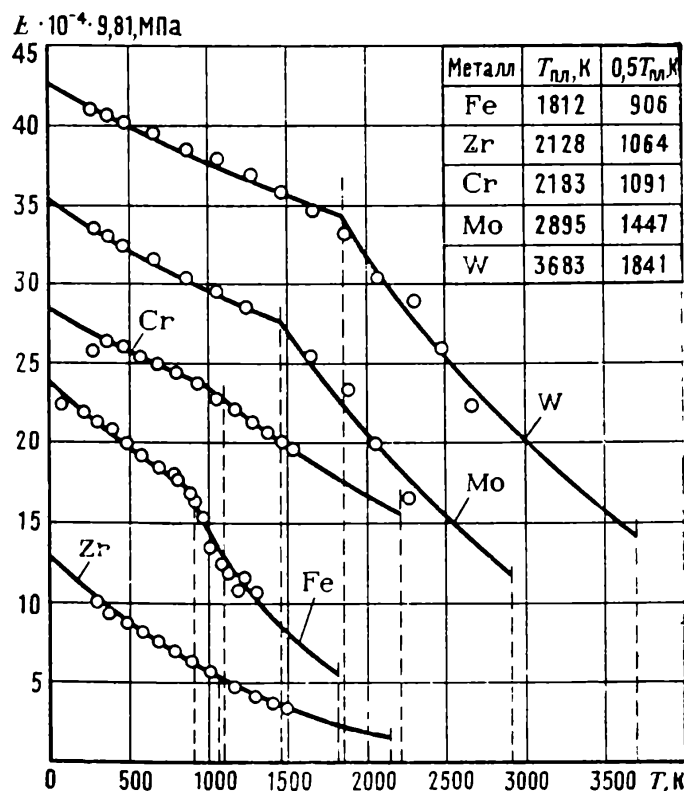
и
$$E = 142,2 T_{пл} \exp\left(-1,3 \frac{T}{T_{пл}}\right) \text{ МПа при } 0,5 < K \leq 1. \quad (8.17)$$

В отличие от ранее полученных выражения (8.16) и (8.17) позволяют в первом приближении рассчитать модуль упругости в функции температуры для любых чистых металлов, зная лишь их температуры плавления.

Таблица 8.5

Значения коэффициента B_0 при изменении гомологической температуры в пределах $0 \leq K \leq 1$

K	B_0 , МПа/К	K	B_0 , МПа/К
0	93,00	0,6	65,63
0,1	88,58	0,7	57,29
0,2	84,56	0,8	50,23
0,3	80,93	0,9	44,14
0,4	77,50	1,0	38,85
0,5	74,16		



Затем была предпринята попытка распространить зависимости (8.16) и (8.17) на промышленные сплавы.

С этой целью расчетные данные при $K=0,5$, полученные по формуле (8.16) или (8.17), сравнивались с опубликованными по результатам эксперимента значениями $E_{\text{эксп}}$, взятыми также при $K=0,5$ для ряда промышленных сплавов. Итог сравнения записывался в виде

$$B_{0,5} = \frac{(E_{\text{эксп}})_{K=0,5}}{(E_{\text{расч}})_{K=0,5}}. \quad (8.18)$$

Таким образом, формулы (8.16) и (8.17) с учетом поправочного коэффициента $B_{0,5}$ (8.18) принимают следующий вид:

$$E = 92,8 T_{\text{пл}} B_{0,5} \exp\left(-0,45 \frac{T}{T_{\text{пл}}}\right) \text{ МПа при } 0 \leq K \leq 0,5; \quad (8.19)$$

$$E = 142,2 T_{\text{пл}} B_{0,5} \exp\left(-1,3 \frac{T}{T_{\text{пл}}}\right) \text{ МПа при } 0,5 < K \leq 1. \quad (8.20)$$

Вычисления, выполненные согласно (8.19) и (8.20), показали хорошую сходимость расчетных и экспериментальных данных для сплавов АМг6, ВН35, ВМ1, ВВ2, ВХ1 и стали ВНС4 (рис. 8.7). При этом ошибки расчета находились в интервале от -6 до $+13\%$.

Поскольку для прочих сплавов ошибки расчета превышали указанный выше диапазон, было решено ввести второй поправочный коэффициент:

$$B_K = f(K). \quad (8.21)$$

Для выяснения этой зависимости необходимо найти путем обработки экспериментальных данных методом наименьших квадратов величины E_0 и $E_{\text{пл}}$, т. е. экстраполированные значения модуля упругости сплава соответственно при абсолютном нуле ($K=0$) и температуре около точки плавления ($K=1$). При этих темпе-

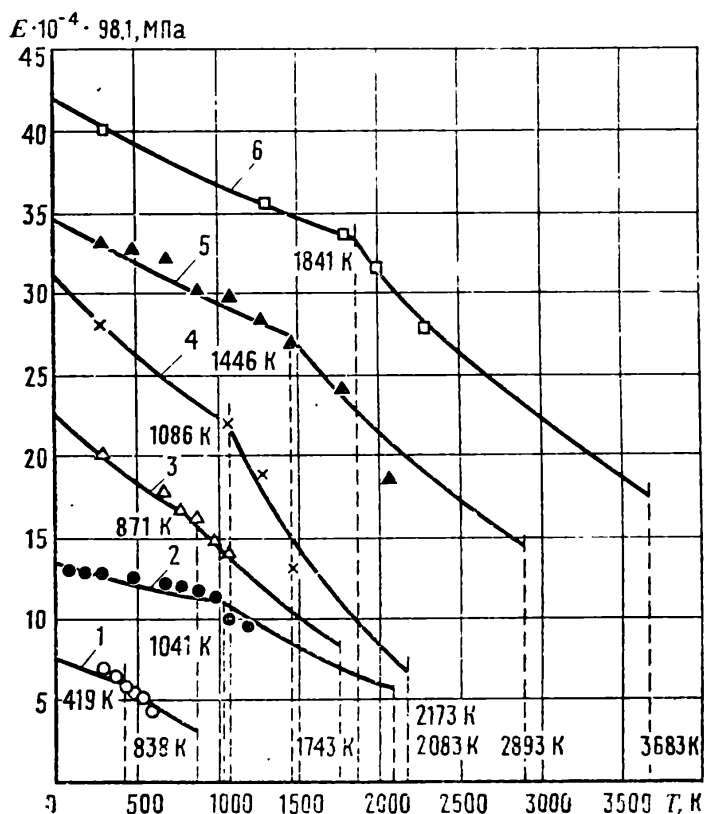


Рис. 8.7. Сравнение результатов расчета (линии) с экспериментальными данными (точки) для E некоторых сплавов:

1 — АМ-6; 2 — ВН35; 3 — ВНС4; 4 — ВХ1; 5 — ВМ1; 6 — ВВ2

ратурах по найденным E_0 и $E_{пл}$ вычисляем частные коэффициенты:

$$B_{K_0} = \frac{E_0}{(E_0)_{расч}} \text{ и } B_{K_1} = \frac{E_{пл}}{(E_{пл})_{расч}}, \quad (8.22)$$

где $(E_0)_{расч}$ и $(E_{пл})_{расч}$ — значения модуля упругости при $K=0$ и соответственно при $K=1$, полученные по формулам (8.19) и (8.20).

Далее, построив графически в системе координат B_K — K величины B_{K_0} при $K=0$ и B_{K_1} при $K=1$, а также величину $B_K=1$ при $K=0,5$, получаем три точки, через которые проводим две пересекающиеся прямые. Последние и представляют зависимость $B_K=f(K)$.

На основе изложенного формулы (8.19) и (8.20) получают более общий вид:

$$E = 92,8 T_{пл} B_{0,5} B_K \exp\left(-0,45 \frac{T}{T_{пл}}\right) \text{ при } 0 \leq K \leq 0,5; \quad (8.23)$$

и

$$E = 142,2 T_{пл} B_{0,5} B_K \exp\left(-1,3 \frac{T}{T_{пл}}\right) \text{ при } 0,5 < K \leq 1. \quad (8.24)$$

Вероятностная оценка точности изложенного метода расчета модуля упругости подробно рассмотрена в следующем разделе. На основе этого исследования с вероятностью 0,99 можно утверждать, что не менее 97% всех будущих расчетных данных совпадает с результатами эксперимента с точностью, определяемой интервалом отклонений от -7 до $+6,5\%$.

8.4. Статистическая оценка точности методов расчета σ_b и E в функции температуры

Математическая обработка экспериментального материала позволяет оценить достоверность разработанных методов и сделать прогноз точности совпадения результатов будущих расчетов с фактическими значениями σ_b^T и $E(T)$. Для установления такого прогноза необходимо знать закон распределения отклонений результатов расчета от экспериментальных данных. Найдя этот закон, можно будет сделать обоснованные выводы о правильности принятых гипотез.

С этой целью необходимо произвести расчеты σ_b^T и $E(T)$ для ряда сплавов и последовательно сравнить их с экспериментальными данными.

При анализе метода расчета σ_b^T подвергались обработке экспериментальные данные для сплавов АМг6, АЦМУ, ЭИ835, ВН35, ВХ1, ВН2, ВМ1, ВВ2, опубликованные в работах [24, 26, 39], причем общая выборка составила $n=59$ наблюдений. Сравнение экс-

периментальных и расчетных значений производилось по формуле

$$\pm x = \frac{\sigma_{\text{расч}}^T - (\sigma_{\text{в}}^T)_{\text{эксп}}}{(\sigma_{\text{в}}^T)_{\text{эксп}}} \cdot 100 \%. \quad (8.25)$$

Среднее значение \bar{x} случайной величины x_i определялось по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \text{ где } n=59.$$

Оказалось, что сумма значений x_i составила

$$\sum_{i=1}^n x_i = -2,13 \cdot 10^{-2}, \text{ а } \bar{x} = -\frac{2,13}{59 \cdot 100} = -0,04 \%.$$

При этом были найдены дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{3867 \cdot 10^{-4}}{58} = 0,0067$$

и стандартное отклонение $S = 0,082$.

Известно, что если какой-либо результат наблюдения по сравнению с остальными в выборке оказывает слишком большое влияние на среднее значение, то на основании критерия Шовене он не должен приниматься во внимание.

Для 59 наблюдений было найдено, что при нормальном распределении элемент выборки должен быть отброшен при условии $hx > 1,865$, где x — отклонение от среднего значения, а h — мера точности, причем

$$h = \frac{1}{S \sqrt{2}} = \frac{1}{0,082 \sqrt{2}} = 8,63.$$

Тогда

$$x = \frac{1,865}{8,63} = 21,6 \%.$$

Следовательно, тот результат, у которого отклонение от среднего значения больше 21,6%, должен быть отброшен. Один из элементов на этом основании был исключен из выборки. Этот процесс повторялся последовательно трижды, пока вся выборка не была «очищена» от «грубых» элементов. Динамика процесса «очистки» представлена в табл. 8.6.

Итак, оставшиеся 56 элементов как удовлетворяющие требованиям критерия Шовене подвергались дальнейшему исследованию. Для выяснения, подчинена ли выборка из 56 наблюдений нормальному закону распределения, случайные величины x_i были разбиты на интервалы, представленные в первой колонке табл. 8.7.

Во второй колонке этой таблицы дано количество наблюдений m , соответствующее выбранному интервалу из общего числа $n=56$ наблюдений. В третьей колонке представлено отношение

$$\frac{m}{n+1} \cdot 100 \%.$$

Таблица 8.6

Последовательность «очистки» выборки от «грубых» элементов

Число элементов в выборке n	Среднее значение \bar{x} , %	Дисперсия S^2	Стандартное отклонение S	Мера точности h	Критерий Шовене h_x	Допустимые интервалы $\pm x$, %
59	-0,04	0,0067	0,082	8,63	1,865	-21,64+21,56
58	-0,6	0,0048	0,069	10,20	1,860	-18,85+17,65
57	-0,2	0,0039	0,062	11,34	1,855	-16,6+16,2
56	-0,62	0,0029	0,054	13,1	1,850	-14,7+13,5

Таблица 8.7

Проверка реальности закона нормального распределения

Интервалы группировки	m	$\frac{m}{n+1} \cdot 100\%$	Интервалы группировки	m	$\frac{m}{n+1} \cdot 100\%$
-10	4	7,0	+ 5	44	77,2
- 5	15	26,3	+10	53	93,1
0	30	52,7	+15	56	98,3

Данные, приведенные в табл. 8.7, затем были нанесены графически на вероятностную бумагу. Линейный закон изменения отношения $\frac{m}{n+1} \cdot 100\%$ в функции величины отклонения x (рис. 8.8)

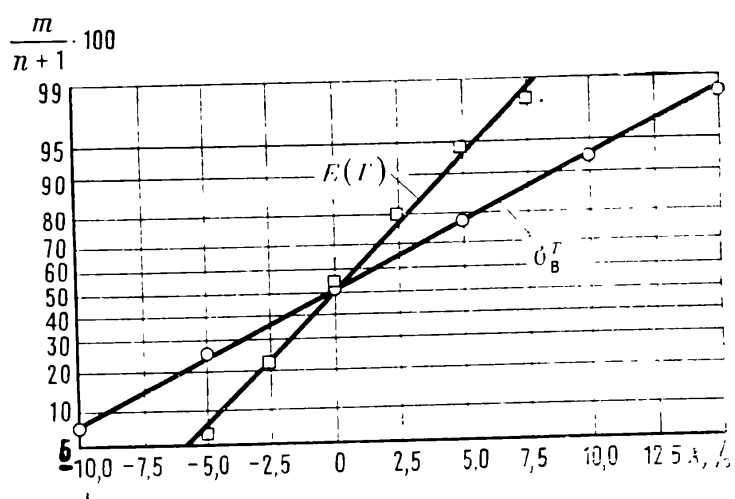
свидетельствует о том, что изучаемая генеральная совокупность событий подчинена нормальному закону распределения.

Теперь исходя из этого условия и данных, приведенных в табл. 8.6 (последняя строка), можно найти толерантные пределы:

$$u_1 = \bar{x} - kS \text{ и } u_2 = \bar{x} + kS. \quad (8.26)$$

Попадание в них доли совокупности, оцениваемой величиной q , гарантируется с вероятностью p . Иными словами, с вероятностью p можно считать, что в этих пределах будет находиться $q \cdot 100\%$ результатов совпадения расчетных данных с экспериментальными.

Рис. 8.8. Доказательство правомерности гипотезы о реализации закона нормального распределения



ментальными. Коэффициент k может быть найден по формуле

$$k = k_{\infty} \left(1 + \frac{x_p}{\sqrt{2n}} + \frac{Sx_p^2 + 10}{12n} \right). \quad (8.27)$$

Здесь величина k_{∞} характеризует значение k для истинных значений центра распределения ν и среднего квадратического отклонения S . Так как $k > k_{\infty}$, то толерантные пределы получаются приближенными и несколько шире действительных.

Значения коэффициентов, входящих в формулу (8.27), находят следующим путем. Величина k_{∞} определяется соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_{\infty}}^{+k_{\infty}} e^{-t^2/2} dt = 2\Phi_0(k_{\infty}) = q. \quad (8.28)$$

Задаваясь величиной q , находят значения нормированной функции Лапласа $\Phi_0(k_{\infty})$ и по таблицам определяют величину k_{∞} .

Величина x_p определяется из равенства

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_p}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 0,5 - \Phi_0(x_p) = 1 - p. \quad (8.29)$$

Задаваясь вероятностью p , находят значение нормированной функции Лапласа $\Phi_0(x_p)$, на основании которого по таблицам определяют величину x_p .

Для данного случая в качестве примера ($n=56$; $\bar{x}=-0,0062$; $S=0,054$) положим $p=0,99$ и $q=0,96$. Тогда $2\Phi_0(k_{\infty})=q=0,96$, что означает $\Phi_0(k_{\infty})=0,48$ и $k_{\infty}=2,055$.

Аналогичным образом $0,5 - \Phi_0(x_p) = 1 - p = 1 - 0,99 = 0,01$, откуда $\Phi_0(x_p) = 0,49$ и $x_p = 2,33$.

Дальнейший расчет по формуле (8.27) позволяет получить

$$k = 2,055 \left(1 + \frac{2,33}{\sqrt{2 \cdot 56}} + \frac{0,054 \cdot 2,33^2 + 10}{12 \cdot 56} \right) = 2,54$$

и, следовательно, имеем

$$u_1 = -0,0062 - 2,54 \cdot 0,054 = -0,1435; \quad (8.30)$$

$$u_2 = -0,0062 + 2,54 \cdot 0,054 = +0,1311. \quad (8.31)$$

Следовательно, с вероятностью 0,99 можно утверждать, что не менее 96% будущих расчетов σ_v^T будет совпадать с результатами эксперимента с точностью, определяемой интервалом отклонений от $-14,35$ до $+13,11\%$.

Для других значений q , в частности, таких как 0,98; 0,99, а также 0,9; 0,7; 0,5 и 0,3, величина p принята неизменной. Результаты расчетов толерантных пределов для этих случаев приведены в табл. 8.8.

Рис. 8.9. Изменение толерантных пределов совпадения результатов расчета и экспериментальных данных с доверительной вероятностью $p=0,99$

Графически изменение толерантных пределов, построенное по данным табл. 8.8, представлено на рис. 8.9.

Аналогичным образом для тех же сплавов был проанализирован метод расчета

$E(T)$. Общее число наблюдений здесь составляло $n=52$. Исключению по критерию Шовене подвергались три элемента. Подчиненность выборки из оставшихся $n=49$ элементов нормальному закону распределения была доказана аналогичным путем (см. рис. 8.8). Изменение толерантных пределов показано для $E(T)$ на рис. 8.9.

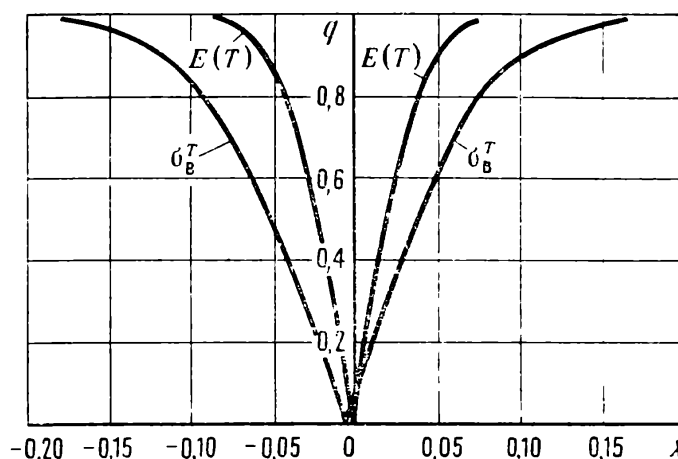


Таблица 8.8

Определение значений толерантных пределов

q	0,99	0,98	0,96	0,90	0,70	0,50	0,30
$\Phi_0(k_\infty)$	0,495	0,49	0,48	0,45	0,35	0,25	0,15
k_∞	2,58	2,33	2,055	1,645	1,037	0,676	0,385
k	3,19	2,88	2,54	2,03	1,28	0,835	0,475
$-u_1$	0,1784	0,1617	0,1435	0,1158	0,0754	0,0513	0,0319
$+u_2$	0,1660	0,1493	0,1311	0,1034	0,0630	0,0389	0,0195

Итак, установлено, что точность расчетов по изложенным методам равна или несколько выше точности расчетов по известным в инженерной практике методам.

8.5. Методика количественной оценки эффективности конструкционных материалов для решетчатых крыльев

Массу ферменного (сотового) решетчатого крыла m можно представить в функции геометрических параметров и несущих свойств материала:

$$m = SHF, \quad (8.32)$$

где S и H — суммарная площадь поверхности планов и высота крыла, а F — фактор, выражающий сумму удельных масс элементов

типового крыла, одни из которых (планы) рассчитываются на случай потери устойчивости, а другие (боковины) — из условия прочности.

Тогда при расчетных температурах T_p , например в случае $T_p = T_{\max}$, сравнение массы крыльев, одинаковых по суммарной поверхности и высоте, но выполненных из разных материалов, можно производить по комплексным критериям $F_i(T)$, поскольку

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{F_1(T)}{F_2(T)}. \quad (8.33)$$

Для определения фактора $F(T)$ используем известную зависимость

$$F = \rho \left[\left(2 - \frac{1}{n} \right) \frac{c}{H} + \frac{1,5}{n} \frac{C_6}{H} \right], \quad (8.34)$$

где

$$\frac{c}{H} = 0,815 \sqrt[3]{\frac{2}{n^2} \frac{p}{E(T)}} \quad (8.35)$$

и

$$\frac{C_6}{H} = 2n(1 + 0,75\bar{t}n) \frac{p}{\sigma_{\text{доп}}^T}. \quad (8.36)$$

Здесь ρ — плотность материала крыла; $n = H/t$ — число рядов условных планов на длине размера H при шаге t ; c и C_6 — толщина планов и соответственно максимальная толщина боковины; p — распределенная нагрузка; $\bar{t} = t/b$ — относительный шаг; b — хорда крыла; $E(T)$ — модуль нормальной упругости в функции температуры; $\sigma_{\text{доп}}^T$ — допускаемое напряжение при расчетной температуре.

Формулы (8.34), (8.35) и (8.36) справедливы при следующих типовых условиях:

- 1) толщина планов во всех зонах крыла одинакова;
- 2) боковины имеют переменную толщину, изменяющуюся по линейному закону от величины C_6 у корня до нуля у консоли;
- 3) максимальная толщина поперечного стержня (нервюры) постоянна и равна C_6 ;
- 4) хорды боковин, поперечного стержня и планов равны друг другу и постоянны по длине крыла l ;
- 5) соотношение $l/H = \eta$ принято равным 2;
- 6) сила X , действующая вдоль хорды b , и сила Z , направленная вдоль размера l , связаны выражением $X = 0,25 Z$;

7) распределенная нагрузка определяется по формуле $p = \frac{Y\bar{t}}{Hl}$

где Y — сила, действующая вдоль размера H .

Принимая для данного случая $n = 20$, $\bar{t} = 1$ и $p = 0,045$ кгс/см², что не противоречит идее получения крыла минимальной массы,

получим согласно (8.35)

$$\frac{c}{H} = 0,815 \sqrt[3]{\frac{2}{20^2} \frac{0,045}{E(T)}} = \frac{0,0496}{\sqrt[3]{E(T)}} \quad (8.37)$$

и в соответствии с (8.36)

$$\frac{C_6}{H} = 2 \cdot 20 (1 + 0,75 \cdot 20) \frac{0,045}{\sigma_{\text{доп}}^T} = \frac{28,8}{\sigma_{\text{доп}}^T}, \quad (8.38)$$

причем здесь $E(T)$ и $\sigma_{\text{доп}}^T$ должны иметь размерность кгс/см².

После подстановки выражений (8.37) и (8.38) в формулу (8.34) имеем

$$F(T) = \rho \left[\left(2 - \frac{1}{20} \right) \frac{0,0496}{\sqrt[3]{E(T)}} + \frac{1,5}{20} \frac{28,8}{\sigma_{\text{доп}}^T} \right] = \rho \left(\frac{0,0937}{\sqrt[3]{E(T)}} + \frac{2,16}{\sigma_{\text{доп}}^T} \right). \quad (8.39)$$

В таком виде критерий F целиком определяется свойствами конструкционных материалов и, следовательно, может быть использован для исследования их эффективности.

Имея в виду, что относительные деформации ε элементов крыла должны лежать в упругой области, положим

$$E = E(\varepsilon) = \text{const} \quad (8.40)$$

и

$$\sigma_{\text{доп}}^T = \sigma_{0,2}^T = \frac{\sigma_{\text{н}}^T}{f_T}, \quad (8.41)$$

где $\sigma_{0,2}^T$ — предел текучести при растяжении в функции температуры, а f_T — коэффициент, зависящий от температуры.

С учетом (8.40) и (8.41) выражение (8.39) примет вид

$$F(T) = \rho \left(\frac{0,0967}{\sqrt[3]{E(T)}} + \frac{2,16}{\sigma_{\text{в}}^T} f_T \right), \quad (8.42)$$

где $E(T)$ и $\sigma_{\text{в}}^T$ могут быть рассчитаны для промышленных сплавов по ранее полученным формулам.

С целью определения характера изменения f_T в функции температуры (8.41) исследовались экспериментальные данные $\sigma_{0,2}^T$ и $\sigma_{\text{в}}^T$, опубликованные в отечественной литературе для ряда промышленных сплавов. Установлено, что f_T линейно зависит от гомологической температуры K (табл. 8.9) в предположении, что при $K=1$ коэффициент $f_T=1$.

Итак, полученные зависимости (8.42), (8.12), (8.23), (8.24) и данные, приведенные в табл. 8.9, позволяют сравнивать по формуле (8.33) при расчетной температуре T_p однотипные конструкции крыльев, выполненные из разных материалов, и тем самым судить об эффективности каждого из рассматриваемых конструкционных ма-

териалов. Численные значения критерия $F(T)$ для некоторых сплавов, рассчитанные по формуле (8.42), приведены на рис. 8.10.

Т а б л и ц а 8.9

Данные по расчету коэффициента f_T для ряда промышленных сплавов

Сплав	Формулы для f_T при соответствующих диапазонах изменения K			
АМг6	$0 \leq K \leq 1$			
	$f_T = 2,6 - 1,6 K$			
АЦМУ	$0 \leq K \leq 1$			
	$f_T = 1,4 - 0,4 K$			
ЭИ835	$0 \leq K \leq 1$			
	$f_T = 2,3 - 1,3 K$			
ВНС4	$0 \leq K \leq 0,6$		$0,6 \leq K \leq 1$	
	$f_T = 1,04 + 0,27 K$		$f_T = 1,5 - 0,5 K$	
ВТ16	$0 \leq K \leq 0,4$	$0,4 \leq K \leq 0,45$	$0,45 \leq K \leq 0,5$	$0,5 \leq K \leq 1$
	$f_T = 1 + 0,75 K$	$f_T = -9,9 + 28 K$	$f_T = 15,3 - 28 K$	$f_T = 1,6 - 0,6 K$
ВН35	$0 \leq K \leq 0,5$		$0,5 \leq K \leq 1$	
	$f_T = 1,1 + 0,4 K$		$f_T = 1,6 - 0,6 K$	
ВХ1	$0 \leq K \leq 0,68$		$0,68 \leq K \leq 1$	
	$f_T = 1,4 + 1,2 K$		$f_T = 4,78 - 3,78 K$	
ВН2	$0 \leq K \leq 1$			
	$f_T = 1,5 - 0,5 K$			
ВМ1	$0 \leq K \leq 1$			
	$f_T = 1,2 - 0,2 K$			
ВВ2	$0 \leq K \leq 1$			
	$f_T = 2,2 - 1,2 K$			
Be	$0 \leq K \leq 0,6$		$0,6 \leq K \leq 1$	
	$f_T = 1,2 + 0,5 K$		$f_T = 2,25 - 1,25 K$	

Однако подобного рода оценка не учитывает того обстоятельства, что длительность работы крыла при расчетной температуре, равной, например, начальной температуре изделия T_0 , или, напротив, при $T_p = T_{\max}$, существенно меньше (в десятки раз!) длительности его работы при нерасчетных эксплуатационных температурах в диапазоне от T_0 до T_{\max} , где эффективность рассматриваемых

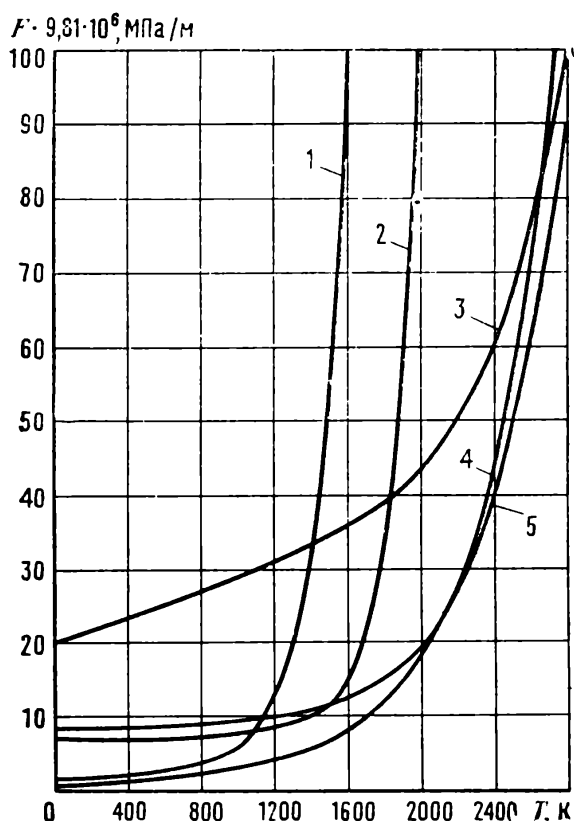


Рис. 8.10. Зависимость комплексного критерия F от температуры для сплавов: 1 — бериллия; 2 — BN35; 3 — BV2; 4 — BM1; 5 — оптимального материала

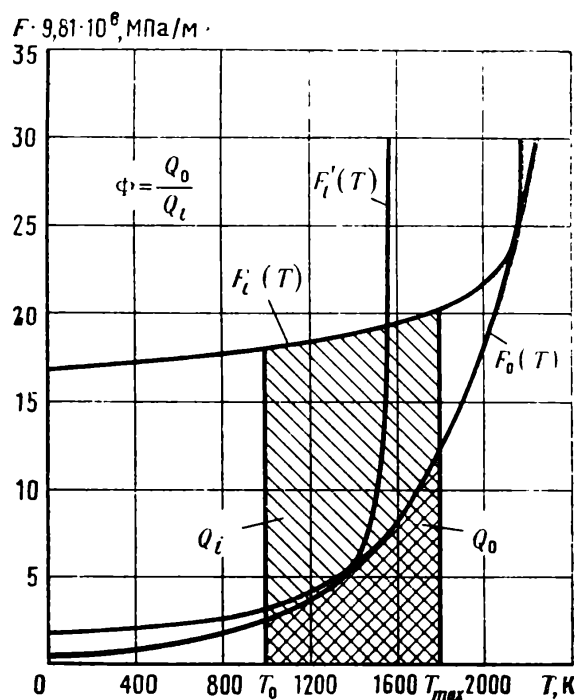


Рис. 8.11. Интегральный критерий Φ эффективности конструкционных материалов

конструкционных материалов будет отличаться от эффективности при T_p . Другими словами, наилучший по критерию при расчетной температуре материал, например сплав BV2 при $T_p = 2800$ К, может оказаться наихудшим из числа рассмотренных (см. рис. 8.10) в диапазоне нерасчетных температур (от 0 до 1400 К — для сплава BV2).

В связи с этим для оценки эффективности конструкционных материалов с учетом работы их во всем возможном диапазоне температур от начальной, например $T_0 = 0$ К, до максимальной $T_p = T_{\max}$ целесообразно ввести понятие об оптимальном (гипотетическом) материале, отличающемся от реальных наименьшими значениями критерия F при каждом заданном значении температуры. Иначе говоря, график этого критерия в функции температуры должен представлять собой огибающую семейства кривых F_i для реальных материалов (см. рис. 8.10).

Исследование полученной огибающей кривой показало, что ее аналитическое выражение с достаточно высокой точностью может быть записано в виде

$$F_0 = 10^{-6} \exp(2 \cdot 10^{-3} T - 1,1). \quad (8.43)$$

При подстановке в это выражение температуры в шкале К получаем значение F_0 в кгс/см³, т. е. 9,81 МПа/м.

Теперь, учитывая изложенное, сравнение эффективности реальных материалов с оптимальным и, следовательно, между собой можно проводить по отношению площадей Q_0 и Q_i , ограниченных осью абсцисс, кривыми $F_0(T)$ и $F_i(T)$ и ординатами, соответствующими рабочему диапазону температур от T_0 до T_{\max} . Величину отношения указанных площадей Φ назовем безразмерным интегральным критерием эффективности конструкционного материала (рис. 8.11):

$$\Phi = \frac{Q_0}{Q_i}. \quad (8.44)$$

Вычисление данного критерия можно производить графически либо аналитически. В последнем случае согласно определению имеем

$$\Phi = \frac{\int_{T_0}^{T_{\max}} F_0(T) dT}{\int_{T_0}^{T_{\max}} F_i(T) dT}. \quad (8.45)$$

Производя подстановку с учетом выражений (8.42) и (8.43), получим

$$\Phi = \frac{10^{-6} \int_{T_0}^{T_{\max}} \exp(2 \cdot 10^{-3} T - 1,1) dT}{\rho \int_{T_0}^{T_{\max}} \left[\frac{0,0967}{\sqrt[3]{E(T)}} + \frac{2,16 f_r}{\sigma_B^T} \right] dT}. \quad (8.46)$$

Численные значения этого критерия изменяются в пределах от 0 до 1. Чем больше величина Φ , тем выше эффективность конструкционного материала, тем, следовательно, его свойства ближе к свойствам оптимального материала.

Для учета работы материала за пределами упругой области необходимо учесть изменение E и $\sigma_{\text{доп}}$ в функции ϵ . Под величиной ϵ следует понимать значения относительной деформации материала (в соответствии с результатами экспериментальных испытаний) во всем диапазоне диаграммы σ — ϵ .

В качестве критерия эффективности материала в этом общем случае представляется возможным принять отношение объемов:

$$\bar{V} = V_0/V_i, \quad (8.47)$$

где V_0 — объем призмы, описанный поверхностью, выражающей свойства оптимального материала, а V_i — соответственно описанный поверхностью реального материала.

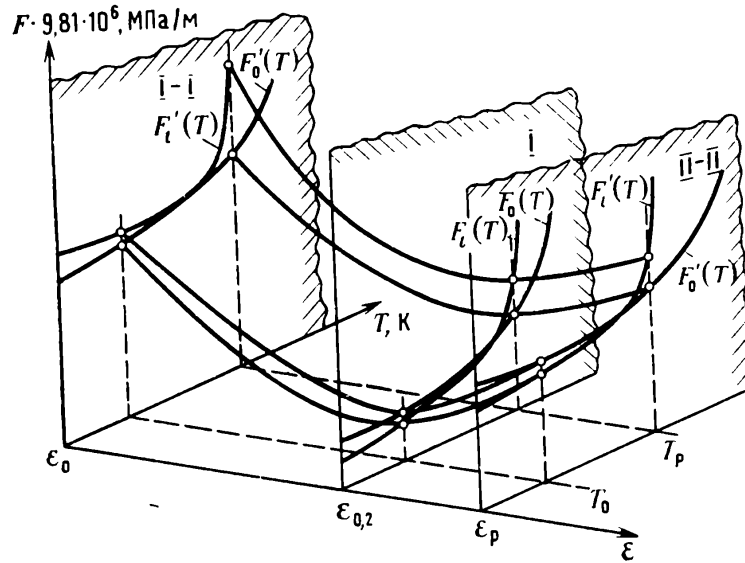


Рис. 8.12. Трехмерное поле координат для определения обобщенного интегрального критерия \bar{V}

Вводя переменные ε и T , положив при этом $T_p = T_{\max}$, получим

$$\bar{V} = \frac{\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_p} \int_{T_0}^{T_p} F_0(\sigma_{\text{доп}}^T, E, T, \varepsilon) dT d\varepsilon}{\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_p} \int_{T_0}^{T_p} F_i(\sigma_{\text{доп}}^T, E, T, \varepsilon) dT d\varepsilon}, \quad (8.48)$$

что графически представлено на рис. 8.12. Изложенное означает, что от плоской картины, которой соответствует фактор Φ , делается переход к объемной, характеризуемой безразмерным пространственным критерием \bar{V} . Величина критерия \bar{V} , как и Φ , изменяется от 0 до 1.

Выделенные на рис. 8.12 характерные плоскости $I-I$, I и $I-II$ соответствуют следующим типовым случаям работы конструкции крыла.

а) Плоскость $I-I$. В условиях старта начальная относительная деформация ε_0 мала, но не равна нулю. Внешние нагрузки могут отсутствовать, но должны учитываться собственная масса крыла, а также деформации от остаточных напряжений, привнесенных в ходе ее изготовления, и температурных напряжений, возникших в условиях хранения при низких или, наоборот, повышенных температурах.

Положим, однако, что суммарные напряжения σ здесь все-таки значительно меньше предела текучести материала и составляют, например, не более 5% $\sigma_{0,2}^T = \sigma_{\text{доп}}$.

Варьируя температурой, находим согласно (8.39) зависимости $F_i'(T)$ для различных сплавов (см. рис. 8.12) и огибающую $F_0'(T)$ по аналогии с F_0 , указанной в (8.43).

б) Плоскость *I*. Этот случай работы крыла, когда $\varepsilon = \varepsilon_{0,2}$, уже рассмотрен в выражениях (8.40) — (8.43).

в) Плоскость *II—II*. Нагрузки — весьма большие и крыло находится в предельном состоянии. Расчетная для этого случая деформация ε_p (см. рис. 8.12) соответствует напряжениям $\sigma_{\text{доп}}^T = \sigma_{\text{в}}^T$. Жесткость конструкционного материала характеризуется при этом секущим или касательным модулями упругости, обозначаемыми $E_{\text{сек}}(T)$ или $E_{\text{кас}}(T)$. Варьируя температурой по аналогии с указанными выше случаями можно найти по (8.39) при наличии экспериментальных данных о величинах $E_{\text{сек}}(T)$ или $E_{\text{кас}}(T)$ зависимости $F_i''(T)$ для различных сплавов и огибающую $F_0''(T)$, приведенные на рис. 8.12.

Рассмотренная схема построений может быть дополнена несколькими плоскостями, например, $(I) — A — B — \dots — (I — I)$ и $(I) — A' — B' — \dots — (II — II)$ соответственно в областях $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_{0,2}$ и $\varepsilon_{0,2} < \varepsilon < \varepsilon_p$. В результате с той или иной степенью точности могут быть записаны выражения для вычисления критерия \bar{V} согласно (8.48).

8.6. Данные для выбора оптимальных конструкционных материалов

Учитывая недостаточность некоторых экспериментальных данных для всей совокупности современных конструкционных материалов, например $E_{\text{сек}}(T)$ и $E_{\text{кас}}(T)$ в диапазоне от абсолютного нуля до точек плавления, вычисления произведем, пользуясь лишь безразмерным критерием Φ (8.46).

Температурные условия эксплуатации крыльев. Распределение температуры по хорде крыла в состоянии покоя и в любой заданный момент времени движения имеет различный характер, но всегда может быть представлено в виде графика или таблицы. Это очень важно, поскольку температурные условия определяют пределы интегрирования функции $\Phi(T)$.

В данном случае начальную температуру эксплуатации T_0 примем постоянной для всех участков крыла и не зависящей от назначения изделия, причем $T_0 = 200$ К. В качестве расчетной температуры T_p примем некоторую переменную, зависящую как от безразмерного параметра $\bar{x} = x/b$, характеризующего расстояние от носика хорды до исследуемой точки на ее длине и изменяющегося в пределах $0 \leq \bar{x} \leq 1$, так и от типа крыла. При этом характер распределения $T_p(\bar{x})$ фиксируется в тот момент, когда на носике хорды $(T_p)_{\bar{x}=0}$ будет максимальной из всех возможных значений для заданного случая. Так, для крыла кривая распределения температуры вдоль хорды может иметь вид, показанный на рис. 8.13.

На рис. 8.14 показаны типовые случаи (варианты) изменения $T_p(\bar{x})$ на крыльях различного типа. Для большей строгости, необходимой в ходе расчетов, те же данные для одиннадцати значений приведены в табл. 8.10.

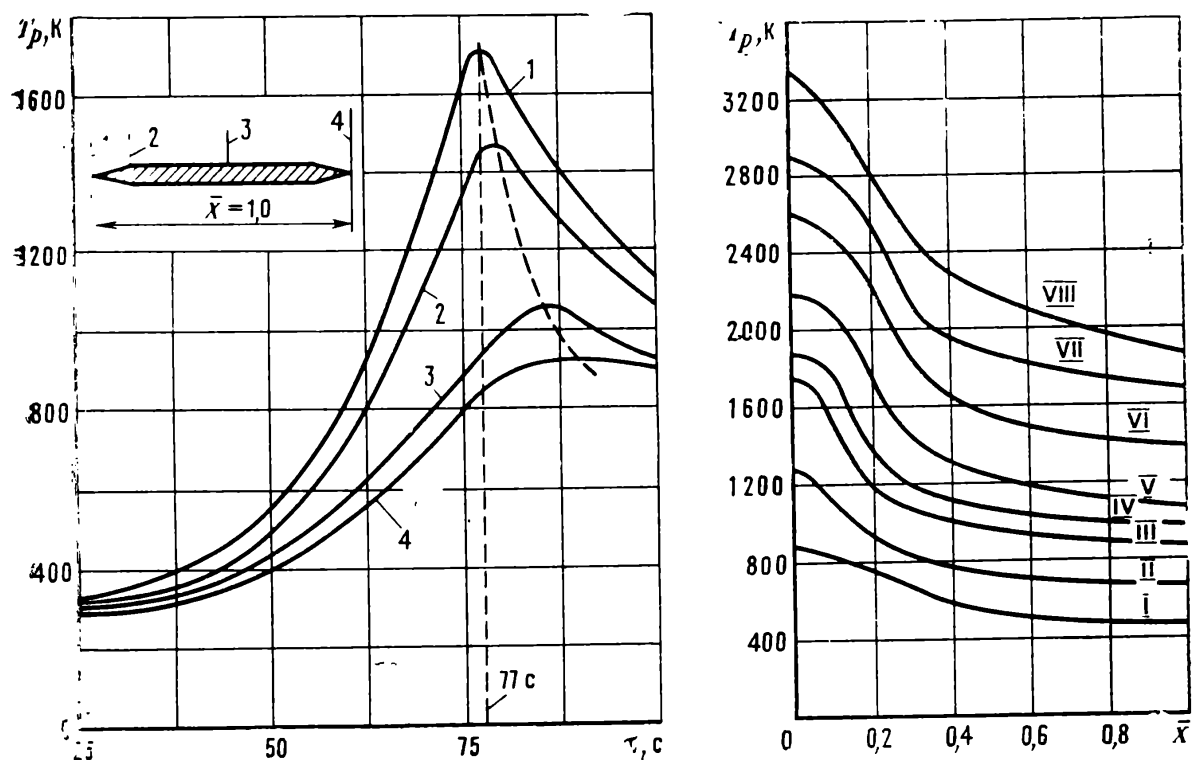


Рис. 8.13. Вариант распределения температуры по различным участкам плана: 1 — $\bar{x}=0$; 2 — $\bar{x}=0,1$; 3 — $\bar{x}=0,5$; 4 — $\bar{x}=1,0$

Рис. 8.14. Типовые случаи (варианты) изменения $T_p(\bar{x})$ для решетчатых крыльев различного назначения

Таблица 8.10

Значения $T_p(x)$, К по сечениям хорды крыла

Вариант	№ сечения \bar{x}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
I	T_p^I	870	860	830	790	750	670	600	550	520	490	470
II	T_p^{II}	1270	1220	1100	1000	930	850	790	750	710	680	670
III	T_p^{III}	1720	1700	1470	1270	1170	1050	990	950	920	890	870
IV	T_p^{IV}	1870	1850	1770	1520	1350	1200	1100	1050	1030	990	970
V	T_p^V	2170	2140	2070	1970	1770	1410	1290	1220	1170	1100	1070
VI	T_p^{VI}	2570	2530	2470	2370	2220	1820	1630	1530	1470	1410	1370
VII	T_p^{VII}	2870	2830	2770	2670	2530	2110	1930	1850	1790	1720	1670
VIII	T_p^{VIII}	3300	3220	3110	2950	2770	2460	2280	2160	2070	1950	1870

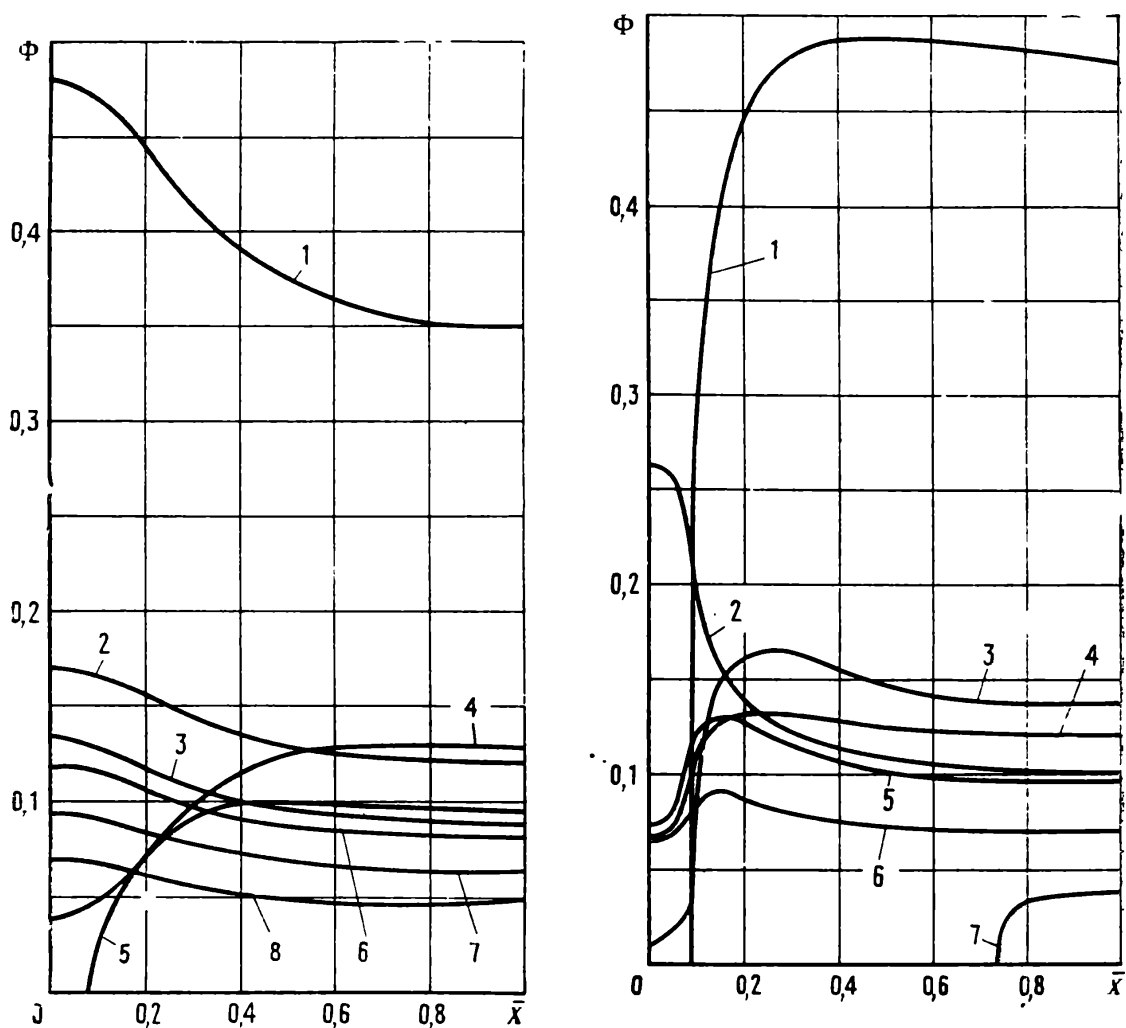


Рис. 8.15. Характеристики критерия Φ для различных конструкционных материалов:

1 — бериллий; 2 — ВТ16; 3 — ВН35; 4 — АЦМУ; 5 — АМг6; 6 — ВНС4; 7 — ЭИ835; 8 — ВХ1. Вариант I: $T_{x=0} = 870 \text{ K}$

Рис. 8.16. Характеристики критерия Φ для различных конструкционных материалов:

1 — бериллия; 2 — ВМ1; 3 — ВН35; 4 — ВНС4; 5 — ЭИ835; 6 — ВХ1; 7 — АЦМУ. Вариант III: $T_{x=0} = 1720 \text{ K}$

Исследуемые конструкционные материалы. Каждая новая марка материала характеризуется не только соответствующими значениями $T_{пл}$, но также и определенной величиной плотности ρ , которая принята для каждого материала постоянной, т. е. не зависящей от изменения температуры. Численные значения ρ для исследуемых конструкционных материалов приведены в табл. 8.11.

Расчет $E(T)$ необходимо вести по формулам (8.23) и (8.24), а σ_b^T — по формуле (8.12). Значения коэффициента f_T подсчитываются в соответствии с данными, приведенными в табл. 8.9.

Расчет критерия $\Phi(T)$, или $\Phi(\bar{x})$ целесообразно вести, как показал опыт, с помощью электронно-вычислительных машин. Интег-

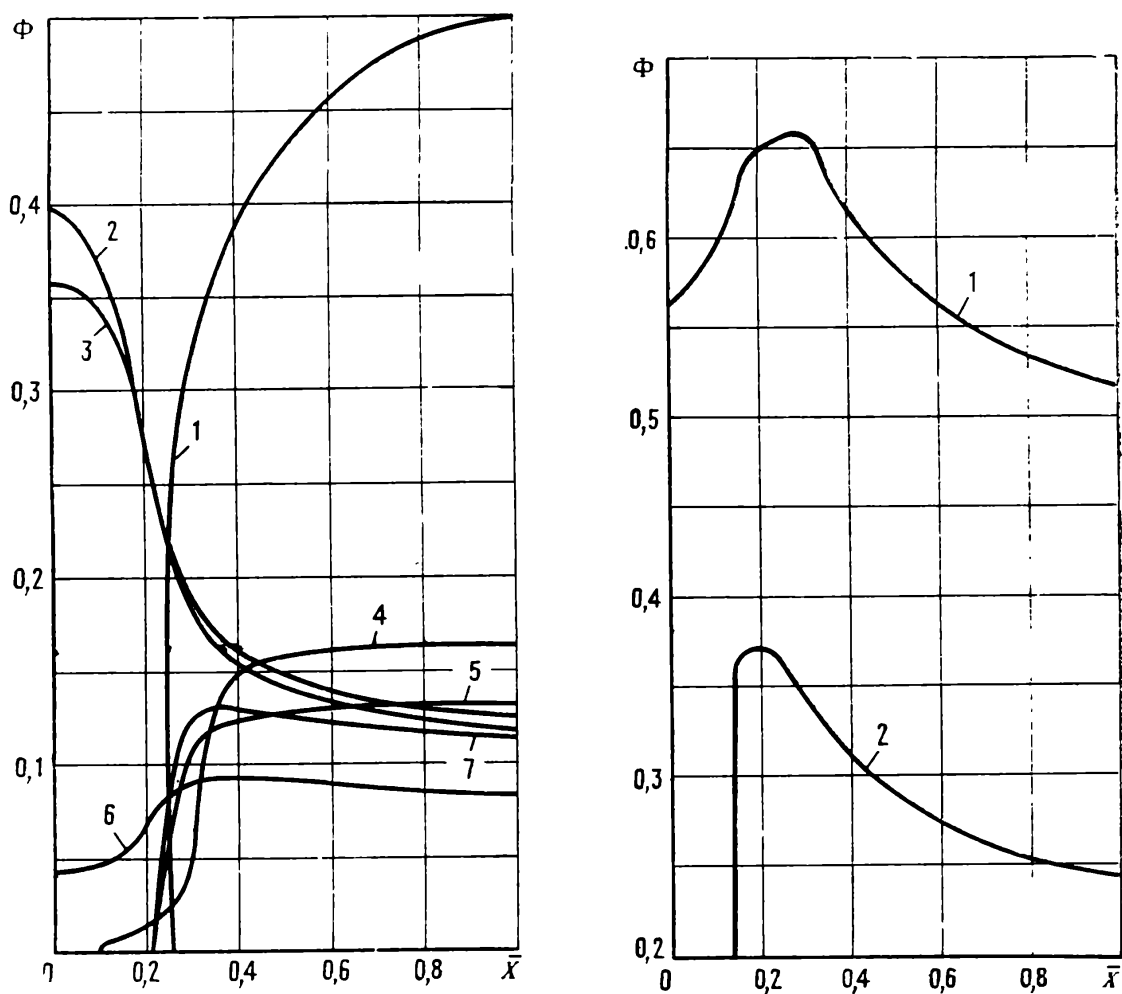


Рис. 8.17. Характеристики критерия Φ для различных конструкционных материалов:

1 — бериллия; 2 — BM1; 3 — BN2; 4 — BN35; 5 — BNC4; 6 — BX1; 7 — ЭИ835. Вариант V: $T_{\bar{x}=0} = 2170$ К

Рис. 8.18. Характеристики критерия Φ для сплавов BM1 (1) и BN2 (2). Вариант VII: $T_{\bar{x}=0} = 2870$ К

Таблица 8.11

Численные значения ρ для исследуемых конструкционных материалов

Сплав	Плотность ρ , кг/м ³	Сплав	Плотность ρ , кг/м ³
АМг6	$2,64 \cdot 10^3$	BX1	$7,2 \cdot 10^3$
АЦМУ	$2,78 \cdot 10^3$	BN2	$8,7 \cdot 10^3$
ЭИ835	$7,82 \cdot 10^3$	BM1	$10,20 \cdot 10^3$
BNC4	$7,81 \cdot 10^3$	BB2	$19,30 \cdot 10^3$
BT16	$4,68 \cdot 10^3$	Be	$1,85 \cdot 10^3$
BN35	$6,70 \cdot 10^3$		

рирование следует производить с шагом, равным 10 К. Поскольку некоторые из интегралов, например, интеграл вида

$$J = \int_{T_0}^{T_p} \frac{0,0967 dT}{\sqrt[3]{946 B_{0,5} T_{пл} \left(1,15 - 0,3 \frac{T}{T_{пл}}\right) \exp\left(-0,45 \frac{T}{T_{пл}}\right)}}$$

не являются табличными и, следовательно, не могут быть взяты точно, то вычисление их можно вести приближенно по методу Симпсона с использованием специальных подпрограмм.

Результаты вычислений представлены для сравниваемых марок материалов на рис. 8.15—8.18. Из сопоставления этих данных видны четко обозначенные области рационального применения каждого из рассмотренных материалов.

Глава 9

Типовая технология изготовления решетчатых крыльев

9.1. Выбор рационального метода изготовления решетчатых крыльев

Первые образцы решетчатых крыльев в 50-е годы изготавливали такими известными в авиастроении методами, как клепка, сварка, кокильное литье, хотя они и не обеспечивали высоких технико-экономических показателей при тех новых требованиях, которые были обусловлены появлением решетчатых крыльев. Известны примеры, когда стальные решетчатые крылья выфрезеровывали из монолитных поковок ценой огромных трудозатрат и потерь металла, до 90% отходящего в стружку.

С появлением в конце 50-х годов сотовой (ферменной) схемы решетчатых крыльев, отличающейся большей сложностью, чем рамная конструкция, возникла задача исследования и разработки рационального метода изготовления и построенной на его основе типовой технологии, которые бы позволили осуществлять процесс производства указанных изделий с наибольшим технико-экономическим эффектом.

Решетчатые крылья, как и любые другие конструкции, могут изготавливаться различными методами, т. е. путем использования принципиально разных технологических процессов. Наряду с методами холодной обработки, такими как клепка, склеивание, резание — механическое и электроэрозионное, могут быть использованы и методы горячей обработки — сварка, пайка, литье. Кроме того, не исключена возможность применения комбинированных методов (сочетание различных технологических процессов). Следовательно, в общем случае выбор рационального метода изготовления решетчатых крыльев относится к числу задач с многозначными решениями.

Известно, что меньшая стоимость изделия обычно достигается применением процесса с меньшей трудоемкостью, меньшими расходами на конструкционный материал, что, в свою очередь, связано с коэффициентом его использования. Следует стремиться к сокращению технологического цикла изготовления изделия, вследствие чего изменяются и накладные расходы.

С целью конкретизации задачи и возможности проведения анализа было выбрано некоторое условное решетчатое крыло рамной конструкции с двумя боковинами, числом планов $n=20$, хордой $b=100$ мм, относительным шагом $\bar{t}=0,5$ и относительной толщиной планов $\bar{c}=c/b=0,05$. Отсюда были получены габаритные размеры, абсолютный шаг и абсолютная толщина планов: $H=250$ мм, $l=1000$ мм, $t=50$ мм и $c=5$ мм.

Остальные конструктивно-производственные и эксплуатационные требования к крылу предполагались в этом случае заданными в соответствии с положениями, изложенными в гл. 1. Исходя из этого производилась оценка применимости того или иного метода изготовления крыла.

Рациональный метод изготовления определялся путем сравнения возможностей, которыми располагают различные методы применительно к условному варианту решетчатого крыла. Для удобства сравнения возможности различных методов сведены в табл. 9.1, где рассмотрены методы холодной и горячей обработки.

Прежде всего оценивалась применимость того или иного метода для различных конструкционных материалов — легких сплавов, сталей, а также сплавов на основе никеля, хрома, ванадия, ниобия, молибдена, тантала и вольфрама. Ввиду отсутствия однозначных и точных критериев такой оценки применимость различных методов рассматривалась экспертно на основе данных научно-исследовательских работ и опыта отечественной промышленности [17, 24, 26, 29, 31, 34, 39, 46] и обозначалась знаком «плюс» — возможно, знаком «минус» — трудноосуществимо.

Следующим свойством различных методов, принятым во внимание, была характеристика заготовок для планов, боковин или крыла в целом.

Было установлено, что наиболее вероятными заготовками могут быть полосы различной толщины, поковки прямоугольного сечения или отливки. Предполагалось, что профилированные полосы могут быть заменены листовым материалом.

Поскольку характер заготовок решающим образом влияет на степень использования материала в изделии, то для оценки различных методов изготовления решетчатых крыльев был выбран коэффициент использования материала $K_{и.м.}$, под которым понимается отношение чистой массы изделия m к норме расхода материала N :

$$K_{и.м.} = m/N. \quad (9.1)$$

Таблица 9.1

Возможности различных методов в изготовлении решетчатых крыльев

№ по пор.	Метод изготовления	Применимость для конструктивных сплавов на основе												Характеристика заготовок	Коэффициент использования материала	Трудоемкость изготовления условного крыла, ч	Примечание
		Mg	Al	Be	Ti	Fe	Ni	Cr	V	Nb	Mo	Ta	W				
1	Клейка	+	+	—	+	+	+	—	+	+	—	+	—	Профилированные полосы	0,90	1,6	Толщина боковин из-за нахлестки в 1,2—1,5 раза больше, чем в пп. 3.4, 5 «а», 6 и 7
2	Склеивание	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	То же	0,99	2,0	То же, что и в п. 1. Конструкция работоспособна до 700—800 К
3	Обработка резанием	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Поковка	0,13	60,0	Сверление с последующим фрезерованием
4	Электроискровая обработка	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	»	0,13	2,2	Одновременная прошивка всех ячеек решетki
5	Сварка: а) плавлением б) контактная (точечная) в) ультразвуковая	+	+	—	+	+	+	—	+	+	+	+	—	Профилированные полосы	0,99	1,0	Ограниченная толщина элементов крыла: $c_{min} \geq 0,5$ мм
6	Пайка	+	+	+	+	+	+	—	+	+	+	+	—	То же	0,99	0,53	То же, что и в п. 1
		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	То же	0,99	0,67	Допустимо соединение различных материалов при разности деталей от 1:1 до 1:100
		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	»	0,99	0,50	То же, что и в п. 5 «в», а также возможность сокращения трудоемкости при групповой пайке крыльев
7	а) Литые кокильные б) Литые по выплавляемым моделям	+	+	—	+	+	+	+	—	—	—	—	Отливка	0,71—0,74	1,5	Ограниченная толщина элементов решетчатых крыльев: $c_{min} \geq 2$ мм	
		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—	»	0,91	8,6	$c_{min} \geq 1$ мм	

Этот коэффициент является показателем технического уровня производства и технологичности изделия. В современном машиностроении величина его не превышает значений 0,4—0,6.

Подсчет $K_{и.м}$ для рассматриваемых случаев (см. табл. 9.1) производился при некоторых упрощающих условиях. Как видно из таблицы, значения этого коэффициента изменяются в широком диапазоне — от 0,13 до 0,99, а с учетом сделанных допущений — и еще более. Следовательно, лишь по одному этому критерию можно достаточно обоснованно отбросить, как нерациональные, те методы, при которых $K_{и.м}$ ниже уровня, достигнутого в целом в машиностроении, т. е. различные методы механической, электрической и электрохимической обработки монолитных поковок.

Другим критерием для оценки различных методов была выбрана трудоемкость изготовления условного стального крыла, выраженная в часах. Для сравнения трудоемкости изготовления крыла при различных методах производился подсчет лишь основного (технологического) времени, без учета вспомогательного, подготовительно-заключительного и т. п., поскольку именно этот член в формуле калькуляционной нормы времени зависит от применения того или иного метода изготовления изделия. Конечные результаты подсчета приведены в табл. 9.1, из которой видно, что этот показатель также изменяется в широких пределах — от 0,5 до 60 ч. На основе данного критерия были исключены как нерациональные методы литья, склеивание и клепка. Оставшиеся различные виды сварки и пайка оказались наименее трудоемкими. Кроме того, все эти методы обеспечивают наивысшее значение коэффициента $K_{и.м}$.

Для окончательного решения вопроса о рациональном методе изготовления решетчатых крыльев было учтено влияние нахлесточных соединений на массу изделия, а также были приняты во внимание ограничения по толщине элементов конструкции и эксплуатационной температуре, которые вытекают из анализа специфики разных методов обработки и возможности группового принципа изготовления изделий. Эти положения приведены в табл. 9.1 в виде примечаний, а влияние методов изготовления на массу решетчатого крыла более подробно рассмотрено ниже.

Анализ данных табл. 9.1 показывает, что наибольшими техническими и экономическими возможностями обладает такой метод, как пайка, который и был рекомендован в качестве основного при проектировании типового технологического процесса изготовления решетчатых крыльев.

С целью выяснения степени влияния $K_{и.м}$ на экономичность изготовления изделий проведен анализ затрат на основной материал для решетчатых крыльев, выполняемых различными методами.

Определить заранее точную стоимость нового изделия или его отдельного агрегата весьма затруднительно. Однако достаточно

твёрдо установлено, что доля стоимости основных материалов в общих затратах на изготовление современных изделий составляет не менее 40% и имеет тенденцию к повышению в связи с усложнением техники. Поэтому для решетчатых крыльев, эксплуатируемых в широком диапазоне температур, важно выяснить характер влияния того или иного метода изготовления на стоимость расходуемого материала и тем самым полнее оценить экономичность выбранного варианта.

На изготовление одного крыла массой m (кг) требуется израсходовать

$$C_{o.m}^{(1)} = NC_m - m_o C_o, \quad (9.2)$$

где $C_{o.m}^{(1)}$ — затраты на основной материал для одного изделия, руб.; N — норма расхода материала на одно изделие, или масса заготовки, кг; C_m — стоимость материала в заготовке, руб./кг; m_o — масса отходов при обработке заготовки, кг; C_o — стоимость отходов материала, руб./кг.

Величина N без учета возможных потерь в производстве может быть записана в виде

$$N = m + m_o. \quad (9.3)$$

Тогда после подстановки (9.3) в (9.2) получим

$$C_{o.m}^{(1)} = (m + m_o) C_m - m_o C_o. \quad (9.4)$$

Введя понятие об относительной стоимости отходов ω , выраженной в долях от стоимости материала в заготовке, т. е. обозначив

$$\omega = C_o / C_m \quad (9.5)$$

и произведя подстановку (9.5) в (9.4), получим

$$C_{o.m}^{(1)} = (m + m_o) C_m - m_o \omega C_m = C_m m \left[1 + \frac{m_o}{m} (1 - \omega) \right]. \quad (9.6)$$

Используя выражение (9.1) для совместного решения с (9.3), разделенным на величину m , можно записать

$$\frac{m_o}{m} = \frac{N}{m} - 1 = \frac{1}{K_{и.м}} - 1 = \frac{1 - K_{и.м}}{K_{и.м}}. \quad (9.7)$$

Тогда с учетом (9.7) выражение (9.6) после преобразований переписывается следующим образом:

$$C_{o.m}^{(1)} = m C_m \left[\frac{1 - \omega (1 - K_{и.м})}{K_{и.м}} \right]. \quad (9.8)$$

Обозначив безразмерный множитель в выражении (9.8) величиной W , окончательно получим

$$C_{o.m}^{(1)} = W C_m m. \quad (9.9)$$

Рис. 9.1. Номограмма для определения затрат в рублях на основной материал решетчатого крыла. Пунктиром показан пример решения задачи

Величины C_m для ряда современных, преимущественно листовых, материалов приведены в работе [18]. Колебания в стоимости объясняются главным образом различиями в толщине листов и условиях поставки.

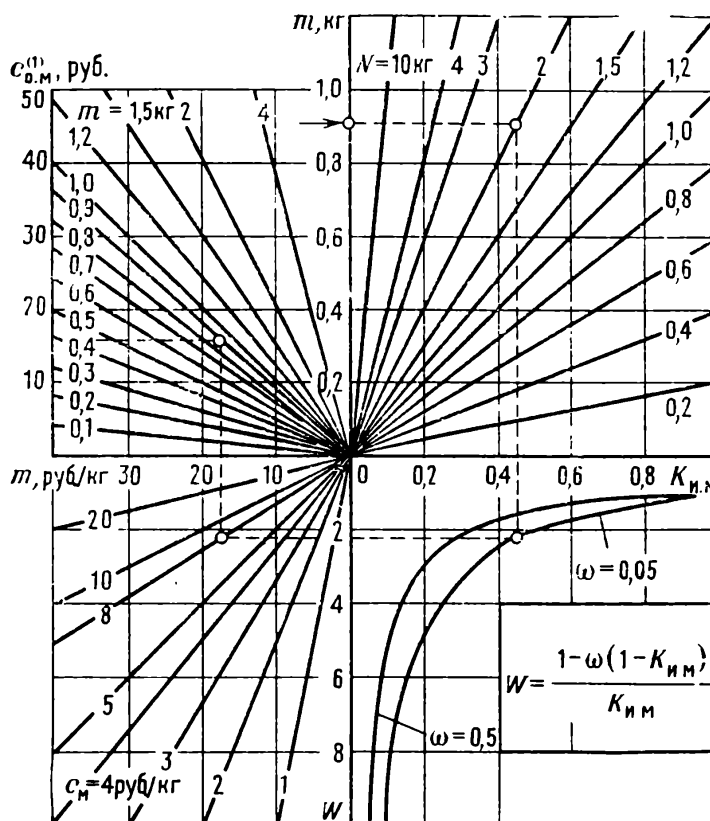
Для удобства расчетов по формуле (9.9) и решения обратных задач, т. е. когда по заданной предельной стоимости $C_{o.m}^{(1)}$, назначенной массе m и разным значениям C_m необходимо оценить величины N при разных значениях $K_{и.м.}$, полученные зависимости представлены на рис. 9.1 в виде номограммы. Изменение фактора W к функции $K_{и.м.}$ здесь дано при двух крайних значениях ω , исчерпывающих практически все возможные в современном производстве случаи учета стоимости отходов материала. Изображенный на левом нижнем поле номограммы график означает зависимость

$$\bar{C} = C_m W,$$

где \bar{C} — приведенная стоимость материала, руб./кг.

Итак, затраты на основной материал для решетчатых крыльев тем меньше, чем меньше стоимость конструкционного материала C_m и меньше масса изделия m , а, с другой стороны, при равных значениях ω тем меньше, чем больше коэффициент использования материалов в заготовках, т. е. чем более прогрессивен выбранный метод изготовления. Это означает, что при изготовлении крыльев равной массы и из одноименного материала, но разными методами затраты при равных значениях ω будут определяться исключительно величиной $K_{и.м.}$.

Следовательно, процесс пайки, выбранный по критерию трудоемкости изготовления изделия, оказывается наиболее эффективным и с точки зрения экономии затрат на основной материал.



9.2. Методика разработки и принципиальная схема типовой технологии изготовления решетчатых крыльев

Методика разработки типовой технологии изготовления решетчатых крыльев основывалась на принципах создания изделий, рассмотренных в работах [11, 17, 26, 29, 34], и результатах анализа возможностей различных методов изготовления решетчатых конструкций. В основных чертах эта методика состояла в следующем.

В соответствии с рациональной последовательностью этапов [34] логическим или расчетным методом на ЭВМ производился выбор конструкционного материала и припоя, удовлетворявших техническим условиям и специальным требованиям, предъявляемым к изделию. Далее планировалось параллельное проведение теоретических и экспериментальных исследований.

Первые преследовали цель накопления упорядоченной информации в соответствии с расчетами элементов математической модели процесса пайки [12, 17, 34] и формирования основных операций технологии изготовления решетчатых крыльев. Вторые предназначались для проверки полученных данных и накопления новой информации, а также для уточнения логических построений. Компоновка типовой технологии производилась, таким образом, методом последовательных приближений: от теоретических предпосылок и логических схем к практике, от накопленного опыта к усовершенствованной теории технологического проектирования и т. д.

Экспериментальные работы проводились по традиционной схеме: лабораторные образцы, затем макетные технологические узлы и модели с последующим переходом к натурным крыльям.

Для имитации элементов конструкции решетчатых крыльев при исследованиях и испытаниях применялись как стандартные, так и специальные образцы. Некоторые из последних показаны на рис. 9.2.

Для образца, спаянного втавр (рис. 9.2, б), расчет напряжения среза $\tau_{ср}$ (МПа) производился по формуле

$$\tau_{ср} = \frac{P}{10^6 c (ax + cy)},$$

где P — разрушающее усилие, Н; c — толщина материала, мм; a — длина нахлестки (перекрытия), мм; x и y — коэффициенты, зависящие от радиуса галтели R . При $R=2c$ $x=5,28$ и $y=3,08$.

Макетные узлы для отработки различных операций типовой технологии приведены на рис. 9.3.

При отработке технологии изготовления паяных образцов макетных узлов и моделей производились испытания на смачиваемость, растекаемость и эрозию, механические и коррозионные испытания, огневые испытания в сверхзвуковой струе газов жидкостно-

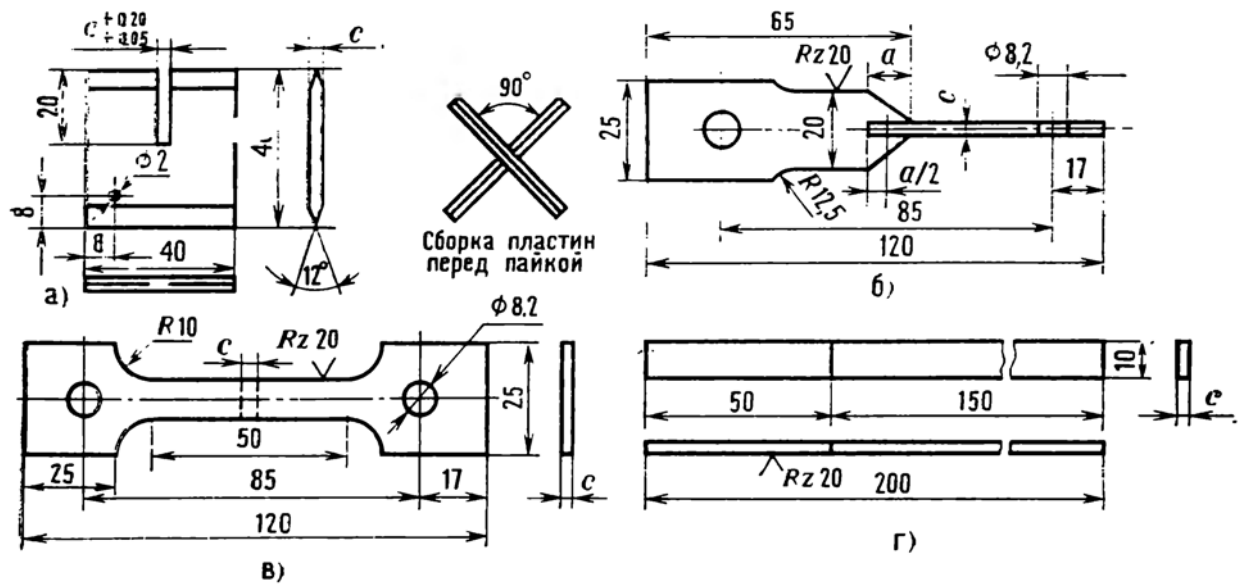


Рис. 9.2. Типы паяных образцов для испытания:

а — на эрозию при пайке; *б* — на срез (втавр); *в* — на срез (внахлестку); *г* — на выносливость (встык)

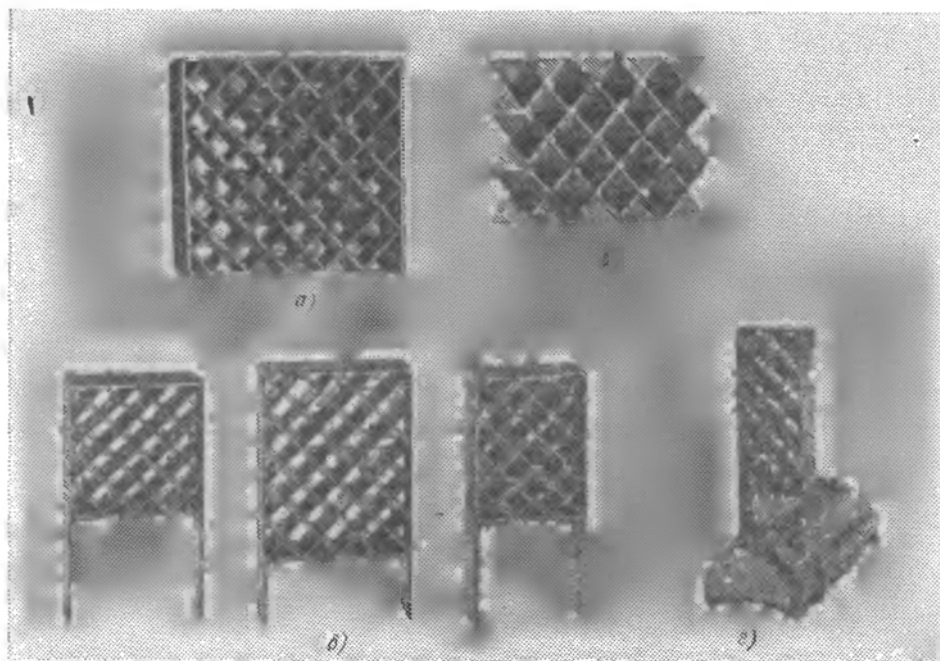


Рис. 9.3. Типы макетных узлов для отработки технологических операций:

а — нанесения припоев гальваническим методом; *б* — просечки тонкостенных планов при $c \geq 0,1$ мм; *в* — сборки и пайки; *г* — стыковки решетки с корпусом посредством пайки

реактивного двигателя при температурах 2200—3000 К, в струе газов турбореактивного двигателя при температурах 800—1150 К, а также применяли различные методы физико-химического исследования: измерение твердости и микротвердости, металлографический анализ, микрометрические измерения геометрии решеток, ульт-

тразвуковой контроль, измерение контактной разности потенциалов и микрорентгеноспектральный анализ.

Испытания паяных моделей и натуральных крыльев производили также на электродинамическом вибраторе и статических разрывных машинах.

С этой целью было изготовлено более 500 паяных моделей различных типов и размеров из сплавов на основе алюминия (АМгб, Д16АТ, АЦМУ), железа (30ХГСА, 12Х18Н10Т, 12Х18Н9Т, 08Х25Н16Г7АР (ЭИ835), 10Х16Н4БА (ЭП56, ЭП258), титана (ОТ4, ВТ6), хрома (ВХ1, ВХ2, ВХ3, ВХ4), ниобия (ВН2), молибдена (ВМ1), тантала и вольфрама (ВВ1). Химический состав, механические и технологические свойства сплавов указанных марок приведены в работах [18, 24, 34, 39, 46].

Выбор припоев и режимов пайки производили на основе результатов математического моделирования. Для пайки указанных материалов применяли стандартные припои ПСр40, ПСр37,5 и ПОС61, а также опытные сплавы (табл. 9.2—9.5), нашедшие промышленное использование. Наряду с этим применяли чистые металлы — медь, никель, палладий и титан. Припои № 3 и 6МА (см. табл. 9.5) были специально разработаны для пайки решетчатых крыльев.

Таблица 9.2

Припои для пайки алюминиевых сплавов

Марка	$t_3, ^\circ\text{C}$	$\Delta t_3, ^\circ\text{C}$	Химический состав, весовые %				
			Al	Cu	Co	Si	Zn
№ 48	375	14	7	3,9	0,5	—	88,6
№ 36А	490	15	56,5	20	—	3,5	20
№ 34А	525	0	$66 \pm 1,5$	28 ± 1	—	$6 \pm 0,5$	—

Таблица 9.3

Припои для пайки титановых сплавов

Марка	$t_3, ^\circ\text{C}$	$\Delta t_3, ^\circ\text{C}$	Химический состав, весовые %			
			Ag	Cu	Mn	Pd
83—17	780	40	83	17	—	—
85—15	960	10	85	—	15	—
75—20	1020	100	75	—	5	20

При отработке технологии изготовления решетчатых крыльев пайку образцов, макетных узлов, моделей и натуральных изделий производили преимущественно в печах (в контейнерах) в среде аргона первого состава с активными добавками типа трехфтористого бора, в среде водорода с точкой росы — 50°C или в среде азота

Таблица 9.4

Припой для пайки тугоплавких сплавов

Марка	$t_3, ^\circ\text{C}$	$\Delta t_3, ^\circ\text{C}$	Химический состав, весовые %					
			Nb	Ti	V	Mo	Zr	Hf
65—20—15	1550	40	—	20	15	—	—	65
75—25	1740	10	25	—	—	—	75	—
77—20—3	1750	30	20	—	—	3	77	—
74—20—6	1750	100	—	20	—	6	—	74

Таблица 9.5

Припой для пайки жаропрочных сталей и никелевых сплавов

Марка	$t_3, ^\circ\text{C}$	$\Delta t_3, ^\circ\text{C}$	Химический состав, весовые %						
			Ni	Mn	Cr	Si	Fe	B	Cu
61—20—19	990	50	19	20	—	—	—	—	61
Г70НХ	1030	60	20—23	Остальное	4—5	0,8	2	—	C=0,3
ВПр1	1080	40	27—30	—	—	1,5—2	1,5	0,1—0,3	Остальное
ПЖК-35	1130	40	Остальное	34—37	17—20	0,8	1,5	0,1	Co=
6МА	1130	30	»	—	13—16	6—8	—	0,3—0,5	=8—10
№ 3	1200	40	14	18—28	18—28	1	18—28	1	Mo=
									=7—23
									—

с точкой росы — 70°C , а также вакууме до 10^{-3} — 10^{-5} мм. рт. ст. ($133 \cdot 10^{-3}$ — $133 \cdot 10^{-5}$ Па). В отдельных случаях применяли пайку погружением в расплавленный припой, флюсовую пайку горелками, паяльником и бесфлюсовую ультразвуковую пайку.

Сведения о режимах и особенностях пайки приводятся ниже в данной главе, а также в работе [34]. Некоторые типы моделей, выполненных пайкой, показаны на рис. 9.4 и 9.5.

Наряду с собственно технологией пайки отрабатывали подготовительно-заключительные операции изготовления решетчатых крыльев, а также операции, связанные с получением элементов конструкции из листовых заготовок и сборкой крыльев перед пайкой.

Типовая технология изготовления паяных решетчатых крыльев (рис. 9.6) заключается в следующем.

Заготовительные работы. Раскрой листов осуществляли с помощью гильотинных ножниц в соответствии с предварительной раз-

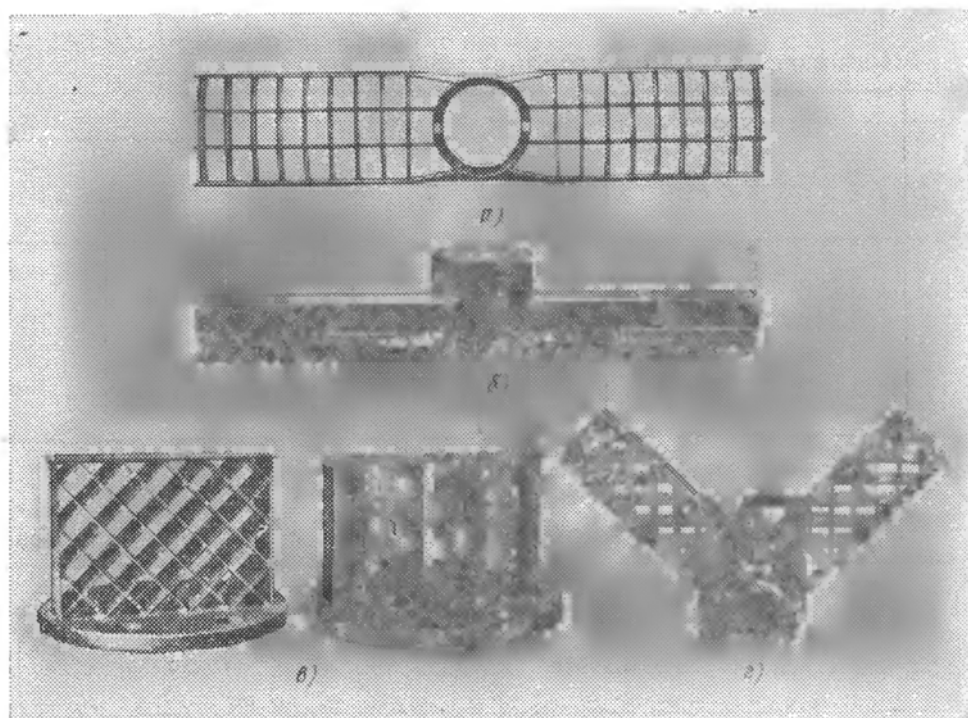


Рис. 9.4. Некоторые типы паяных моделей для аэродинамических испытаний:

а и **б** — рамная из стали 30ХГСА; **в** — сотовая и рамная из стали 12Х18Н10Т; **г** — сотовая из стали 12Х25Н16Г7АР

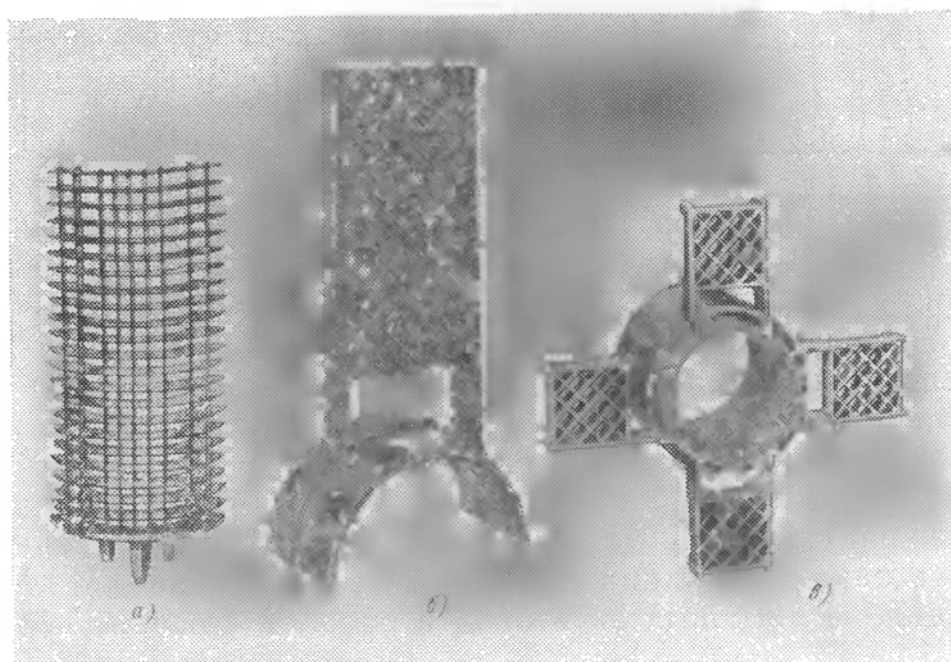


Рис. 9.5. Некоторые типы паяных моделей для аэродинамических испытаний:

а — рамная сферическая (складывающееся крыло) из стали 30ХГСА; **б** — сотовая из стали 12Х18Н10Т; **в** — сотовая из стали 10Х16Н4БА

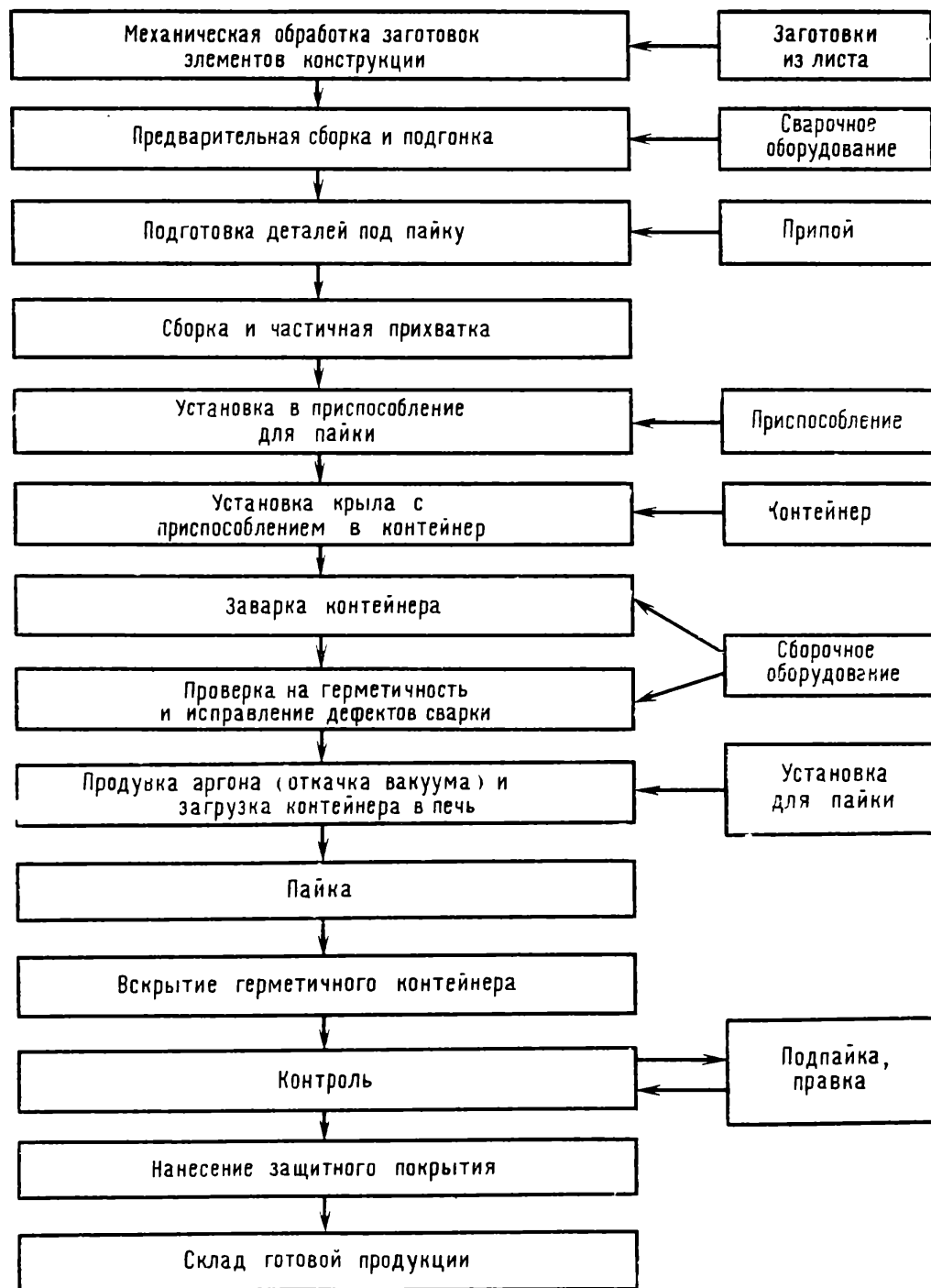


Рис. 9.6. Принципиальная схема типового технологического процесса изготовления цельнопаяных решетчатых крыльев

меткой. Листы из вольфрама, молибденового и хромовых сплавов разрезали электроискровым способом или тонкими абразивными дисками.

Механическая обработка. Для получения боковин переменного сечения по длине применяли фрезерование. Заострение планов и боковин производили шлифованием или химическим фрезерованием. Изготовление пазов на планах осуществляли как фрезерова-

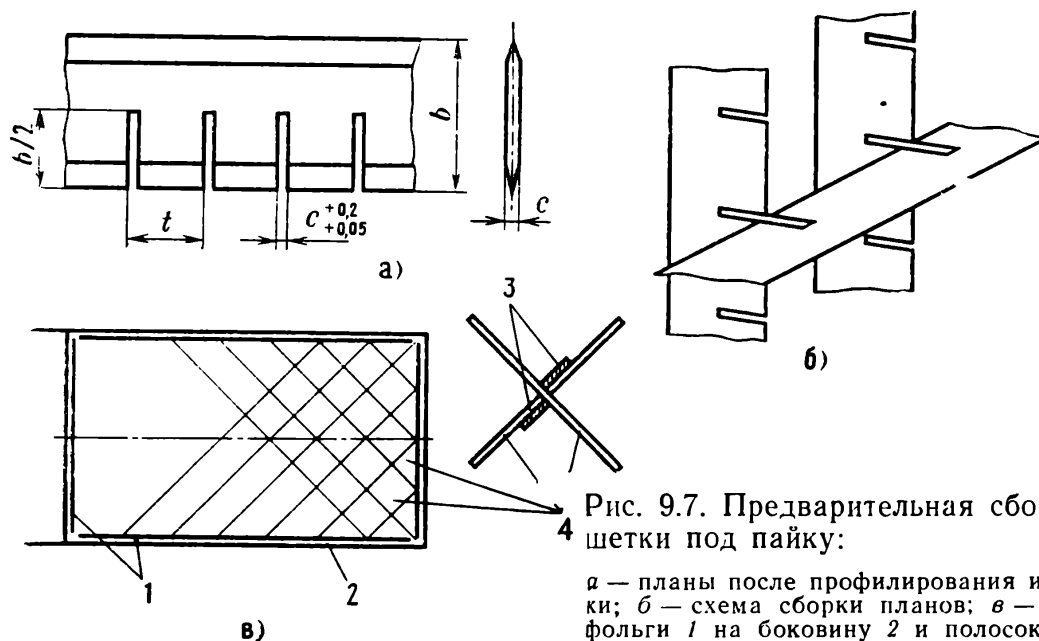


Рис. 9.7. Предварительная сборка решетки под пайку:

а — планы после профилирования и просечки; б — схема сборки планов; в — укладка фольги 1 на боковину 2 и полосок припоя 3 на планы 4

нием, так и просечкой в штампах. После зачистки заусенцев планы, боковины и поперечные стержни (нервюры) поступали на сборку.

Слесарно-сборочные работы. Предварительную сборку производили по схеме, указанной на рис. 9.7. На собранном крыле выборочно проверяли зазоры в местах пересечения планов. Величина зазоров должна составлять от 0,05 до 0,2 мм. Это требование вытекает из условия обеспечения полного пропайвания всех соединений. Далее производили подготовку и прихватку внутреннего набора к окантовывающей раме с помощью контактной электросварки.

Термические работы. При подготовке к пайке производили группу операций, связанных с получением химически чистой поверхно-

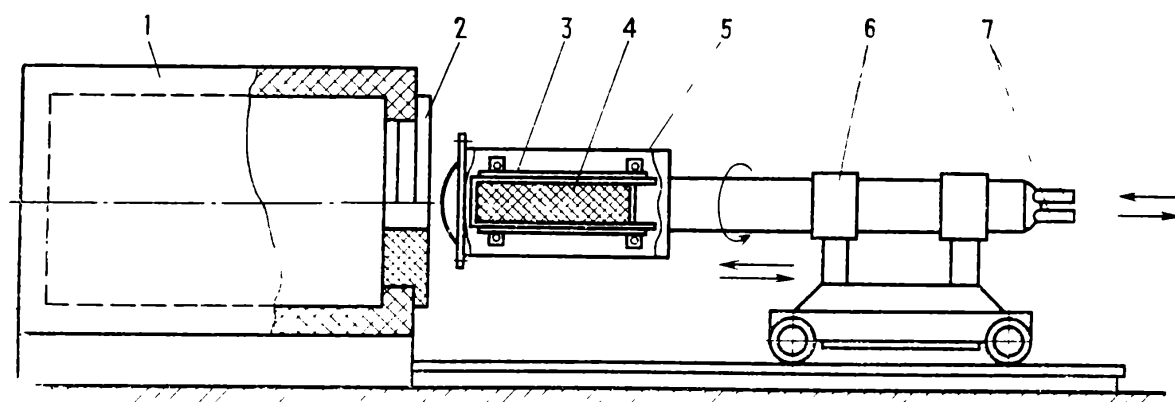


Рис. 9.8. Комплекс устройств для пайки решетчатых крыльев:

1 — высокотемпературная печь; 2 — разъемная дверца; 3 — фиксирующее приспособление; 4 — паяемое изделие; 5 — контейнер; 6 — тележка-манипулятор; 7 — трубопроводы для циркуляции газовой среды

сти соединяемых деталей, нанесением фольги или полосок припоя, закрепляемых с помощью конденсаторной электросварочной машины ТКМ-4, а также установку крыла в приспособление, вместе с которым крыло загружается в контейнер. После герметизации контейнера рабочее пространство продували соответствующим газом (или откачивали вакуум), и изделие поступало в печь.

Пайка является процессом окончательной сборки крыла, поэтому соблюдение назначенного режима является главным условием получения высококачественного изделия. Комплекс основных устройств, необходимых для высокотемпературной пайки, схематически показан на рис. 9.8.

Заключительные операции. В задачи контроля должно входить определение не только качества пайки, но также геометрических размеров и формы изделия. Испытание крыла на статическую прочность осуществляли с помощью специальных устройств. К числу заключительных операций относится также нанесение на крыло защитного покрытия.

9.3. Уравнение состояния производства решетчатых крыльев при выбранной схеме технологического процесса

С целью проведения количественного анализа трудоемкости отдельных операций и выяснения степени влияния вносимых усовершенствований на повышение эффективности типовой технологии в целом [11, 44] было рассмотрено уравнение состояния производства решетчатых крыльев.

В общем случае суммарную трудоемкость операций технологического процесса изготовления паяного решетчатого крыла θ можно представить в виде трудоемкостей следующих групп работ: заготовительных $v_{\text{заг}}$, механической обработки $v_{\text{мех}}$, слесарно-сборочных $v_{\text{сл.сб}}$, термических (пайка) $v_{\text{терм}}$ и заключительных $v_{\text{закл}}$ (контрольно-измерительных, испытаний и малярных работ). Тогда величину θ можно записать:

$$\theta = \sum_{i=1}^n v_i$$

или с учетом указанной выше группировки в виде

$$\theta = v_{\text{заг}} + v_{\text{мех}} + v_{\text{сл.сб}} + v_{\text{терм}} + v_{\text{закл}}.$$

Разделив это равенство на θ и введя понятие об удельной безразмерной работе

$$\xi_i = \frac{v_i}{\theta},$$

получим уравнение относительных трудоемкостей:

$$1 = \sum_{i=1}^n \xi_i = \xi_{\text{заг}} + \xi_{\text{мех}} + \xi_{\text{сл.сб}} + \xi_{\text{терм}} + \xi_{\text{закл}}. \quad (9.10)$$

Чтобы проанализировать, какими же факторами следует воспользоваться для наибольшего сокращения трудоемкости, необходимо установить зависимости отдельных составляющих ξ_i от влияющих на них параметров:

$$\begin{aligned} \xi_{\text{заг}} &= f(a_f, b_f...); \\ \xi_{\text{мех}} &= \varphi(a_\varphi, b_\varphi...); \\ \xi_{\text{сл.сб}} &= \chi(a_\chi, b_\chi...); \\ \xi_{\text{терм}} &= \psi(a_\psi, b_\psi...); \\ \xi_{\text{закл}} &= \xi(a_\xi, b_\xi...). \end{aligned} \quad (9.11)$$

После подстановки (9.11) в уравнение (9.10) получим согласно [11] уравнение состояния производства паяных крыльев:

$$1 = f(a_f, b_f...) + \varphi(a_\varphi, b_\varphi...) + \chi(a_\chi, b_\chi...) + \psi(a_\psi, b_\psi...) + \xi(a_\xi, b_\xi...). \quad (9.12)$$

По величине частных производных $\frac{\partial f}{\partial a_f}$, $\frac{df}{db_f}$... можно судить о степени влияния изменений a_f , b_f ... на f , а по произведению $\delta a_f \frac{\partial f}{\partial a_f}$, $\delta b_f \frac{\partial f}{\partial b_f}$ и т. д. — о величине изменения f при изменении аргументов a_f , b_f ... на величину δa_f , δb_f . Таким образом, в результате изменения, например, a_f на величину δa_f первое слагаемое уравнения состояния производства при усовершенствовании технологии будет равно

$$f_1 = \left(f - \delta a_f \frac{\partial f}{\partial a_f} \right) < f, \quad (9.13)$$

так как в случае снижения трудоемкости производная $\frac{\partial f}{\partial a_f}$ будет отрицательной.

Поскольку согласно (9.13) $f - f_1 = \delta a_f \frac{df}{da_f} = \delta f$ или, иначе, $f - \delta f = f_1$, то уравнение (9.12) можно записать в виде

$$1 - \delta f = f_1 + \varphi + \chi + \psi + \xi. \quad (9.14)$$

Поделив каждый член полученного уравнения на его левую часть, будем иметь

$$1 = \frac{f_1}{1 - \delta f} + \frac{\varphi}{1 - \delta f} + \frac{\chi}{1 - \delta f} + \frac{\psi}{1 - \delta f} + \frac{\xi}{1 - \delta f}. \quad (9.15)$$

Отсюда видно, что от изменения одного из слагаемых меняют свою величину и все остальные, т. е. происходит перераспределение значимости слагаемых. Следовательно, при некотором усовершенствовании одной группы работ другая группа становится наиболее трудоемкой и нуждается, в первую очередь, в дальнейшем усовершенствовании. Поэтому уравнение состояния производства открывает неограниченные возможности для исследования весомости усовершенствований любого из технологических факторов и оценки влияния каждого из них на все остальные.

Теперь запишем составляющие элементы этого уравнения.

1. Заготовительные работы. Основное машинное время (мин) для разрезки заготовок из листа на один комплект крыла составляет: для сотового набора

$$\tau_p^{\text{сot}} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2m} \right) \frac{1,41l(b+f)}{tr} \left(\frac{r}{b+f} + 1 \right); \quad (9.16)$$

для боковин

$$\tau_p^b = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2m} \right) 2 \frac{b_6}{r} \left(\frac{r}{b_6} + 1 \right); \quad (9.17)$$

для поперечных стержней (нервюр)

$$\tau_p^{\text{н}} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2m} \right) 2 \frac{b+f}{r} \left(\frac{r}{b+f} + 1 \right), \quad (9.18)$$

где n — число двойных ходов ножа в минуту, изменяющееся обычно в пределах $40 \leq n \leq 60$; m — число кулачков зацепления муфты включения гильотинных ножниц, причем $m = 2 \dots 3$; l, b, t, b_6 — геометрические параметры решетчатого крыла; r — длина листа; f — стрела прогиба набора в крыле цилиндрической формы.

2. Механические работы. Эта группа может быть представлена в виде таких составляющих, как фрезерные, сверлильные, штамповочные и шлифовочные работы.

А. Основное машинное время (мин) фрезерования: сотового набора

$$\tau_{\text{фр}}^{\text{сot}} = \frac{\pi T^m S^{x-1} D^{y-q+\frac{n+1}{2}} (cJ)^r}{1000 \cdot c_V K_V \omega^p} \left\{ \left[2R_u \left(\arcsin \frac{H}{R_u \sqrt{2}} + \arcsin \frac{H}{(R_u + b) \sqrt{2}} \right) + 2b \left(\arcsin \frac{H}{(R_u + b) \sqrt{2}} + 1 \right) \right] \frac{1,41l}{Jt} + 0,5D + \Delta \right\}; \quad (9.19)$$

боковин

$$\tau_{\text{фр}}^b = \frac{2\pi T^m S^{x-1} D^{y-q+\frac{n+1}{2}} (c_6 J_6)^r}{1000 \cdot c_V k_V} \left[2(l+h+b) + \sqrt{t_h(D-t_h)} + \Delta \right]; \quad (9.20)$$

поперечных стержней (нервюр)

$$\tau_{\text{фр}}^{\text{н}} = \frac{2\pi T^m S^{x-1} D^{y-q+\frac{n+1}{2}} (c_{\text{н}} J_{\text{н}})}{1000 \cdot c_V k_V \omega^p} \left[2R_{\text{ц}} \left(\arcsin \frac{H}{R} + \arcsin \frac{H}{R_{\text{ц}} + b} \right) + \right. \\ \left. + 2b \left(\arcsin \frac{H}{R_{\text{ц}} + b} + 1 \right) + 0,5D + \Delta \right], \quad (9.21)$$

где c , c_6 , $c_{\text{н}}$, b , l , t , H — геометрические параметры решетчатого крыла; T — стойкость фрезы; S — подача на один зуб фрезы; D — диаметр фрезы; J , J_6 , $J_{\text{н}}$ — число заготовок в пакете соответственно для планов, боковин и стержней (нервюр); $R_{\text{ц}}$ — радиус цилиндрической поверхности крыла; Δ — величина перебега фрезы, причем $1 \leq \Delta \leq 5$ мм; k_V — общий поправочный коэффициент на изменение условий обработки; c_V — коэффициент, характеризующий обрабатываемый материал и условия обработки; ω — угол наклона винтовой канавки фрезы; h — припуск; t_h — глубина резания; m , x , y , q , n , r , p — показатели степени, характеризующие интенсивность обработки (выбираются по справочнику [46]).

Б. Основное машинное время (мин) сверления отверстий d_1 , d_2 , d_3 и d_4 (вспомогательных, установочных и базовых) определяется следующим образом:

для d_1

$$\tau_{\text{св}}^{d_1} = \frac{\pi T^m S^{y_V-1}}{1000 \cdot c_V k_V D_1^{z_V-1}} \left(\frac{2,82l_c}{t} + \frac{0,85lD_1}{t} + \Delta \right); \quad (9.22)$$

для d_2

$$\tau_{\text{св}}^{d_2} = \frac{\pi T^m S^{y_V-1}}{1000 \cdot c_V k_V D_2^{z_V-1}} \left(\frac{2,82l_c}{t} + \frac{0,85lD_2}{t} + \Delta \right); \quad (9.23)$$

для d_3

$$\tau_{\text{св}}^{d_3} = \frac{\pi T^m S^{y_V-1}}{1000 \cdot c_V k_V D_3^{z_V-1}} (4c_6 + 0,6D_3 + \Delta); \quad (9.24)$$

для d_4

$$\tau_{\text{св}}^{d_4} = \frac{\pi T^m S^{y_V-1} (3c_6 + 0,9D_4 + \Delta)}{1000 \cdot c_V k_V D_4^{z_V-1}}, \quad (9.25)$$

где l , c , t , c_6 — геометрические параметры решетчатого крыла; T — стойкость сверла; S — подача, мм, на один оборот; D_1 , D_2 , D_3 , D_4 — диаметры сверл; Δ — величина перебега сверла, изменяющаяся в пределах $1 \leq \Delta \leq 2$ мм; c_V , k_V — то же, что и в выражениях (9.19) — (9.21); m , y_V , z_V — показатели степени, выбираемые по справочнику [46].

В. Основное машинное время (мин) штамповочных работ складывается из следующих затрат:

на рубку пластинок припоя в штампах

$$\tau_{шт}^p = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2m} \right) \left[\frac{0,43HlR^2}{t^2\delta S_0} + \left(\frac{H+l}{1,41t} \right) \frac{4,84R^2 + a\Delta}{\delta_1 S_0} \right], \quad (9.26)$$

где n, m — то же, что и в формулах (9.16) — (9.18); H, l, t — геометрические параметры решетчатого крыла; R — радиус галтели припоя; a — величина нахлестки паяного шва; Δ — сборочный зазор в нахлесточном состоянии; δ, δ_1 — ширина полосок припоя для тавровых (крестообразных) и соответственно для нахлесточных соединений; S_0 — толщина полосок припоя;

на просечку пазов в планах

$$\tau_{шт}^{up} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2m} \right) \frac{2Hl}{t^2}, \quad (9.27)$$

где обозначения соответствуют принятым в (9.26);

на гибку деталей сотового набора и рамы в штампах

$$\tau_{шт}^r = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2m} \right) \left[2,82 \left(\frac{H+l}{t} \right) + 12 \right], \quad (9.28)$$

где также приняты ранее указанные обозначения.

Г. Основное машинное время (мин) шлифовочных работ можно представить в виде затрат:

на шлифование кромок планов

$$\tau_{ш.л} = \frac{2,82lck \cos v}{tn_{д.х}S_d B_k t_n} \left[R_{ц} \arcsin \frac{H}{R_{ц} \sqrt{2}} + \right. \\ \left. + (R_{ц} + b) \arcsin \frac{H}{(R_{ц} + b) \sqrt{2}} \right], \quad (9.29)$$

где l, c, t, H, b — геометрические параметры решетчатого крыла; v — угол заточки носиков и хвостовиков планов; k — приведенное число пластин; $n_{д.х}$ — число двойных ходов рабочего стола в минуту; S_d — поперечная подача в долях шлифовального круга на один двойной ход; B_k — ширина шлифовального круга; t_n — глубина резания за один двойной ход; $R_{ц}$ — то же, что и в (9.19) — (9.21).

3. Слесарно-сборочные работы. Эта группа работ также может быть представлена в виде составляющих ее элементов.

А. Основное машинное время при контактной (точечной) сварке «рама — сотовый набор»

$$\tau_{к.с}^{р.н} = \frac{8,5i}{t} \left(\frac{1}{n} + \frac{\tau_{вкл}}{i} \right) (H + l), \quad (9.30)$$

где i — количество точек, подлежащих сварке за данную операцию; $\tau_{вкл}$ — время включения рабочего хода кнопкой; n — число ходов

электрода в минуту; \bar{i} — количество точек, свариваемых за одно включение машины; H, l, t — геометрические параметры крыла.

Б. Основное машинное время прихватки пластинок припоя

$$\tau_{\text{св}}^{\text{п}} = \frac{i}{\mu t} \left[\frac{2,84 (H + l) (1,21 R^2 + a \Delta)}{\delta_1 S_0} + \frac{0,43 R^2 H l}{t \delta S_0} \right], \quad (9.31)$$

где i — количество сварных точек на одну пластинку припоя, причем $6 \leq i \leq 10$; H, l, t — геометрические параметры крыла; R — радиус галтели припоя; a — величина нахлестки; Δ — соединительный зазор; μ — количество точек, которое можно поставить применяемым аппаратом в минуту; δ, δ_1, S_0 — то же, что и в (9.26).

В. Основное машинное время дуговой ручной сварки деталей рамы

$$\tau_{\text{св}}^{\text{д.р}} = \frac{36 (4 + \pi) b \gamma k_y k_{\text{ш}}^2}{\alpha_{\text{н}} I_{\text{св}}}, \quad (9.32)$$

где b — хорда крыла; γ — удельная масса наплавленного металла; k_y — коэффициент, учитывающий зазоры и выпуклость шва; $k_{\text{ш}}$ — длина катета сварного шва; $\alpha_{\text{н}}$ — коэффициент наплавки, г/А·ч; $I_{\text{св}}$ — сварочный ток, А.

Г. Основное машинное время на сварочные работы по герметизации контейнера

$$\tau_{\text{св}}^{\text{г.к}} = \frac{60 \gamma k_y k_{\text{ш}}^2}{\alpha_{\text{н}} I_{\text{св}}} [2,5 (H + 2c_6) + 2,5 (l + h_{\text{к}}) + 4 (b + f)], \quad (9.33)$$

где $h_{\text{к}}$ — припуск на длину контейнера, а остальные величины — согласно обозначениям в (9.16) — (9.18) и (9.32).

4. Подготовительные работы. В эту группу входят такие работы, как химическое травление элементов конструкции крыла, зачистка и протирка внутренней поверхности контейнера, продувка системы газоснабжения. Рассмотрим последовательно эти работы.

А. Продолжительность химического травления определяется по формуле

$$\tau_{\text{тр}} = \frac{1,11 n b^2 \varphi \delta_{\text{о.п}} \gamma_{\text{о.п}}}{V k_0 (1 + a_{\text{р}} \Delta t) \gamma_{\text{тр}}}, \quad (9.34)$$

где n — число пластин (планов), загружаемых одновременно в ванну; b — хорда крыла; φ — коэффициент пропорциональности; $\delta_{\text{о.п}}$ — толщина окисной пленки; $\gamma_{\text{о.п}}$ — плотность окисной пленки; V — объем раствора, соприкасающийся с единицей площади боковой поверхности детали в секунду, см³/см² с; $a_{\text{р}}$ — коэффициент активности раствора, 1/°С; Δt — изменение температуры раствора; $\gamma_{\text{тр}}$ — плотность раствора, г/см³; k_0 — концентрация травителя.

Б. Время, необходимое для зачистки и протирки внутренней поверхности контейнера может быть определено по формуле

$$\tau_{3.н}^{в.к} = (M + Л) [3,125 (H + 2c_6)(l + h) + 5(l + h)(b + f) + 5(H + 2c_6)(b + f)], \quad (9.35)$$

где M — норма времени на механическую зачистку стальной щеткой криволинейной поверхности (при площади 5000 мм^2 $M = 1,8$ мин); $Л$ — норма времени на протирку бензином (при площади 5000 мм^2 $Л = 0,9$ мин); остальные величины — в соответствии с изложенным выше.

В. Время, потребное для продувки системы газоснабжения контейнера

$$\tau_{пр}^k = \frac{3,125 (l + h) (H + 2c_6) (b + f)}{q}, \quad (9.36)$$

где q — расход нейтрального газа в пределах $12 \leq q \leq 25$ л/мин.

5. Термические работы (пайка). Время нагрева печи до температуры пайки зависит от ряда конкретных факторов и может быть определено по эмпирическим формулам. В частности, получена зависимость между температурой нагрева $t^\circ \text{С}$ и длительностью разогрева τ (мин) для печи мощностью 160 кВт и размерами рабочего пространства $920 \times 1000 \times 1820$ мм в виде

$$t = 138,2 \cdot \tau^{0,369}. \quad (9.37)$$

Подобная зависимость получена также для случая нагрева диссоциатора с нагревателем из сплава X20H80T, габаритными размерами рабочего пространства $150 \times 150 \times 250$ мм и мощностью источника 10 кВт:

$$\tau = \exp(0,0048t + 0,99). \quad (9.38)$$

Для расчета времени загрузки контейнера в нагревательное устройство можно воспользоваться формулой

$$\tau_{загр} = \frac{1,25 (l + h) + S}{v}, \quad (9.39)$$

где S — расстояние безопасной работы от крышки печи; v — скорость движения тележки с контейнером. Время выгрузки контейнера из печи, как показывает опыт, в 1,5—1,6 раза больше, чем $\tau_{загр}$.

6. Заключительные работы. Трудоемкость осмотра паяных швов решетчатых крыльев может быть вычислена по формуле

$$\tau_{осм} = \frac{Nb}{50} \left[\frac{2Hl}{t^2} + \frac{2,82 (H + l)}{t} \right], \quad (9.40)$$

где N — нормированное время осмотра (мин) одного паяного шва длиной 50 мм с учетом кантования крыла.

Прочие заключительные работы, в частности статические испытания, малярные работы, ультразвуковой контроль и т. п., существенно зависят от конкретных условий производства и здесь не рассматриваются.

Накопление статистических данных об относительной трудоемкости различных групп работ позволит сравнить их с результатами расчета по предлагаемым зависимостям и наметить пути усовершенствования технологического процесса изготовления решетчатых крыльев. Так, например, относительная трудоемкость изготовления крыла из стали ЭИ835, спаянного припоем ПЖК-35, складывается из следующих компонентов: заготовительные работы $\xi_{\text{заг}} = 0,008$; механические работы $\xi_{\text{мех}} = 0,254$; слесарно-сборочные работы $\xi_{\text{сл.сб}} = 0,324$; термические работы (пайка) $\xi_{\text{терм}} = 0,396$; заключительные работы $\xi_{\text{закл}} = 0,018$.

Для выяснения влияния изменения параметров крыла на перераспределение относительных трудозатрат рассмотрим пример. Пусть уравнение состояния производства крыла имеет вид

$$1 = f + C, \quad (9.41)$$

где согласно формуле (9.34) при $b = b_0 = 8$ мм продолжительность химического травления составит

$$\bar{\tau}_{\text{тр}} = f = 1,54 \cdot 10^{-4} \cdot b^2. \quad (9.42)$$

Тогда частная производная при $b = \text{var}$

$$\frac{\partial f}{\partial b_f} = 3,08 \cdot 10^{-4} b. \quad (9.43)$$

Давая малые приращения хорде b , например $\delta b_f = 0,01 b$; $b \delta_f = 0,05 b$ и т. д., можно согласно формулам (9.12) — (9.15) получить численные значения f , f_1 и C , приведенные в табл. 9.6.

Анализ технологических процессов изготовления разных по габаритным размерам и конструкции решетчатых крыльев путем применения изложенной выше методики показал [44], что наиболее трудоемкими составляющими технологического цикла являются $\xi_{\text{мех}}$ и $\xi_{\text{терм}}$ (табл. 9.7).

В связи с этим подвергли тщательному исследованию влияние на $\xi_{\text{терм}}$ изменения таких геометрических параметров крыла, как H , l и t , и температуры пайки $T_{\text{п}}$ [44]. С этой целью всю совокупность термических работ представили в виде

$$\xi_{\text{терм}} = \sum_{i=1}^8 \xi_i, \quad (9.44)$$

где ξ_1 — химическое обезжиривание крыла в ванне; ξ_2 — нанесение припоя в виде пластин путем прихватки точечной сваркой; ξ_3 — установка и выемка крыла из контейнера; ξ_4 — герметизация кон-

Т а б л и ц а 9.6

Результаты расчетов изменения относительной
трудоемкости травильных работ $\xi_{тр}$ при увеличении хорды b
решетчатого крыла

δb_f	$0 \cdot b_0$	$0,01b_0=0,08$	$0,05b_0=0,4$	$0,1b_0=0,8$
$b = b_0 + \delta b_f$	8	8,08	8,4	8,8
$f = 1,54 \cdot 10^{-4} b^2$	$0,9857 \cdot 10^{-2}$	$1,0054 \cdot 10^{-2}$	$1,0866 \cdot 10^{-2}$	$1,1926 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\partial f}{\partial b_f} = 3,08 \cdot 10^{-4} b$	$0,2464 \cdot 10^{-2}$	$0,2489 \cdot 10^{-2}$	$0,2587 \cdot 10^{-2}$	$0,2710 \cdot 10^{-2}$
$\delta f = \delta b_f \frac{\partial f}{\partial b_f}$	0	$0,0199 \cdot 10^{-2}$	$0,1035 \cdot 10^{-2}$	$0,1735 \cdot 10^{-2}$
$f_1 = f + \delta f$	$0,9856 \cdot 10^{-2}$	$1,0253 \cdot 10^{-2}$	$1,1901 \cdot 10^{-2}$	$1,3660 \cdot 10^{-2}$
$1 + \delta f$	1	1,0002	1,0010	1,0017
$\xi_{тр} = \frac{f_1}{1 + \delta f}$	0,0099	0,0103	0,0119	0,0136
$C = 1 - \xi_{тр}$	0,9901	0,9897	0,9881	0,9864

Т а б л и ц а 9.7

Результаты анализа составляющих трудоемкости
изготовления решетчатых крыльев

Геометрические размеры крыла, мм				Трудоем- кость цикла, нормо-ч	Составляющие трудоемкости				
H	l	t	b		$\xi_{заг}$	$\xi_{мех}$	$\xi_{сл.сб}$	$\xi_{терм}$	$\xi_{закл}$
183	232	35	58	137	0,06	0,34	0,05	0,52	0,03
480	678	35	78	163	0,02	0,43	0,07	0,38	0,10
579	529	35	58	252	0,04	0,48	0,07	0,36	0,05
579	550	35	var	260	0,07	0,54	0,07	0,30	0,02
579	579	35	58	270	0,04	0,50	0,10	0,32	0,04
600	798	53	53	384	0,08	0,52	0,04	0,35	0,01
108	147	35	78	74	0,06	0,42	0,03	0,41	0,08

тейнера электродуговой сваркой и последующая разгерметизация; ξ_5 — продувка контейнера с крылом защитным газом; ξ_6 — нагрев крыла в контейнере до температуры пайки; ξ_7 — выдержка при температуре пайки и ξ_8 — охлаждение крыла в контейнере до температуры 500 К.

Установили, что с увеличением H в интервале $0,6 \leq \frac{\delta H}{H} \leq 1,5$ возрастание $\xi_{терм}$ пропорционально $(\delta H/H)^2$. Изменение l в том же

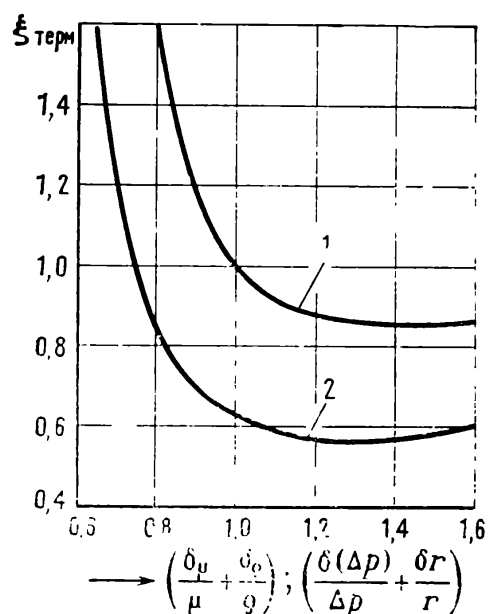
интервале приводит к меньшему изменению $\xi_{\text{терм}}$ пропорционально $\delta l/l$, т. е. функция возрастает по линейному закону. Однако увеличение шага t в тех же пределах вызывает резкое снижение $\xi_{\text{терм}}$. Так, по достижении $\delta t/t = 1,3$ искомая функция становится равной $\xi_{\text{терм}} = 0,845$. Совместное изменение H , l и t вызывает снижение $\xi_{\text{терм}}$ до минимума, соответствующего оптимальному сочетанию геометрических размеров из условия изготовления, затем функция вновь возрастает, но с меньшей скоростью. Следовательно, при проектировании решетчатого крыла, варьируя геометрическими параметрами, можно добиться такого их сочетания, которое обеспечивало бы получение минимальной трудоемкости $\xi_{\text{терм}}$ изготовления паяной решетчатой конструкции.

Установлено также, что с увеличением температуры пайки $T_{\text{п}}$ в пределах $0,8 \leq \delta T_{\text{п}}/T \leq 1,1$ возрастание $\xi_{\text{терм}}$ незначительно. Однако при $\delta T/T_{\text{п}} > 1,1$ наблюдается тенденция к резкому увеличению $\xi_{\text{терм}}$.

Численный анализ выражения (9.44) показал, что из восьми составляющих наиболее трудоемкой является операция нанесения пластинчатого припоя на паяемую конструкцию, величина которой составляет $0,485 \xi_{\text{терм}}$. Наиболее значительное влияние на $\xi_{\text{терм}}$ оказывает толщина пластинок припоя ρ , изменяя которую, можно добиться снижения объема суммарных термических работ на $0,155 \times \xi_{\text{терм}}$. Производительность сварочной машины μ при рассматриваемом процессе нанесения припоя приводит также к снижению трудозатрат, но в меньшей мере, в частности на $0,04 \xi_{\text{терм}}$.

Значительный интерес вызвало сравнение двух способов нанесения припоя: в виде пластин и в виде паяльной пасты. При нанесении пасты пневмодозатором продолжительность (трудоемкость) этой операции оценивали по формуле

$$\tau = 4,2 \cdot 10^{-2} \frac{\eta_{\text{п}} S}{r^4 \Delta p} \frac{\gamma}{\gamma_{\text{п}}} b (0,86 R_{\text{г}}^2 + 2c\Delta) \left(\frac{Hl}{t^2} - \frac{H+l}{t\sqrt{2}} + 1 \right), \quad (9.45)$$



где $\eta_{\text{п}}$ — вязкость пасты; S — длина насадки пневмодозатора; r — радиус насадки; Δp — разность давлений внутри и снаружи дозатора; γ и $\gamma_{\text{п}}$ — удельная масса припоя и паяльной пасты; b — хорда крыла; $R_{\text{г}}$ — радиус галтели паяного соединения; c — толщина планов; Δ — сборочный зазор; H , l и t — геометрические параметры крыла.

Наиболее легко изменяемыми в производстве технологическими факторами для случая нанесения припоя

Рис. 9.9. Влияние формы припоя на $\xi_{\text{терм}}$:

1 — пластинчатый; 2 — порошковый

в виде пасты оказались r и Δp , а для случая припоя в виде пластин — μ и ρ . Степень влияния их на $\xi_{\text{терм}}$ показана на рис. 9.9.

Сравнение технологической продолжительности нанесения припоя в виде пластин и пасты в расчетном случае приводит к выводу, что трудоемкость нанесения порошкового припоя в 4,5 раза ниже, чем трудоемкость нанесения пластинчатого припоя. В итоге установили, что применение пастообразного припоя при пайке решетчатых крыльев может дать снижение трудоемкости на 39,5% по сравнению с пайкой пластинчатым припоем.

Подобным образом можно анализировать любую из операций, составляющих технологический процесс изготовления паяного решетчатого крыла. Рассмотренный метод анализа состояния производства решетчатых конструкций не только позволяет применять ЭВМ при технологическом проектировании и сокращать сроки технологической подготовки производства, но и обеспечивает возможность создания наиболее технологичного варианта решетчатого крыла.

9.4. Методика расчета паяных соединений на прочность с учетом температуры нагрева

Во всем диапазоне эксплуатационных температур прочность паяных соединений должна быть достаточной для восприятия нагрузок или одинаковой с прочностью конструкционного материала решетчатого крыла.

Для паяных соединений встык условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{\text{доп}}^{T_4} F_0 = P_{\text{э}}^{T_4}, \quad (9.46)$$

где $\sigma_{\text{доп}}^{T_4}$ — допустимое напряжение паяного шва (припоя) при расчетной температуре T_4 , МПа; F_0 — площадь паяного соединения, м²; $P_{\text{э}}^{T_4}$ — эксплуатационная нагрузка при расчетной температуре, Н.

Введя коэффициент безопасности

$$f_0 = \sigma_{\text{в}}^{T_4} / \sigma_{\text{доп}}^{T_4}, \quad (9.47)$$

численные значения которого обычно выбираются в пределах $1,25 \leq f_0 \leq 1,35$, выражение (9.46) запишем в более удобном для расчетов виде:

$$\sigma_{\text{в}}^{T_4} = f_0 \frac{P_{\text{э}}^{T_4}}{F_0}, \quad (9.48)$$

где $\sigma_{\text{в}}^{T_4}$ — предел прочности паяного шва (припоя) при температуре T_4 , МПа.

Применяя для этих условий данные, приведенные в гл. 8, а также справочника [34], получим

$$\sigma_{\text{в}}^{T_4} = 0,386 A_0 T_3 \exp\left(-4,866 \frac{T_4}{T_3}\right) \text{ МПа.} \quad (9.49)$$

где T_3 — температура начала плавления припоя (материала паяного шва), К; A_0 — коэффициент.

Решая совместно выражения (9.48), (9.49) и обозначив $K_2 = T_4/T_3$, получим общий вид условия прочности для стыковых паяных соединений:

$$f_0 P_{\text{с}}^{T_4} = 0,386 A_0 F_0 T_3 \exp(-4,866 K_2). \quad (9.50)$$

Паяные соединения внахлестку целесообразно рассчитывать из условия равнопрочности:

$$a \tau_{\text{ср}}^{T_4} = c (\sigma_{\text{в}}^{T_4})_{\text{р}}, \quad (9.51)$$

где a — длина нахлестки в паяном соединении, м; c — толщина конструкционного материала, м; $\tau_{\text{ср}}^{T_4}$ — прочность паяного соединения (припоя) на срез при температуре T_4 , МПа; $(\sigma_{\text{в}}^{T_4})_{\text{р}}$ — предел прочности конструкционного материала, при той же температуре с учетом разупрочнения в результате пайки, МПа.

Показатели прочности, входящие в выражение (9.51), обычно получают экспериментальным путем. Однако при оценочных расчетах могут быть использованы зависимости:

$$\tau_{\text{ср}}^{T_4} = 0,386 \varphi A_0 T_3 \exp(-4,866 K_2) \text{ МПа,} \quad (9.52)$$

где $\varphi = 0,6 \dots 0,7$, а остальные величины — те, что и в выражениях (9.49) и (9.50); кроме того,

$$(\sigma_{\text{в}}^{T_4})_{\text{р}} = 0,386 A_1 T_1 \exp(-4,866 K_4), \quad (9.53)$$

где T_1 — температура начала плавления конструкционного материала, К; A_1 — коэффициент, определяемый по аналогии с A_0 ; $K_4 = T_4/T_1$.

После подстановки (9.52) и (9.53) в (9.51) и преобразований с учетом равенства $K_4 = K_2 K_3$, где $K_3 = T_3/T_1$, имеем

$$\bar{a} = \frac{a}{c} = \frac{A_1 K_2}{\varphi A_0 K_4} e^{4,866(K_2 - K_4)}, \quad (9.54)$$

где \bar{a} — относительная нахлестка.

Полученное в общем виде условие равнопрочности нахлесточных паяных соединений оказывается вполне приемлемым, если

$$2 \leq \bar{a} \leq 10, \quad (9.55)$$

что хорошо согласуется с технологическими особенностями выполнения соединений внахлестку [26].

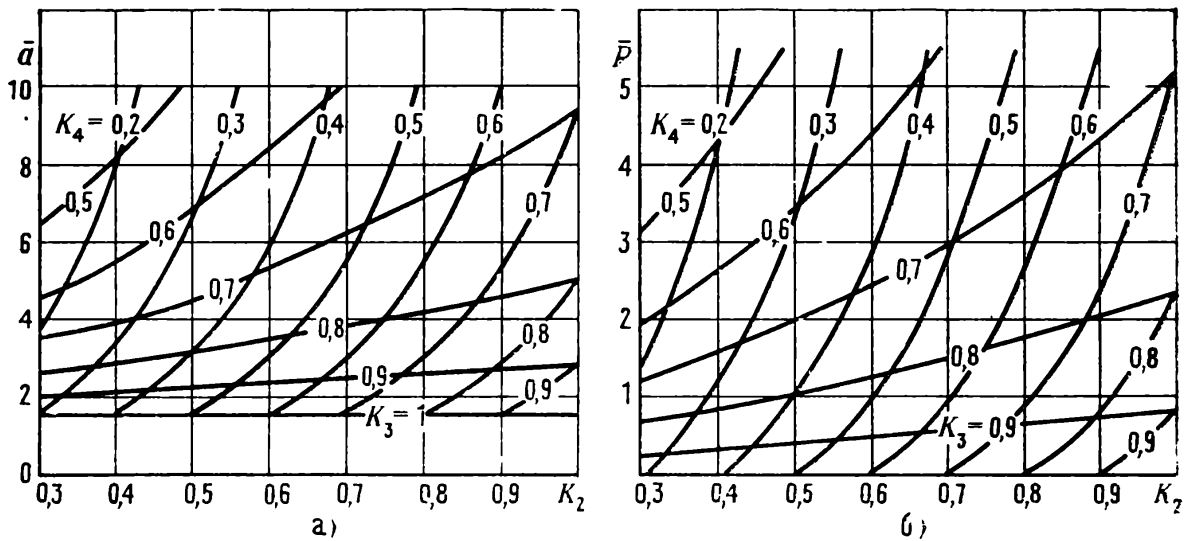


Рис. 9.10. Зависимость относительной нахлестки \bar{a} от коэффициентов K_2 , K_3 и K_4 (а) и относительного радиуса галтели \bar{R} от тех же коэффициентов (б)

Принимая $A_0 = A_1$ и $\varphi = 0,65$, выражение (9.54) можно представить графически (рис. 9.10, а).

Для тавровых паяных соединений условие равнопрочности имеет вид

$$R = c \left[\frac{(\sigma_p^{T_4})_p}{\sigma_b^{T_4}} - 1 \right], \quad (9.56)$$

где R — радиус кривизны галтели припоя.

Переходя к относительному радиусу и сделав подстановку (9.49) и (9.53) в (9.56), получим

$$\bar{R} = \frac{R}{c} = \frac{A_1 T_1 \exp(-4,865 K_4)}{A_3 T_3 \exp(-4,866 K_2)} - 1$$

или после преобразований имеем

$$\bar{R} = \frac{A_1 K_2}{A_3 K_4} e^{4,866(K_2 - K_4)} - 1. \quad (9.57)$$

Это выражение графически представлено на рис. 9.10, б, где принято $A_0 = A_1$.

В результате экспериментальной проверки установлено, что относительный радиус галтели припоя необходимо выбирать для широкого диапазона изменения эксплуатационных температур в пределах

$$0,3 \leq \bar{R} \leq 5,5. \quad (9.58)$$

Решая совместно выражения (9.57) и (9.54), получим

$$\bar{R} + 1 = \bar{a} \varphi. \quad (9.59)$$

Подставляя сюда граничные значения \bar{R} согласно (9.58), т. е. $\bar{R}_1=0,3$ и $\bar{R}_2=5,5$, получим при $\varphi=0,65$ $\bar{a}_1=2$ и соответственно $\bar{a}_2=10$. Следовательно, удовлетворяя условию (9.58), соблюдаем посредством (9.59) и условие (9.55).

Из этого вытекает весьма важное практическое значение выражения (9.59), которое состоит в том, что эта формула позволяет заменить малодоступную экспериментальную проверку прочности соединений втавр стандартными испытаниями на равнопрочность соединений внахлестку при любой температуре T_4 .

Более точное решение задачи о нахождении функции $\bar{a}=f(T)$ можно получить при использовании экспериментальных данных для $\tau_{\text{ср}}^{T_1}$ и $(\sigma_{\text{в}}^{T_4})_{\text{р}}$. В качестве примера рассмотрим случай пайки решетчатого крыла из стали 12Х18Н10Т марганцевым припоем Г70НХ, имеющим интервал кристаллизации $1030-1090^\circ\text{C}$. Поскольку для припоя $t_3=1030^\circ\text{C}$, то $T_3=t_3+273=1303\text{ K}$. Температура начала плавления стали 12Х18Н10Т, как показали расчеты, $T_1=1437+273=1710\text{ K}$.

Поправочные коэффициенты A_0 и A_1 для формул (9.49), (9.52), (9.53) и (9.54) получали следующим образом. Согласно определению коэффициент A_0 учитывает степень рассогласования экспериментальных значений предела прочности паяных соединений на срез $(\tau_{\text{ср}}^{T_1})_{\text{экспер}}$ с расчетными значениями его по формуле (9.52) при $A_0=1$. Другими словами, во всем диапазоне температур $0 \leq T_4 \leq 1303\text{ K}$ должна быть найдена функция

$$A_0 = \frac{(\tau_{\text{ср}}^{T_1})_{\text{экспер}}}{(\tau_{\text{ср}}^{T_4})_{\text{расч}}} . \quad (9.60)$$

Для установления этой связи производили построение экспонент в полулогарифмической системе координат $\ln A_0-K_2$ методом наименьших квадратов, причем здесь $K_2=T_4/T_3$. В итоге данной операции было найдено, что при $0 \leq K_2 \leq 0,67$

$$A_0 = 0,724 \exp(4,72K_2) \quad (9.61)$$

и при $0,67 \leq K_2 \leq 1$

$$A_0 = 0,724 \exp(9,583 - 9,583K_2). \quad (9.62)$$

Подобным образом определяли коэффициент A_1 по формуле

$$A_1 = \frac{[(\sigma_{\text{в}}^{T_4})_{\text{р}}]_{\text{экспер}}}{[(\sigma_{\text{в}}^{T_4})_{\text{р}}]_{\text{расч}}} . \quad (9.63)$$

В результате соответствующих построений было найдено, что при изменении $K_4=T_4/T_1$ в диапазоне $0 \leq K_4 \leq 0,63$ искомый коэффициент может быть получен по формуле

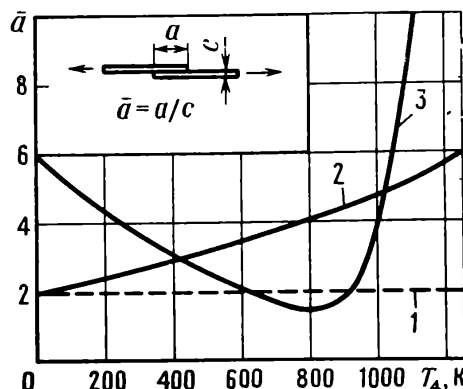
$$A_1 = \exp(0,79 + 1,59K_4), \quad (9.64)$$

Рис. 9.11. Зависимость \bar{a} от T_4 для нахлесточных соединений на стали 12X18H10T, выполненных припоем Г70НХ

а в интервале $0,63 \leq K_4 \leq 1$ — по формуле

$$A_1 = \exp(4,84 - 4,84K_4), \quad (9.65)$$

Теперь, задаваясь значениями T_4 , при $\varphi = 0,65$, известных T_1 и T_3 можно рассчитать величину \bar{a} по формуле (9.54), используя выражения (9.61), (9.62), (9.64) и (9.65). График этой функции приведен на рис. 9.11 (кривая 3). Линия 1 на графике соответствует выражению (9.55), а линия 2 получена по формуле (9.54) при $A_0 = A_1$ и $\varphi = 0,65$. Как видно из кривой 3, в сравнении с линией 2 при эксплуатационных температурах T_4 в интервале $420 \leq T_4 \leq 1020$ К относительная нахлестка паяных соединений \bar{a} может быть существенно снижена, что обеспечит выигрыш в массе крыла.



9.5. Анализ процесса нагрева решетчатых крыльев в контейнере в электропечах сопротивления

Режим нагрева не может быть произвольным. Он должен назначаться с учетом различий в толщине элементов конструкции и обеспечивать минимальные деформации изделия. Задача сводилась, таким образом, к поиску методики расчета температур в различных элементах конструкции крыла и управлению нагревом элементов в процессе пайки. Случайно выбранные режимы нагрева приводили к разрушению изделия или к недопустимым деформациям.

Нагрев предварительно собранного крыла, установленного в контейнер, начинается с момента загрузки контейнера в рабочее пространство электропечи, разогретой до температуры пайки. В течение всего цикла нагрева, выдержки и охлаждения герметичный контейнер с крылом продувается защитным газом. Ниже рассматриваются такие изделия, которые по условиям эксплуатации должны подвергаться пайке при температурах $1100\text{—}1300^\circ\text{C}$, т. е. когда теплообмен осуществляется преимущественно излучением.

При нагреве тел различной конфигурации в электропечах с воздушной атмосферой и в среде одноатомных и двухатомных газов газовая среда принималась оптически прозрачной, не поглощающей лучистую энергию, а поверхности тел — серыми. Лучистый теплообмен рассчитывался в замкнутых системах, которые характеризуются собственными лучистыми проводимостями энергии от более нагретых тел к менее нагретым.

Когда тела имели сложную разветвленную поверхность, как в данном случае, для облегчения расчетов их поверхности разбивались прозрачными поверхностями-делителями таким образом, чтобы образовались простые системы лучистого теплообмена, в которых достаточно легко можно определить угловые коэффициенты взаимного облучения и лучистые проводимости, являющиеся их функциями.

Так как угловые коэффициенты определены для тел сравнительно простой конфигурации (круг, квадрат, цилиндр, точка и т. п.) и с несложным взаимным расположением, все простые системы приводились к системам, для которых угловые коэффициенты можно вычислить по известным формулам или таблицам. Вследствие приближенности получаемых систем к известным (реальным) вычисляемые угловые коэффициенты и полученные с их помощью значения лучистых проводимостей имели также приближенные значения.

В общей замкнутой системе печь — контейнер — решетчатое крыло были выделены следующие элементарные замкнутые системы лучистого теплообмена.

1. Печь — наружная поверхность контейнера (рис. 9.12, а). Поверхность печи $F_{\text{п}}$ с температурой $T_{\text{п}}$ и степенью черноты $\epsilon_{\text{п}}$ нагре-

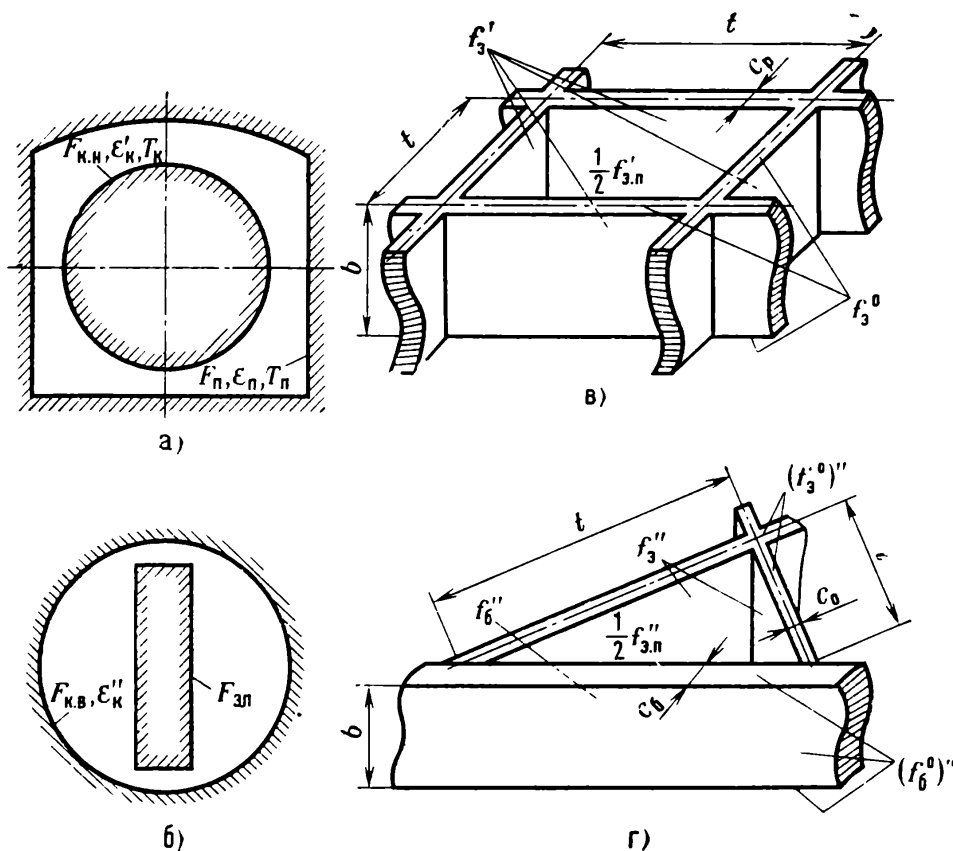


Рис. 9.12. Замкнутые системы лучистого теплообмена:

а — печь — контейнер; б — контейнер — «эквивалентная» поверхность; в — контейнер — планы в четырехугольной ячейке крыла; г — контейнер — планы — элемент боковины рамы в треугольной ячейке крыла

вает поверхность контейнера $F_{к.н}$ с температурой T_k и степенью черноты ϵ_k' . Решение задачи в таком виде стало возможным после экспериментальной проверки степени влияния решетчатой конструкции, помещенной внутрь контейнера, на изменение температуры контейнера. Для этого измерялась температура при нагревании в нем решетчатого крыла и сравнивалась с температурой пустого контейнера, нагреваемого по тому же режиму. Результаты эксперимента показали, что значения температур в обоих случаях при одинаковом значении времени укладываются в один температурный интервал, определяемый крайними значениями температур контейнера при нагревании в нем решетчатого крыла. Поэтому был сделан вывод, что решетчатое крыло незначительно влияет на температуру контейнера и, следовательно, ее можно рассчитать по схеме, показанной на рис. 9.12, а.

2. Контейнер — решетчатое крыло (см. рис. 9.12, б). Внутренняя поверхность контейнера $F_{к.в}$ с температурой T_k и степенью черноты ϵ_k'' нагревает помещенную внутрь его конструкцию, состоящую из различных элементов. Ячеистая решетчатая конструкция заменена «эквивалентной» поверхностью $F_{э.п}$, которая на поверхность контейнера $F_{к.в}$ оказывает такое же тепловое воздействие, как и ячеистая конструкция. Поверхность $F_{э.п}$ «натянута» на решетчатое крыло таким образом, чтобы она не имела вогнутостей в сторону контейнера $F_{к.в}$. Элементы конструкции крыла, непосредственно замыкающие «эквивалентную» поверхность, облучаются поверхностью $F_{к.в}$ по схеме, изображенной на рис. 9.12, б, остальные же элементы крыла — отдельными элементарными частями поверхности $F_{э.п}$, например $f_{э}'$ или $f_{э}''$, которые замыкают соответственно четырехугольные (см. рис. 9.12, в) и треугольные (см. рис. 9.12, г) ячейки.

Расчеты температур элементов решетчатого крыла производились при адиабатических граничных условиях для каждого из элементов. Все элементы крыла предполагались теплотехнически «тонкими» телами, имеющими прямоугольное сечение, матовую поверхность, постоянную степень черноты. Вначале определяли приведенные коэффициенты излучения, лучистые проводимости и тепловые потоки к нагреваемым элементам конструкции в системе теплообмена печь — контейнер. Система угловых коэффициентов взаимного облучения, построенная на основе свойств их взаимности и замыкаемости, имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_{п.к} F_{п} &= \varphi_{к.п} F_{к.н}; \\ \varphi_{п.к} + \varphi_{п.п} &= 1; \\ \varphi_{к.п} + \varphi_{к.к} &= 1.\end{aligned}\tag{9.66}$$

Так как контейнер — тело выпуклое по отношению к поверхности печи, то $\varphi_{к.к} = 0$, а $\varphi_{к.п} = 1$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{п.к} &= F_{к.н}/F_{п}; \\ \varphi_{п.п} &= 1 - \varphi_{п.к}.\end{aligned}\quad (9.67)$$

Система уравнений, связывающих результирующие тепловые потоки и температуры в этой системе теплообмена, была составлена на основе системы уравнений баланса лучистой энергии каждой из поверхностей:

$$\begin{aligned}\left(1 - \varphi_{п.п} + \frac{\varepsilon_{п}}{1 - \varepsilon_{п}}\right) E_{п} - \varphi_{к.п} E_{к} &= C_s F_{п} 10^{-8} \frac{\varepsilon_{п}}{1 - \varepsilon_{п}} T_{п}^4; \\ -\varphi_{п.к} E_{п} + \left(1 + \frac{\varepsilon_{к}'}{1 - \varepsilon_{к}'}\right) E_{к}' &= C_s F_{к.н} 10^{-8} \frac{\varepsilon_{к}'}{1 - \varepsilon_{к}'} T_{к}^4,\end{aligned}\quad (9.68)$$

где $E_{п}$ и $E_{к}'$ — соответственно эффективные лучистые потоки от поверхностей печи и контейнера на все окружающие тела; C_s — удельная теплоемкость материала контейнера и нагреваемых элементов крыла.

При неизвестных $E_{п}$ и $E_{к}'$ определитель системы (9.68) примет вид

$$\Delta_{п.к} = \begin{vmatrix} 1 - \varphi_{п.п} + \frac{\varepsilon_{п}}{1 - \varepsilon_{п}} & -\varphi_{к.п} \\ -\varphi_{п.к} & 1 + \frac{\varepsilon_{к}'}{1 - \varepsilon_{к}'} \end{vmatrix}. \quad (9.69)$$

Приведенный коэффициент излучения в направлении поверхности $F_{к.н}$ в этой системе может быть найден по формуле

$$C_{п.к} = C_s \frac{\varepsilon_{к}'}{1 - \varepsilon_{к}'} \frac{\varepsilon_{п}}{1 - \varepsilon_{п}} \frac{M_{12}}{\Delta_{п.к}}, \quad (9.70)$$

где M_{12} — минор определителя $\Delta_{п.к}$.

Лучистая проводимость к поверхности $F_{к.п}$ вычисляется по формуле

$$a_{п.к} = C_{п.к} F_{к.н}. \quad (9.71)$$

Тепловой поток, поглощаемый поверхностью контейнера $F_{к.н}$ (9.71) в единицу времени τ , определялся из выражения

$$dQ_{п.к} = a_{п.к} 10^{-8} (T_{п}^4 - T_{к}^4) d\tau. \quad (9.72)$$

Для расчета тепловых потоков к поверхностям элементов решетчатого крыла, непосредственно замыкающим «эквивалентную» поверхность, составлялась система угловых коэффициентов взаимного облучения в расчетной схеме, показанной на рис. 9.12, б аналогично выражениям (9.66):

$$\varphi_{к.э} + \varphi_{к.к} = 1;$$

$$\varphi_{э.к} + \varphi_{э.э} = 1; \quad (9.73)$$

$$\varphi_{к.э} F_{к.в} = \varphi_{э.к} F_{э.п},$$

где $\varphi_{э.э} = 0$ по условиям построения «эквивалентной» поверхности. Следовательно, $\varphi_{э.к} = 1$ и $\varphi_{к.э} = F_{э.п}/F_{к.в}$.

Определитель системы уравнений баланса лучистой энергии внутренней поверхности контейнера $F_{к.в}$ и поверхностей ячеек крыла, непосредственно замыкающих «эквивалентную» поверхность $F_{э.п}$, составлялся аналогично системе (9.68):

$$\Lambda_{к.э}^0 \begin{vmatrix} \varphi_{к.э} + \frac{\varepsilon_k''}{1 - \varepsilon_k''} & -\varphi_{э.к} \\ -\varphi_{к.э} & 1 + \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} \end{vmatrix}. \quad (9.74)$$

Приведенный коэффициент излучения к этим поверхностям ячеек крыла находили по аналогии с (9.70) из выражения

$$C_{к.э}^0 = C_s \frac{\varepsilon_k''}{1 - \varepsilon_k''} \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{M_{12}^0}{\Lambda_{к.э}^0}. \quad (9.75)$$

Лучистые проводимости и тепловые потоки, пропорциональные площадям этих поверхностей, рассчитывались по формулам:

$$\begin{aligned} a_{кр}^0 &= C_{к.э}^0 f_p^0; & dQ_{кр}^0 &= a_{кр}^0 10^{-8} (T_k^4 - T_p^4) d\tau; \\ a_{к.с}^0 &= C_{к.э}^0 f_c^0; & dQ_{к.с}^0 &= a_{к.с}^0 10^{-8} (T_k^4 - T_c^4) d\tau; \\ a_{к.б.в}^0 &= C_{к.э}^0 f_{б.в}^0; & dQ_{к.б.в}^0 &= a_{к.б.в}^0 10^{-8} (T_k^4 - T_{б.в}^4) d\tau; \\ a_{к.б.н}^0 &= C_{к.э}^0 f_{б.н}^0; & dQ_{к.б.н}^0 &= a_{к.б.н}^0 10^{-8} (T_k^4 - T_{б.н}^4) d\tau. \end{aligned} \quad (9.76)$$

Тепловые константы $C_{ки}$, $a_{ки}$, $dQ_{ки}$ для элементов крыла, образующих ячейки, найдем с помощью рассчитанных выше (9.73) угловых коэффициентов $\varphi_{к.э}$, $\varphi_{э.к}$, $\varphi_{к.к}$.

Для планов (ребер), образующих ячейки четырехугольной формы, за исключением их участков, примыкающих к силовой раме и образующих треугольные ячейки, эти константы рассчитывались с использованием схемы, приведенной на рис. 9.12, в. Предполагалось, что нагрев внутренней поверхности ячейки $f'_э$ как отдельного тела осуществляется через часть прозрачной поверхности $F_{э.п}$ с площадью $f'_{э.п}$, причем по плоскостям, проходящим через оси ребер (планов), тепло не поступает, так как они экранированы другими такими же ячейками.

В этой расчетной схеме, образованной замкнутыми поверхностями $f'_{э.п}$ и f' , составляем систему угловых коэффициентов взаимного облучения:

$$\begin{aligned}
 \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} + \varphi''_{\varepsilon, \varepsilon} &= 1; \\
 \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} + \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} &= 1; \\
 \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} f'_{\varepsilon} &= \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} f'_{\varepsilon, \varepsilon}.
 \end{aligned}
 \tag{9.77}$$

Так как поверхности самооблучаются, то в системе из трех уравнений (9.77) присутствуют четыре неизвестных. Недостающее неизвестное находим, используя выражение для углового коэффициента облучения плоскости квадрата квадратом, отстоящим по нормали на конечном расстоянии:

$$\begin{aligned}
 \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{B^2} \ln \frac{1+B^2+B^4}{1+B^2} - \frac{4}{B} \operatorname{arctg} B + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{B} \sqrt{1+B^2} \operatorname{arctg} \frac{B}{\sqrt{1+B^2}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{9.78}$$

где $B = t - c_p/b$, т. е. является функцией геометрических размеров ячейки крыла: шага t , толщины планов c_p и хорды b .

Остальные угловые коэффициенты находятся из системы (9.77) подстановкой (9.78). Для нахождения истинных коэффициентов облучения планов (ребер) в поверхности f'_{ε} поверхностью контейнера $F_{\kappa, \varepsilon}$ применялся метод, согласно которому

$$\begin{aligned}
 \varphi'_{\kappa, \varepsilon} &= \varphi_{\kappa, \varepsilon} \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon}; \\
 \varphi'_{\varepsilon, \kappa} &= \varphi_{\varepsilon, \kappa} \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon}; \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{9.79}$$

Истинные значения угловых коэффициентов взаимного облучения поверхностей $F_{\kappa, \varepsilon}$ и f'_{ε} получаются с учетом (9.79) из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
 \varphi'_{\kappa, \varepsilon} &= \varphi_{\kappa, \varepsilon} + \varphi_{\kappa, \varepsilon} \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} = \varphi_{\kappa, \varepsilon} (1 + \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon}); \\
 \varphi'_{\varepsilon, \kappa} &= \varphi_{\varepsilon, \kappa} + \varphi_{\varepsilon, \kappa} \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} = \varphi_{\varepsilon, \kappa} (1 + \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon}); \\
 &\dots \\
 \varphi'_{\kappa, \kappa} &= \varphi_{\kappa, \kappa} + \varphi_{\kappa, \varepsilon} \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} \varphi_{\varepsilon, \kappa} = 1 - \varphi_{\kappa, \varepsilon} (1 - \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon}).
 \end{aligned}
 \tag{9.80}$$

Система уравнений баланса лучистой энергии каждой из поверхностей в этой системе, т. е. поверхностей f'_{ε} и части поверхности $F_{\kappa, \varepsilon}$ площадью $(F_{\kappa, \varepsilon})' = f'_{\varepsilon, \varepsilon} / \varphi_{\kappa, \varepsilon}$ при нагреве через «эквивалентную» поверхность запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \left[\varphi_{\kappa, \varepsilon} (1 - \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon}) + \frac{\varepsilon_{\kappa}}{1 - \varepsilon_{\kappa}} \right] E_{\kappa} - \varphi'_{\varepsilon, \kappa} E_{\varepsilon} &= C_s 10^{-8} (F_{\kappa, \varepsilon})' \frac{\varepsilon_{\kappa}}{1 - \varepsilon_{\kappa}} T_{\kappa}^4; \\
 -\varphi_{\kappa, \varepsilon} \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} (1 + \varphi'_{\varepsilon, \varepsilon}) E_{\kappa} + \left(\varphi'_{\varepsilon, \varepsilon} + \frac{\varepsilon_{\varepsilon}}{1 - \varepsilon_{\varepsilon}} \right) E_{\varepsilon} &= C_s 10^{-8} f'_{\varepsilon} \frac{\varepsilon_{\varepsilon}}{1 - \varepsilon_{\varepsilon}} T_{\varepsilon}^4.
 \end{aligned}
 \tag{9.81}$$

Отсюда определитель системы при неизвестных E_K'' и E_ε

$$\Lambda'_{K,\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varphi_{K,\varepsilon} (1 - \varphi'_{\varepsilon,\varepsilon}) + \frac{\varepsilon_K''}{1 - \varepsilon_K''} & -\varphi'_{\varepsilon,\varepsilon} \varphi_{\varepsilon,K} (1 + \varphi'_{\varepsilon,\varepsilon}) \\ -\varphi_{K,\varepsilon} \varphi'_{\varepsilon,K} (1 + \varphi'_{\varepsilon,\varepsilon}) & \varphi'_{\varepsilon,\varepsilon} + \frac{\varepsilon_p}{1 - \varepsilon_p} \end{vmatrix} \quad (9.82)$$

Используя значения определителя $\Lambda'_{K,\varepsilon}$ и его минора M'_{12} , находим приведенный коэффициент излучения в направлении поверхности f'_{ε} :

$$C'_{K,\varepsilon} = C_s \frac{\varepsilon_K''}{1 - \varepsilon_K''} \frac{\varepsilon_p}{1 - \varepsilon_p} \frac{M'_{12}}{\Lambda'_{K,\varepsilon}}. \quad (9.83)$$

Лучистая проводимость к элементам, образующим четырехугольную ячейку, пропорциональна их площади. При равных площадях, замыкающих ячейку, т. е. при квадратной ячейке, она рассчитывалась по выражению

$$a'_{K,p} = C'_{K,\varepsilon} f'_p = C'_{K,\varepsilon} \frac{f'_\varepsilon}{4}. \quad (9.84)$$

Тепловой поток, поглощаемый элементом ребра (плана) в четырехугольной ячейке,

$$dQ'_{K,p} = a'_{K,p} 10^{-8} (T_K^4 - T_p^4) d\tau. \quad (9.85)$$

Элемент ребра (плана), разделяющий четырехугольные ячейки, поглощает тепловые потоки в каждой из ячеек, которые он разделяет.

Рассмотрев замкнутую систему лучистого теплообмена в зонах, прилежащих к силовой раме, т. е. систему треугольной ячейки, нашли аналогичным образом тепловые потоки к концевым элементам планов (ребер) и элементам силовой рамы при облучении их через другую часть «эквивалентной» поверхности $F_{\varepsilon,p}$ площадью $f''_{\varepsilon,p}$ и получили собственные значения лучистых проводимостей $a''_{K,p}$, $a''_{K,b,v} = a''_{K,b,h} = a''_{K,c}$ и соответствующие им тепловые потоки $dQ''_{K,p}$, $dQ''_{K,b,v} = dQ''_{K,b,h} = dQ''_{K,c}$, а также дополнительные тепловые потоки от планов (ребер) к элементам рамы

$$dQ''_{p,c} = dQ''_{p,b,v} = dQ''_{p,b,h} = a''_{p,c} 10^{-8} (T_p^4 - T_c^4) d\tau.$$

Так как нагрев элементов решетчатого крыла происходит одновременно и непрерывно, удельные доли лучистой энергии, которые характеризуются лучистыми проводимостями, и соответствующие им тепловые потоки к рассматриваемому элементу складываются, если исходят от одной поверхности — нагревателя, следующим образом:

к плану (ребру), разделяющему две четырехугольные ячейки,

$$dQ_{к.р}^{\Sigma} = dQ_{к.р}^0 + 2dQ'_{к.р}; \quad (9.86)$$

к плану (ребру), разделяющему четырехугольную и треугольные ячейки,

$$dQ_{к.р}^{\Sigma} = dQ_{к.р}^0 + dQ'_{к.р} + dQ''_{к.р}; \quad (9.87)$$

к каждому элементу рамы

$$dQ_c^{\Sigma} = dQ_{б.н}^{\Sigma} = dQ_{б.в}^{\Sigma} = dQ_{к.с}^0 + dQ'_{к.с} + dQ''_{р.с}. \quad (9.88)$$

Температуры элементов решетчатого крыла рассчитывали путем решения дифференциального уравнения нестационарного процесса нагрева теплотехнически «тонкого» тела массой m_i и теплоемкостью C_i^T :

$$m_i C_i^T dT_i = \sum_{i=1}^{i=j} C_{н.п} F_i 10^{-8} (T_{н.п}^4 - T_i^4) d\tau, \quad (9.89)$$

которое приводит к формуле Б. В. Старка. При некоторых ограничениях эту формулу можно привести к виду

$$T_{ик} = T_{н.п}^{cp} \times \left\{ \frac{\frac{T_{н.п}^{cp} + T_{ин}}{T_{н.п}^{cp} - T_{ин}} \exp \left[\frac{4 (T_{н.п}^{cp})^3 a_{н.п}^{\Sigma} \tau}{10^8 m_i C_i^T} + 2 \operatorname{arctg} \frac{T_{ин}}{T_{н.п}^{cp}} - \frac{\pi}{2} \right] - 1}{\frac{T_{н.п}^{cp} - T_{ин}}{T_{н.п}^{cp} - T_{ин}} \exp \left[\frac{4 (T_{н.п}^{cp})^3 a_{н.п}^{\Sigma} \tau}{10^8 m_i C_i^T} + 2 \operatorname{arctg} \frac{T_{ин}}{T_{н.п}^{cp}} - \frac{\pi}{2} \right] + 1} \right\} \quad (9.90)$$

где $T_{ин}$, $T_{ик}$, m_i , C_i^T — соответственно начальная и конечная температуры, масса и удельная теплоемкость материала нагреваемых элементов; $T_{н.п}^{cp}$ — средняя температура нагревательной поверхности; $a_{н.п}^{\Sigma}$ — суммарная лучистая проводимость от источника к нагреваемому элементу; τ — время.

Для использования формулы (9.90) в указанном виде весь цикл нагрева разбивается на ряд промежутков времени, существенно меньших всего цикла нагрева, внутри которых нестационарная температура нагревательных поверхностей печи $T_{н.п}$, контейнера и других поверхностей, излучающих энергию, принималась постоянной и равной средней ее величине $T_{н.п}^{cp}$, а конечная температура элемента $T_{ик}$ в предыдущем интервале времени принималась за начальную $T_{ин}$ в последующем интервале.

Результаты расчета проверялись на промышленной установке замера температуры каждого элемента решетчатого крыла термомпарами типа ХА $\varnothing = 0,5$ мм. Полученные расчетные и экспериментальные данные приведены на рис. 9.13 для одной из конструкций

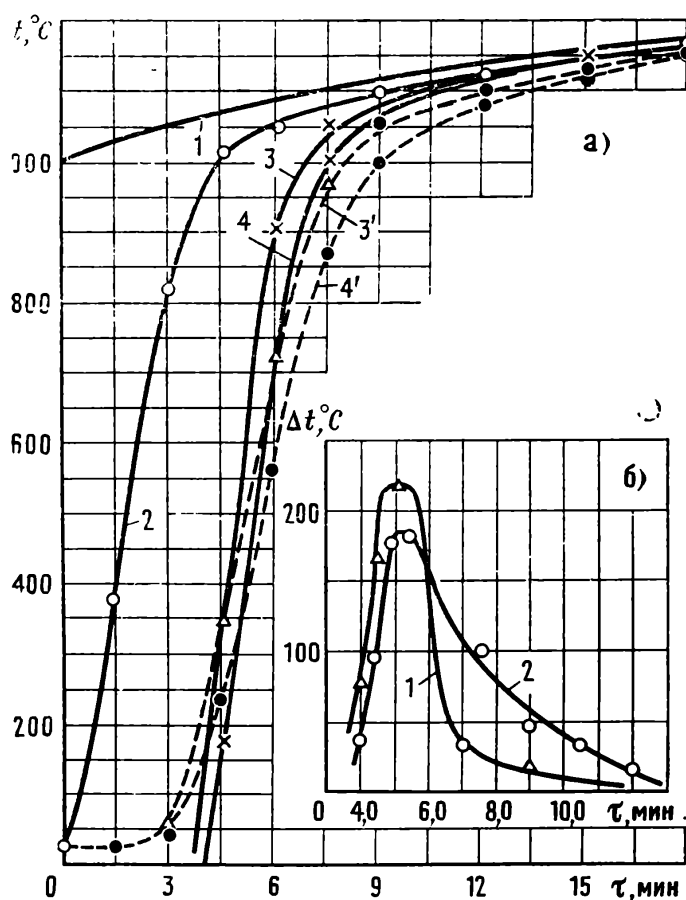
Рис. 9.13. Результаты анализа процесса нагрева при пайке крыла:

а — изменение во времени температуры печи, контейнера, боковин и планов сотового набора; 1 — температура печи; 2 — температура контейнера; 3 и 3' — расчетная и экспериментальная температуры планов; 4 и 4' — расчетная и экспериментальная температуры боковин; *б* — изменение во времени перепада температур Δt между планом и боковиной: 1 — расчет; 2 — эксперимент

крыла из стали 08Х25Н16Г7АР с геометрическими параметрами: $b = 58,5$ мм; $t = 35$ мм; толщиной планов 0,9 мм; толщиной боковин, концевой и корневой нервюр соответственно 5,5, 3,5 и 10 мм. Мощность печи составляла 250 кВт, рабочая температура в печи — 1300°C , площадь поверхности контейнера из стали 12Х18Н10Т — $4,16$ м².

Как видно из рис. 9.13, имеет место удовлетворительная для практики пайки сходимость результатов. Некоторое отставание температур в случае эксперимента, вероятно, связано с принятыми адиабатическими граничными условиями при расчете, которые не учитывают потери тепла от нагретых элементов теплопередачей в местах контактов.

Анализ изменений температур в функции времени позволяет сделать вывод, что наибольшие разности температур между отдельными элементами крыла, а следовательно, и наиболее благоприятные условия для деформирования конструкции, имеют место в начальный период времени. При возникновении значительных перепадов температур между отдельными элементами крыла рекомендуется выдержка сборки при отключенной печи для выравнивания поля температур.



Глава 10

Испытания решетчатых конструкций

10.1. Статические испытания при действии сосредоточенной нагрузки

С целью проверки положений теории плоского безмоментного напряженного состояния были проведены эксперименты на решетчатом крыле, выполненном по схеме, показанной на рис. 10.1, а. Крыло испытывалось при нагружении сосредоточенной поперечной силой P , передаваемой на концевой план с помощью массивной стальной накладки. Крыло было изготовлено из материала 1X18H9T с модулем упругости $E=190\,000$ МПа методом пайки в печи со следующими размерами: $l=742$ мм; $H=297$ мм; $b=100$ мм; $l_1=130$ мм; относительный шаг решетки $\bar{t}=0,35$; толщина планов решетки $c=0,6$ мм; толщина поперечных планов $c_{AB}=4$ мм; $c_{BC}=1$ мм; толщина подкосов $c_{GF}=c_{CE}=2$ мм. Боковины имели переменную толщину по длине, причем площадь поперечного сечения боковины определялась следующими значениями.

Номер сечения	I	II	III	IV	V	VI	VII
Площадь поперечного сечения боковины, мм ²	144	154	172	211	228	280	313

При принятой схеме нагружения эпюры касательных усилий в решетке и нормальных усилий в окаймляющих планах в соответствии с теорией (без учета податливости боковин и планов) должны иметь вид, показанный на рис. 10.1, б. Сравнение теоретических и экспериментальных данных производилось по эпюре нормальных усилий в боковине FB . С этой целью на различном удалении от конца консоли к боковине FB было приклеено 11 проволочных датчиков сопротивления. В некоторых сечениях с целью выявления возможного изгиба крыла из своей плоскости приклеивалось по два датчика на равном расстоянии от срединной поверхности панели. Для проверки симметрии деформации относительно продольной оси крыла в сечении VI были приклеены два датчика к боковине DC . Кроме того, семь датчиков было приклеено к планам решетки в различных ее местах. С целью выявления возможного изгиба планов некоторые датчики приклеивались на план с двух сторон (на верхнюю и нижнюю поверхности), друг против друга. Общая схема расположения датчиков и их нумерация приведены на рис. 10.1, а. Нагружение производилось винтом посредством блока и троса. Нагрузка измерялась по динамометру. Показания тензометров снимались при значении нагрузки $P=5$ кН. Нулевые показания

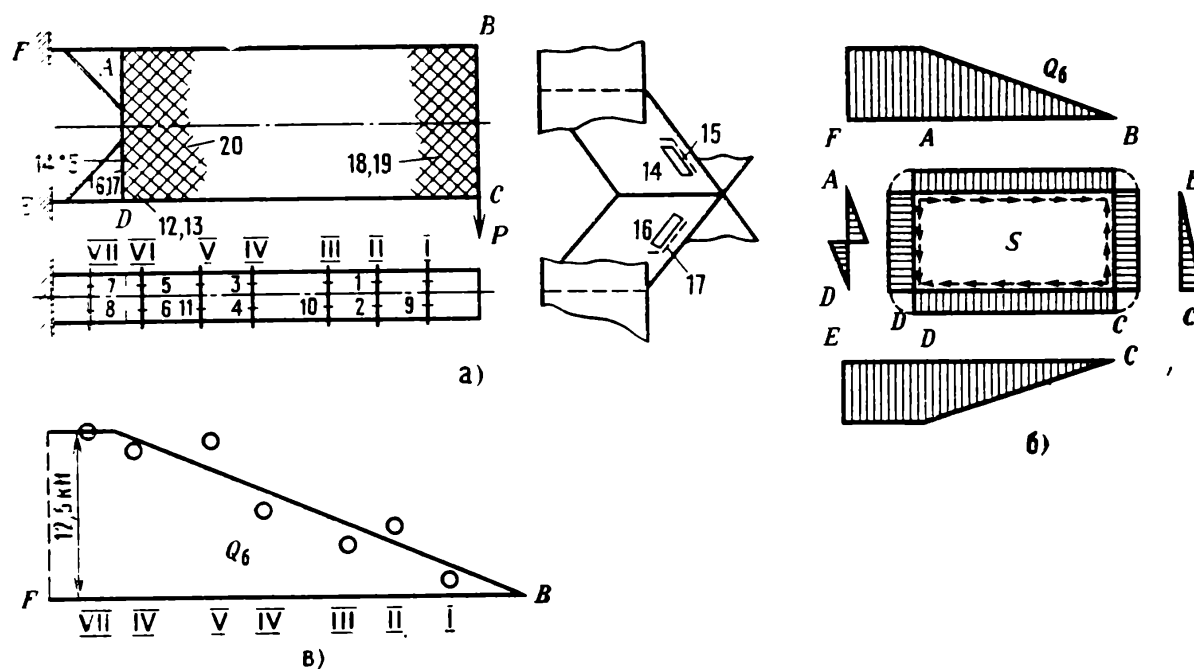


Рис. 10.1. Испытания решетчатого крыла при нагружении сосредоточенной силой:

а — схема нагружения и расположения датчиков; *б* — расчетные эпюры усилий в крыле; *в* — сравнение экспериментальных и расчетных данных

датчиков фиксировались до и после нагружения крыла и затем осреднялись. Усилия, действующие в планах, определялись по формуле

$$N = 0,235 \cdot 10^{-5} \Delta n_{\text{ср}} E F.$$

Здесь $\Delta n_{\text{ср}}$ — среднее значение приращения показаний датчиков, расположенных симметрично относительно срединной поверхности панели (для боковин) или относительно срединной поверхности плана (для планов решетки), причем $\Delta n = n_P - n_0$, где n_P — показания датчиков при $P = 5 \text{ кН}$; n_0 — показания датчиков при $P = 0$.

На рис. 10.1, *в* точками показаны экспериментальные значения усилий, действующих в боковине AB и прикрепляющем плане FA , сплошной линией — расчетное усилие, максимальная величина которого определяется по формуле

$$(Q_6)_{\text{max}} = P \frac{l}{H} = 5 \cdot \frac{742}{297} = 12,5 \text{ кН}.$$

Расчетные усилия в планах, в соответствии с (5.25) определяем по формуле

$$N^n = \frac{P}{H} t = \frac{5000}{297} \cdot 35 = 590 \text{ Н}.$$

Экспериментальные значения усилий в планах решетки, замеченные в различных зонах панели датчиками 14—15, 16—17, 18—

19, 20 (см. рис. 10.1, а), составляют соответственно 617, 670, 530 и 644 Н. Отметим, что в рассматриваемом случае сопоставление теоретических и экспериментальных данных можно проводить без учета податливости боковин, так как дополнительные усилия, подсчитанные в разд. 7.2 для крыла с параметрами, соответствующими испытываемому образцу, пренебрежимо малы по сравнению с величинами усилий основного напряженного состояния.

Из сопоставления экспериментальных данных с расчетными можно сделать вывод, что эксперимент хорошо подтверждает теоретические соображения о характере распределения усилий в решетчатом крыле, в соответствии с которым при данной схеме нагружения касательные усилия S основного напряженного состояния, а следовательно, и нормальные усилия в планах N^u должны быть постоянны по всей панели, а эпюра нормальных усилий в боковине AB должна быть прямолинейной и возрастет от нуля до $(Q_0)_{\max}$.

Имеющий место разброс экспериментальных данных целиком может быть объяснен неточностью изготовления данного образца, в результате чего некоторые планы решетки и окаймляющие планы подвергались значительной изгибной деформации.

10.2. Экспериментальное исследование изгибных форм плоского напряженно-деформированного состояния крыла

Для апробации теории моментного плоского напряженного состояния были проведены экспериментальные исследования по определению форм и частот свободных колебаний некоторых образцов решетчатых крыльев. Сравнение форм и соответствующих им частот, найденных резонансным методом при испытании на вибраторе, с теоретическими результатами показывает хорошую сходимость теории с экспериментом. Были испытаны два варианта крыльев: а) крыло, характеризуемое параметрами $H=l=296$; $b=88$ мм; $\bar{t}=0,24$; $c=0,5$ мм; толщина боковин, корневого и концевого планов $c_b=c_k=c_\lambda=3$ мм; масса крыла 4,66 кг, модуль упругости $E=2 \cdot 10^5$ МПа; крыло с параметрами $H=67$ мм; $l=205$ мм; $b=24$ мм; $\bar{t}=0,5$; $c=0,3$; толщина боковин $c_b=1,5$ мм; толщина корневого и концевого планов $c_k=c_\lambda=1,0$ мм; материал — сталь.

В обоих случаях исследовались колебания, соответствующие формам плоского моментного напряженного состояния (см. разд. 6.3). Испытания проводились на электродинамическом вибраторе с диапазоном рабочих частот от 500 до 10 000 Гц. Крыло прикреплялось к плите вибратора через угольный профиль и упругую (резиновую) прокладку с одного края корневого плана таким образом, чтобы второй край был свободен.

При прохождении всего диапазона частот выявлялись резонансные режимы, соответствующие изгибным колебаниям в срединно плоскости панели. Момент резонанса и формы колебаний (узловые линии) определялись по песчаным фигурам, которые образуются в процессе колебаний на боковинах или поперечных планах панели, а также при помощи щупа. Для квадратного крыла, длина сто-

роны которого, измеряемая числом ячеек, $n_\lambda = n_\gamma = l / \sqrt{2t} = 10$, возможны две изгибные формы, показанные на рис. 6.2, б, в. Экспериментальным путем достоверно удалось зафиксировать вторую форму, имеющую три узловые линии: по углам и по середине сторон решетки (см. рис. 6.2, в). Этой форме колебаний соответствовала экспериментально найденная частота 267 Гц. Расчет по теоретическим формулам (см. разд. 6.5) дает для этой формы значение частоты 273 Гц.

Размеры сторон второй удлиненной панели, измеренные числом ячеек, равны: $n_\lambda = 12$; $n_\gamma = 4$. Первая изгибная форма имеет тот же вид, что и деформация панели, показанная на рис. 6.2, г на участке панели со сторонами λ ; $0,5\gamma$.

При этой форме колебаний на боковине возникают четыре узловые линии, делящие панель на три равные части. Частота первой формы, найденная из эксперимента, равна 910 Гц. Теоретический расчет этой частоты дает величину 815 Гц. Несколько большее расхождение экспериментальных и теоретических данных в последнем случае объясняется тем, что решетка панели имела отклонение от расчетной схемы. Последний ряд ячеек у корня панели был выполнен неполным, что приводит к некоторому увеличению жесткости решетки по сравнению с расчетной.

Другим возможным видом экспериментальной проверки кинематических свойств крыла с диагональной решеткой при изгибной деформации в плоскости панели является сравнение теоретически найденных форм деформации с соответствующими деформациями специально изготовленных шарнирных моделей (рис. 10.2, а).

На рис. 10.2, б приведены примеры возможных деформаций шарнирных моделей с нерастяжимой решеткой.

Сопоставление этих экспериментальных данных с теоретическими результатами (см. рис. 6.2), полученными в разд. 6.2 для экви-

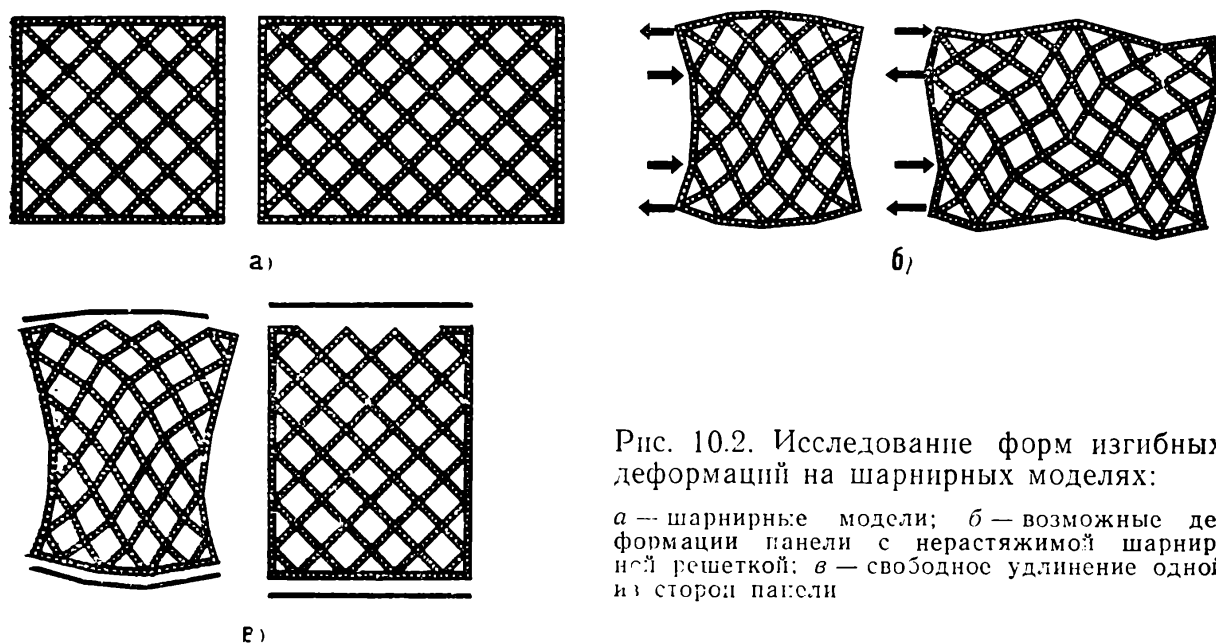


Рис. 10.2. Исследование форм изгибных деформаций на шарнирных моделях:

а — шарнирные модели; б — возможные деформации панели с нерастяжимой шарнирной решеткой; в — свободное удлинение одной из сторон панели

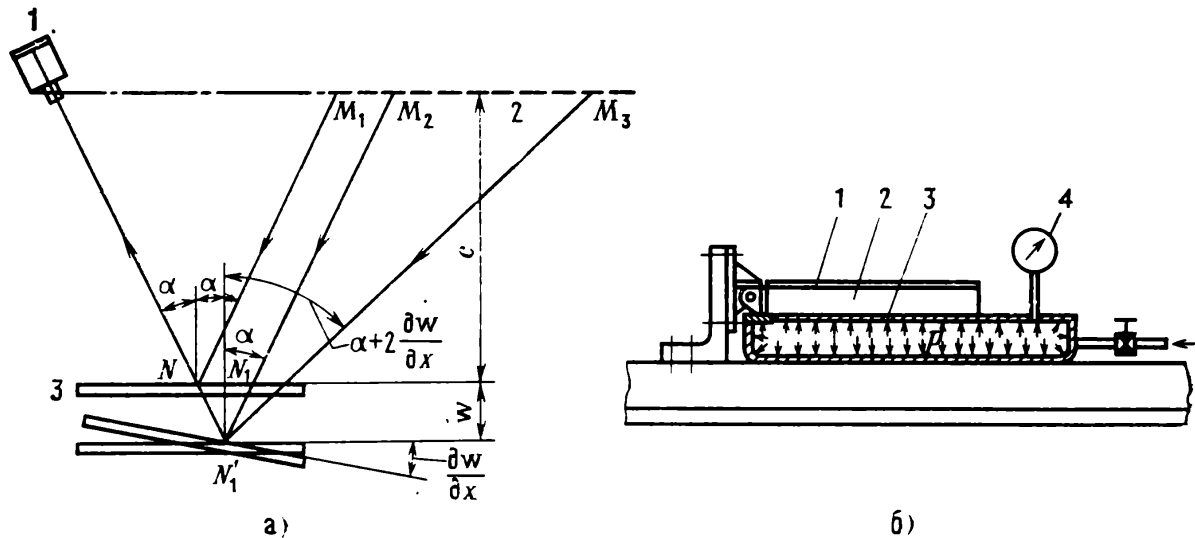


Рис. 10.3. Исследование деформации решетчатого крыла методом муаров:

a — оптическая схема эксперимента (1 — фотопластинка; 2 — растр; 3 — тонкая зеркальная пластинка из оргстекла на модели крыла); *б* — схема установки для нагружения модели крыла (1 — зеркальная пластинка; 2 — модель крыла; 3 — мембрана; 4 — манометр)

валентных панелей с параметрами $l = H = 4\sqrt{2}t$ и $l = 1,5H = 6\sqrt{2}t$, показывает полное соответствие характера деформаций моделей теоретически найденным формам. На рис. 10.2, в наглядно иллюстрируется возможность растяжения одной из боковин панели при отсутствии удлинений остальных элементов конструкции, если стороны панели, измеренные числом ячеек, имеют общий делитель, равный единице, что также полностью совпадает с результатами, приведенными в разд. 6.2.

10.3. Исследование крыла на изгиб методом муаров

В данном разделе приводятся результаты экспериментального исследования методом муаров изгибной деформации крыла из своей плоскости.

В эксперименте картина муаровых полос получалась в результате двухкратного фотографирования на одну и ту же фотопластинку 1 (рис. 10.3, *a*) изображения растра 2, отраженного от зеркальной поверхности тонкой пластины 3 из оргстекла, приклеенной к решетке крыла. Первый раз фотографировалась ненагруженная модель, второй раз производилось фотографирование модели, находящейся под нагрузкой. Муаровые полосы на фотографии представляли собой линии $\omega_x = \text{const}$. При этом цена полосы $\lambda_m = \Delta/2c$, где Δ — шаг растра. Угол наклона нормали к срединной поверхности крыла определялся по формуле

$$\omega_x = \frac{\partial \omega}{\partial x} = m \lambda_m.$$

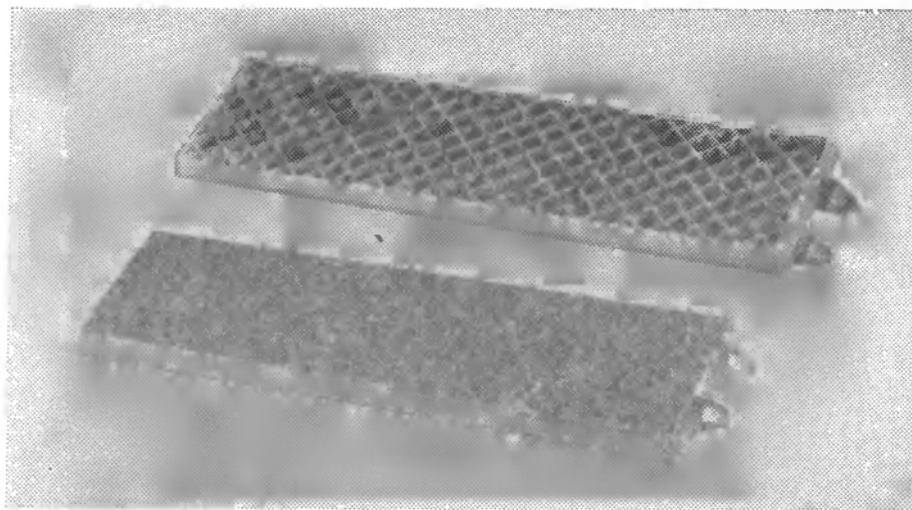


Рис. 10.4. Модель решетчатого крыла № 1 с зеркальной пластиной для исследования методом муаров

Координата x здесь отсчитывалась в направлении, перпендикулярном к линиям раstra. В эксперименте применялся растр с шагом $\Delta = 1,5$ мм; расстояние от раstra до модели составляло величину $\lambda_m = 1050$ мм. Таким образом, цена полосы определялась величиной $\lambda_m = 0,715 \cdot 10^{-3}$. Нагружение модели крыла осуществлялось при помощи устройства, состоящего из герметичной коробки, имеющей закрытое резиновой мембраной окно с размерами, соответствующими размерам панели (см. рис. 10.3, б). В коробку, помещенную между нижней плитой и панелью, насосом нагнетался воздух до необходимого давления, замерявшегося манометром.

Ниже приводятся результаты испытаний двух образцов решетчатой панели. На рис. 10.4 показаны фотографии модели крыла № 1 со стороны зеркальной пластинки и с обратной стороны. Испытуемые образцы панелей отличались друг от друга размерами, формой корневого плана. На photographиях (рис. 10.5) показаны картины муаровых полос при различной ориентации раstra. На первых двух photographиях полосы раstra наклонены под углом 45° к продольной оси панели. На третьей и четвертой — полосы раstra составляют соответственно угол 90° и 0° с продольной осью панели. Для полного исследования напряженного состояния панели достаточно одной пары photographий: первой или второй. Более удобными для дальнейшей обработки являются первые две photographии, так как на них муаровые полосы расположены сравнительно густо и пересекают линии раstra, что делает их более четкими и позволяет точнее построить графики $\omega_x = \text{const}$. Вторая пара photographий в случае необходимости дает возможность корректировать результаты обработки эксперимента по первой паре муаровых полос.

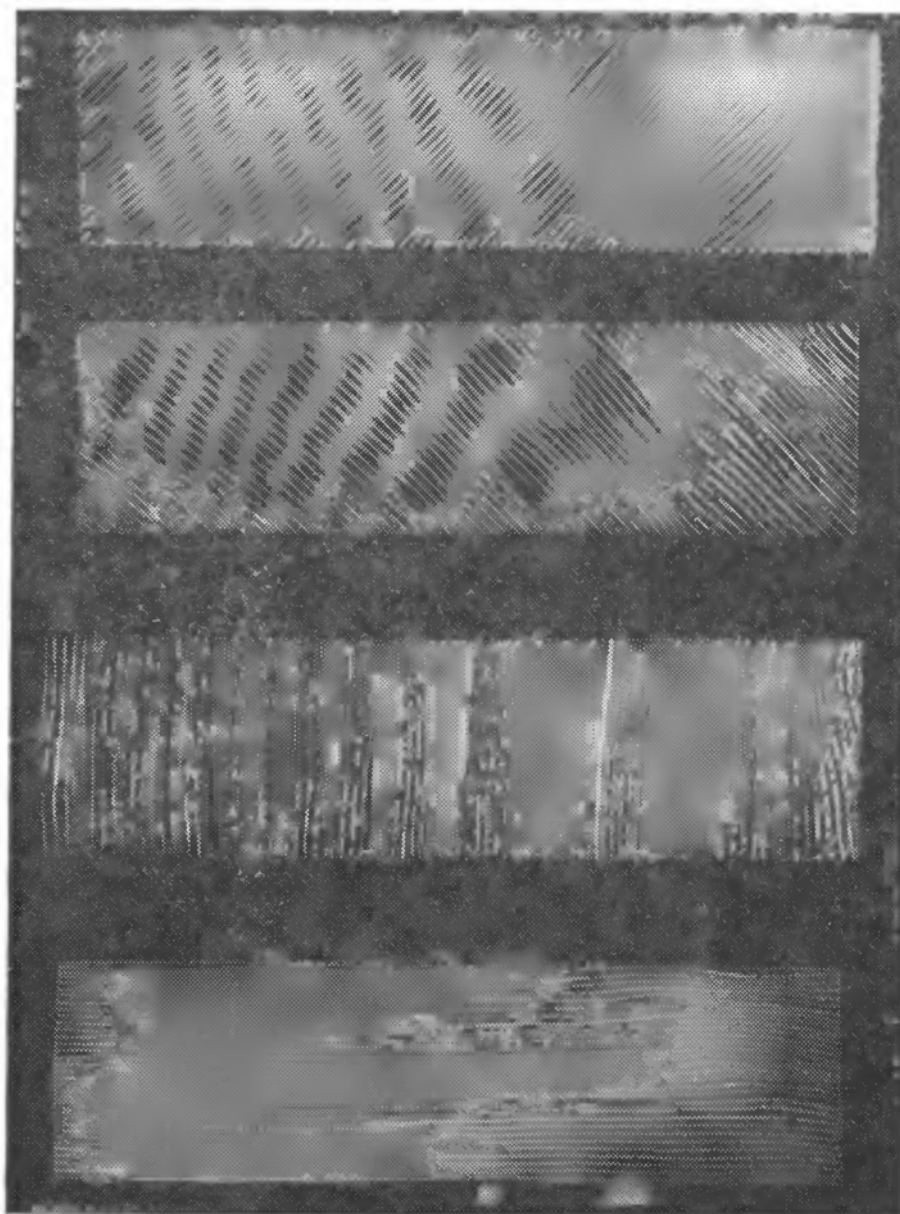


Рис. 10.5. Фотографии картин муаровых полос для модели № 1

Чтобы получить значение кривизны срединной поверхности в направлениях, параллельных поперечным и продольным сечениям панели, используем теорему суммирования муаровых полос.

Суммирование картин муаровых полос, зафиксированных в ортогональной системе координатных осей, наклоненных под углом 45° к оси панели, позволяет построить кривые $\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \text{const}$; $\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \text{const}$. На рис. 10.6 показано сложение картин муаровых полос для модели № 1. Положение полос, соответствующих углу наклона раstra в 45° , показанных сплошными линиями, предварительно осреднялось исходя из соображений зеркальной симметрии первых двух фотографий (см. рис. 10.5). Порядковые номера сплошных линий на рисунке 10.6, a имеют дробные значения, так как они

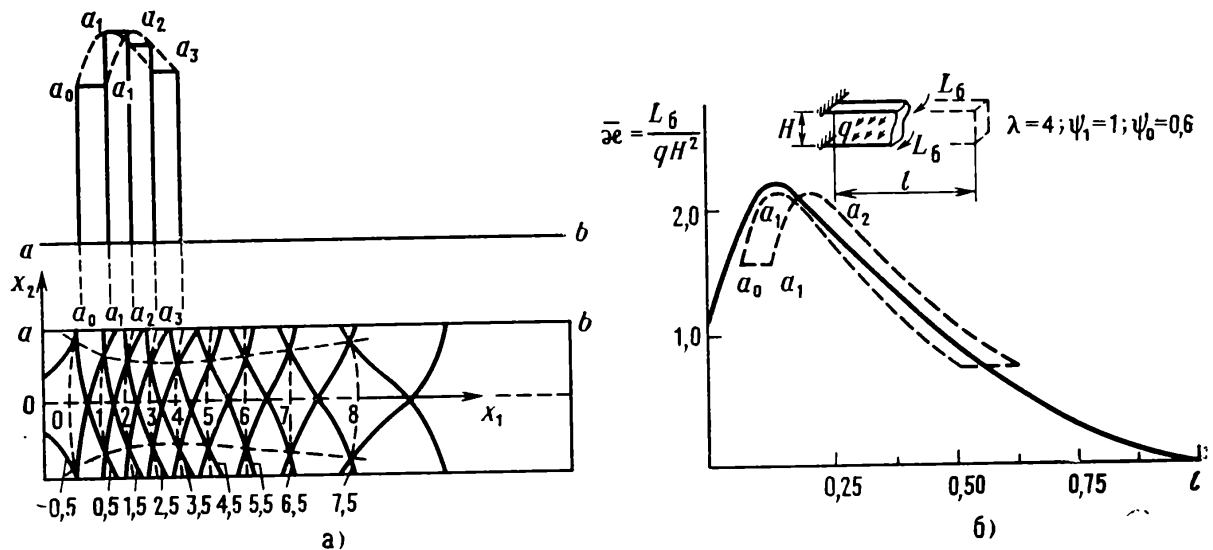


Рис. 10.6. Исследование деформации модели № 1 методом муаров:

a — сложение картин муаровых полос; *b* — сопоставление экспериментальных и теоретических данных

представляют собой срединные линии светлых полос муаровых картин. Порядковые номера поперечных пунктирных линий ($\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \text{const}$) получаются как полусуммы номеров сплошных линий, причем цена полосы этих линий $\lambda'_m = \lambda_m / \sqrt{2}$.

Для оценки величины и характера расположения изгибающего момента, действующего в сечениях $x_i = \text{const}$ крыла, достаточно построить эпюры приращения кривизны срединной поверхности панели в направлении оси Ox_1 . Приращение кривизны можно найти путем графического дифференцирования кривых, изображенных на рис. 10.6, *a*. В частности, чтобы построить график изменения кривизны $\kappa_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$ вдоль края *ab*, достаточно отложить значения координат

$$\kappa_{11}(0-1) = \frac{\lambda'_m}{a_0 - a_1}; \quad \kappa_{11}(1-2) = \frac{\lambda'_m}{a_1 - a_2}.$$

В результате получаем ломаную линию. Кривые, соединяющие концы горизонтальных отрезков $a_0 - a_1$, $a_1 - a_2$ и т. д., определяют ту область, в которой находится кривая $\kappa(x_1)$.

На рис. 10.6, *b* пунктиром показана экспериментально найденная область изменения вдоль края *ab* относительных значений кривизны $\bar{\kappa} = D_3 \kappa_{11} / qH^2$. При построении этого графика учитывалось, что для панели № 1 с параметрами $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $D_3 = 883$ кН/см; $H = 43$ мм; $\psi_1 = 1$; $\psi_2 = 0,4$; $\psi_0 = 0,6$; $\lambda = 4$ при нагрузке $q = 0,167$ Н/см² имеет место соотношение $\bar{\kappa} = 3850 \kappa_{11}$. На том же рисунке сплошной линией показана теоретическая кривая, которая была получена по

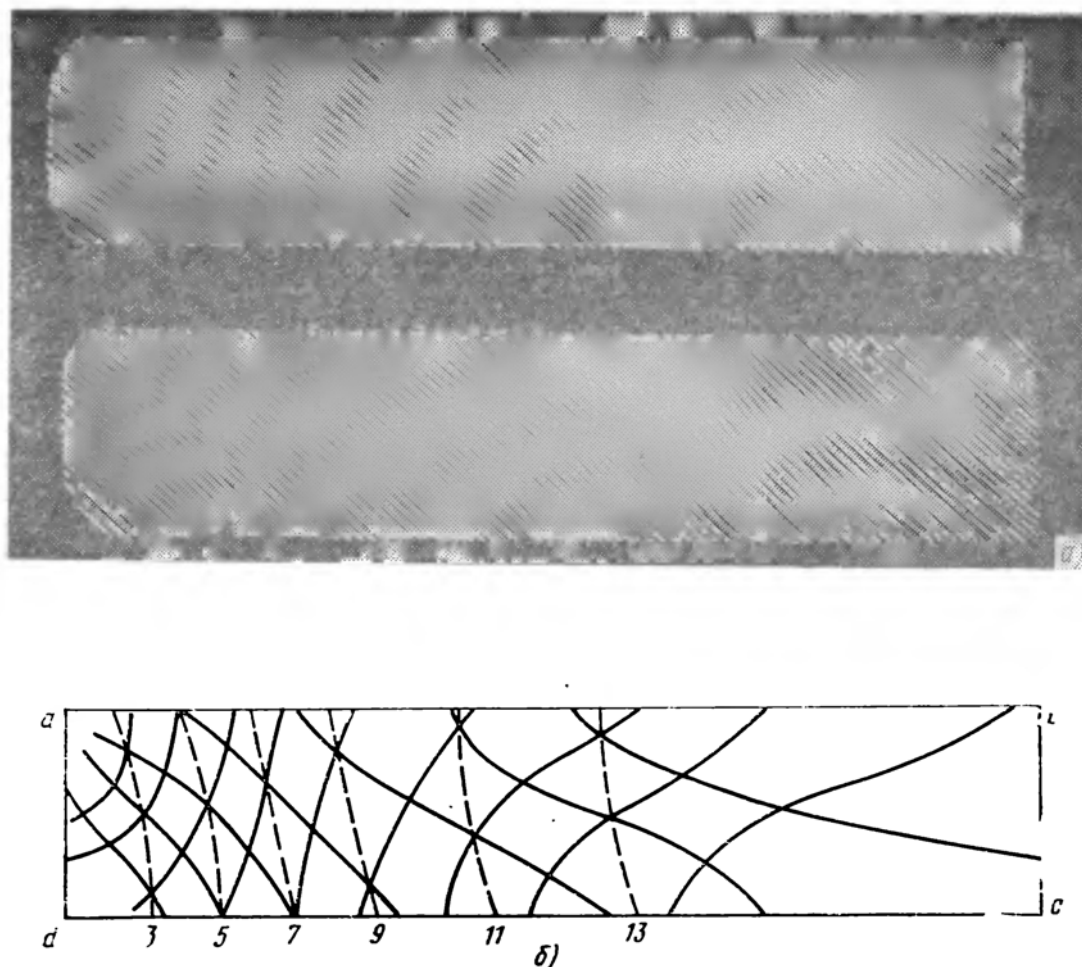


Рис. 10.7. Результаты эксперимента по методу муаров для модели № 2:
 а — фотографии муаровых полос; б — сложение картин муаровых полос

формулам, приведенным в разд. 7.3 в варианте прикрепления крыла $\xi^* = 0,25$.

На рис. 10.6, б видно, что экспериментальные и теоретические кривые χ практически совпадают. Отметим, что графики $\chi(x_1)$ с точностью до масштаба могут рассматриваться как эпюры изгибающих моментов, действующих в боковинах панели, так как имеет место соотношение $L_6 = \psi_1 D_3 \chi_{11} = q H^2 \psi_1 \chi_1$.

На рис. 10.7 показаны картины муаровых полос и график сложения полос, полученные для панели № 2 с параметрами $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $D_3 = 8,83$ кН/см; $H = 43$ мм; $\psi_1 = 5,5$; $\psi_2 = 2$; $\psi_0 = 27$; $\lambda = 5$ при нагрузке $q = 1,67$ Н/см².

На рис. 10.8 приведены экспериментальные (показаны пунктиром) и теоретические (сплошные линии) кривые, иллюстрирующие распределение кривизны (моментов) вдоль боковин моделей крыла № 2. В данном случае экспериментальные кривые, полученные для двух боковин, не осреднялись ввиду значительной асимметрии картин полос. Как видно из рис. 10.8, б, для модели крыла № 2

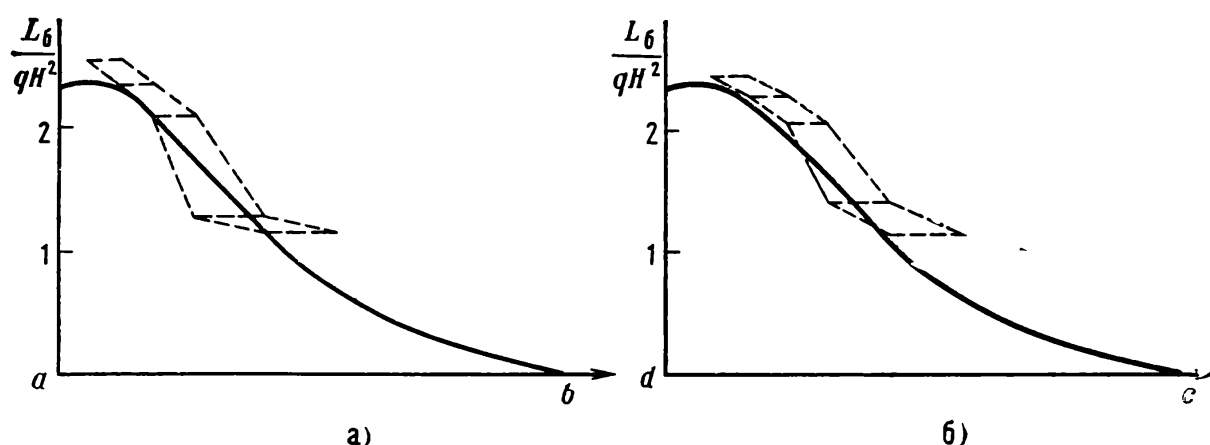


Рис. 10.8. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных для модели крыла № 2:

a — эпюры моментов в боковине ab ; b — эпюры моментов в боковине dc

также имеет место хорошее согласование теоретических и экспериментальных данных.

10.4. Статические испытания на прочность при распределенной нагрузке

Основной трудностью при испытании сотовых решетчатых крыльев является необходимость обеспечения равномерного нагружения большого числа планов, выполненных с малым шагом в виде сот. Гидравлический способ нагружения (см. разд. 10.5) в этом оказался неприменимым. Поэтому для проверки прочности выполненных конструкций сотовых решетчатых крыльев была разработана и изготовлена специальная установка, основанная на механическом способе нагружения.

Схема установки для испытания решетки на прочность силами Y и Z приведена на рис. 10.9. Здесь в каждую ячейку испытуемого сотового крыла, установленного консольно в узлах крепления, вставляется болт с втулкой, выполненной из губчатой резины. Диаметр втулки равен размеру ячейки, т. е. менее шага решетки на толщину плана. Выступающие концы болтов с обеих сторон крыла посекционнно связываются тремя парами металлических плит и шплинтуются. Плиты разрезаны на секции, чтобы не препятствовать естественной деформации решетки при ее нагружении.

Через проушины и систему рычагов плиты нагружаются заданной осевой силой Y . Для нагружения крыла боковой силой Z предусмотрена крышка с отверстиями под болт со сферической головкой. Усилие с крышки передается болтами на первую пару плит и через гибкие пакеты стальных лент — на остальные плиты. Введение гибких связей обеспечивает необходимый поворот плит при деформации крыла от действия осевой и боковой сил. Силы Z и Y , создаваемые винтовыми парами, можно прикладывать к крылу в различных соотношениях. Контроль за их величиной осуществляется с помощью динамометров.

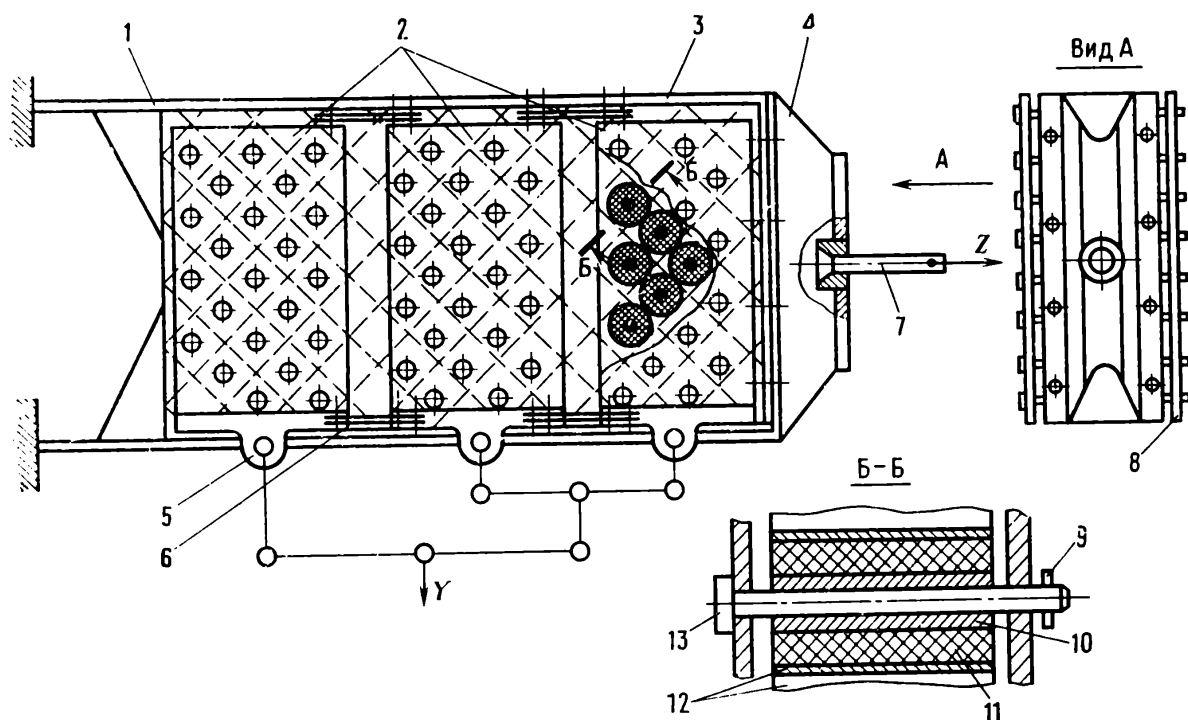


Рис. 10.9. Устройство для испытания решетчатого крыла на статическую прочность при распределенной нагрузке:

1 — боковина решетки; 2 — плиты; 3 — решетка; 4 — крышка; 5 — проушина; 6 — гибкая связь; 7 — болт со сферической головкой; 8 — плиты; 9 — шплинт; 10 — алюминиевая втулка; 11 — резиновая втулка; 12 — планы; 13 — болт

Данный способ нагружения сравнительно прост и вполне может быть осуществлен в производственных условиях. Установка дает возможность нагружать каждую ячейку крыла практически равномерно распределенной нагрузкой порознь как в боковом направлении, так и в осевом, а также одновременно в обоих направлениях.

Испытания, проведенные на этой установке с целью определения разрушающей осевой нагрузки Y натурного крыла, показали, что эта нагрузка и картина последовательности разрушения крыла, выявленные на установке, практически совпадали с соответствующими результатами, полученными при испытаниях крыла такого же типа в гидравлическом канале.

10.5. Испытания решетчатых крыльев в гидравлическом канале

Гидравлический канал для проведения испытаний должен иметь: 1) длину, обеспечивающую разгон, пробег с постоянной скоростью и торможение буксировочной тележки; 2) ширину и глубину, достаточные для создания нормальной картины обтекания конструкции крыла при ее буксировке в воде; 3) буксировочные тележки со скоростями, достаточными для создания разрушаю-

щих нагрузок. Скорость тележки определяется из равенства скоростных напоров крыла при его движении в воздухе и в воде.

Процесс испытания заключался в следующем. Испытуемое крыло в зависимости от определяемой разрушающей нагрузки крепилось на специальном приспособлении и вместе с ним устанавливалось на буксировочной тележке, имеющей возможность двигаться по рельсам вдоль канала. На тележке также располагались приборы для замера нагрузок, действующих на крыло при буксировке; аппаратура для замера скоростей тележки, а также обслуживающий персонал.

Испытания решетчатых крыльев в гидроканале показали хорошее согласование экспериментальных и расчетных данных по параметру разрушающей нагрузки. При этом было замечено, что моменту разрушения крыла предшествовало появление остаточных деформаций (прогибов) планов, расположенных в зоне крепления подкрепляющих подкосов. Картина деформаций соответствовала той, которая обнаруживалась при статических испытаниях на прочность распределенной нагрузкой. Разрушающую нагрузку от боковых сил для данного крыла получить не удалось из-за недостаточной скорости буксировочной тележки.

10.6. Испытание решетчатых крыльев в горячей выходной струе газотурбинного двигателя

Цель проведения этих исследований заключалась в том, чтобы на натурных крыльях: 1) определить наличие температурных градиентов в направлении хорды планов крыла, особенно в процессе прогревания планов и на переходных режимах работы крыла; 2) определить время, необходимое для равномерного прогревания планов крыла при обдуве их горячей струей газа; оценить поведение материала и конструкции крыла в целом в горячем скоростном потоке газов.

Экспериментальная установка состояла из авиационного газотурбинного двигателя, сварной фермы для крепления крыла, механизма ввода крыла в поток и вывода из него, испытуемого крыла, регистрирующей аппаратуры и пульта управления.

В средней части крыла, предназначенного для испытаний, на верхней поверхности центральных и боковых (у боковин) планов монтировались хромель-алюмелевые термопары, равномерно располагаемые по длине хорды планов и паяных швов. Проводка термопар изолировалась специальной нитью, пропитанной термостойким лаком. Во избежание срыва термопар в скоростном потоке они снаружи закрывались стальной фольгой, которая приваривалась к плану точечной сваркой. С помощью выносной термопары измерялась температура в выходной струе за двигателем, в месте рас-

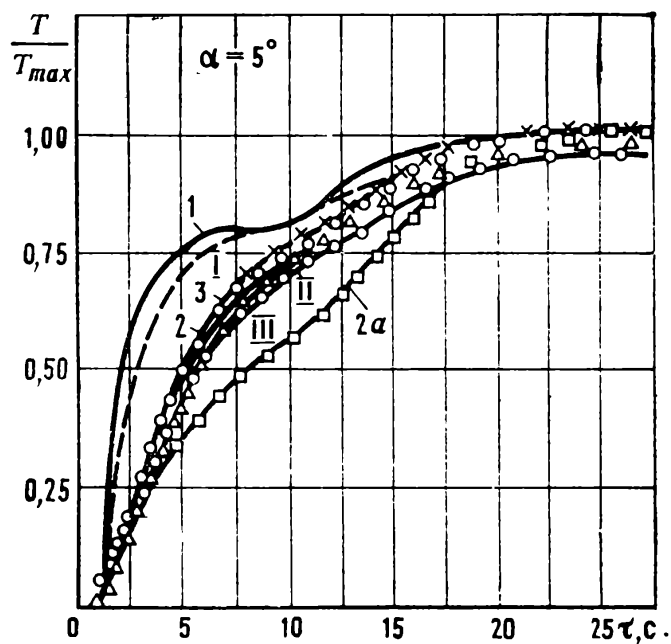


Рис. 10.10. Изменение температуры в различных сечениях центрального и бокового планов по времени испытания в струе ГТД

положения испытываемого крыла. Показания всех термомпар, а также параметры работы двигателя записывались на осциллограмму. Во время испытаний температура в выходной струе двигателя изменялась от 800 до 1150 К, а скоростной напор — от 25 кН/м² до 75 кН/м².

На рис. 10.10 приведены графики изменения относительной температуры в различных сечениях центрального и бокового планов в зависимости от времени, полученные при испытаниях решетчатого крыла, изготовленного из стали 12Х18Н9Т путем пайки припоем марки ПМ60Мц25. На основе этого графика на рис. 10.11 построен график распределения температуры по отдельным сечениям хорды центрального плана в различные моменты времени прогрева крыла. Испытания крыла проводились на углах атаки от 0 до 10°. Схема размещения крыла в горячей выходной струе двига-

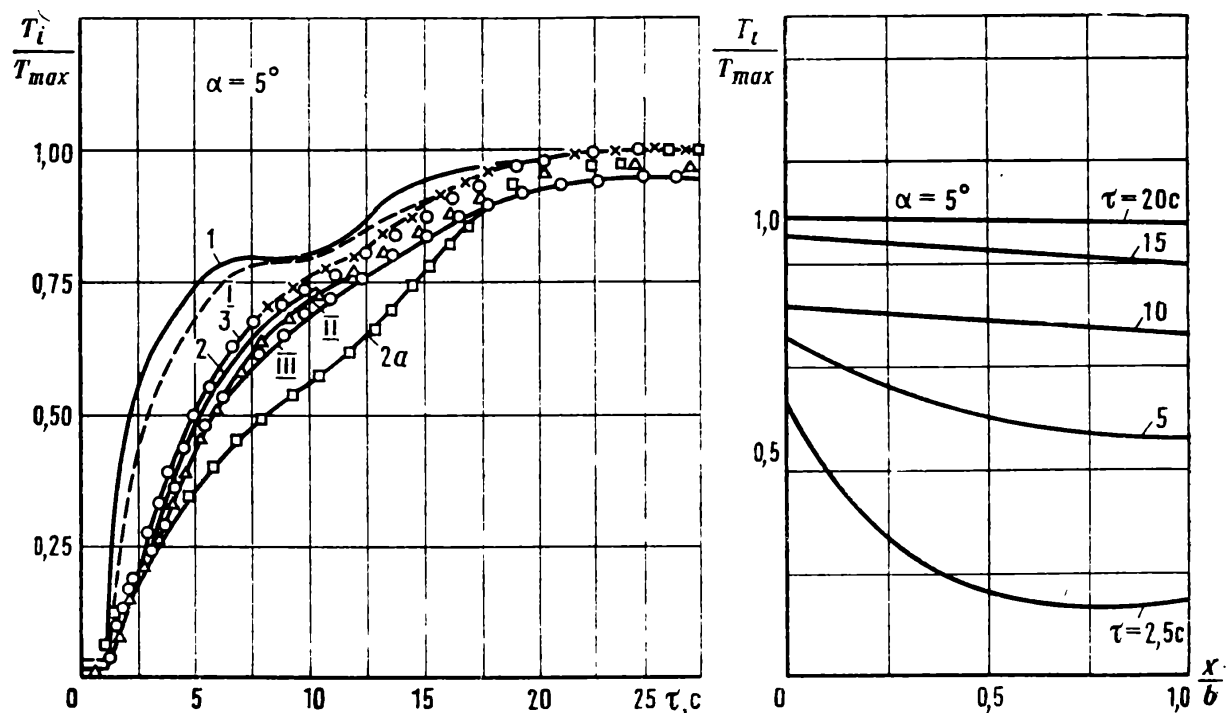


Рис. 10.11. Распределение температуры по сечениям хорды центрального плана крыла в различные моменты времени испытания в струе ГТД

Рис. 10.12. Схема размещения крыла в горячей выходной струе ГТД при испытании:

1 — горячая зона; 2 — граница горячей зоны; 3 — холодная зона

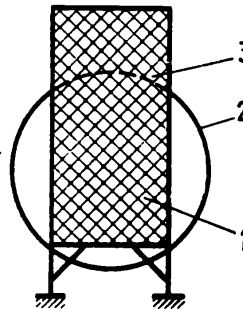
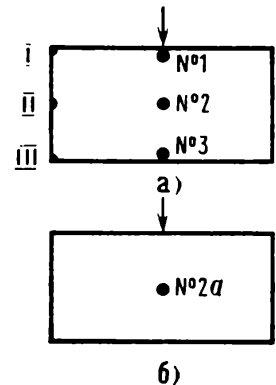


Рис. 10.13. Расположение термопар на планах крыла и их нумерация:
а — центральный план; б — боковой план



теля показана на рис. 10.12. Расположение термопар на планах крыла и их нумерация приведены на рис. 10.13. Номер термопары соответствует номеру кривой изменения температуры (см. рис. 10.10), построенной по показаниям данной термопары. Термопары с номерами I, II и III устанавливались по паяному шву в направлении хорды от носовой к хвостовой части плана.

Режим испытания крыла заключается в следующем. Холодное крыло вводилось в горячую струю двигателя при температуре ниже расчетной и выдерживалось там до равномерного прогрева плана по хорде. После этого температура резко увеличивалась до расчетной и крыло вновь выдерживалось в струе до равномерного прогрева плана по хорде.

В результате проведения испытаний и анализа полученных данных было установлено следующее.

1. Прогрев планов решетчатого крыла в начальный период и на переходных режимах изменения температуры в выходной струе двигателя характеризуется существенно неравномерным распределением температуры по хорде планов. С течением времени эта неравномерность уменьшалась и практически исчезала.

2. Прогрев крыла в целом в начальный период также происходит неравномерно. Прогрев боковых (крайних) планов, примыкающих к боковинам, происходит гораздо медленнее, чем прогрев центральных планов, так как боковины обладают большими массами, чем планы. С течением времени эта неравномерность также исчезает.

3. Температура носика плана практически не зависит от угла атаки крыла при его изменении от 0 до 10°.

Визуальные наблюдения показали:

а) в конструкции крыла после его испытаний при температуре ниже расчетной и при температуре, равной расчетной, не обнаруживались остаточные деформации и иные повреждения;

б) во время испытаний крыла при температуре выше расчетной, высоком скоростном напоре и при выдерживании крыла в струе в течение нескольких минут в нижней части крыла появлялись цвета побежалости (малиновый, красный); на боковинах крыла возникали чередующиеся черные и малиновые (красные) поперечные по-

лосы, на горячих планах решетки появлялись разрывы и задиры. После охлаждения крыла на планах были видны существенные остаточные деформации и порывы. Выпучивание планов происходило по одной полуволне. Интересно отметить, что и в этом случае разрушение планов происходило по основному материалу, а не по паяным швам.

Таким образом, испытания в струе ГТД показали, что в начальный период прогрева в элементах крыла могут возникать температурные напряжения, величина которых будет зависеть от перепада температур в элементе крыла.

10.7. Испытание решетчатых конструкций в сверхзвуковой струе газов жидкостно-реактивного двигателя

Целью данного исследования являлось выяснение работоспособности моделей решетчатых крыльев в условиях, близких к реальным.

Для имитации сверхзвукового полета и аэродинамического нагрева решетчатых крыльев была выбрана струя газов жидкостно-реактивного двигателя (ЖРД) с тягой около 1000 Н. В качестве горючего использовалась жидкость, представляющая собой смесь метилового и изопропилового спиртов с водой, в качестве окислителя — кислород. Температура газов в камере ЖРД определялась по измеряемой в опыте величине импульса давления в камере

$$\beta = \frac{p_k^* F_{кр}}{G_{сек}},$$

где p_k^* — давление заторможенного потока в камере сгорания; $F_{кр}$ — площадь сопла в критическом сечении; $G_{сек}$ — секундный расход газа.

Пересчет импульса давления β на температуру осуществлялся по формуле

$$T_k^* = \frac{x^2 \beta^2}{R}.$$

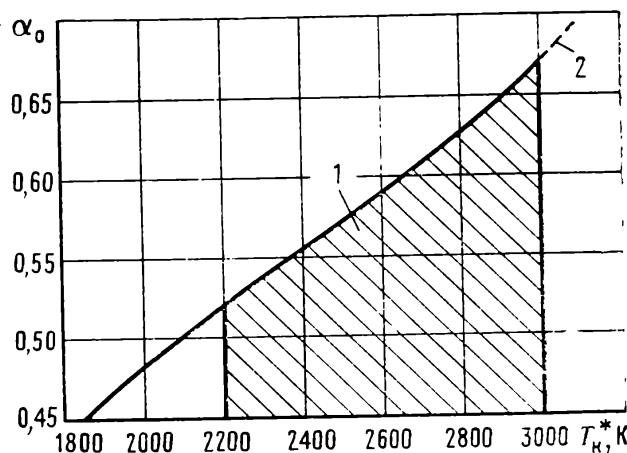
Величина x^2/R определялась расчетным путем для данного соотношения компонентов топлива и составила для принятого режима работы ЖРД 0,173 К/с². При этом температура торможения потока газов в камере T_k^* составляла около 2900 К. Ввиду незначительного удаления модели от среза сопла ЖРД можно принять, что температура торможения потока у испытуемых решеток составляла также 2900 К. Скорость газа в зоне размещения испытуемых моделей составляла около 2000 м/с. Этот режим был принят в качестве основного. В последующем изменение температуры потока газов

Рис. 10.14. Влияние коэффициента избытка окислителя α_0 на температуру в камере ЖРД:

1 — диапазон рабочих температур; 2 — зона диссоциации продуктов сгорания

достигалось путем варьирования величиной коэффициента избытка окислителя α_0 в камере сгорания ЖРД (рис. 10.14).

В основу проводимого экспериментального исследования был положен метод сравнительных испытаний, при котором в струе размещались одновременно две модели, выполненные разными способами, на одинаковом удалении от обреза сопла двигателя. Это обеспечивало одинаковое воздействие струи газов на обе модели.



Лобовая площадь одной модели составляла 120×60 мм. В состыкованном положении лобовая площадь составляла 120×130 мм за счет технологических припусков плана по 5 мм на каждой модели. Струя газов, имевшая в диаметре 60 мм, направлялась в центр прямоугольника, образованного моделями.

Угол атаки планов в струе газов мог изменяться от 0 до 27° . Относительный шаг решетки \bar{t} был выбран постоянным и равным единице при величине хорды 20 мм. Относительная толщина планов была переменной и определялась толщиной листового конструкционного материала и применяемых покрытий.

В качестве испытываемых объектов были выбраны модели решетчатых крыльев, каждая из которых представляла систему перекрещивающихся пластин. Передние и задние кромки пластин притуплялись под углом 45° на глубину 0,2—0,3 мм. Все модели выполнялись с помощью пайки. Часть из них подвергалась защите с помощью покрытий. Для изготовления моделей использовались жаростойкие стали 12Х18Н9Т, 08Х25Н16Г7АР (ЭИ835), титановый сплав ОТ4, тугоплавкие сплавы на основе ниобия — ВН2 и молибдена — ВМ1, а также листовой тантал и вольфрам.

В качестве защитных покрытий применялись гальванический цинк и кадмий, охлаждавшие планы моделей вследствие сублимации, гальваническая медь, керамическая жаростойкая эмаль ЭВ55 и окись алюминия.

Установка для испытания паяных моделей представляла собой комплекс устройств и сооружений, обеспечивающих автоматический запуск, режимную работу в течение заданного времени и выключение ЖРД. Специальная подставка позволяла осуществлять крепление моделей, восприятие боковых усилий и изменение угла атаки планов решеток.

Продолжительность работы двигателя в соответствии с выбранной программой испытаний измерялась секундомером, после чего двигатель выключался нажатием кнопки. Уточнение длительности пребывания моделей в струе газов производилось при помощи киносъемки, путем дешифрирования пленки. В зависимости от числа кадров в секунду (32, 96, 1000 и т. д.) достигалась соответствующая точность отсчета: 0,031, 0,0104, 0,001 с и т. д.

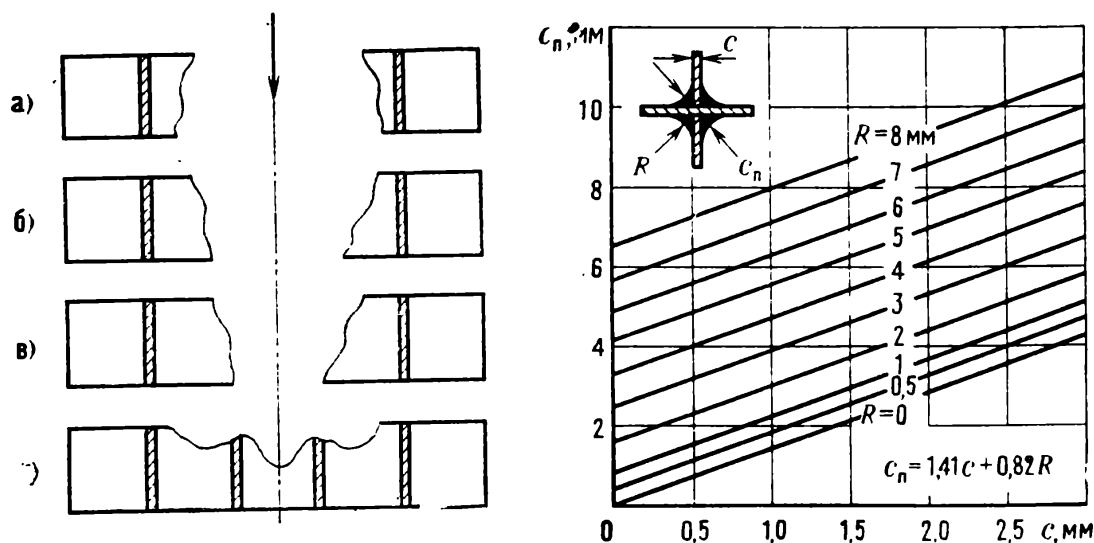


Рис. 10.15. Характер обгорания планов:

а — на моделях из титанового сплава ОТ1; б — на стальных моделях без покрытий; в — на стальных моделях с покрытиями; г — сколо паяных перекрестий. Стрелкой указано направление струи газов

Рис. 10.16. Зависимость толщины паяного перекрестия c_n от толщины планов c и радиуса галтелей R

Для измерения температуры передних кромок планов применялся оптический пирометр ОППИР-17. С целью записи скорости нарастания и спада температуры, а также ее максимальной величины использовался самолетный осциллограф К-20, шлейфы которого были связаны с электрической цепью нити накала пирометра.

Давление в камере сгорания поддерживалось постоянным и равным 1,47 МПа. В качестве переменных параметров были: длительность работы двигателя (от 1,24 до 14,5 с), расстояние моделей от обреза сопла, угол атаки решеток и температура на передней кромке моделей.

Результаты испытаний анализировались путем внешнего осмотра моделей, измерениями разрушенных участков моделей и изучением поведения моделей в ходе пусков ЖРД по данным кинофото-съемки. В итоге было установлено следующее.

1. Высокотемпературная сверхзвуковая струя производит ярко выраженное разрушающее действие на защищенные и незащищенные модели из титанового сплава ОТ4 и жаростойких сталей 12Х18Н9Т и 08Х25Н16Г7АР. Во всех случаях при длительности пусков от 1,24 до 14,5 с и температуре 2900 К наблюдается сквозной прогар моделей, имеющий размер, равный или несколько больший, чем диаметр струи.

2. Несмотря на большую температуру плавления титанового сплава по сравнению с указанными выше сталями, термостойкость его значительно ниже. Титановый сплав сгорает при обильном выделении ярких искр, образуя поднутрение (обратный конус) на концах оставшихся планов (рис. 10.15). Эту особенность можно

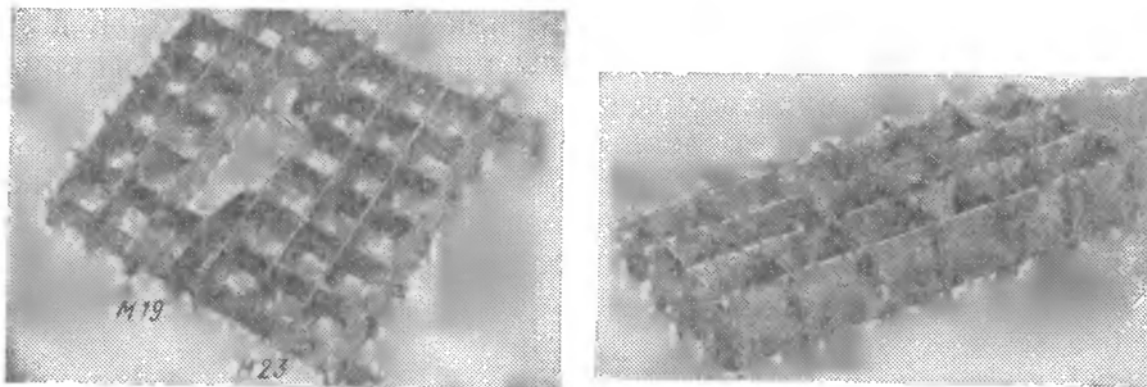


Рис. 10.17. Модели № 19 из сплава ВМ1 и № 23 из вольфрама после испытания при температуре 2900 К в течение 10 с

Рис. 10.18. Модель № 29 из ниобиевого сплава 5ВМЦ после испытаний при температуре 2200 К в течение 4 с. На одном из планов наблюдается начало эрозии передней кромки

объяснить высокой экзотермичностью реакции окисления титана: выделение значительного количества тепла при сгорании частиц металла на передней кромке способствует более интенсивному сгоранию последующих слоев вдоль по хорде моделей.

3. Галтели припоя, образуя в местах перекрестий планов сравнительно массивные узлы (рис. 10.16), являются своего рода холодильниками. Поэтому, несмотря на пониженную температуру плавления припоев (медь, медь—никель, ПМ60Мц25, ПЖК-35) по сравнению с основным материалом, кратковременная работоспособность паяных швов в высокотемпературной струе значительно выше, чем работоспособность самого конструкционного материала.

4. Эффект примененных покрытий проявляется в задержке начала сгорания конструкционного материала, в уменьшении размеров прогара пластин, в изменении характера теплопередачи, следствием чего является различный внешний вид обгоревших планов на покрытых и непокрытых моделях (см. рис. 10.15).

5. Из всех исследовавшихся конструкционных материалов планы большей толщины (0,8 мм) обладают заметно более высокой термостойкостью, чем тонкие планы (0,4 мм). Преимущество припоя ПЖК-35 по сравнению с припоем ПМ60Мц25 в явной форме не обнаружено, как и преимущество стали 08Х25Н16Г7АР по сравнению со сталью 12Х18Н9Т. В результате воздействия высокотемпературной сверхзвуковой струи на планах решеток наблюдается эрозия передних кромок и боковых поверхностей; происходит растрескивание и потеря устойчивости отдельных планов.

6. Модели из молибденового сплава не обнаруживают каких-либо повреждений при 2900 К в течение времени до 5 с, а модель из вольфрама работоспособна в течение 10 с (рис. 10.17). Модели

из ниобиевого сплава работоспособны при температуре 2200 К в течение 3,6 с. Продление времени испытания до 4 с приводит к заметной эрозии передних кромок отдельных планов (рис. 10.18).

Таким образом, рассмотренный метод испытаний решетчатых конструкций показал широкие возможности оценки работоспособности применяемых материалов, припоев, покрытий. Выявлены условия, при которых решетчатые модели могут выполнять свое назначение.

10.8. Испытания решетчатых крыльев и паяных соединений в условиях вибрации

Частоты и формы собственных колебаний решетчатых крыльев определялись резонансным методом с помощью механических или электродинамических вибраторов с диапазоном изменения частот от 20 до 10 000 Гц. Частоты собственных колебаний крыла подсчитывались по осциллограммам, записанным на шлейфовом осциллографе при резонансе, или определялись непосредственно по частотомеру, связанному с генератором звуковой частоты. Определение форм собственных колебаний крыла производилось с помощью песочных фигур и специальных щупов (кварцевого, шарикового и др.). Момент резонанса устанавливался на максимальной амплитуде колебаний крыла. Спектр частот и соответствующие частотам формы собственных колебаний определялись как в плоскости решетки крыла, так и в перпендикулярной плоскости. Само крыло при этом закреплялось на жестком основании и возбуждалось мощным стационарным электродинамическим вибратором.

Для определения частот собственных колебаний, т. е. резонансных режимов крыльев с учетом жесткости узлов и места крепления крыла на корпусе летательного аппарата применялись переносные электродинамические вибраторы, а также механические эксцентриковые вибраторы направленного действия.

При применении механического вибратора с массой, соизмеримой с массой крыла, частоты собственных колебаний крыла будут отличаться от истинных значений из-за наличия дополнительной массы вибратора, закрепленной на крыле. В этом случае для определения истинных значений частот, например первой или основной, поступают следующим образом.

Установив вибратор с массой Δm_1 на крыло, доводим частоту его вращения до резонанса с первой формой собственных колебаний системы, состоящей из массы крыла m и массы вибратора Δm_1 . Частота колебаний такой системы $\omega_1 = \pi n_1 / 30$, где n_1 — частота вращения в минуту вибратора при резонансе. Далее, присоединив к вибратору небольшую дополнительную массу, вновь добиваются наступления резонанса с первой формой собственных колебаний системы уже с массой $m + \Delta m_2$ (Δm_2 — масса вибратора вместе с дополнительной). Частота собственных колебаний такой системы $\omega_2 = \pi n_2 / 30$, где n_2 — частота вращения в минуту вибратора при данном резонансном режиме.

После этого истинное значение круговой частоты первого тона собственных колебаний крыла находят по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 (\Delta m_2 - \Delta m_1)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2) m}},$$

где m — масса крыла, приведенная к месту крепления вибратора, может быть определена по формуле

$$m = \frac{\omega_2^2 \Delta m_2 - \omega_1^2 \Delta m_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}.$$

Исследования прочности паяных соединений при вибрациях проводились с целью оценки выносливости паяных швов, выполненных различными припоями, и определения места образования усталостного разрушения.

Объектами испытаний на выносливость являлись призматические образцы, выполненные из разных материалов, применяемых для изготовления решетчатых крыльев. Образцы из каждого материала паялись встык различными припоями и затем сортировались по группам, в каждой из которых был применен один и тот же припой. Технология пайки при этом была такой же, как и при изготовлении самих решеток.

Для испытаний образцы устанавливались на электродинамическом вибраторе и крепились консольно относительно сечения спая, находившегося около места заделки. Испытания велись на режиме первого тона свободных изгибных колебаний при напряжениях, задаваемых в корневых сечениях образцов, т. е. в паяных швах, равных от 0,25 до 0,65 σ_B . Таким образом, паяный шов при испытаниях нагружался симметричной знакопеременной изгибной нагрузкой и работал в наиболее тяжелых условиях из всех возможных. Контроль за величиной нормального напряжения в паяном сечении осуществлялся по величине максимальной амплитуды колебаний свободного конца образца.

Напряжение σ_K в корневом сечении консольного образца толщиной s и длиной l связано с величиной максимальной амплитуды колебаний y_{\max} свободного конца при первом тоне свободных изгибных колебаний по формуле

$$\sigma_K = 1,76E \frac{c}{l^2} y_{\max},$$

где E — модуль упругости материала образца.

Усталостные свойства паяного соединения при данном уровне напряжения характеризовались числом циклов нагружения или временем работы образца до появления усталостной трещины в паяном шве. Момент появления усталостной трещины в корневом сече-

ний (паяном шве) образца определялся по моменту падения амплитуды свободных колебаний.

Число циклов нагружения образца подсчитывалось по формуле

$$N = f_1 \tau,$$

где f_1 — частота первого тона свободных колебаний образца, Гц;
 τ — время работы образца до появления трещины в паяном шве, с.

Для примера в табл. 10.1 приведены некоторые результаты испытаний образцов, паяных встык, на усталость.

Таблица 10.1

Результаты испытаний паяных образцов на выносливость

Сочетание материал — припой		Время работы образца, мин, до появления усталостной трещины при различных напряжениях в паяном шве			
Материал	Припой	206 МПа	294,3 МПа	392,4 МПа	490,5 МПа
12X18H9T	ПЖК-35	38—110	—	—	—
12X18H9T	Г70НХ	21—52	—	—	—
12X18H9T	Г40НХ	3—19	—	—	—
ЭИ835	ПЖК-35	720	30—370	47—50	15—35
ЭИ835	Г70НХ	—	30—420	30—50	20—40

Испытания показали, что припой, применяемые для пайки крыльев, вполне надежно обеспечивают необходимое время работы паяных соединений даже в самом тяжелом случае их нагружения. Наибольшую выносливость имеют образцы из стали ЭИ835, спаянные припоем ПЖК-35.

Часть 4

ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕТЧАТЫХ КРЫЛЬЕВ

Первые три части книги были посвящены изучению аэродинамики, прочности и технологии изготовления и испытания новых несущих поверхностей — решетчатых крыльев. В последней, четвертой ее части, подводится общий итог: приводятся и анализируются те их основные характеристики, которые решающим образом влияют на установление рациональной области применения этих крыльев.

Конструктивные особенности указанных несущих поверхностей позволяют осуществлять малогабаритные компоновки со складывающимися крыльями как с естественным, так и принудительным раскрытием.

При создании современных летательных аппаратов различного назначения приходится удовлетворять разнообразным сложным и нередко противоречивым требованиям. Одной из важных частей аппарата, совершающего полет в атмосфере или движущегося в воде, являются несущие и управляющие поверхности. Они предназначены для создания перегрузок, а также придания необходимых устойчивости и управляемости. К этим поверхностям предъявляется ряд существенных требований. Так, они должны обеспечивать на соответствующих этапах полета большие перегрузки, иметь достаточную прочность, малую массу и т. д. Иногда несущие поверхности должны придавать различные аэродинамические свойства летательному аппарату на разных этапах полета.

Особенности аэродинамики решетчатых крыльев главным образом определяются двумя обстоятельствами. С одной стороны, это — полипланная несущая система конечного размаха с пространственным вихревым следом, оказывающим существенное влияние на обтекание крыла. Напомним, что при установившемся движении свободные вихри сходят почти исключительно с боковин крыла. При колебаниях крыла образуются и поперечные свободные вихри чисто нестационарной природы, сходящие с задних кромок всех планов. С другой стороны, планы крыла работают в условиях сильного взаимного влияния, которое прекращается только при достаточно больших числах Маха.

Последнее обстоятельство приводит к следующей особенности аэродинамических характеристик. Подбором геометрических параметров и прежде всего относительного шага \bar{t} можно существенно влиять на зависимость коэффициента подъемной силы от числа Маха при фиксированном угле атаки α . Так, при небольших значениях относительного шага \bar{t} можно получить почти постоянное значение производной c_y^α в широком диапазоне чисел M_∞ .

Малые размеры хорд планов по сравнению со среднеаэродинамическими хордами равнотесущих монопланов являются главной причиной большей стабильности центра давления решетчатых крыльев как по углам атаки, так и по числам Маха. Из этого вытекает следующее важное заключение. Применение этих крыльев в качестве управляющих органов потребует существенно менее мощных бустерных устройств, чем для монопланов.

Решетчатые крылья обладают значительными демпфирующими аэродинамическими характеристиками. Это приводит к более интенсивным затуханиям продольных колебаний крыла, чем монопланного с такими же несущими свойствами.

И, наконец, решетчатые крылья не теряют работоспособности в широких диапазонах углов атаки и чисел Маха.

Главным недостатком этих крыльев является более низкое аэродинамическое качество, чем монопланов, на дозвуковых скоростях полета.

Решетчатые крылья обладают замечательными свойствами в отношении прочности, жесткости и массы. С точки зрения строительной механики решетчатые крылья с диагональным расположением планов значительно рациональнее, чем силовые схемы монопланов.

В гл. 1 достаточно конкретно и подробно рассмотрены весовые и конструктивно-технологические особенности создания решетчатых крыльев.

Специфика этих новых конструкций выявлена в двух основных аспектах. В первом случае речь идет об общем сопоставлении характеристик решетчатых и моноплановых крыльев с показом тех областей, где решетки обладают явным преимуществом. Этой же цели служит анализ ряда модификаций силовых схем решетчатых крыльев, раскрывающий новые возможности при создании перспективных летательных аппаратов с решетчатыми крыльями.

Во втором случае специфика решетчатых крыльев показывается путем анализа архитектуры конструктивного исполнения крыла и отдельных его элементов, в частности полых, охлаждаемых, составных и комбинированных конструкций из различных материалов, например из тончайшей фольги. При этом рассмотрено влияние методов изготовления на массу решетчатых крыльев, а также зависимость методов изготовления от габаритных размеров крыльев.

Материалы данного раздела помогут конструкторам и техноло-гам предприятий в их творческих изысканиях в области создания эффективных изделий.

Как известно, возможностей, которыми располагают моноплан-ные крылья, для решения современных практических задач стано-вится недостаточно. Поэтому необходимо изучать и применять наряду с ними и другие несущие поверхности. Одним из таких видов в какой-то степени новых несущих поверхностей могут быть и решет-чатые крылья.

Глава 11

Особенности, связанные с аэродинамикой крыла

11.1. Зависимость аэродинамических характеристик от числа M_∞ и геометрических параметров

Решетчатые крылья обладают рядом аэродинамических особенностей, которые позволяют подбором их геометрических параметров в значительной степени влиять на характер зависимости коэффициентов от числа M_∞ .

Наиболее существенное влияние на характер изменения производной c_y^α по числу M_∞ оказывает относительный шаг решетчатого крыла.

На рис. 11.1 приведена зависимость производной c_y^α от числа M_∞ для решетчатых крыльев, имеющих различные значения относительного шага \bar{t} . На этом же графике пунктиром нанесена зависимость c_y^α от M_∞ для прямоугольного крыла с удлинением $\lambda=5$, а сплошной — эта же зависимость для бесконечной пластины.

Характерной особенностью зависимости c_y^α от M_∞ является то, что при числах $M_\infty < M_{кр3}$ производная c_y^α решетчатого крыла меньше c_y^α обычного крыла, особенно при малых значениях относительного шага \bar{t} . Это объясняется тем, что здесь имеет место взаимное влияние между планами, которое уменьшает значение c_y^α планов решетчатого крыла. При числах $M_\infty \geq M_{кр3}$ взаимное влияние между планами отсутствует и производная c_y^α решетчатого крыла становится практически такой же, как для бесконечной пластины.

При малых относительных шагах ($t \leq 0,35$) можно получить почти постоянное значение c_y^α на числах M_∞ от нуля до $M=3...4$. Это свойство, которого нет у обычных крыльев, может оказаться особенно важным для применения решетчатых крыльев в качестве стабилизаторов некоторых типов летательных аппаратов. Оно по-

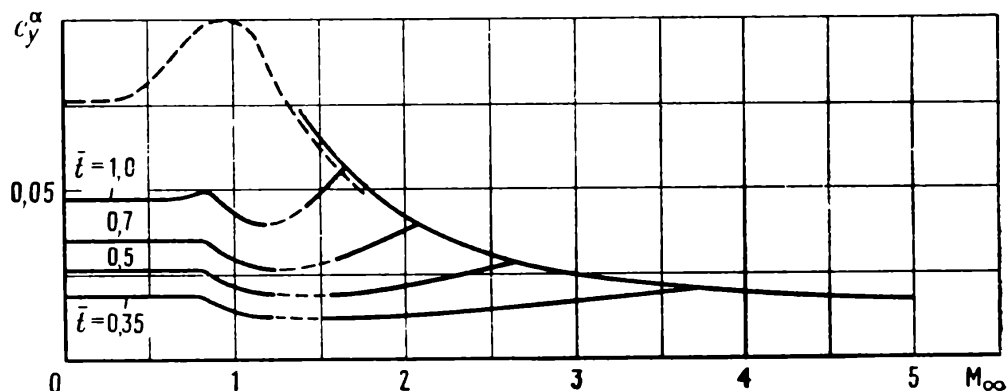


Рис. 11.1. Зависимость c_y^a от числа M_∞ при различных значениях относительного шага \bar{t} при $\bar{H}=1,0$; $n=25$ (c_y^a , 1/градус)

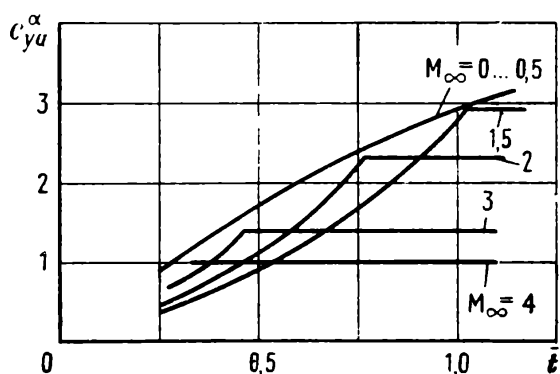


Рис. 11.2. Зависимость производной c_{ya}^a от относительного шага \bar{t} при различных значениях M_∞ ; $\bar{H}=0,5$; $n=20$

звояет получить близкую к постоянной степень устойчивости летательного аппарата при изменении числа M полета.

График, показывающий зависимость c_{ya}^a от относительного шага \bar{t} при различных числах M_∞ , приведен на рис. 11.2.

Из этого графика видно, что если число M_∞ возрастает, то минимальное значение относительного шага \bar{t} , при котором не будет взаимного влияния между планами, становится меньшим. При числе $M_\infty=4$ взаимного влияния не будет уже при $t=0,35$.

Влияние числа планов показано на рис. 11.3, 11.4 и 11.5. Из этих графиков видно, что с увеличением числа планов производная c_{ya}^a уменьшается как на дозвуковых (см. рис. 11.3), так и на сверхзвуковых скоростях (см. рис. 11.4 и 11.5). Это объясняется тем, что при увеличении числа планов уменьшается часть подъемной силы, создаваемой верхней поверхностью верхнего плана и нижней поверхностью нижнего плана, которые работают вне взаимного влияния с другими планами. При увеличении числа планов производная c_{ya}^a решетчатого крыла приближается к c_{ya}^a полиплана с бесконечным числом планов. Степень уменьшения c_{ya}^a при увеличении числа планов n зависит от относительного шага \bar{t} и числа M_∞ . Так, при малых дозвуковых скоростях ($M_\infty=0...0,4$) уже при $n>10$ производная c_{ya}^a изменяется весьма мало. При сверхзвуковых скоростях степень изменения c_{ya}^a при увеличении n зависит от числа M_∞ . Чем

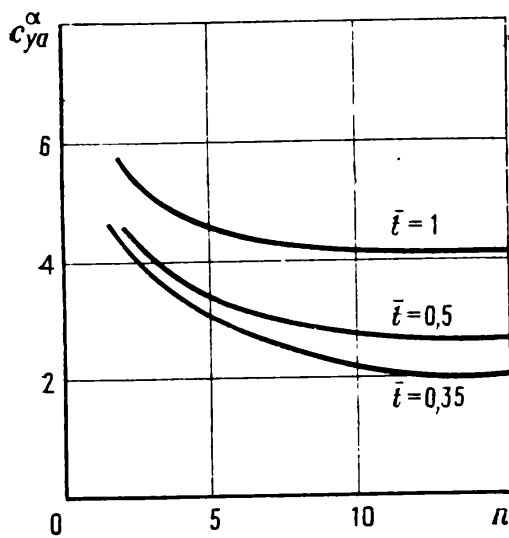


Рис. 11.3. Зависимость производной c_{ya}^{α} от числа планов n при малых дозвуковых скоростях при $M_{\infty}=0 \dots 0,4$

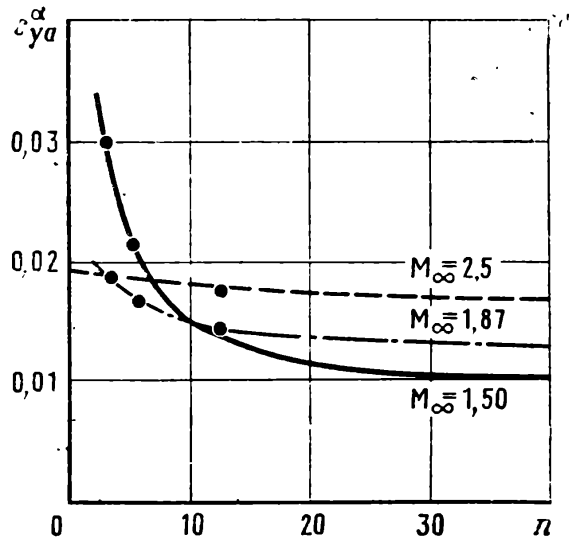


Рис. 11.4. Зависимость производной c_{ya}^{α} от числа планов n при относительном шаге $\bar{t}=0,35$ на сверхзвуковых скоростях (c_y^{α} , 1/градус)

больше число M_{∞} и больше относительный шаг \bar{t} , тем меньше производная c_{ya}^{α} зависит от числа планов n .

Рассмотрим влияние относительной высоты $\bar{H}=H/l$ на аэродинамические характеристики.

Из графика, приведенного на рис. 11.6, видно, что при дозвуковых скоростях увеличение H/l приводит к уменьшению производной

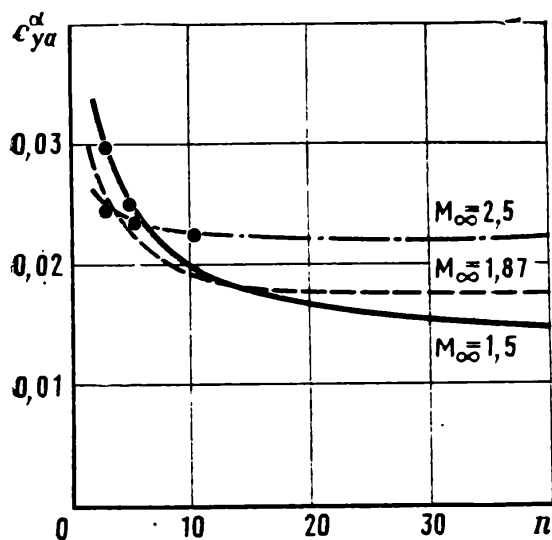


Рис. 11.5. Зависимость производной c_{ya}^{α} от числа планов при относительном шаге $\bar{t}=0,5$ на сверхзвуковых скоростях (c_y^{α} , 1/градус)

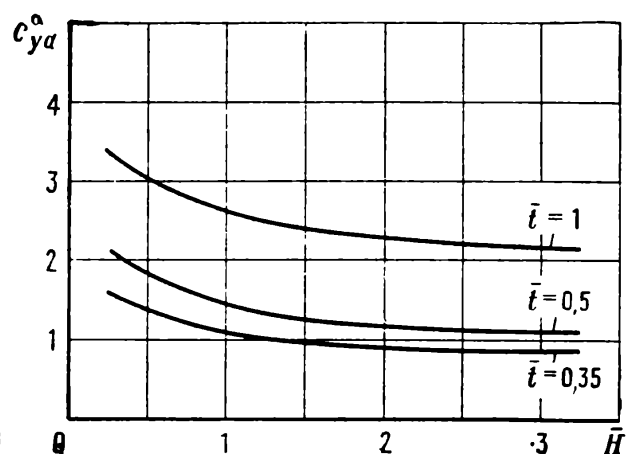


Рис. 11.6. Зависимость производной c_{ya}^{α} от \bar{H} на дозвуковых скоростях при $M_{\infty}=0 \dots 0,5$; $n=8$

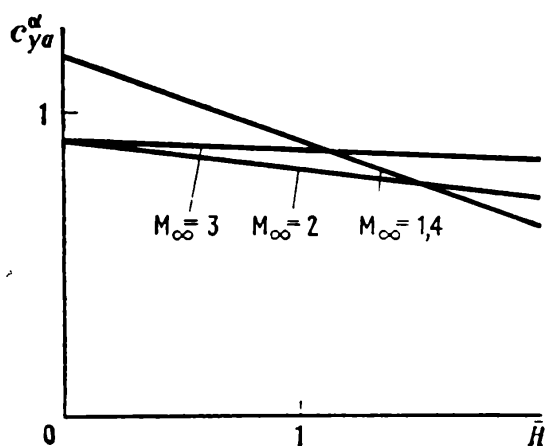


Рис. 11.7. Зависимость производной c_{ya}^{α} от \bar{H} на сверхзвуковых скоростях при $\bar{t}=0,35$; $n=5$

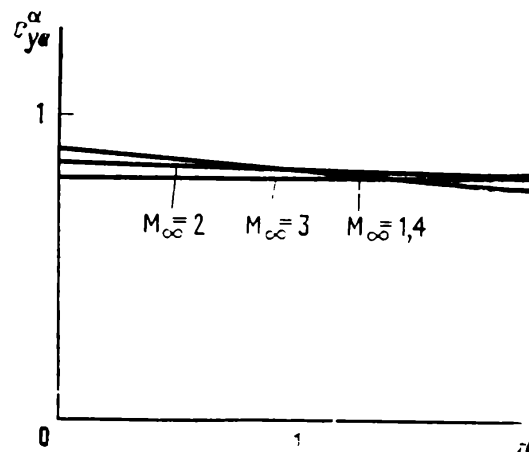


Рис. 11.8. Зависимость производной c_{ya}^{α} от \bar{H} на сверхзвуковых скоростях при $\bar{t}=0,35$; $n=10$

c_{ya}^{α} при заданных значениях n и \bar{t} . Увеличение отношения H/l при постоянных n и \bar{t} приводит к уменьшению удлинения несущих планов решетчатого крыла [см. формулу (4.16)]. Этим и объясняется уменьшение производной c_{ya}^{α} при увеличении отношения H/l .

Влияние параметра \bar{H} на сверхзвуковых скоростях зависит от числа M_{∞} (рис. 11.7 и 11.8). Это объясняется тем, что от числа M_{∞} зависят углы конусов возмущений, исходящих от торцов нижнего и верхнего планов (см. рис. 4.9). При уменьшении числа M_{∞} эти углы и зоны влияния концевых перетеканий увеличиваются. Вследствие этого происходит уменьшение подъемной силы, создаваемой верхним и нижним планами. Влияние параметра \bar{H} при меньших числах M_{∞} проявляется сильнее (см. рис. 11.7).

Увеличение числа планов при фиксированных значениях \bar{H} и \bar{t} , во-первых, приводит к увеличению удлинения планов, а во-вторых, — к уменьшению доли подъемной силы, создаваемой верхней поверхностью верхнего плана и нижней поверхностью нижнего плана. Поэтому при одинаковых M_{∞} и числе планов $n=10$ влияние \bar{H}

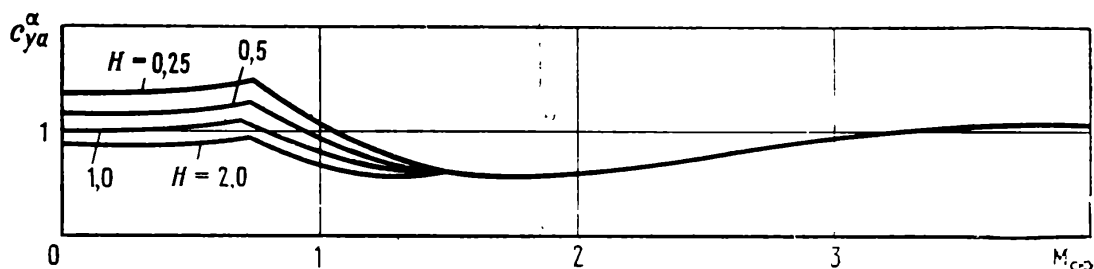
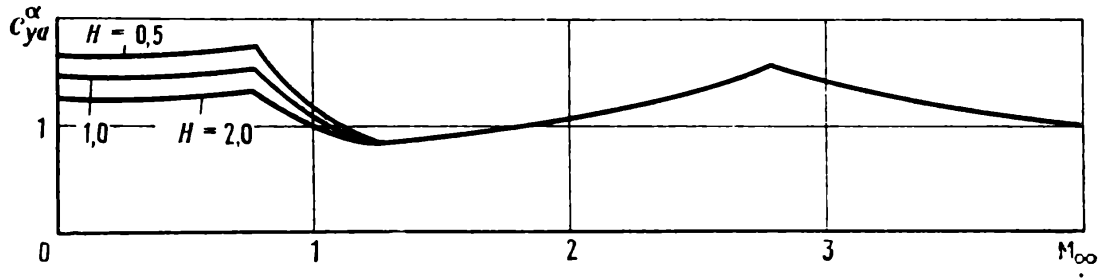
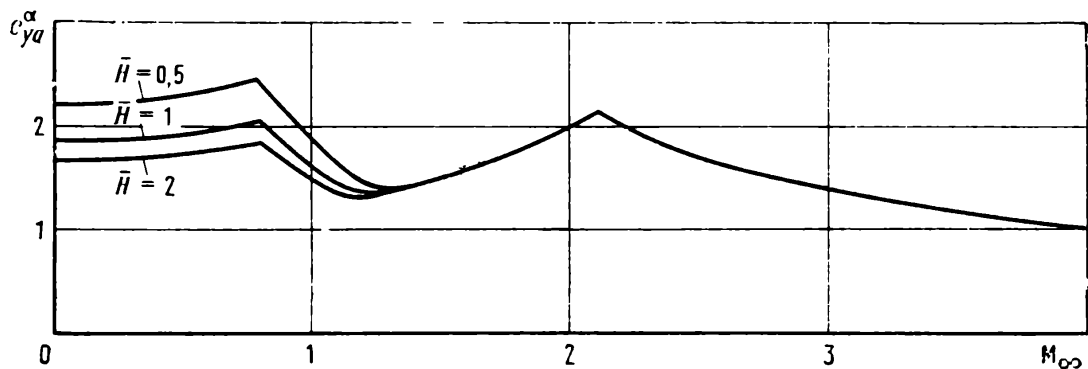
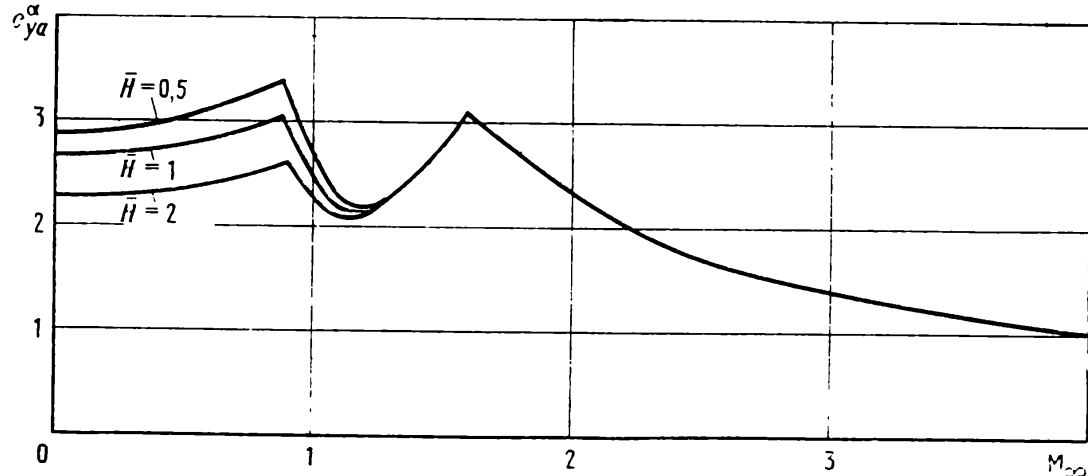


Рис. 11.9. Зависимость производной c_{ya}^{α} от числа M_{∞} при $\bar{t}=0,35$; $n=20$

Рис. 11.10. Зависимость производной c_{ya}^α от числа M_∞ при $\bar{t}=0,5$; $n=20$ Рис. 11.11. Зависимость производной c_{ya}^α от числа M_∞ при $\bar{t}=0,7$; $n=20$ Рис. 11.12. Зависимость производной c_{ya}^α от числа M_∞ при $\bar{t}=1$; $n=20$

сказывается значительно меньше, чем при $n=5$ (см. рис. 11.7 и 11.8).

Совместное влияние параметра $\bar{H}=H/l$ и числа M_∞ при различных значениях \bar{t} и $n=20$ можно увидеть на графиках, приведенных на рис. 11.9—11.12.

При увеличении числа Маха от $M_\infty=0$ до $M_\infty=M_{кр1}$ производная c_{ya}^α увеличивается вследствие влияния сжимаемости воздуха. Причем из этих графиков видно, что чем больше относительный шаг \bar{t} ,

тем больше первая критическая скорость $M_{кр1}$. При $M_\infty = M_{кр1}$ в узком сечении между планами образуется критическое сечение, ограничивающее расход воздуха через внутренний объем решетчатого крыла. Отношение скоростного напора газа q , протекающего внутри решетчатого крыла, к скоростному напору невозмущенного потока q_∞ уменьшается. Поэтому величина c_{ya}^a , отнесенная к q_∞ , убывает с возрастанием M_∞ . При малых сверхзвуковых скоростях перед решетчатым крылом появляется отсоединенный прямой скачок уплотнения. Уменьшение c_{ya}^a происходит до $M_\infty = M_{кр2}$, когда прямой скачок становится присоединенным.

При $M_\infty > M_{кр2}$ на передних кромках планов решетчатого крыла появляются косые скачки уплотнения и течение внутри планов становится сверхзвуковым. Относительный расход воздуха через внутренний набор решетчатого крыла возрастает и c_{ya}^a начинает увеличиваться. По мере увеличения числа M_∞ наклон скачков увеличивается и относительные площади планов, работающих в режиме взаимного влияния, уменьшаются. Поэтому c_{ya}^a возрастает до $M_{кр3}$, когда планы начинают работать при отсутствии взаимного влияния. Производная c_{ya}^a при дальнейшем увеличении числа M_∞ уменьшается, как это происходит обычно у изолированного крыла на сверхзвуковых скоростях.

Выше говорилось о том, что влияние параметра \bar{H} на сверхзвуковых скоростях становится весьма малым уже при числе планов $n \geq 10$. На графиках, показанных на рис. 11.9—11.12, приведены зависимости c_{ya}^a от M_∞ для решетчатых крыльев с числом планов $n = 20$. Поэтому влияние \bar{H} при $M_\infty > M_{кр2}$ оказывается настолько малым, что учет его не имеет практического смысла.

11.2. Аэродинамические характеристики решетчатых крыльев на больших углах атаки

В некоторых случаях может оказаться рациональным применение решетчатого крыла на больших углах атаки. Особенность обтекания решетчатого крыла приводит к тому, что критический угол атаки решетчатого крыла на всех числах M_∞ значительно больше, чем у монопланного крыла. При этом на закритических углах коэффициент подъемной силы решетчатого крыла уменьшается менее интенсивно, чем у монопланного.

Это объясняется характером взаимного влияния между планами решетчатого крыла. На верхних поверхностях его планов вследствие влияния соседнего плана возникают меньшие положительные градиенты давлений, чем у монопланного крыла, что способствует затягиванию срыва на большие углы атаки и менее интенсивное развитие срыва на закритических углах.

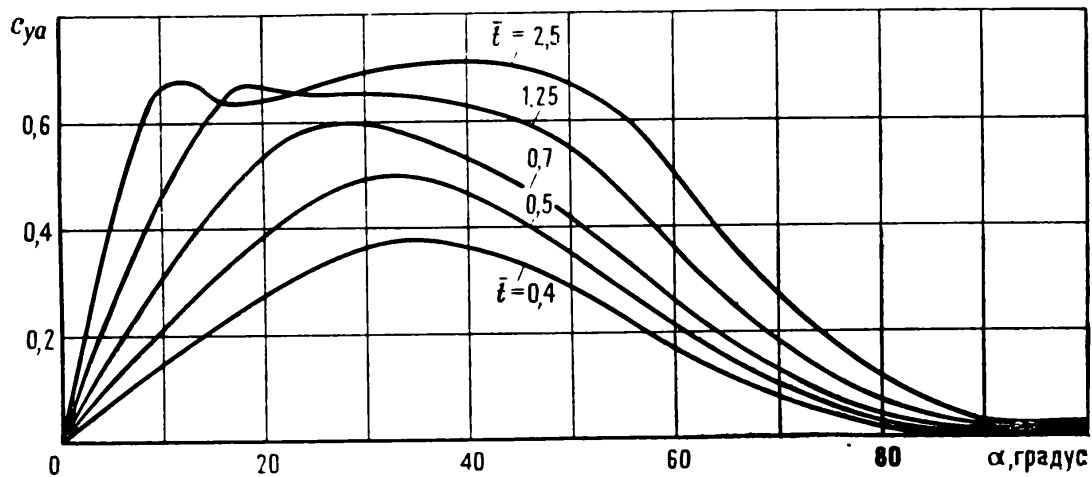


Рис. 11.13. Зависимость c_{ya} от α на малых дозвуковых скоростях при $\bar{H}=3$

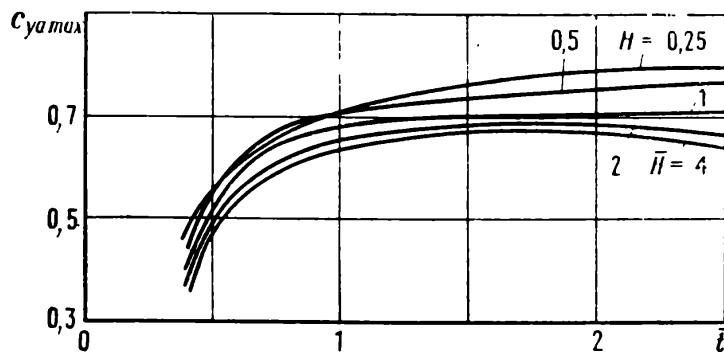


Рис. 11.14. Зависимость $c_{ya \max}$ от шага \bar{t} при различных значениях \bar{H}

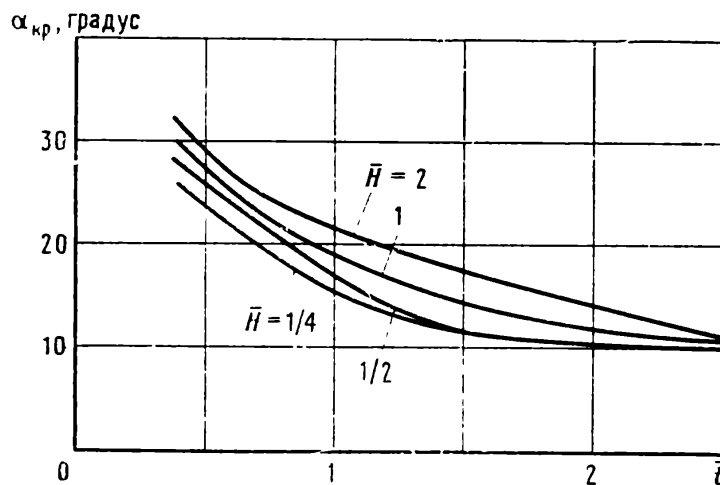


Рис. 11.15. Зависимость критического угла атаки $\alpha_{кр}$ от относительного шага \bar{t} при различных \bar{H} на малых дозвуковых скоростях

На рис. 2.18 и 11.13 представлены типичные экспериментальные зависимости коэффициента c_{ya} от α для решетчатого крыла на малых дозвуковых скоростях. Зависимости $c_{ya \max}$ и $\alpha_{кр}$ от параметров \bar{t} и \bar{H} показаны на рис. 11.14 и 11.15. Результаты исследований на малых дозвуковых скоростях позволяют отметить следующее. Коэффициент $c_{ya \max}$ крыла возрастает с увеличением шага \bar{t} и с уменьшением \bar{H} . Критические углы атаки решетчатых крыльев малого шага достигают величины $\alpha_{кр} = 25...35^\circ$, причем при увеличении относительного шага \bar{t} угол $\alpha_{кр}$ уменьшается до значения $\alpha_{кр} = 10...13^\circ$ при $\bar{t} = 2,5$.

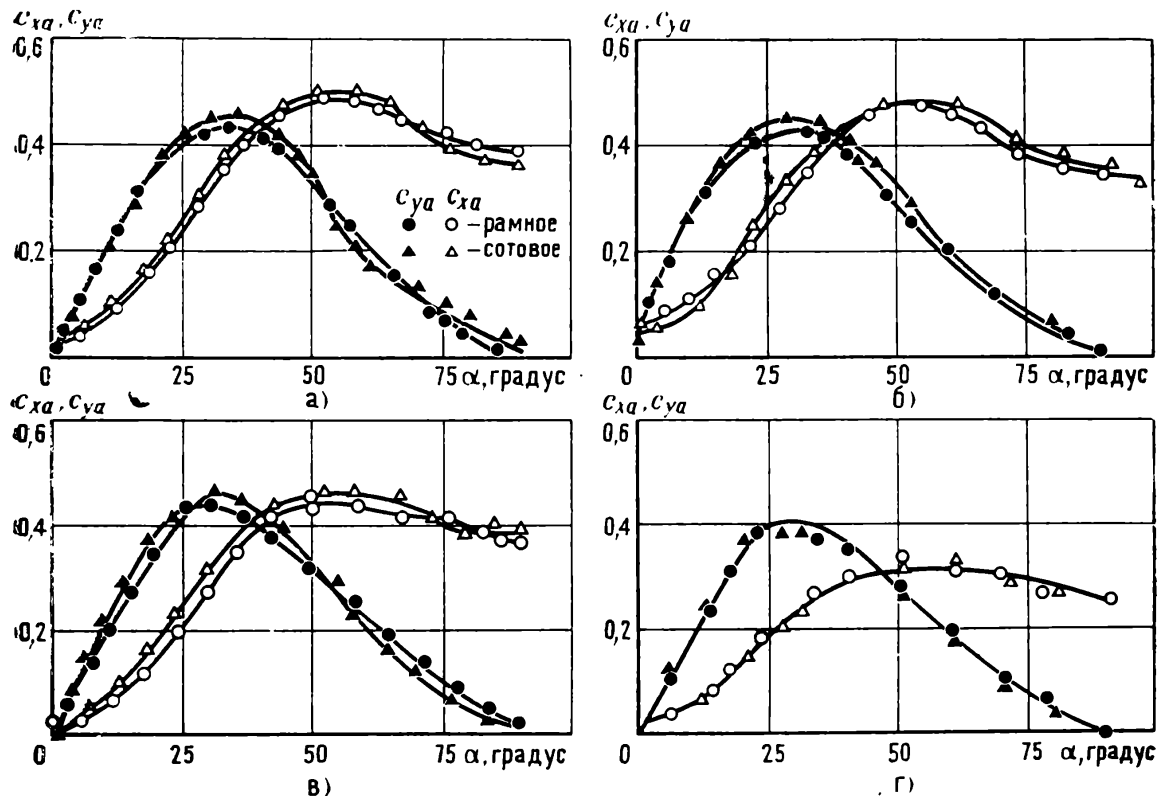


Рис. 11.16. Зависимости c_{ya} и c_{xa} от α на сверхзвуковых скоростях:

а — $M_\infty = 1,85$; $\bar{t} = 0,5$; б — $M_\infty = 2,5$; $\bar{t} = 0,5$; в — $M_\infty = 3,5$; $\bar{t} = 0,5$; г — $M_\infty = 3,5$; $\bar{t} = 0,35$

Особенности изменения аэродинамических характеристик решетчатых крыльев на больших углах атаки α на сверхзвуковых скоростях можно проследить на рис. 11.16, где приведены зависимости c_{ya} и c_{xa} при изменении углов атаки от 0 до 90° для крыльев, имеющих $\bar{t} = 0,35$ и 0,5. Из этих графиков видно, что коэффициенты c_{ya} и c_{xa} рамных и сотовых крыльев практически совпадают.

Как показывают эксперименты, $c_{ya \max}$ и $c_{xa \max}$ зависят от числа планов. Влияние числа планов на величину этих коэффициентов видно из графиков, приведенных на рис. 11.17 и 11.18, из которых следует, что при $n > 10-12$ $c_{ya \max}$ и $c_{xa \max}$ можно считать не зависящим от n .

Обработка экспериментальных данных показывает, что для приближенного определения максимального значения коэффициента подъемной силы и коэффициента сопротивления при числах $0 < M < 5$ можно использовать зависимости

$$c_{ya \max} / \bar{t} = 0,95 \text{ и } c_{xa \max} / \bar{t} = 0,8.$$

Эти зависимости позволяют определить указанные коэффициенты с точностью 10—12% для решетчатых крыльев при относительных шагах $0,3 \leq \bar{t} \leq 0,7$.

Углы атаки, при которых реализуются максимальные значения c_{ya} и c_{xa} , равны $\alpha_{c_{ya \max}} = 30 \dots 35^\circ$ и $\alpha_{c_{xa \max}} = 50^\circ$.

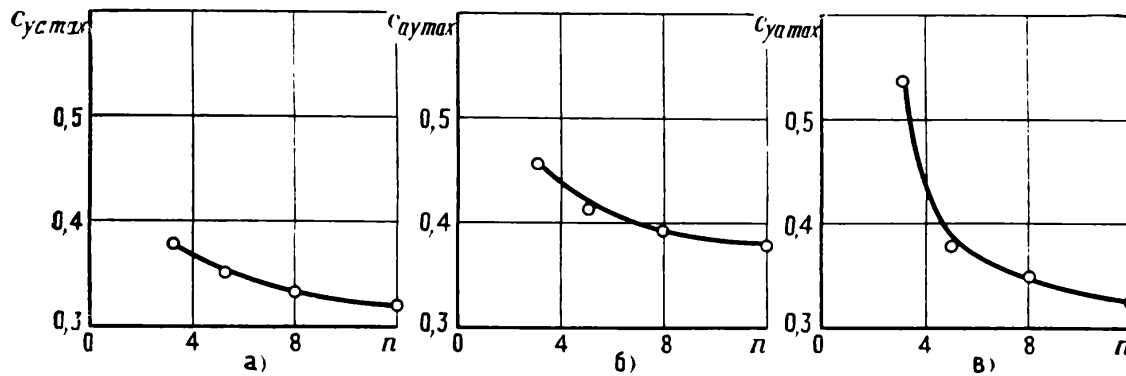


Рис. 11.17. Зависимости максимального значения коэффициента подъемной силы $c_{ya \max}$ от числа планов n на сверхзвуковых скоростях при $\bar{t}=0,35$:

а — $M_\infty=5,0$; б — $M_\infty=3,5$; в — $M_\infty=2,5$

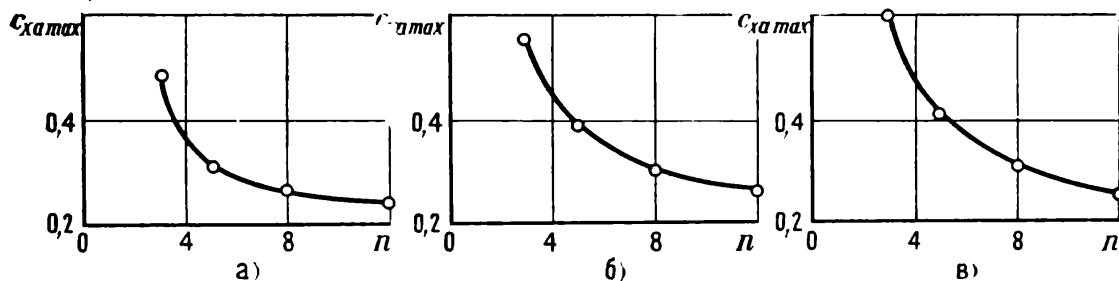


Рис. 11.18. Зависимость максимального значения $c_{xa \max}$ от числа планов n на сверхзвуковых скоростях при $\bar{t}=0,35$:

а — $M_\infty=5,0$; б — $M_\infty=3,5$; в — $M_\infty=2,5$

Систематические экспериментальные исследования дали возможность разработать методику приближенного расчета зависимости коэффициентов c_{ya} и c_{xa} от углов атаки. Эта методика основывается на предположении, что нормальную силу крыла при любых углах атаки можно разбить на две составляющие: на часть, возникающую от плавного обтекания, и часть, соответствующую срывному обтеканию.

Рассмотрим крыло под некоторым углом атаки α . Скорость набегающего потока можно разложить на две составляющие: продольную и поперечную (рис. 11.19). Продольная составляющая скорости V_x оказывает влияние на состояние пограничного слоя и коэффициент сопротивления $c_{x \text{ тр}}$. Нетрудно прийти к выводу, что нормальная сила Y на крыле будет создаваться вследствие плавного обтекания и срывного обтекания. Последняя будет равна сопротивлению пластины от скорости V_y , перпендикулярной к ней.

Обозначим $Y_1(\alpha)$ нормальную силу от плавного обтекания и $Y_2(\alpha)$ — нормальную силу от срывного обтекания.

При малых углах атаки крыло обтекает без срыва, поэтому $Y_2(\alpha)=0$, а $Y_1(\alpha)=c_{y1}^a S q_\infty$. При углах атаки α , близких к $\pi/2$, плав-

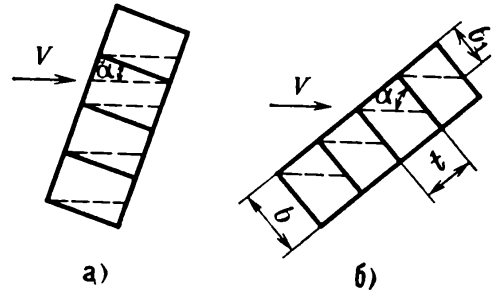
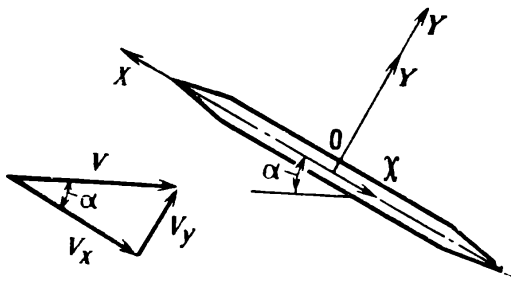


Рис. 11.19. Схема разложения скоростей при расчете аэродинамических характеристик на больших углах атаки

Рис. 11.20. Схема затенения планов решетчатого крыла на малых (а) и больших (б) углах атаки

ного обтекания практически не будет и $Y_1(\alpha) = 0$, а $Y_2(\alpha) = c_{y2} S q_\infty$. Здесь $c_{y2}(\alpha)$ — коэффициент нормальной силы крыла на срывном режиме. При остальных углах атаки эта сила будет иметь промежуточное значение между величинами $c_{y1}^\alpha S q_\infty$ и $c_{y2} S q_\infty$.

Введем некоторые условные площади $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$, которые соответственно пропорциональны долям нормальной силы от плавного и срывного обтекания крыла. Тогда нормальную силу крыла при любом угле атаки можно представить в виде

$$Y_1(\alpha) = S q_\infty \left[c_{y1}^\alpha \frac{S_1(\alpha)}{S} + c_{y2} \frac{S_2(\alpha)}{S} \right], \quad (11.1)$$

где $S = S_1(\alpha) + S_2(\alpha)$.

При малых углах атаки обтекание планов крыла плавное и $S_1(\alpha) = S$, а $S_2(\alpha) = 0$. При увеличении угла атаки $S_1(\alpha)$ будет убывать, а $S_2(\alpha)$ — возрастать.

Заметим, что до некоторого угла атаки, который зависит от относительного шага \bar{t} , затенения одного плана другим не будет, т. е. обтекание каждого плана будет близким к обтеканию соответствующего прямоугольного крыла (рис. 11.20, а). При увеличении угла атаки α от некоторого значения α каждый план решетчатого крыла начнет затенять последующий соседний план (см. рис. 11.20, б). При $\alpha = \pi/2$ все планы, кроме одного, будут затенены. Так как затененными оказываются части планов, находящиеся в зоне срыва с носка соседнего плана (см. рис. 11.20), будем считать, что затенение оказывает влияние на нормальную силу от срывного обтекания.

Нормальная сила от срывного обтекания при отсутствии затенения планов

$$Y_2(\alpha) = c_{x \text{ пл}} S \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} = c_{y2} S \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2},$$

где $c_{x \text{ пл}}$ — коэффициент сопротивления пластинки при $\alpha = 90^\circ$.

Так как $V_{\infty y} = V_{\infty} \sin \alpha$, получим

$$c_{y2} = c_{x_{пл}} \sin^2 \alpha. \quad (11.2)$$

Условием отсутствия затенения планов будет $b_1 \geq b$ (см. рис. 11.20). Так как $b_1 = t/\operatorname{tg} \alpha$, это условие примет вид

$$\bar{t} \geq \operatorname{tg} \alpha. \quad (11.3)$$

Часть нормальной силы при срывном обтекании можно определить, используя соотношение

$$c_{Y2} = \frac{c'_{y2}}{n} + c'_{y2} \frac{\bar{t}}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{n-1}{n}. \quad (11.4)$$

Первое слагаемое соответствует одному незатененному плану, а второе — затененным $(n-1)$ планам.

При углах атаки, близких к $\pi/2$, на сверхзвуковых скоростях перед решетчатым крылом возникает отошедший скачок, за которым скорости будут дозвуковые. Поэтому будем считать, что $(n-1)$ план находится в условиях дозвукового обтекания, а один нижний — в тех же условиях, как и пластина в сверхзвуковом потоке. Поэтому

$$c'_{y2} = c_{x_{пл}} \sin^2 \alpha; \quad c'_{x_{пл}} = c'_{x_{пл}} \sin^2 \alpha,$$

где $c_{x_{пл}}$ — коэффициент сопротивления пластинки при числе $M_n = M_{\infty} \sin \alpha$; $c'_{x_{пл}} \approx 1,14$ — коэффициент сопротивления пластинки при дозвуковых скоростях.

Тогда зависимость (11.2) для c_{Y2} примет вид

$$c_{y2} = \left(\frac{c_{x_{пл}}}{n} + 1,14 \frac{\bar{t}}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{n-1}{n} \right) \sin^2 \alpha. \quad (11.5)$$

Подставляя (11.5) в (11.1) и вводя обозначения $\Delta(\alpha) = \frac{S_1(\alpha)}{S}$, после преобразований получим коэффициент нормальной силы всего решетчатого крыла при любых углах атаки

$$c_y = c_y^a \Delta + c_1 (1 - \Delta) \sin^2 \alpha, \quad (11.6)$$

где $c_1 = \frac{c_{x_{пл}}}{n} + 1,14 \frac{n-1}{n}$ при $\bar{t} \geq \operatorname{tg} \alpha$, т. е. когда планы не затенены,

$c_1 = \frac{c_{x_{пл}}}{n} + 1,14 \frac{n-1}{n} \frac{\bar{t}}{\operatorname{tg} \alpha}$ при $\bar{t} < \operatorname{tg} \alpha$ для случая, когда планы затенены.

Величина коэффициента тангенциальной силы c_x будет определяться составляющей скорости V_x , которая направлена вдоль плана. Поэтому можно записать, что

$$c_x \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{2} S = c_{x0} \frac{\rho_{\infty} V_{\infty x}^2}{2} S.$$

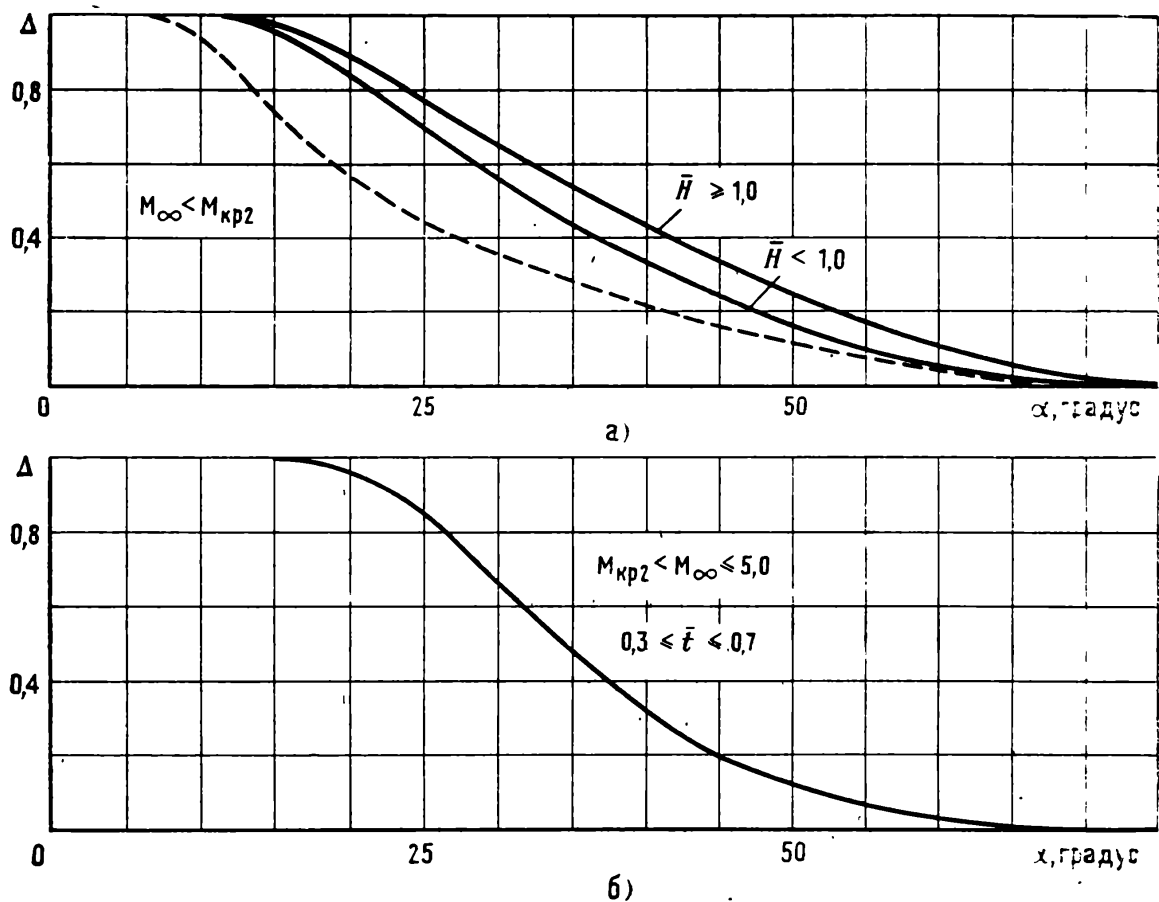


Рис. 11.21. Графики для расчета c_{ya} и c_{xa} решетчатого крыла на больших углах атаки:

а — $M_{\infty} < M_{кр2}$; б — $M_{кр2} < M_{\infty} \leq 5.0$; — $0.3 \leq \bar{t} \leq 0.7$; — — $1.2 \leq \bar{t} \leq 1.8$

Тогда

$$c_x = c_{x0} \cos^2 \alpha.$$

Величина c_{x0} определяется как сумма сопротивлений трения и давления методом, описанным ранее.

Используя известные формулы связи между аэродинамическими коэффициентами в связанной и поточной системах координат, получим следующие зависимости для определения аэродинамических коэффициентов в поточной системе координат при числах M_{∞} от $M_{\infty} = 0$ до $M_{\infty} = 5$ и углах атаки от $\alpha = 0$ до $\alpha = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} c_{ya} &= c_y^a \alpha \Delta \cos \alpha + c_1 (1 - \Delta) \sin^2 \alpha \cos \alpha - c_{x0} \cos^2 \alpha \sin \alpha; \\ c_{xa} &= c_{x0} \cos^3 \alpha + c_y^a \alpha \Delta \sin \alpha + c_1 (1 - \Delta) \sin^3 \alpha. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Величина $\Delta(\alpha) = S_1(\alpha)/S$ в зависимости от угла атаки определяется по графикам, приведенным на рис. 11.21. Эти графики получены путем обработки систематических экспериментальных данных, в результате продувок решетчатых крыльев различных геометрических параметров при различных числах M_{∞} на углах атаки от $\alpha = 0$

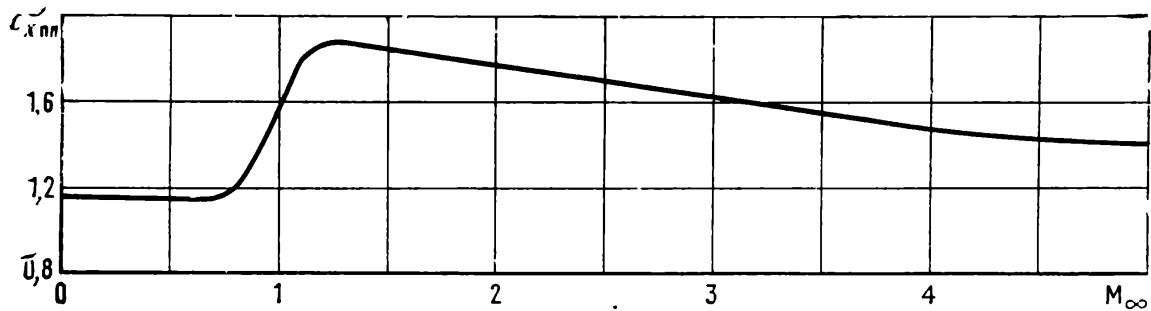


Рис. 11.22. Зависимость коэффициента сопротивления пластины $c_{xпл}$ под углом $\alpha = 90^\circ$ от числа M_∞

до $\alpha = 90^\circ$. При числах $M_\infty \leq M_{кр2}$ значения $\Delta(\alpha)$ зависят от относительного шага \bar{t} и отношения H/l , при числах $M_\infty > M_{кр2}$ величина $\Delta(\alpha)$ для относительных шагов $0,3 \leq \bar{t} \leq 0,7$ от отношения H/l практически не зависит.

Величина производной $c_y' \approx c_{ya}'$ на малых углах атаки, рассчитывается по методикам, приведенным ранее для дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых скоростей.

Зависимость коэффициента сопротивления пластинки $c_{xпл}$ при $\alpha = 90$ и при различных числах M_∞ получена экспериментально и

Рис. 11.23. Зависимости коэффициентов c_{ya} и c_{xa} от угла атаки при $M_\infty = 0,12$; $\bar{t} = 0,4$:

1 — $\bar{H} = 0,46$; $n = 9,5$; 2 — $\bar{H} = 2,16$; $n = 19,4$

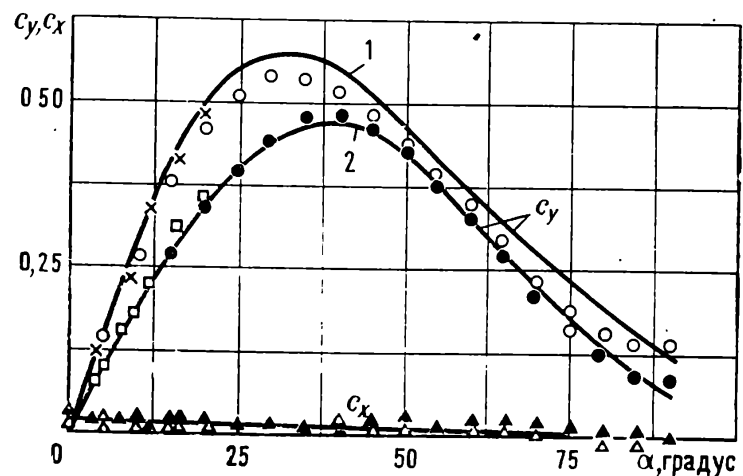
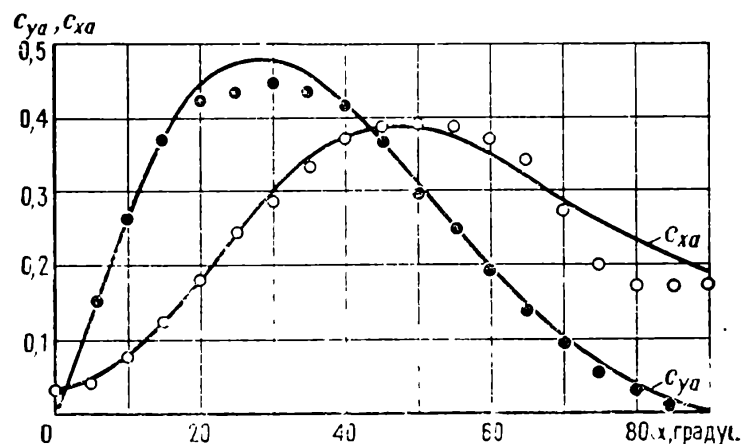


Рис. 11.24. Зависимость коэффициентов c_{ya} и c_{xa} от угла атаки при $M_\infty = 0,7$; $\bar{t} = 0,5$; $\bar{H} = 0,67$; $n = 6,87$



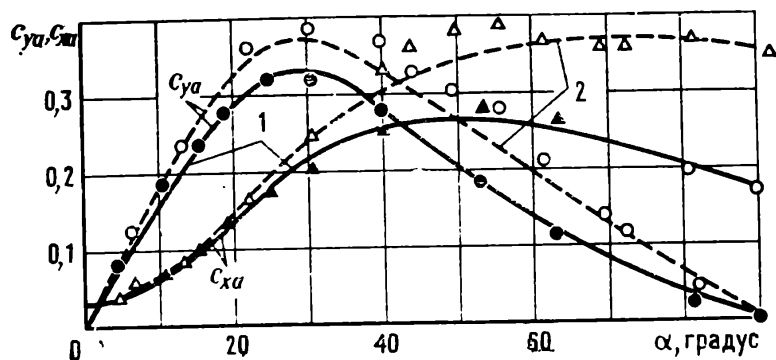


Рис. 11.25. Зависимость коэффициентов C_{ya} и C_{xa} от угла атаки при $M_\infty = 2,5$; $\bar{t} = 0,35$:

1 — $\bar{H} = 0,81$; $n = 12$; 2 — $\bar{H} = 0,43$; $n = 5,3$

приведена на рис. 11.22. При пользовании этим графиком следует учесть, что $C_{x \text{ пл}}$ следует определять для числа $M = M_\infty \sin \alpha$.

Результаты расчета по изложенной методике и сравнение с экспериментальными результатами приведены на рис. 11.23—11.26, сплошные линии — расчет, значки — эксперимент.

Приведенные данные свидетельствуют об удовлетворительном совпадении результатов расчетов по изложенной методике с результатами экспериментов.

11.3. Основные нестационарные аэродинамические характеристики решетчатых крыльев

На дозвуковых скоростях аэродинамические характеристики решетчатых крыльев в значительной мере определяются как взаимным влиянием между планами, так и влиянием сжимаемости потока. С одной стороны, увеличение числа M_∞ потока приводит к повышению несущих свойств планов, как это имело место у изолированного профиля, а с другой, — растет взаимное влияние между соседними планами, что снижает несущие свойства крыла. Рациональным подбором геометрических параметров можно добиться желательного закона изменения аэродинамических характеристик крыла по числам M_∞ . Как и ранее, в качестве определяющих геометрических параметров будем использовать величины: относительный шаг \bar{t} , отношение высоты набора к размаху крыла H/l и число планов n .

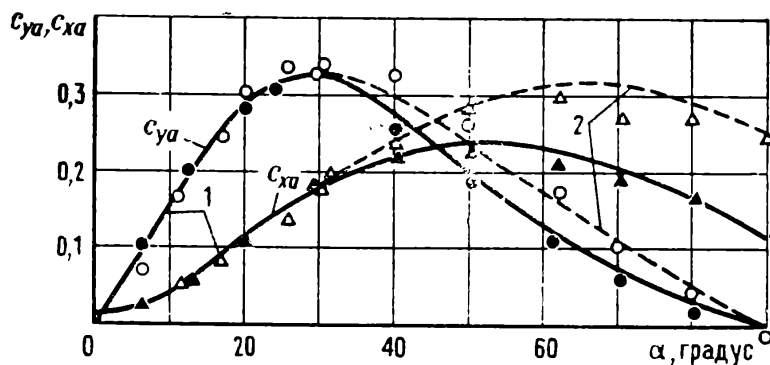


Рис. 11.26. Зависимость коэффициентов C_{ya} и C_{xa} от угла атаки при $M_\infty = 5$; $\bar{t} = 0,35$:

1 — $\bar{H} = 0,81$; $n = 12$; 2 — $\bar{H} = 0,43$; $n = 5,3$

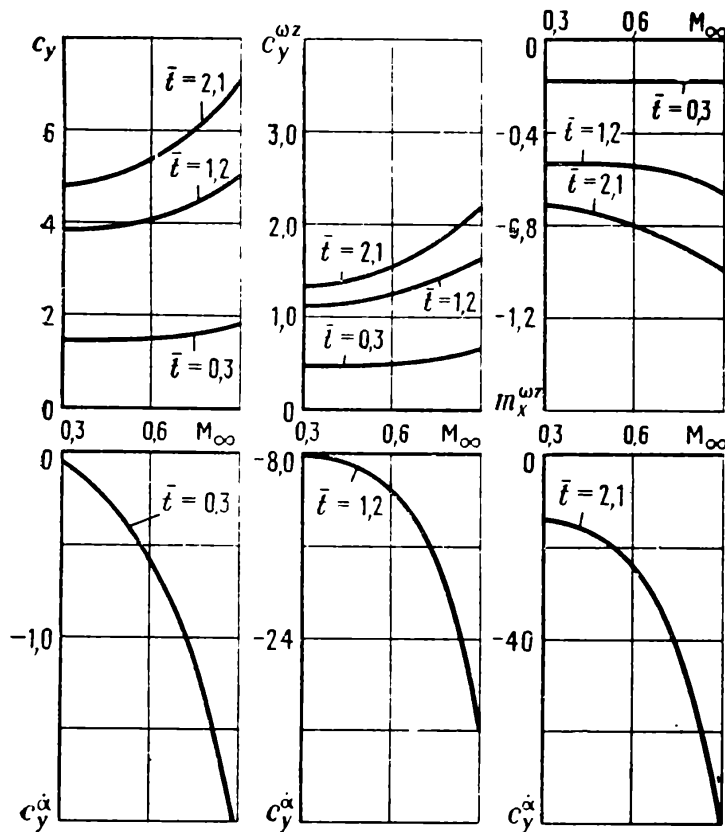


Рис. 11.27. Нестационарные аэродинамические характеристики решетчатого крыла при различных числах M_∞ ($\bar{H} = 0,25$, $n=5$)

В качестве основных аэродинамических характеристик решетчатых крыльев выберем c_y^a , \dot{c}_y^a , $c_y^{\omega z}$, $m_x^{\omega \tau}$, так как именно производные коэффициентов подъемной силы характеризуют свойства аэродинамической компоновки. Действительно, так как хорда равнонесущего монопланного крыла в большинстве случаев существенно (иногда на несколько порядков) превосходит хорду решетки, то с достаточной степенью точности можно считать, что аэродинамические силы решетчатого крыла приложены в пределах хорды плана.

Очевидно, что это допущение неприемлемо при определении демпфирования при наличии угловой скорости ω_x и при определении демпфирования крутильных колебаний решетчатых крыльев, используемых в качестве рулевых поверхностей.

В качестве примера на рис. 11.27—11.31 приводятся зависимости c_y^a , \dot{c}_y^a , $c_y^{\omega z}$ и $m_x^{\omega \tau}$ для различных относительных шагов \bar{t} и отношения H/l по числам M_∞ . Расчеты проведены по методике, изложенной в гл. 2. Для сопоставимости полученных результатов число планов принято постоянным ($n=5$).

Из этих зависимостей следует, что коэффициент подъемной силы при фиксированном \bar{t} уменьшается с возрастанием H/l , но при всех значениях этой величины возрастает с увеличением числа M_∞ . Такой же характер зависимостей отмечается для характеристики $c_y^{\omega z}$.

Особенно следует отметить, что в области густых решеток

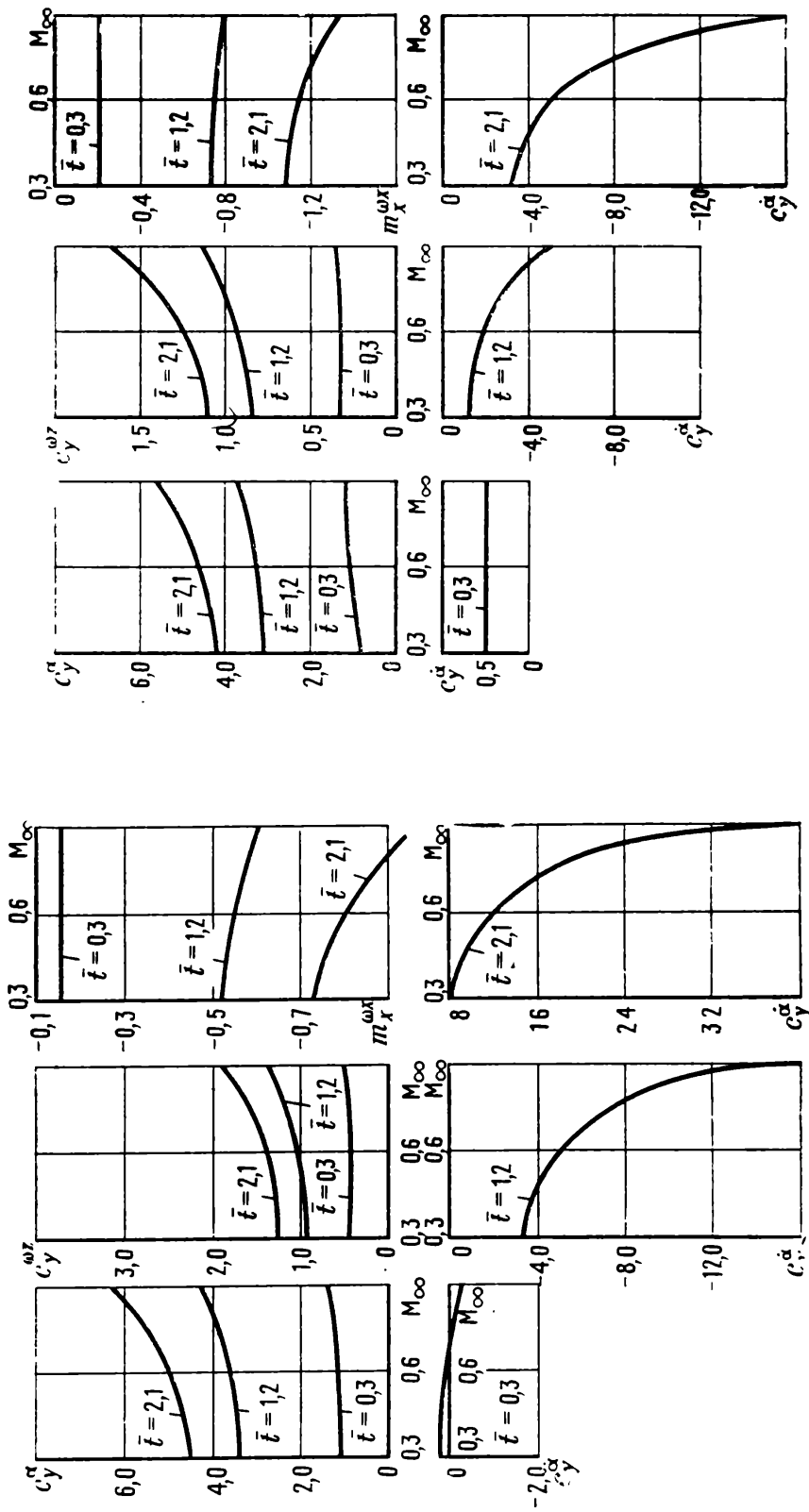


Рис. 11.28. Нестационарные аэродинамические характеристики решетчатого крыла при различных числах M_∞ ($\bar{H}=0,5$; $n=5$)

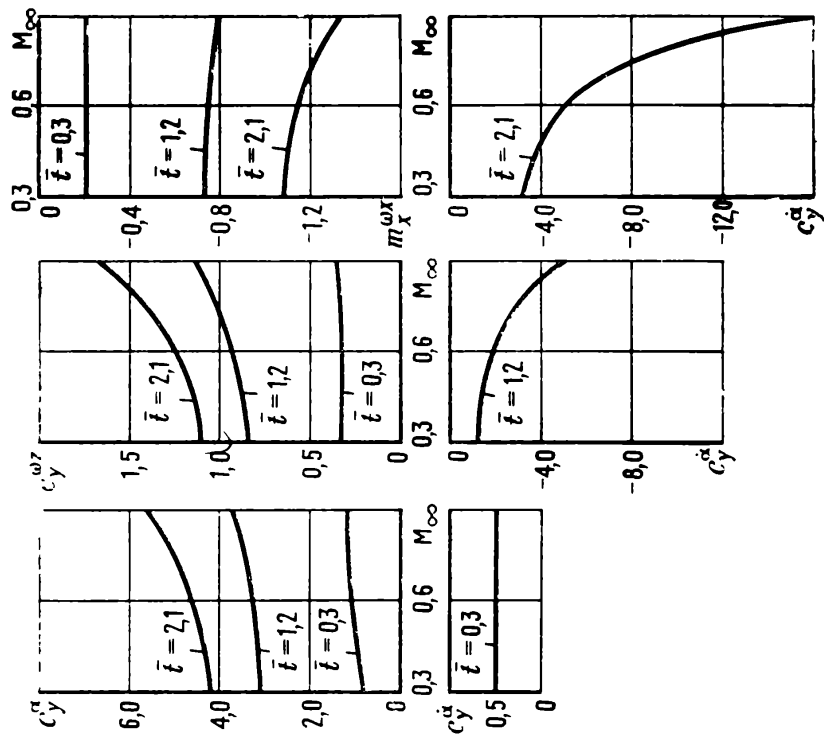


Рис. 11.29. Нестационарные аэродинамические характеристики решетчатого крыла при различных числах M_∞ ($\bar{H}=1,0$; $n=5$)

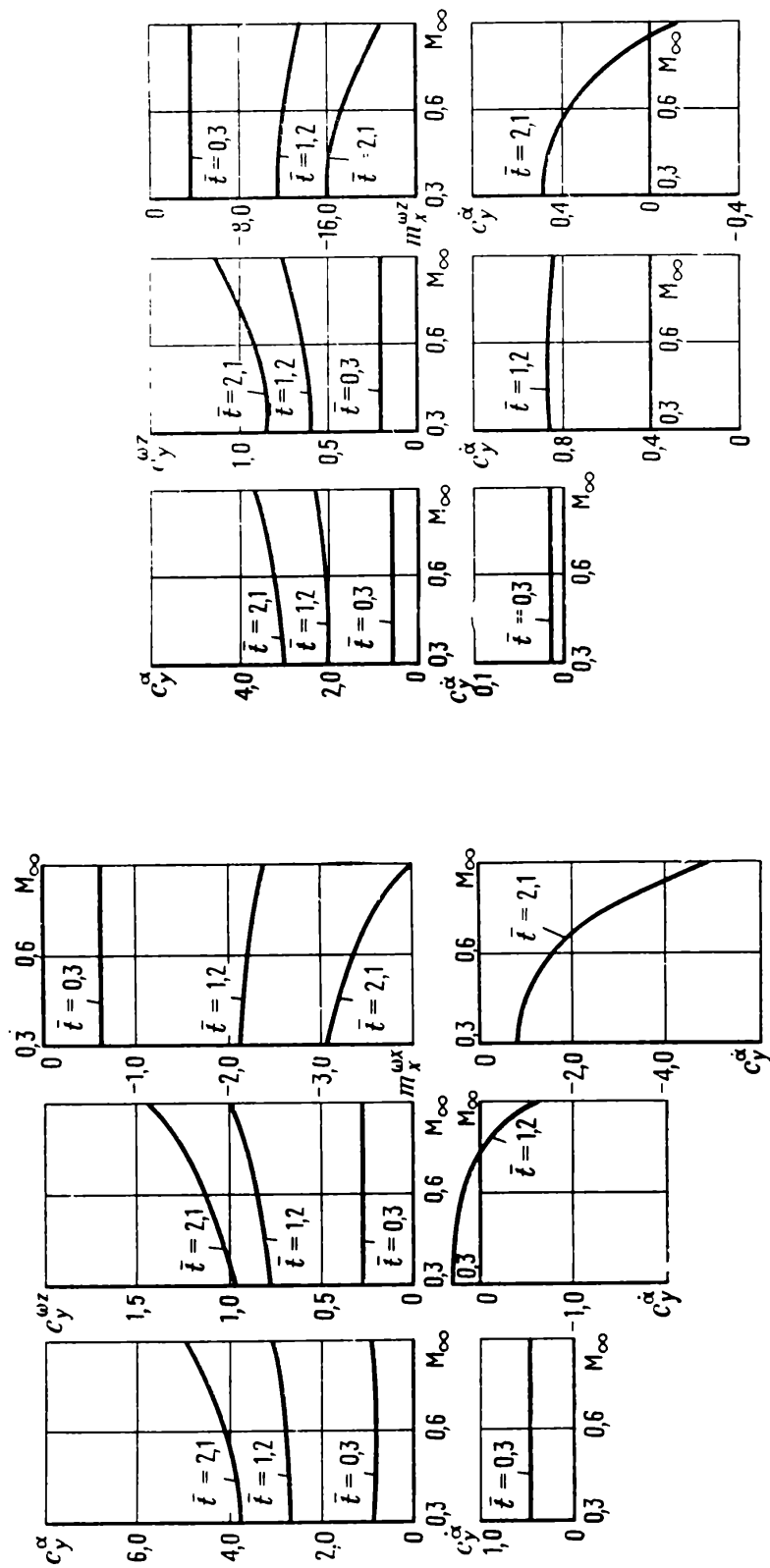


Рис. 11.30. Нестационарные аэродинамические характеристики решетчатого крыла при различных числах M_∞ ($H=2,0$; $n=5$)

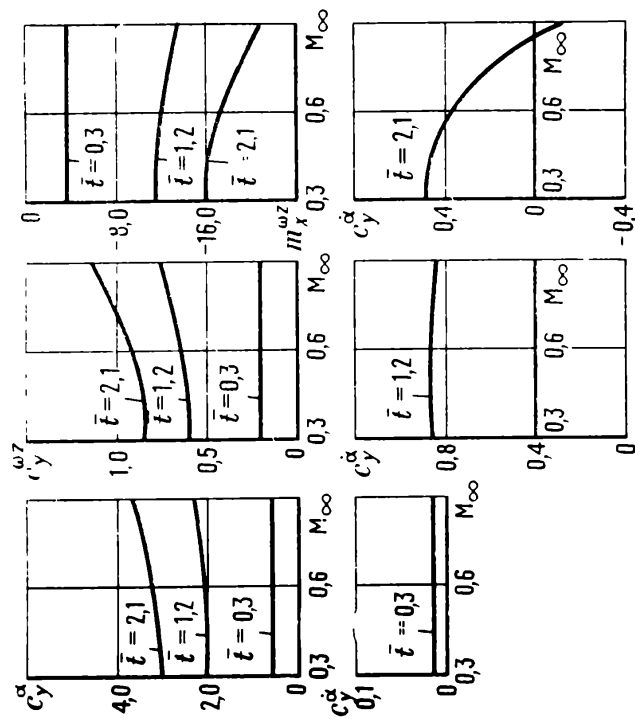


Рис. 11.31. Нестационарные аэродинамические характеристики решетчатого крыла при различных числах M_∞ ($H=4,0$; $n=5$)

($\bar{t} \approx 0,3$) величины c_y^a , $c_y^{\omega z}$ и $m_x^{\omega x}$ практически не зависят от чисел M_∞ для значений $H/l \geq 0,5$.

При выборе решетчатого крыла важное значение для его конструкции имеет размер хорды b . Изменение хорды при фиксированных значениях H , l и \bar{t} приводит к соответствующему изменению числа планов, связанных зависимостью $n = H/\bar{t}b + 1$. Увеличение числа планов с 3 до 11 практически не влияет на значение производных коэффициентов подъемной силы и продольного момента m_z^a (рис. 11.32).

Производные \dot{c}_y^a и \dot{m}_z^a с увеличением числа планов уменьшаются по линейному закону. Это объясняется тем обстоятельством, что с возрастанием числа планов (при неизменных H , l и \bar{t}) возрастает удлинение отдельно взятого плана. Аналогичная картина наблюдается в поведении аэродинамических производных \dot{c}_y^a и \dot{m}_z^a монопланного крыла с увеличением его удлинения [6].

Определение коэффициентов вращательных производных решетчатых крыльев на сверхзвуковых скоростях представляет собой сложную самостоятельную задачу [9]. Для практических задач динамики полета летательного аппарата, снабженного несущими поверхностями и органами управления решетчатого типа, во многих случаях можно пользоваться упрощенными представлениями. Эти представления базируются на эквивалентности характера обтекания отдельного плана решетки и крыла бесконечного размаха при достаточно больших числах M_∞ в предположении, что взаимное влияние между планами отсутствует. Пренебрегая влиянием перекрестий тонких планов и концевыми эффектами, можно считать, что аэродинамические производные решетчатого крыла должны быть близки к таким же характеристикам монопланного крыла бесконечного удлинения.

В работе [5] приведены результаты аналитического определения распределенных и суммарных характеристик крыла бесконечного удлинения ($\lambda = \infty$) в диапазоне чисел $M_\infty = 1,1 \dots 5,0$.

При медленных колебаниях, представляющих основной практический интерес, коэффициенты аэродинамических производных могут быть выражены через элементарные функции:

$$\begin{aligned} c_y^a &= \frac{4}{k}; \quad \dot{c}_y^a = -2/k^3; \quad c_y^{\omega z} = \frac{2}{k}; \quad \dot{c}_y^{\omega z} = -\frac{2}{3k^3}; \\ m_z^a &= -\frac{2}{k}; \quad \dot{m}_z^a = \frac{4}{3k^3}; \quad m_z^{\omega z} = -\frac{4}{3k}; \quad \dot{m}_z^{\omega z} = \frac{1}{2k^3}; \\ k &= \sqrt{M_\infty^2 - 1}. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Все приведенные характеристики отнесены к несущей поверхности решетки, а моментные характеристики определены относительно носика профиля.

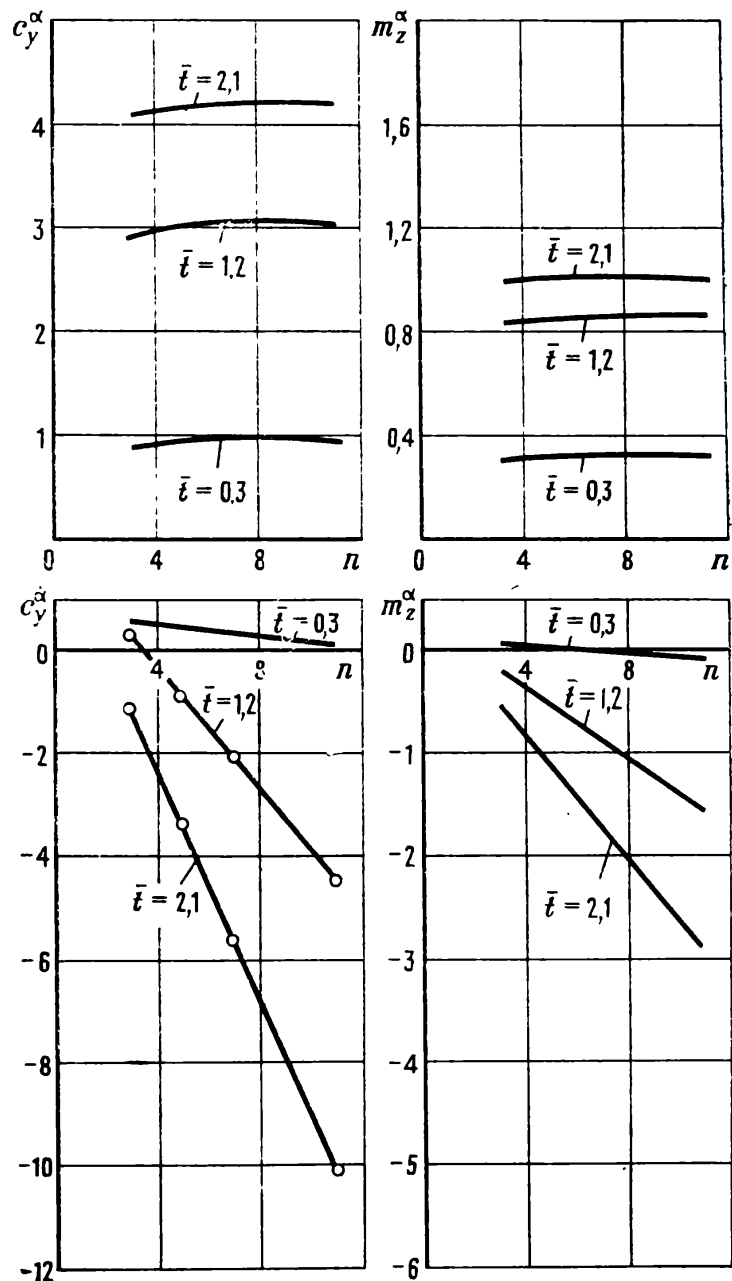


Рис. 11.32. Нестационарные аэродинамические характеристики решетчатого крыла в зависимости от числа планов $M=0,3$; $H/l=1,0$

11.4. Основные особенности работы решетчатого крыла в присутствии корпуса

Разработка аэродинамической компоновки летательного аппарата носит многоплановый характер. Часто облик аппарата предопределяется на первый взгляд второстепенными факторами, которые, однако, имеют основополагающее значение. В этих условиях установленное на корпусе решетчатое крыло помогает более гибко и многообразно решать поставленную задачу, а иногда является единственно возможным для применения в качестве несущей или управляющей поверхности. В свою очередь, использование решетчатого крыла в существенной степени влияет на харак-

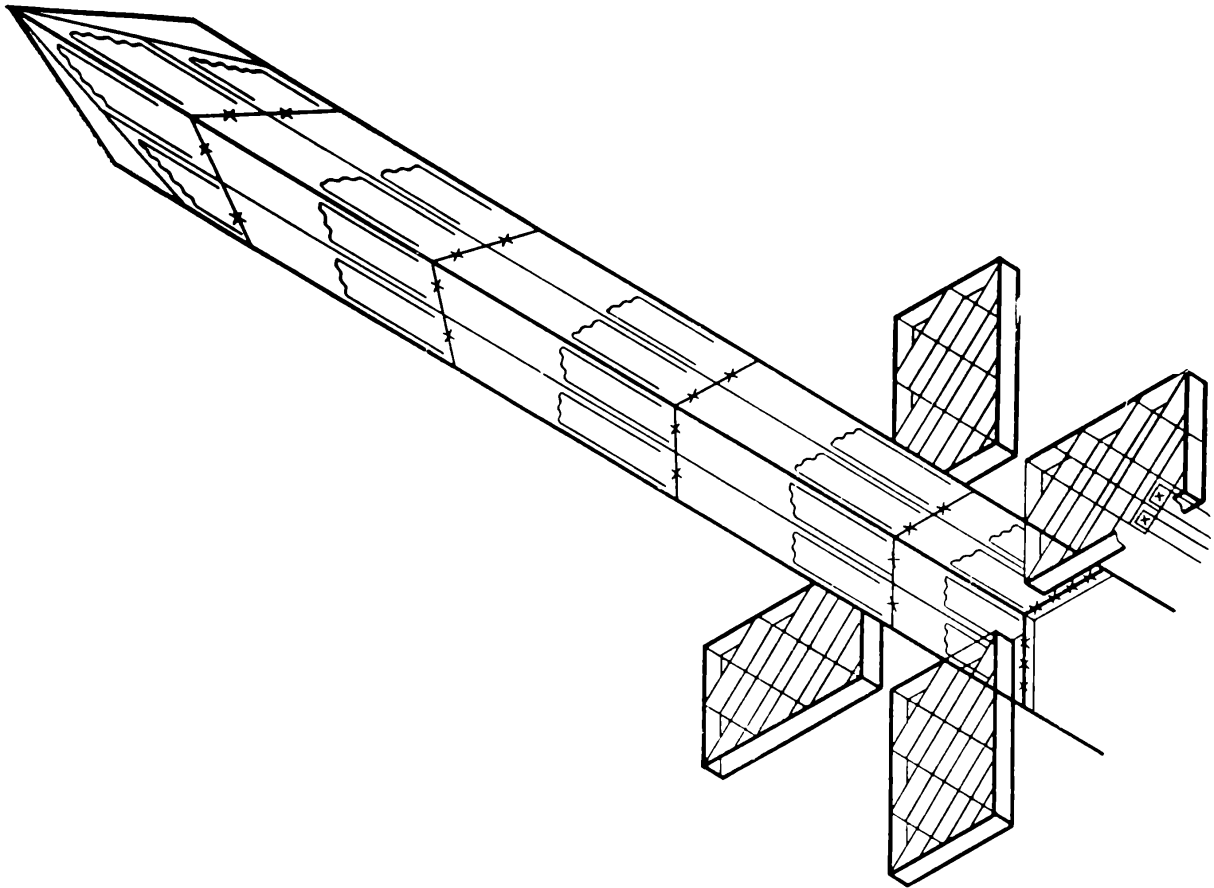


Рис. 11.33. Расчетная схема решетчатого крыла в присутствии корпуса

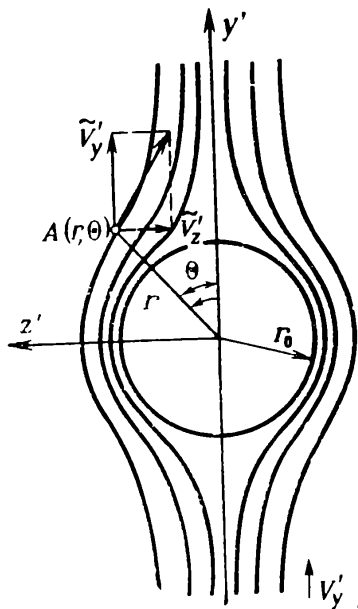


Рис. 11.34. Поле возмущенных скоростей при обтекании корпуса поперечной скоростью \bar{V}_y'

теристики летательного аппарата: геометрические характеристики, энергетику, динамические свойства и т. п.

Кратко перечислим некоторые из основных особенностей решетчатого крыла в аэродинамической компоновке.

Прежде всего, укажем на возможность единого методологического подхода к решению вопроса о расчетной схеме решетчатого крыла при наличии корпуса на дозвуковых скоростях.

Все несущие элементы крыла моделируются в соответствии с положениями, изложенными в гл. 2. Цилиндрический корпус моделируется косыми и П-образными вихрями, которые располагаются на двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через вертикально и горизонтально расположенные диаметры корпуса. Выполнение граничных условий предполагается в контрольных точках, расположенных также на этих плоскостях (рис. 11.33). Таким образом сохраняется общность в моделировании корпуса и крыла, что существенно для вычислений на ЭВМ. Такой подход неоднократно проверялся на различных аэродинамических схемах и показал высокую сходимость расчетных и экспериментальных результатов [6]. Возможны и другие подходы, например приближенная замена цилиндрического корпуса соответствующей вихревой отраженной системой с дальнейшим вычислением аэродинамических характеристик крыла и корпуса при учете всей вихревой системы. Предлагаемая единая расчетная схема позволяет получить все разнообразие как стационарных, так и нестационарных аэродинамических характеристик компоновки.

Расчет аэродинамических характеристик крыла в присутствии корпуса на сверхзвуковых скоростях может быть осуществлен аналогичными подходами. Однако здесь многие вопросы интерференции можно решать на основании упрощенных подходов.

Рассмотрим влияние корпуса на решетчатые крылья, предполагая, что поле скоростей корпуса претерпевает незначительное изменение от поля крыла.

Поле возмущенных скоростей при поперечном обтекании скоростью определяется следующими соотношениями (рис. 11.34):

$$\tilde{V}'_y = V_y \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\bar{r}^2} \right); \quad \tilde{V}'_z = V' \frac{\sin 2\theta}{\bar{r}^2}. \quad (11.9)$$

Каждый элемент крыла, расположенного на корпусе, будет обтекаться потоком под местным значением угла атаки α :

$$\tilde{\alpha} \cong \operatorname{tg} \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{V}'_y}{\tilde{V}'_z},$$

откуда следует

$$\tilde{\alpha} = \alpha \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\bar{r}^2} \right). \quad (11.10)$$

Определим нормальную силу решетчатого крыла с учетом корпуса для вертикально расположенной решетки:

$$Y_{\text{в}} = \iint_{S^*} c_{y_{\text{в}}}^{\alpha^*} \tilde{\alpha} q dy_1 dz_1. \quad (11.11)$$

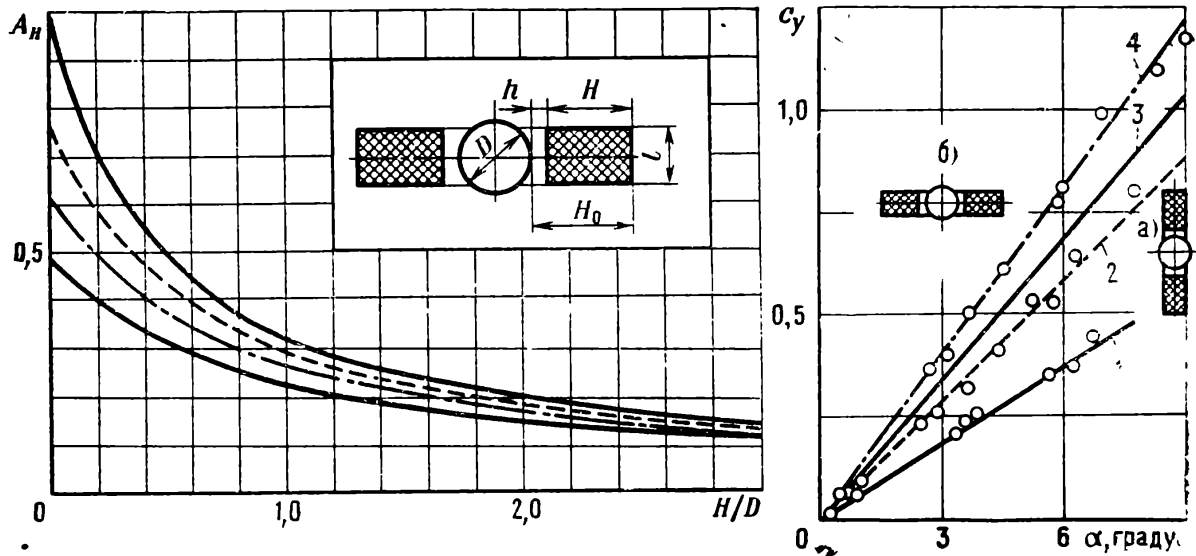


Рис. 11.35. Зависимость поправочного коэффициента A_H от соотношения размеров решетчатого крыла и корпуса

Рис. 11.36. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по влиянию корпуса на решетчатое крыло при $M=3,6$:

1 — расчет для изолированного корпуса; 2 — расчет с учетом влияния корпуса по схеме а; 3 — расчет без учета влияния; 4 — расчет с учетом влияния по схеме б; О — эксперимент

Это равноценно тому, что крыло работает при некотором среднем угле атаки:

$$Y_B = c_{y_B}^* \alpha_{cp} q S^*. \quad (11.12)$$

Полагая углы атаки малыми, а коэффициенты подъемной силы постоянными, находим

$$\alpha_{cp} = \frac{1}{H \cdot l} \iint_{S^*} \tilde{a} dy_1 dz_1.$$

Вычислим значение этого интеграла (A_H), имея в виду, что ближайший к корпусу план располагается на поверхности цилиндра. Результаты расчетов приведены на рис. 11.35. Если первый к корпусу план расположен на некотором расстоянии от корпуса h , то величина поправочного коэффициента может быть определена по соотношению

$$A = \frac{H_0}{H-h} A_H - \frac{h}{H_0-h} A_H$$

(условные обозначения приведены на рис. 11.35).

Зная величину A , можно определить значения среднего угла атаки для вертикально или горизонтально расположенного крыла:

$$\alpha_{cp.v} = \alpha(1-A); \quad \alpha_{cp.gor} = \alpha(1+A), \quad (11.13)$$

что позволяет определить коэффициенты подъемной силы крыла в присутствии корпуса:

$$c_{y_B}^* = c_{y_B}^{\alpha*} \alpha (1 - A); \quad c_{y_{\text{кор}}}^* = c_{y_{\text{кор}}}^{\alpha*} \alpha (1 + A). \quad (11.14)$$

Проверка результатов проводилась сравнением с экспериментальными данными, полученными на сверхзвуковых скоростях ($M_\infty = 1,85; 2,5; 3,5$) при продувках в трубах (рис. 11.36). Коэффициенты подъемной силы были отнесены к миделевому сечению корпуса. Из сопоставления экспериментальных данных следует, что приближенный учет влияния корпуса на решетчатое крыло дает удовлетворительные результаты во всем исследованном диапазоне скоростей.

В связи с проблемами активного управления летательными аппаратами различного назначения уделяется значительное внимание шарнирным характеристикам рулевых органов. Они являются важными исходными данными для определения мощности, быстродействия и частотных характеристик рулевых приводов. Как правило, уменьшение величины шарнирного момента рулей приводит к снижению массы привода, блока питания, коммутирующих элементов и т. п., что, в свою очередь, заметно влияет на весовые характеристики летательного аппарата.

Проследим за изменением производной коэффициента продольного момента крыла. Так как профили планов и боковин крыла, как правило, выполняются симметричными, то

$$m_{z_0} = 0, \quad m_z = m_z^\alpha \alpha, \quad m_z^\alpha = -\bar{x}_F c_y^\alpha.$$

На рис. 11.37 даны зависимости \bar{x}_F от M_∞ для решетчатых крыльев с относительными шагами $\bar{t} = 0,35; 0,5; 0,7$ в диапазоне чисел M_∞ от 0 до 4, полученные при экспериментальных исследованиях решетчатых крыльев с прямоугольными планами. Если форма планов незначительно отличается от прямоугольной, то можно для оценки принять, что коэффициент подъемной силы сечения плана $c_{y'}'$ будет равен коэффициенту $c_{y_{\text{пл}}}$ и положение фокуса в каждом сечении \bar{x}_F' по размаху будет постоянным относительно передней кромки этого сечения (рис. 11.38). Положение фокуса решетчатого крыла с планом, отличным по форме от прямоугольного, можно приближенно определить по соотношению

$$\tilde{x}_F = \int_0^1 \bar{x}_F'(\bar{z}_1) dz_1.$$

Таким образом, фокус решетчатого крыла с изменением чисел Маха от малых дозвуковых до сверхзвуковых перемещается примерно в тех же пределах, что и у монопланного крыла, однако, для величины шарнирного момента важным является размер хорды b . Поэтому на базе решетчатого крыла возможно создание аэроди-

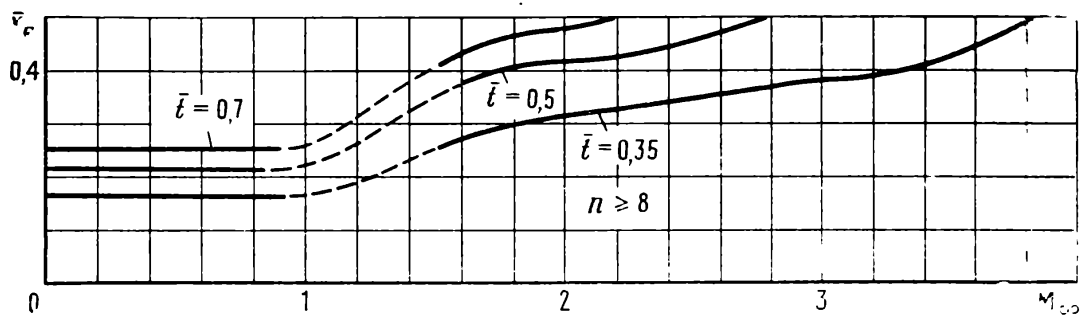


Рис. 11.37. Положение фокуса решетчатого крыла x_F при различных числах M_∞

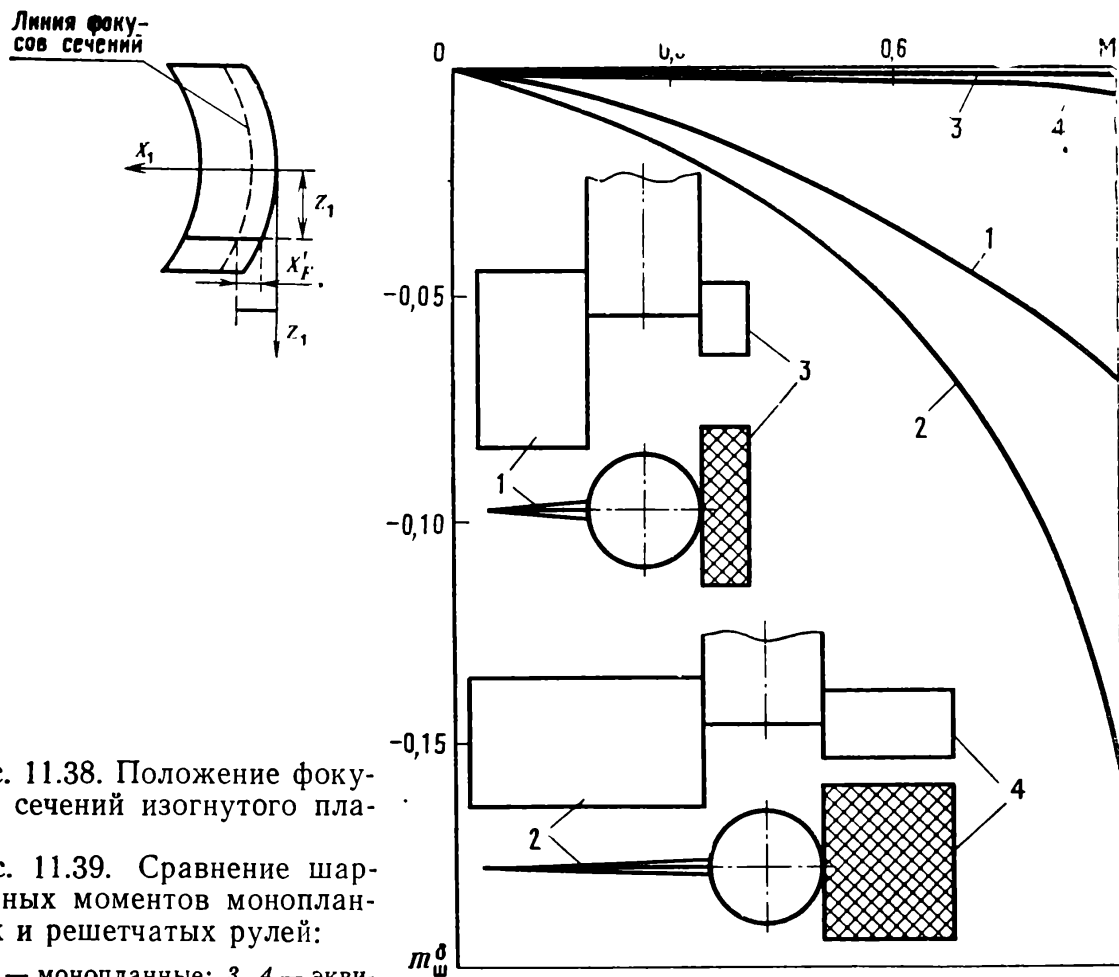


Рис. 11.38. Положение фокусов сечений изогнутого плана

Рис. 11.39. Сравнение шарнирных моментов монопланов и решетчатых рулей:

1, 2 — моноплановые; 3, 4 — эквивалентные решетчатые

намических органов управления, обладающих малыми шарнирными моментами в широком диапазоне чисел Маха.

На рис. 11.39 приведены для сравнения два решетчатых крыла, установленных в кормовой части тела вращения, с эквивалентными по несущим свойствам монопланом. Оси вращения тех и других были выбраны так, чтобы шарнирные моменты отсутствовали при малых числах M_∞ . Как видно, с возрастанием чисел M_∞ увеличение шарнирных моментов на моноплановых рулях происходит значительно интенсивнее, чем на решетчатых.

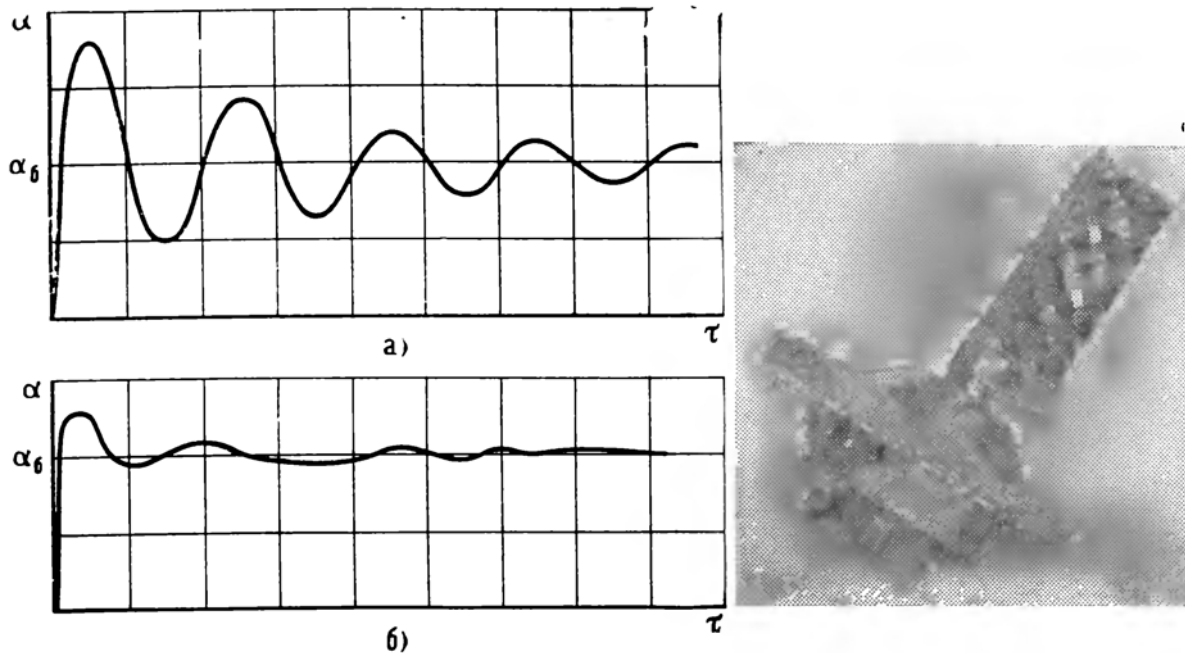


Рис. 11.40. Изменение угла атаки по времени для флюгера с монопланной (а) и решетчатой (б) несущей поверхностью

Рис. 11.41. Решетчатый флюгер

На сверхзвуковых скоростях, когда решетчатые рули выбираются без взаимного влияния планов, можно приближенно считать, что шарнирные моменты решетки меньше, чем у равнонесущего прямоугольника в плане руля, во столько раз, во сколько хорда решетки меньше хорды монопланного крыла. Это обстоятельство выгодно отличает решетчатое крыло, когда оно используется в качестве управляющей поверхности.

Представляет определенный интерес сопоставление поведения решетчатого и равнонесущего монопланного крыла, которые работают в режиме флюгера. На рис. 11.40 приведены кинематические характеристики монопланного (а) и решетчатого (б) флюгеров при одинаковом начальном возмущении по углу отклонения в зависимости от времени ($\alpha = \alpha(\tau)$). Из сопоставления этих кривых видно, что решетчатый флюгер устанавливается по потоку в несколько раз быстрее, его отклонение в первый период от балансировочного угла существенно меньше и последующие возмущения, вызванные турбулентностью потока, меньше влияют на показания балансировочного угла. Подробный анализ динамики движения флюгера показывает, что такой характер изменения $\alpha = \alpha(\tau)$ определяется высокими значениями m_z^a и $(m_z^a + m_z^{\omega z})$ решетчатого крыла по сравнению с теми же величинами для монопланного крыла того же размаха и центровки. Наряду с более интенсивным демпфированием решетка имеет в рассматриваемом случае меньший момент инерции относительно оси вращения флюгера. На рис. 11.41 приведена фотография флюгера, который испытывался в аэродинамической трубе.

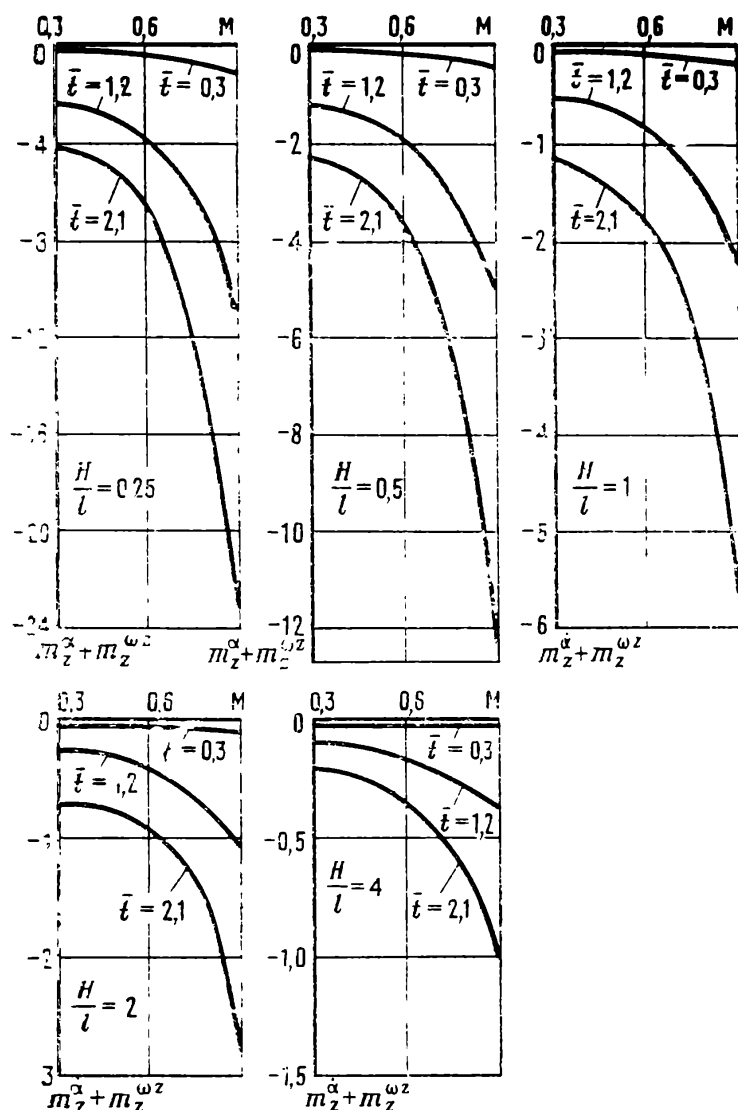


Рис. 11.42. Изменение коэффициентов аэродинамических производных $m_z^\alpha + m_z^{\omega z}$ по числам M

В некоторых случаях, например для быстродействующих рулевых решетчатых поверхностей, необходимо учитывать величину продольного демпфирующего момента. На рис. 11.42 показано изменение суммы коэффициентов аэродинамических производных ($m_z^\alpha + m_z^{\omega z}$), подсчитанных для решеток различного удлинения относительно середины хорды центрального плана. Из этих зависимостей видно, что возрастание числа M_∞ вызывает существенное увеличение демпфирования для крыльев с большим относительным шагом, тогда как при $\bar{t} = 0,3$ эта сумма практически не изменяется.

Другой важной особенностью решетчатого крыла является возможность сложить его вдоль корпуса таким образом, чтобы габаритные размеры в сложенном положении незначительно отличались от размеров самого корпуса. Например, для стабилизации положения судна при волнении могут быть использованы решетчатые поверхности, которые в обычном ходовом положении не выходят за обводы корпуса. Раскрытие крыла может быть осуществлено либо принудительно, либо за счет аэродинамических моментов са-

мого крыла, причем при определенных условиях можно реализовать движение как «на поток», так и «по потоку».

Кратко охарактеризуем эти условия. Возможность раскрытия крыла зависит от направления действия суммарной силы на крыло в сложенном положении. Очевидно, что если линия приложения силы относительно оси вращения крыла проходит таким образом, что момент будет направлен на открытие крыла, то последнее начнет двигаться до момента установки на замки. Направление действия силы может быть определено по известному аэродинамическому качеству крыла в сложенном состоянии. Угол ψ , под которым направлена сила,

$$\psi = \operatorname{arctg} K,$$

где K — аэродинамическое качество.

Далее, зная изменение аэродинамического качества по углу раскрытия ψ , можно решить известными из механики методами задачу о времени раскрытия и нагрузках на крыло в процессе раскрытия.

Глава 12

Весовые и конструктивно-технологические особенности решетчатых крыльев

12.1. Сопоставление весовых характеристик решетчатых и моноплановых крыльев

С целью выявления весовых возможностей решетчатых крыльев в сопоставлении их с моноплановыми в данном разделе дается лишь принципиальная оценка весовых характеристик этих крыльев как несущих конструкций консольного типа при одинаковых условиях нагружения. При этом конструкции предельно абстрагируются: эмпирические зависимости или статистические коэффициенты не используются, т. е. по существу сравниваются расчетные силовые схемы двух типов крыльев (рис. 12.1, а, в).

При определении массы монопланного крыла ограничимся рассмотрением тонких нестреловидных крыльев со сплошными и полыми сечениями. Момент сопротивления и площадь поперечного сечения крыла, очерченного параболами (см. рис. 12.1, г), определяются формулами [45] $W_m = 0,0762 c_m^2 b_m$; $F_m = 2/3 c_m b_m$. Здесь и далее индексом «м» будем отмечать величины, относящиеся к монопланному крылу. Условие равнопрочности сечений крыла при изгибе определяет связь между W_m и изгибающим моментом M : $W_m = M/\sigma$, где σ — допускаемое напряжение. Таким образом, получаем зависимость

$$F_m = 2,42 \sqrt{\frac{Mb_m}{\sigma}}. \quad (12.1)$$

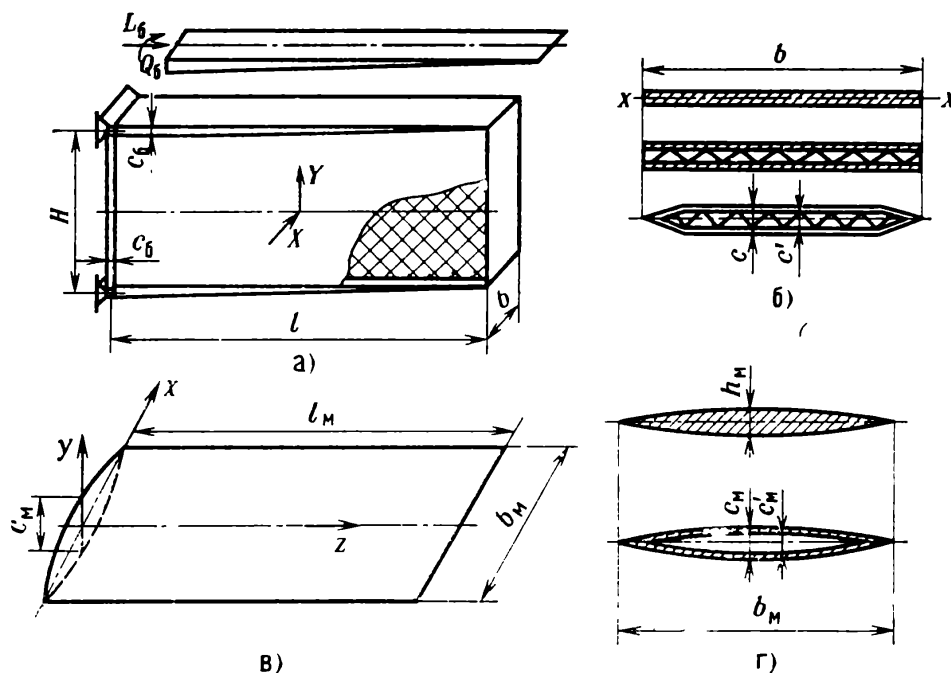


Рис. 12.1. Силовые схемы для анализа весовых характеристик монопланного и решетчатого крыльев

Имея выражение для $F(z)$, нетрудно подсчитать полную массу крыла m , проинтегрировав (12.1) по всей длине крыла и умножив на плотность материала конструкции ρ . Однако для весового анализа в дальнейшем удобно использовать безразмерный параметр, который введем по формуле

$$g = \frac{m}{\rho a S}, \quad (12.2)$$

где S — несущая площадь крыла; a — характерный линейный размер крыла. В случае монопланного крыла $a = b_m$, в случае решетчатого — $a = H$.

Очевидно, что масса крыла, а следовательно, и параметр g зависят от функций $b(z)$, $M(z)$. Для прямоугольного в плане крыла $b_m = \text{const}$ в [45] приводится выражение для массы монопланного крыла m , используя которое в соответствии с (12.2), находим

$$g = 0,427 K_M \frac{l_m}{b_m} \sqrt{\frac{p}{\sigma}}; \quad K_M = \sqrt{\frac{c_m}{c_m - c'_m}}, \quad (12.3)$$

где p — удельное давление на крыло; c_m , c'_m — толщина и внутреннее расстояние между панелями монопланного крыла (см. рис. 12.1). Отметим, что c_m , c'_m являются линейными функциями координаты z и изменяются от максимальных значений у корня до нуля на конце крыла. Для монопланного крыла треугольной формы в плане в формуле (12.3) вместо коэффициента 0,427 следует брать коэффициент 0,329.

При подсчете массы решетчатого крыла принимают, что боковины имеют переменную толщину, которая изменяется по линейному закону от величины c_6 у корня до нуля на конце крыла. Толщина корневого плана принималась равной толщине боковины у корня, а толщины планов решетки — постоянными по всему крылу. Хорда боковин b_6 также принималась постоянной по размаху крыла и равной хордам корневого и концевого планов. Определяя при этих предположениях теоретическую массу крыла m и используя зависимость (12.2), получаем следующее выражение для безразмерного параметра g массы решетчатого крыла:

$$g = \frac{2n-1}{n(n+1)} \frac{c}{H} + \frac{b_6}{b} \frac{\lambda+1}{\lambda n(n+1)} \frac{c_6}{H}, \quad n = \frac{H}{t}. \quad (12.4)$$

Входящие в выражение (12.4) значения толщин решетки планов и боковин определяются как потребные толщины из условий прочности и устойчивости конструкции. В рассматриваемом диапазоне параметров крыла расчетным случаем для определения толщины c являлась местная устойчивость планов (см. разд. 7.4). Расчетными случаями для определения c_6 в зависимости от величин n (при достаточно большом n) могут быть либо общая устойчивость плоской формы крыла (см. разд. 7.5), либо условие прочности боковины у корня (см. рис. 12.1, а)

$$\sigma = \frac{Q_{s6}}{F_6} + \frac{L_{x6}}{W_6}, \quad (12.5)$$

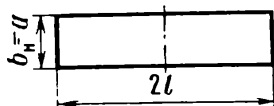
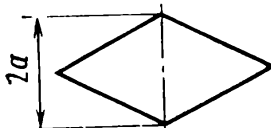
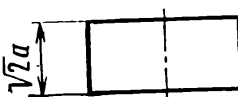
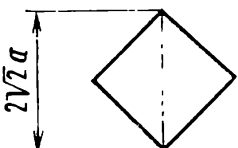
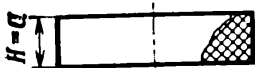
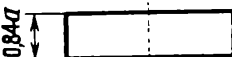
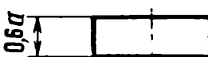

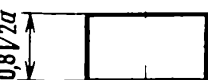
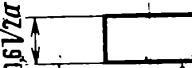
где F_6 , W_6 — площадь и момент сопротивления при изгибе в плоскости боковины расчетного сечения (см. рис. 12.1, б).

Анализ влияния величины n на массу решетчатого крыла показывает, что в рассматриваемом диапазоне параметров при $Y/X=4$, $l/H=1...2$ оптимальные значения n лежат в пределах $n=20...40$, причем большие значения соответствуют более коротким крыльям ($l/H=1$).

При сопоставлении решетчатого и монопланного крыльев были рассмотрены следующие варианты: монопланное прямоугольное и треугольные с удлинением $2l/b=2,4$; решетчатое с параметрами $2l/H=2,4$ при $\bar{t}=1; 0,7; 0,35$. В качестве базового размера a , определяющего габаритные размеры крыла, была принята хорда прямоугольного монопланного крыла с удлинением 4. При этом геометрические размеры крыльев остальных вариантов выбирались таким образом, чтобы несущая площадь сохранялась постоянной. Расчет производился для монопланного крыла сплошного сечения и полого с соотношением $c'/c=2/3$. Результаты расчета весового параметра g при $\sigma=700$ МПа, $E=2 \cdot 10^5$ МПа для крыльев различных типов приведены в табл. 12.1. В той же таблице даны величины весового параметра g для решетчатого крыла с полыми планами. Расчетное сечение для планов таких крыльев показано на рис. 12.1, б. Как

Таблица 12.1

Сравнительные значения безразмерного параметра g массы монопланного и решетчатого крыльев

Габаритные размеры равнонесущих крыльев ($S=\text{const}$)		Сплошное сечение			Полое сечение		
		p — удельное давление, Па					
		1500	3000	4500	1500	3000	4500
Монопланное крыло (вид в плане)	 $l=2a$	2,5	3,54	4,33	1,0	1,41	1,73
	 $2a$	1,92	2,72	3,32	0,77	1,09	1,33
	 $\sqrt{2}a$	1,77	2,5	3,06	0,71	1,0	1,22
	 $\sqrt{2}a$	1,36	1,92	2,36	0,54	0,77	0,94
Решетчатое крыло (вид спереди)	 $\bar{t}=10$	0,43	0,64	0,8	0,34	0,5	0,62
	 $0,84a$	0,32	0,46	0,61	0,25	0,36	0,47
	 $0,6a$	0,21	0,28	0,35	0,16	0,22	0,27
	 $\sqrt{2}a$	0,37	0,51	0,64	0,29	0,4	0,5
	 $0,8\sqrt{2}a$	0,31	0,43	0,48	0,24	0,33	0,37
	 $0,5\sqrt{2}a$	0,22	0,3	0,34	0,17	0,24	0,27

видно из рисунка, план состоит из обшивки и поддерживающего ее продольного гофра. При достаточно частом гофре расчетным случаем для полого плана, как и ранее, является устойчивость его на участке между узлами решетки (местной потери устойчивости обшивки плана не происходит). Принимая, как и в случае монопланного крыла, $c'/c=2/3$, размеры поперечного сечения полого плана определим из условия равной жесткости на изгиб EJ_x сплошного и полого планов. При этом теоретическая масса крыла с полыми планами $m_{\text{пол}}$ составляет 0,62 массы решетчатого крыла со сплошными планами d . Если учесть, что по конструктивно-технологическим соображениям осуществить расчетные полые сечения по всему размаху решетчатого крыла не удастся, для отношения $m_{\text{пол}}/m$ необходимо принять некоторый поправочный коэффициент. Принимая, что облегченные сечения можно осуществить лишь на 80% всей решетки планов, окончательно получаем $m_{\text{пол}} \approx 0,8$ т.

Как видно из табл. 12.1, масса решетчатого крыла существенно меньше массы монопланного. В зависимости от удлинения, относительно шага и других параметров решетчатое крыло получается легче монопланного в 4—6 раз для крыльев со сплошными сечениями и в 2—3 раза — для крыльев, имеющих облегченные — полые сечения. При этом габаритные размеры решетчатого крыла (при $\bar{t} < 1$) существенно меньше габаритных размеров монопланного крыла.

Как указывалось, весовые параметры, приведенные в табл. 12.1, получены на основе анализа принципиальных силовых схем крыльев, при котором не учитывался целый ряд конструктивно-технологических и аэродинамических особенностей и условий эксплуатации собственно крыла и летательного аппарата в целом. Поэтому полученные результаты позволяют выявить лишь принципиальное преимущество решетчатых крыльев перед монопланными как силовой конструкции.

Для более полного весового анализа и определения перспектив использования решетчатых крыльев необходимо исследование весовых характеристик конструкции летательного аппарата с решетчатым крылом в целом в зависимости от назначения и области применения летательного аппарата.

12.2. Некоторые модификации силовых схем решетчатых крыльев

Сопоставляя решетчатые крылья с монопланными в наименее выгодном случае консольного нагружения крыла поперечной нагрузкой, отметим, что сравниваемые конструкции с точки зрения строительной механики представляют собой:

монопланное крыло — тонкостенную полую пластину со строительной высотой, равной толщине крыла s_m (см. рис. 12.1, в);

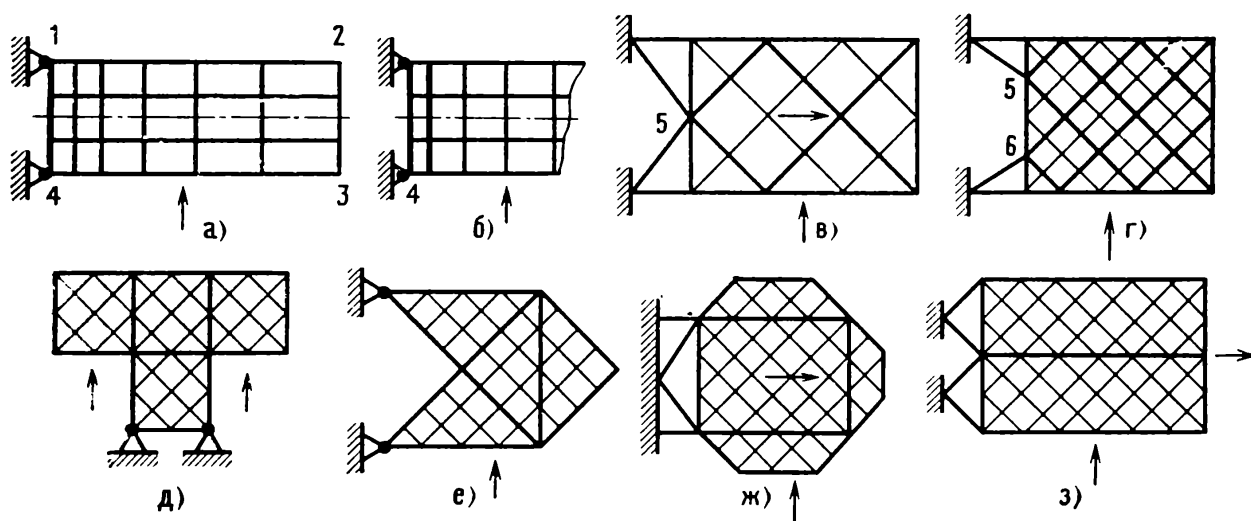


Рис. 12.2. Некоторые модификации силовых схем решетчатых крыльев:

а, б — рамных; *в, г* — ферменных крыльев с усиленными планами; *д, е, ж* — ферменных со сложной конфигурацией граничного контура; *з* — спаренного решетчатого крыла

рамное решетчатое крыло — тонкостенную консольную раму строительной высотой H (рис. 12.2, *а*);

решетчатое крыло с диагональным набором планов — тонкостенную ферму со строительной высотой H .

При этом боковины решетчатых крыльев (продольные планы) выполняют роль поясов лонжеронов монопланного крыла, передавая нормальные усилия на узлы крепления. Решетка планов воспринимает поперечную силу и является аналогом стенки лонжерона монопланного крыла. Отсюда следует, что при $H/c_m \gg 1$ величины нормальных и касательных усилий в решетчатых крыльях существенно меньше соответствующих усилий монопланного крыла. Указанная особенность в основном и определяет преимущество решетчатого крыла перед монопланом как несущей конструкции и подсказывает возможные модификации силовых схем.

Остановимся на некоторых из них. Говоря о рамных крыльях, следует отметить их малую по сравнению с ферменными сдвиговую жесткость. С целью ее увеличения рамное крыло можно выполнить с переменным шагом боковин по размаху, уменьшая шаг к корню крыла (см. рис. 12.2, *а*). Такая модификация заметно повышает жесткость и прочность крыла. Другой важной проблемой для рамного крыла является система крепления его к фюзеляжу, обеспечивающая передачу нормальных усилий со стороны продольных планов решетки на узлы крепления. Они могут представлять собой рамную или стержневую конструкцию. Однако в любом случае корневой план должен обладать значительной жесткостью на изгиб, в связи с чем его приходится выполнять довольно мощным. Как один из вариантов силовой схемы, можно предложить усиление

корня крыла рамой, состоящей из двух корневых планов (см. рис. 12.2, б), суммарная потребная толщина которых составит величину, меньшую, чем толщина одного корневого плана. В отношении рамных решетчатых крыльев следует также отметить, что все планы крыла, кроме корневого, целесообразно делать одинаковой жесткости, не выделяя окаймляющих планов.

Рассмотрим далее ферменные решетчатые крылья с диагональным набором планов. На рис. 12.2, в—е приведены некоторые варианты силовых схем решетчатых крыльев, требующих в силу особенностей крепления или конфигурации окаймляющего контура постановки усиленных планов при заданных условиях нагружения крыла. Усиленные планы на рисунках выделены жирными линиями, а направление действия нагрузки показано стрелками. На схемах в, г установка усиленных планов обусловлена необходимостью воспринять сосредоточенные силы в узлах крепления 5, 6, если корневой план не жесткий на изгиб. Модификация конфигурации контура панели, при которой в одном случае крыло составлено из нескольких прямоугольных панелей (схема д), а в другом случае имеет треугольные участки (схема е), также требует установки усиленных планов.

Рациональное усиление планов того или иного направления в значительной степени зависит от искусства конструктора. Однако здесь можно сформулировать общий принцип, которым целесообразно руководствоваться при постановке усиленных планов. Этот принцип базируется на свойстве шарнирной модели решетки передавать местную аэродинамическую нагрузку, которая принимается приложенной в узлах решетки, на остальную часть крыла только путем растяжения или сжатия планов, причем таким образом, чтобы усиленные или окаймляющие планы нагружались со стороны решетки только тангенциальными усилиями и представляли собой геометрически неизменяемую систему при заданной нагрузке. Таким образом, рациональность конструкции доказана, если можно проследить передачу местной аэродинамической нагрузки от узлов решетки через усиленные планы на узлы крепления крыла без изгиба силовых элементов крыла.

На рис. 12.2, ж показана модификация решетчатого крыла, полученная путем добавления к основной части крыла прямоугольной панели законтурных участков решетки, удовлетворяющих сформулированным выше требованиям формирования решетки. Модификация (см. рис. 12.2, з) представляет собой по существу два спаренных решетчатых крыла.

На рис. 12.3 приведены ферменные (а, б) и рамное (в) решетчатые крылья так называемого «дискового» типа, т. е. такие, полипланная решетка которых расположена по всему периметру корпуса летательного аппарата. К таким вариантам крыльев прибегают в случае необходимости получения наибольшей величины произвольно направленной аэродинамической силы при наименьших габаритных размерах конструкции. При этом схемы а, б являются предпочтительными по сравнению со схемой в, так как обеспечивают большую жесткость конструкции крыла. Представляет интерес схема «дискового» крыла (см. рис. 12.3, г), состоящего из от-

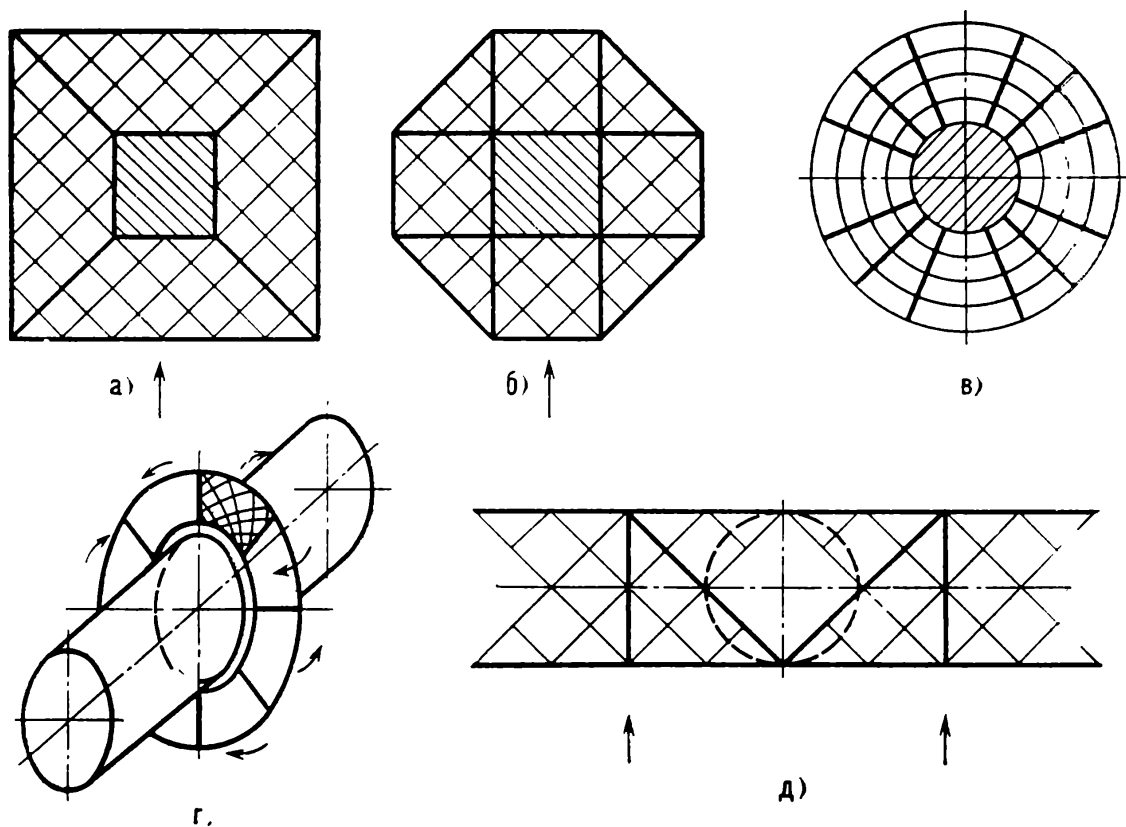


Рис. 12.3. Силовые схемы решетчатых крыльев дискового типа (а—в); крупногабаритное решетчатое крыло (д)

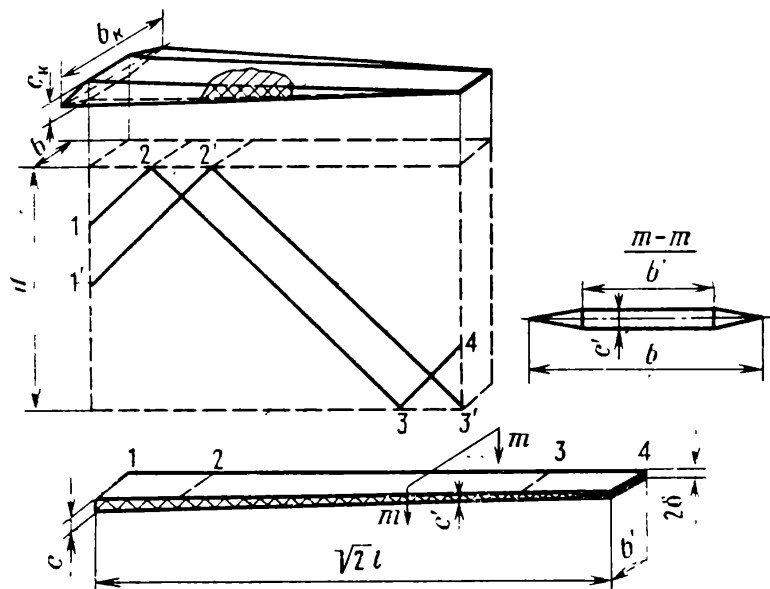


Рис. 12.4. Схема формирования силовой конструкции решетчатого крыла с переменной толщиной планов

дельных секторов, которые могут складываться по потоку и против него. При раскрытии секторов и установке их на замки в угловых точках крыло образует целостную весьма прочную и жесткую силовую конструкцию.

Наконец, последняя схема (см. рис. 12.3, д) иллюстрирует возможную конфигурацию крупногабаритного решетчатого крыла, предназначенного для сверхтяжелых самолетов.

Касаясь возможного совершенствования «классической» схемы прямоугольного решетчатого крыла с квадратно-диагональным набором планов, следует отметить, что с целью повышения весовой эффективности конструкции боковины крыла, поперечные планы и планы решетки могут выполняться полыми и состоять из обшивки и подкрепляющего гофра (рис. 12.4). Учитывая, что расчетным сечением крыла обычно является корневое сечение, а концевые планы практически не нагружены, предлагается боковины и планы решетки делать переменной толщины по размаху крыла. Переменная толщина планов может быть обеспечена путем выполнения гофра переменной высоты по размаху при ориентации вдоль хорды планов. При этом толщина планов решетки меняется от расчетного значения s у корня крыла до толщины, равной двум толщинам обшивки (2δ) на конце по линейному закону.

Возможная технология сборки такой решетки планов показана на рис. 12.4. В соответствии с этой схемой предварительно изготовленный полный набор планов переменной толщины и длиной, равной $\sqrt{2}l$, формируется затем в решетку в виде ломаных $1-2-3-4$, $1'-2'$, $3'$ и т. д. Ввиду того, что по требованиям аэродинамики кромки планов и боковин решетчатого крыла должны быть заострены, длина гофра в направлении хорды распространяется только на участок плана b' с постоянной толщиной (см. рис. 12.4). При такой конструкции плана должно удовлетворяться условие местной устойчивости обшивки на участках между гофрами и на заостренных участках.

Оценка несущей способности приведенных силовых схем проводилась в предположении, что расчетной нагрузкой для крыла является подъемная сила, перпендикулярная оси симметрии крыла и лежащая в лобовой плоскости, близкой к плоскости наибольшей жесткости конструкций. Вторым расчетным компонентом нагрузки является сила лобового сопротивления. Очевидно, что рациональная консольная конструкция, воспринимающая лобовую силу, должна иметь переменную по размаху жесткость на изгиб из плоскости панели крыла. Учитывая типичные условия прикрепления крыла, при которых осуществляется защемление боковин, целесообразно выполнять переменной жесткости по размаху именно боковины. Для этого боковины имеют переменную по размаху хорду b_6 , изменяющуюся линейно от расчетной величины $b_6 = b_*$ у хорды корня до величины, равной хорде планов решетки $b_6 = b$ на конце крыла.

В заключение отметим, что при заданных по условиям аэродинамики относительных толщинах планов и боковин описанную конструкцию решетчатого крыла в рассматриваемом классе конструкций можно рассматривать как близкую к оптимальной по критериям массы, прочности и жесткости.

12.3. Особенности создания полых решетчатых крыльев

Потребности создания полых решетчатых крыльев объясняются прежде всего стремлением снизить массу изделия. Как показали расчеты, применение крыла полый конструкции позволя-

ет уменьшить массу в зависимости от плотности применяемого материала на 30—45%. В табл. 12.2 приведены результаты оценки выигрыша в массе решетчатого крыла с полыми планами при следующих исходных данных: $l=H=1500$ мм; $b=150$; $\bar{t}=0,5$; $Y=10\,000$ кг; $X=1250$ кг; $Z=3500$ кг.

Таблица 12.2

Выигрыш в массе полого решетчатого крыла

Материал	Масса крыла, кг		Выигрыш в массе $\frac{m_c - m_{II}}{m_c} 100\%$
	при полых планах, m_{II}	при сплошных планах, m_c	
Сталь 12Х18Н9Т	55	80	31
Титановый сплав ВТ16	35	60	42
Алюминиевый сплав АЦМУ	22	40	45

Особенностью технологического процесса изготовления крыла полрой конструкции является применение фольги толщиной около 0,1 мм для формирования гофрированного заполнителя планов и боковин (рис. 12.5).

Простейшими заготовками для полых планов и боковин, как показал опыт, являются листы, ленты и фольга из стали 12Х18Н9Т

толщиной от 0,08 мм и более. Если выбрать для обшивки планов и боковин фольгу толщиной $c_0 = 0,16$ мм, а для гофрированной проставки — фольгу $c_1 = 0,1$ мм, то полная толщина трехслойного плана s , подсчитываемая по формуле (рис. 12.6)

$$s = 2c_0 + h_0 + s_0, \quad (12.6)$$

будет составлять всего 1,3 мм. Эти данные подтверждены неоднократно проведенными экспериментами. При меньших толщинах исходных эле-

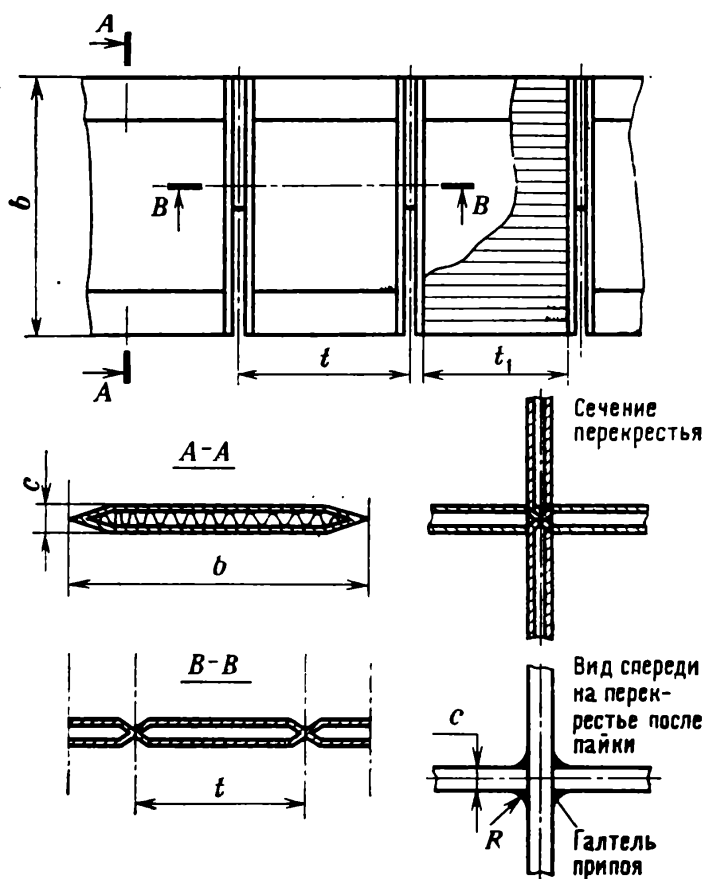


Рис. 12.5. Особенности конструкции пустотелого плана (в сечении А—А показана гофрированная проставка из тонкой фольги)

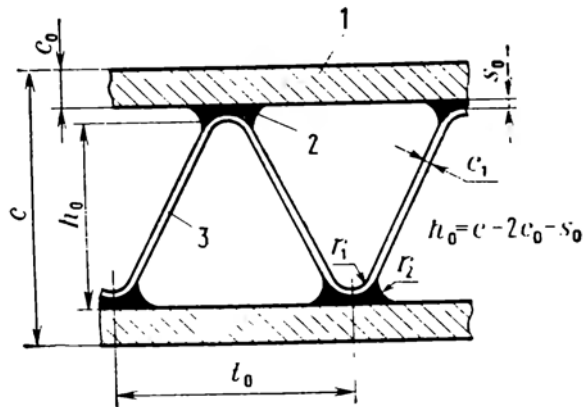


Рис. 12.6. Параметры полого паяного плана:

1 — обшивка; 2 — припой; 3 — проставка

ментов, например при $c_1 = 0,08$ мм и $c_0 = 0,1$ мм, можно получить толщину планов, равную 1 мм и менее.

На рис. 12.7 показана гофрированная проставка с высотой гофра 0,8 мм, полый профилированный план толщиной

1,3 мм и полая боковина толщиной 2 мм. Все указанные элементы решетчатого крыла выполнены из стали 12Х18Н9Т с применением пайки при температуре 1020°C.

Верхняя и нижняя обшивка плана изготавливаются путем деформирования тонкостенной трубной заготовки или путем сварки листа по схеме, указанной на рис. 12.8, и последующей растяжки его на заданный профиль.

К моменту пайки обшивки с гофрированной проставкой в зазор между ними подается припой. Эта задача решается несколькими способами: путем закладки тонкостенной фольги припоя, в виде плакирующего слоя или гальванического покрытия на внутренней поверхности обшивки. В последнем случае необходимо использовать двухслойное покрытие никель-медь (15% никеля, остальное — медь) с расчетом проведения пайки при температуре 1150°C, когда еще возможно образование жидкой фазы никель-медного сплава.

Суммарная толщина s_0 покрытия никель-медь или ленты припоя должна быть строго регламентирована и рассчитывается по формуле

$$s_0 = \frac{1}{t_0} \left[2(r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2} - \pi r_2^2 - (r_1^2 - r_2^2) \arccos \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \right], \quad (12.7)$$



Рис. 12.7. Паяные элементы решетчатого крыла полый конструкции

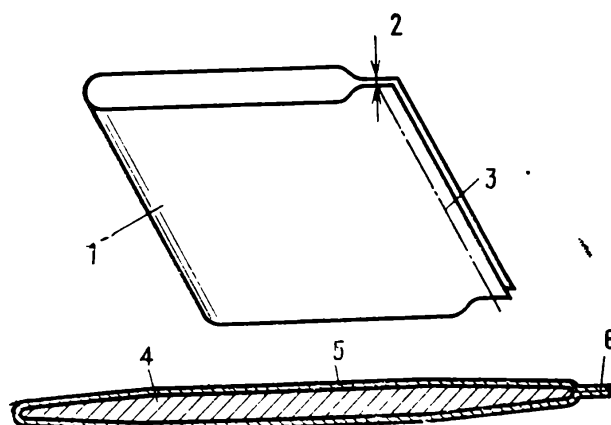


Рис. 12.8. Схема получения обшивки плана в виде замкнутой оболочки из листа путем контактной сварки и последующей растяжки:

1 — листовая заготовка; 2 — начало сварного роликового шва; 3 — ось шва; 4 — профилированный стержень для растяжки листовой заготовки; 5 — обшивка; 6 — сварной шов

где r_1 , r_2 и t_0 — параметры паяных швов в соединениях гофрированной проставки и обшивки, указанные на рис. 12.6. Процесс пайки рекомендуется осуществлять в печах в вакууме или в среде аргона с трехфтористым бором.

Данный метод снижения массы решетчатых конструкций (рис. 12.9) был в дальнейшем использован при изготовлении ряда изделий.

12.4. Возможности создания охлаждаемых решетчатых крыльев

Наряду со снижением массы полые планы и боковины позволяют решить задачу охлаждения решетчатых крыльев. Максимальные температуры от аэродинамического нагрева имеют место на фронтальной поверхности крыла, поэтому передняя часть планов и боковин должна прежде всего снабжаться агентами (газ, жидкость, мелкодисперсное твердое вещество). В таком случае конструкция планов и боковин должна обеспечивать подход охлаждающей среды по соответствующим каналам или порам под давлением, превышающим давление окружающей среды перед профилем (см. рис. 12.9, е, ж).

Наряду с системой открытого типа (рис. 12.10, а) для охлаждения может использоваться система замкнутой циркуляции жидкости или газа (рис. 12.10, б).

Перечисленные требования достаточно полно могут быть удовлетворены такой конструкцией планов и боковин, которая предусматривает наличие в полости профиля системы пересекающихся каналов, выполненных с помощью фрезерования в нижней панели и закрытых затем верхней панелью путем припайки ее к нижней части профиля (рис. 12.11). Подобного рода конструкция плана из алюминиевого сплава АЦМУ приведена на рис. 12.12. Фрезерование каналов здесь осуществлено лишь в одном направлении — перпендикулярно направлению хорд. Данный образец выдержал испытание на отрыв верхней панели от нижней давлением жидкости, несколько превышающим 29,43 МПа.

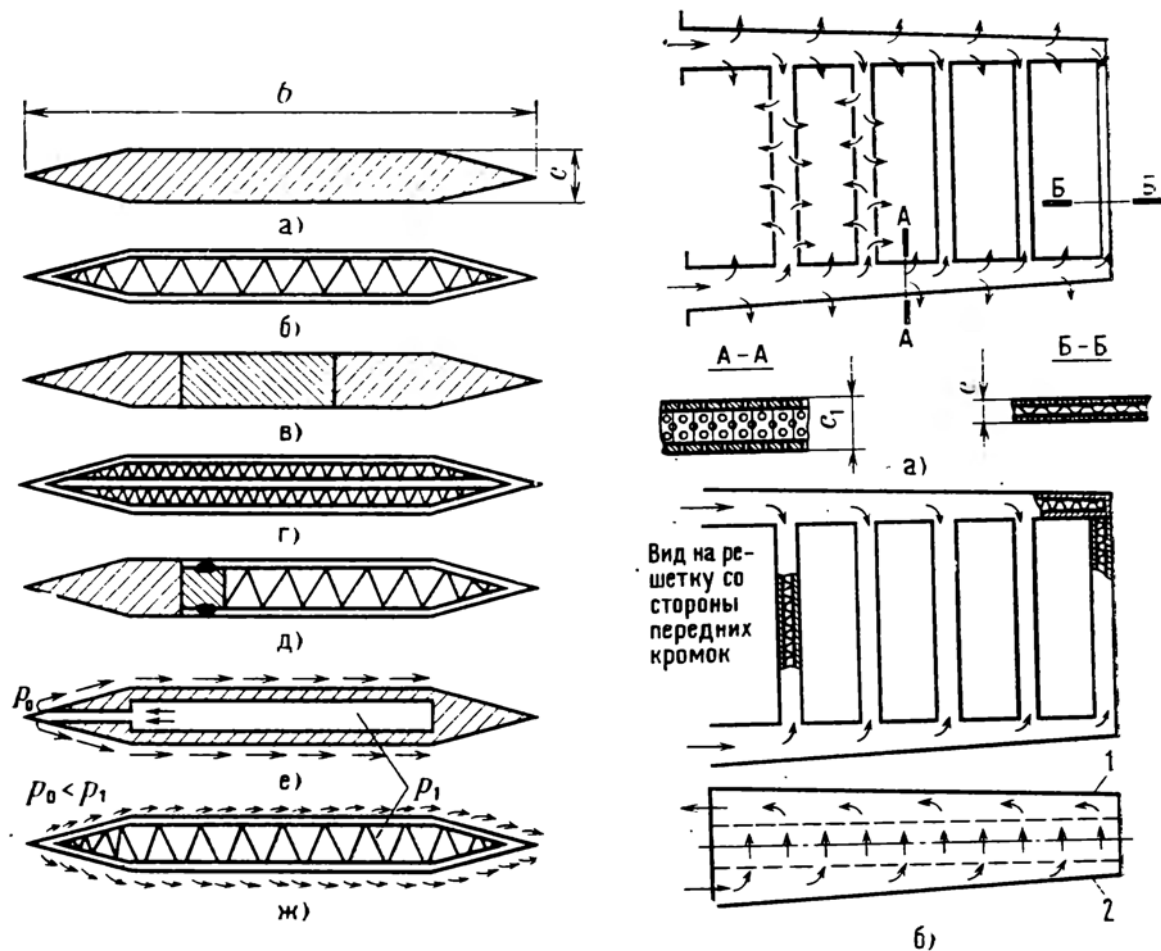


Рис. 12.9. Варианты конструкции планов:

а — обычный, сплошного сечения; б — полый; в — составной; г — многослойный; д — комбинированный; е и ж — охлаждаемые

Рис. 12.10. Схема охлаждения решетки рамного типа прокачкой жидкости или газа:

а — пористое охлаждение; б — система замкнутой циркуляции; 1 — задняя холодная кромка; 2 — передняя горячая кромка

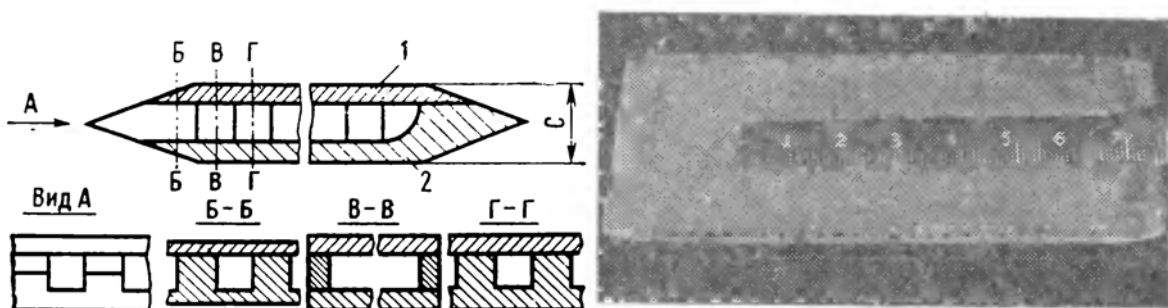


Рис. 12.11. Конструкция охлаждаемых планов и боковин с фрезерованными каналами:

1 — верхняя панель; 2 — нижняя панель

Рис. 12.12. Элемент полого плана из алюминиевого сплава АЦМУ с фрезерованными каналами, выполненный методом пайки в печи

12.5. Влияние методов изготовления на массу решетчатых крыльев

Представим себе идеализированное крыло, например из стали, выполненное некоторым, пока неизвестным методом, при котором отсутствуют нахлесточные соединения и какие-бы то ни было связующие элементы (заклепки, клей, припой), влияющие на увеличение массы. Выберем для этого случая достаточно благоприятные с точки зрения прочности параметры: $b=150$ мм; $\bar{t}=0,5$; $\bar{c}=0,008$. Для упрощения задачи примем $l=H=1500$ мм.

Тогда массу сотового набора, оставляя в стороне массу боковин, концевой и корневой нервюр, а также узлов крепления крыла как не зависящую от метода изготовления, можно определить по формуле

$$m_{нл} = 4b\bar{t}c\rho \left(\frac{l}{t\sqrt{2}} \right)^2. \quad (12.8)$$

Принимая $\rho=7,8$ г/см³ и упомянутые выше значения геометрических параметров, получим

$$m_{нл} = \frac{4 \cdot 150 \cdot 7,8 \cdot 0,5 \cdot 0,008}{1000} \left(\frac{1500}{7,5\sqrt{2}} \right)^2 = 84,3 \text{ кг.}$$

Теперь рассчитаем привес конструкции сотового набора для каждого реально существующего метода изготовления крыла, чтобы можно было выявить тот метод, при котором привес является минимальным. В расчетах для методов изготовления, связанных с использованием нахлесточных соединений (клепка, склеивание, сварка давлением и ультразвуковая сварка), принималась конструктивная схема крыла, показанная на рис. 12.13. Результаты рас-

чета, отнесенные к массе идеализированного крыла, приведены в табл. 12.3.

Анализ рассмотренных методов изготовления показывает, что при принятых условиях паяная конструкция лишь на 1,4 кг, т. е. примерно на 3%, тяжелее крыла в идеализированном варианте, полученного, например, обработкой резанием или электроискровым методом,

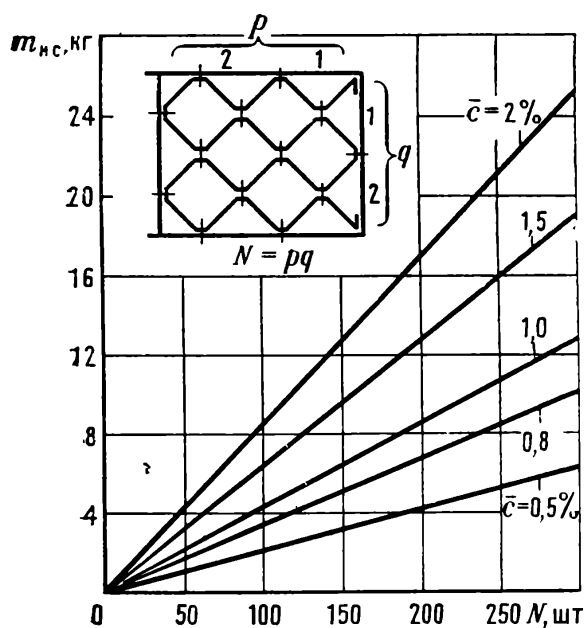
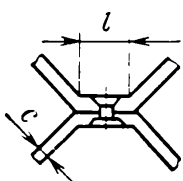
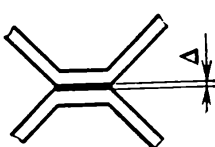
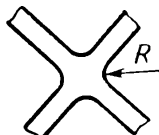
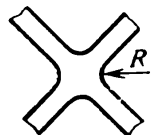
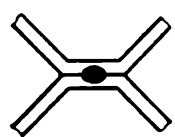
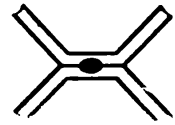



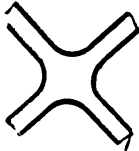

Рис. 12.13. Зависимость массы нахлесточных соединений $m_{н.с.}$ (без связки) от числа ячеек N и относительной толщины планов \bar{c} из стали ($\rho=7,8$ г/см³)

Таблица 12.3

Влияние метода изготовления на массу идеализированного крыла

Метод изготовления	Тип соединения	Принятые условия	Привес конструкции, %				Примечание
			от материала нахлестки	от связки	из-за увеличения толщины планов	Суммарный	
Клепка		$c = 1,2 \text{ мм};$ $l_{\min} = 8 \text{ мм}$	10,6	—	—	10,6	l_{\min} исходя из условия подхода при клепке
Склеивание		$\Delta = 0,4 \text{ мм};$ $c = 1,2 \text{ мм};$ $l_{\min} = 8 \text{ мм};$ $\rho_{\text{кл}} = 1,6 \text{ г/см}^3$	10,6	0,35	—	11	l_{\min} исходя из условия прочности
Обработка резанием (сверление + фрезерование)		$R_{\min} = 1,2 \text{ мм};$ $c = 1,2 \text{ мм};$	—	—	—	—	При $c < 2 \text{ мм}$ трудоемкость обработки резко возрастает
Электроискровая обработка		То же	—	—	—	—	То же
Сварка давлением (точечная)		$l_{\min} = 6 \text{ мм};$ $c = 1,2 \text{ мм};$	8	—	—	8	l_{\min} исходя из условия подхода при сварке
Сварка ультразвуковая		$l_{\min} = 6 \text{ мм};$ $c = 1,2 \text{ мм};$	8	—	—	8	То же

Продолжение табл. 12.3

Метод изготовления	Тип соединения	Принятые условия	Привес конструкции, %				Примечание
			от материала нахлестки	от связи	из-за увеличения толщины планов	Суммарный	
Пайка		$c = 1,2 \text{ мм};$ $R_{\min} = 2,4 \text{ мм}$ $\rho_{\text{пр}} = 8 \text{ г/см}^3$	—	2,8	—	2,8	Повышенный радиус галтели из условия прочности
Литье кокильное		$R = 1,2 \text{ мм};$ $c_{\min} = 2,5 \text{ мм}$	—	—	108	108	c_{\min} определяется способом литья
Литье по выплавляемым моделям		$R = 1,2 \text{ мм};$ $c_{\min} = 1,5 \text{ мм}$	—	—	25	25	То же

т. е. путем весьма больших трудозатрат и при низком значении $K_{\text{п.м}}$ (см. гл. 9). Следовательно, применение пайки для изготовления крыльев целесообразно не только из соображений достижения малой трудоемкости и экономного расходования материала, но также и с точки зрения получения минимальной массы создаваемой конструкции.

Между тем известны случаи, когда некоторые конструкторы при проектировании крыльев, желая использовать традиционный опыт своего предприятия по созданию клепаных, сварных или клееных изделий, стремятся осуществить нахлесточные соединения планов вместо соединений втавр (крестообразных). Возможно, что в отдельных случаях трудоемкость изготовления крыла с нахлесточными соединениями будет не выше трудоемкости крыла с тавровыми соединениями, выполненными пайкой, но при этом всегда будет иметь место проигрыш в массе, прочности или жесткости.

Объясняется это тем, что нахлесточные соединения в решетчатых крыльях вызывают вследствие эксцентриситета e (рис. 12.14) изгиб планов от момента M и преждевременную потерю ими устойчивости от сжимающих сил. Чтобы этого не происходило, необходимо увеличивать толщину планов и соответственно учитывать увеличение массы.

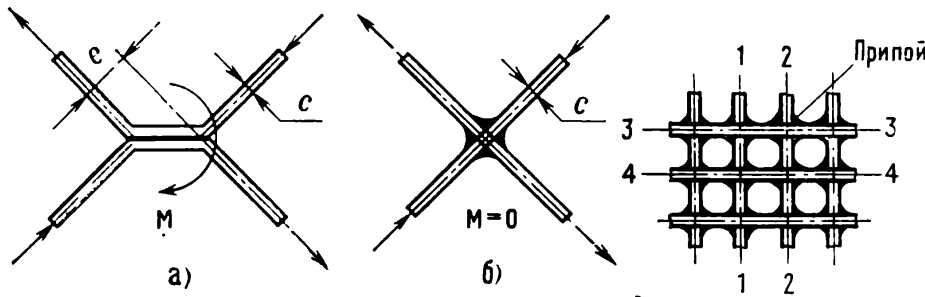


Рис. 12.14. Различия в условиях работы планов при нахлесточном (а) и тавровом или крестообразном (б) соединениях

Рис. 12.15. Характер галтелей из припоя в решетчатом крыле сотовой конструкции

Однако и в паяных крыльях сотовой конструкции масса может существенно увеличиваться, если параметры, определяющие геометрию ячейки, будут выбраны неудачно. Задачу о привесе крыла вследствие использования припоя решим в общем виде.

С этой целью рассмотрим паяное крыло сотовой конструкции и подсчитаем весовые количества припоя и материала планов, относящиеся к одной ячейке, ограниченной осями 1—1, 2—2, 3—3 и 4—4 (рис. 12.15).

Масса материала сотовой ячейки

$$m_{\text{сот}} = cb\rho(2t - c), \quad (12.9)$$

где c , b , t — параметры ячейки, а ρ — плотность материала.

Учитывая малость величины c по сравнению с $2t$ (менее 2%), выражение (12.9) можно упростить:

$$m_{\text{сот}} = 2cbt\rho. \quad (12.10)$$

Масса припоя согласно рис. 12.15

$$m_{\text{пр}} = (4 - \pi)R^2b\rho_{\text{пр}}, \quad (12.11)$$

где R — радиус галтели, а ρ — плотность припоя.

Беря отношение массы припоя к массе материала ячейки, получим

$$\frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{сот}}} = \frac{(4 - \pi)R^2b\rho_{\text{пр}}}{2cbt\rho} = \frac{0,43R^2\rho_{\text{пр}}}{ct\rho}. \quad (12.12)$$

Вместо абсолютных значений радиуса галтели, толщины и шага планов введем их относительные значения:

$$\bar{R} = R/c; \quad \bar{c} = c/b; \quad \bar{t} = t/b. \quad (12.13)$$

Тогда из выражений (12.12) и (12.13) получим

$$\frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{сот}}} = \frac{0,43 \cdot \bar{R}^2 \cdot \bar{c}}{\bar{t}} \left(\frac{\rho_{\text{пр}}}{\rho} \right). \quad (12.14)$$

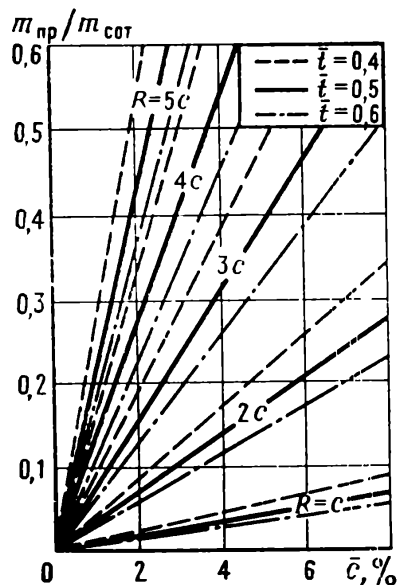


Рис. 12.16. Соотношение массы припоя $m_{пр}$ и массы сотового набора крыла $m_{сот}$ в зависимости от относительной толщины планов \bar{c} , шага планов \bar{t} и радиуса галтелей R

Задаваясь численными значениями \bar{R} , \bar{c} , \bar{t} и принимая отношение $\rho_{пр}/\rho=1$, можно представить выражение (12.14) графически (рис. 12.16).

Как видно из приведенного графика, привес сотовой конструкции вследствие применения припоя при $\bar{c} \leq 1\%$, $\bar{R} \leq 2$ и $\bar{t} \geq 0,4$ составляет менее 5%. Однако при неблагоприятном сочетании параметров, например при $\bar{c} \geq 2\%$, $\bar{R} \geq 5$ и $\bar{t} \leq 0,4$, что следует считать весьма маловероятным, масса припоя может превысить половину массы сотового набора крыла.

12.6. Зависимость методов изготовления от габаритных размеров крыла

Диапазон габаритных размеров решетчатых крыльев достаточно широк. Ниже рассматриваются области рационального применения разных методов изготовления при существенно разных размерах крыльев.

Все возможные типоразмеры крыльев можно ограничить некоторой областью их существования в логарифмической системе координат « $b-l$ », т. е. «хорда крыла — размах крыла», если построить (рис. 12.17) граничные прямые, выражающие связь этих геометрических факторов в виде

$$l = k_l b, \quad (12.15)$$

где коэффициент пропорциональности k_l выбран из условия

$$5 \leq k_l \leq 15. \quad (12.16)$$

Максимальная величина хорды крыла была принята с учетом перспектив развития этих изделий, равной 400 мм. Таким образом, изменение хорды имело пределы

$$8 \leq b \leq 400 \text{ мм}. \quad (12.17)$$

Теперь расчленим представленное на рис. 12.17 поле координат на три области:

I — область преимущественного использования пайки, ограниченную осями координат и прямыми $l=2000$ мм и $b=133$ мм;

II — область, где наряду с пайкой может применяться и сварка;

III — область справа от $l=2000$ мм, где предпочтение в данное вре-

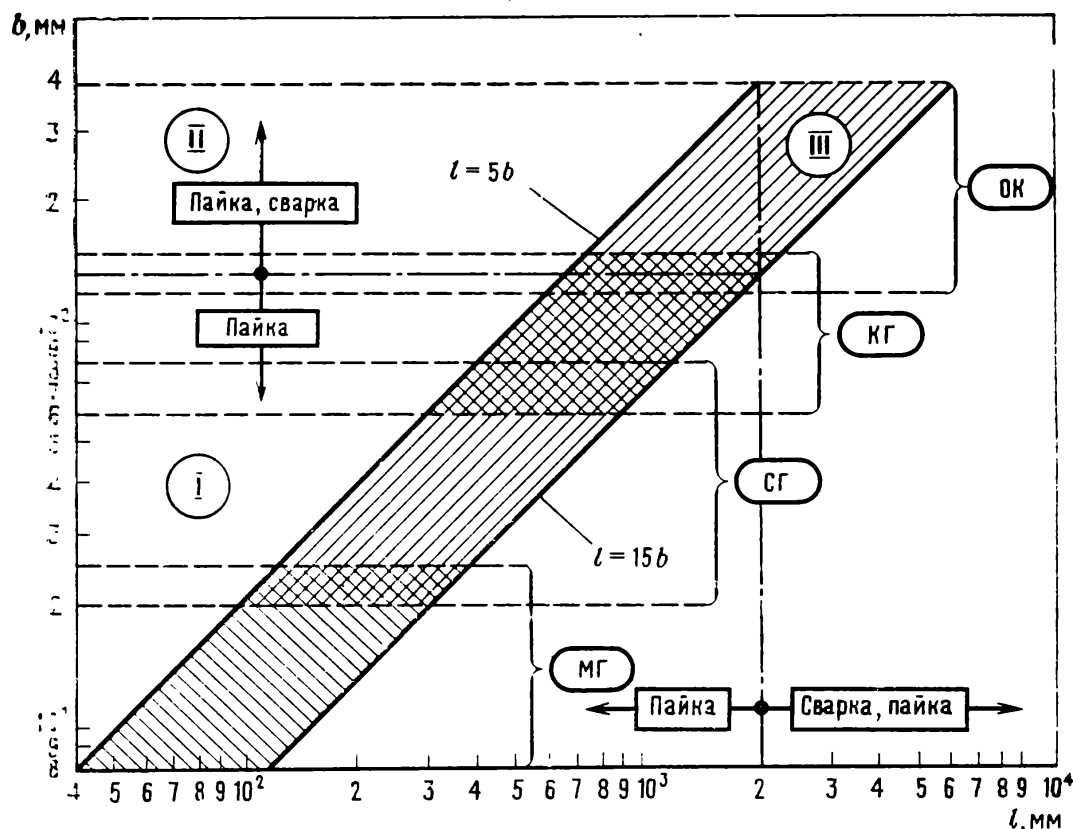


Рис. 12.17. Области рационального применения пайки и сварки при изготовлении решетчатых крыльев различных габаритных размеров:

МГ — малогабаритные; СГ — среднегабаритные; КГ — крупногабаритные; ОК — особо крупногабаритные

мя следует отдать методу сварки, хотя и пайка здесь также может найти применение.

Принятые границы разделения поля координат на три области объясняются следующим.

Область I охватывает решетчатые крылья малых и средних габаритных размеров с величиной $l \leq 2000$ мм. При изготовлении их с помощью пайки в печах имеется возможность использовать стандартное промышленное оборудование, поскольку размеры рабочего пространства этих печей хорошо согласуются с размером l . В частности, для этих целей может использоваться индукционная компрессионно-вакуумная печь ИКВП. Осевой размер рабочего пространства этой печи, составляющий 3785 мм, позволяет загружать крыло с размахом $l = 2000$ мм при наличии на нем узлов крепления, составляющих дополнительную величину

$$\Delta l \leq 0,25l \text{ мм}, \quad (12.18)$$

а также с учетом размещения в печи загрузочного приспособления. При этом диаметр рабочего пространства печи, равный 1700 мм, согласуется с другим габаритным размером крыла, а именно: высотой H , которая обычно составляет 50—85% размаха l .

Вторая прямая, параллельная оси абсцисс и ограничивающая область I при $b=133$ мм, получена из условия (12.15) при $k_i=15$, согласно которому

$$b = \frac{l}{k_i} = \frac{2000}{15} = 133 \text{ мм.}$$

Это означает, далее, что в крыльях с наиболее густой решеткой, когда шаг планов $t=0,35b$ и составляет, следовательно, $t=0,35 \times 133=46,7$ мм, диагональ квадратной ячейки будет равна величине $t\sqrt{2}=46,7 \cdot 1,41=66$ мм. Этот размер является, по-видимому, тем минимальным габаритным размером, при котором практически уже возможна ручная аргонодуговая сварка соединения втавр (ПТ-4 по ГОСТ 19249—73) во внутренней полости ячейки с использованием самой миниатюрной горелки с изогнутым наконечником, которая и предназначена для работ в особо труднодоступных местах.

Область II поэтому, будучи ограниченной $l=2000$ мм и $b \geq 133$ мм, охватывает такие крылья, которые из условия их геометрии могут выполняться как паяными, так и сварными.

Наконец, область III, охватывающая крылья больших габаритных размеров, наиболее специфична для использования сварки. Однако и здесь метод пайки далеко не исчерпал себя. Дальнейшая разработка этого метода применительно к производству крупногабаритных конструкций [17, 26, 29, 34] свидетельствует о весьма обнадеживающих перспективах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1968. 226 с.
2. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях/Под ред. А. Ф. Donovan и Г. Р. Лодрене. М.: ИЛ, 1959. 701 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1968. 559 с.
4. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965. 242 с.
5. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
6. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: Наука, 1975. 424 с.
7. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
8. Боли Б. и Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
9. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
11. Болховитинов В. Ф. Пути развития летательных аппаратов. М.: Оборонгиз, 1962. 131 с.
12. Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М.: Наука, 1964. 362 с.
13. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 508 с.
14. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
15. Введение в аэроавтоупругость/С. М. Белоцерковский, Ю. А. Кочетков, А. А. Красовский и др. Под ред. С. М. Белоцерковского. М.: Наука, 1980. 383 с.
16. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
17. Гржимальский Л. Л., Ильевский И. И. Технология и оборудование пайки. М.: Машиностроение, 1979. 240 с.
18. Журавлев В. Н., Николаева О. И. Машиностроительные стали. Справочник. М.: Машиностроение, 1981. 391 с.
19. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
20. Исследования при высоких температурах. Пер. с англ./Под ред. В. А. Кириллина и А. Е. Шейндлина. М.: ИЛ, 1962. 480 с.
21. Исследования сверхзвуковой аэродинамики самолета на ЭВМ/С. М. Белоцерковский, Н. А. Кудрявцева, С. А. Попыталов и др. Под ред. С. М. Белоцерковского. М.: Наука, 1982. 335 с.
22. Исупов Л. П. Вариант анизотропной моментной теории упругости для волокнистого композита. — Механика твердого тела. 1980. № 3, с. 62—69.
23. Койтер В. Т. Моментные напряжения теории упругости. МДТТ, 1965. № 3, с. 89—112.

24. **Конструкционные материалы:** Энциклопедия современной техники. М.: Советская энциклопедия, т. 1, 1963. 416 с., т. 2, 1964. 408 с., т. 3, 1965. 527 с.
25. **Лейбензон Л. С.** Курс теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 464 с.
26. **Лоцманов С. Н., Фролов В. П.** Технологичность паяных конструкций. — В кн.: Технологичность конструкций. Справочное пособие/Под ред. С. Л. Ананьева и В. П. Купровича. М.: Машиностроение, 1969, с. 81—108.
27. **Новицкий В. В.** Дельта-функция и ее приложение в строительной механике. Расчет пространственных конструкций, вып. 8. М.: Госстройиздат, 1962, с. 207—244.
28. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
29. **Оснащение** самолетного и ракетного производства. Пер. с англ./Под ред. С. А. Вигдорчика. М.: Машиностроение, 1967. 403 с.
30. **Пратусевич Я. А.** Вариационные методы строительной механики. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 400 с.
31. **Сварка в СССР.** Т. 1. Развитие сварочной техники и науки о сварке. Технологические процессы, сварочные материалы и оборудование. М.: Наука, 1981. 533 с.
32. **Савин Г. Н.** Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: АН УССР, 1965. 161 с.
33. **Сленов В. И., Локшин А. З.** Справочник по строительной механике корабля, т. 2/Под ред. Ю. А. Шиманского. Л.: Судпромгиз, 1958. 627 с.
34. **Справочник по пайке**/Под ред. С. Н. Лоцманова, И. Е. Петрунина, В. П. Фролова. М.: Машиностроение, 1975. 407 с.
35. **Справочник.** Прочность. Устойчивость. Колебания. т. 3/Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.
36. **Толстов Г. П.** Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1960. 341 с.
37. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 659 с.
38. **Трефилов В. И., Мильман Ю. В., Фирстов С. А.** Физические основы прочности тугоплавких металлов. Киев: Наукова думка, 1975. 315 с.
39. **Тугоплавкие материалы в машиностроении:** Справочник/Под ред. А. Т. Туманова и К. И. Портнова. М.: Машиностроение, 1967. 392 с.
40. **Тюленев А. И., Грищенко В. С., Сметаненко В. А.** Динамическая модель упругой несущей поверхности с регулярной конструктивной неоднородностью. — В кн.: Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. Темат. сб. научн. трудов, вып. 2, Харьков: Харьковский авиационный институт, 1980, с. 126—136.
41. **Уманский А. А.** Пространственные системы. М.: Стройиздат, 1961. 303 с.
42. **Ферри А.** Аэродинамика сверхзвуковых течений. М.: ГИИТЛ, 1952. 467 с.
43. **Францевич И. Н., Воронов Ф. Ф., Бакута С. А.** Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: Справочник/Под ред. И. Н. Францевича. Киев: Наукова думка, 1982. 286 с.
44. **Фролов В. П., Чикунев М. И.** Уравнение состояния производства паяных конструкций. — В кн.: Производство паяных конструкций и стандартизация технологических процессов пайки. — Тр. института. Вып. 21. М.: ВНИИНМАШ, 1975, с. 131—144.
45. **Шенли Ф. Р.** Основы силового расчета конструкций. М.: Оборонгиз, 1948. 427 с.
46. **Энциклопедический справочник «Машиностроение».** М.: Машгиз, т. 3. 1947. 712 с., т. 4. 1947. 428 с., т. 5. 1947. 544 с., т. 6. 1947. 548 с., т. 7. 1948. 708 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Основные обозначения	7
Введение	10
ЧАСТЬ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. АЭРОДИНАМИКА	14
Глава 1. Общие сведения	16
1.1. Решетчатое крыло и его геометрические параметры	16
1.2. Система координат	18
1.3. Аэродинамические коэффициенты и физическая картина обтекания решетчатых крыльев потоком трансзвуковых и сверхзвуковых скоростей	21
1.4. Общие сведения о работе конструкции и весовых характеристиках	23
1.5. Особенности конструкции и технология изготовления	25
Глава 2. Теория решетчатого крыла на дозвуковых скоростях	27
2.1. Общие положения	27
2.2. Аэродинамические характеристики полиплана	28
2.3. Простейшая вихревая схема решетки и скосы от свободных вихрей	32
2.4. Подъемная сила и индуктивное сопротивление по схеме несущей нити	36
2.5. Вихревая схема несущей поверхности	38
2.6. Уравнения для циркуляций	41
2.7. Особенности методики расчета на ЭВМ	44
2.8. Особенности расчета нестационарных характеристик	46
2.9. Сопоставление некоторых результатов	49
Глава 3. Решетчатое крыло на больших дозвуковых и трансзвуковых скоростях	53
3.1. Параметры подобия	53
3.2. Метод расчета производной c_{ya}^a на докритических скоростях ($M_\infty \leq M_{кр.1}$)	55
3.3. О теории несущей поверхности и решетчатого крыла при больших дозвуковых скоростях	57
3.4. Метод расчета c_{ya}^a на закритических дозвуковых скоростях ($M_\infty > M_{кр.1}$)	57
3.5. Метод расчета c_{ya}^a на малых сверхзвуковых скоростях ($1,0 \leq M_\infty \leq M_{кр.2}$)	63
3.6. Методика расчета коэффициента сопротивления c_{xa}	66
3.7. Сравнение результатов расчета с экспериментом	73

	Стр.
Глава 4. Решетчатое крыло на сверхзвуковых скоростях	76
4.1. Особенности обтекания решетчатого крыла на сверхзвуковых скоростях	76
4.2. Взаимное влияние между планами решетчатого крыла . . .	80
4.3. Параметры подобия для решетчатых крыльев на сверхзвуковых скоростях	82
4.4. Коэффициент подъемной силы решетчатого крыла на малых углах атаки	85
4.5. Коэффициент подъемной силы полиплана на сверхзвуковых скоростях при взаимном влиянии между планами ($1 < M_{\infty} < M_{кр.3}$)	87
4.6. Зависимость коэффициента подъемной силы c_{ya} от углов атаки α	90
4.7. Коэффициент сопротивления решетчатых крыльев на сверхзвуковых скоростях	92
4.8. Сравнения результатов расчета с экспериментами	94
ЧАСТЬ 2: СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА РЕШЕТЧАТОГО КРЫЛА . .	97
Глава 5. Общие уравнения напряженно-деформированного состояния полипланной панели с диагональной решеткой	99
5.1. Физическая модель полипланного крыла	99
5.2. Соотношения упругости для эквивалентной панели	104
5.3. Вариационные уравнения. Граничные условия	110
5.4. Линейные уравнения в перемещениях	115
5.5. Уравнения устойчивости и колебаний полипланной системы	119
Глава 6. Анализ напряженного состояния плоской полипланной панели . .	122
6.1. Классификация плоских напряженных состояний тонкостенной полипланной панели	122
6.2. Безмоментное плоское напряженно-деформированное состояние	125
6.3. Моментное плоское напряженное состояние	137
6.4. Напряженное состояние решетчатой панели типа пограничного слоя	140
6.5. Колебания и устойчивость решетчатой панели в своей плоскости	142
6.6. Изгиб удлиненной полипланной панели из своей плоскости	147
Глава 7. Прочность и устойчивость решетчатых крыльев	150
7.1. Анализ расчетной схемы решетчатого крыла	150
7.2. Расчет плоского напряженного состояния крыла	154
7.3. Расчет решетчатого крыла на изгиб из своей плоскости	160
7.4. Местная устойчивость плана	163
7.5. Расчет крыла на общую устойчивость	167
7.6. Расчет усилий в цилиндрическом решетчатом крыле	168
7.7. Плоское напряженное состояние решетчатого крыла с переменным шагом по размаху	175
ЧАСТЬ 3. КОНСТРУКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ, ТЕХНОЛОГИЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ИСПЫТАНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ КРЫЛЬЕВ	181
Глава 8. Методика выбора оптимальных конструкционных материалов для решетчатых крыльев различного назначения	183
8.1. Анализ критериев удельной прочности и жесткости материалов	183
8.2. Метод расчета предела прочности промышленных сплавов в функции температуры	184

	<i>Стр.</i>
8.3. Метод расчета модуля упругости промышленных сплавов в функции температуры	190
8.4. Статистическая оценка точности методов расчета σ_b и E в функции температуры	195
8.5. Методика количественной оценки эффективности конструкционных материалов для решетчатых крыльев	199
8.6. Данные для выбора оптимальных конструкционных материалов	206
Глава 9. Типовая технология изготовления решетчатых крыльев	210
9.1. Выбор рационального метода изготовления решетчатых крыльев	210
9.2. Методика разработки и принципиальная схема типовой технологии изготовления решетчатых крыльев	216
9.3. Уравнение состояния производства решетчатых крыльев при выбранной схеме технологического процесса	223
9.4. Методика расчета паяных соединений на прочность с учетом температуры нагрева	233
9.5. Анализ процесса нагрева решетчатых крыльев в контейнере в электропечах сопротивления	237
Глава 10. Испытания решетчатых конструкций	246
10.1. Статические испытания при действии сосредоточенной нагрузки	246
10.2. Экспериментальное исследование изгибных форм плоского напряженно-деформированного состояния крыла	248
10.3. Исследование крыла на изгиб методом муаров	250
10.4. Статические испытания на прочность при распределенной нагрузке	255
10.5. Испытания решетчатых крыльев в гидравлическом канале	256
10.6. Испытание решетчатых крыльев в горячей выходной струе газотурбинного двигателя	257
10.7. Испытание решетчатых конструкций в сверхзвуковой струе газов жидкостно-реактивного двигателя	260
10.8. Испытания решетчатых крыльев и паяных соединений в условиях вибрации	264
ЧАСТЬ 4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕТЧАТЫХ КРЫЛЬЕВ	267
Глава 11. Особенности, связанные с аэродинамикой крыла	269
11.1. Зависимость аэродинамических характеристик от числа M_∞ и геометрических параметров	269
11.2. Аэродинамические характеристики решетчатых крыльев на больших углах атаки	274
11.3. Основные нестационарные аэродинамические характеристики решетчатых крыльев	282
11.4. Основные особенности работы решетчатого крыла в присутствии корпуса	287
Глава 12. Весовые и конструктивно-технологические особенности решетчатых крыльев	295
12.1. Сопоставление весовых характеристик решетчатых и монопланых крыльев	295
12.2. Некоторые модификации силовых схем решетчатых крыльев	299
12.3. Особенности создания полых решетчатых крыльев	303
12.4. Возможности создания охлаждаемых решетчатых крыльев	306
12.5. Влияние методов изготовления на массу решетчатых крыльев	308
12.6. Зависимость методов изготовления от габаритных размеров крыла	312
Список литературы	315

**Сергей Михайлович Белоцерковский,
Леонид Александрович Одновол,
Юсуф Зиганшевич Сафин,
Аркадий Иванович Тюленев,
Виктор Петрович Фролов,
Виталий Алексеевич Шитов**

РЕШЕТЧАТЫЕ КРЫЛЬЯ

Редактор *Н. В. Корженевская*
Художественный редактор *В. В. Лебедев*
Переплет художника *А. Н. Ковалева*
Технический редактор *Н. Н. Скотникова*
Корректор *А. А. Снастина*

ИБ № 4662

Сдано в набор 13.05.85. Подписано в печать 18.11.85. Т-18798.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл.-печ. л. 20. Усл. кр.-отт. 20. Уч.-изд. л. 20,44.
Тираж 3930 экз. Заказ 1562. Цена 1 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение»,
107076, Москва, Стромынский пер., 4.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.

